ÖZEL İKİ TAMSAYI DİZİSİ VE BU DİZİLERİN PELL VE BALANS SAYILARI İLE OLAN İLİŞKİSİ

Arzu AKIN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZEL İKİ TAMSAYI DİZİSİ VE BU DİZİLERİN PELL VE BALANS SAYILARI İLE OLAN İLİŞKİSİ

Arzu AKIN

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Arzu AKIN tarafından hazırlanan "ÖZEL İKİ TAMSAYI DİZİSİ VE BU DİZİLERİN PELL VE BALANS SAYILARI İLE OLAN İLİŞKİSİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan : Prof. Dr. Osman BİZİM
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN
Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM

Enstitü Müdürü

4../ 2../ 2019

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11/ 01 / 2019

Arzu AKIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖZEL İKİ TAMSAYI DİZİSİ VE BU DİZİLERİN PELL VE BALANS SAYILARI İLE OLAN İLİŞKİSİ

Arzu AKIN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada özel iki a_n ve W_n tamsayı dizisi tanımlanmış ve bu dizilere ait bazı cebirsel sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca a_n tamsayı dizisinin daha önceden bilinen Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Tezin birinci bölümünde, tezin daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan tamsayı dizileri ile ilgili bazı temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, Pell sayılarının ilk $4n+1$ teriminin toplamının tam kare olması sonucundan yola çıkılarak tanımlanan a_n tamsayı dizisi ele alınmış ve bu dizi ile ilgili bazı cebirsel sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu dizinin Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Tezin son bölümünde ise $k \geq 2$ tamsayısı için $x^2-(k^2-2)y^2=1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri farklı bir yoldan elde edilmiş ve bu Pell denklemine bağlı olarak tanımlanan W_n tamsayı dizisi ile ilgili bazı cebirsel sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tamsayı dizisi, Pell ve balans sayıları, Pell denklemleri
2019, vi + 49 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

TWO SPECIAL INTEGER SEQUENCES AND THEIR RELATIONSHIP WITH PELL AND BALANCING NUMBERS

Arzu AKIN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this work, two special integer sequences a_n and W_n are defined and some algebraic relations on them are derived. Furthermore, the relationship between a_n and Pell, Pell-Lucas also balancing numbers are studied.

In the first section, some preliminary notations, definitions and theorems related to integer sequences which are to be used in later sections are given.

In the second section, the integer sequence a_n which derived from the sum of first non-zero $4n+1$ terms of Pell numbers is defined and obtained some algebraic relations on it. Later its relationship with Pell, Pell-Lucas and balancing numbers is considered.

In the last section, all positive integer solutions of the Pell equation $x^2-(k^2-2)y^2=1$ for an integer $k\geq 2$ is obtained by a different method and defined a new integer sequence W_n derived from this Pell equation and obtained some algebraic relations on it.

Key words: Integer sequences, Pell and balancing numbers, Pell equations.
2019, vi + 49 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın her aşamasında bilgisiyle beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsüyle her zaman yanımda olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ahmet TEKCAN'a, teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca bana her türlü manevi desteği veren aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Arzu AKIN
11 / 01 / 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
B_n	n. balans sayısı
b_n	n. cobalans sayısı
C_n	n. Lucas-balans sayısı
c_n	n. Lucas-cobalans sayısı
a_n	n. a_n sayısı
W_n	n. W_n sayısı
(a,b)	a ve b sayılarının obebi
(x_1, y_1)	temel çözüm
(x_n, y_n)	pozitif tamsayı çözümler
$[a_0;\overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, a_l}]$	basit sürekli kesirli devirli açılım

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Tezin bu bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilecektir.

1.1. Tamsayı Dizileri.

Tamsayı dizileri içerisinde en bilineni-meşhuru Fibonacci tamsayı dizisidir. Bu tamsayı dizisinin terimleri

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \cdots$$

şeklindedir. Bu tamsayı dizisi ve altın oran sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Altın oran, Fibonacci tamsayı dizisinin ardışık terimlerinin oranı olan

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots$$

sayısıdır. Bu sayı tarih boyunca matematikçilerin ilgisini çekmiş ve birçok matematikçi tarafından araştırmaya konu olmuştur. Altın oran tarihte oyun kartlarından piramitlerin yapımına kadar birçok alanda kullanılmış ve doğada birçok varlıkta gözlemlenmiştir. Diziye adını veren Leonardo Fibonacci (1170-1250) orta çağda yaşamış olan ünlü bir matematikçidir. Fibonacci 1202 yılında Liber Abaci-The Book of Calculation isimli bir kitap yazmış, bu kitapta Fibonacci sayılarına ve altın orana yer vermiştir.

Fibonacci tamsayı dizisi F_n ile gösterilirse, dizinin başlangıç terimleri $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dir. Fibonacci tamsayı dizisinin katsayılar (companion) matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $n \geq 1$ için

$$M^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir. Bu son eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa Cassini özdeşliği olarak bilinen

$$F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$$

bağıntısı elde edilir.

Fibonacci sayı dizisine benzer diğer önemli bir tamsayı dizisi de Lucas tamsayı dizisidir. Bu tamsayı dizisi de Eduard Lucas (1842-1891) tarafından tanımlanmıştır. Bu tamsayı dizisinin terimleri

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ \cdots$$

dir. Bu tamsayı dizisi L_n ile gösterilirse, dizinin başlangıç terimleri $L_0=2$ ve $L_1=1$ olup genel terimi $n\geq 2$ için

$$L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$$

dir. Fibonacci ve Lucas tamsayı dizileri arasında birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan en önemlisi $n\geq 1$ için

$$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$$

dir. Fibonacci ve Lucas tamsayı dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^2-x-1=0$$

olup bu denklemin kökleri

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Burada dikkat edilirse x_1, altın orana karşılık gelen köktür. Bu kökler yardımıyla bu tamsayı dizilerinin Binet formülleri $n\geq 1$ için sırasıyla

$$F_n=\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2} \quad \text{ve} \quad L_n=x_1^n+x_2^n$$

dir.

Bu tamsayı dizilerinden başka önemli bir tamsayı dizisi de Pell (John Pell 1611–1685) tamsayı dizisidir. Bu tamsayı dizisinin terimleri

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ 985,\ \cdots$$

dir. Bu tamsayı dizisi P_n ile gösterilirse, dizinin başlangıç terimleri $P_0=0$ ve $P_1=1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

dir. Pell tamsayı dizisinden başka önemli bir tamsayı dizisi de Pell-Lucas tamsayı dizisidir. Bu tamsayı dizisinin terimleri de

$$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, \cdots$$

dir. Bu tamsayı dizisi Q_n ile gösterilirse, dizinin başlangıç terimleri $Q_0 = Q_1 = 2$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

dir. Bu son iki tamsayı dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \quad \text{ve} \quad \beta = 1 - \sqrt{2}$$

dır. Bu diziler için Binet formülleri ise $n \geq 1$ için

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

Yukarıda bahsedilen bu dört tamsayı dizisi, $p^2 - 4q \neq 0$ özelliğindeki sıfırdan farklı p ve q tamsayıları için, başlangıç değerleri $U_0 = 0, U_1 = 1$, $V_0 = 2, V_1 = p$ ve genel terimleri $n \geq 2$ için

$$U_n = U_n(p,q) = pU_{n-1} - qU_{n-2}$$

ve

$$V_n = V_n(p,q) = pV_{n-1} - qV_{n-2}$$

olarak tanımlanan U_n ve V_n tamsayı dizilerinde p ve q nun özel tamsayı değerleridir. Gerçekten de

$$U_n = U_n(1, -1) = F_n, \; V_n = V_n(1, -1) = L_n$$

iken

$$U_n = U_n(2, -1) = P_n \quad \text{ve} \quad V_n = V_n(2, -1) = Q_n$$

dir.

U_n ve V_n tamsayı dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^2 - px + q = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

dir. Bu dizilerin Binet formülleri ise $n \geq 1$ için

$$U_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \text{ve} \quad V_n = x_1^n + x_2^n$$

dir. Bu dizilerinin katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir (Koshy 2001, Ribenboim 2000, Ogilvy ve Anderson 1988).

1.2. Pell Denklemleri ve Balans Sayıları.

d pozitif tam kare olmayan bir tamsayı ve n sıfırdan farklı herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm n \tag{1.1}$$

denklemine Pell (John Pell 1611-1676) denklemi denir. $x^2 - dy^2 = n$ denklemine pozitif Pell denklemi, $x^2 - dy^2 = -n$ denklemine ise negatif Pell denklemi denir. Eğer (x_n, y_n), $x^2 - dy^2 = \pm n$ Pell denklemin pozitif bir tamsayı çözümü ise simetriden dolayı

$$(-x_n, -y_n), (x_n, -y_n) \text{ ve } (-x_n, y_n)$$

de bu denklemin birer tamsayı çözümü olur. Ancak genel olarak Pell denklemlerinin pozitif tamsayı çözümleri dikkate alınır (Barbeau 2003, Flath 1989, Mollin 2008).

(1.1) deki denklemde özel olarak $n = 1$ alınırsa

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

denklemi elde edilir ki bu denkleme klasik Pell denklemi denir. Yukarıdaki Pell denkleminde olduğu gibi burada da $x^2 - dy^2 = 1$ denklemine klasik pozitif Pell denklemi, $x^2 - dy^2 = -1$ denklemine ise klasik negatif Pell denklemi denir.

$x^2 - dy^2 = 1$ klasik pozitif Pell denklemine dikkat edilirse her d için $(1,0)$ bu denklemin bir tamsayı çözümüdür. Bu tamsayı çözümüne aşikar çözüm denir. $x^2 - dy^2 = \pm 1$ klasik Pell denklemini gerçekleyen en küçük pozitif (x_1, y_1) tamsayı çözümüne denklemin temel çözümü denir ki denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri bu temel çözüm yardımıyla elde edilir. $x^2 - dy^2 = 1$ klasik pozitif Pell denkleminin her d için temel çözümü varken, $x^2 - dy^2 = -1$ klasik negatif Pell denkleminin her d için temel çözümü yoktur.

Teorem 1.2.1. $\sqrt{d}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımı

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, a_l}]$$

olsun. $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, B_{-2} = 1, B_{-1} = 0$ olmak üzere

$$A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2} \text{ ve } B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}$$

tamsayı dizileri tanımlansın. Bu takdirde

(i) $x^2 - dy^2 = 1$ klasik pozitif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (A_{l-1}, B_{l-1}) & l \text{ çift iken} \\ (A_{2l-1}, B_{2l-1}) & l \text{ tek iken} \end{cases}$$

dir.

(ii) $x^2 - dy^2 = -1$ klasik negatif Pell denkleminin temel çözümü l çift iken yoktur, l tek iken bu denklemin temel çözümü $(x_1, y_1) = (A_{l-1}, B_{l-1})$ dir (Mollin 2008).

Örneğin, $x^2 - 7y^2 = \pm 1$ klasik Pell denklemi için $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ olup $l = 4$ dür. Buna göre

$$A_0 = 2,\ A_1 = 3,\ A_2 = 5,\ A_3 = 8 \text{ ve } B_0 = 1,\ B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 3$$

olduğundan $x^2-7y^2=1$ klasik pozitif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1,y_1)=(A_3,B_3)=(8,3)$$

dür. l çift olduğundan $x^2-7y^2=-1$ klasik negatif Pell denkleminin temel çözümü yoktur.

