23754

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
(MATEMATİK EĞİTİMİ)

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yakup ÖZKUL

BALIKESİR, EYLÜL 1992

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
(MATEMATİK EĞİTİMİ)

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKUP ÖZKUL

Sınav Günü : 21 Eylül 1992
Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Aydın OKÇU (Danışman)
Prof.Dr. Mümin YAMANKARADENİZ
Doç.Dr. Mehmet ARISOY

BALIKESİR, EYLÜL 1992

KISA ÖZET

Bu çalışmada, sayısal analizin en önemli konularından biri olan sonlu farklar yöntemi tanıtılmıştır.

Giriş bölümünden sonra, ikinci bölümde fark notasyonları ve operatörlerine ilişkin tanım ve teoremler üzerinde durulmuştur. Bu bölümün, izleyen bölümlere temel oluşturması amaçlanmıştır. Üçüncü bölümde enterpolasyon kavramı ve çeşitleri üzerinde durulmuştur. Son bölümde ise sayısal integral ile ilgili Newton-Cotes kapalı ve açık integral formülleri, daha önceki bölümlerdeki kavramlara dayalı olarak türetilmiştir. Ayrıca enterpolasyon katsayı çizelgeleri düzenlenmiş ve bu çizelgeler kullanılarak sonlu farklar örneklendirilmiştir.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÇİZELGELER LİSTESİ VI

ŞEKİLLER LİSTESİ VII

1. GİRİŞ 1

2. FARK NOTASYONLARI VE OPERATÖRLER 3

2.1 İleriye fark operatörü 3

2.2 Türev ve diferansiyel operatörü 4

2.3 Kaydıram operatörü 4

2.4 Bir polinomun farkları 4

2.5 Fark hesabının temel kuralları 7

2.6 Geriye farklar 9

2.7 Ortalama operatörü 11

2.8 Bölünmüş farklar 11

2.9 Bölünmüş farkların özellikleri 12

2.10 İleri ve geri farkların bölünmüş farklarla ifadesi 14

2.11 Merkezi farklar 16

3. ENTERPOLASYON 19

3.1 Giriş 19

3.2 Doğrusal enterpolasyon 19

3.3 Polinomal enterpolasyon teorisi
Lagrange enterpolasyon formülü 22

3.4 Lagrange enterpolasyonu için Aitken yöntemi 24

3.5 Newton ileri ve geri fark formülleri 30

3.6 Gauss formülleri 33

3.7 Stirling formülü 36

3.8 Bessel formülü 38

3.9 Everett formülü 41

4. UYGULAMALAR 44

4.1 Eşit aralıklı temel noktalar ile sayısal integrasyon 44

4.2 Newton-Cotes kapalı integral formülleri 46

4.3 Newton-Cotes açık integral formülleri 56

4.4 Enterpolasyon katsayı çizelgeleri 59

4.5 Sonlu farklar ile enterpolasyon örnekleri 61

SONUÇ VE TARTIŞMA 67

KAYNAKÇA 68

TEŞEKKÜR 69

ÖZGEÇMİŞ 70

EKLER :

EK-I Bölünmüş farklar ile enterpolasyon programı 71

EK-II İleri farklar ile enterpolasyon programı 73

EK-III Geri farklar ile enterpolasyon programı 74

EK-IV Aitken yöntemi ile enterpolasyon programı 76

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge		SAYFA
Çizelge 2.1	y=P(x) polinomunun farkları	6
Çizelge 2.2	f(x) fonksiyonunun ileri farkları	9
Çizelge 2.3	f(x) fonksiyonunun geri farkları	10
Çizelge 2.4	f(x) fonksiyonunun bölünmüş farkları	12
Çizelge 2.5	f(x) fonksiyonunun merkezi farkları	18
Çizelge 2.6	Farklar arasındaki ilişki	18
Çizelge 3.1	Determinant notasyonunda Aitken yöntemi	28
Çizelge 3.2	Beşinci mertebeden Lagrange enterpolasyon polinomu	29
Çizelge 3.3	İleri fark yolu	31
Çizelge 3.4	Geri fark yolu	32
Çizelge 3.5	Gauss ileri zigzag yolu	35
Çizelge 3.6	Stirling enterpolasyonu için izlenen yol	38
Çizelge 3.7	Bessel ileri fark yolu	40
Çizelge 4.1	Stirling enterpolasyonu için katsayılar	59
Çizelge 4.2	Bessel enterpolasyonu için katsayılar	60
Çizelge 4.3a	Everett enterpolasyonu için katsayılar	60
Çizelge 4.3b	Steffenson enterpolasyonu için katsayılar ...	60
Çizelge 4.4	Newton enterpolasyonları için izlenen yol ...	61
Çizelge 4.5	f(x)=Sin(x) fonksiyonunun fark değerleri ...	62
Çizelge 4.6	Everett enterpolasyonunda kullanılacak fonksiyonel ve fark değerleri	65

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil		SAYFA
Şekil 3.1	Doğrusal enterpolasyon	21
Şekil 3.2	Aitken yöntemi	25
Şekil 4.1	Nümerik integrasyon- f(x) in dört farklı yaklaşımı	45
Şekil 4.2	Trapez kuralı	47
Şekil 4.3	Kapalı integrasyon için genel durum	51
Şekil 4.4	Simpson kuralı	53
Şekil 4.5	$\int_1^3 (x^3-2x^2+7x-5)dx$ integralinin sayısal yaklaşımı	55
Şekil 4.6	Açık integral için genel durum	58

1. GİRİŞ

Çağımızda, özellikle son kırk yıl içinde her alanda karşılaşılan problemlerin karmaşıklığı, boyutlarının büyüklüğü, çözümlerinin kısa zamanda ve ekonomik biçimde yapılmak istenmesi elektronik hesaplayıcıların gelişmesine paralel olarak sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine neden olmuştur. Analitik olarak çözümleri güç hatta olanaksız olan pek çok problem geliştirilen sayısal yöntemlerle hesaplayıcı kullanmak suretiyle çözülmüştür.

Bu yöntemlerden biri olan ve Gauss'a kadar uzanan, 1940'lardan bu yana üzerinde yaygın olarak çalışılan "sonlu farklar matematiği" sayısal çözümlemede değişik yöntemlerin oluşturulmasında bir temel oluşturur.

Matematik ve Fizik'teki problemler genellikle sürekli bir veya birden çok değişkenli fonksiyonlar şeklindedir. Bu durum sayısal çözümlemede de aynı şekildedir. Bu fonksiyonlar genellikle kapalı bir formülle tanımlanırlar ve bağımsız değişkenin verilen değerleri için tanımlıdırlar. Yani fonksiyon, bağımsız değişkenin her bir değerine karşılık bir değere sahiptir.

Bununla birlikte bazen fonksiyon kapalı bir formülle verilmeyebilir. Bu durumda fonsiyonun sadece eşit aralanmış ayrık noktalardaki bazı değerleri belli olabilir. Ayrık noktaların arasındaki bir değer için fonksiyonel değeri bulabilmek için sonlu farklardan yararlanılır. Bu yüzden sonlu farklar matematiğinin çok kullanılacağı açıktır. Hatta bazı durumlarda problemin analitik çözümünün olmasına rağmen sonlu farklar yoluyla problem daha basit duruma indirgenebilir.

Bu çalışmada, sonlu farkların oldukça geniş bir incelemesi yapılmış olup sayısal yöntemler için gerekli tüm kavram ve özellikler verilmiştir.

Her ne kadar eşit aralanmış ayrık temel apsisler ve bu apsislere karşı gelen ordinatlar kullanılarak yapılan işlemlere öncelik tanınmış olsa da, ikinci bölümde eşit aralıklı olmayan veya olabilen temel noktalar için kullanılan "bölünmüş farklar" notasyonuna da yer verilmiştir. Ayrıca yine bu bölümde diğer fark notasyonları, fark operatöleri ve özellikleri de verilmiştir.

Hata terimleri ile birlikte farkları içeren enterpolasyon formüllerinin en önemlileri üçüncü bölümde incelenmiştir. Bu formüllerin elle ya da bilgisayarlarla kullanılışı dördüncü bölümde uygulamalarla ve beşinci bölümde programlar ve çıktıları ile örneklenmiştir.

2. FARK NOTASYONLARI VE OPERATÖRLER

$h \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, h kadar aralıklı düzgün bir şekilde aralanmış apsislere ilişkin datalar tablolandığı zaman, tablo sık sık interpolasyona ilişkin formülleri ifade etmede kullanışlıdır ve bu bölümde kullanılan bölünmüş farklardan çok fark terimlerini ve kendi aralarındaki işlemleri ifade eder.

2.1 İLERİYE FARK OPERATÖRÜ

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde,

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

şeklinde tanımlanan Δ sembolüne "ileri fark operatörü" denir. Buradaki h 'ye "fark aralığı","adım" gibi adlar verilebilir.

$y=f(x)$ fonksiyonu baz alınarak, hesaplanmış datalardaki dizinin başına yakın bir x_0 noktasının hesabı için tablo;

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0) \tag{2.1}$$

şeklindeki bir $\Delta f(x_0)$ ileri farkını tanımlama klasikleşmiştir. Bununla birlikte;

$$\Delta f(x_0+h)=f(x_0+2h)-f(x_0+h)$$

biliniyorsa o zaman x ile birleştirilmiş ikinci mertebeden ileri fark

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x_0)&=\Delta f(x_0+h)-\Delta f(x_0)\\ &=f(x_0+2h)-f(x_0+h)-\big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)\\ &=f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)\end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilir ve n.mertebeden ileri farklar benzer olarak tanımlanabilir.

Genelde, $f(x)=f_i$ ve $f(x+kh)=f_{i+k}$ ile gösterilmek üzere

$$\Delta^n f_i=\Delta(\Delta^{n-1}f_i)=\Delta^{n-1}f_{i+1}-\Delta^{n-1}f_i \tag{2.3a}$$

$$\Delta^n f_i=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f_{n-i} \tag{2.3b}$$

bağıntıları ile n. mertebeden ileri fark tanımlanır.

2.2 TÜREV VE DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ

Türev operatörü D veya d/dx sembolü ile gösterilir. Tanım olarak f(x) fonksiyonunun türevi varsa;

$$Df(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2.4}$$

dır.

2.3 İLERİ KAYDIRMA OPERATÖRÜ

E ile sembolize edilen bu operatör,

$$Ef(x)=f(x+h) \tag{2.5}$$

şeklinde işlem yaptırır. Yani f(x) fonksiyonunun değerini f(x+h) 'ye çevirir. E operatörü ardışık olarak iki kez uygulanırsa

$$\begin{aligned}E^2f(x)&=E(Ef(x))\\&=E(f(x+h))\\&=f(x+2h)\end{aligned}$$

bulunur ve buna ikinci mertebeden ileriye kaydırma operatörü denir. Bu işlem ardışık olarak devam ettirilirse, n herhangi bir tamsayı olmak üzere,

$$E^nf(x)=f(x+nh) \text{ ve } E^{-n}f(x)=f(x-nh) \tag{2.6}$$

olduğu görülür ve bunlara sırayla n. mertebeden ileriye-geriye kaydırma operatörleri de denir.

2.4 BİR POLİNOMUN FARKLARI

Bir polinomun $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ gibi n+2 değeri verilmiş olduğunu varsayalım. bu değerler yardımıyla oluşturulan

$$\begin{aligned}&\Delta u_0=u_1-u_0\\&\Delta u_1=u_2-u_1\\&\Delta u_2=u_3-u_2\\&\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\&\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\&\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\&\Delta u_n=u_{n+1}-u_n\end{aligned}$$

farklarına, verilen polinomun "birinci farkları" denir. Bu farkların oluşturduğu,

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n$$

dizisindeki ardışık elemanların birbirinden çıkarılmasıyla elde edilen,

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$$
$$\Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1$$
$$\Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\Delta^2 u_{n-1} = \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$$

farklarına, verilen polinomun ikinci mertebeden farkları denir. İşlemler ardışık olarak uygulanırsa daha yüksek mertebeden farklar bulunur.

$y=P(x)$ polinomunda $x=a+kh$ dönüşümü yapalım. Bu durumda y 'nin yeni değeri $y_k=P(x+kh)$ ile gösterilsin. Buna göre,

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

yazılıp özel bir durum olarak, $k=0,1,2, \ldots$ alınırsa,

$$x=a, a+h, a+2h, \ldots$$

olur. x 'in ardışık değerleri için,

$$y_0=P(a)$$
$$y_1=P(a+h)$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$y_k=P(a+kh)$$

yazılabilir. Ayni x değerleri için $y=P(x)$ 'in yüksek mertebeden ardışık farkları oluşturulabilir. Bu farklar Çizelge 2.1 'de gösterildiği gibi hesaplanır.

Çizelge 2.1 y=P(x) polinomunun farkları

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
a	$y_0=P(a)$			
		$\Delta y_0=y_1-y_0$		
a+h	$y_1=P(a+h)$		$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0$	
		$\Delta y_1=y_2-y_1$		$\Delta^3 y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$
a+2h	$y_2=P(a+2h)$		$\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1$	
		$\Delta y_2=y_3-y_2$		$\Delta^3 y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$
a+3h	$y_3=P(a+3h)$		$\Delta^2 y_2=\Delta y_3-\Delta y_2$	
		$\Delta y_3=y_4-y_3$		
a+4h	$y_4=P(a+4h)$			

Örnek 1.1. $\Delta^4 y_0=y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0$ olduğunu gösteriniz.

$$
\begin{aligned}
\Delta^4 y_0 &= \Delta^3 y_1-\Delta^3 y_0 \\
&= \Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1-(\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0) \\
&= \Delta^2 y_2-2\Delta^2 y_1+\Delta^2 y_0 \\
&= \Delta y_3-\Delta y_2-2(\Delta y_2-\Delta y_1)+\Delta y_1-\Delta y_0 \\
&= \Delta y_3-3\Delta y_2+3\Delta y_1-\Delta y_0 \\
&= y_4-y_3-3(y_3-y_2)+3(y_2-y_1)-(y_1-y_0) \\
&= y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 2.1. n. dereceden P(x) polinomunda x yerine ardışık h aralıklı x, x+h, ... değerleri yazılırsa elde edilecek n. mertebeden fark bir sabit değere, (n+1). mertebeden fark sıfıra eşit olur.

İspat:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ olsun. Burada $\Delta P(x)=P(x+h)-P(x)$ birinci mertebe farkını oluşturalım. Taylor Teoremi yardımıyla

$$P(x+h)= P(x)+hP'(x)+\frac{h^2}{2}P''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}P^{(n)}(x)+\ldots$$

yazıp $\Delta P(x)$ farkını oluşturursak,

$$\Delta P(x)=P(x+h)-p(x)$$

$$=hP'(x)+\frac{h^2}{2}P''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}P^{(n)}(x)+\ldots$$

yazabiliriz. Bu ifade (n-1). derecedendir ve (n-1). dereceden terim $nahx^{n-1}$ dir. Buna göre, gerekli hesaplamalar yapılıp, yeni katsayılarla birinci dereceden ileri fark,

$$\Delta P(x)=na_0hx^{n-1}+A_1x^{n-2}+A_2x^{n-3}+\ldots+A_{n-1} \tag{2.7}$$

olarak bulunur. (2.7) bağıntısının ikinci yanı için yine Taylor teoreminden yararlanarak $\Delta^2P(x)$ yazılırsa,

$$\Delta^2P(X)=\Delta[P(x+h)-P(x)]$$

$$=\Delta P(x+h)-\Delta P(x)$$

$$=n(n-1)a_0h^2x^{n-2}+\ldots$$

bulunur. Bu durumda P(x) polinomunun ikinci mertebeden ileri farkının (n-2). dereceden bir polinom olduğu görülür. İşleme ardışık olarak devam edilirse P(x) polinomunun n. mertebeden ileri farkı,

$$\Delta^nP(x)=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1\ a_0h^n$$

ya da kısaca,

$$\Delta^nP(x)=n!\ a_0h^n$$

$$=\text{sabit}$$

olduğu görülür. P(x) polinomunun n. dereceden olması durumunda (n+1). mertebeden ileri farkın sıfır olacağı apaçıktır.

2.5 FARK HESABININ TEMEL KURALLARI

Teorem 1.2. $\Delta(f(x)+g(x))=\Delta f(x)+\Delta g(x)$ 'dir.

İspat: İleri fark tanımına göre,

$$\Delta(f(x)+g(x))=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$$

$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$$

$$=\Delta f(x)+\Delta g(x)$$

dır.

Teorem 1.3. $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\Delta(\alpha f(x))=\alpha\Delta f(x)$ dir.

İspat:

$$\Delta(\alpha f(x))=\alpha f(x+h)-\alpha f(x)$$
$$=\alpha(f(x+h)-f(x))$$
$$=\alpha\Delta f(x)$$

Teorem 1.4. $\Delta(f(x).g(x))=f(x).\Delta g(x)+g(x+h).\Delta f(x)$ veya

$$=g(x).\Delta f(x)+f(x+h).\Delta g(x)$$
$$=f(x).\Delta g(x)+g(x).\Delta f(x)+\Delta f(x).\Delta g(x) \quad \text{dir}$$

İspat:

$$\Delta(f(x).g(x))=f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x)$$
$$=f(x+h).g(x+h)-f(x).g(x+h)+f(x).g(x+h)-f(x).g(x)$$
$$=g(x+h).(f(x+h)-f(x))+f(x).(g(x+h)-g(x))$$
$$=g(x+h).\Delta f(x)+f(x).\Delta g(x)$$
$$=f(x).\Delta g(x)+g(x+h).\Delta f(x) \quad \text{bulunur.}$$

Teorem 1.5. $\Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x).\Delta f(x)-f(x).\Delta g(x)}{g(x).g(x+h)}$ dır.

İspat:

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{g(x).f(x+h)-f(x).g(x+h)}{g(x).g(x+h)}$$
$$=\frac{g(x).f(x+h)-f(x).g(x+h)+f(x).g(x)-f(x).g(x)}{g(x).g(x+h)}$$
$$=\frac{g(x).\Delta f(x)-f(x)\Delta g(x)}{g(x).g(x+h)}$$

bulunur.

Özellik 2.1. m pozitif bir tamsayı olmak üzere $\Delta^m f(x)$, Δ ileri fark operatörünün f(x) üzerine m kez uygulandığını gösterir ve

$$\Delta^m f(x)=\underbrace{(\Delta.\Delta.\Delta \ldots \Delta)}_{m \text{ tane}}f(x) \quad \text{yazılabilir.}$$

Özellik 2.2. İleri fark operatörü ile kaydırma operatörü arasında

$\Delta=E-1$ veya $E=1+\Delta$

bağıntıları vardır.

Bu özelliği,

$$
\begin{aligned}
Ef(x) &= f(x+h) \\
&= f(x+h)-f(x)+f(x) \\
&= \Delta f(x)+f(x) \\
&= (\Delta+1)f(x)
\end{aligned}
$$

şeklinde açıklayabiliriz.

