BAZI MATRİS UZAYLARININ ÖZELLİKLERİ

Berçem BOZTEMÜR

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI MATRİS UZAYLARININ ÖZELLİKLERİ

Berçem BOZTEMÜR

Doç. Dr. Atilla AKPINAR

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA - 2019

TEZ ONAYI

Berçem BOZTEMÜR tarafından hazırlanan "BAZI MATRİS UZAYLARININ ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç Dr. Atilla AKPINAR

Başkan : Prof.Dr.Süleyman ÇİFTÇİ
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Dr.Öğr.Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Doç.Dr.Atilla AKPINAR
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
4 **/02/2019**

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

31/01/2019

Berçem BOZTEMÜR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI MATRİS UZAYLARININ ÖZELLİKLERİ

Berçem BOZTEMÜR

Bursa Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Atilla AKPINAR

Bu tezde elemanları bir bölümlü halkadan seçilen karesel olmayan, alterne, simetrik ve hermityen matrislerin oluşturdukları dört uzay (geometrik yapı) incelenmiştir ve bu dört geometrik yapının bazı dönüşümler altında invaryant kalan özellikleri tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dikdörtgensel matris uzayı, Alterne matris uzayı, Hermityen matris uzayı, Simetrik matris uzayı.
2019, v+64 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

PROPERTIES OF SOME MATRIX SPACES

Berçem BOZTEMÜR

Bursa Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Atilla AKPINAR

In this thesis, four spaces (geometrical structure) formed by the non-square, alternate, symmetrical and hermitian matrices whose elements are selected from a division ring are examined and the invariant properties under some transformations of these four geometric structures are determined.

Key words: Rectangular Matrices Space, Alternate Matrices Space, Hermitian Matrices Space, Symmetrical Matrices Space.
2019, v+64 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanmasında, araştırılmasında, gerçekleştirilmesinde ve her aşamasında büyük bir sabırla değerli bilgilerini, zamanını ve tecrübelerini benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Atilla AKPINAR’a ve yüksek lisans eğitimim boyunca ders aldığım tüm saygıdeğer hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, doğduğum günden beri türlü fedakârlıklarla beni büyüten, bugünlere getiren ve maddi manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen aileme hoş görüşünden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Berçem BOZTEMÜR

31/01/2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$(\mathrm{G},+)$	+ işlemine göre bir grup
$(\mathrm{R},+,\cdot)$	+ ve $\cdot$ işlemlerine göre bir halka
D	Bölümlü halka
F	Cisim
$M_{m\times n}(D)$	D üzerinde tanımlı $m\times n$ boyutlu matris uzayı
D_n^m	D üzerinde tanımlı $m\times n$ boyutlu matris uzayı
E_{ij}	$M_{m\times n}(D)$ vektör uzayının standart bazının bir elemanı
A^T	A matrisinin transpozu
A^{-1}	A matrisinin tersi
$G_{m\times n}(D)$	$M_{m\times n}(D)$ üzerinde hareketler grubu
$GL_n(D)$	n dereceli genel lineer grup
$K_n(F)$	F üzerinde tanımlı $n\times n$ boyutlu alterne matris uzayı
$GK_n(F)$	$K_n(F)$ üzerinde hareketler grubu
$S_n(F)$	F üzerinde tanımlı $n\times n$ boyutlu simetrik matris uzayı
$GS_n(F)$	$S_n(F)$ üzerinde hareketler grubu
$H_n(D)$	D üzerinde tanımlı $n\times n$ boyutlu Hermityen matris uzayı
$GH_n(D)$	$H_n(D)$ üzerinde hareketler grubu
$AG^l(n,D)$	D üzerinde $n-$boyutlu sol afin uzay
$AG^r(n,D)$	D üzerinde $n-$boyutlu sağ afin uzay
$AG(n,F)$	F üzerinde $n-$boyutlu afin uzay
D^n	$n-$boyutlu vektör uzayı

1. GİRİŞ

Lisans seviyesinde sadece matematik bölümünde eğitim gören öğrencilerin değil fen bilimleri ve sosyal bilimlerle ilgili hemen hemen birçok derste öğrencilerin karşısına matris denilen bir tablo ya da matrislerle ilgili bir işlem kaçınılmaz olarak çıkmaktadır. Mesela, istatistiksel bir çalışma yapmak isteyen birinin elindeki verileri daha işlenebilir hale getirmek için ilk başta yapması gereken verileri bir tabloya aktarmaktır. Bu verilerle hangi istatiksel yöntemi çalışacaksa o yönde ilgili başka tablolarda oluşturabilir, mesela frekans tablosu veya verileri belli aralıklar arasında gruplandırmak istediğinde benzer tablolar oluşturulmak durumundadır. Bu tür tüm tablolar aslında birer matris örneğidir.

Matematikte ise matrislerin kullanımı; iki matrisin toplamı, bir skalarla bir matrisin çarpımı ya da iki matrisin çarpımı işlemlerinden ve bu işlemlerle ilgili elde edilebilecek sonuçlardan ibaret değildir. Mesela, katsayılar matrisi üzerinde farklı matematiksel metotlar kullanarak bir lineer denklem sisteminin çözümlerini irdelemek mümkündür. Üstelik, lineer dönüşümler ile matrisler arasında birebir bir karşılık gelme söz konusudur. Uygulama alanlarında ise matrislerin kullanımı hızla artmaktadır ve matrisler üzerinde birçok farklı işlemler tanımlanmıştır, Hadamard çarpımı, Schur çarpımı v.b. bunlara örnek olarak verilebilir. Başlangıçta lineer cebirin bir alt dalı olan matrisler şimdilerde matris teorisi olarak matematiğin bir dalı haline gelmiştir. Matris teorisi ve uygulamaları hakkında daha detaylı bilgi için (Perlis 1991, Herstein ve Winter 1988, Johnson 1990, Hartfiel 2001, Brualdi ve Cvetkovic 2009) çalışmaları incelenebilir.

Bu çalışmada; karesel olmayan matrislerin oluşturduğu dikdörtgensel matris uzayı, alterne matrislerin oluşturduğu alterne matris uzayı, simetrik matrislerin oluşturduğu simetrik matris uzayı ve Hermityen matrislerin oluşturduğu Hermityen matris uzayı tanıtılmak istenmiştir. Üstelik, bu uzaylarda belirli dönüşümler yardımıyla bir grup yapısı oluşturulmuş ve bu grup altında uzayın geometrik invaryatlarını incelemek hedeflenmiştir. Böylece, tam da Alman matematikçi Felix Klein (1849-1925) in geometry tanımında ifade ettiği gibi dönüşümler altında invaryant kalan özellikler incelenmiştir.

Bu niyetle, Zhe-Xian Wan (1996)' ın "Geometry of Matrices" isimli kitabının bazı bölümlerinde verilen bilgiler aslına sadık kalınarak Türkçe'ye çevrilmiş ve bu bilgiler altı bölüme ayrılarak bu tez oluşturulmuştur.

1. bölüm çalışmanın ana hatlarının çizildiği giriş kısmıdır.

2. bölüm çalışmada kullanılacak temel bilgilerin; tanım, önerme, teorem, sonuç, gösterim ve açıklamalar biçiminde takdim edildiği kısımdır.

3. bölümde bir D bölümlü halkasının elemanları yardımıyla tanımlanan $m \times n$ mertebeli matrislerin oluşturduğu dikdörtgensel matris uzayı üzerinde çalışılmıştır. Çalışmanın ana omurgasını oluşturan bu bölüm dört alt kısımdan oluşmaktadır:

3.1 de dikdörtgensel matris uzayı üzerinde belirli bir formda verilen 1:1 ve örten dönüşümler yardımıyla bir grup yapısı kurulmuş ve bu grup altında uzayın geometrik invaryantları incelenmiştir. Aritmetik uzaklık kavramı yardımıyla tanımlanan eşlenikliğin bir geometrik invaryant olduğu gösterilmiştir. Eşlenik nokta ikilileri yardımıyla bu uzayın iki noktası arasındaki uzaklık kavramı tanımlanmıştır. Böylece aritmetik uzaklık ile bu uzaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

3.2 de dikdörtgensel matris uzayında rankı 1 olan maksimal kümeler detaylı bir biçimde incelenmiş ve bu uzayda bir doğru tanımı yapılmıştır. Üstelik, bir doğrunun parametrik denklemi de verilmiştir.

3.3 de dikdörtgensel matris uzayında rankı 2 olan maksimal kümeler detaylı bir biçimde incelenmiş ve bu uzayda bir düzlem tanımı yapılmıştır. Ayrıca, bir düzlemin parametrik denklemi de verilmiştir.

3.4 de ise 3.1 de verilen ve dikdörtgensel matris geometrisinin temel teoremi olarak ifade edilen Teorem 3.1.5 in ispatı verilmiştir.

4, 5 ve 6. bölümlerde, sırasıyla, alterne matrislerden oluşan alterne matris uzayı, simetrik matrislerden oluşan simetrik matris uzayı ve Hermityen matrislerden oluşan Hermityen matris uzayı üzerinde çalışılmıştır. Bu üç bölümde sadece 3.1 de elde edilen sonuçların alterne, simetrik ve Hermityen matris uzayları üzerindeki karşılıkları üzerinde durulmuştur.