$x^2-dy^2=\pm 1$ klasik Pell denklemin temel çözümü belirlendikten sonra, denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Teorem 1.2.2. (x_1,y_1), $x^2-dy^2=1$ klasik pozitif Pell denkleminin temel çözümü ise, denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n\geq 1$ için

$$x_n+\sqrt{d}\,y_n=(x_1+\sqrt{d}\,y_1)^n$$

olmak üzere (x_n,y_n) dir. $(x_1,y_1), x^2-dy^2=-1$ klasik negatif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n\geq 1$ için

$$x_{2n-1}+\sqrt{d}\,y_{2n-1}=(x_1+\sqrt{d}\,y_1)^{2n-1}$$

olmak üzere (x_{2n-1},y_{2n-1}) dir (Mollin 2008).

Örneğin yukarıda $x^2-7y^2=1$ klasik pozitif Pell denkleminin temel çözümünün

$$(x_1,y_1)=(8,3)$$

olduğu görüldü. Dolayısıyla denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n\geq 1$ için

$$x_n+\sqrt{7}y_n=(8+3\sqrt{7})^n$$

olmak üzere (x_n,y_n) dir. Buna göre denklemin ilk birkaç tamsayı çözümü

$$(x_1,y_1)=(8,3),\ (x_2,y_2)=(127,48),\ (x_3,y_3)=(2024,765)$$
$$(x_4,y_4)=(32257,12192),\ (x_5,y_5)=(514088,194307),\ \cdots$$

dir.

Teorem 1.2.2 de $x^2-dy^2=\pm 1$ klasik Pell denkleminin tamsayı çözümleri binom açılımı yardımıyla verildi. Bu teoremden farklı olarak bu denklemin tamsayı çözümleri matrisler yardımıyla da aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 1.2.3. $x^2 - dy^2 = 1$ klasik pozitif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri (x_n, y_n) dir. Eğer $x^2 - dy^2 = -1$ klasik negatif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklemin tüm tamsayı çözümleri (x_{2n-1}, y_{2n-1}) dir (Mollin 2008).

Son zamanlarda yukarıda bahsedilen tamsayı dizilerinden başka önemli bir tamsayı dizisi de balans tamsayı dizisidir. Bu tamsayı dizisi ilk olarak Behera ve Panda (1999) tarafından birinci dereceden

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{1.2}$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri elde edilirken ortaya çıkmıştır. (1.2) eşitliğini gerçekleyen pozitif *n* tamsayısına balans sayısı, eşitlikteki pozitif *r* tamsayısına ise balans sayısının dengeleyicisi (balancer) denir. Örneğin 6, 35, 204 birer balans sayısı iken bu balans sayılarının dengeleyicileri sırasıyla 2, 14, 84 dür.

(1.2) eşitliği *n* ve *r* ye göre çözülürse

$$n = \frac{2r + 1 + \sqrt{8r^2 + 8r + 1}}{2} \quad \text{ve} \quad r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 1}}{2} \tag{1.3}$$

olduğu görülür. Buna göre (1.3) den

"n bir balans sayısı $\Leftrightarrow 8n^2 + 1$ bir tam kare"

olduğu görülür.

Balans sayıları her ne kadar 2 den büyük ve eşit olmak zorunda olsa da $8(0)^2 + 1$ ve $8(1)^2 + 1$ birer tam kare olduğundan 0 ve 1 de birer balans sayısı olarak kabul edilir. Balans sayıları B_n ile gösterilirse bu sayıların başlangıç terimleri $B_0 = 0, B_1 = 1, B_2 = 6$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

dir. B_n bir balans sayısı iken $8B_n^2 + 1$ bir tam kare olduğundan $\sqrt{8B_n^2 + 1}$ bir tamsayı olup bu tamsayıya Lucas-balans sayısı denir ve C_n ile gösterilir. O halde

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

dir. Örneğin, 3, 17, 99 birer Lucas-balans sayısıdır. Bu sayı dizisinin başlangıç terimleri $C_0 = 1$, $C_1 = 3$, $C_2 = 17$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

dir.

Panda ve Ray (2005) ise, cobalans sayılarını tanımlamışlardır. Buna göre

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{1.4}$$

Diophantine denklemini sağlayan pozitif n tamsayısına cobalans sayısı, eşitlikteki pozitif r tamsayısına ise cobalans sayısının dengeleyicisi (cobalancer) denir. Örneğin 2, 14, 84 birer cobalans sayısı iken bu sayıların dengeleyicileri sırasıyla 1, 6, 35 dir.

(1.4) eşitliği n ve r ye göre çözülürse

$$n = \frac{2r - 1 + \sqrt{8r^2 + 1}}{2} \quad \text{ve} \quad r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \tag{1.5}$$

elde edilir. Buna göre (1.5) den

“n bir cobalans sayısı $\Leftrightarrow 8n^2 + 8n + 1$ bir tam kare”

olduğu görülür.

Balans sayılarına benzer şekilde, cobalans sayıları da her ne kadar 1 den büyük ve eşit olmak zorunda olsa da $8(0)^2 + 8(0) + 1$ bir tam kare olduğundan 0 da bir cobalans sayısı olarak kabul edilir. Cobalans sayıları b_n ile gösterilirse bu sayıların başlangıç terimleri $b_0 = b_1 = 0, b_2 = 2$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

dir. b_n bir cobalans sayısı iken $8b_n^2 + 8b_n + 1$ bir tam kare olduğundan $\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$ bir tamsayı olup bu tamsayıya Lucas-cobalans sayısı denir ve c_n ile gösterilir. O halde

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

dir. Örneğin, 1, 7, 41 birer Lucas-cobalans sayısıdır. Bu sayı dizisinin başlangıç terimleri $c_0 = c_1 = 1, c_2 = 7$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}$$

dir. Aşağıdaki çizelgede tüm balans sayılarının ilk 10 terimi verilmiştir.

Çizelge 1.1. Tüm balans sayılarının ilk 10 terimi

n	B_n	b_n	C_n	c_n
1	1	0	3	1
2	6	2	17	7
3	35	14	99	41
4	204	84	577	239
5	1189	492	3363	1393
6	6930	2870	19601	8119
7	40391	16730	114243	47321
8	235416	97512	665857	275807
9	1372105	568344	3880899	1607521
10	7997214	3312554	22619537	9369319

Balans ve cobalans sayılarına dikkat edilirse, balans sayılarının dengeleyicilerinin birer cobalans sayısı ve benzer şekilde cobalans sayılarının dengeleyicilerinin de birer balans sayısı olduğu görülür. Balans sayılarının dengeleyicisi R_n ve cobalans sayılarının dengeleyicileri de r_n ile gösterilirse $n \geq 1$ için

$$B_n = r_{n+1} \text{ ve } R_n = b_n$$

dir. Buna göre (1.3) den

$$b_n = \frac{-(2B_n+1)+\sqrt{8B_n^2+1}}{2} \text{ ve } B_n = \frac{2b_n+1+\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}}{2}$$

dir. Şu halde balans ve cobalans sayıları arasında bir ilişki vardır.

Balans sayılarının en önemli özelliği, bu sayıların yukarıda bahsedilen Pell sayıları ile olan ilişkisidir. Bu ilişki ilk olarak Ray (2009) tarafından ortaya çıkartılmıştır. Ray (2009), "x bir balans sayısı $\Leftrightarrow 8x^2+1$ bir tam kare" olduğu gerçeğini göz önüne alarak sıfırdan farklı herhangi bir y tamsayısı için

$$8x^2+1 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 8x^2 = 1$$

Pell denklemini elde etmiştir. Bu denklemin temel çözümü $(y_1, x_1) = (3, 1)$ olup denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri Teorem 1.2.2 den

$$y_n + x_n\sqrt{8} = (3+\sqrt{8})^n$$

olmak üzere (y_n, x_n) şeklindedir. Benzer şekilde

$$y_n - x_n\sqrt{8} = (3-\sqrt{8})^n$$

olup bu son iki eşitlikten

$$x_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}} \tag{1.6}$$

elde edilir ki bu balans sayıları için Binet formülüdür. Diğer yandan Pell sayılarının karakteristik denkleminin kökleri olan $\alpha = 1+\sqrt{2}$ ve $\beta = 1-\sqrt{2}$ sayıları için

$$\alpha^2 = 3+\sqrt{8} \text{ ve } \beta^2 = 3-\sqrt{8}$$

olduğundan (1.6) eşitliği

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \tag{1.7}$$

olarak elde edilir. Böylece balans ve Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Üstelik Pell sayılarının Binet formülünün

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}} \tag{1.8}$$

olduğu dikkate alınırsa (1.7) ve (1.8) eşitliklerinden balans sayılarının genel teriminin

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde cobalans, Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının Binet formülleri ise $n \geq 1$ için

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \text{ ve } c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

olup genel terimleri $n \geq 1$ için

$$b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2},\quad C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \text{ ve } c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

şeklindedir (Panda 2007, Panda 2009, Panda ve Ray 2011).

2. a_n TAMSAYI DİZİSİ

Bu kısımda özel bir tamsayı dizisi tanımlanacak ve bu tamsayı dizisinin Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları ile olan ilişkisinden bahsedilecektir. Ayrıca bu tamsayı dizisi ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar verilecektir.

2.1 a_n Tamsayı Dizisi ile İlgili Cebirsel Bağıntılar.

Bu alt bölümde ilk olarak Pell sayıların toplamlarına bağlı olarak elde edilen özel bir tamsayı dizisi tanımlanacak ve bu tamsayı dizisinin Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları ile olan ilişkisinden bahsedilecektir.

Santana ve Diaz-Barrero (2006), Pell sayılarının toplamlarını ele almışlar ve ilk $4n+1$ Pell sayısının toplamının bir tam kare, yani

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i\right]^2 \tag{2.1}$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu eşitliğin gerçeklendiğini göstermek için de özel bir tamsayı dizisi tanımlamışlardır. Bu dizinin başlangıç terimleri $a_0 = 1, a_1 = 7$ ve genel terimi $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$$

dir. Bu dizinin Binet formülü ise $n \geq 1$ için

$$a_n = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} \tag{2.2}$$

dir. Bu dizi ile ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.1.1. a_n tamsayı dizisi için

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_{n+1} - a_n - 2}{4}$$

dir. Üstelik $n \geq 2$ için tek indisli terimleri toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} = \frac{33a_{2n-1} - a_{2n-3} - 8}{32}$$

ve $n \geq 1$ için çift indisli terimleri toplamı

$$\sum_{i=0}^{n} a_{2i} = \frac{33a_{2n} - a_{2n-2} - 8}{32}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. (2.2) den dizinin Binet formülünün $a_n = \dfrac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\
&= \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} + \cdots + \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2}{4} \\
&= \frac{\frac{\alpha^{2n+1}[2(1+\sqrt{2})] + \beta^{2n+1}[2(1-\sqrt{2})]}{2} - 2}{4} \\
&= \frac{\frac{\alpha^{2n+1}(\alpha^2 - 1) + \beta^{2n+1}(\beta^2 - 1)}{2} - 2}{4} \\
&= \frac{\frac{\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3}}{2} - \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - 2}{4} \\
&= \frac{a_{n+1} - a_n - 2}{4}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

a_n tamsayı dizisinin Pell, Pell-Lucas ve tüm balans sayıları ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.2. (1) $(2n).$ ve $(2n+1).$ Pell sayılarının toplamı, $n.$ a_n sayısına eşit, yani

$$P_{2n} + P_{2n+1} = a_n$$

dir.

(2) $(n+1)$. ve n. balans sayılarının toplamı, n. a_n sayısına eşit, yani

$$B_{n+1} + B_n = a_n$$

dir.