Karşı gelen fark tablosunun başlangıcı Çizelge 2.2 'de gösterilmiştir. Bu şekilde $f(x_k)$ yerine f_k kısaltmasını kullanabiliriz. Tabloya bakıldığında, tablonun her bir ön köşegeni boyunca yerleşen f_k ların k indislerinin değişmeden kaldığına, $\Delta^r f_k$ nin tanımlama bölgesi k. ileri köşegen ve (r+k). geri köşegen aracılığıyla anlatıldığına dikkat etmeliyiz. Böylece $\Delta^r f_k$ farklarının f_k, $f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_{k+r}, \ldots$ oordinatlarına bağlı olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.2 f(x) fonksiyonunun ileri farkları

$$
\begin{array}{ccccc}
x_0 & f_0 & & & \\
 & & \Delta f_0 & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_0 \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & \\
 & & \Delta f_2 & & \\
x_3 & f_3 & & & \\
. & . & & & \\
. & . & & & \\
: & . & & &
\end{array}
$$

2.6 GERİYE FARKLAR

Bir sayı dizisi ve bu dizinin elemanlarına bir bağıntı ile karşılık gelen değerler verildiğinde, sayı aralığının sonlarında geriye farkların kullanılması daha uygun olur.

Geri fark operatörü ∇ ile gösterilir ve bir f(x) fonksiyonunun herhangi bir x noktasındaki birinci mertebeden geri farkı

$$\nabla f(x)=f(x)-f(x-h) \qquad (2.8a)$$

ile ve bu fonksiyonun bir x_i noktasındaki birinci mertebeden geri farkı ise

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \tag{2.8b}$$

ile tanımlanır. x_i 'de uygulanan ikinci mertebeden geriye fark,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) \\ &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

olur. Ardışık tekrarlamalar sonucunda,

$$\nabla^n f_i = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1} \tag{2.10}$$

genel formu ile n. mertebeden geri fark ifade edilir. Bu durumda x_i'de $f(x)$ in n. mertebeden geri farkı için, $f_i, f_{i-1}, \ldots$ ordinatlarının hepsi kullanılır.

Özellik 1.3. E ile ∇ arasında

$$\begin{aligned} E^{-1} f_n &= f_{n-1} \\ &= f_n - \nabla f_n \\ &= (1-\nabla) f_n \end{aligned}$$ bağıntısı vardır.

Kısaca $E^{-1} = 1-\nabla$ ve $E = (1-\nabla)^{-1}$ yazabiliriz.

Genel olarak, bir $f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir x noktası için (r+1). mertebeden geri farkı,

$$\nabla^{r+1} f(x) = \nabla^r f(x) - \nabla^r f(x-h) \tag{2.11}$$

ile tanımlanır.

Çizelge 2.3 f(x) fonksiyonunun geri farkları

$$\begin{array}{cccccc}
\cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & & & \\
x_{N-3} & f_{N-3} & & & \\
 & & \nabla f_{N-2} & & \\
x_{N-2} & f_{N-2} & & \nabla^2 f_{N-1} & \\
 & & \nabla f_{N-1} & & \nabla^3 f_N \\
x_{N-1} & f_{N-1} & & \nabla^2 f_N & \\
 & & \nabla f_N & & \\
x_N & f_N & & &
\end{array}$$

Geri farklara karşı gelen fark tablosunun sonu Çizelge 2.3' te gösterilmiştir. Bu çizelgedeki her bir geri köşegen boyunca yerleşmiş indislerin değişmeden aynı kaldığına dikkat edilmelidir.

2.7 ORTALAMA OPERATÖRÜ

İşlem yaptıran sembollerden biri de μ 'dür. Bu sembol

$$\mu f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x+\frac{h}{2})+f(x-\frac{h}{2})\right] \tag{2.12}$$

şeklinde işlem yaptırır ve "ortalama operatörü" diye adlandırılır. Bu operatör (2.12) 'den de anlaşıldığı üzere ortalama değeri bulmada kullanılır.

2.8 BÖLÜNMÜŞ FARKLAR

x 'in $x_0, x_1, x_2, \ldots$ değerleri için sıra ile $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$ değerlerini alan bir fonksiyon ele alınsın. $f(x)$ 'in herhangi iki değeri $f(x_i)$ ve $f(x_j)$ olmak üzere, birinci mertebeden bölünmüş farkı,

$$f(x_i, x_j)=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i} \tag{2.13}$$

formu ile tanımlanır. Bu formda x_i ve x_j değerlerinin ardışık değerler olarak alınmasına dikkat edilmelidir.

Buna benzer olarak $f(x)$ 'in iki tane bölünmüş farkı $f(x_i, x_j)$ ve $f(x_j, x_k)$ ise ikinci mertebeden bölünmüş fark,

$$f(x_i, x_j, x_k)=\frac{f(x_j, x_k)-f(x_i, x_j)}{x_k-x_i} \tag{2.14}$$

formu ile tanımlanır. Bu işlemler ardışık olarak tekrarlanırsa, x_0, x_1, x_2, x_3 apsisleri için üçüncü mertebeden bölünmüş fark,

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3)=\frac{f(x_1, x_2, x_3)-f(x_0, x_1, x_2)}{x_3-x_0}$$

formunu örnek olarak verebiliriz.

$y=f(x)$ fonksiyonunun bölünmüş fark tablosu Çizelge 2.4 'teki gibi hesaplanır.

Çizelge 2.4 f(x) fonksiyonunun bölünmüş farkları

x	f(x)			
x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0,x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0,x_1,x_2)$	
		$f(x_1,x_2)$		$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1,x_2,x_3)$	
		$f(x_2,x_3)$		
x_3	$f(x_3)$		.	
		.		
.	.			
.	.			
.	.			

Örnek 1.2. $f(x)=x^2$ fonksiyonunun x=0,1,3,4,7 değerleri için bölünmüş fark tablosu aşağıdadır.

x	x^2			
0	0			
		1		
1	1		1	
		4		0
3	9		1	
		7		0
4	16		1	
		11		
7	49			

2.9 BÖLÜNMÜŞ FARKLARIN ÖZELLİKLERİ

Özellik 1.4. İki fonksiyonun toplamının ya da farkının herhangi mertebeden bölünmüş farkı, verilen fonksiyonların bölünmüş farklarının toplamına eşittir.

Özellik 1.5. Bir fonksiyonun herhangi bir sabitle çarpımının herhangi mertebeden bölünmüş farkı, fonksiyonun bölünmüş farkının o sabitle çarpımına eşittir.

Özellik 1.6. Bölünmüş farklar simetriktir. Yani

$$f(x_0,x_1)=f(x_1,x_0)$$
$$f(x_0,x_1,x_2)=f(x_1,x_0,x_2)=f(x_2,x_0,x_1)$$

vb. yazılabilir.

Özellik 1.7. Herhangi mertebeden bölünmüş fark, birinci mertebeden bölünmüş farklar cinsinden ifade edilebilir. Örneğin,

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}$$

dır.

Bu örneğin gerçekliği şöyle gösterilebilir:

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{(x_2-x_0)}$$

$$=\frac{f(x_1,x_2)}{(x_2-x_0)}-\frac{f(x_0,x_1)}{(x_2-x_0)}$$

$$=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$$

$$=\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f(x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}-\frac{f(x_1)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$$

$$+\frac{f(x_0)}{(x_2-x_0)(x_1-x_0)}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}$$

Özellik 1.8. Verilen $f(x)$ fonksiyonu n. dereceden bir polinom ise,

$f(x,x_0)$ bölünmüş farkı (n-1).dereceden,

$f(x,x_0,x_1)$ bölünmüş farkı (n-2).dereceden,

$f(x,x_0,x_1,x_2)$ bölünmüş farkı (n-3).dereceden,

...

...

...

$f(x,x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$=sabit

$f\left(x,x_0,x_1,\ldots,x_n\right)=0$ olur.

Özellik 1.9. Bölünmüş farklar,

$$f\left(x_0,x_1\right)=\frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$f\left(x_0,x_1,x_2\right)=\frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_1) & f(x_2) \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

vb. determinant formunda gösterilebilirler.

2.10 İLERİ VE GERİ FARKLARIN BÖLÜNMÜŞ FARKLARLA İFADESİ

Çok genel olarak, biz Δ aracılığı ile ifade edilmiş olan h aralığını

$$\begin{aligned}\Delta^{r+1}f(x)&=\Delta^{r}\Delta f(x)\\&=\Delta^{r}\left(f(x+h)-f(x)\right)\\&=\Delta^{r}f(x+h)-\Delta^{r}f(x)\end{aligned}$$

bağıntılarını kullanarak;

$$\Delta^{r+1}f(x)=\Delta^{r}f(x+h)-\Delta^{r}f(x) \qquad (2.15)$$

ifadelerini tespit ederiz. Eğer çok özel bir notasyona gereksinme duyulursa Δ yerine Δ_h kullanılabilir.

İleri farklar kullanıldığında, tablo,

$$x_{k+1}=x_k+h \qquad (2.16)$$

şeklinde artan cebirsel sırada $x_0,x_1,x_2,\ldots$ apsislerini numaralandırmaya elverişlidir.

Daha sonra (2.1) ve (2.13) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki formülleri türetebiliriz.

$$\Delta f(x_k)=f(x_{k+1})-f(x_k)$$

$$=(x_{k+1}-x_k).f\left(x_k,x_{k+1}\right)$$

$$=h.f\left(x_k,x_{k+1}\right)$$

$$\Delta^2 f(x_k)=h.f\left(x_{k+1},x_{k+2}\right)-h.f\left(x_k,x_{k+1}\right)$$

$$=h.(x_{k+2}-x_{k+1}).f\left(x_k,x_{k+1},x_{k+2}\right)$$

$$=2h^2.f\left(x_k,x_{k+1},x_{k+2}\right)$$

ve genel olarak tümevarımla,

$$\Delta^r f(x_k)=(r-1)!h^{r-1}\left[f\left(x_{k+1},...,x_{k+r}\right)-f\left(x_k,...,x_{k+r-1}\right)\right]$$

$$=(r-1)!h^{r-1}(x_{k+r},x_k)f\left(x_k,...,x_{k+r}\right)$$

$$=r!h^r f\left(x_k,x_{k+1},...,x_{k+r}\right) \tag{2.17}$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer apsisler (2.16) bağıntısındaki gibi tekrar kısaltılıp numaralandırılırsa

$$\nabla f(x_k)=f(x_k)-f(x_{k-1})$$

$$=(x_k-x_{k-1})f\left(x_k,x_{k-1}\right)$$

$$=hf\left(x_k,x_{k-1}\right) \tag{2.18}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan genel olarak;

$$\nabla^r f(x_k)=r!h^r f\left(x_k,x_{k-1},...,x_{k-r}\right) \tag{2.19}$$

bulunur ki bu formül (2.17) bağıntısı ile benzerdir.

Keza, $\nabla^r f_k$ geri farkının (2.19) bağıntısında ifade edildiği gibi f_{k-r}, f_{k-r+1}, ... ,f_k ordinatlarına bağlı olduğu görülmektedir.

2.11 MERKEZİ FARKLAR

Bölünmüş farklar incelenirken tablodaki x_i ardışık değerleri arasındaki farkların yani adım uzunluklarının eşit olmadığı görülür. Ancak uygulamaların pek çoğunda adım uzunlukları eşittir. Bu durumda eşit uzunluklu veriler için aynı mertebeden her bölünmüş farkın paydaları eşit olacağından paydadaki değerler ihmal edilerek yeni farklar elde edilir. Bu yeni farklara bir fonksiyonun "merkezi farkları" denir.

Eğer hesaplama, tablo içindeki belli bir nokta civarında yapılıyorsa, o noktayı x_0 olarak ve $x_1, x_2, \ldots$ apsislerini ileri apsisler , $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ apsislerini geri apsisler olarak almak uygun olur. Böylece (2.16) bağıntısı tekrar geçerli olacaktır.

Merkezi fark notasyonu;

$$\delta f(x)=f(x+\tfrac{1}{2}h)-f(x-\tfrac{1}{2}h) \qquad (2.20a)$$

$$\delta^{r+1} f(x)=\delta^r f(x+\tfrac{1}{2}h)-\delta^r f(x-\tfrac{1}{2}h) \qquad (2.20b)$$

ile tanımlanır. Genel olarak $\delta f_k \equiv \delta f(x_k)$ özdeşliği ile gösterilen birinci mertebeden merkezi farkın hesaplanmış ordinatları içermediği görülür. Bununla beraber ikinci mertebeden merkezi fark,

$$\begin{aligned}\delta^2 f_k &= \delta f(x_k+\tfrac{1}{2}h)-\delta f(x_k-\tfrac{1}{2}h)\\ &= f(x_k+h)-f(x_k)-\Big[f(x_k)-f(x_k-h)\Big]\\ &= f_{k+1}-2f_k+f_{k-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur ve bu nedenle bu farklar tabloda mevcuttur. Yani $\delta^{2m} f_k$ gibi çift mertebeli bütün merkezi farkların tabloda bulunduğunu söylenebilir. Bundan başka,

$$\delta f_{k+(1/2)} = f_{k+1} - f_k$$

olduğu da söylenebilir. Daha genel olarak $\delta^{2m+1} f_{k+(1/2)}$ sadece hesaplanmış sonuçları içerir.

Daha önceki notasyonları kullanarak,

$$\delta f_{1/2}=f_1-f_0=hf(x_0,x_1)$$

$$\delta f_{-1/2}=f_0-f_{-1}=hf(x_0,x_{-1})$$

$$\delta^2 f_1=\delta f_{3/2}-\delta f_{1/2}=hf(x_1,x_2)$$

$$=2!h^2f(x_0,x_1,x_2)$$

yazılabilir. Ardışık hesaplamalarla,

$$\delta^{2m+1}f_{k+(1/2)}=h^{2m+1}(2m+1)!f(x_{k-m},\ldots,x_k,\ldots,x_{k+m},x_{k+m+1}) \tag{2.21}$$

$$\delta^{2m+1}f_{k-(1/2)}=h^{2m+1}(2m+1)!f(x_{k-m-1},x_{k-m},\ldots,x_k,\ldots,x_{k+m}) \tag{2.22}$$

$$\delta^{2m}f_k=h^{2m}(2m)!f(x_{k-m},\ldots,x_k,\ldots,x_{k+m}) \tag{2.23}$$

genel sonuçlarına ulaşılır.

Yaklaşık olarak hesaplanmış olan bir dahili x_0 tablo noktasının civarındaki değerlere karşı gelen fark tablosunun bir bölümü Çizelge 2.5 'te görülmektedir. Bu şekilde yatay çizgiler boyunca tek ya da kesirli olan indisler değişmeden aynı kalır.

Bundan dolayı bir fark tablosunda, önce farklar hesaplanıp, daha sonra tabloda yer alan kayıtlar numaralandırılır. Çizelge 2.6 dan da görülebileceği gibi ileri, merkezi ve geri farkların hazırlanan çizelgede mevcut olduğu görülür. Bu durumda, bu notasyonlardan herhangi birisinin bilinmesi ile diğer notasyonların tabloda gösterilebilmesi mümkündür. Bununla beraber hangi notasyonun nerede kullanılacağı ileride görülecektir.

Özellik 1.10. Kaydırma operatörü E aracılığıyla,

$$\delta=E^{1/2}-E^{-1/2} \Rightarrow E^{1/2}\delta=E^{1/2}(E^{1/2}-E^{-1/2})$$

$$=E-1$$

$$\Rightarrow E^{1/2}\delta=\Delta$$

$$\Rightarrow E\delta^2=\Delta^2 \Rightarrow \Delta E^{-1/2}=\delta$$

yazılabilir.

Çizelge 2.5 f(x) fonksiyonunun merkezi farkları

.	.				
.	.				
.	.				
x_{-2}	f_{-2}				
		$\delta f_{-3/2}$			
x_{-1}	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-1/2}$		$\delta^3 f_{-1/2}$	
x_0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{1/2}$		$\delta^3 f_{1/2}$	
x_1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{3/2}$			
x_2	f_2				
.	.				
.	.				
.	.				

Çizelge 2.6 Farklar arasındaki ilişki

.	.		
.	.		
.	.		
x_0	f_0		
		$\Delta f_0=\delta f_{1/2}=\nabla f_1$	
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0=\delta^2 f_1=\nabla^2 f_2$
		$\Delta f_1=\delta f_{3/2}=\nabla f_2$	
x_2	f_2		
.	.		
.	.		
.	.		

3. ENTERPOLASYON

3.1 GİRİŞ

"Enterpolasyon" sözcüğü, elemanter anlamda, bir fonksiyonun çizelge halinde verilmiş bir sayı dizisinden, bu fonksiyonun bilinmeyen değerlerinin hesaplanması işlemini tanımlamak için kullanılır. "ara değer bulmak" anlamına da gelen bu deyim geniş anlamda, verilmiş bir f(x) fonksiyonunun daha basit bir F(x) fonksiyonu ile gösterilmesi veya onun yerine kullanılması işlemi olarak tanımlanabilir.

f(x) fonksiyonu, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi x 'in belirli değerleri için F(x) ile ifade edilir. (x_0, f_0), (x_1, f_1), ... , (x_n, f_n) noktalarına enterpolasyon noktaları denir. f(x) enterpole edilen fonksiyon, F(x) ise enterpolasyon formülü olarak bilinir.

F(x) fonksiyonu değişik şekillerde seçilebilir. Polinomlar en basit fonksiyonlar olduklarından, enterpolasyon fonksiyonu olarak çoğunlukla polinomlar alınırlar. Standart enterpolasyon fomüllerinin hemen hemen hepsi polinomal formüllerdir.

Bu bölümde doğrusal ve polinomal enterpolasyon işlemlerinin yanında ağırlıklı olarak sonlu farklarla enterpolasyon formüllerine dayalı bütün yöntemler üzerinde durulmuştur.

3.2 DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Enterpolasyon fonksiyonu olarak birinci dereceden bir polinom kullanılırsa, böyle bir enterpolasyona "doğrusal enterpolasyon" denir.

Eğer $[x_0, x_1]$ aralığında x 'e bağlı bir f(x) fonksiyonu verilmişse bu aralıktaki doğrusal enterpolasyon işlemleri için

$$F(x)=A_0x + A_1 \tag{3.1}$$

şeklinde bir enterpolasyon fonksiyonu tanımlanır. Aralığın uç noktalarında,

$$f(x_0)=F(x_0) \tag{3.2a}$$

$$f(x_1)=F(x_1) \tag{3.2b}$$

olacağından,

$$f(x_0)=A_0x_0+ A_1 \tag{3.3a}$$

$$f(x_1)=A_0x_1+ A_1 \tag{3.3b}$$

elde edilir. (3.3a) ve (3.3b) eşitliklerinde bilinmiyen A_0 ve A_1 katsayıları

$$A_0= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{3.4a}$$

$$A_1= \frac{x_1f(x_0)-x_0f(x_1)}{x_1-x_0} \tag{3.4b}$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Bu değerleri (3.3) bağıntısında yerlerine yazarak enterpolasyon fonksiyonunu,

$$F(x)= \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\,x + \frac{x_1f(x_0)-x_0f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$= \frac{x\,f(x_1)-x\,f(x_0)+x_1f(x_0)-x_0f(x_1)}{x_1-x_0} \tag{3.5a}$$

$$= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}\,f(x_0) \tag{3.5b}$$

ve

$$w_0(x)= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \quad , \qquad w_1(x)= \frac{x_1-x}{x_1-x_0}$$

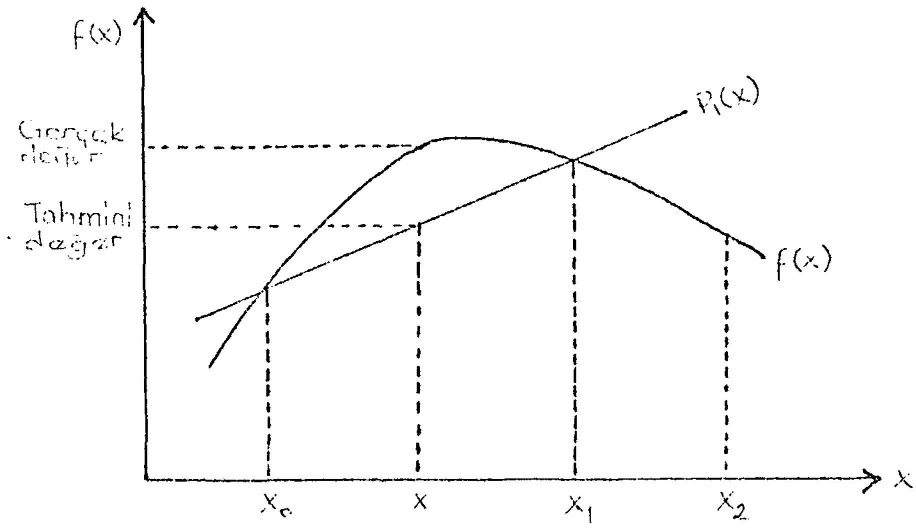
olarak tanımlayıp,

$$F(x)=w_0(x).f(x_1) + w_1.f(x_0) \tag{3.6}$$

yazabiliriz. Buraya kadar yapılan işlem Şekil 3.1 'de gösterilmiştir.