Bu tezin devamı olarak, 4, 5 ve 6. bölümlerde ele alınan matris geometrilerinin temel teoremleri ve bu tezde çalışılan dört farklı uzayın cebir, geometri ve graf teorideki uygulamaları üzerinde çalışılabilir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu kısımda verilen temel bilgileri literatürdeki herhangi bir cebir kitabında bulmak mümkündür. Aşağıda verilecek olan temel bilgiler ve daha fazlası için (Albert 1938, Nomizu 1966, Cullen 1972, Schneider ve Barker 1973, Hohn 1973, Hungerford 1974, Jacobson 1985, Fraleigh 1989, Perlis 1991, Wan 1996, Çiftçi 2015) çalışmalarına bakılabilir.

Tanım 2.1. G bir küme ve $*: G \times G \to G$ bir iç işlem olsun. Eğer,

G1) Her $a,b,c \in G$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ dir.

G2) Her $a \in G$ için $a*e = a = e*a$ olacak biçimde en az bir $e \in G$ vardır.

G3) Her $a \in G$ için $a^{-1}*a = e = a*a^{-1}$ olacak biçimde en az bir $a^{-1} \in G$ vardır.

şartları sağlanıyorsa $(G,*)$ ikilisine *grup* denir ve bu grup, eğer bir karışıklık söz konusu olmayacaksa, kısaca G ile gösterilir. Bir $(G,*)$ grubu için $\forall a,b \in G$ için $a*b = b*a$ şartı sağlanıyorsa G ye *değişmeli* (*komütatif*) *grup* ya da *Abel grubu* denir.

Tanım 2.2. R herhangi bir küme ve $+$ ile $\cdot$ bu küme üzerinde tanımlı herhangi iki ikili işlem olsun. Eğer

H1) $(R,+)$ değişmeli gruptur.

H2) $\cdot$ işlemi birleşmelidir.

H3) Her $a,b,c \in R$ için $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ ve $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ dir.

şartları gerçekleniyorsa $(R,+,\cdot)$ sistemine bir *halka* denir. Bazen kısalık olması bakımından $(R,+,\cdot)$ halkası R ile gösterilir.

Bir $(R,+,\cdot)$ halkasında birinci işleme genellikle *toplama*, ikinci işleme de *çarpma işlemi* adı verilir. Toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 ile, çarpma işlemine göre etkisiz eleman, varsa, 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana *özdeşlik* adı verilir. Eğer R halkasında özdeşlik elemanı varsa R ye *özdeşlikli halka*, çarpma işlemi değişmeli ise R ye *değişmeli(komütatif) halka* denir.

Tanım 2.3. R bir halka olsun. $\overbrace{1+1+1+...+1}^{n \text{ tane}}=0$ eşitliğine uyan en küçük $n \geq 2$ tamsayısına R halkasının *karakteristiği* denir. Eğer böyle (sonlu) bir n tamsayısı yoksa R nin *karakteristiği* sıfırdır denir.

Tanım 2.4. $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Eğer R nin bir R' alt kümesi R halkasının işlemleri altında bir halka oluşturuyorsa R' ye R nin bir *alt halkası* denir.

Tanım 2.5. R bir halka olsun. $Z(R)=\{a \in R \mid ab=ba,\ \forall b \in R\}$ alt halkasına R nin *merkezi* denir.

Tanım 2.6. $(R,+,\cdot)$ ve $(R',+',\cdot')$ iki halka, $\Phi : R \to R'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a,b \in R$ için

1) $\Phi(a+b) = \Phi(a) +' \Phi(b)$

2) $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot' \Phi(b)$

şartları sağlanıyorsa Φ dönüşümüne R den R' ye bir *homomorfizm* denir. Eğer 2) şartı yerine

$2')$ $\Phi(a \cdot b) = \Phi(b) \cdot' \Phi(a)$

şartı alınırsa Φ dönüşümüne R den R' ye bir *anti-homomorfizm* adı verilir.

Tanım 2.7. $(R,+,\cdot)$ ve $(R',+',\cdot')$ iki halka olsun. $\Phi : R \to R'$ birebir ve örten bir homomorfizm (veya anti-homomorfizm) ise Φ dönüşümüne R den R' ye bir *izomorfizm* (veya *anti-izomorfizm*) denir. R nin kendisi üzerine bir izomorfizmine (veya anti- izomorfizmine) R üzerinde bir *otomorfizm* (veya *anti-otomorfizm*) denir.

Tanım 2.8. R bir halka olsun. i, R üzerinde özdeşlik dönüşümü olmak üzere mertebesi 2 (yani $f \neq i$ iken $f^2 = i$) olan bir f otomorfizmine (veya anti-otomorfizmine) R nin bir *involusyonu* (veya *anti-involusyonu*) denir.

Tanım 2.9. Eğer $(R,+,\cdot)$ bir özdeşlikli halka ve $R-\{0\}$ ın her elemanının çarpmaya göre tersi varsa $(R,+,\cdot)$ halkasına *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. Çarpma işlemi değişmeli olan bir bölümlü halkaya *cisim* adı verilir.

Gösterim: Eleman sayısı q olan bir F cismi kısaca $\mathbb{F}_q$ biçiminde gösterilir.

Alt cisim tanımı, alt halka tanımına benzer biçimde yapılabilir.

Tanım 2.10. $(D,+,\cdot)$ bir bölümlü halka ve $(V,\oplus)$ bir abel grubu olsun. Eğer $\circ : D\times V \to V$ dış işlemi her $x,y\in V$ ve her $a,b\in D$ için;

V1) $a\circ(x\oplus y)=(a\circ x)\oplus(a\circ y)$

V2) $(a+b)\circ x=(a\circ x)\oplus(b\circ x)$

V3) $(a\cdot b)\circ x=a\circ(b\circ x)$

V4) $1\circ x=x$; $1\in D$ özdeşlik elemanı

şartları sağlanıyorsa V ye D bölümlü halkası üzerinde bir (sol) *vektör uzayı* denir ve eğer bir karışıklık olmayacaksa D bölümlü halkası belirtilmeden kısaca V ile gösterilir.

Benzer biçimde, bir (sağ) vektör uzayı tanımı yapılabilir.

Eğer V nin bir W altkümesi için V vektör uzayının işlemleri ile birlikte W da bir vektör uzayı oluyorsa, W ya V nin *altvektör uzayı* ya da kısaca *altuzayı* denir.

Tanım 2.11. F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $x_1,x_2,...,x_n\in V$ ve $\forall\ c_i\in F$ için $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0 \Rightarrow \forall c_i = 0$ ise $x_1,x_2,...,x_n$ vektörleri *lineer bağımsızdır,* aksi halde *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 2.12. Bir V vektör uzayının

B1) B lineer bağımsızdır.

B2) $V = Sp(B)$ dir.

şartlarını sağlayan bir B alt kümesine V nin bir *bazı* denir.

Tanım 2.13. Bir V vektör uzayının herhangi bir bazındaki eleman sayısına V nin *boyutu* denir. Eğer V nin boyutu sonlu ise V *sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır* denir.

Tanım 2.14. Girdileri ya da elemanları bir D bölümlü halkasından alınan ve m satır n kolondan oluşan bir tabloya *matris* denir. Böyle oluşturulan bir matris A ise $a_{ij}\in D$ olmak üzere $A=\left(a_{ij}\right)$ ya da $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ biçiminde gösterilir. Bu durumda A matrisine

$m \times n$ *dereceli* (*mertebeli* ya da *boyutlu*) *matris* denir, $m = n$ iken $n \times n$ yerine kısaca n yazarak A matrisine n *dereceli* (*mertebeli* ya da *boyutlu*) *matris* denir.

Gösterim: Girdileri bir D bölümlü halkasından alınarak oluşturulan $m \times n$ mertebeli tüm matrislerin kümesi $M_{m\times n}(D)$ ya da D_n^m ile gösterilir. $m = n$ iken kısaca $M_n(D)$ yazılır.

$M_{m\times n}(D)$ kümesi bilinen matris toplamı ve skalarla çarpma işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur.

Gösterim: $M_{m\times n}(D)$ vektör uzayının standart bazının elemanları $1 \le i \le m$ ve $1 \le j \le n$ olmak üzere E_{ij} ile gösterilir. E_{ij} matrisinin (i, j) yerindeki girdi 1 diğer tüm girdileri sıfırdır.

Tanım 2.15. Tüm girdileri sıfır olan bir matrise sıfır matrisi denir.

Gösterim: $M_{m\times n}(D)$ uzayının sıfır matrisi $0_{m\times n}$ ile gösterilir. $m = n$ ise kısaca 0_n yazılır.

Tanım 2.16. $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisinin satır ve kolonlarının yer değiştirmesi ile elde edilen matrise A *nın transpozu* denir ve bu matris A^T ile gösterilir.