(3) $(n+2)$. ve n. cobalans sayılarının farkının yarısı, n. a_n sayısına eşit, yani

$$\frac{b_{n+2} - b_n}{2} = a_n$$

dir.

(4) $(n+1)$. ve n. Lucas-balans sayılarının farkının yarısı, n. a_n sayısına eşit, yani

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{2} = a_n$$

dir.

(5) $(n+1)$. Lucas-cobalans sayısı, n. a_n sayısına eşit, yani

$$c_{n+1} = a_n$$

dir.

(6) $(2n+1)$. Pell-Lucas sayısının yarısı, n. a_n sayısına eşit, yani

$$\frac{Q_{2n+1}}{2} = a_n$$

dir (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. (1) a_n ve P_n nin Binet formülleri kullanılırsa kolayca görüleceği üzere

$$\begin{aligned}
P_{2n} + P_{2n+1} &= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{2n}(1+\alpha) - \beta^{2n}(1+\beta)}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{2n}\sqrt{2}(1+\sqrt{2}) - \beta^{2n}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{2n}(1+\sqrt{2}) + \beta^{2n}(1-\sqrt{2})}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} \\
&= a_n
\end{aligned}$$

dir.

(2) $\alpha^2 + 1 = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$ ve $-\beta^2 - 1 = 2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
B_{n+1}+B_n &= \frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}}+\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{2n}(\alpha^2+1)+\beta^{2n}(-\beta^2-1)}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{2n}(1+\sqrt{2})+\beta^{2n}(1-\sqrt{2})}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2} \\
&= a_n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoremden farklı olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.3. (1) $(2n+1)$. balans ve cobalans sayılarının toplamı, n. a_n sayısının karesi, yani

$$B_{2n+1}+b_{2n+1}=a_n^2$$

dir.

(2) $(2n+1)$. Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının toplamı, bir tam kare değildir, ancak yine de

$$C_{2n+1}+c_{2n+1}=4a_nP_{2n+1}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. (1) $B_n=\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$ ve $b_n=\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
B_{2n+1}+b_{2n+1} &= \frac{\alpha^{4n+2}-\beta^{4n+2}}{4\sqrt{2}}+\frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{4n}(\alpha^2+\alpha)-\beta^{4n}(\beta^2+\beta)-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{4n+2}+2(\alpha\beta)^{2n+1}+\beta^{4n+2}}{4} \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}\right)^2=a_n^2
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Diğer eşitlik te benzer şekilde gösterilebilir.

Panda ve Ray (2011), Pell sayılarının toplamını dikkate almışlar ve ilk $2n-1$ Pell sayısının toplamının *n*. balans ve *n*.cobalans sayılarının toplamına eşit, yani

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + b_n$$

olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Gözeri ve ark. (2017) ise 0 dan $2n-1$ e kadar olan Pell-Lucas sayılarının toplamının, *n*. Lucas-balans ve *n*. Lucas-cobalans sayılarının toplamına eşit, yani

$$\sum_{i=0}^{2n-1} Q_i = C_n + c_n$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu iki bağıntıya benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.4. 0 dan *n* ye kadar a_n sayılarının toplamı, $(n+1)$. balans ve cobalans sayılarının toplamına eşit, yani

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = B_{n+1} + b_{n+1}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. Teorem 2.1.1 gereği $\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_{n+1} - a_n - 2}{4}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_i &= \frac{a_{n+1} - a_n - 2}{4} \\
&= \frac{\frac{\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3}}{2} - \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - 2}{4} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}(\alpha^2 - 1) + \beta^{2n+1}(\beta^2 - 1)}{8} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}(1+\sqrt{2}) + \beta^{2n+1}(1-\sqrt{2})}{4} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2}(1+\alpha^{-1}) + \beta^{2n+2}(-1-\beta^{-1})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\
&= B_{n+1} + b_{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.4 e benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir. İspatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 2.1.5. Yukarıda tanımlanan tamsayı dizileri için

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = a_{n+1}B_n \qquad \sum_{i=1}^{2n} B_{2i} = 2a_nB_nC_nP_{2n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} = a_nB_n \qquad \sum_{i=1}^{2n} P_{2i} = 2B_na_n$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} a_{2i} = a_na_{2n+2}P_{2n+1} \qquad \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = P_{2n+1}a_n$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} a_{2i-1} = a_na_{2n+1}P_{2n+1} \qquad \sum_{i=0}^{2n} Q_i = \frac{2B_{2n+1}}{a_n}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1} = P_{2n+1}a_nB_{2n+1} \qquad \sum_{i=0}^{2n} Q_{2i} = a_n(a_n - a_{n-1})$$

dir (Akın ve Tekcan 2017).

Santana ve Diaz-Barrero (2006), Pell sayılarının ilk $4n+1$ terim toplamının

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i \right)^2$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdi. Esasında bu toplam, $n.a_n$ sayısının karesine eşit, yani

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = a_n^2$$

dir. Santana ve Diaz-Barrero (2006) nın bu a_n tamsayı dizisini tanımlamalarının sebebi budur.

Tekcan ve Tayat (2014) ise ilk $2n+1$ Pell sayılarının toplamının

$$\sum_{i=1}^{2n+1} P_i = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \right)^2 & n \geq 0 \text{ çift ise} \\ \dfrac{\left(\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}} \right)^2}{2} & n \geq 1 \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde olduğunu göstermişler ve bu eşitliği dikkate alarak

$$X_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \quad \text{ve} \quad Y_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}}$$

tamsayı dizilerini tanımlamışlar ve daha sonra ise ilk $4n+1$ Pell sayılarının toplamının bu tamsayı dizilerine bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = [2X_n^2 - 2X_n Y_{n-1} + (-1)^{n+1}]^2$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir. Bu bağıntıya benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.6. (1) 0 dan 2*n* ye kadar a_n sayılarının toplamı bir tam kare ve

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i = a_n^2$$

dir.

(2) 0 dan 2*n* ye kadar olan tek indisli Pell-Lucas sayılarının toplamının yarısı bir tam kare ve

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = a_n^2$$

dir.

(3) $n \geq 1$ tek olmak üzere 1 den *n* ye kadar a_n sayılarının toplamının 2 fazlası bir tam kare ve

$$2 + \sum_{i=1}^{n} a_i = C_{\frac{n+1}{2}}^2$$

dir. $n \geq 2$ çift olmak üzere 1 den *n* ye kadar a_n sayılarının toplamının 1 fazlası bir tam kare ve

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = c_{\frac{n+2}{2}}^2$$

dır (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. (1) a_n dizisi için $\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_{n+1} - a_n - 2}{4}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i = \frac{a_{2n+1} - a_{2n} - 2}{4}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha^{4n+3}+\beta^{4n+3}}{2} - \dfrac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{2} - 2}{4}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha^{4n+1}(\alpha^2-1)+\beta^{4n+1}(\beta^2-1)}{2} - 2}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+1}(1+\sqrt{2})+\beta^{4n+1}(1-\sqrt{2})-2}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}-2}{4}$$

$$= a_n^2$$

olduğu görülür. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Santana ve Diaz Barrero (2006), Pell sayılarının ilk $4n+1$ terim toplamının tam kare olmasından farklı olarak, P_{2n+1} Pell sayısının, 0 dan $(2n)$ ye kadar $(2i+1)$. Pell sayılarının toplamını ve P_{2n} Pell sayısının da 1 den $(2n)$ ye kadar $(2i-1)$. Pell sayılarının toplamını böldüğünü, yani

$$P_{2n+1} \left| \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \right. \quad \text{ve} \quad P_{2n} \left| \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} \right.$$

olduğunu göstermişlerdir. Esasında yukarıdaki toplamlar

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = P_{2n+1}(P_{2n}+P_{2n+1}) \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} = P_{2n}(P_{2n}+P_{2n-1})$$

şeklindedir. Diğer yandan

$$P_{2n}+P_{2n+1} = a_n \quad \text{ve} \quad P_{2n}+P_{2n-1} = C_n$$

olduğundan

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = P_{2n+1}a_n \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} = P_{2n}C_n$$

dir. Buna göre

$$a_n \left| \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \right. \quad \text{ve} \quad C_n \left| \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} \right.$$

dir.

Teorem 2.1.7. Yukarıda tanımlanan tamsayı dizileri için

$$a_n\left|\sum_{i=0}^{2n}a_i\right.\quad a_n\left|\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}\right.\quad a_n\left|\sum_{i=1}^{2n+1}a_{2i}\right.\quad a_n\left|\sum_{i=1}^{2n+1}a_{2i-1}\right.\quad a_n\left|\sum_{i=1}^{2n}B_{2i}\right.\quad a_n\left|\sum_{i=0}^{2n}B_{2i+1}\right.\quad a_n\left|\sum_{i=0}^{2n}Q_{2i}\right.$$

$$a_n\left|\sum_{i=1}^{2n}P_{2i}\right.\quad a_n\left|\sum_{i=0}^{2n}P_{2i+1}\right.\quad a_{n+1}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{2i}\right.\quad a_{2n+2}\left|\sum_{i=1}^{2n+1}a_{2i}\right.\quad a_{2n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n+1}a_{2i-1}\right.\quad C_n\left|\sum_{i=1}^{2n}B_{2i}\right.\quad B_n\left|\sum_{i=1}^{n}a_{2i}\right.$$

$$B_n\left|\sum_{i=1}^{n}a_{2i-1}\right.\quad B_n\left|\sum_{i=1}^{2n}B_{2i}\right.\quad B_n\left|\sum_{i=1}^{2n}P_{2i}\right.\quad B_{2n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n}B_{2i+1}\right.\quad B_{2n+1}\left|\sum_{i=0}^{2n}Q_{i}\right.\quad P_{2n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n+1}a_{2i}\right.\quad P_{2n+1}\left|\sum_{i=1}^{2n+1}a_{2i-1}\right.$$

dir (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. Teorem 2.1.5 ve Teorem 2.1.6 dan görülür.

Teorem 2.1.8. (1) $1+8B_{n+1}^2$ bir tam kare ve $\sqrt{1+8B_{n+1}^2}=2a_n+C_n$ dir.

(2) $P_{2n+1}^2+P_{2n}P_{2n+2}$ bir tam kare ve $\sqrt{P_{2n+1}^2+P_{2n}P_{2n+2}}=a_n$ dir.

(3) $B_{2n+1}^2+4a_n^2B_nB_{n+1}$ bir tam kare ve $\sqrt{B_{2n+1}^2+4a_n^2B_nB_{n+1}}=a_n^2$ dir.

İspat. (1) $2\alpha+1=\alpha^2$ ve $2\beta+1=\beta^2$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+8B_{n+1}^2} &= \sqrt{1+8\left(\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}}\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{\alpha^{4n+4}+\beta^{4n+4}+2}{2}}\\
&= \frac{\alpha^{2n}(2\alpha+1)+\beta^{2n}(2\beta+1)}{2}\\
&= 2\left(\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}\right)+\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}\\
&= 2a_n+C_n
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

2.2 a_n Tamsayı Dizisinin Circulant Matrisi ve Spektral Normu.