Buradan,

$$f\left(x_0,x_1\right)\equiv \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{3.7}$$



Şekil 3.1 Doğrusal enterpolasyon

olacağından (3.5a) bağıntısının payına $x_0 f(x_0)$ eklenip çıkarılırsa enterpolasyon fonksiyonu

$$F(x)=f(x_0)+(x-x_0)f\left(x_0,x_1\right) \tag{3.8}$$

formu ile veya

$$F(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\left(f(x_1)-f(x_0)\right) \tag{3.9}$$

ile ifade edilebilir. Yine (3.5) bağıntısı kullanılarak,

$$F(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\left((x_1-x)f(x_0)-(x_0-x)f(x_1)\right) \tag{3.10}$$

formunda da gösterilebilen enterpolasyon fonksiyonu

$$F(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} f(x_0) & x_0-x \\ f(x_1) & x_1-x \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

determinant formunda yazılabilir.

$P_{0,1}(x)$ ile $[x_0,x_1]$ aralığındaki herhangi bir x değeri için fonksiyonun alabileceği değeri gösterirsek,

$$P_{0,1}(x)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} P_0(x_0) & x_0-x \\ P_1(x_1) & x_1-x \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

notasyonu elde edilir. Bu notasyondaki $P_0(x_0)=f(x_0)$ ve $P_1(x_1)=f(x_1)$ dir.

3.3 POLİNOMAL ENTERPOLASYON TEORİSİ
LAGRANGE ENTERPOLASYON FORMÜLÜ

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ birbirinden farklı apsisler ve $y_0, y_1, \ldots, y_n$ 'ler de $y=f(x)$ fonksiyonu için bu apsislere karşılık gelen fonksiyonel değerler olsunlar. Problemimiz, verilmiş sayı dizisi için,

$$p(x_i)=F(x_i)=y_i \ , \ (i=0,1,2,\ldots,n) \tag{3.13}$$

olacak şekilde bir p(x) polinomunun bulunmasıdır.

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ gibi m+1 tane bağımsız parametre olduğunda m. dereceden bir polinom,

$$p(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_mx^m=\sum_{k=0}^{m}A_kx^k \tag{3.14}$$

şeklinde yazılsın. (3.13) bağıntısına göre $p(x_i)=F(x_i)=y_i, (i=0,1,\ldots,n)$ için n+1 tane lineer denklem elde edilir. m=n koşulu altında $A_0, A_1, \ldots, A_n$ parametrelerinin bulunabilmesi için,

$$\begin{aligned}
&A_0+A_1x_0+A_2x_0^2+\ldots+A_nx_0^n=y_0\\
&A_0+A_1x_1+A_2x_1^2+\ldots+A_nx_1^n=y_1\\
&\qquad\ldots\\
&\qquad\ldots\\
&\qquad\ldots\\
&A_0+A_1x_n+A_2x_n^2+\ldots+A_nx_n^n=y_n
\end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde (n+1) bilinmeyenli ve n+1 denklemli bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem matris ve vektör notasyonları kullanılarak,

$$X=[x_i^j] \ , (i,j=0,1,\ \ldots\ ,n)$$

$$A=(A_0,A_1,\ldots,A_n)^T \ , Y=(y_0,y_1,\ldots,y_n)^T \tag{3.16}$$

ile

$$AX=Y$$

dir. Daha açık olarak,

$$[A_0\ A_1\ \dots\ A_n]\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} = [y_0\ y_1 \dots\ y_n] \tag{3.17}$$

dır.

Teorem 3.1 $x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi n+1 tane farklı noktaya karşılık gelen $y_0, y_1, \dots, y_n$ ordinatları verildiğinde; x_i, $(i=0,1,\dots,n)$ 'lerde y_i 'ye enterpole edilen n. ya da daha az dereceden bir p(x) polinomu vardır.

İspat: Bu teoremin ispatı üç farklı durumda yapılacaktır.

I.Durum: (3.17) bağıntısındaki X matrisinin determinantı

$$\det(X) = \prod_{0\le j\le i\le n} (x_i - x_j) \tag{3.18}$$

x_i noktaları birbirinden farklı olduğundan sıfırdan farklıdır. Böylece X in singüler olmadığı görülür. Bu da XA=Y sisteminin tek çözüme sahip olduğunu gösterir. Bu nedenle n. ya da daha az dereceden bir enterpolasyon polinomunun var olduğu kanıtlanır.

II.Durum: XA=Y sisteminin sadece XB=0 homogen sistemi B=0 aşikar çözümüne sahipse tek çözümü vardır. Bu nedenle bir B dizisi için XB=0 olduğunu varsayalım. Aynı B kullanılarak,

$$q(x) = B_0 + B_1 x + \dots + B_n x^n$$

tanımlansın. XB=0 sisteminden,

$$q(x_i) = 0 \ , \ i=0,1, \dots ,n$$

ifadesine sahip oluruz. q(x) polinomu n+1 tane köke sahip ve n. ya da daha az derecedendir. q(x)=0 olmadıkça bu imkansızdır. o zaman bütün B_i katsayıları sıfır olur. Bu şekilde ispat tamamlanır.

III.Durum: Bu kez enterpolasyon polinomu açık olarak ifade edilecektir. $0\le i\le n$ olan bir i için,

$$y_i = 1 \ , \ j\ne i \text{ için } y_j = 0$$

olan özel bir enterpolasyon problemini gözönüne alalım. $j \neq i$ koşulu ile n tane kökleri x_j 'ler olan n. ya da daha az dereceden bir $L_i(x)$ polinomunu bulmak isteyelim. O zaman c bir sabit olmak üzere,

$$L_i(x) = c(x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \ldots (x-x_n)$$

dir. $L_i(x_i)=1$ koşullarından,

$$c = [(x_i-x_0)(x_i-x_1) \ldots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \ldots (x_i-x_n)]^{-1}$$

bulunur. O zaman $L_i(x)$ özel polinomu,

$$L_i(x) = \prod_{j\neq i} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) \quad ,(j=0,1,\ldots,n) \tag{3.19}$$

olarak yazılabilir. (3.13) bağıntısı ile verilen genel enterpolasyon problemini çözmek için,

$$p(x) = y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+ \ldots +y_nL_n(x) \tag{3.20}$$

yazılır. $L_i(x)$ polinomlarının özellikleriyle, p(x) kolayca (3.13) bağıntısını sağlar. Bütün $L_i(x)$ polinomları n. dereceden olduğundan p(x) de n. dereceden ya da daha az dereceden bir polinomdur.

Bu durum teknik uygulamalarda çok kullanılan bir özelliktir. Kapalı biçimde,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{3.21}$$

şeklinde de yazılan (3.20) bağıntısına "Lagrange enterpolasyon formülü" denir.

3.4 LAGRANGE ENTERPOLASYONU İÇİN AİTKEN YÖNTEMİ

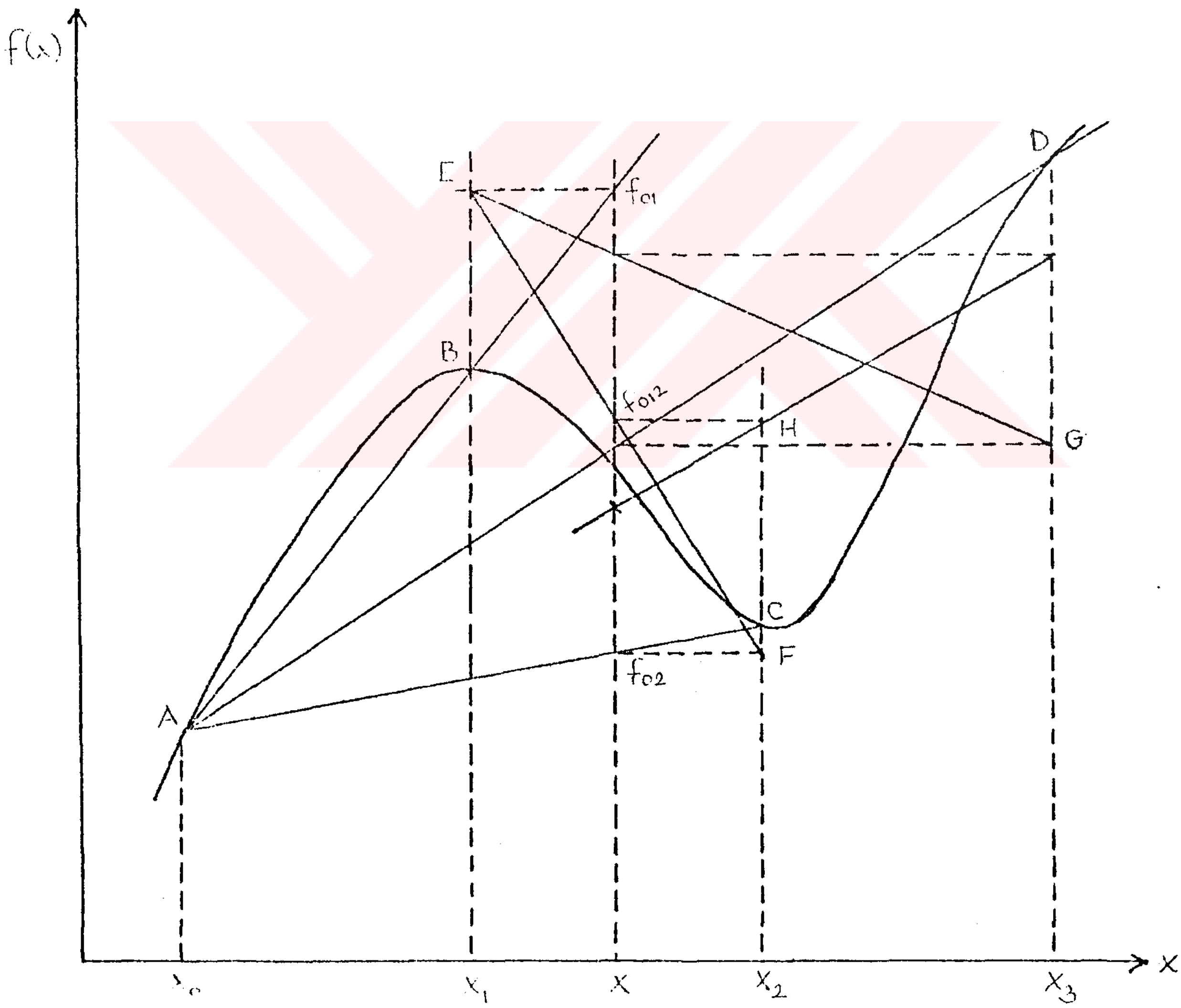
Aitken tarafından geliştirilmiş olan bu yöntemde Lagrange polinomu ardışık lineer enterpolasyonlarla bulunur. Bilinen f(x) fonksiyonu için verilen noktaların sayısı fazla olduğunda, enterpolasyon formülünün uzun olması sakıncası ortadan kalkar.

Teoriye girmeden önce, bağımsız değişkenin üç değerine karşılık fonksiyonel değerlerin verildiğini varsayalım.

Buna göre,

$A(x_0,f_0)$, $B(x_1,f_1)$, $C(x_2,f_2)$ noktaları fonksiyonun belirttiği eğri üzerindeki noktalar ve $x_0 < x < x_2$ olacak şekilde enterpolasyon noktası da x olsun.

Bu noktaları koordinat sisteminde belirleyelim ve bu noktalardan geçen eğriyi çizelim.



Şekil 3.2 Aitken Yöntemi

AB kirişinin x 'teki ordinatı kestiği noktayı f_{01} ve AC kirişinin x deki ordinatı kestiği noktayı da f_{02} ile gösterelim. AB kirişinin denklemi,

$$y-f_0=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \tag{3.22}$$

olarak yazılıp düzenlenirse,

$$y(x_1-x_0)-(x_1-x_0)f_0=(f_1-f_0)(x-x_0)$$

veya daha uygun olarak,

$$y=\frac{(x-x_0)f_1-(x-x_1)f_0}{x_1-x_0} \tag{3.23}$$

olur. Bu denklem determinant formunda,

$$y=\frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & f_0 \\ x-x_1 & f_1 \end{vmatrix}}{x_1-x_0} \tag{3.24}$$

şeklinde ifade edilir ve $f_{01}(x)$ veya kısaca f_{01} ile gösterilir.

Tamamen benzer yöntemle AC kirişinin denklemi de,

$$f_{02}=\frac{(x-x_0)f_2-(x-x_2)f_0}{x_2-x_0} \tag{3.25a}$$

veya

$$f_{02}=\frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & f_0 \\ x-x_2 & f_2 \end{vmatrix}}{x_2-x_0} \tag{3.25b}$$

şeklinde yazılabilir. Genel olarak n+1 tane nokta için, i=1,2,...,n olmak üzere,

$$f_{0i}=\frac{(x-x_0)f_i-(x-x_i)f_0}{x_i-x_0} \tag{3.26a}$$

veya

$$f_{01}=\frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & f_0 \\ x-x_1 & f_1 \end{vmatrix}}{x_1-x_0} \tag{3.26b}$$

yazılır. (3.26b) bağıntısında $x=x_0$ olarak alınırsa,

$$f_{01}(x_0)=\frac{\begin{vmatrix} x_0-x_0 & f_0 \\ x_0-x_1 & f_1 \end{vmatrix}}{x_1-x_0} = -\frac{(x_0-x_1)f_0}{(x_1-x_0)} = f_0$$

ve aynı bağıntıda $x=x_1$ olarak alındığında da,

$$f_{01}(x_0)=\frac{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & f_0 \\ x_1-x_1 & f_1 \end{vmatrix}}{x_1-x_0} = \frac{(x_1-x_0)f_1}{(x_1-x_0)} = f_1$$

olur. Bu da herhangi bir enterpolasyon formülünde var olması gereken genel koşuldur.

İşleme devam edilerek, aynı yöntemle $E(x_1, f_{01})$ ve $F(x_2, f_{02})$ noktalarından geçen doğru denklemi yazılarak, bu doğrunun x 'teki ordinatı f_{012} elde edilir. Bu ordinat,

$$f_{012}(x)=\frac{(x-x_1)f_{02}-(x-x_2)f_{01}}{x_2-x_1} \tag{3.27}$$

veya determinant formunda,

$$f_{012}(x)=\frac{\begin{vmatrix} x-x_1 & f_{01} \\ x-x_2 & f_{02} \end{vmatrix}}{x_2-x_1}$$

ile ifade edilir. Daha fazla nokta kullanılırsa, $i=2,3,\ldots,n$ olmak üzere,

$$f_{01i}(x)=\frac{(x-x_1)f_{0i}-(x-x_i)f_{01}}{x_i-x_1}$$

veya

$$f_{01i}(x)=\frac{\begin{vmatrix} x-x_1 & f_{01} \\ x-x_i & f_{0i} \end{vmatrix}}{x_i-x_1}$$

formları yazılabilir. Sadece dört nokta kullanıldığında determinant notasyonunun nasıl uygulanacağını gösteren çizelge aşağıdadır.

Çizelge 3.1 Determinant notasyonunda Aitken enterpolasyon formülü

x_0	$x-x_0$	f_0			
x_1	$x-x_1$	f_1	f_{01}		
x_2	$x-x_2$	f_2	f_{02}	f_{012}	
x_3	$x-x_3$	f_3	f_{03}	f_{013}	f_{0123}

Çizelgenin bulunan en son değeri, yani buradaki f_{012} ,$x_0< x < x_2$ için fonksiyonun yaklaşık değeridir. $f_{012}(x)$ 'in verilen noktaların kullanılmasıyla bulunacak bir Lagrange enterpolasyon formülüne denk olacağı aşağıdaki gibi gösterilebilir.

(3.27) bağıntısında f_{01} ve f_{02} 'nin değerleri yerlerine yazılırsa,

$$f_{012}=\frac{(x-x_0)\left(\dfrac{(x-x_0)f_2-(x-x_2)f_0}{x_2-x_0}\right)-(x-x_0)\left(\dfrac{(x-x_0)f_1-(x-x_1)f_0}{x_1-x_0}\right)}{x_2-x_1}$$

olur. Bu ifade düzenlendiğinde sonuç olarak,

$$f_{012}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f_2$$

bulunur. Bu denklem ikinci dereceden Lagrange enterpolasyon polinomudur.

Daha fazla sayıda nokta kullanıldığında bütün f_{01i} 'lerin aynı şekilde ikinci dereceden Lagrange enterpolasyon polinomları olacakları açıktır.

Çok sayıda nokta verildiğinde, bağımsız değişkenin bir x değerine karşılık fonksiyonel değerinin Lagrange enterpolasyonu ile Aitken yöntemi kullanılarak hesaplanması için $f_{012i}, f_{0123i}, \ldots, f_{01\ldots n}$ çokluklarının bulunması gerekir.

Çizelge 3.2 Beşinci mertebeden Lagrange enterpolasyon polinomu

x_i	$(x-x_i)$	f_i	f_{0i}	f_{01i}	f_{012i}	f_{0123i}	f_{01234i}
x_0	$(x-x_0)$	f_0					
x_1	$(x-x_1)$	f_1	f_{01}				
x_2	$(x-x_2)$	f_2	f_{02}	f_{012}			
x_3	$(x-x_3)$	f_3	f_{03}	f_{013}	f_{0123}		
x_4	$(x-x_4)$	f_4	f_{04}	f_{014}	f_{0124}	f_{01234}	
x_5	$(x-x_5)$	f_5	f_{05}	f_{015}	f_{0125}	f_{01235}	f_{012345}

Çizelge 3.2 'de n=5 için bu çoklukların nasıl hesaplanılacağı gösterilmiştir. Burada, örneğin (x_2, f_{012}) ve (x_5, f_{015}) noktaları kullanılarak,

$$f_{0125} = \frac{\begin{vmatrix} x-x_2 & f_{012} \\ x-x_5 & f_{015} \end{vmatrix}}{x_5-x_2} = \frac{(x-x_2)f_{015} - (x-x_5)f_{012}}{x_5-x_2}$$

olarak hesaplanır.

Genel olarak, m. mertebeden Aitken enterpolasyonu için,

$$f_{01\ldots imn} = \frac{(x-x_m)f_{01\ldots in} - (x-x_n)f_{01\ldots im}}{x_n-x_m} \tag{3.38}$$

formunu tanımlayabiliriz.