Tanım 2.17. Satır ve kolon sayıları eşit olan bir matrise *kare matris* denir. Bir kare matrisin a_{ii} biçimindeki elemanlarının bulunduğu köşegene matrisin *esas köşegeni* denir.

Tanım 2.18. Bir kare matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanları dışındaki tüm elemanları sıfır ise bu matrise *diyagonal matris* denir. Özel olarak, esas köşegeni üzerindeki tüm elemanları 1 olan bir diyagonal matrise *birim matris* denir ve n dereceli bir birim matris I_n ile gösterilir.

Tanım 2.19. $A \in M_{n\times n}(D)$ olsun. $AB = BA = I_n$ olacak biçimde bir $B \in M_{n\times n}(D)$ matrisi varsa bu takdirde A ya *regüler matris* ve B ye de A *nın tersi* denir. Bu durumda B yerine A^{-1} yazılır.

Gösterim: Girdileri bir D bölümlü halkasından alınan $n \times n$ mertebeli tüm regüler matrislerin kümesi matris çarpımı işlemi altında bir grup oluşturur. Bu grup n dereceli genel lineer grup olarak isimlendirilir ve kısaca $GL_n(D)$ ile gösterilir.

Tanım 2.20. $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisinin lineer bağımsız satır (kolon) sayısına A matrisinin *satır* (*kolon*) *rankı* denir.

Önerme 2.21. $A \in M_{n\times n}(D)$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart A matrisinin satır rankının n olmasıdır.

Önerme 2.22. (i) $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisinin satır rankı r ve $B \in M_{n\times l}(D)$ matrisinin satır rankı n olsun. Bu takdirde AB matrisinin satır rankı r dir.

(ii) $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisinin kolon rankı n ve $B \in M_{n\times l}(D)$ matrisinin kolon rankı s olsun. Bu takdirde AB matrisinin kolon rankı s dir.

Önerme 2.23. $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisinin satır rankı m olsun. Bu takdirde $m \le n$ dir ve $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ regüler olacak biçimde bir $B \in M_{(n-m)\times n}(D)$ matrisi vardır.

Tanım 2.24. $A, B \in M_{m\times n}(D)$ olsun. Şayet $A = PBQ$ olacak biçimde bir regüler $P \in M_m(D)$ ve bir regüler $Q \in M_n(D)$ matrisi bulunabilirse A *ile* B *matrislerine denktirler* denir.

Önerme 2.25. Denk matrisler aynı satır ve kolon rankına sahiptir.

Önerme 2.26. Satır rankı r olan herhangi bir $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisi $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$ matrisine denktir.

Sonuç 2.27. Herhangi bir $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisinin satır ve kolon rankı birbirine eşittir.

Tanım 2.28. Herhangi bir $A \in M_{m\times n}(D)$ matrisinin satır veya kolon rankına A *nın rankı* denir ve kısaca $rankA$ ile gösterilir.

Sonuç 2.29. $A,B\in M_{m\times n}(D)$ olsun. Bu takdirde A ve B nin denk olması için gerek ve yeter şart $rankA=rankB$ olmasıdır.

Önerme 2.30. $A,B\in M_{m\times n}(D)$ olsun. Bu takdirde $rank(A+B)\leq rankA+rankB$ dir.

Önerme 2.31. Eğer $T\in GL_n(D)$, $P\in M_{m\times n}(D)$ ve $rankP=m$ ise bu takdirde $PT\in M_{m\times n}(D)$ ve $rank(PT)=m$ dir. Üstelik, eğer $P,Q\in M_{m\times n}(D)$ ve $rankP=rankQ=m$ ise bu takdirde $P=QT$ olacak biçimde bir $T\in GL_n(D)$ vardır.

Gösterim: D bir bölümlü halka iken $D^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,1\leq i\leq n,\ x_i\in D\}$ ile D üzerine kurulan $n-$boyutlu vektör uzayı gösterilir.

Sonuç 2.32. D^n nin sıfırdan farklı tüm vektörlerinin kümesi $GL_n(D)$ altında bir *yörünge* (yani bir *geçişli küme*) oluşturur.

Önerme 2.33. D^n nin tüm $m-$boyutlu alt uzaylarının kümesi $GL_n(D)$ altında bir yörünge oluşturur.

Önerme 2.34. D^n nin alt uzaylarının yörüngelerinin sayısı $n+1$ dir.

Tanım 2.35. D bir bölümlü halka, $\bar{\ }$ D nin bir anti-otomorfizmi ve $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(D)$ olsun. $\bar{A}=(\overline{a_{ij}})$ olarak tanımlanmak üzere bir $H\in M_n(D)$ için $(\bar{H})^T=H$ oluyorsa H ye bir *Hermityen matris* denir.

Tanım 2.36. $M_n(D)$ de herhangi iki Hermityen matris H_1 ve H_2 olsun. Eğer $H_1=(\bar{P})^T H_2P$ olacak biçimde bir $P\in GL_n(D)$ matrisi varsa H_1 *ve* H_2 *ye cogredienttir* (ya da *conjuctivdir*) denir.

Tanım 2.37. F bir cisim ve $S\in M_n(F)$ olsun. Eğer $S^T=S$ oluyorsa S ye bir *simetrik matris* denir.

Sonuç 2.38. F karakteristiği $\neq 2$ olan bir cisim ve $S\in M_n(F)$ bir simetrik matris olsun. Bu takdirde $rankS=r$ ve $i=1,2,...,r$ için $a_i\neq 0$ olmak üzere S matrisi

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_r & \\ & & & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

biçimindeki bir diyagonal matrise cogredienttir.

Tanım 2.39. $K = (k_{ij}) \in M_n(F)$ olsun. Eğer $\forall i \neq j$ için $k_{ij} = -k_{ji}$ ve $\forall i = j$ için $k_{ii} = 0$ ise K matrisine bir *alterne matris* denir.

Önerme 2.40. $K = (k_{ij}) \in M_n(F)$ nın bir alterne matris olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in M_{n\times 1}(F)$ için $x^T K x = 0$ olmasıdır.

Eğer F nin karakteristiği $\neq 2$ ise bu takdirde alterne matrisler genellikle *ters* (ya da *anti*)-*simetrik matrisler* olarak isimlendirilmektedir.

Tanım 2.41. $M_n(F)$ de herhangi iki alterne matris K_1 ve K_2 olsun. Eğer $P^T K_1 P = K_2$ olacak biçimde bir $P \in GL_n(F)$ matrisi varsa K_1 *ve* K_2 *ye cogredienttir* (ya da *congruenttir*) denir.

Aşağıda ifade edilecek önermenin ispatı için (Albert 1938) de Theorem 3 ve Theorem 4 e ya da (Wan 1996) da Proposition 1.34 e bakılabilir.

Önerme 2.42. $K \in M_{n\times n}(F)$ bir alterne matris olsun. Bu takdirde $rankK$ çift olmak zorundadır. Üstelik, eğer $rankK = 2v(\leq n)$ ise bu takdirde K matrisi, 2×2 blokların sayısı v olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

matrisine ve de

$$\begin{pmatrix} 0 & I_v & \\ I_v & 0 & \\ & & 0_{n-2v} \end{pmatrix}$$

matrisine cogredienttir.

Aşağıda ifade edilecek önermenin ispatı için (Albert 1938) de Theorem 6 ya da (Wan 1996) da Proposition 1.35 e bakılabilir.

Önerme 2.43. F karakteristiği 2 olan bir cisim, $n \geq 1$ bir tamsayı ve $S \in M_{n\times n}(F)$ alterne olmayan bir simetrik matris olsun. Bu takdirde S matrisi bir diyagonal matrise cogredienttir.

D_n^1 $n-$boyutlu vektör uzayı olsun. D_n^1 nin vektörlerine uzayın *noktaları*, $1-$boyutlu alt uzaylarına D_n^1 nin *doğruları*, $2-$boyutlu alt uzaylarına D_n^1 nin *düzlemleri* ve $(n-1)-$boyutlu alt uzaylarına D_n^1 nin *hiperdüzlemleri* denir. Daha genel olarak, $0 \leq r \leq n$ için herhangi bir $r-$boyutlu alt uzaya *afin* $r-$*flat* ya da kısaca $r-$*flat* adı verilir. Özel olarak, $0-$flatlara *nokta*, $1-$flatlara *doğru*, $2-$flatlara *düzlem* ve $(n-1)-$flatlara *hiperdüzlem* denir. Şayet bir $r-$flat bir $s-$flatta kapsanıyorsa ya da bulunuyorsa bu $r-$*flat* $s-$*flat üzerindedir* denir. Bu takdirde $0 \leq r \leq n$ için afin $r-$flatlardan oluşan ve yukarıdaki biçimde tanımlanan üzerinde olma bağıntısı ile birlikte D_n^1 nokta kümesine D üzerinde $n-$*boyutlu sol afin uzay* denir ve bu uzay kısaca $AG^l(n,D)$ ile gösterilir. Bir $r-$*flatın boyutu* r olarak tanımlanır.