Bu alt bölümde ise a_n tamsayı dizisinin terimleri ile elde edilen circulant matrisin öz-değerleri ve bu circulant matrisin spektral normu ele alınacaktır.

m_i ler reel sayılar olmak üzere

$$M = \begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{n-2} & m_{n-1} \\ m_{n-1} & m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-3} & m_{n-2} \\ m_{n-2} & m_{n-1} & m_0 & \cdots & m_{n-4} & m_{n-3} \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_0 & m_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n-1} & m_0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrislere circulant (döngüsel) matris denir. $i=\sqrt{-1}$ ve $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olmak üzere $j=0,1,\cdots,n-1$ için M matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j(M)=\sum_{u=0}^{n-1} m_u w^{-ju}$$

dır. $Q=[q_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin eşlenik transpozu Q^* ile gösterilirse, Q^*Q matrisinin özdeğerleri λ_j olmak üzere Q matrisinin spektral normu

$$\|Q\|_{spec} = \max_{0\le j\le n-1}\{\sqrt{\lambda_j}\}$$

olarak tanımlanır. a_n dizisinin terimleri ile oluşturulan

$$a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

circulant matrisinin özdeğerleri ve spektral normu için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2.1. $j=0,1,\cdots,n-1$ için a circulant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j(a)=\frac{(a_{n-1}+1)w^{-j}+1-a_n}{w^{-2j}-6w^{-j}+1}$$

ve spektral normu $\|a\|_{spec}=\dfrac{a_n-a_{n-1}-2}{4}$ dür (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. $a_n = \dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}$, $\alpha\beta = -1$, $\dfrac{-\alpha\beta^2-\beta\alpha^2}{2} = 1$ ve $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 1$ olduğu dikkate alınırsa a nın özdeğerleri

$$
\begin{aligned}
\lambda_j(a) &= \sum_{u=0}^{n-1} a_u w^{-ju} \\
&= \sum_{u=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha^{2u+1}+\beta^{2u+1}}{2}\right) w^{-ju} \\
&= \frac{1}{2}\left[\alpha\sum_{u=0}^{n-1}(\alpha^2 w^{-j})^u + \beta\sum_{u=0}^{n-1}(\beta^2 w^{-j})^u\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\alpha\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^2 w^{-j}-1} + \beta\frac{\beta^{2n}-1}{\beta^2 w^{-j}-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha^{2n+1}-\alpha)(\beta^2 w^{-j}-1)+(\beta^{2n+1}-\beta)(\alpha^2 w^{-j}-1)}{(\alpha^2 w^{-j}-1)(\beta^2 w^{-j}-1)}\right] \\
&= \frac{w^{-j}\left[(\alpha\beta)^2\left(\dfrac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2}\right)+\dfrac{-\alpha\beta^2-\beta\alpha^2}{2}\right]+\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}}{w^{-2j}-6w^{-j}+1} \\
&= \frac{(a_{n-1}+1)w^{-j}+1-a_n}{w^{-2j}-6w^{-j}+1}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= a_0^2 + a_{n-1}^2 + \cdots + a_2^2 + a_1^2 \\
a_{12} &= a_0 a_1 + a_{n-1}a_0 + \cdots + a_2 a_3 + a_1 a_2 \\
&\cdots \\
a_{1(n-1)} &= a_0 a_{n-2} + a_{n-1}a_{n-3} + \cdots + a_2 a_0 + a_1 a_{n-1} \\
a_{1n} &= a_0 a_{n-1} + a_{n-1}a_{n-2} + \cdots + a_2 a_1 + a_1 a_0 \\
a_{21} &= a_1 a_0 + a_0 a_{n-1} + \cdots + a_3 a_2 + a_2 a_1 \\
a_{22} &= a_1^2 + a_0^2 + \cdots + a_3^2 + a_2^2 \\
&\cdots \\
a_{2(n-1)} &= a_1 a_{n-2} + a_0 a_{n-3} + \cdots + a_3 a_0 + a_2 a_{n-1} \\
a_{2n} &= a_1 a_{n-1} + a_0 a_{n-2} + \cdots + a_3 a_1 + a_2 a_0 \\
&\cdots \\
a_{n1} &= a_{n-1}a_0 + a_{n-2}a_{n-1} + \cdots + a_1 a_2 + a_0 a_1 \\
a_{n2} &= a_{n-1}a_1 + a_{n-2}a_0 + \cdots + a_1 a_3 + a_0 a_2 \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

$$a_{n(n-1)} = a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-2}a_{n-3} + \cdots + a_1 a_0 + a_0 a_{n-1}$$
$$a_{nn} = a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + \cdots + a_1^2 + a_0^2$$

olmak üzere

$$(a)^* a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ olup λ_0 maksimumdur ve

$$\lambda_0 = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + 2\begin{bmatrix} a_0(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}) \\ + a_1(a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}) \\ + \cdots \\ + a_{n-2}a_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})^2$$

dir. Buna göre *a* circulant matrisinin spektral normu

$$\|a\|_{spec} = \sqrt{\lambda_0} = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

dır. Diğer yandan Teorem 2.1.1 gereği $\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_{n+1} - a_n - 2}{4}$ olduğundan a nın spektral normu

$$\|a\|_{spec} = \frac{a_n - a_{n-1} - 2}{4}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.2.2. $n = 5$ için a_n sayılarının circulant matrisi

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 41 & 239 & 1393 \\ 1393 & 1 & 7 & 41 & 239 \\ 239 & 1393 & 1 & 7 & 41 \\ 41 & 239 & 1393 & 1 & 7 \\ 7 & 41 & 239 & 1393 & 1 \end{bmatrix}$$

olup

$$a^*a = \begin{bmatrix} 1999301 & 344413 & 68817 & 68817 & 344413 \\ 344413 & 1999301 & 344413 & 68817 & 68817 \\ 68817 & 344413 & 1999301 & 344413 & 68817 \\ 68817 & 68817 & 344413 & 1999301 & 344413 \\ 344413 & 68817 & 68817 & 344413 & 1999301 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_0 = 2825761, \lambda_1 = 1792686 + 137798\sqrt{5},$$
$$\lambda_2 = 1792686 - 137798\sqrt{5}, \lambda_3 = \lambda_1, \lambda_4 = \lambda_2$$

dir. Buna göre a nın spektral normu $\|a\|_{spec} = \sqrt{\lambda_0} = 1681$ dir. $\frac{a_5 - a_4 - 2}{4} = 1681$ olduğundan $\|a\|_{spec} = \frac{a_5 - a_4 - 2}{4} = 1681$ dir.

Teorem 2.2.1 den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.3. *a* nın spektral normu bir tam kare ve

$$\|a\|_{spec} = \begin{cases} (a_{\frac{n-1}{2}})^2 & n \geq 1 \text{ tek ise} \\ (\sqrt{2}P_n)^2 & n \geq 2 \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017).

İspat. $k \geq 0$ tamsayısı için $n = 2k+1$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \|a\|_{spec} &= \frac{a_n - a_{n-1} - 2}{4} \\ &= \frac{\frac{\alpha^{4k+3} + \beta^{4k+3} - \alpha^{4k+1} - \beta^{4k+1}}{2} - 2}{4} \\ &= \frac{\alpha^{4k+2}(\alpha - \alpha^{-1}) + \beta^{4k+2}(\beta - \beta^{-1}) - 4}{8} \\ &= \left(\frac{\alpha^{2k+1} + \beta^{2k+1}}{2}\right)^2 \\ &= a_k^2 \\ &= a_{\frac{n-1}{2}}^2 \end{aligned}$$

dir. k nın çift olması durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

3. $x^2-(k^2-2)y^2=1$ PELL DENKLEMİ VE BU DENKLEME KARŞILIK GELEN TAMSAYI DİZİSİ

Bu bölümde ilk olarak $k\geq 2$ tamsayısı için

$$x^2-(k^2-2)y^2=1$$

Pell denklemi ele alınacak ve bu denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri, farklı bir yoldan elde edilecektir. Daha sonra bu denklem yardımıyla bir W_n tamsayı dizisi tanımlanacak ve bu tamsayı dizisi ile ilgili bazı cebirsel sonuçlar verilecektir.

3.1. $x^2-(k^2-2)y^2=1$ Pell Denklemi.

Bu alt bölümde $x^2-(k^2-2)y^2=1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri, belli bir matrisin n. kuvveti alınmak suretiyle elde edilecektir.

Tekcan (2011), bazı özel D değerleri için $x^2-Dy^2=1$ Pell denkleminin tamsayı çözümlerini, $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımını kullanarak elde etmiş ve aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.1.1. $k\geq 2$ herhangi bir tamsayı olmak üzere $D=k^2-2$ olsun. Bu takdirde

(1) $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımı

$$\sqrt{D}=\begin{cases}[1,\overline{2}] & k=2 \text{ ise}\\ [k-1;\overline{1,k-2,1,2k-2}] & k>2 \text{ ise}\end{cases}$$

dır.

(2) $(x_1,y_1)=(k^2-1,k)$ denklemin temel çözümüdür ve $n\geq 2$ için

$$\frac{x_n}{y_n}=\left[k-1;\underbrace{1,k-2,\ 1,2k-2,\cdots,1,\ k-2,\ 1,\ 2k-2}_{n-1\text{ tane}},\ 1,\ k-1\right]$$

olmak üzere denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri (x_n,y_n) dir.

(3) $n\geq 1$ olmak üzere denklemin tamsayı çözümleri

$$x_{n+1}=(k^2-1)x_n+(k^3-2k)y_n \text{ ve } y_{n+1}=kx_n+(k^2-1)y_n$$

bağıntısı gerçekler.

(4) $n\geq 4$ için denklemin (x_n, y_n) tamsayı çözümleri

$$x_n=(2k^2-3)(x_{n-1}+x_{n-2})-x_{n-3}$$
$$y_n=(2k^2-3)(y_{n-1}+y_{n-2})-y_{n-3}$$

indirgeme bağıntısını sağlar (Tekcan 2011).

Bu alt bölümde ise $x^2-(k^2-2)y^2=1$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri, farklı bir yolla elde edilecektir. Ancak bunun için ilk olarak aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 3.1.2. $k\geq 2$ tamsayısı için

$$H=\begin{bmatrix} k^2-1 & k^3-2k \\ k & k^2-1 \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlansın. $n\geq 2$ çift için

$$H_{11}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2i}(k^2-1)^{n-2i}k^i(k^3-2k)^i=H_{22}^n$$
$$H_{12}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{2i+1}(k^2-1)^{n-1-2i}k^i(k^3-2k)^{i+1}$$
$$H_{21}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{2i+1}(k^2-1)^{n-1-2i}k^{i+1}(k^3-2k)^i$$

ve $n\geq 1$ tek için

$$H_{11}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2i}(k^2-1)^{n-2i}k^i(k^3-2k)^i=H_{22}^n$$
$$H_{12}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2i+1}(k^2-1)^{n-1-2i}k^i(k^3-2k)^{i+1}$$
$$H_{21}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2i+1}(k^2-1)^{n-1-2i}k^{i+1}(k^3-2k)^i$$

olmak üzere H nın n. kuvveti $H^n=\begin{bmatrix} H_{11}^n & H_{12}^n \\ H_{21}^n & H_{22}^n \end{bmatrix}$ dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. $n=2$ olsun. Bu takdirde

$$H_{11}^2 = 2k^4 - 4k^2 + 1 \qquad H_{12}^2 = 2k^5 - 6k^3 + 4k$$
$$H_{21}^2 = 2k^3 - 2k \qquad H_{22}^2 = 2k^4 - 4k^2 + 1$$

olduğundan eşitlik $n = 2$ için doğrudur. Eşitliğin $n-2$ için gerçeklendiği kabul edilsin. Bu takdirde