Lagrange enterpolasyonunun Aitken yöntemi ile yapılması,

a) İşlemi hızlandırması,

b) İstenilen doğrulukta sonuca erişildiğinde, daha az dereceden polinomlarla sonuca varması,

c) İşlemlere ardışıklık kazandırması,

d) Eşit aralıklı olan veya olmayan veriler için, diğer enterpolasyon yöntemlerinin kullanılması durumlarında da kolaylıkla uygulanabilmesi avantajlarından dolayı önemlidir.

3.5.NEWTON İLERİ VE GERİ FARK FORMÜLLERİ

x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, ..., $x_n=x_0+nh$ apsisleri için f(x) 'in alacağı değerler ile n. dereceden bir polinomla sonuçlanan, n+1 tane terimin alınmasıyla bir enterpolasyon formülü elde etmek için Newton bölünmüş farklar formülünü kullanabiliriz. (2.17) bağıntısı izlenerek,

$$f\left(x_0,\ldots,x_r\right)=\frac{1}{r!h^r}\,\Delta^r f_0 \tag{3.29}$$

bağıntısını kullanarak,

$$f(x)=f_0+(x-x_0)\frac{\Delta f_0}{1!h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}+\ldots$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}+E(x) \tag{3.30}$$

sonucu elde edilir. Bu formülde,

$$E(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{3.31}$$

olarak belirlenir. Burada ξ , x_0,x_1 ,x_2, ... ,x_n ve x ile aralanmış aralık içindedir.

$$s=\frac{x-x_0}{h}\,,\qquad x=x_0+hs \tag{3.32}$$

bağıntılarını kullanarak ve $x-x_k=h(s-k)$ eşitliğinden yararlanılarak, daha önceki (3.30) bağıntısı,

$$f_s = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots$$

$$+ \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 + E_s \qquad (3.33)$$

formunu alır. Buna göre,

$$E_s = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} s(s-1) \ldots (s-n) f^{(n+1)}(\xi) \qquad (3.34)$$

dir. Burada,

$$f_s \equiv f(x_0+hs) = f(x) \qquad E_s \equiv E(x_0+hs) = E(x)$$

yazılmıştır. (3.33) bağıntısında E_s hata teriminin ihmal edilmesi sonucu elde edilen formüle "Newton ileri fark formülü" denir. Bu formül için Çizelge 3.3 'teki fark çizelgesi verilmiştir.

Çizelge 3.3 İleri fark yolu

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f_0 & & & \\
 & & \Delta f_0 & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & \\
 & & \Delta f_1 & & \\
x_2 & f_2 & & & \\
\cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & & &
\end{array}$$

Benzer bir yol ile, eğer x_N, x_{N-1}, x_{N-2}, ve bunun gibi ordinatları sırayla belirleyen bir formüle gerek duyarsak x_0 ile x_N, x_1 ile x_{N-1}, ... , x_k ile de x_{N-k} kullanılarak bu form,

$$f(x) = f(x_N) + (x-x_N) f\left(x_N, x_{N-1}\right)$$

$$+ (x-x_N)(x-x_{N-1}) f\left(x_N, x_{N-1}, x_{N-2}\right) + \ldots$$

$$+ (x-x_N)(x-x_{N-1}) \ldots (x-x_{N-n+1}) f\left(x_N, x_N, \ldots, x_{N-n}\right) \qquad (3.35)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Burada,

$$s = \frac{x-x_N}{h} \qquad x = x_N + hs$$

yazılıp (2.19) bağıntısı kullanılarak,

$$f_{N+s} = f_N + s\nabla f_N + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_N + \ldots$$

$$+ \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_N + E_s \qquad (3.36)$$

daha kısa olan denklem elde edilir. Burada

$$E_s = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\, s(s+1)\ \ldots\ (s+n) f^{(n+1)}(\xi) \qquad (3.37)$$

olarak ifade edilir. Bu formül E_s ihmal edildiğinde "Newton geri fark formülü" olarak bilinir. Formül için Çizelge.3.4 'teki fark yolu izlenir.

Çizelge 3.4 Geri fark yolu

$$\begin{array}{lllll} & \vdots & \vdots & & \\ & x_{N-2} & f_{N-2} & & \\ & & & \nabla f_{N-1} \longrightarrow & \\ & x_{N-1} & f_{N-1} \longrightarrow & & \nabla^2 f_N \longrightarrow \\ & & & \nabla f_N \longrightarrow & \\ s \downarrow & x_N & f_N \longrightarrow & & \end{array}$$

Eğer (3.33) bağıntısında r+1 terimi yokedilirse x_0, x_1, ..., x_r de f(x) ile uyuşan polinom ele geçirilir.(3.36) bağıntısında r+1 terimi yokedilirse $x_N, x_{N-1}, x_{N-2}, \ldots, x_{N-r}$ de f(x) ile uyuşan polinom elde edilir. Eğer n+1 terim her iki formülde de ihmal edilirse böylece her iki formül de aynı koordinatları içerecek ve aynı polinom yaklaşımı türetilecektir.

Çok daha genel olarak, yukardaki bağıntılardan ilki olan (3.33) bağıntısı, çizelgenin ön uç değerleri için ve sonuncusu olan (3.36) bağıntısıise çizelgenin son uç değerleri için kullanılır. (3.33) bağıntısı kullanılırken sadece ileri farklar ve (3.36) bağıntısı kullanılırken sadece geri farklar elde edilmelidir. Geri fark formülü özellikle bir hesaplamayı genişletmek için ve diferansiyel denklemlerin çözümünde formüller üretmede yararlıdır. Bu nedenle, her iki formülde de tablonun içinde s ileriye doğru ölçülmüştür.

Bu durumda, s, (3.36) bağıntısındaki ekstrapolasyon için ve (3.33) bağıntıdaki enterpolasyon için pozitiftir. Şüphesiz, her iki formül enterpolasyon veya ekstrapolasyon için kullanılabilir.

Bu formüller,

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ \ldots\ (r-k+1)}{k!} \qquad (3.38)$$

gösterimini kullanarak

$$f_s \equiv f(x_0+hs) \approx \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \qquad (3.39)$$

sade şekliyle daha kısa formda yazılabilirler.

Ayrıca (3.36) bağıntısındaki $\nabla^k f_0$'ın katsayısı,

$$\binom{s+k-1}{k} = \frac{s(s+1)\ \ldots\ (s+k-1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{(-s)(-s-1)\ \ldots\ (-s-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \binom{-s}{k} \qquad (3.40)$$

olur. Buna göre geri fark formülü,

$$f_{N+1} \equiv f(x_N+hs) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_N \qquad (3.41a)$$

ve

$$f_{N-1} \equiv f(x_N-hs) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{s}{k} \nabla^k f_N \qquad (3.41b)$$

formunu alır.

3.6 GAUSS FORMÜLLERİ

Bir $\bar{x}$ noktasındaki enterpolasyon için, $\bar{x}$ 'ye mümkün olduğu kadar yakın apsislere karşı gelen dahili koordinatları içeren uygun bir formüle sahip olmak istenir. Eğer $\bar{x}$ tablonun sonunda ise Newton formülünü bu amaçla iyi bir şekilde kullanmak mümkündür. Aksi taktirde (yani $\bar{x}$ tablonun sonunda değilse) $\bar{x}$ 'ye en yakın x_0 apsisi ile başlamak, sonra x_1 ve x_{-1}'i, x_2 ve x_{-2}'yi ve diğerlerini dahil etmek uygundur.

Eğer ordinatlar $f_0, f_1, f_{-1}, f_2, f_{-2}, \ldots,$ sırasında düzenlenirse (3.35) eşitliğinde $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ apsislerini $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \ldots$ ile değiştirmenin sonucu k=0 ile (2.21) ve (2.23) bağıntıları kullanılarak,

$$f(x)=f_0+(x-x_0)\frac{\delta f_{1/2}}{1!h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\delta^2 f_0}{2!h^2}$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\delta^3 f_{1/2}}{3!h^3}$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\frac{\delta^4 f_0}{4!h^4}+\ldots$$

formu elde edilir.

Eğer

$$s=\frac{x-x_0}{h} \qquad \text{ve } x=x_0+hs \tag{3.42}$$

yazarsak bu sonuç şu formu alır:

$$f_s=f_0+s\delta f_{1/2}+\frac{s(s-1)}{2!}\delta^2 f_0+\frac{s(s^2-1^2)}{3!}\delta^3 f_{1/2}$$
$$+\frac{s(s^2-1^2)(s-2)}{4!}\delta^4 f_0+\ldots$$
$$+\frac{s(s^2-1^2)\ldots(s^2-(m-1)^2)(s-m)}{(2m)!}\delta^{2m} f_0$$

veya

$$+\frac{s(s^2-1^2)\ldots(s^2-m^2)}{(2m+1)!}\delta^{2m+1} f_{1/2}+E_s \tag{3.43}$$

Burada n.mertebeden faklar biliniyorsa, n 'nin tek ya da çift olmasına göre hata terimleri bulunabilir. n=2m olduğunda hata terimi

$$E_s=h^{2m+1}\frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-m^2)}{(2m+1)!}\ f^{(2m+1)}(\xi) \tag{3.44}$$

ve n=2m+1 olduğunda hata terimi

$$E_s=h^{2m+2}\frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-m^2)(s-m-1)}{(2m+2)!}\ f^{(2m+2)}(\xi) \tag{3.45}$$

formunu alır. Bu formül Çizelge.3.5 'de gösterilen ileri zigzag yolunu ortaya çıkarır ve "Gauss ileri formülü" olarak bilinir.

Tamamen benzer bir yol ile ordinatlar $f_0, f_{-1}, f_1, f_{-2}, f_2,\ \dots$ sırasında alınırsa (2.22) ve (2.23) kullanılarak, k=0 ile tekrar (2.21) kısaltmasını dahil ederek,

Çizelge 3.5 Gauss ileri zigzag yolu

$$\begin{array}{llllll}
\vdots & \vdots & & & & \\
x_{-2} & f_{-2} & & & & \\
 & & \delta f_{-3/2} & & & \\
x_{-1} & f_{-1} & & \delta^2 f_{-1} & & \\
 & & \delta f_{-1/2} & & \delta^3 f_{-1/2} & \\
x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & & \delta^4 f_0 \\
 & & \delta f_{1/2} & & \delta^3 f_{1/2} & \\
x_1 & f_1 & & \delta^2 f_1 & & \\
 & & \delta f_{3/2} & & & \\
x_2 & f_2 & & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}$$

$$f_s=f_0+s\delta f_{-1/2}+\frac{s(s+1)}{2!}\ \delta^2 f_0+\frac{s^2(s^2-1^2)}{3!}\ \delta^3 f_{-1/2}$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)(s+2)}{4!}\ \delta^4 f_0$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-(m-1)^2)(s+m)}{(2m)!}\ \delta^{2m} f_0$$

veya

$$+\frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-m^2)}{(2m+1)!}\ \delta^{2m+1}f_{-1/2}$$

$$+ E_s \qquad (3.46)$$

formunu elde ederiz. Burada hata terimleri n in çift ya da tek olmasına göre

$$E_s=h^{2m+1}\ \frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-m^2)}{(2m+1)!}\ f^{(2m+1)}(\xi) \qquad (3.47a)$$

veya

$$E_s=h^{2m+2}\ \frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-m^2)(s+m+1)}{(2m+2)!}\ f^{(2m+2)}(\xi) \qquad (3.47b)$$

olarak belirlenir. Bu formül geri zigzag fark yolunu ortaya çıkarır ve "Gauss geri formülü" olarak bilinir.

(2m). mertebeden bir çift farkla sonuca ulaşıldığında her iki formül $x_0, x_{\mp 1}, x_{\mp 2}, \dots, x_{\mp m}$ de f(x) 'e uygun bir polinomu sağlar. Bu durumda her ikiside tamamiyle özdeştir. Buna rağmen (2m+1).mertebeden bir tek farkla sonuca ulaşıldığında ileri formül $x_0, x_{\mp 1}, x_{\mp 2}, \dots, x_{\mp m}$ ve x_{m+1} de f(x) 'e uygun bir polinom verir. Bununla beraber geri formül ilk m+1 ve x_{-m-1} de uyum sağlar. Bu son durumda $f(\bar{x})$ 'yi ararken ileri formülün, $\bar{x}$, x_0 ile x_1 arasında iken daha iyi sonuçlar verebileceği umulur. Oysa $\bar{x}$, x_{-1} arasında iken geri formül genellikle tercih edilir. Bu formüllerin hiçbiri pratikte sıkça kullanılmaz. Ancak bu formüllerden, başka yararlı formüller türetilmiştir.

3.7 STIRLING FORMÜLÜ

Enterpolasyon sözgelimi $x_0-\frac{1}{2}h$ ve $x_0+\frac{1}{2}h$ arasındaki x_0 noktası yakınındaki $\bar{x}$ değeri için yapılacaksa, Gauss ileri ve geri formüllerinin ortalaması ile şekillendirilen (ortalamaları alarak elde edilen) bir formül sık sık kullanılır.Bu ortalamalar ile x_0 apsisine göre öyle bir simetri elde edilir ki;

$$f_s=f_0+\frac{s}{2}\ (\delta f_{1/2}+\delta f_{-1/2})+\frac{s}{2.2!}\ ((s-1)+(s+1))\delta^2 f_0$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)}{2.3!}\ (\delta^3 f_{1/2}+\delta^3 f_{-1/2})$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)}{2.4!}((s-2)+(s+2))\delta^4 f_0+\ldots$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)\ldots(s^2-(m-1)^2)}{2.(2m)!}((s-m)+(s+m))\delta^{2m} f_0$$

veya,

$$+\frac{s(s^2-1^2)\ldots(s^2-m^2)}{2.(2m+1)!}(\delta^{2m+1} f_{1/2}+\delta^{2m+1} f_{-1/2})$$

$$+E_s \tag{3.48}$$

dir. Bu formülde ortaya çıkan tek farkların ortalaması için (2.12) bağıntısındaki μ sembolünü geliştirmek uygundur. Bu notasyon,

$$\mu\delta f_0=\frac{1}{2}(\delta f_{1/2}+\delta f_{-1/2}) \qquad \mu\delta^3 f_0=\frac{1}{2}(\delta^3 f_{1/2}+\delta^3 f_{-1/2}) \tag{3.49}$$

şeklinde kullanılabilir.

Teklerin dizilişinin "ortalama merkezi farkları" denen bu notasyonla (3.43) formu;

$$f_s=f_0+s.\mu\delta f_0+\frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0+\frac{s(s^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 f_0$$

$$+\frac{s^2(s^2-1^2)}{4!}\delta^4 f_0+\ldots$$

$$+\frac{s^2(s^2-1^2)\ldots(s^2-(m-1)^2)}{(2m)!}\delta^{2m} f_0$$

veya,

$$+\frac{s(s^2-1^2)\ldots(s^2-m^2)}{(2m+1)!}\mu\delta^{2m+1} f_0$$

$$+E_s \tag{3.50}$$

formunu alır. Bu formül, E_s 'nin ihmal edilmesi sonucunda "Stirling enterpolasyon formülü" olarak bilinir ve Çizelge 3.6 'daki düzenlemeye karşı gelir.

Çizelge 3.6 Stirling enterpolasyonu için izlenen yol

$$\begin{array}{c} s\downarrow \quad x_0 \end{array} \qquad f_0 \longrightarrow \begin{matrix}\delta f_{-1/2}\\ | \\ \delta f_{1/2}\end{matrix} \longrightarrow \delta^2 f_0 \longrightarrow \begin{matrix}\delta^3 f_{-1/2}\\ | \\ \delta^3 f_{1/2}\end{matrix} \longrightarrow \delta^4 f_0 \longrightarrow$$

(3.43) ve (3.46) ile ilişkili çift farklı hatalar özdeş olduğundan, n=2m iken

$$E_s = h^{2m+1}\frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-m^2)}{2.(2m+1)!}\,f^{(2m+1)}(\xi) \tag{3.51}$$

olur. Önceki durumda olduğu gibi, ξ formüle dahil edilen apsislerin en küçük ve en büyükleri arasındadır.

Mamafih, n=2m+1 iken (3.45) ve (3.48) hatalarının ortalaması

$$E_s=h^{2m+2}\frac{s(s^2-1^2)\ \dots\ (s^2-m^2)}{2.(2m+2)!}\Big((s-m-1)f^{(2m+2)}(\xi_1)+(s+m+1)f^{(2m+2)}(\xi_2)\Big) \tag{3.52}$$

formunu alır ki burada ξ_1 ve ξ_2 'den her ikisi $x_0, x_{\mp 1}, \ \dots\ , x_{\mp(m+1)}$ ve x aralık uzunluğu içinde kalır. Bu nedenle Stirling formülü farkla sonuçlandığında hata terimi (3.52)'dekine benzer şekil almaz. Şuna dikkat edilmelidir ki; bu durumda formül tarafından sağlanan (2m+1). dereceden enterpolasyon polinomu 2m+1 noktada yani $x_0, x_{\mp 1}, \ \dots\ , x_{\mp m}$ için f(x) ile uyumludur. Fakat ek bir (2m+2). nokta polinoma uyum sağlasa bile, bu nokta için uyum bilinmez.

Stirling formülü çift mertebeden farklarla sonuçlanan her iki Gauss formülüne özdeştir. Fakat çift indisli sıra farklarının katsayıları s 'nin çift fonksiyonu, tek indisli sıra ortalama faklarının katsayıları s 'nin tek fonksiyonu olduğu gerçeğinden dolayı bu durumda bile onun formu daha uygundur. Katsayıların kısa bir tablosu kısım 4.4 'te sunulmuştur.

3.8 BESSEL FORMÜLÜ

Mademki Stirling formülü prensip olarak tablodaki bir x_0 kaydı civarındaki enterpolasyon için kullanılır, bu durumda belli bir aralık üzerindeki (örneğin x_0 ve x_1 aralığı) enterpolasyon için sık sık bir formüle ihtiyaç duyulur. Bu örneğe göre içerilen farkların düzeni x_0 ve x_1 arasındaki yatay orta çizgiye simetrik olan bir formül elde etmek için Çizelge 3.5 'te ileri zigzag boyunca farkları içeren ve onu geri zigzag boyunca formülle birleştiren

$$f_s=f_0+s\delta f_{1/2}+\frac{s(s-1)}{2!}\delta^2 f_0+\frac{s(s-1)(s+1)}{3!}\delta^3 f_{1/2}+\dots \tag{3.53}$$

Gauss ileri formülü tekrar kullanılır. Eğer s, x_1'den ölçülmüşse, (3.53) formülü Gauss ileri formülündeki bütün indisler üzerinden tek tek ilerleyerek elde edilir. Bununla beraber eğer her iki formülde de s, x_0'dan ölçülmek zorunda ise (3.46) 'daki indisler birer birer ilerletilmelidir. Aynı zamanda,

$$f_s=f_1+(s-1)\delta f_{1/2}+\frac{(s-1)s}{2!}\delta^2 f_1+\frac{(s-1)s(s-2)}{3!}\delta^3 f_{1/2}+\dots \tag{3.54}$$

sonucunu vermek üzere s, (s-1) ile değiştirilmelidir.