Benzer biçimde, D_1^n $n-$boyutlu vektör uzayı ile D üzerinde $n-$*boyutlu sağ afin uzay* tanımlanabilir ve bu uzay kısaca $AG^r(n,D)$ ile gösterilir.

$D=F$ bir cisim iken $AG^l(n,F)$ ve $AG^r(n,F)$ uzayları özdeş olacağından her ikisi yerine $AG(n,F)$ gösterimi kullanılır.

Teorem 2.44 (Afin Geometrinin Temel Teoremi). D bir bölümlü halka, $n\geq 2$ bir tamsayı ve A ise $AG^l(n,D)$ den kendisine doğruları doğrulara resmeden bir 1:1 ve örten dönüşüm olsun. $n\geq 3$ ve $D=\mathbb{F}_2$ iken üstelik A nın düzlemleri düzlemlere resmettiğini kabul edelim. Bu takdirde A tüm $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in AG^l(n,D)$ için

$$A(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1,x_2,\dots,x_n)^\sigma T+(a_1,a_2,\dots,a_n) \qquad (2.1)$$

formundadır. Burada σ D nin $(x_1,x_2,\dots,x_n)^\sigma=(x_1^\sigma,x_2^\sigma,\dots,x_n^\sigma)$ özelliğinde bir otomorfizmi, $T\in GL_n(D)$ ve $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in D^n$ dir. Tersine olarak, (2.1) formundaki herhangi bir dönüşüm 1:1 ve örtendir ve doğruları doğrulara, düzlemleri düzlemlere ve $0\leq r\leq n$ için $r-$flatları $r-$flatlara dönüştürür.

Teorem 2.44 ün D ve D' herhangi iki bölümlü halka, $n\geq 2$ bir tamsayı ve A dönüşümü ise $AG^l(n,D)$ den $AG^l(n,D')$ ye ya da $AG^r(n,D)$ den $AG^r(n,D')$ ye bir 1:1 ve örten dönüşüm olarak alınması ile genelleştirilebileceği (Wan 1996) dan görülebilir.

3. DİKDÖRTGENSEL MATRİS GEOMETRİSİ

Bu bölümde dikdörtgensel matris uzayı ile ilgili bilgi detaylı bir biçimde verilmeye çalışılmıştır. Çünkü, burada elde edilecek sonuçların karşılıkları alterne, simetrik ve Hermityen matris uzayları üzerinde, sırasıyla, 4, 5 ve 6. bölümlerde de incelenecektir.

3.1. Dikdörtgensel Matris Uzayı

m ile n, $m,n \geq 2$ özelliğinde iki tamsayı ve D bir bölümlü halka olsun. $M_{m\times n}(D)$ uzayına $m\times n$ mertebeli matrislerin uzayı ya da kısaca *dikdörtgensel matris uzayı* denir ve elemanlarına da *uzayın noktaları* adı verilir.

$P \in GL_m(D)$ ve $Q \in GL_n(D)$ $R \in M_{m\times n}(D)$ olmak üzere $M_{m\times n}(D)$ uzayı üzerinde her $X \in M_{m\times n}(D)$ için

$$X \longrightarrow PXQ + R \tag{3.1}$$

formundaki dönüşümleri ele alınacaktır. (3.1) formundaki bir dönüşümün $1:1$ ve örten olduğu açıktır. Şimdi bu formdaki dönüşümlerin bileşke işlemi altında bir grup oluşturduğu elde edilecektir. Bu grup $G_{m\times n}(D)$ ile gösterilsin. İlk olarak bileşke işleminin birleşmeli olduğu gösterilecektir:

$i = 1,2,3$ ve her $A_i \in G_{m\times n}(D)$ için $X \to A_i(X) = P_iXQ_i + R_i$ olsun. Bu takdirde, her $X \in M_{m\times n}(D)$ için

$$\begin{aligned}
\left[A_3(A_2A_1)\right](X) &= A_3\left[(A_2A_1)(X)\right] = A_3\left[A_2\left(A_1(X)\right)\right] \\
&= A_3\left[A_2\left(P_1XQ_1 + R_1\right)\right] \\
&= A_3\left[P_2\left(P_1XQ_1 + R_1\right)Q_2 + R_2\right] \\
&= P_3\left[P_2\left(P_1XQ_1 + R_1\right)Q_2 + R_2\right]Q_3 + R_3
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left[(A_3A_2)A_1\right](X) &= \left[(A_3A_2)\left(A_1(X)\right)\right] = \left[A_3\left(A_2\left(A_1(X)\right)\right)\right] \\
&= \left[A_3\left(A_2\left(P_1XQ_1 + R_1\right)\right)\right] \\
&= \left[A_3\left(P_2\left(P_1XQ_1 + R_1\right)Q_2 + R_2\right)\right] \\
&= P_3\left[P_2\left(P_1XQ_1 + R_1\right)Q_2 + R_2\right]Q_3 + R_3
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, 1:1 ve örten dönüşümlerin bileşkeleri de 1:1 ve örtendir.

Her $X \in M_{m\times n}(D)$ için $X \to I(X) = I_m X I_n + 0_{m\times n}$ biçiminde tanımlı (3.1) formunda bir dönüşüm vardır. Bu dönüşüme özdeşlik dönüşümü denir. Ayrıca, her $X \in M_{m\times n}(D)$ için

$$(AI)(X) = A\big(I(X)\big) = A(X) \Rightarrow AI = A \text{ ve } (IA)(X) = I\big(A(X)\big) = A(X) \Rightarrow IA = A$$

olduğundan I dönüşümü bileşke işleminin etkisiz elemanıdır.

Herhangi bir $A \in G_{m\times n}(D)$ için $X \to A(X) = PXQ + R$ dönüşümünün tersi

$$A(X) = Y \Leftrightarrow A^{-1}(Y) = X$$

şartı ile tanımlı $A^{-1} : M_{m\times n}(D) \to M_{m\times n}(D)$ dönüşümüdür. A dönüşümü 1:1 ve örten olduğundan A^{-1} de 1:1 ve örten bir dönüşümdür. Üstelik, her $X, Y \in M_{m\times n}(D)$ için

$$(AA^{-1})(Y) = A\big(A^{-1}(Y)\big) = A(X) = Y = I(Y),$$

$$(A^{-1}A)(X) = A^{-1}\big(A(X)\big) = A^{-1}(Y) = X = I(X)$$

eşitliklerinden $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ olduğu yani $X \to A^{-1}(X) = P^{-1}XQ^{-1} - P^{-1}RQ^{-1}$ dönüşümü bileşke işlemine göre A nın tersidir.

Böylece (3.1) formundaki dönüşümlerin $M_{m\times n}(D)$ üzerinde $G_{m\times n}(D)$ ile gösterilen bir hareketler grubu oluşturduğu sonucuna varılır. Bu takdirde aşağıdaki önerme ifade edilebilir.

Önerme 3.1.1. $G_{m\times n}(D)$ grubu $M_{m\times n}(D)$ üzerinde geçişkendir.

İspat. $M_{m\times n}(D)$ uzayının herhangi iki noktası X_1 ve X_2 olsun. Bu takdirde

$$X \longrightarrow X + (X_2 - X_1)$$

dönüşümü X_1 noktasını X_2 noktasına resmeder. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.2. $X_1, X_2 \in M_{m\times n}(D)$ olsun. Eğer $rank(X_1 - X_2) = r$ ise X_1 *ile* X_2 *arasındaki aritmetik uzaklık* r dir denir ve bu durum $ad(X_1, X_2) = r$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $r = 1$ iken bu iki noktaya *eşleniktir* (ya da bağlıdır) denir.

Bu aritmetik uzaklık, bir metrik uzayda uzaklık fonksiyonu için gereken aşağıdaki üç özelliği de sağlar.

Önerme 3.1.3. $X_1, X_2, X_3 \in M_{m\times n}(D)$ olsun. Bu takdirde,

1) $ad(X_1, X_2) \geq 0$ dır ve $ad(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2$ dir.

2) $ad(X_1, X_2) = ad(X_2, X_1)$ dir.

3) $ad(X_1, X_2) + ad(X_2, X_3) \geq ad(X_1, X_3)$ dür.

İspat. 1) ve 2) nin ispatı tanımdan açıktır. 3) ün ispatı Önerme 2.30 den görülür.

Önerme 3.1.4. $G_{m\times n}(D)$ grubunun elemanları $M_{m\times n}(D)$ uzayının herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığı invaryant (değişmez) bırakır. Üstelik, $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ özelliğindeki herhangi bir r için $M_{m\times n}(D)$ uzayındaki aritmetik uzaklığı r olan nokta ikililerinin kümesi $G_{m\times n}(D)$ üzerinde bir yörünge oluşturur.