$$H^2 H^{n-2} = \begin{bmatrix} (k^2-1)^2 + k(k^3-2k) & 2(k^2-1)(k^3-2k) \\ 2k(k^2-1) & (k^2-1)^2 + k(k^3-2k) \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} H_{11}^{n-2} & H_{12}^{n-2} \\ H_{21}^{n-2} & H_{22}^{n-2} \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&[(k^2-1)^2 + k(k^3-2k)]H_{11}^{n-2} + [2k(k^2-1)]H_{12}^{n-2} \\
&= [(k^2-1)^2 + k(k^3-2k)] \\
&\times \begin{bmatrix} (k^2-1)^{n-2} + \binom{n-2}{2}(k^2-1)^{n-4} k(k^3-2k) + \cdots \\ + \binom{n-2}{n-4}(k^2-1)^2 k^{\frac{n-4}{2}} (k^3-2k)^{\frac{n-4}{2}} + k^{\frac{n-2}{2}}(k^3-2k)^{\frac{n-2}{2}} \end{bmatrix} \\
&+ [2k(k^2-1)] \begin{bmatrix} \binom{n-2}{1}(k^2-1)^{n-3}(k^3-2k) \\ + \binom{n-2}{3}(k^2-1)^{n-5} k(k^3-2k)^2 + \cdots \\ + \binom{n-2}{n-5}(k^2-1)^3 k^{\frac{n-6}{2}}(k^3-2k)^{\frac{n-4}{2}} \\ + \binom{n-2}{n-3}(k^2-1) k^{\frac{n-4}{2}}(k^3-2k)^{\frac{n-2}{2}} \end{bmatrix} \\
&= (k^2-1)^n + \binom{n}{2}(k^2-1)^{n-2} k(k^3-2k) + \binom{n}{4}(k^2-1)^{n-4} k^2 (k^3-2k)^2 \\
&\quad + \cdots + \binom{n}{n-4}(k^2-1)^4 k^{\frac{n-4}{2}}(k^3-2k)^{\frac{n-4}{2}} \\
&\quad + \binom{n}{n-2}(k^2-1)^2 k^{\frac{n-2}{2}}(k^3-2k)^{\frac{n-2}{2}} + k^{\frac{n}{2}}(k^3-2k)^{\frac{n}{2}} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i}(k^2-1)^{n-2i} k^i (k^3-2k)^i \\
&= H_{11}^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$[2(k^2-1)(k^3-2k)]H_{11}^{n-2}+[(k^2-1)^2+k(k^3-2k)]H_{12}^{n-2}=H_{12}^{n}$$
$$[(k^2-1)^2+k(k^3-2k)]H_{21}^{n-2}+[2k(k^2-1)]H_{22}^{n-2}=H_{21}^{n}$$

ve

$$[2(k^2-1)(k^3-2k)]H_{21}^{n-2}+[(k^2-1)^2+k(k^3-2k)]H_{22}^{n-2}=H_{22}^{n}$$

olduğu da gösterilebilir. O halde ispat tamamlanmış olur. n nin tek olması durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teorem kullanılarak $x^2-(k^2-2)y^2=1$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.3. $k \geq 2$ tamsayısı için

$$x_n=\begin{cases}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2i}(k^2-1)^{n-2i}k^i(k^3-2k)^i & n\geq 2 \text{ çift ise}\\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2i}(k^2-1)^{n-2i}k^i(k^3-2k)^i & n\geq 1 \text{ tek ise}\end{cases}$$

ve

$$y_n=\begin{cases}\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{2i+1}(k^2-1)^{n-1-2i}k^{i+1}(k^3-2k)^i & n\geq 2 \text{ çift ise}\\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2i+1}(k^2-1)^{n-1-2i}k^{i+1}(k^3-2k)^i & n\geq 1 \text{ tek ise}\end{cases}$$

olmak üzere, $x^2-(k^2-2)y^2=1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri (x_n,y_n) dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. Teorem 3.1.2 ye benzer şekilde tümevarımla yapılabilir.

Örneğin, $k=3$ için $x^2-7y^2=1$ Pell denkleminin ilk 10 tamsayı çözümü elde edilmek istenirse, Teorem 3.1.3 gereği

$$x_n=\begin{cases}\sum_{i=0}^{5}\binom{10}{2i}8^{10-2i}3^i21^i & n\geq 2 \text{ çift ise}\\ \sum_{i=0}^{4}\binom{10}{2i}8^{10-2i}3^i21^i & n\geq 1 \text{ tek ise}\end{cases}$$

ve

$$y_n = \begin{cases} \sum_{i=0}^{4} \binom{10}{2i+1} 8^{9-2i} 3^{i+1} 21^{i} & n \geq 2 \text{ çift ise} \\ \sum_{i=0}^{4} \binom{10}{2i+1} 8^{9-2i} 3^{i+1} 21^{i} & n \geq 1 \text{ tek ise} \end{cases}$$

olup $x^2 - 7y^2 = 1$ Pell denkleminin ilk 10 tamsayı çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

Çizelge 3.1. $x^2 - 7y^2 = 1$ Pell denkleminin ilk 10 tamsayı çözümü

n	x_n	y_n
1	8	3
2	127	48
3	2024	765
4	32257	12192
5	514088	194307
6	8193151	3096720
7	130576328	49353213
8	20810228097	786554688
9	331655873224	12535521795
10	5285729433487	199781794032

3.2. W_n Tamsayı Dizisi.

Bu kısımda yukarıda ele alınan $x^2 - (k^2 - 2)y^2 = 1$ Pell denklemi dikkate alınarak özel bir tamsayı dizisi tanımlanacak ve bu dizi ile ilgili bazı cebirsel sonuçlar verilecektir.

$x^2 - (k^2 - 2)y^2 = 1$ Pell denklemi göz önüne alındığında, $p = k^2 - 2$ ve $q = 1$ olmak üzere, dizinin başlangıç terimleri $W_0 = 0, W_1 = 1$ ve genel terimi $n \geq 2$ için

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}$$

olarak tanımlansın. Bu dizinin karakteristik denklemi

$$x^2 - (k^2 - 2)x + 1 = 0$$

olup $\Delta = k^4 - 4k^2$ olmak üzere kökleri

$$\alpha = \frac{k^2 - 2 + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{k^2 - 2 - \sqrt{\Delta}}{2}$$

dir. Dolayısıyla $k \neq 0, \pm 2$ olmak üzere dizinin Binet formülü $n \geq 1$ için

$$W_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir. Bu dizi ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.2.1. **(i)** $k = 0$ ise $W_n = -2W_{n-1} - W_{n-2}$ olup $W_n = (-1)^{n+1} n$ dir.

(ii) $k = \pm 1$ ise $W_n = -W_{n-1} - W_{n-2}$ olup

$$W_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ -1 & n \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ 0 & n \equiv 0 (\text{mod } 3) \end{cases}$$

dır.

(iii) $k = \pm 2$ ise $W_n = 2W_{n-1} - W_{n-2}$ olup buradan $W_n = n$ dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. Dizinin tanımından kolayca elde edilir.

Teorem 3.2.2. W_n tamsayı dizisinin ilk *n*-terim toplamı

(1) $k = 0$ için, $n \geq 2$ çift ise $\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{-n}{2}$ ve $n \geq 1$ tek ise $\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{n+1}{2}$ dir.

(2) $k = \pm 1$ için, $n \equiv 0, 2 (\text{mod } 3)$ ise $\sum_{i=1}^{n} W_i = 0$ ve $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ ise $\sum_{i=1}^{n} W_i = 1$ dir.

(3) $k = \pm 2$ için $\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{n^2 + n}{2}$ dir.

(4) $|k| \geq 2$ için $\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{W_{n+1} - W_n - 1}{k^2 - 4}$ dür (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. **(1)** $k = 0$ olsun. Bu takdirde $W_n = (-1)^{n+1} n$ olduğundan, dizinin ilk *n*-terim toplamı *n* çift iken $\frac{-n}{2}$ ve *n* tek iken $\frac{n+1}{2}$ dir.

(2) $k = \pm 1$ olsun. Bu takdirde $W_n = -W_{n-1} - W_{n-2}$ olduğundan $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ için $W_n = 1$

$n \equiv 2 (\text{mod } 3)$ için $W_n = -1$ ve $n \equiv 0 (\text{mod } 3)$ için $W_n = 0$ dir. Dolayısıyla dizinin ilk *n*-terim toplamı $n \equiv 0, 2 (\text{mod } 3)$ için 0 ve $n \equiv 1 (\text{mod } 3)$ için 1 dir.

(3) $k = \pm 2$ olsun. Bu takdirde $W_n = 2W_{n-1} - W_{n-2}$ ve böylece $W_n = n$ olduğundan dizinin ilk *n*-terim toplamı $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$ dir.

(4) $|k| \geq 2$ olsun. Bu takdirde $W_{n+2} = (k^2-3)W_{n+1} + W_{n+1} - W_n$ olduğundan

$$W_{n+2} - W_{n+1} = (k^2-3)W_{n+1} - W_n$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
W_2 - W_1 &= (k^2-3)W_1 - W_0 \\
W_3 - W_2 &= (k^2-3)W_2 - W_1 \\
W_4 - W_3 &= (k^2-3)W_3 - W_2 \\
&\cdots \\
W_{n+1} - W_n &= (k^2-3)W_n - W_{n-1} \\
W_{n+2} - W_{n+1} &= (k^2-3)W_{n+1} - W_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$W_{n+2} - W_1 = (k^2-4)(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) - W_0 + (k^2-3)W_{n+1}$$

olur. $W_0 = 0$ ve $W_1 = 1$ olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki eşitlik

$$W_{n+2} - 1 = (k^2-4)(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) + (k^2-3)W_{n+1}$$

haline gelir. Bu son eşitlikte $W_{n+2} \to (k^2-2)W_{n+1} - W_n$ olarak alınırsa

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \frac{W_{n+1} - W_n - 1}{k^2-4}$$

olduğu görülür.

Yukarıdaki teoreme benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.3. 1 den *n* ye kadar tek indisli W_n sayılarının toplamı bir tam kare ve

$$\sum_{i=1}^{n} W_{2i-1} = W_n^2$$

dir. Üstelik

$$\sum_{i=1}^{2n} W_i = W_n(W_n + W_{n+1})$$
$$\sum_{i=1}^{2n+1} W_i = W_{n+1}(W_n + W_{n+1})$$
$$\sum_{i=1}^{n} W_{2i} = W_n W_{n+1}$$
$$\sum_{i=1}^{2n} (W_i + W_{i+1}) = W_{n+1}(W_{n+1} + 2W_n + W_{n-1})$$
$$\sum_{i=1}^{2n+1} (W_i + W_{i+1}) = (W_n + W_{n+1})(W_{n+1} + W_{n+2})$$
$$\sum_{i=0}^{2n} (W_{2i+1} + W_{2i+2}) = W_{2n+1}(W_{2n+1} + W_{2n+2})$$

dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. Teorem 3.2.2 ye benzer şekilde yapılabilir.

1876 yılında Fransız matematikçi François Edouard Anatole Lucas, Fibonacci sayılarının genel teriminin

$$F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-1-i}{i}$$

şeklinde ve benzer şekilde Lucas sayılarının genel teriminin de

$$L_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[\binom{n-i}{i} + \binom{n-1-i}{i-1} \right]$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Bu iki bağıntıya benzer şekilde W_n sayılarının genel terimi için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4. $n \geq 1$ olmak üzere W_n sayılarının genel terimi

$$W_n = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2) \rfloor} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} (k^2 - 2)^{n-1-2i}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. Tümevarımla gösterilebilir.