(3.53) ve (3.54) 'ün ortalamaları

$$f_s=\mu f_{1/2}+(s-\tfrac{1}{2})\,\delta f_{1/2}+\frac{s(s-1)}{2!}\mu\delta^2 f_{1/2}$$

$$+\frac{s(s-1)(s-\frac{1}{2})}{3!}\delta^3 f_{1/2}$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)\dots(s^2-(m-1)^2)(s-m)}{(2m)!}\mu\delta^{2m} f_{1/2}$$

veya,

$$+\frac{s(s^2-1^2)\dots(s^2-(m-1)^2)(s-m)(s-\frac{1}{2})}{(2m+1)!}\delta^{2m+1} f_{1/2}$$

$$+E_s \tag{3.55}$$

şeklini alır. Bu form E_s'nin ihmal edilmesi durumunda "Bessel formülü" olarak bilinir. İlgili data düzeni Çizelge 3.7 'de gösterilmiştir.

Farklar (2m+1).mertebeden tek bir farkla sonuçlandıklarında (3.53) ve (3.54) 'ün her ikisi $x=x_0, x_{\mp1}, x_{\mp2}, \dots, x_{\mp m}$ ve $x=x_{m+1}$ olduğunda f(x) 'e uyan

Çizelge 3.7 Bessel ileri fark yolu

$$\begin{array}{cccccccccc} & x_0 & f_0 & & \delta^2 f_0 & & \delta^4 f_0 & \\ s\downarrow & & | \longrightarrow & \delta f_{1/2} \longrightarrow & | \longrightarrow & \delta^3 f_{1/2} \longrightarrow & | \longrightarrow & \\ & x_1 & f_1 & & \delta^2 f_1 & & \delta^4 f_1 & \end{array}$$

(2m+1). dereceden bir polinoma uyum sağlar. n=2m+1 iken aynı durum Bessel formülüne ve hataya uygulandığında (3.45) sonucu ile özdeştir.

Bununla beraber Bessel formülü çift mertebeden farklarla bittiğinde hata terimi (3.47) 'nin ilk şekli ve (3.44) 'ün ortalamaları ve s yerine (s-1) alınarak elde edilir. İki ifadedeki ξ 'lerin aynı olmadığına dikkat edilmelidir.

n=2m iken;

$$E_s = h^{2m+1}\frac{s(s^2-1^2)\ldots(s^2-(m-1)^2)(s-m)}{2(2m+1)!}\Big[(s+m)f^{(2m+1)}(\xi_1) + (s-m-1)f^{(2m+1)}(\xi_2)\Big] \qquad (3.56)$$

fomunda ξ_1 ve ξ_2, $x_0, x_{\mp 1}, \ldots, x_{\mp m}, x_{\mp m+1}$ ve x ile aralanmış aralık içine düşerler.

(3.55) 'te görülen katsayıların kısa bir tablosu kısım 4.4 'te verilmiştir.

(x_0, x_1) aralığının orta noktasına ait bu formülün simetriği s yerine $s=t+\frac{1}{2}$ kullanarak daha belirgin duruma gelir. Buna göre;

$$t = \frac{x-\frac{1}{2}(x_0+x_1)}{h} = s-\frac{1}{2} \qquad (3.57)$$

olur. Burada t orta noktadan h birimleri ile ölçülmüş aralıktır. Bundan sonra Bessel formülünün

$$f_{t+(1/2)} = \mu f_{1/2} + t\delta f_{1/2} + \frac{t^2-\frac{1}{4}}{2!}\mu\delta^2 f_{1/2} + \frac{t(t^2-\frac{1}{4})}{3!}\delta^3 f_{1/2} + \frac{(t^2-\frac{1}{4})(t^2-\frac{9}{4})}{4!}\mu\delta^4 f_{1/2} + \frac{t(t^2-\frac{1}{4})(t^2-\frac{9}{4})}{5!}\delta^5 f_{1/2} + \ldots \qquad (3.58)$$

eşdeğer formunu aldığı kolaylıkla kanıtlanır. Burada son bulan terim ve buna karşı gelen hata terimi (3.57) 'yi, (3.55) ve (3.56)' da verilen formlar şekline sokarak elde edilebilir. Böylece çift mertebeden farkların ortalamalarının katsayılarının t 'nin çift fonksiyonu olduğunu görürüz. Oysaki tek mertebeden farkların katsayıları t 'nin tek fonksiyonudur.

(3.55) 'te $s=\frac{1}{2}$ veya (3.58) 'de t=0 yazarsak;

$$f_{1/2}=\frac{1}{2}(f_0+f_1)-\frac{1}{16}(\delta^2 f_0+\delta^2 f_1)+\frac{3}{256}(\delta^4 f_0+\delta^4 f_1)-\frac{5}{2048}(\delta^6 f_0+\delta^6 f_1)+\ldots$$

$$+(-1)^m\frac{[1.3.5\ldots(2m+1)]^2}{2^{2m+1}(2m)!}(\delta^{2m}f_0+\delta^{2m}f_1)+E_{1/2} \tag{3.59}$$

gibi önemli bir özel durum elde edilir. Burada;

$$E_{1/2}=(-1)^m\frac{[1.3\ldots(2m+1)]^2}{2^{2m+2}(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\xi) \tag{3.60}$$

ve $x_0-mh < \xi < x_0+mh$ olarak belirlenir.

Bu formül "yarı yarıya enterpolasyon" olarak bilinir ve özellikle dataların kısmi tablolanması için kullanışlıdır.

3.9 EVERETT FORMÜLÜ

Birçok hesaplamalarda, genellikle $\delta^2 f$ ve $\delta^4 f$ gibi çift mertebeden merkezi farkların yardımcı tabloları önceden hazırlanır.

$$f_s=(f_0+s\delta f_{1/2})+\frac{s(s-1)}{2!}\left(\delta^2 f_0+\frac{s+1}{3}\delta^3 f_{1/2}\right)$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)(s-2)}{4!}\left(\delta^4 f_0+\frac{s+2}{5}\delta^5 f_{1/2}\right)+\ldots$$

$$+\frac{s(s^2-1^2)\ldots(s^2-(m-1)^2)(s-m)}{(2m)!}\left(\delta^{2m}f_0+\frac{s+m}{2m+1}\delta^{2m+1}f_{1/2}\right)$$

$$+E_s \tag{3.61}$$

formunda yazılmış bir tek mertebeden farkla sonuçlanmış sadece çift mertebeden merkezi farkların kapsandığı

$$E_s = h^{2m+2} \frac{s(s^2-1^2)\ \ldots\ (s^2-m^2)(s-m-1)}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi) \tag{3.62}$$

olan bir enterpolasyon formülü elde etmek için Gauss ileri formülü ile başlanılabilir.

$$\delta f_{1/2} = f_1 - f_0 \qquad \delta^3 f_{1/2} = \delta^2 f_1 - \delta^2 f_0 \tag{3.63}$$

bağıntıları kullanılırsa bu formül,

$$\begin{aligned} f_s = (1-s)f_0 &- \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \delta^2 f_0 \\ &- \frac{(s+1)s(s-1)(s-2)(s-3)}{5!} \delta^4 f_0 - \ldots \\ &- \frac{(s+m-1)(s+m-2)\ldots(s-m-1)}{(2m+1)!} \delta^{2m} f_0 \\ +sf_1 &+ \frac{(s+1)s(s-1)}{3!} \delta^2 f_1 \\ &+ \frac{(s+2)(s+1)s(s-1)(s-2)}{5!} \delta^4 f_1 + \ldots \\ &+ \frac{(s+m)(s+m-1)\ldots(s-m)}{(2m+1)!} \delta^{2m} f_1 + E_s \end{aligned} \tag{3.64}$$

durumuna gelir.

Burada E_s,(3.62) ile verilir. E_s 'nin ihmal edilmesiyle sonuçlanan interpolasyon formülü "Everett'in I. formülü" diye bilinir. (Sadece Everett Formülü de denebilir).

Bessel formülünde kullanılan $\mu\delta^2 f_0$ ve $\delta^{2r+1} f_{1/2}$ farkları yerine, Everett formülü $\delta^{2r} f_0$ ve $\delta^{2r} f_1$ farklarını kullanır. Bununla beraber (2m+1). mertebeden farkla sonuçlanan Bessel formülünün sonucu (2m). mertebeden farkla sonuçlanan Everett'in birinci formülü ile özdeş sonuç vermelidir. Bu formüllerin her ikisi de, hata terimlerinin doğrudan olarak kıyaslanmasından görülebileceği gibi (2m+1). mertebeden fark ile sonuçlanan Gauss ileri formülüne eşdeğerdir.

Oysaki, az önce tartıştığımız iki formül de ayni sayıdaki terimler değerlendirilmeli, eğer sözgelimi iki ve dördüncü dereceden tablolar kullanılırsa Everett formülünün kullanılması bilgisayarda beşinci farklara gerek kalmaksızın bütün farkların hesaba katılmasına izin verir. Katsayıların kısa bir tablosu kısım 4.4 'te düzenlenmiştir.

Benzer bir yol ile sadece tek dereceden farkları içeren bir formül çift farklarla sonuçlanan Gauss ileri formülünden elde edilebilir. Sonuç "Everett'in ikinci formülü" veya "Stefenson formülü" olarak bilinir. Fakat bu formül pratikte fazla kulanılmaz. (2m+1).farkla biten sonuç (2m+2).farkla biten Stirling formülüne özdeştir. Bu formül ile ilgili katsayıların kısa bir tablosu kısım 4.4 'te verilmiştir.

(3.49) bağıntısını dahil edersek Everett'in birinci formülü

$$f_s \approx (1-s)f_0 + \binom{(1-s)+1}{3} \delta^2 f_0 + \binom{(1-s)+2}{5} \delta^4 f_0 + \ldots$$

$$+ sf_1 + \binom{s+1}{3} \delta^2 f_1 + \binom{s+2}{5} \delta^4 f_1 + \ldots \qquad (3.65)$$

formuna sokulabilir. Burada bir satırın katsayıları başka bir satırda s ile 1-s 'nin yer değiştirmesi sonucu elde edilir.

4. UYGULAMALAR

4.1 EŞİT ARALIKLI TEMEL NOKTALAR İLE SAYISAL İNTEGRASYON

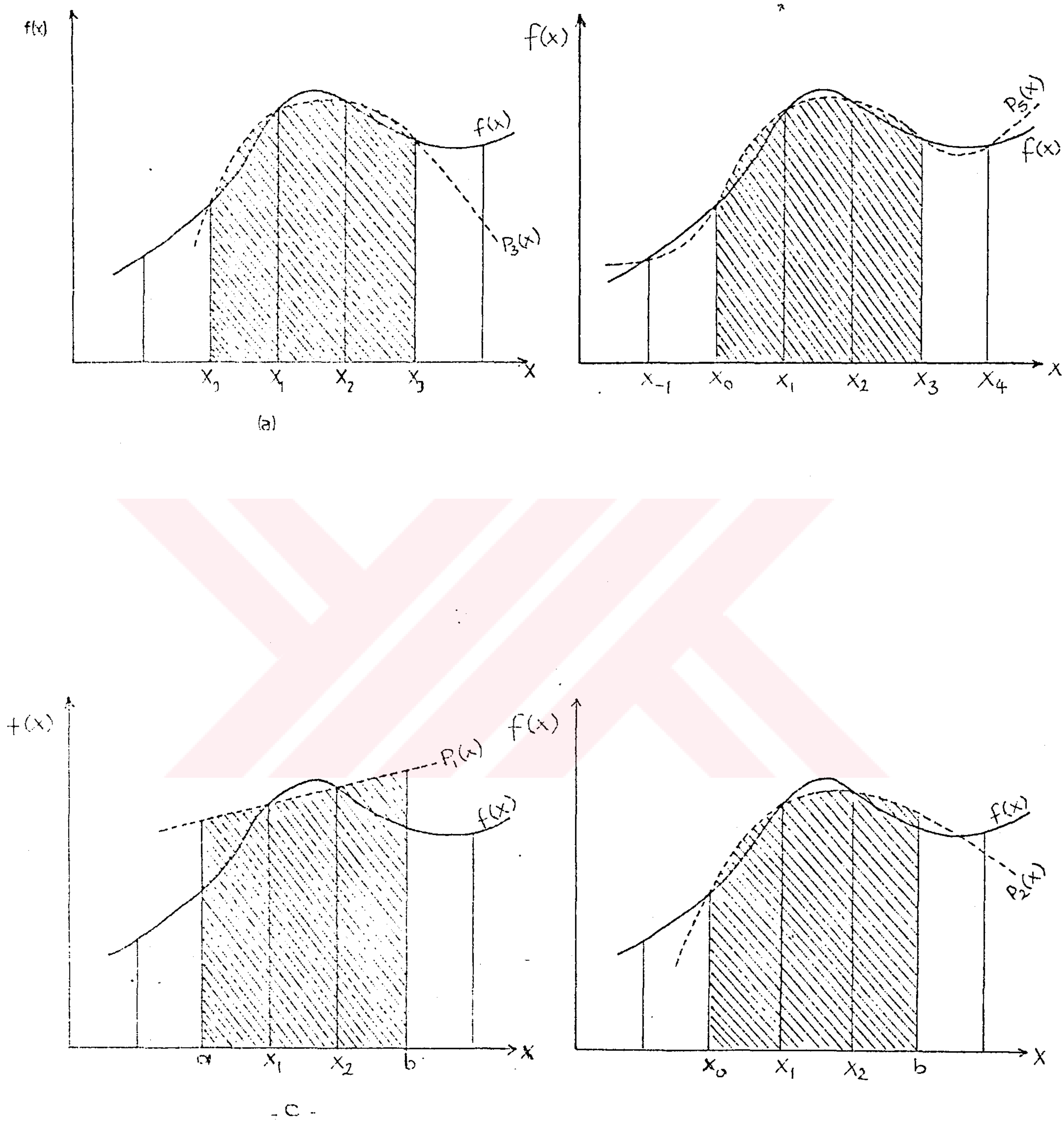
Şekil 4.1 in dört durumu düşünülerek -ki burada f(x) sadece eşit aralıklı temel noktaların belirlenmiş kümesinde bilinir - her bir durumda,

$\int_a^b f(x)dx$ integrali

$$\int_a^b p_n(x)dx \qquad (4.1)$$

yaklaşımı ile değerlendirilmiş olur. Bir fark enterpolasyon polinomu olan $p_n(x)$ bu dört durumun her birinde kullanılır. (4.1) bağıntısı gerçek integral değerinin dört farklı yaklaşımını verir. Şekil 4.1a 'da, a ve b temel noktaları ile [a,b] aralığındaki noktalar için sadece fonksiyonel değerler kullanılarak polinom fit edilir. Şekil 4.1b 'de buna benzer bir durum örnekler ve integral aralığının dışında kalan temel noktalardaki fonksiyonel değerler hariç tutularak bir yaklaşım polinomu saptanmak istenir. Şekil 4.1c de polinom aralığın sonundaki temel noktalarla değil, integral sınırları arasındaki fonksiyonel değerler kulanılarak hesaplanır. Şekil 4.1d benzerdir. Aralığın x=a ucundaki temel nokta hesaplamaya dahil edilip diğer uç nokta hariç tutulur. Bu şekillere benzer olarak daha birçok değişik durum yaratmak mümkündür. Örneğin, a ve b temel noktalara göre keyfi yerlerde bulunabilirler ve bu noktaların (a ve/veya b) temel noktalarla uyumlu olma zorunluluğu yoktur.

En çok iki sınıfta toplanan ve sık sık kulanılan eşit aralıklı integrasyon fomülleri "açık ve kapalı formüller" olarak bilinirler. Her iki sınıflamada da integral sınırları olan a ve b temel noktalarla uyumludur veya h aralıklı temel noktaların integral katsayıları ile sırasıyla yer değiştirir. Kapalı integral formülleri her iki integral sınırında da temel noktalara sahip olan f(x) ile ilgili bilgileri kulanır ve Şekil 4.1a 'da örneklenir. Açık integrasyon formüllerinde ise integral sınırlarında f(x) ile ilgili bilgilere gereksinme duyulmaz (bkz. Şekil 4.1c).



Şekil 4.1 Nümerik integrasyon- f(x) in dört farklı yaklaşımı

Açık ve kapalı formüllerin tümü, integral sınırları ve uygun temel noktalar kullanılarak genel enterpolasyon polinomu $p_n(x)$ 'in birinin integre edilmesiyle oluşturulabilir. Sadece h kadar eşit uzunlukta aralanmış $x_0, x_1, \ldots, x_n$ temel noktaları bilindiğinden ve bu temel noktalardaki f(x) değerleri hesaplanabildiğinden sonlu farklar (İleri, geri, merkezi) formlarından biri kullanılarak bir polinom tasarımı geliştirilebilir. Newton İleri fark formülü kullanılarak;

$$f(x_0+sh)=f(x_0)+s\Delta f(x_0)+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+\ldots$$

$$+\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0)$$

$$+R_n(x_0+sh)$$

$$=p_n(x_0+sh)+R_n(x_0+sh)$$

yazılabilir. Burada daha önce olduğu gibi

$s=\dfrac{x-x_0}{h}$, $p_n(x_0+sh)$ n. dereceden enterpolasyon polinomu ve $R_n(x_0+sh)$ ise ihmal edeilmiş terim veya hata terimidir. ξ, $(x, x_0, \ldots, x_n)$ aralığı içinde olmak üzere, hata terimi;

$$R_n(x_0+sh)=h^{n+1}s(s-1)(s-2)\ldots(s-n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

veya

$$R_n(x_0+sh)=h^{n+1}s(s-1)(s-2)\ldots(s-n)f\left(x, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0\right)$$

eşitliklerinden biri ile hesaplanır.

4.2 NEWTON-COTES KAPALI İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Kapalı integralin çok daha basit bir durumu Şekil 4.2 'de şematik olarak gösterilmiştir. Bu şekilde $x_0=a$ ve $x_1=b$ temel noktaları $p_1(x)=p_1(x_0+sh)$ veya f(x) 'in yaklaşım doğrusu olan birinci dereceden polinomun hesaplanmasında kullanılır. Böylece

$$f(x)=f(x_0+sh)=f(x_0)+s\Delta f(x_0)+R_1(x_0+sh)$$

$$= p_1(x_0+sh)+R_1(x_0+sh) \tag{4.2}$$

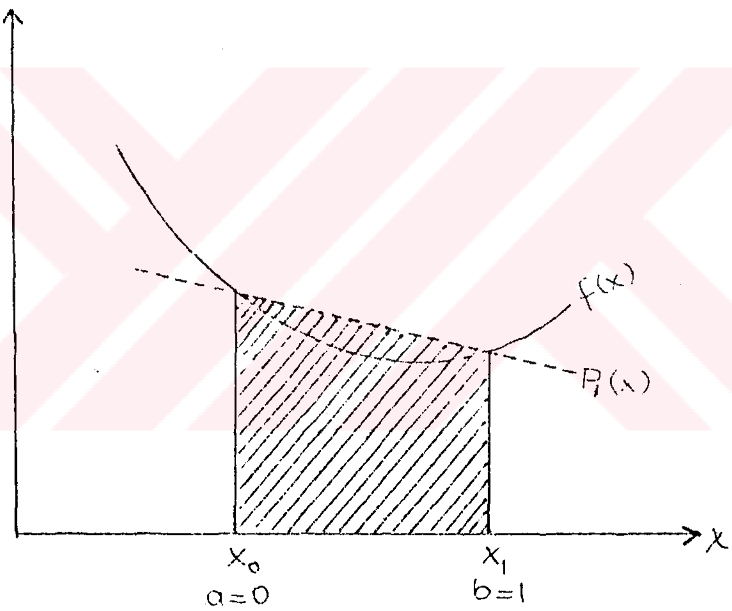
ve ξ, (x_0, x_1) aralığının içinde olmak üzere;

$$R_1(x_0+sh)=h^2 s(s-1)\ \frac{f''(\xi)}{2!} \tag{4.3}$$

veya

$$R_1(x_0+sh)=h^2 s(s-1) f\left(x, x_0, x_1\right)$$

formülleri ile uygun form elde edilir.