İspat. İlk ifadenin ispatı açıktır. İkinci ifadeyi ispatlayalım. $M_{m\times n}(D)$ de aritmetik uzaklığı r olan iki nokta X_1 ve X_2 olsun. Bu durumda $rank(X_1 - X_2) = r$ dir. $M_{m\times n}(D)$ de rankı r olan bir nokta R olsun. İspat için $G_{m\times n}(D)$ nin X_1 i sıfıra ve X_2 yi R ye resmeden bir elemanının varlığını göstermek yeterlidir. $X \longrightarrow X - X_1$ dönüşümünün X_1 i sıfıra ve X_2 yi $X_2 - X_1$ e resmedeceği açıktır. Böylece, $rank(X_2 - X_1) = r$ elde edilir. $RankR = r$ olduğundan Sonuç 2.29 yardımıyla $P(X_2 - X_1)Q = R$ olacak şekilde bir $P \in GL_m(D)$ ve bir $Q \in GL_n(D)$ elemanı vardır. Dolayısıyla, $X \longrightarrow PXQ$ dönüşümü sıfırı invaryant bırakır ve $X_2 - X_1$ i R ye resmeder. O halde istenen özellikte bir dönüşüm bulunmuştur ve ispat tamamlanmıştır.

Böylece, $M_{m\times n}(D)$ uzayının herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığın $G_{m\times n}(D)$ grubu altında bir geometrik invaryant olduğu sonucuna varılmış olur. Özellikle de $M_{m\times n}(D)$ uzayının eşlenik olan bir nokta çifti için de bu sonuç geçerlidir. Bu tür geometrik invaryantlarla $G_{m\times n}(D)$ grubunun elemanları karakterize edilecektir. $m \neq n$ iken D nin bir otomorfizmi olan (3.1) formundaki dönüşümleri karakterize etmek için sadece bir tane geometrik invaryantın yeterli olacağı gösterilecektir, o da

$M_{m\times n}(D)$ uzayının eşlenik olan nokta çiftlerinin $G_{m\times n}(D)$ grubu altında oluşturduğu geometrik invaryanttır. Bunun için ispatı daha sonra verilecek olan ve dikdörtgensel matris geometrisinin temel teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teorem ifade edilecektir.

Teorem 3.1.5 (Temel Teorem). m ile n, $m,n \geq 2$ özelliğinde iki tamsayı; D herhangi bir bölümlü halka ve A da $M_{m\times n}(D)$ den kendisine $1{:}1$ ve örten bir dönüşüm olsun. A ve A^{-1} in her ikisinin de $m\times n$ mertebeli matris çiftlerinin eşlenikliğini koruduğunu, yani "Herhangi $X_1, X_2 \in M_{m\times n}(D)$ için X_1 ve X_2 noktalarının eşlenik olması için gerek ve yeter şart $A(X_1)$ ve $A(X_2)$ noktalarının eşlenik olmasıdır." önermesinin doğru olduğunu kabul edilsin. Bu takdirde, $m \neq n$ iken A dönüşümü, her $X \in M_{m\times n}(D)$ için

$$A(X) = PX^{\sigma}Q + R \tag{3.2}$$

formundadır ki burada $P \in GL_m(D), Q \in GL_n(D), R \in M_{m\times n}(D)$, σ D nin bir otomorfizmi, X^{σ} da X in tüm girdilerine σ yı uygulayarak X den elde edilen matristir. $m = n$ iken her $X \in M_{m\times n}(D)$ için (3.2) ye ilave olarak

$$A(X) = P\left(X^{\tau}\right)^{T} Q + R \tag{3.3}$$

eşitliği geçerlidir ki burada τ D nin bir anti-otomorfizmidir. Tersine olarak, $M_{m\times n}(D)$ nin (3.2) (ve $m = n$ iken (3.3)) formundaki herhangi bir dönüşüm $1{:}1$ ve örtendir ve bu dönüşüm ile onun tersi olan dönüşüm $m\times n$ mertebeli matris çiftlerinin eşlenikliğini korur.

Teorem 3.1.5 in ispatı 3.1-3.3 bölümlerinde yapılacak bazı hazırlıklardan sonra Bölüm 3.4 de verilecektir.

Tanım 3.1.6. $X, X' \in M_{m\times n}(D)$ olsun. $X \neq X'$ iken, $i = 0,1,2,...,r-1$ için X_i ile X_{i+1} eşlenik ve $X_0 = X$, $X_r = X'$ olacak şekilde $r+1$ elemanlı $X_0, X_1, ..., X_r$ dizisi vardır şartını sağlayan en küçük pozitif r tamsayısına X *ve* X' *arasındaki uzaklık* denir ve $d(X, X') = r$ ile gösterilir. $X = X'$ iken $d(X, X) = 0$ olarak tanımlanır.

Önerme 3.1.7. $M_{m\times n}(D)$ uzayının herhangi iki noktası X ve X' olsun. Bu takdirde,

$$ad(X, X') = d(X, X')$$

dir.

İspat. $X = X'$ iken $ad(X, X) = d(X, X) = 0$ olacağı açıktır. O halde $X \neq X'$ kabul edilsin. $ad(X, X') = r$ yani $rank(X - X') = r$ olduğunu da kabul edilsin. Önerme 2.26 yardımıyla

$$P(X - X')Q = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \\ & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

olacak biçimde $P \in GL_m(D)$ ve $Q \in GL_n(D)$ vardır. $i = 1, 2, ..., r$ için

$$R_i = P^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_i & \\ & 0_{(m-i)\times(n-i)} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

olsun. Bu takdirde,

$X_0 = X,\ X_1 = X - R_1, X_2 = X - R_2, ..., X_r = X - R_r = X'$ matrisleri $i = 0,1,2,...,r-1$ için X_i ve X_{i+1} eşlenik olacak şekilde $M_{m\times n}(D)$ uzayında $r+1$ elemanlı bir dizi oluşturur. Bu yüzden,

$$d(X,\ X') \leq r = ad(X,\ X') \qquad \text{(a)}$$

olur.

Tersine olarak, $d(X,\ X') = r'$ olduğu varsayılsın. Bu takdirde $i = 0,1,2,...,r'-1$ için X_i ve X_{i+1} eşlenik olacak şekilde $X_0 = X$ ve $X_{r'} = X'$ özelliğinde $r'+1$ noktalı $X_0,\ X_1,\ X_2, ..., X_{r'}$ dizisi vardır. Önerme 2.30 yardımıyla

$$d(X,\ X') = r' = \sum_{i=0}^{r'-1} rank(X_i - X_{i+1}) \geq rank(X_0 - X_{r'}) = rank(X - X') = ad(X\ ,\ X') \qquad \text{(b)}$$

yazılabilir. (a) ve (b) den

$$ad(X,\ X') = d(X,\ X')$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.8. A, $M_{m\times n}(D)$ den kendisine 1:1 ve örten bir dönüşüm olup hem A nın hem de A^{-1} in $m\times n$ mertebeli matris çiftlerinin eşlenikliğini koruduğu varsayılsın. Bu takdirde, A $m\times n$ matrislerinin herhangi ikilisi arasındaki aritmetik uzaklığı korur, yani herhangi $X,\ X'\in M_{m\times n}(D)$ için $ad(X,\ X')=ad\big(A(X),\ A(X')\big)$ dir.

İspat. A nın $m\times n$ matris ikililerinin eşlenikliğini koruduğunu yani X_1 ve X_2 eşlenik iken $A(X_1)$ ve $A(X_2)$ nin de eşlenik olduğunu kabul edilsin. Bu takdirde, herhangi $X,\ X'\in M_{m\times n}(D)$ için

$$d(X,\ X')\geq d\big(A(X),\ A(X')\big)$$

dir. Önerme 3.1.7 yardımıyla

$$ad(X,\ X')\geq ad\big(A(X),\ A(X')\big)$$

elde edilir. Benzer biçimde, şayet A^{-1} de eşlenikliği korursa bu takdirde

$$ad\big(A(X),\ A(X')\big)\geq ad(X,\ X')$$

bulunur. Böylece, hem A hem de A^{-1} eşlenikliği korursa bu takdirde herhangi $X,\ X'\in M_{m\times n}(D)$ için

$$ad(X,\ X')=ad\big(A(X),\ A(X')\big)$$

sonucuna varılır.

3.2. Rankı 1 Olan Maksimal Kümeler

Tanım 3.2.1. $M_{m\times n}(D)$ uzayında boştan farklı bir küme M olsun. Şayet M nin herhangi iki noktası eşlenik ve M nin herhangi bir noktasına eşlenik olan M nin dışında başka bir nokta yoksa M ye *rankı* 1 *olan bir maksimal küme* denir.

Önerme 3.2.2. $M_{m\times n}(D)$ uzayında rankı 1 olan bir maksimal küme (3.1) formundaki herhangi bir dönüşüm altında rankı 1 olan bir maksimal kümeye taşınabilir.

İspat. Önerme 3.1.4 ün bir sonucudur.

Önerme 3.2.3. Hem

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots\cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x_{11},\, x_{12},\ldots,\, x_{1n} \in D \right\} \tag{3.4}$$

hem de

$$M_1' = \left\{ \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ y_{m1} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \; y_{11},\, y_{21},\ldots,\, y_{m1} \in D \right\} \tag{3.5}$$

rankı 1 olan birer maksimal kümedir. Üstelik, rankı 1 olan her bir maksimal küme (3.1) formundaki bir dönüşüm altında ya M_1 e ya da M_1' ye taşınabilir.