Dizinin terimleri arasında aşağıdaki gibi indirgeme bağıntıları vardır.

Teorem 3.2.5. (1) $k=0,\pm 2$ ise $W_{2n}=2W_{2n-2}-W_{2n-4}$ ve $W_{2n+1}=2W_{2n-1}-W_{2n-3}$ dür.

(2) $k=\pm 1$ ise $W_{2n}=-W_{2n-2}-W_{2n-4}$ ve $W_{2n+1}=-W_{2n-1}-W_{2n-3}$ dür.

(3) $|k|>2$ ise $W_{2n}=(k^4-4k^2+2)W_{2n-2}-W_{2n-4}$ ve $W_{2n+1}=(k^4-4k^2+2)W_{2n-1}-W_{2n-3}$ dür (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. Burada sadece (3) ün ispatı verilecektir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir. $|k|>2$ için $W_{2n}=(k^2-2)W_{2n-2}-W_{2n-4}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= (k^2-2)[(k^2-2)W_{2n-2}-W_{2n-3}]-W_{2n-2}\\
&= W_{2n-2}(k^4-4k^2+3)-(k^2-2)[(k^2-2)W_{2n-4}-W_{2n-5}]\\
&= W_{2n-2}(k^4-4k^2+3)-(k^2-2)^2W_{2n-4}+(k^2-2)W_{2n-5}\\
&= W_{2n-2}(k^4-4k^2+2)+(k^2-2)[(k^2-2)W_{2n-4}-W_{2n-5}]\\
&\quad +W_{2n-4}[-1-(k^2-2)^2]+(k^2-2)W_{2n-5}\\
&= W_{2n-2}(k^4-4k^2+2)+(k^2-2)^2W_{2n-4}-(k^2-2)W_{2n-5}\\
&\quad +W_{2n-4}[-1-(k^2-2)^2]+(k^2-2)W_{2n-5}\\
&= (k^4-4k^2+2)W_{2n-2}-W_{2n-4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca dizinin terimleri arasında aşağıdaki gibi cebirsel bağıntılar vardır.

Teorem 3.2.6. (1) $n\geq 1$ tamsayısı için $(W_{n+1}+W_n)(W_{n+1}-W_n)=W_{2n+1}$ dir.

(2) Pozitif *n* ve *m* tamsayıları için $W_n W_{m+1}-W_{n-1}W_m=W_{n+m}$ dir.

(3) $1\leq m\leq n$ özelliğindeki tamsayıları için $(W_n+W_m)(W_n-W_m)=W_{n+m}W_{n-m}$ dir.

(4) $n\geq 1$ için $(n+1)$. ve $(n-1)$. W_n sayılarının çarpımının 1 fazlası bir tam kare ve

$$\sqrt{W_{n+1}W_{n-1}+1}=W_n$$

dir. Esasında

$$W_n=\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}W_{2i+1}}$$

dır (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. (1) $k\neq 0,\pm 2$ olsun. Bu takdirde $W_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ olduğundan

$$(W_{n+1}+W_n)(W_{n+1}-W_n)=W_{n+1}^2-W_n^2$$

$$=\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2-\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2$$

$$=\frac{\alpha^{2n}(\alpha^2-1)+\beta^{2n}(\beta^2-1)}{k^4-4k^2}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\frac{\alpha^2-1}{k^4-4k^2}=\frac{\alpha}{\sqrt{k^4-4k^2}} \quad \text{ve} \quad \frac{\beta^2-1}{k^4-4k^2}=\frac{-\beta}{\sqrt{k^4-4k^2}}$$

olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki eşitlik

$$(W_{n+1}+W_n)(W_{n+1}-W_n)=\frac{\alpha^{2n}(\alpha^2-1)+\beta^{2n}(\beta^2-1)}{k^4-4k^2}$$

$$=\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\sqrt{k^4-4k^2}}$$

$$=W_{2n+1}$$

haline gelir. $k=0$ olsun. Bu takdirde $W_n=(-1)^{n+1}n$ olup

$$(W_{n+1}+W_n)(W_{n+1}-W_n)=(-1)^{2n+2}(2n+1)=W_{2n+1}$$

dir. $k=\pm 2$ için $W_n=n$ olup

$$(W_{n+1}+W_n)(W_{n+1}-W_n)=2n+1=W_{2n+1}$$

dir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoreme benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.7. (1-a) $k=0$ ise $n\geq 0$ için $\alpha^n+\beta^n=(-1)^n 2$ dir.

(1-b) $k=\pm 1$ ise $n\equiv 0(\text{mod } 3)$ için $\alpha^n+\beta^n=2$ ve $n\equiv 1,2(\text{mod } 3)$ için $\alpha^n+\beta^n=-1$ dir.

(1-c) $k=\pm 2$ ise $n\geq 0$ için $\alpha^n+\beta^n=2$ dir.

(1-d) $|k|>2$ ise

$$\alpha^n+\beta^n=\begin{cases} W_{n+1}-W_{n-1} & n\geq 1 \text{ için} \\ 2W_{n+1}-(k^2-2)W_n & n\geq 0 \text{ için} \\ (k^2-2)W_n-2W_{n-1} & n\geq 1 \text{ için} \end{cases}$$

dir.

(2-a) $k=0$ ise $n\geq 1$ için $W_{n+1}-W_{n-1}=(-1)^n 2$ dir.

(2-b) $k=\pm 1$ ise $n\equiv 0(\text{mod } 3)$ için $W_{n+1}-W_{n-1}=2,\ n\equiv 1,2(\text{mod } 3)$ için $W_{n+1}-W_{n-1}=-1$ dir.

(2-c) $k=\pm 2$ ise $n\geq 1$ için $W_{n+1}-W_{n-1}=2$ dir.

(2-d) $|k|>2$ ise $n\geq 2$ çift için

$$W_{n+1}-W_{n-1}=\frac{\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2i}(k^2-2)^{n-2i}(k^4-4k^2)^i}{2^{n-1}}$$

ve $n\geq 1$ tek için

$$W_{n+1}-W_{n-1}=\frac{\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2i}(k^2-2)^{n-2i}(k^4-4k^2)^i}{2^{n-1}}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. (1-a) $k=0$ olsun. Bu durumda $\alpha=\beta=-1$ olacağından $\alpha^n+\beta^n=(-1)^n 2$ dir.

(1-b) $k=\pm 1$ ise $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\beta=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ olup $n\equiv 0(\text{mod } 3)$ için $\alpha^n+\beta^n=2$ ve $n\equiv 1,2(\text{mod } 3)$ için $\alpha^n+\beta^n=-1$ dir.

(1-c) $k=\pm 2$ ise $\alpha=\beta=1$ olacağından $\alpha^n+\beta^n=2$ dir.

(1-d) $|k|>2$ ise $k^2-2-2\beta=2-k^2+2\alpha=\sqrt{\Delta}$ olduğundan

$$\begin{aligned}W_{n+1}-W_{n-1}&=(k^2-2)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)-2\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\\&=\frac{(k^2-2)}{\sqrt{\Delta}}(\alpha^n-\beta^n)-\frac{2}{\sqrt{\Delta}}(\beta\alpha^n-\alpha\beta^n)\\&=\alpha^n\left(\frac{k^2-2-2\beta}{\sqrt{\Delta}}\right)+\beta^n\left(\frac{2-k^2+2\alpha}{\sqrt{\Delta}}\right)\\&=\alpha^n+\beta^n\end{aligned}$$

elde edilir.

(2-a) $k=0$ için n çift ise

$$W_{n+1}-W_{n-1}=n+1-(n-1)=2$$

ve n tek ise

$$W_{n+1} - W_{n-1} = -(n+1) - (1-n) = -2$$

olup her iki durumda $W_{n+1} - W_{n-1} = (-1)^n 2$ dir.

(2-b) $k = \pm 1$ olsun. Bu takdirde $n \equiv 1(\text{mod } 3)$ ise $W_{n+1} = -1$, $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ ise $W_{n+1} = 1$ ve $n \equiv 2(\text{mod } 3)$ ise $W_{n+1} = 0$ olup $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ ise $W_{n+1} - W_{n-1} = 2$ ve $n \equiv 1, 2(\text{mod } 3)$ ise $W_{n+1} - W_{n-1} = -1$ dir.

(2-c) $k = \pm 2$ için $W_{n+1} = n+1$ ve $W_{n-1} = n-1$ olup $W_{n+1} - W_{n-1} = n+1-(n-1) = 2$ dir.

(2-d) Binom seri açılımından tümevarımla kolayca gösterilebilir.

W_n dizisinin terimlerinin obebleri ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.8. (1) Ardışık herhangi iki W_n sayıları aralarında asal, yani $(W_n, W_{n-1}) = 1$ dir.

(1-a) $k = 0$ ise

$$(W_n, W_m) = \begin{cases} W_{(n,m)} & m \geq 1 \text{ tek ise} \\ (-1)^{n+1} W_{(n,m)} & m \geq 2 \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

(1-b) $k = \pm 1$ olsun. $m \equiv 1, 2(\text{mod } 3)$ ise $(W_n, W_m) = 1$ ve $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ ise

$$(W_n, W_m) = \begin{cases} 0 & n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1 & n \equiv 1, 2(\text{mod} 3) \end{cases}$$

dir.

(1-c) $|k| > 2$ ise $m \geq 1$ tamsayısı için $(W_n, W_m) = W_{(n,m)}$ dir.

(2) $m \geq 1$ tek ise

$$(W_{nm-1}, W_{nm+1}) = \begin{cases} 1 & n \geq 2 \text{ çift ise} \\ |k^2 - 2| & n \geq 1 \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve $m \geq 2$ çift ise $(W_{nm-1}, W_{nm+1}) = 1$ dir.

(3-a) $k = \pm 1$ ise $p = 3$ asalı için

$$(W_n, W_{n+p}) = \begin{cases} 0 & n = 3t \text{ ise} \\ 1 & n \neq 3t \text{ ise} \end{cases}$$

iken $p \geq 5$ asalı için $(W_n, W_{n+p}) = |W_p|$ dir.

(3-b) $p \geq 3$ asalı ve $t \geq 1$ tamsayısı için

$$(W_n, W_{n+p}) = \begin{cases} W_p & n = pt \text{ ise} \\ 1 & n \neq pt \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. (1) $W_n = (k^2 - 2)W_{n-1} - W_{n-2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} W_n &= (k^2-2)W_{n-1} + (-W_{n-1} + W_{n-1}) - W_{n-2} \\ W_{n-1} &= (W_{n-1} - W_{n-2}) \times 1 + W_{n-2} \\ (W_{n-1} - W_{n-2}) &= (k^2-4)W_{n-2} + (W_{n-2} - W_{n-3}) \\ W_{n-2} &= (W_{n-2} - W_{n-3}) \times 1 + W_{n-3} \\ (W_{n-2} - W_{n-3}) &= (k^2-2)W_{n-3} + (W_{n-3} - W_{n-4}) \\ &\cdots \\ W_2 &= (k^2-3)W_1 + (W_1 - W_0) \\ (k^2-3) &= 1 \times (k^2-3) + 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $W_1 = 1$ ve $W_0 = 0$ olduğundan $(W_n, W_{n-1}) = W_1 = 1$ olarak elde edilir. Diğer tüm eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Bölünebilme ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.9. (1-a) $k = 0$ ise $m \geq 1$ tek için $\frac{W_{mn}}{W_n} = m$ ve $m \geq 2$ çift için $\frac{W_{mn}}{W_n} = (-1)^n m$ dir.