Şekil 4.2 Trapez kuralı

f(x) için bu yaklaşım polinomu ve x yerine s $(s=(x-x_0)/h)$ integral değişkeni dönüşümü kullanılarak

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx$$

$$= h\int_0^1 p_1(x_0+sh)ds \tag{4.4}$$

yazılabilir ki burada (4.2) bağıntısından yararlanılarak;

$$h\int_0^1 [f(x_0)+s\Delta f(x_0)]ds= h\left(sf(x_0) + \frac{s^2}{2} \Delta f(x_0)\right)_0^1$$

$$= h\left(f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2}\right) \tag{4.5}$$

ile

$$\int_a^b f(x)dx= \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx$$

$$= h\int_0^1 p_1(x_0+sh)ds$$

$$= h\left(f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{2}\right)$$

bulunur. Birinci mertebeden ileri fark tanımı "$\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)$" ve (4.5) bağıntısı kullanılarak;

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx= h\left(f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{2} \left(f(x_0)+f(x_1)\right) \tag{4.6}$$

ile bilinen "trapez kuralı" bulunur. Şekil 4.2 'de gösterilen eğri altındaki taralı alana doğru altındaki taralı alan ile yaklaşılmıştır. Burada yapılan hata (4.3) bağıntısındaki artık terimin integre edilmesiyle bulunur. O halde ξ, (x_0,x_1) aralığı içinde olmak üzere yapılan hata;

$$\int_{x_0}^{x_1} R_1(x)dx= h\int_0^1 R_1(x_0+sh)ds$$

$$=h^3\int_0^1 s(s-1) \frac{f''(\xi)}{2!} ds \tag{4.7}$$

dır. Eğer f(x), x 'in sürekli bir fonksiyonu ise f"(x) veya onun eşiti olan $2!f(x,x_0,x_1)$ da süreklidir. Fakat x 'in fonksiyonu bilinmediğinden (4.7) değerini doğrudan hesaplamak mümkün değildir. s, x 'in basit bir dönüştürülmüş değeri olduğundan, f"(ξ) 'de integral değişkeni olan s 'nin sürekli bir fonksiyonudur. Yani bu özellik (4.7) bağıntısındaki tahmini kolaylaştırır. $f''(\xi)$ çarpanı "entegral ortalama değer teoremi" uygulaması ile integral işareti dışına alınabilir.

Teorem 4.1 (İntegral ortalama değer teoremi) Eğer iki fonksiyon, $q(x)$ ve $g(x)$, $x\in[a,b]$ için sürekli ve $g(x)$ fonksiyonu $a<x<b$ için sabit işarete sahip ise $\xi\in(a,b)$ olmak üzere;

$$\int_a^b q(x)g(x)dx = q(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

dir.

$0<s<1$ aralığının içindeki bütün s değerleri için $s(s-1)$ çarpanı negatif işaretli olduğundan Teorem 4.1 gereğince (4.7) bağıntısı, $\xi\in(x_0,x_1)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} h^3\int_0^1 s(s-1)\,\frac{f''(\xi)}{2!}\,ds &= h^3\frac{f''(\xi)}{2!}\int_0^1 s(s-1)ds \\ &= h^3\frac{f''(\xi)}{2!}\int_0^1 (s^2-s)ds \\ &= -\frac{h^3}{12}f''(\xi) \qquad (4.8) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılır. Bu durumda hata terimi ile birlikte Trapez Kuralı, yine $\xi\in(x_0,x_1)$ olmak üzere;

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\Big(f(x_0)+f(x_1)\Big) - \frac{h^3}{12}f''(\xi) \qquad (4.9)$$

ile tanımlanır. Bu yüzden trapez kuralı ile elde edilen hata ancak $f''(\xi)$ çarpanının yok olması ile sıfır olur. Eğer $f(x)$ fonksiyonu doğrusal ise birinci dereceden bir polinomdur ve bu durumda trapez kuralı bulunması istenen integral değerini tam olarak verir.

Daha genel bir problem Şekil 4.3 'te örneklendirilmiştir. Burada interpolasyon polinomu n. derecedendir ve eşit aralıklı $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi n+1 tane temel nokta vardır. İntegrasyonun alt sınırı x_0 temel noktası ile uyuşsun. İntegrasyonun üst sınırı ise bir an için keyfi bir yerde bulunsun. Böylece yaklaşım, $\bar{s}=(b-x_0)/h$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx= \int_a^b p_n(x)dx= h\int_0^{\bar{s}} p_n(x_0+sh)ds \tag{4.10}$$

$$= h\int_0^{\bar{s}}\Big(f(x_0)+s\Delta f(x_0)+ \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)$$

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)+ \ldots$$

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)\ \ldots\ (s-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0)\Big)ds$$

formülü ile verilir. İlk terimden itibaren belirli miktarda terim alarak,

$$h\int_0^{\bar{s}} p_n(x_0+sh)ds= h\Big(sf(x_0)+ \frac{s^2}{2}\Delta f(x_0)+(\frac{s^3}{6}-\frac{s^2}{4})\Delta^2 f(x_0)$$

$$+(\frac{s^4}{24}-\frac{s^3}{6}-\frac{s^2}{4})\Delta^3 f(x_0)$$

$$+(\frac{s^5}{120}-\frac{s^4}{16}-\frac{s^3}{72}-\frac{s^2}{8})\Delta^4 f(x_0)+\ldots\Big)_0^{\bar{s}} \tag{4.11}$$

bulunur.

$$\int_a^b f(x)dx= h\Big(\bar{s}f(x_0)+ \frac{\bar{s}^2}{2}\Delta f(x_0)+(\frac{\bar{s}^3}{6}-\frac{\bar{s}^2}{4})\Delta^2 f(x_0)$$

$$+(\frac{\bar{s}^4}{24}-\frac{\bar{s}^3}{6}-\frac{\bar{s}^2}{4})\Delta^3 f(x_0)$$

$$+(\frac{\bar{s}^5}{120}-\frac{\bar{s}^4}{16}-\frac{\bar{s}^3}{72}-\frac{\bar{s}^2}{8})\Delta^4 f(x_0)+\ldots\Big)_0^{\bar{s}} \tag{4.12}$$

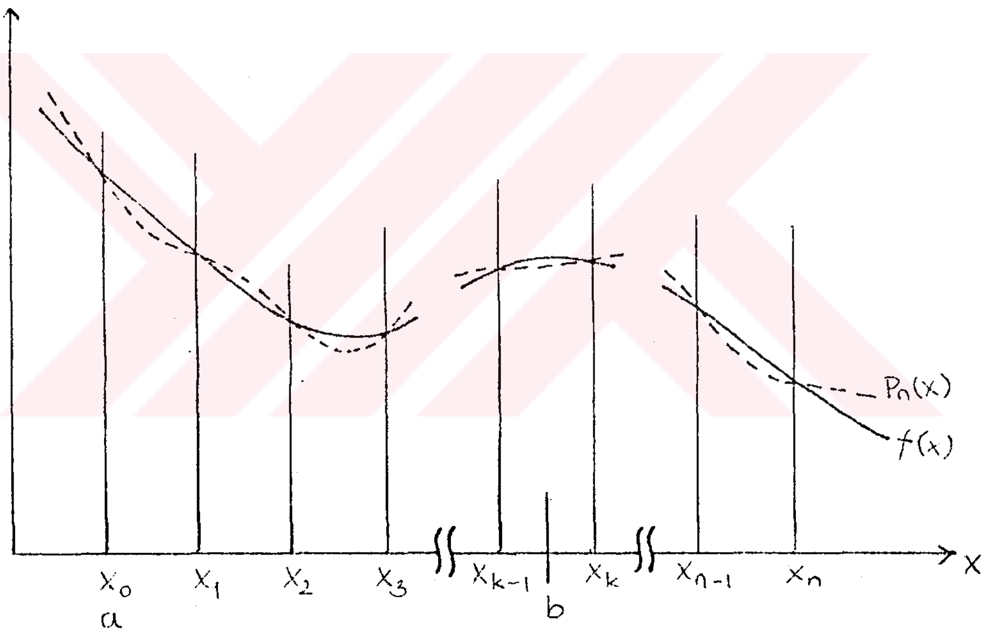
formu integral alt sınırında değerlendirildiğinde bütün terimler kaybolur. Uygun hata terimi $\xi\in(x_0,x_1,\ \ldots\ ,b)$ olmak üzere,

$$h\int_0^{\bar{s}} R_n(x_0+sh)ds= h^{n+2}\int_0^{\bar{s}}\Big(s(s-1)(s-2)\ \ldots\ (s-n)\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Big)ds \tag{4.13}$$

ile verilir.

(4.12) ve (4.13) bağıntıları integral formülleri ile ilişkili bir aile olarak tanımlanırlar. Eğer integral üst sınırı olan b, temel noktalardan biri ile uyuşacak şekilde seçilmişse, bu durumda integral her biri h genişlikte m tane aralık içindedir. Yani integral $a=x_0$ ile $b=x_m$ arasındadır.

$\bar{s}=\bar{m}=n=1$ olduğunda (4.12) ve (4.13) bağıntılarından hareket ederek Trapez kuralının geliştirildiğine dikkat edilmelidir. m=2,3,4 veya daha fazla aralıklar arasındaki integrasyonu bulmak için (4.12) 'deki $\bar{s}$ 'yi 2,3,4,... alınmalıdır. $n=\bar{s}$ 'nin açık bir şekilde görünmesine rağmen n 'in seçimi apaçıktır. Enterpolasyon polinomunu saptamak için, integrasyon aralığının dışındaki noktaları kulanmamanın bir nedeni yoktur.



Şekil 4.3 Kapalı integrasyon için genel durum

$\bar{s}$ çift bir tamsayı olduğunda, bir uçtan bir uca integral aralığı h uzunluğunda bir çift sayıda parçaya tam olarak ayrılır. (4.12) bağıntısında $\bar{s}=2$ seçerek,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx= h\int_0^2 f(x_0+sh)ds= h\Big(2f(x_0)+ 2\Delta f(x_0)+ \frac{1}{3}\Delta^2 f(x_0) +0.\Delta^3 f(x_0) + \frac{1}{90}\Delta^4 f(x_0) + \dots\Big) \tag{4.14}$$

yazılabilir. Burada $\Delta^3 f(x_0)=\Delta^{\bar{s}+1} f(x_0)$ 'nın katsayısının sıfır olduğuna dikkat edilmelidir. İlk üç terimin alınmasıyla ve ileri fark tanımına göre uygun ordinat değerlerinin kulanarak, (4.14) bağıntısı n=2 seçimi için,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx= \frac{h}{3} [f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] \tag{4.15}$$

formunu alır. (4.15) bağıntısı "Simpson kuralı" olarak bilinir ve bütün integral formüllerinde sık sık kullanılır. Bu kuralın kullanımında oluşan hata

$$h\int_0^2 R_3(x_0+sh)ds= h^5\int_0^2 s(s-1)(s-2)(s-3) \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} ds \tag{4.16}$$

ile hesaplanır. Burada s(s-1)(s-2)(s-3) çarpanı integral aralığında sabit işarete sahip olmadığından İntegral ortalama değer teoreminin doğrudan uygulanamadığına dikkat edilmelidir. Ancak Steffenson, $\xi\in(x_0,x_2)$ olmak üzere,

$$h^5\int_0^2 s(s-1)(s-2)(s-3) \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} ds= h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^2 s(s-1)(s-2)(s-3)ds$$

$$=-h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \tag{4.17}$$

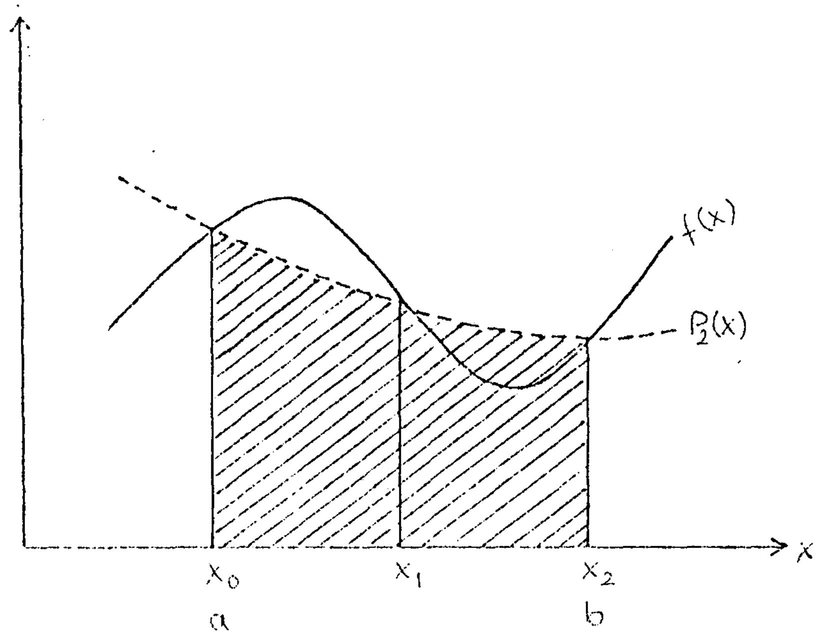
olduğunu göstermiştir.

Böylece hata terimi ile birlikte Simpson kuralı,

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx= \frac{h}{3} [f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]-h^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{90} \tag{4.18}$$

ile verilir.

Şekil 4.4 'teki polinomu saptamak için sadece üç nokta kullanılır. Bundan böyle, polinom derecesi 2 veya daha az olan f(x) için integrasyonun tam olacağı umulacaktır. Gerçekten de (4.18) bağıntısında gösterilen Simpson kuralı f(x) üçüncü veya daha az dereceli bir polinom olduğunda tamdır. (4.12) ve (4.13) bağıntıları ile oluşturulan kapalı formüller kümesi "Newton kapalı integrasyon formülleri" olarak bilinirler. $\bar{s}$=1,2, ... ,6 durumları için bir liste aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.4 Simpson kuralı

$\bar{s}$=1 (trapez kuralı):

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad (4.19a)$$

$\bar{s}$=2 (Simpson kuralı):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad (4.19b)$$

$\bar{s}$=3 (Simpson ikinci kuralı):

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \qquad (4.19c)$$

$\bar{s}$=4 :

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2h}{45}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$$

$$- \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi) \qquad (4.19d)$$

$\bar{s}=5$:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx=\frac{5h}{288}\,[19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)]$$

$$-\frac{275h^7}{12096}\,f^{(6)}(\xi) \qquad (4.19e)$$

$\bar{s}=6$:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx=\frac{h}{140}\,[41f(x_0)+216f(x_1)+27f(x_2)+272f(x_3)+27f(x_4)+216f(x_5)$$

$$41f(x_0)] - \frac{275h^7}{12096}\,f^{(6)}(\xi) \qquad (4.19f)$$

Bu bağıntıların hiçbirinde farkların hesaplanmasına veya enterpolasyon polinomunun katsayılarına gerek duyulmaz. Bunların her biri sadece temel noktalardaki fonksiyonel değerlerin ağırlıklı toplamını kapsar. Yani,

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad (4.20)$$

dir.

Örnek 4.1. Trapez ve Simpson kurallarını kullanarak,

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 (x^3-2x^2+7x-5)dx \qquad (4.21)$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-5x\right)_1^3$$

$$=20\frac{2}{3}$$

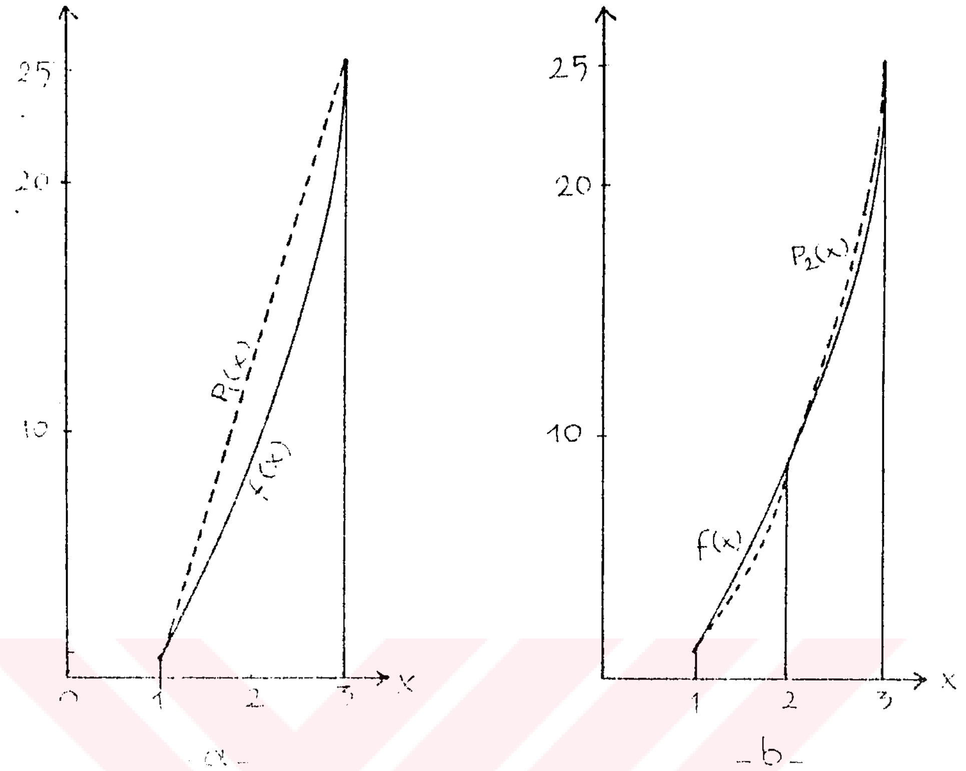
sonucu ile bulunan belirli integral değerini tahmin edelim.

x 'in birkaç değeri için (4.21) 'deki fonksiyonel değerler

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
f(x)	1	$4\frac{3}{8}$	9	$15\frac{5}{8}$	25

olarak hesaplansın.

Trapez kuralı için (bkz.Şekil 4.5a) h=2, $x_0=1$, $x_1=3$, $f(x_0)=1$ ve



Şekil 4.5 $\int_1^3 (x^3-2x^2+7x-5)dx$ integralinin sayısal yaklaşımı:

(a) Trapez kuralı, (b) Simpson kuralı

$f(x_1)=25$ değerleri kullanılarak (4.19a) bağıntısına göre,

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{h}{3}\,[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}\,f''(\xi)$$

$$= \frac{2}{2}\,(1+25) - \frac{8}{12}\,f''(\xi)$$

$$= 26 - \frac{2}{3}\,f''(\xi)$$

$f''(x)=6x-4$ olduğundan, yapılan hata, $1<\xi<3$ olmak üzere,

$$-\frac{2}{3}\,f''(\xi) = -\frac{2}{3}(6\xi-4)$$

ile hesaplanır. $\xi=3$ olarak alındığında hata $-9\frac{1}{3}$ ile en yüksek değeri almaktadır. Oysa, gerçek hata $20\frac{2}{3} - 26 = -5\frac{1}{3}$ tür ve umut edilenden daha küçük fakat yine de büyüktür.