İspat. M_1 in (ya da M_1' nün) herhangi iki noktasının eşlenik olduğu açıktır. M_1 (veya M_1' nün) herhangi bir noktasına eşlenik hiçbir noktanın bulunmadığı aşağıdaki paragrafta verilen tartışmadan görülecektir. M , $M_{m\times n}(D)$ de kapsanan rankı 1 olan bir maksimal küme olsun. M nin tek bir noktadan ibaret olamayacağı aşikârdır. M nin bir nokta çifti X ve X' olsun, bu takdirde onlar eşleniktir. Önerme 3.1.4 yardımıyla X ve X' yü, sırasıyla, 0 ve E_{11} e taşıyan (3.1) formunda bir dönüşüm vardır. Bu dönüşüm M yi 0 ve E_{11} i kapsayan ve rankı 1 olan bir maksimal kümeye taşıyacaktır. Bu yüzden M nin 0 ve E_{11} i bulundurduğu kabul edilebilir. M nin başka bir noktası X_1 olsun. X_1 ve 0 eşlenik olduğundan X_1 in rankı 1 dir. Bu yüzden $a_1,\, a_2,\ldots,\, a_m \in D$ elemanlarının hepsi birden sıfır olmamak ve $b_1,\, b_2,\ldots,\, b_n \in D$ elemanlarının hepsi birden sıfır olmamak üzere

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots\cdots\cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots\cdots\cdots & a_2b_n \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots\cdots\cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

yazabiliriz. X_1 ve E_{11} de eşlenik olduğundan $X_1 - E_{11}$ matrisinin rankı 1 dir. Bu yüzden $i = 2, 3, \ldots, m;$ $j = 2, 3, \ldots, n$ için $a_ib_j = 0$ dır. Eğer $b_2, b_3, \ldots, b_n$ hepsi birden sıfırdan farklı ise bu takdirde $a_2 = a_3 = \cdots = a_m = 0,$ $a_1 \neq 0$ ve bu yüzden

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots\cdots\cdots & a_1b_n \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

dir. Aksi takdirde, $b_1 \neq 0$ ve $a_2, a_3, \ldots, a_m$ hepsi birden sıfır olmamak üzere

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ a_2b_1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ a_mb_1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

elde edilir. M_1 ve M_1' nün arakesiti

$$\{ xE_{11} \mid x \in D \} \tag{3.8}$$

kümesinin bir maksimal küme olmadığı aşikârdır. Mesela, $A = xE_{11}$ ve $A' = yE_{12}$ için $rank(A - A') = 1$ yani A ile A' eşlenik ve $A' \notin \{ xE_{11} \mid x \in D \}$ dir. Eğer M (3.8) dışında bir noktayı kapsarsa, mesela $a_1 \neq 0$ ve hepsi birden sıfır olmayan $b_2, b_3, \ldots, b_n$ özelliğinde noktalarla oluşturulan (3.6) formunda bir noktayı kapsıyorsa bu takdirde M nin noktalarının hiçbiri $b_1 \neq 0$ ve hepsi birden sıfır olmayan $a_2, a_3, \ldots, a_m$ özelliğinde noktalarla oluşturulan (3.7) formunda olamaz. Benzer biçimde, eğer M $b_1 \neq 0$ ve $a_2, a_3, \ldots, a_m$ özelliğinde noktalarla oluşturulan (3.7) formundaki bir nokta kapsıyorsa bu takdirde M nin noktalarının hiçbiri $a_1 \neq 0$ ve hepsi birden sıfır olmayan $b_2, b_3, ..., b_n$ özelliğinde noktalarla oluşturulan (3.6) formunda olamaz. Açıkça M_1 in (ya da M_1' nün) her nokta çifti eşleniktir. Bu yüzden M, ya M_1 ya da M_1' dür.

Sonuç 3.2.4. Rankı 1 olan bir maksimal küme,
$P \in GL_m(D),\ Q \in GL_n(D),\ R \in M_{m\times n}(D)$ olmak üzere ya

$$\left\{ P\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .... & x_{1n} \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}Q+R \;\middle|\; x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n} \in D \right\} \tag{3.9}$$

ya da

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & .... & 0 \\ y_{21} & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ y_{m1} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}Q+R \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, ..., y_{m1} \in D \right\} \tag{3.10}$$

formundadır.

Önerme 3.2.3 ün ispatı, aşağıdaki sonuçların elde edilmesini sağlar.

Sonuç 3.2.5. $M_{m\times n}(D)$ uzayında verilen eşlenik noktaların herhangi bir çifti için onların her ikisini birden kapsayan ve rankı 1 olan iki ve yalnız iki tane maksimal küme vardır ki biri M_1 diğeri M_1' ye taşınabilen iki kümedir. Noktaların her biri hem M_1 hem de M_1' deki noktalar olarak düşünülebilir.

Sonuç 3.2.6. Rankı 1 olan iki farklı maksimal kümenin arakesitinde bir noktadan daha fazla nokta varsa bu arakesit kümesi (3.1) formundaki bir dönüşüm altında (3.8) e taşınabilir.

Tanım 3.2.7. Eğer rankı 1 olan iki farklı maksimal kümenin arakesitinde birden fazla ortak nokta varsa bu takdirde bu arakesit bir *doğru* olarak isimlendirilir.

Sonuç 3.2.8. Eşlenik noktaların herhangi bir çiftinden geçen bir ve yalnız bir doğru vardır.

Sonuç 3.2.9. $M_{m\times n}$ uzayında bir doğrunun parametrik denklemi; p D üzerinde sıfırdan farklı $m-$boyutlu bir satır vektörü, q D üzerinde sıfırdan farklı $n-$boyutlu bir satır vektörü ve $R \in M_{m\times n}(D)$ olmak üzere

$$\left\{ p^T xq + R \,\middle|\, x \in D \right\}$$

formundadır. Rankı 1 maksimal (3.4) kümesindeki bir doğrunun parametrik denklemi, $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \neq 0$ olmak üzere

$$\left\{ x\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in D \right\}$$

ve rankı 1 olan maksimal (3.5) kümesindeki bir doğrunun parametrik denklemi, $(a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1})^T \neq 0$ olmak üzere

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ a_{m1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ b_{m1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in D \right\}$$

dir.

Üstelik, aşağıdaki önerme geçerlidir.

Önerme 3.2.10. Sadece bir ortak noktaları bulunan iki maksimal küme, $G_{m\times n}(D)$ grubu altında aynı anda ya (3.4) ve

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots\cdots & x_{2n} \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \in D \right\} \tag{3.11}$$

formuna ya da (3.5) ve

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & y_{12} & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & \cdots\cdots\cdots & \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & y_{m2} & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in D \right\} \tag{3.12}$$

formuna dönüştürülebilir.

İspat. Sadece tek bir noktaları ortak rankı 1 olan iki maksimal küme M ve M' olsun. Önerme 3.1.1 ve Önerme 3.2.3 yardımıyla M ve M' nün ortak noktasının 0 a ve M nin $G_{m\times n}(D)$ nin bir elemanı ile (3.4) ya da (3.5) e taşınabildiğini kabul edilebilir. M nin (3.4) e taşındığı durum göz önüne alınsın. (Diğer durum benzer bir yolla yapılabilir.) M' kümesi M'' ye taşınsın ve

$$X_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ise M'' nün sıfırdan farklı bir elemanı olsun. X_2 (3.4) formunda bir eleman olmadığından X_2 nin son $m-1$ tane satırı ile oluşturulan alt matrisin rankı 1 dir. Böylece

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix} X_2 Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots\cdots & c_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

olacak biçimde bir $P \in GL_{m-1}(D)$ ve bir $Q \in GL_n(D)$ matrisi vardır. Yukarıdaki matrisin rankı 1 dir, bu yüzden $c_{12} = \cdots = c_{1n} = 0$ dır.

$$X \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix} XQ$$

dönüşümünün sıfırı ve aynı zamanda (3.4) formunda rankı 1 olan maksimal kümeyi sabit bıraktığına dikkat ediniz. Bu takdirde

$$X \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -c_{11} & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & \ddots & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} X$$

dönüşümü (3.4) ü sabit bırakır ve (3.13) ü E_{21} e taşır. Sonuç 3.2.5 gereği 0 ve E_{21} i kapsayan ve rankı 1 olan tam olarak iki maksimal küme vardır. Açık olarak; (3.11) ve (3.5), 0 ve E_{21} i kapsayan rankı 1 olan iki maksimal kümedir. (3.4) ve (3.5) in birden fazla ortak noktası olduğundan (3.5) mümkün değildir. Bu yüzden (3.11) elde edilir.

3.3. Rankı 2 Olan Maksimal Kümeler

Tanım 3.3.1. D üzerinde $m \times n$ matrislerinin bir kümesi $\mathcal{L}$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\mathcal{L}$ ye *rankı* 2 *olan bir maksimal küme* denir.