(1-b) $k = \pm 1$ olsun. $m \equiv 1 \pmod 3$ için

$$\frac{W_{mn}}{W_n} = \begin{cases} 1 & n \equiv 1,2 \pmod 3 \\ \infty & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

$m \equiv 2 \pmod 3$ için

$$\frac{W_{mn}}{W_n} = \begin{cases} -1 & n \equiv 1,2 \pmod 3 \\ \infty & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

ve $m \equiv 0 \pmod 3$ için $\frac{W_{mn}}{W_n} = \infty$ dur.

(1-**c)** $k = \pm 2$ ise $m \geq 1$ tamsayısı için $\frac{W_{mn}}{W_n} = m$ dir.

(1-d) $|k| > 2$ ise $m \geq 1$ tamsayısı için $W_n \mid W_{mn}$ dir.

(2-a) $k=0$ ise $m\geq 1$ tek için $\dfrac{W_{mn}}{W_m W_n}=1$ ve $m\geq 2$ çift için $\dfrac{W_{mn}}{W_m W_n}=(-1)^{n+1}$ dir.

(2-b) $k=\pm 1$ ise $m\equiv 1,2\,(\text{mod } 3)$ için

$$\frac{W_{mn}}{W_m W_n}=\begin{cases}1 & n\equiv 1,2\,(\text{mod } 3)\\ \infty & n\equiv 0\,(\text{mod } 3)\end{cases}$$

ve $m\equiv 0\,(\text{mod } 3)$ için $\dfrac{W_{mn}}{W_m W_n}=\infty$ dur.

(2-c) $k=\pm 2$ ise $m\geq 1$ tamsayısı için $\dfrac{W_{mn}}{W_m W_n}=1$ dir.

(2-d) $|k|>2$ ise $m\geq 1$ tamsayısı için $W_m W_n \mid W_{mn} W_{(m,n)}$ dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. Teorem 3.2.8 e benzer şekilde gösterilebilir.

W_n dizisinin katsayılar matrisi

$$M=\begin{bmatrix} k^2-2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

olup

$$N=\begin{bmatrix} k^2-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \text{ ve } S=[1 \quad 0]$$

olarak tanımlanan matrisler için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.10. (1) $n\geq 1$ için $M^n=\begin{bmatrix} W_{n+1} & -W_n\\ W_n & -W_{n-1}\end{bmatrix}$ dir.

(2) $n\geq 0$ için $W_{n+1}=SM^nS^t$ dir.

(3) $n\geq 2$ için $W_n=SM^{n-2}NS^t$ dir.

(4) $n\geq 1$ için $M^{n-1}N=\begin{bmatrix} W_{n+1} & W_n\\ W_n & W_{n-1}\end{bmatrix}$ ve $\det(M^{n-1}N)=-1$ dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. (1) $n=1$ için

$$M=\begin{bmatrix} W_2 & -W_1\\ W_1 & -W_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k^2-2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

olduğundan eşitlik $n=1$ için doğrudur. Eşitliğin $n-1$ için gerçeklendiği kabul edilsin.

Bu takdirde $M^n = M^{n-1}M$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} W_n & -W_{n-1} \\ W_{n-1} & -W_{n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^2-2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k^2-2)W_n - W_{n-1} & -W_n \\ (k^2-2)W_{n-1} - W_{n-2} & -W_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} W_{n+1} & -W_n \\ W_n & -W_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= M^n$$

olur.

(2-3) Kolayca görüleceği üzere

$$SM^nS^t = [1\ \ 0]\begin{bmatrix} W_{n+1} & -W_n \\ W_n & -W_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1\ \ 0]\begin{bmatrix} W_{n+1} \\ W_n \end{bmatrix} = W_{n+1}$$

ve

$$SM^{n-2}NS^t = [1\ \ 0]\begin{bmatrix} W_{n-1} & -W_{n-2} \\ W_{n-2} & -W_{n-3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^2-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= [1\ \ 0]\begin{bmatrix} W_{n-1} & -W_{n-2} \\ W_{n-2} & -W_{n-3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^2-2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= [1\ \ 0]\begin{bmatrix} (k^2-2)W_{n-1} - W_{n-2} \\ (k^2-2)W_{n-2} - W_{n-3} \end{bmatrix}$$
$$= (k^2-2)W_{n-1} - W_{n-2}$$
$$= W_n$$

dir.

(4) Son olarak

$$M^{n-1}N = \begin{bmatrix} W_n & -W_{n-1} \\ W_{n-1} & -W_{n-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k^2-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (k^2-2)W_n - W_{n-1} & W_n \\ (k^2-2)W_{n-1} - W_{n-2} & W_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} W_{n+1} & W_n \\ W_n & W_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir. Bu son eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa sonuç görülür.

W_n nin terimlerinin basit sürekli kesirli açılımları ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.11. (1) $k = 0$ ise

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = [-2;1,n-1],\ \ n \geq 3$$
$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} = [1;n-1,2],\ \ n \geq 2$$
$$\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = [1;n],\ \ n \geq 2$$

dir.

(2) $k = \pm 1$ ise $n \geq 1$ için

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \begin{cases} [-1] & n \equiv 1 \pmod 3 \\ [0] & n \equiv 2 \pmod 3 \\ \infty & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

ve

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} = \begin{cases} [0] & n \equiv 1 \pmod 3 \\ \infty & n \equiv 2 \pmod 3 \\ [-1] & n \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

dir.

(3) $k = \pm 2$ ise $n \geq 2$ için

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = [1;n] \ \text{ ve } \ \frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} = [1;n-1,2]$$

dir.

(4) $|k| > 2$ ise $n \geq 2$ çift için

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = [k^2-2;\underbrace{-k^2+2,k^2-2,}_{(n-2)/2 \text{ tane}}-k^2+2]$$

ve $n \geq 3$ tek için

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = [k^2-2;\underbrace{-k^2+2,k^2-2}_{(n-1)/2 \text{ tane}}]$$

dir. Üstelik $n \geq 2$ çift için

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} = [k^4-4k^2+2;\underbrace{-k^4+4k^2-2,k^4-4k^2+2,}_{(n-2)/2 \text{ tane}}-k^4+4k^2-3]$$

ve $n \geq 3$ tek için

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}}=[k^4-4k^2+2;\underbrace{-k^4+4k^2-2,k^4-4k^2+2,}_{(n-3)/2 \text{ tane}}-k^4+4k^2-2,k^4-4k^2+3]$$

dir. Son olarak $n\geq 2$ çift için

$$\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}=[k^4-4k^2+2;\underbrace{-k^4+4k^2-2,k^4-4k^2+2,}_{(n-2)/2 \text{ tane}}-k^4+4k^2-2]$$

ve $n\geq 3$ tek için

$$\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}=[k^4-4k^2+2;\underbrace{-k^4+4k^2-2,k^4-4k^2+2}_{(n-1)/2 \text{ tane}}]$$

dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. (1) $k=0$ olsun. Bu takdirde $W_n=(-1)^{n+1}n$ olup kolayca görüleceği üzere

$$\frac{W_{n+1}}{W_n}=\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}=-2+\frac{n-1}{n}=-2+\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}=[-2;1,n-1]$$

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}}=\frac{2n+1}{2n-1}=1+\frac{2}{2n-1}=1+\frac{1}{n-1+\frac{1}{2}}=[1;n-1,2]$$

ve benzer şekilde

$$\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}=\frac{2n+2}{2n}=1+\frac{1}{n}=[1;n]$$

dir.

(2) $k=\pm 1$ olsun. Bu takdirde $n\equiv 1\,(\text{mod } 3)$ için $W_n=1$, $n\equiv 2\,(\text{mod } 3)$ için $W_n=-1$ ve $n\equiv 0\,(\text{mod } 3)$ için $W_n=0$ olduğundan sonuç açıktır.

(3) $k=\pm 2$ olsun. Bu durumda $W_n=n$ olduğundan

$$\frac{W_{n+1}}{W_n}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}=[1;n]$$

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}}=\frac{2n+1}{2n-1}=1+\frac{1}{n-1+\frac{1}{2}}=[1;n-1,2]$$

ve

$$\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}=\frac{2n+2}{2n}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}=[1;n]$$

dir.

(4) $|k| > 2$ olsun. $n=2$ için $W_2 = k^2 - 2$ ve $W_3 = k^4 - 4k^2 + 3$ olduğundan

$$\frac{W_3}{W_2} = \frac{k^4 - 4k^2 + 3}{k^2 - 2} = k^2 - 2 + \frac{1}{-k^2 + 2} = [k^2 - 2; -k^2 + 2]$$

elde edilir, yani eşitlik $n=2$ için doğrudur. Eşitliğin $n-2$ için doğru olduğu kabul edilsin, yani

$$\frac{W_{n-1}}{W_{n-2}} = [k^2 - 2; \underbrace{-k^2 + 2, k^2 - 2}_{(n-4)/2 \text{ tane}}, -k^2 + 2]$$

olsun. Bu takdirde

$$[k^2 - 2; \underbrace{-k^2 + 2, k^2 - 2}_{(n-2)/2 \text{ tane}}, -k^2 + 2] = k^2 - 2 + \cfrac{1}{-k^2 + 2 + \cfrac{1}{k^2 - 2 + \cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{k^2 - 2 + \cfrac{1}{-k^2 + 2}}}}}$$

$$= k^2 - 2 + \cfrac{1}{-k^2 + 2 + \cfrac{1}{\cfrac{W_{n-1}}{W_{n-2}}}}$$

$$= \frac{(k^4 - 4k^2 + 3)W_{n-1} - (k^2 - 2)W_{n-2}}{(k^2 - 2)W_{n-1} - W_{n-2}}$$

$$= \frac{(k^2 - 2)[(k^2 - 2)W_{n-1} - W_{n-2}] - W_{n-1}}{(k^2 - 2)W_{n-1} - W_{n-2}}$$

$$= \frac{(k^2 - 2)W_n - W_{n-1}}{(k^2 - 2)W_{n-1} - W_{n-2}}$$

$$= \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

olduğundan eşitlik her n için doğru olur. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Ardışık dört $W_n, W_{n+1}, W_{n+2}, W_{n+3}$ terimlerinin çapraz oranı ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.12. W_n dizisinin ardışık dört $W_n, W_{n+1}, W_{n+2}, W_{n+3}$ teriminin çapraz oranı $[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}]$ olmak üzere

(1) $k = 0$ ise

$$[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}] = \frac{4}{(2n+3)^2}$$

dir.

(2) $k = \pm 1$ ise

$$[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}] = \begin{cases} \infty & n \equiv 0 \pmod 3 \\ -\infty & n \equiv 1, 2 \pmod 3 \end{cases}$$

dir.

(3) $k = \pm 2$ ise

$$[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}] = \frac{4}{3}$$

dir.

(4) $|k| > 2$ ise

$$\lim_{n\to\infty}[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}] = \frac{k^2}{k^2-1}$$

dir (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. Hatırlanacağı üzere dört farklı a, b, c, d reel sayılarının çapraz oranı $[a, b; c, d]$ ile gösterilir ve

$$[a, b; c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$$

olarak tanımlanır. Buna göre,

(1) $k = 0$ olsun. Bu takdirde $W_n = (-1)^{n+1} n$ olduğundan

$$\begin{aligned} [W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}] &= \frac{(W_n - W_{n+2})(W_{n+1} - W_{n+3})}{(W_{n+1} - W_{n+2})(W_n - W_{n+3})} \\ &= \frac{[(-1)^{n+1} n - (-1)^{n+3}(n+2)][(-1)^{n+2}(n+1) - (-1)^{n+4}(n+3)]}{[(-1)^{n+2}(n+1) - (-1)^{n+3}(n+2)][(-1)^{n+1} n - (-1)^{n+4}(n+3)]} \\ &= \frac{4}{(2n+3)^2} \end{aligned}$$

dir.