Simpson kuralı için (bkz. Şekil 4.5b) $h=1$, $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$, $f(x_0)=1$, $f(x_1)=9$ ve $f(x_2)=25$ değerleri kullanılarak (4.18) bağıntısına göre,

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{h}{3}\,[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(\xi)$$

$$= \frac{1}{3}(1+36+25) - \frac{1}{90}\,f^{(4)}(\xi)$$

$$= 20\frac{2}{3} - \frac{1}{90}\,f^{(4)}(\xi)$$

olur. Burada bütün x değerleri için $f(x)$ 'in dördüncü mertebeden türevi sıfır olacağından hata terimi kaybolur ve dolayısıyla sonuç tam çıkar.

4.3 NEWTON-COTES AÇIK İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Eşit aralıklı temel noktaları kullanarak, fakat integral sınırlarının biri veya her ikisindeki temel noktalar için fonksiyonel değerlere gerek duymadan integral formülleri türetebiliriz (bkz.Şekil 4.1c ve 4.1d). Genel açık enterasyon problemi Şekil 4.6 'da örneklenmiştir. Burada enterpolasyon polinomunun derecesi $n-2$ ve eşit olarak aralanmış $n-1$ tane temel noktalar $x_1,\dots,x_{n-1}$ 'dir. $x_0=x_1-h$ ile uyuşan a, integral üst sınırı ve h 'de daha önce olduğu gibi temel noktalar arasındaki aralıktır. İntegral üst sınırı olan b, keyfi bir yerde seçilsin. Böylece yaklaşım,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_{n-2}(x)dx \tag{4.22}$$

ile verilir. Newton ileri formülü kullanılarak, ileri sonlu fark polinomu olan $p_{n-2}(x)$ 'in basit bir şekli, $f(x_0)$ 'ın yerine $f(x_1)$ 'in ileri farklarıyla ve $s=(x-x_0)/h$ ve $\bar{s}=(b-x_0)/h$ alarak,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^b p_{n-2}(x)dx$$

$$= h\int_0^{\bar{s}} p_{n-2}(x_0+sh)ds \tag{4.23}$$

ile ifade edilir. $f(x)$ 'in ileri farklarının terimleri içinde $p_{n-2}(x_0+sh)$ polinomu,

$$p_{n-2}(x_0+sh) = f(x_1)+(s-1)\Delta f(x_1)+\frac{(s-1)(s-2)}{2!}\,\Delta^2 f(x_1)$$

$$+\frac{(s-1)(s-2)(s-3)}{3!}\Delta^3 f(x_1)+\dots$$

$$+\frac{(s-1)(s-2)\dots(s-n+2)}{(n-2)!}\Delta^{n-2}f(x_1) \qquad (4.24)$$

biçiminde ifade edilir. Böylece (4.23) bağıntısındaki integral,

$$\int_a^b f(x)dx=h\int_0^{\bar{s}}[f(x_1)+(s-1)\Delta f(x_1)+\dots]ds$$

$$=h\left(sf(x_1)+(\frac{s^2}{2}-s)\Delta f(x_1)\right.$$

$$\left.+(\frac{s^3}{6}-\frac{3s^2}{4}+s)\Delta^2 f(x_1)+\dots\right)_0^{\bar{s}} \qquad (4.25)$$

olur. Burada alt sınırdaki bütün terimler kaybolarak,

$$\int_a^b f(x)dx=h\left(\bar{s}f(x_1)+(\frac{\bar{s}^2}{2}-\bar{s})\Delta f(x_1)\right.$$

$$\left.+(\frac{\bar{s}^3}{6}-\frac{3\bar{s}^2}{4}+\bar{s})\Delta^2 f(x_1)+\dots\right) \qquad (4.26)$$

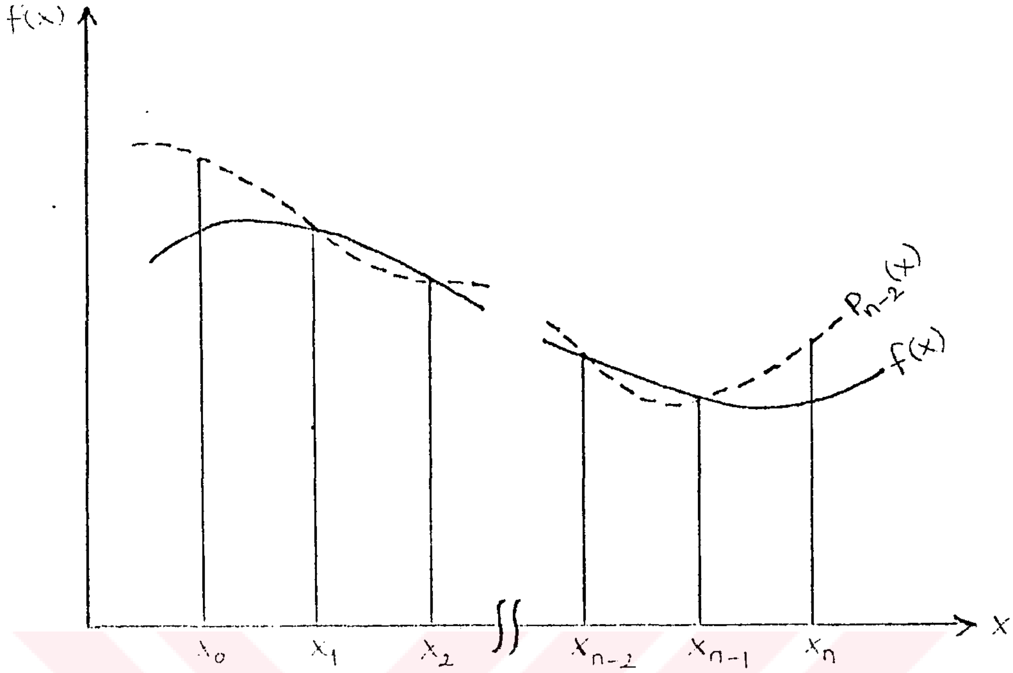
olur. Yapılan işlemde, $x_0<\xi<b$ olmak koşuluyla uygun hata terimi,

$$h\int_0^{\bar{s}} R_{n-2}(x_0+sh)ds=h^n\int_0^{\bar{s}}\left((s-1)(s-2)\dots(s-n+1)\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}\right)ds \qquad (4.27)$$

ile ifade edilir.

(4.26) ve (4.27) bağıntıları integrasyon formülleri ile ilişkili bir kümeyi tanımlar. Eğer üst sınır olan b, temel noktalardan biri ile uyuşacak şekilde seçilirse integrasyon her biri h uzunlukta olan m tane aralık içinde olur. Yani integrasyon $a=x_0$ ile $b=x_m$ arasındadır. Böylece bu bağıntılardaki $\bar{s}$, integral değeri m olarak varsayılır. Burada n'nin seçimi apaçıktır ve alışılmış seçenek $n=\bar{s}$ dir. Bu durumda integral Şekil 4.1c 'deki gösterime uygundur.

$\bar{s}$ ve $n=\bar{s}$ 'nin integral değerleri için (4.26) ve (4.27) bağıntılarının irdelenmesiyle Newton-Cotes açık integral formülleri kümesi elde edilir. Bu formüller $\bar{s}$12,3, ...,6 değerleri için aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.6 Açık integral için genel durum

$\bar{s}$=2 ise:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2h\, f(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \tag{4.28a}$$

$\bar{s}$=3 ise:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{2} [f(x_1)+f(x_2)] - \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \tag{4.28b}$$

$\bar{s}$=4 ise:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{3} [2f(x_1)-f(x_2)+2f(x_3)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \tag{4.28c}$$

$\bar{s}$=5 ise:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{5h}{24} [11f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+11f(x_4)]$$

$$+ \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi) \tag{4.28d}$$

$\bar{s}=6$ ise:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx=\frac{3h}{10}\left[11f(x_1)-14f(x_2)+26f(x_3)-14f(x_4)+11f(x_5)\right]$$

$$-\frac{41h^7}{140} f^{(6)}(\xi) \qquad (4.28e)$$

$\bar{s}$ çift olduğunda, yani formüller çift sayılı aralıkları veya tek sayılı temel noktaları kapsadığında, f(x) 'in $\bar{s}-1$ veya daha küçük dereceden bir polinomu için sonuç tamdır. $\bar{s}$ tek olduğunda ise formüller f(x) 'in $\bar{s}-2$ veya daha küçük dereceden bir polinomu için sonuç tamdır. $\bar{s}$ 'nin çift değerleri için (4.26) bağıntısındaki $\Delta^{n-1}f(x_1)$ 'in katsayısı sıfır olur. Öyleyse (4.27) bağıntısının hata terimi $\bar{s}-1$ 'den çok $\bar{s}$ 'inci dereceden bir türev içerir. Bu nedenle tek noktalı formüller, çift noktalı formüllerden daha sık olarak kullanılırlar.

4.4 ENTERPOLASYON KATSAYI ÇİZELGELERİ

Bu kısımda, uygulamalarda kolaylık sağlayacak çizelgeler kısa ve öz olarak aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.1 Stirling enterpolasyonu için katsayılar

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	s
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.0
0.1	0.00500	-0.02650	-0.00041	-0.1
0.2	0.02000	-0.03200	-0.00160	-0.2
0.3	0.04500	-0.04550	-0.00341	-0.3
0.4	0.08000	-0.05600	-0.00560	-0.4
0.5	0.12500	-0.06250	-0.00781	-0.5
0.6	0.18000	-0.06400	-0.00960	-0.6
0.7	0.24500	-0.05950	-0.01041	-0.7
0.8	0.32000	-0.04800	-0.00960	-0.8
0.9	0.40500	-0.02850	-0.00641	-0.9
1.0	0.50000	0.00000	0.00000	-1.0

Çizelge 4.2 Bessel enterpolasyonu için katsayılar

s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	$C_5(s)$	s
0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.0
0.1	-0.04500	0.00600	0.00784	-0.00063	0.9
* 0.2	-0.08000	0.00800	0.01440	-0.00086	0.8
0.3	-0.10500	0.00700	0.01934	-0.00077	0.7
0.4	-0.12000	0.00400	0.02240	-0.00045	0.6
0.5	-0.12500	0.00000	0.02344	-0.00000	0.5

Çizelge 4.3 Everett ve Steffensen enterpolasyonları için katsayılar

a) Everett enterpolasyonu

s	$C_2(s)$	$C_4(s)$
0.0	0.00000	0.00000
0.1	-0.02850	0.00455
* 0.2	-0.04800	0.00806
0.3	-0.05950	0.01044
0.4	-0.06400	0.01165
0.5	-0.06250	0.01172
0.6	-0.05600	0.01075
0.7	-0.04550	0.00890
* 0.8	-0.03200	0.00634
0.9	-0.01650	0.00329
1.0	0.00000	0.00000

b) Steffensen enterpolasyonu

s	$C_1(s)$	$C_3(s)$
-0.5	-0.12500	0.02344
-0.4	-0.12050	0.02240
-0.3	-0.10500	0.01934
-0.2	-0.08000	0.01440
-0.1	-0.04500	0.00784
0.0	0.00000	0.00000
0.1	0.05500	-0.00866
0.2	0.12000	-0.01760
0.3	0.19500	-0.02616
0.4	0.28000	-0.03360
0.5	0.37500	-0.03906

Çizelge 4.4 Newton enterpolasyonları için katsayılar

	s	$C_2(s)$	$C_3(s)$	$C_4(s)$	$C_5(s)$
	-1.0	1.00000	-1.00000	1.00000	-1.00000
	-0.9	0.85500	-0.82650	0.80584	-0.78972
	-0.8	0.72000	-0.67200	0.63840	-0.61286
	-0.7	0.59500	-0.53550	0.49534	-0.46562
	-0.6	0.48000	-0.41600	0.37540	-0.34445
	-0.5	0.37500	-0.31250	0.27344	-0.24609
	-0.4	0.28000	-0.22400	0.19040	-0.16755
	-0.3	0.19500	-0.14950	0.12334	-0.10607
	-0.2	0.12000	-0.08800	0.07040	-0.05914
	-0.1	0.05500	-0.03850	0.02984	-0.02447
	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	0.1	-0.04500	0.02850	-0.02066	0.01612
*	0.2	-0.08000	0.04800	-0.03360	0.02554
	0.3	-0.10500	0.05950	-0.04016	0.02972
	0.4	-0.12000	0.06400	-0.04160	0.02995
**	0.5	-0.12500	0.06250	-0.03906	0.02734
	0.6	-0.12000	0.05600	-0.03360	0.02285
	0.7	-0.10500	0.04550	-0.02616	0.01727
	0.8	-0.08000	0.03200	-0.01760	0.01126
	0.9	-0.04500	0.01650	-0.008668	0.00537
	1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

4.5 SONLU FARKLAR İLE ENTERPOLASYON ÖRNEKLERİ

Sonlu farkları örneklemek için f(x)=Sin(x) foksiyonunun fark tablosu Çizelge 4.5 'teki gibi hazırlanmıştır.

Örnek 4.1 Newton'un ileri fark formülünü kullanarak f(1.02) değerini hesaplamak için x=1.02 aradeğeri alınarak enterpolasyon uygulanırsa,

h=1.1-1.0=0.1 olacak ve

$$s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.02-1.0}{0.1} = 0.2$$ değerleri hesaplanacaktır.

Bu durumda (3.33) bağıntısındaki ileri fark formülü ve Çizelge 4.5'te-ki hesaplanmış veriler kullanılarak,

Çizelge 4.5 f(x)=Sin(x) fonksiyonunun fark değerleri

x						
1.0	0.84147					
		4974				
1.1	0.89121		-891			
		4083		-40		
1.2	0.93204	3617.5	-931	-36	8	
	0.94780	3152	-947	-32	9	2
1.3	0.96356		-963		10	
		2189		-22		1
1.4	0.98545		-985		11	
		1204		-11		-3
1.5	0.99749		-996		8	
		208		-3		4
1.6	0.99957		-999		12	
		-791		9		
1.7	0.99166		-990			
		-1781				
1.8	0.97385					

$$f(1.02)=0.84147+(0.2)(0.04974)+\frac{(0.2)(0.2-1)}{2!}(-0.00891)$$

$$+\frac{(0.2)(0.2-1)(0.2-3+1)}{3!}(-0.00040)$$

$$+\frac{(0.2)(0.2-1)(0.2-2)(0.2-4+1)}{4!}(0.00008)$$

işleminin sonucu,

$f(1.02)=0.85211$ değeri bulunur.

Aynı hesaplamayı Çizelge 4.4 'te daha önceden hesaplanmış veriler kullanılarak ve

$$f_s \approx f_0 + s\Delta f_0 + C_2(s)\Delta^2 f_0 + C_3(s)\Delta^3 f_0 + C_4(s)\Delta^4 f_0 + C_5(s)\Delta^5 f_0 \qquad (4.29)$$

formülü yardımıyla gerçekleştirelim.

Bu durumda, Çizelge 4.4 'te baştarafına * konulmuş satır izlenerek,

$$\begin{aligned} f(1.02) &= 0.84147+(0.2)(0.04974)+(-0.8)(-0.00891)+(0.048)(-0.0004) \\ &\quad +(-0.0336)(0.00008)+(0.02554)(0.00002) \\ &= 0.85211 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.2 Newton'un geri fark formülünü kullanarak f(1.75) değerini hesaplamak için x=1.75 alınarak enterpolasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} s &= \frac{1.75-1.8}{0.1} \\ &= -0.5 \end{aligned}$$

olarak alınacaktır.

Bu durumda (3.36) bağıntısındaki geri fark formülü ve Çizelge 4.5 'teki hesaplanmış veriler kullanılarak,

$$\begin{aligned} f(1.75) &= 0.97385+(-0.5)(-0.01781)+\frac{(-0.5)(-0.5+1)}{2!}(-0.0099) \\ &\quad + \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+3-1)}{3!}(0.00009) \\ &\quad + \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)(-0.5+4-1)}{4!}(0.00012) \\ &\quad + \frac{(-0.5)(-0.5+1)(-0.5+2)(-0.5+3)(-0.5+5-1)}{4!}(0.00004) \\ &= 0.98398 \end{aligned}$$

bulunur.

Aynı hesaplamayı Çizelge 4.4 'te daha önceden hesaplanmış veriler kullanılarak ve

$$f_{N-s} = f_N - s\nabla f_N + C_2(s)\nabla^2 f_N + C_3(s)\nabla^3 f_N + C_4(s)\nabla^4 f_N + C_5(s)\nabla^5 f_N \qquad (4.30)$$

formülü yardımıyla gerçekleştirelim.

Bu durumda, f(1.75)=f(1.8-0.5) alınarak, s=0.5 olduğu saptanır ve Çizelge 4.4 'te baş tarafına ** konulmuş satır izlenerek,

$$f(1.75)=0.97385-(0.5)(-0.01781)+(-0.125)(-0.0099)-(0.0625)(0.00009)$$
$$+(-0.03906)(0.00012)-(0.02734)(0.00004)$$
$$=0.98398$$

bulunur.

Örnek 4.3 x=1.22 aradeğeri için Stirling veya Bessel enterpolasyon formüllerinden birini kullanarak sonuca ulaşalım.

Bu durumda,

$x_0=1.2$, $h=0.1$ ve

$$s=\frac{1.22-1.2}{0.1}$$
$$=0.2$$

alınarak ve (3.48) bağıntısını kullanarak,

$$f(1.22)=0.93204+(0.2)(0.036175)+\frac{0.04}{2!}(-0.00931)$$
$$+\frac{(0.2)(0.04-1)}{3!}(-0.00036)+\frac{(0.04)(0.04-1)}{4!}(0.00008)$$
$$=0.93910$$

olarak hesaplanır.

s=0.2 tespiti ile bu uygulamayı Çizelge 4.1 'te daha önce hesaplanmış, baş tarafına * konulmuş olan katsayıları ve Çizelge 4.5 deki farkları kulkullanarak, aynı zamanda,

$$f_s=f_0+s\mu\delta f_0+C_2(s)\delta^2 f_0+C_3(s)\mu\delta^3 f_0+C_4(s)\delta^4 f_0 \qquad (4.31)$$

formülü yardımıyla,

$$f(1.22)=0.93204+(0.2)(-0.00931)+(-0.032)(-0.00036)+(-0.0016)(-0.00008)$$
$$=0.93910$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Aynı örneği (3.55) bağıntısındaki Bessel formülü kullanılarak,

$$f(1.22)=0.94780+(0.2-0.5)(0.03152)+\frac{(0.2)(0.2-1)}{2!}(-0.00947)$$

$$+\frac{(0.2)(-0.8)(-0.3)}{3!}(-0.00032)$$

$$+\frac{(0.2)(0.04-1)(0.2-2)}{4!}(0.00009)$$

$$+\frac{(0.2)(0.04-1)(0.2-2)(0.2-0.5)}{5!}(0.00002)$$

$$=0.93910$$

şeklinde hesaplanır.

Çizelge 4.2 'te baş tarafında * işareti bulunan satırdaki katsayılar ve Çizelge 4.5 'teki farklar kullanılarak, aynı zamanda

$$f_s=\mu f_{1/2}+(s-\tfrac{1}{2})\delta f_{1/2}+C_2(s)\mu\delta^2 f_{1/2}+C_3(s)\delta^3 f_{1/2}$$

$$+C_4(s)\mu\delta^4 f_{1/2}+C_5(s)\delta^5 f_{1/2} \qquad (4.32)$$

formülü yardımıyla f(1.22),

$$f(1.22)=0.94780+(0.2-0.5)(0.03152)+(-0.08)(-0.00947)+(0.008)(-0.00032)$$
$$+(0.0144)(0.00009)+(-0.0086)(0.00002)$$
$$=0.93910$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 4.4 f(1.22) için enterpolasyonu hesaplamak için bu kez Everett enterpolasyon formülünü kullanalım.