1) $\mathcal{L}$ sadece bir ortak noktaya sahip iki maksimal küme kapsar. Rankı 1 olan bu iki maksimal küme M ve M' ile ve onların arakesit noktası A ile gösterilsin.

2) $\mathcal{L}$ A dan aritmetik uzaklığı 2 olan tüm noktaları, M ve M' nün her noktasından aritmetik uzaklığı ≤ 2 olan noktaları, M nin her noktasından aritmetik uzaklığı 2 olmayan noktaları ve M' nün her noktasından aritmetik uzaklığı 2 olmayan noktaların tamamını kapsar. Bu noktaların kümesi $\mathcal{N}$ ile gösterilsin.

3) $\mathcal{L}$ A dan aritmetik uzaklığı 1 olan tüm noktaları, $\mathcal{N}$ nin her noktasından aritmetik uzaklığı ≤ 2 olan noktaları ve $\mathcal{N}$ nin her noktasından aritmetik uzaklığı 2 olmayan noktaların tamamını kapsar.

4) $\mathcal{L}$ başka bir nokta kapsamaz.

Önerme 3.3.2.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & .... & x_{2n} \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n} \in D \right\} \tag{3.14}$$

ve

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & .... & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & .... & 0 \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \middle| \; y_{11}, y_{12}, ..., y_{m1}, y_{12}, y_{22}, ..., y_{m2} \in D \right\} \tag{3.15}$$

kümeleri rankı 2 olan maksimal kümelerdir. Üstelik, rankı 2 olan herhangi bir maksimal küme $G_{m\times n}(D)$ grubu altında ya (3.14) ya da (3.15) e dönüştürülebilir.

İspat. Önce ikinci ifade ispatlanacaktır. Böylece, ilk ifade de ispatlanmış olacaktır. $\mathcal{L}$ rankı 2 olan bir maksimal küme olsun. Tanım 3.3.1 gereği $\mathcal{L}$ de rankı 1 olan M ve M' ile gösterilen iki maksimal küme vardır ve onların arakesitinde bir tek nokta bulunur. Önerme 3.2.10 gereği ya M nin (3.4) ve M' nün (3.11) ya da M nin (3.5) ve M' nün (3.12) formunda olduğu kabul edilebilir. Sadece ilk durum dikkate alınacaktır, çünkü diğer durum benzer bir yolla görülebilir.

Eğer $m = 2$ ise önermenin sağlandığı açıktır. Dolayısıyla $m \geq 3$ olduğu kabul edilebilir. $M \cap M' = \{0\}$ olduğundan $A = 0$ elde edilir. $\mathcal{N}$ deki herhangi bir nokta

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & .... & x_{2n} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ x_{m1} & x_{m2} & .... & x_{mn} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $ad(X, 0) = 2$, yani $rankX = 2$ dir. $i = 1, 2, ..., m$ için

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$$

olarak gösterilsin. X, M nin her noktasına aritmetik uzaklığı ≤ 2 olan ve M nin her noktasından aritmetik uzaklığı 2 olmayan bir nokta olduğundan

$$rank\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$rank\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = 1$$

dir.

Eğer $x_i \neq 0$ olacak şekilde bir i $(3 \leq i \leq m)$ varsa bu takdirde $k = 1, 2, ..., m$ için $x_k = l_k x_i$ olacak biçimde $l_k \in D$ elemanları vardır. Bu ise $rankX = 1$ çelişkisini verir. Bu yüzden, $i = 3, 4, ..., m$ için $x_i = 0$ ve X rankı 2 olan aşağıdaki formda bir matristir:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & .... & x_{2n} \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}.$$

Rankı 2 olan bütün matrisler ve yukarıdaki formda matrisler $\mathcal{N}$ yi oluşturur. 0 dan aritmetik uzaklığı 1 olan, $\mathcal{N}$ nin her noktasında aritmetik uzaklığı ≤ 2 olan ve $\mathcal{N}$ nin her noktasından aritmetik uzaklığı 2 olmayan bir nokta

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & .... & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & .... & y_{2n} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ y_{m1} & y_{m2} & .... & y_{mn} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $rankY = 1$ dir. $i = 1, 2, ..., m$ için

$$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{in})$$

olarak gösterilsin. Eğer $y_3 \neq 0$ ise bu takdirde $k = 1, 2, 4, 5, ..., m$ için $y_k = l_k y_3$ olacak şekilde $l_k \in D$ vardır.

$$X \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & -l_1 & & & & \\ & 1 & -l_2 & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -l_4 & 1 & & & \\ & & . & & . & & \\ & & . & & & . & \\ & & . & & & & . \\ & & -l_m & & & & 1 \end{pmatrix} X$$

dönüşümü M_1, M_2 ve $\mathcal{N}$ yi kendisine dönüştürür ve Y yi

$$Y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

a dönüştürür. Bu takdirde Y^* ın $\mathcal{N}$ nin her noktasına aritmetik uzaklığı ≥ 2 olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $y_3 = 0$ dır. Benzer şekilde $y_4 = y_5 = \cdots = y_m = 0$ dır. Dolayısıyla Y rankı 1 olan ve aşağıdaki formda bir matristir:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & .... & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & .... & y_{2n} \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu yüzden $\mathcal{L}$ (3.14) formundadır.

Sonuç 3.3.3. Rankı 2 olan bir maksimal küme $P \in GL_m(D)$, $Q \in GL_n(D)$ ve $R \in M_{m\times n}(D)$ olmak üzere ya

$$\left\{ P\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots\cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q+R \;\middle|\; x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \in D \right\}$$

ya da

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q+R \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in D \right\}$$

formundadır.

Şimdi arakesitleri boştan farklı iken rankı 1 olan bir maksimal küme ile rankı 2 olan bir maksimal kümenin arakesiti incelenecektir. Bu arakesitin 0 ı kapsadığı kabul edilebilir. Sonuç 3.2.4 yardımıyla sıfırı kapsayan ve rankı 1 olan bir maksimal küme $P \in GL_m(D)$ ve $Q \in GL_n(D)$ olmak üzere ya

$$\left\{ P\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots\cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q \;\middle|\; x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \in D \right\}$$

ya da

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ y_{m1} & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1} \in D \right\}$$

formundadır. Sonuç 3.3.3 gereği 0 ı kapsayan ve rankı 2 olan bir maksimal küme $P \in GL_m(D)$ ve $Q \in GL_n(D)$ olmak üzere ya

$$\left\{ P\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots\ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots\ldots\ldots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}Q \;\middle|\; x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \in D \right\}$$

ya da

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ . & . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}Q \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in D \right\}$$

formundadır. Bu yüzden 0 ı kapsayan ve rankı 1 olan maksimal küme ile 0 ı kapsayan ve rankı 2 olan maksimal kümenin (3.1) formundaki bir dönüşüm altında aşağıdaki 4 durumdan birine dönüştüğü kabul edilebilir: $P \in GL_m(D)$ ve $Q \in GL_n(D)$ olmak üzere

a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots\ldots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \in D \right\}$$

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots\ldots\ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots\ldots\ldots & y_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}Q \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n} \in D \right\}$$

b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots\ldots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \in D \right\}$$

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & .... & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & .... & 0 \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} Q \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, ..., y_{m1}, y_{12}, y_{22}, ..., y_{m2} \in D \right\}$$

c)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & .... & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ x_{m1} & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_{11}, x_{21}, ..., x_{m1} \in D \right\}$$

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & .... & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & .... & y_{2n} \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} Q \;\middle|\; y_{11}, y_{12}, ..., y_{1n}, y_{21}, y_{22}, ..., y_{2n} \in D \right\}$$

d)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & .... & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ x_{m1} & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_{11}, x_{21}, ..., x_{m1} \in D \right\}$$

$$\left\{ P\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & .... & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & .... & 0 \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} Q \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, ..., y_{m1}, y_{12}, y_{22}, ..., y_{m2} \in D \right\}.$$

İlk olarak (a) durumu göz önüne alınacaktır. Açık olarak $Q = \mathrm{I}_n$ olduğu varsayılabilir.

$$P = \left(p_{ij} \right)_{1 \le i,\, j \le m}$$

olsun. Bu takdirde, bu arakesit

$$\left\{ P\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ p_{m1} & p_{m2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

dır.

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ p_{m1} & p_{m2} \end{pmatrix}$$

olsun. $P \in GL_m(D)$ olduğundan $P_2 \neq 0$ dır. Eğer P_2 nin rankı 1 ise bu takdirde bu arakesit rankı 1 olan maksimal kümeye eşittir ve böylece rankı 1 olan maksimal küme rankı 2 olan maksimal kümede kapsanır. Eğer P_2 nin rankı 2 ise bu takdirde bu arakesit $\{0\}$ dır.

d) durumu a) durumuna benzer şekilde görülebilir.