(2) $k = \pm 1$ olsun. Bu durumda

$$W_n - W_{n+2} = \begin{cases} 1 & n \equiv 0, 1 \pmod 3 \\ -2 & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

$$W_{n+1}-W_{n+3}=\begin{cases}1 & n\equiv 0,2 \pmod 3\\ -2 & n\equiv 1 \pmod 3\end{cases}$$
$$W_{n+1}-W_{n+2}=\begin{cases}-1 & n\equiv 1,2 \pmod 3\\ 2 & n\equiv 0 \pmod 3\end{cases}$$

ve her n için $W_n-W_{n+3}=0$ olduğundan sonuç açıktır.

(3) $k=\pm 2$ ise $W_n=n$ olduğundan kolayca görüleceği üzere

$$[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}]=\frac{[n-(n+2)][n+1-(n+3)]}{[n+1-(n+2)][n-(n+3)]}=\frac{4}{3}$$

dür.

(4) $|k|>2$ için $W_{n+3}=(k^4-4k^2+3)W_{n+1}-(k^2-2)W_n$ olup buradan

$$\begin{aligned}W_n-W_{n+2}&=-(k^2-2)W_{n+1}+2W_n\\ W_{n+1}-W_{n+3}&=(-k^4+4k^2-2)W_{n+1}+(k^2-2)W_n\\ W_{n+1}-W_{n+2}&=(-k^2+3)W_{n+1}+W_n\\ W_n-W_{n+3}&=-(k^4-4k^2+3)W_{n+1}+(k^2-1)W_n\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre W_n, W_{n+1}, W_{n+2} ve W_{n+3} sayılarının çapraz oranı

$$[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}]=\frac{[-(k^2-2)W_{n+1}+2W_n][(-k^4+4k^2-2)W_{n+1}+(k^2-2)W_n]}{[(-k^2+3)W_{n+1}+W_n][-(k^4-4k^2+3)W_{n+1}+(k^2-1)W_n]}$$

olur. Bu son eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}[W_n, W_{n+1}; W_{n+2}, W_{n+3}]=\frac{k^2}{k^2-1}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.13. W, W_n dizisinin terimlerinin oluşturduğu circulant matris olmak üzere bu matrisin özdeğerleri $j=0,1,2,\cdots,n-1$ için

$$\lambda_j(W)=\frac{(W_{n-1}+1)\,w^{-j}-W_n}{w^{-2j}-(k^2-2)\,w^{-j}+1}$$

ve spektral normu $n\geq 1$ için

$$\|W\|_{spec}=\frac{W_n-W_{n-1}-1}{k^2-4}$$

dür (Akın ve Tekcan 2017a).

İspat. $W_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ olduğundan W nın özdeğerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_j(W) &= \sum_{u=0}^{n-1} W_u\, w^{-ju} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{u=0}^{n-1}(\alpha\, w^{-j})^u - \sum_{u=0}^{n-1}(\beta\, w^{-j})^u\right] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha^n - 1}{\alpha\, w^{-j} - 1} - \frac{\beta^n - 1}{\beta\, w^{-j} - 1}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{w^{-j}(\alpha^n\beta - \beta - \beta^n\alpha + \alpha) - \alpha^n + \beta^n}{w^{-2j} - (k^2-2)\, w^{-j} + 1}\right] \\
&= \frac{w^{-j}\left[(\alpha\beta)\left(\dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right) + \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right] - \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}}{w^{-2j} - (k^2-2)\, w^{-j} + 1} \\
&= \frac{(W_{n-1}+1)\, w^{-j} - W_n}{w^{-2j} - (k^2-2)\, w^{-j} + 1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
W_{11} &= W_0^2 + W_{n-1}^2 + \cdots + W_2^2 + W_1^2 \\
W_{12} &= W_0 W_1 + W_{n-1} W_0 + \cdots + W_2 W_3 + W_1 W_2 \\
&\cdots \\
W_{1(n-1)} &= W_0 W_{n-2} + W_{n-1} W_{n-3} + \cdots + W_2 W_0 + W_1 W_{n-1} \\
W_{1n} &= W_0 W_{n-1} + W_{n-1} W_{n-2} + \cdots + W_2 W_1 + W_1 W_0 \\
W_{21} &= W_1 W_0 + W_0 W_{n-1} + \cdots + W_3 W_2 + W_2 W_1 \\
W_{22} &= W_1^2 + W_0^2 + \cdots + W_3^2 + W_2^2 \\
&\cdots \\
W_{2(n-1)} &= W_1 W_{n-2} + W_0 W_{n-3} + \cdots + W_3 W_0 + W_2 W_{n-1} \\
W_{2n} &= W_1 W_{n-1} + W_0 W_{n-2} + \cdots + W_3 W_1 + W_2 W_0 \\
&\cdots \\
W_{n1} &= W_{n-1} W_0 + W_{n-2} W_{n-1} + \cdots + W_1 W_2 + W_0 W_1 \\
W_{n2} &= W_{n-1} W_1 + W_{n-2} W_0 + \cdots + W_1 W_3 + W_0 W_2 \\
W_{n(n-1)} &= W_{n-1} W_{n-2} + W_{n-2} W_{n-3} + \cdots + W_1 W_0 + W_0 W_{n-1} \\
W_{nn} &= W_{n-1}^2 + W_{n-2}^2 + \cdots + W_1^2 + W_0^2
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$(W)^*W=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1(n-1)} & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2(n-1)} & W_{2n} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ W_{(n-1)1} & W_{(n-1)2} & \cdots & W_{(n-1)(n-1)} & W_{(n-1)n} \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{n(n-1)} & W_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ dir. Burada λ_0 maksimumdur ve

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= W_0^2 + W_1^2 + \cdots + W_{n-2}^2 + W_{n-1}^2 \\ &\quad + 2\begin{bmatrix} W_0(W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-2} + W_{n-1}) \\ + W_1(W_2 + \cdots + W_{n-2} + W_{n-1}) \\ + \cdots \\ + W_{n-2}W_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= (W_0 + W_1 + \cdots + W_{n-1})^2 \end{aligned}$$

dir. O halde $\|W\|_{spec} = \sqrt{\lambda_0} = W_0 + W_1 + \cdots + W_{n-1}$ dir. Buna göre Teorem 3.2.2 gereği

$$\|W\|_{spec} = \frac{W_n - W_{n-1} - 1}{k^2 - 4}$$

dür.

4. SONUÇ

Tezin ikinci bölümünde ilk olarak Pell sayılarının ilk $4n+1$ terimlerinin toplamlarına bağlı olarak tanımlanan a_n tamsayı dizisi tanımlanmış ve bu tamsayı dizisinin bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Daha sonra ise bu tamsayı dizisinin daha önceden bilinen Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur. Benzer şekilde Pell-Lucas ve/veya balans sayılarının belli terim toplamları ile ilgili tamsayı dizileri tanımlanabilir ve bu tamsayı dizilerinin diğer bilinen tamsayı dizileri ile olan ilişkisi incelenebilir.

Tezin üçüncü bölümünde ise $k \geq 2$ tamsayısı için

$$x^2 - (k^2 - 2)y^2 = 1$$

Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri binom açılımı yardımıyla elde edilmiş ve bu denkleme bağlı olarak yeni bir tamsayı dizisi tanımlanmıştır ve bu tamsayı dizisi ile ilgili bazı cebirsel sonuçlar elde edilmiştir. Yine benzer işlemler, bazı özel

$$x^2 - (k^2 \pm k)y^2 = 1$$

Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri için de yapılabilir ve yine denklemlere bağlı tamsayı dizileri tanımlanarak, bu tamsayı dizilerinin bazı cebirsel özellikleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Akın, A., Tekcan, A. 2017. The Integer Sequence a_n and its Relationship with Pell, Pell -Lucas and balancing numbers. *An Univ. Sci. Budapest. Comp.* 46: 275-288.

Akın, A., Tekcan, A. 2017a. The Pell Equation $x^2 - (k^2 - 2)y^2 = 1$ and the Corresponding Integer Sequence. *An Univ. Sci. Budapest. Comp.* 46: 303-325.

Barbeau, E.J. 2003. Pell's Equation. Problem Books in Mathematics, Springer, Nework, NY, USA.

Behera A. ve Panda G. K. 1999. On the Square Roots of Triangular Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 37(2): 98-105.

Flath, D.E. 1989. Introduction to Number Theory. Wiley.

Gözeri, G.K., Özkoç, A., Tekcan, A. 2017. Some Algebraic Relations on Balancing Numbers. *Utilitas Mathematica* 103: 217-236.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. A. Wiley-Int. Pub.

Mollin, R.A. 2008. Fundamental Number Theory with Appl. Chapman & Hall/ CRC.

Ogilvy C.S., Anderson J.T. 1988. Fibonacci Numbers, Ch. 11 in Excursions in Number Theory. New York, Dover 1988.

Panda G. K. 2007. Sequence Balancing and Cobalancing Numbers. *The Fibonacci Quarterly* 45: 265-271.

Panda G. K. 2009. Some Fascinating Properties of Balancing Numbers. *Proceedings of the Eleventh Int. Conf. on Fibonacci Num. and their App.* Numer. 194: 185-189.

Panda G. K. ve Ray P. K. 2005. Cobalancing Numbers and Cobalancers. *Int. J. Math Math. Sci.*, 8: 1189–1200.

Panda G. K. ve Ray P. K. 2011. Some Links of Balancing and Cobalancing Numbers with Pell and Associated Pell Numbers. *Bul. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1): 41-72.

Ray P. K. 2009. Balancing and Cobalancing Numbers. *PhD thesis*, Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Ribenboim P. 2000. My Numbers, My Friends, Popular Lectures on Number Theory, Springer-Verlag, New York, Inc. 375p.

Santana S. F., Diaz-Barrero J. L. 2006. Some Properties of Sums Involving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Science* 18(1): 33-40.

Tekcan, A. 2011. Continued Fraction Expansion of $\sqrt{D}$ and Pell Equation $x^2 - Dy^2 = 1$. *Mathematica Moravica* 15-2: 19-27.

Tekcan, A., Tayat, M. 2014. Generalized Pell Numbers, Balancing Numbers and Binary Quadratic Forms. *Creative Mathematics and Informatics* 23(1): 115-122.

Tekcan, A., Tayat, M., Özbek, M.E. 2014. The Diophantine Equation $8x^2 - y^2 + 8x(1 + t) + (2t+1)^2 = 0$ and t Balancing Numbers. *ISR Combinatorics* 2014(2014), Article ID 897834.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Arzu AKIN
Doğum Yeri ve Tarihi : 24.03.1993, Bursa
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Ahmet Vefik Paşa Anadolu Lisesi
Lisans : Uludağ Üniversitesi
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Pozitif Kampus Özel Öğretim Kursu

İletişim (e-posta) : arzuakin504@gmail.com

Yayınları :

Akın, A., Tekcan, A. 2017. The Integer Sequence a_n and its Relationship with Pell, Pell -Lucas and balancing numbers. *An Univ. Sci. Budapest. Comp.* 46: 275-288.

Akın, A., Tekcan, A. 2017a. The Pell Equation $x^2-(k^2-2)y^2=1$ and the Corresponding Integer Sequence. *An Univ. Sci. Budapest. Comp.* 46: 303-325.