Problemi daha anlaşılır duruma getirmek için Çizelge 4.5'te $\delta^2 f$ ve $\delta^4 f$ sütunlarını içeren farkları alarak Çizelge 4.6'yı oluşturalım. x=1.22 ara-değeri $x_0=1.2$ ile $x_1=1.3$ arasında kaldığından sadece bu satırlardaki fonksiyonel değerleri ve farkların alınması yeterlidir.

Çizelge 4.6 Everett interpolasyonunda kullanılacak fonksiyonel ve fark değerleri

x			
1.2	0.93204	-931	8
1.3	0.96356	-963	10

(3.64) bağıntısı kullanılarak f(1.22) için enterpolasyon

$$f(1.22)=(1-0.2)(0.93204)-\frac{(0.2)(0.2-1)(0.2-2)}{3!}(-0.00931)$$

$$-\frac{(0.2+1)(0.2)(0.2-1)(0.2-2)(0.2-3)}{5!}(0.00008)$$

$$+(0.2)(0.96356)+\frac{(0.2+1)(0.2)(0.2-1)}{3!}(-0.00963)$$

$$+\frac{(0.2+2)(0.2+1)(0.2)(0.2-1)(0.2-2)}{5!}(0.00010)$$

$$=0.939101$$

olarak hesaplanır.

Çizelge 4.3a 'nın katsayıları ve Çizelge 4.6 'daki veriler kullanılarak,

$$f_s=(1-s)f_0-C_2(s)\delta^2 f_0-C_4(s)\delta^4 f_0$$
$$+sf_1+C_2(1-s)\delta^2 f_1-C_4(1-s)\delta^4 f_1 \tag{4.33}$$

formülü yardımıyla, f(1.22) değeri,

$$f(1.22)=(1-0.2)(0.93204)-(-0.048)(-0.00931)-(0.00806)(0.00008)$$
$$+(0.2)(0.96356)+(-0.032)(-0.00963)+(0.00634)(0.00010)$$
$$=0.939101$$

şeklinde de hesaplanabilir.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmanın başında anlatılan "fark notasyonları ve operatörler" bölümünün sonlu farklara temel oluşturması amacı güdülmüş; tez konusu tüm detayları ile açıklanarak, herkesin kolaylıkla anlayabileceği bilgisayar programları hazırlanmıştır.

1940 'lardan bu yana üzerinde çalışılan sonlu farklar matematiği araştırılmış ve uygulamaları yapılmıştır. Gauss'a kadar dayanan bu konu üzerinde pek çok matematikçi çalışmıştır.

Çoğunlukla eşit aralanmış temel noktalar ve bu noktalardaki fonksiyonel değerlerden yola çıkan sonlu farklar yöntemi, Fizik ve Mühendislik bilimlerinde uygulama alanı bulabilmektedir.

Fonksiyonun bilinmemesi durumunda, verilen veriler doğrultusunda bir fonksiyon tanımlamak mümkün olabilmektedir. Fizik ve İstatistik 'te sıkça kullanılan fit yapma programları, eklerde sunulan bilgisayar programları ile kısalacak ve zamandan kazanç sağlanacktır. Ayrıca, bu çalışmanın bir fizikçi veya mühendis ile ekip çalışması halinde devam ettirilmesi ve uygulama alanının bilinçli olarak genişletilmesi yararlı olacaktır.

Bölünmüş, ileri, geri ve merkezi farklar en son şekliyle alınmış, daha önceden yapılmış ve oldukça karmaşık olan bilgisayar programları Basic programlama diliyle daha basite indirgenmiştir. Buradaki amaç, konunun diğer bilim dallarına ve çalışanlarına kolay anlaşılır oluşuyla yardımcı olmasıdır.

Örneğin, bir kimyacı -matematikçi kadar matematiğe yakın olmayışı nedeniyle- sonlu farklar yöntemini kullanmaktan kaçınabilir. Oysa bu konuda çalışan bir matematikçi ile eşgüdüm içinde çalışması, daha nitelikli ve özgün çalışmaların ortaya çıkmasını sağlayabilir.

Çalışmada, sayısal integrasyon konusu üzerinde durulmuş; diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulu altındaki çözümlerinde temel oluşturacak kavramlar ve integral formülleri verilerek, problemin çözümünün kolaylaştırılması, ayrıca daha pratik olması için üçüncü bölümde genelleştirilmiş formüller aracılığıyla hesaplanmış katsayılar çizelgeler ile düzenlenerek enterpolasyon uygulamalarının basite indirgenmesi sağlanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] F.B.Hildebrand, Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953

[2] W.E.Milne, Numerical Solution of Differential Equations, John Wiley and sons, Inc., New York, 1953

[3] B.Çağal, Sayısal Analiz, Afa Matbaacılık, İstanbul, 1989

[4] Z.Aktaş, Sayısal Çözümleme, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matbaası, Ankara, 1981

[5] J.F.Moulton, Calculus of Finite Differences, G.Boole, Chelsea Publishing Company, New York, 1958

[6] C.Jordan, Calculus of Finite Differences, H.C.Carver, Chelsea Publishing Company, New York, 1961

[7] K.S.Miller, An Introduction to The Calculus of Finite Differences and Difference Equations, Dover Publications, Inc., New York, 1959

[8] L.M.Milne-Thomson, The Calculus of Finite Differences, Macmillan and Co., London, 1951

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada, beni yönlendiren, her türlü problemimle yakından ilgilenen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Aydın Okçu 'ya, çalışmamda desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Yrd.Doç.Dr.R.Suat Işıldak 'a, Dr. Ömer Gemici'ye, Arş.Gör.Canan Kum'a ve bilgisayardan sorumlu Recep Turan'a, ayrıca eşim S.Belma Özkul'a teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

21.03.1956 'da İzmir 'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimlerini İzmir de tamamladı. 1973 yılında Balıkesir Necatibey Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümü 'nde başladığı yüksek öğrenimini 1977 yılında bitirdi. Ankara ve Balıkesir illerinin çeşitli ortaöğretim kurumlarında öğretmen olarak görev yaptı.

1985-1986 Öğretim yılında U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi bünyesinde açılan Lisans tamamlama programını bitirdi. 1989 yılında master öğrenimine başladı. Aynı yıl Necatibey Eğitim Fakültesi 'ne Matematik Anabilim Dalı Öğretim Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevi sürdürmektedir.

Evli, bir çocuk babasıdır.

EK-I Bölünmüş farklar ile enterpolasyon programı

```
10 KEY OFF
20 REM BU PROGRAM SONLU BOLUNMUS FARKLAR ILE
30 REM INTERPOLASYON PROGRAMIDIR
40 DIM X(20):DIM Y(20):DIM TABLO(20,20)
50 INPUT "KAC TANE X DEGERI GIRILECEK";N
60 INPUT "KAC TANE FARK ALINACAK";M
70 FOR I=1 TO N
80 INPUT X(I)
90 Y(I)=COS(X(I))
100 NEXT I
110 PRINT "DEVAM ICIN F5 TUSUNA BASINIZ":STOP:CLS
120 FOR I=1 TO N
130 PRINT I;"  ";X(I);"   ";Y(I)
140 NEXT I
150 GOSUB 330
160 IF KONTR<>0 THEN CLS:GOTO 20
170 PRINT M;"ICIN BOLUNMUS FARKLAR:"
180 NM1=N-1
190 FOR I=1 TO NM1
200 L=I
210 IF I>M THEN L=M
220 FOR J=1 TO L
230 PRINT USING "##.#####";TABLO(I,J);
240 NEXT J:PRINT :NEXT I
250 INPUT "ARADEGER=";XARA
260 INPUT "INTERPOLASYON DERECESI=";INDR
270 GOSUB 470
280 YINTER=FANEW
290 GDEGER=COS(XARA)
300 PRINT "ARADEGER=";XARA;"  INTERPOLASYON DERECESI=";INDR
310 PRINT "INTERPOLE DEGER=";YINTER;"  GERCEK DEGER";GDEGER
320 GOTO 250
330 REM ** FARKLAR HESAPLANIYOR **
340 IF M<N THEN 360
350 KONTR=1
360 NM1=N-1
370 FOR I=1 TO NM1
380 TABLO(I,1)=(Y(I+1)-Y(I))/(X(I+1)-X(I)):NEXT I
390 IF M<=1 THEN 450
400 FOR J=2 TO M
410 FOR I=J TO NM1
420 IALT=I+1-J
430 TABLO(I,J)=(TABLO(I,J-1)-TABLO(I-1,J-1))/(X(I+1)-X(IALT))
440 NEXT I,J
450 KONTR=0
460 RETURN
470 REM ** INTERPOLASYON FONKSIYONU TANIMLANIYOR **
480 IF INDR<=M THEN 520
490 KONTR=1
500 FANEW=0
```

```
510 RETURN
520 FOR I=1 TO N
530 IF I=N OR XARA<=X(I) THEN 550
540 NEXT I
550 MAX=I+INDR/2
560 IF MAX<=INDR THEN MAX=INDR+1
570 IF MAX>N THEN MAX=N
580 YEST=TABLO(MAX-1,INDR)
590 IF INDR<=1 THEN 660
600 INDM1=INDR-1
610 FOR I=1 TO INDM1
620 IALT1=MAX-INDR
630 IALT2=INDR-1
640 YEST=YEST*(XARA-X(IALT1))+TABLO(IALT1-1,IALT2)
650 NEXT I
660 IALT1=MAX-INDR
670 KONTR=0
680 FANEW=YEST*(XARA-X(IALT1))+Y(IALT1)
690 RETURN
```

```
 1      .1        .9950041
 2      .2        .9800666
 3      .3        .9553366
 4      .4        .921061
 5      .5        .8775826
 6      .6        .8253356
 7      .7        .7648423
 8      .8        .6967067
 6 ICIN BOLUNMUS FARKLAR:
 -0.149375
 -0.247300 -0.489625
 -0.342756 -0.477278  0.041156
 -0.434784 -0.460142  0.057122  0.039915
 -0.522470 -0.438427  0.072383  0.038152 -0.003525
 -0.604933 -0.412317  0.087034  0.036629 -0.003047  0.000796
 -0.681355 -0.382111  0.100685  0.034128 -0.005001 -0.003257
ARADEGER=? .11
INTERPOLASYON DERECESI=? 4
ARADEGER= .11   INTERPOLASYON DERECESI= 4
INTERPOLE DEGER= .9950041   GERCEK DEGER .9939561
ARADEGER=? .32
INTERPOLASYON DERECESI=? 3
ARADEGER= .32   INTERPOLASYON DERECESI= 3
INTERPOLE DEGER= .9453488   GERCEK DEGER .9492355
ARADEGER=? .41
INTERPOLASYON DERECESI=? 5
ARADEGER= .41   INTERPOLASYON DERECESI= 5
INTERPOLE DEGER= .9553364   GERCEK DEGER .9171208
ARADEGER=? .61
INTERPOLASYON DERECESI=? 6
ARADEGER= .61   INTERPOLASYON DERECESI= 6
INTERPOLE DEGER= .9800511   GERCEK DEGER .819648
ARADEGER=?
```

EK-II İleri farklar ile enterpolasyon programı

```
10 REM BU PROGRAM ILERI FARKLARI KULLANARAK BIR
20 REM FONKSIYONUN ARA DEGERINI HESAPLAR.
30 CLS
40 OPTION BASE 0
50 INPUT N
60 DIM A(N):DIM X(N)
70 DIM FX(N):DIM FRMAT(N-1,N-1)
80 FOR I=0 TO N-1
90 PRINT "X(";I;") DEGERINI GIRINIZ"
100 INPUT X(I)
110 PRINT "F(";I;") DEGERINI GIRINIZ"
120 INPUT FX(I):CLS
130 NEXT I
140 FOR I=0 TO N-1
150 A(I)=FX(I)
160 NEXT I
170 FOR I=0 TO N-1
180 K=N-(I+2)
190 FOR J=0 TO K
200 FRMAT(J,I)=A(J+1)-A(J)
210 A(J)=FRMAT(J,I)
220 NEXT J,I
230 PRINT :PRINT "###########  ILERI FARKLAR  #############":PRINT
240 FOR I=0 TO N-1
250 PRINT USING"##.##### ";FX(I);
260 FOR J=0 TO N-2
270 PRINT USING"##.#####  ";FRMAT(I,J);
280 NEXT J:PRINT :NEXT I
290 INPUT "ARA DEGERI GIRINIZ";XARA
300 REM ***ileri fark enterpolasyonu***
310 H=(X(1)-X(0)):S=(XARA-X(0))/H
320 FS=FX(0)+S*FRMAT(0,0)
330 K=1
340 CARP=S:FAKT=1
350 GOSUB 440
360 K=K+1
370 IF K>N-1 THEN 410
380 GOSUB 480
390 FS=FS+(CARP/FAKT)*FRMAT(0,K-1)
400 GOTO 340
410 PRINT XARA;" DEGERI ICIN ENTERPOLASYON ";FS;" BULUNMUSTUR."
420 PRINT "DEVAM ICIN F5 TUSUNA BASINIZ":STOP:CLS
430 GOTO 300
440 FOR L=1 TO K
450 CARP=CARP*(S-L)
460 NEXT L
470 RETURN
480 FOR L=1 TO K
490 FAKT=FAKT*L
500 NEXT L
510 RETURN
```

EK-III Geri farklar ile enterpolasyon programı

```
10 REM GERI FARKLAR ILE ENTERPOLASYON PROGRAMIDIR
20 CLS
30 OPTION BASE 0
40 INPUT N
50 DIM B(N):DIM X(N)
60 DIM FX(N):DIM FRMAT(N-1,N-1):DIM NABLA(N,N)
70 FOR I=0 TO N-1
80 PRINT "X(";I;") DEGERINI GIRINIZ"
90 INPUT X(I)
100 PRINT "F(";I;") DEGERINI GIRINIZ"
110 INPUT FX(I):CLS
120 NEXT I
130 FOR I=1 TO N-1
140 B(I)=FX(I)
150 NEXT I
160 FOR I=0 TO N-2
170 T=N-((N-1)-I)
180 FOR J=N-1 TO T STEP -1
190 NABLA(J,I)=B(J)-B(J-1)
200 B(J)=NABLA(J,I)
210 NEXT J,I
220 PRINT :PRINT "###########  GERI FARKLAR  ############":PRINT
230 FOR I=0 TO N-1
240 PRINT USING"##.##### ";FX(I);
250 FOR J=0 TO N-2
260 PRINT USING"#.##### ";NABLA(I,J);
270 NEXT J:PRINT :NEXT I
280 'LPRINT "###########  GERI FARKLAR  ############"
290 'FOR I=0 TO N-1
300 'LPRINT USING"##.##### ";FX(I);
310 'FOR J=0 TO N-2
320 'LPRINT USING"##.##### ";NABLA(I,J);
330 'NEXT J:LPRINT :NEXT I
340 REM ***geri fark enterpolasyonu***
350 INPUT "ARA DEGERI GIRINIZ";XARA
360 H=(X(1)-X(0)):S=(XARA-X(N-1))/H
370 FS=FX(N-1)+S*NABLA(N-1,0)
380 K=1
390 CARP=S:FAKT=1
400 GOSUB 490
410 K=K+1
420 IF K>N-1 THEN 460
430 GOSUB 530
440 FS=FS+(CARP/FAKT)*NABLA(N-1,K-1)
450 GOTO 390
460 PRINT XARA;" DEGERI ICIN ENTERPOLASYON ";FS;" BULUNMUSTUR."
470 PRINT "DEVAM ICIN F5 TUSUNA BASINIZ":STOP:CLS
```

```
480 GOTO 340
490 FOR L=1 TO K
500 CARP=CARP*(S+L)
510 NEXT L
520 RETURN
530 FOR L=1 TO K
540 FAKT=FAKT*L
550 NEXT L
560 RETURN
```

```
###########  ILERI FARKLAR  ############

 0.84147  0.04974  -0.00891  -0.00040   0.00008
 0.89121  0.04083  -0.00931  -0.00032
 0.93204  0.03152  -0.00963
 0.96356  0.02189
 0.98545
ARA DEGERI GIRINIZ? 1.02
 1.02  DEGERI ICIN ENTERPOLASYON  .8521089  BULUNMUSTUR.
DEVAM ICIN F5 TUSUNA BASINIZ
Break in 420
Ok
```

```
###########  GERI FARKLAR  ############

 0.84147
 0.89121 0.89121
 0.93204 0.04083 -.85038
 0.96356 0.03152 -.00931 0.84107
 0.98545 0.02189 -.00963 -.00032 -.84139
ARA DEGERI GIRINIZ? 1.35
 1.35  DEGERI ICIN ENTERPOLASYON   .008596  BULUNMUSTUR.
DEVAM ICIN F5 TUSUNA BASINIZ
Break in 470
Ok
```

EK-IV Aitken yöntemi ile enterpolasyon programı

```
10 CLS
20 REM BU PROGRAM VERILEN N TANE f(x) DEGERI
30 REM ICIN AITKEN YONTEMI ILE ENTERPOLASYON
40 REM PROGRAMIDIR.
50 KEY OFF
60 PRINT "Kac tane x degeri girilecek"
70 INPUT N
80 DIM XK(N):DIM FONK(N)
90 PRINT "x ve f(x) degrlerini giriniz"
100 FOR I=1 TO N
110 PRINT "x";I;"=";"    f(x";I;")="
120 INPUT XK(I),FONK(I)
130 NEXT I
140 CLS
150 PRINT "Ara degeri giriniz"
160 INPUT XARA
170 I=1
180 IF XARA>XK(I) THEN I=I+1:GOTO 180
190 DIM CIZ(I,I+2)
200 FOR K=1 TO I
210 CIZ(K,1)=XK(K)
220 CIZ(K,3)=FONK(K)
230 CIZ(K,2)=XARA-CIZ(K,1)
240 NEXT K
250 FOR K=2 TO I
260 FOR L=K TO I
270 AKTAR1=CIZ(K-1,2)*CIZ(L,K+1)-CIZ(K-1,K+1)*CIZ(L,2)
280 AKTAR2=CIZ(L,1)-CIZ(K-1,1)
290 CIZ(L,K+2)=AKTAR1/AKTAR2
300 NEXT L
310 AKTAR1=0:AKTAR2=0
320 NEXT K
330 PRINT "    x          x-x(k)     f(x)"
340 FOR K=1 TO I
350 FOR L=1 TO I+2
360 PRINT USING "###.######";CIZ(K,L);
370 NEXT L
380 PRINT
390 NEXT K
400 PRINT
410 PRINT XARA;" ARADEGERI ICIN ENTERPOLASYON";CIZ(I,I+2);"BULUNMUSTU
420 PRINT
430 PRINT "BASKA ARADEGER GIRMEK ICIN F5 TUSUNA BASINIZ."
440 STOP
450 GOTO 150
```

```
Ara degeri giriniz
? 1.37
    x           x-x(k)     f(x)
  1.000000  0.370000  0.841470
  1.100000  0.270000  0.891210  1.025508
  1.200000  0.170000  0.932040  1.009024  0.981002
  1.300000  0.070000  0.963560  0.992048  0.980337  0.979870
  1.400000 -0.030000  0.985450  0.974652  0.979737  0.979927  0.979910

 1.37  ARADEGERI ICIN ENTERPOLASYON .9799099 BULUNMUSTUR.

BASKA ARADEGER GIRMEK ICIN F5 TUSUNA BASINIZ.
Break in 440
Ok
```