Şimdi b) durumu dikkate alınacaktır. Açık olarak $P = \mathrm{I}_m$ varsayılabilir. Bu takdirde

$$X \longrightarrow XQ^{-1}$$

dönüşümü rankı 1 maksimal kümeyi sabit bırakır ve rankı 2 olan maksimal kümeyi

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & . & \cdots\cdots & . \\ y_{m1} & y_{m2} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1}, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2} \in D \right\}$$

kümesine dönüştürür. Onların arakesiti

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x , y \in D \right\} \tag{3.16}$$

kümesidir. c) durumu b) durumuna benzer olarak ispatlanabilir ki $X \longrightarrow P^{-1}X$ dönüşümü bu arakesiti

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ y & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x , y \in D \right\} \tag{3.17}$$

kümesine dönüştürür.

Yukarıdaki tartışma aşağıdaki önermede özetlenecektir.

Önerme 3.3.4. Rankı 1 olan bir maksimal küme ile rankı 2 olan bir maksimal kümenin arakesitinin boştan farklı olduğu varsayılsın. Bu takdirde onların arakesiti ya tek bir noktadan oluşur, ya da rankı 1 olan maksimal küme ile çakışır veyahut $G_{m\times n}(D)$ altında (3.16) ya da (3.17) ye denk olan bir alt kümedir.

Tanım 3.3.5. Rankı 1 olan bir maksimal küme ile rankı 2 olan bir maksimal kümenin arakesiti boştan farklı, tek bir noktadan oluşmaz ve rankı 1 olan maksimal küme ile çakışmaz ise bu takdirde bu arakesite bir *düzlem* adı verilir.

Sonuç 3.3.6. $M_{m\times n}(D)$ de bir düzlemin parametrik denklemi,

$P \in GL_m(D)$, $Q \in GL_n(D)$ ve $R \in M_{m\times n}(D)$ olmak üzere ya

$$\left\{ P \begin{pmatrix} x & y & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q + R \;\middle|\; x , y \in D \right\}$$

ya da

$$\left\{ P\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ y & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q+R \;\middle|\; x\ ,\ y\ \in D \right\}$$

formundadır. (3.4) formunda rankı 1 olan maksimal kümede bir düzlemin parametrik denklemi $(q_{11}, q_{12}, ..., q_{1n})$ ve $(q_{21}, q_{22}, ..., q_{2n})$ lineer bağımsız olmak üzere

$$\left\{ \begin{pmatrix} x(q_{11}\ ,\ q_{12}\ ,\ \cdots\cdots\cdots\ ,\ q_{1n}) + y(q_{21}\ ,\ q_{22}\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ q_{2n}) + (a_{11}\ ,\ a_{12}\ ,\ \cdots\cdots\cdots\ ,\ a_{1n}) \\ 0_{(m-1)\times n} \end{pmatrix} \;\middle|\; x\ ,\ y \in D \right\}$$

dir ve (3.5) formunda rankı 1 olan maksimal kümede bir düzlemin parametrik denklemi $(p_{11}, p_{21}, ..., p_{m1})^T$ ve $(p_{12}, p_{22}, ..., p_{m2})^T$ lineer bağımsız olmak üzere

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ . \\ . \\ p_{m1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ . \\ . \\ p_{m2} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ b_{m1} \end{pmatrix} \quad 0_{m\times(n-1)} \right) \;\middle|\; x, y \in D \right\}$$

dir.

Bölüm 3.2 ve Bölüm 3.3 deki tartışmalardan aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.3.7. (3.9) ve (3.10) formunda rankı 1 olan maksimal küme, sırasıyla, M ve M' ile gösterilsin. Bu takdirde

$$M \longrightarrow AG^l(n\ ,\ D)$$

$$P\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots\cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q+R \longrightarrow (x_{11}, x_{12}\ , ..., x_{1n})$$

dönüşümü $1:1$ ve örtendir ve M deki doğru ve düzlemleri, sırasıyla, $AG^l(n, D)$ deki doğru ve düzlemlere dönüştürür, benzer şekilde

$$M' \longrightarrow AG^r(m\,,\,D)$$

$$P\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & .... & 0 \\ y_{21} & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ y_{m1} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}Q+R \longrightarrow \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ . \\ . \\ y_{m1} \end{pmatrix}$$

dönüşümü $1:1$ ve örtendir ve M' deki doğru ve düzlemleri, sırasıyla, $AG^r(m,D)$ deki doğru ve düzlemlere dönüştürür.

İspat. İspat, Sonuç 3.2.9 ve Sonuç 3.3.6 dan hemen görülebilir.

Bu yüzden M nin $n-$ boyutlu bir sol afin uzay yapısına sahip olduğu ve M' nün $m-$ boyutlu bir sağ afin uzay yapısına sahip olduğu ifade edilebilir.

3.4. Temel Teoremin İspatı

Şimdi Teorem 3.1.5 in ispatını yani herhangi bir bölümlü halka üzerine dikdörtgensel matris geometrisinin temel teoreminin ispatı verilecektir.

Teorem 3.1.5 in İspatı. m ile n $m,n \geq 2$ özelliğinde iki tamsayı ve D bir bölümlü halka olsun. Teoremin ikinci ifadesi açıktır, bu yüzden sadece birinci ifade ispatlanacaktır. A, $M_{m\times n}(D)$ den kendisine $1:1$ ve örten bir dönüşüm olsun ve A ile A^{-1} in her ikisinin de $M_{m\times n}(D)$nin nokta çiftlerinin eşlenikliğini koruduğu kabul edilsin. Sonuç 3.1.8 gereği A $M_{m\times n}(D)$ nin herhangi bir nokta çifti arasındaki aritmetik uzaklığı korur. Bu takdirde, A rankı 1 olan maksimal kümeyi rankı 1 olan maksimal kümeye ve rankı 2 olan maksimal kümeyi rankı 2 olan maksimal kümeye dönüştürür.

Adım adım ilerlenecektir.

i) $\forall X \in M_{m\times n}(D)$ için $X \longrightarrow X - A(0)$ (3.1) formunda $1:1$ ve örten bir dönüşüme A yı uygulandıktan sonra

$$A(0) = 0 \tag{3.18}$$

olduğu kabul edilebilir.

ii) M_1 (3.4) yardımıyla tanımlı olsun. M_1 in rankı 1 olan bir maksimal küme olduğu bilinmektedir, bu yüzden $A(M_1)$ de rankı 1 olan bir maksimal kümedir. $0 \in M_1$ olduğundan (3.18) den $0 \in A(M_1)$ elde edilir. Sonuç 3.2.4 yardımıyla $P \in GL_m(D)$ ve $Q \in GL_n(D)$ olmak üzere ya

$$A(M_1) = \left\{ P \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots\cdots\cdots & y_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q \;\middle|\; y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n} \in D \right\}$$

ya da

$$A(M_1) = \left\{ P \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ y_{21} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ y_{m1} & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} Q \;\middle|\; y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1} \in D \right\}$$

olduğu kabul edilebilir. $\forall\, X \in M_{m\times n}(D)$ için $X \longrightarrow P^{-1}XQ^{-1}$ olarak tanımlı 1:1 ve örten dönüşüme A yı uyguladıktan sonra M_1' (3.5) yardımıyla tanımlanmak üzere ya

$$A(M_1) = M_1 \tag{3.19}$$

ya da

$$A(M_1) = M_1' \tag{3.20}$$

olduğu kabul edilebilir. A nın M_1 deki doğru ve düzlemleri, sırasıyla, $A(M_1)$ deki doğru ve düzlemlere dönüştürdüğüne dikkat ediniz.

Önerme 3.3.7 yardımıyla

$$M_1 \qquad \longrightarrow \qquad AG^l(n, D)$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots\dots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$$

biçiminde tanımlı 1:1 ve örten dönüşüm M_1 deki doğru ve düzlemleri, sırasıyla, $AG^l(n,D)$ deki doğru ve düzlemlere dönüştürür ve

$$M_1' \qquad \longrightarrow AG^r(m,D)$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ y_{21} & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots\dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots\dots\dots & . \\ y_{m1} & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ . \\ . \\ y_{m1} \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlı 1:1 ve örten dönüşüm M_1' deki doğru ve düzlemleri, sırasıyla, $AG^r(n,D)$ deki doğru ve düzlemlere dönüştürür. Eğer (3.19) gerçekleşirse bu takdirde A $AG^l(n,D)$ den kendisine doğruları doğrulara ve düzlemleri düzlemlere resmeden bir 1:1 ve örten dönüşüme indirgenir.

$$A\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots\dots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \dots\dots\dots & x_{1n}^* \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$ olduğunu varsayalım, bu takdirde Teorem 2.44 (Afin Geometrinin Temel Teoremi) yardımıyla σ D nin bir otomorfizmi, $S \in GL_n(D)$ ve $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D^n$ olmak üzere $(x_{11}^*, x_{12}^*, \dots, x_{1n}^*) = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})^\sigma S + (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olduğu kabul edilebilir. $A(0) = 0$ olduğundan $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ elde edilir. Böylece $\forall\ X \in M_{m\times n}(D)$ için $X \longrightarrow (XS^{-1})^{\sigma^{-1}}$ (3.2) formundaki 1:1 ve örten dönüşüme A yı uyguladıktan sonra $\forall x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \in D$ için

$$A\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

elde edilir. Yani, A M_1 in her elamanını sabit bırakır. Eğer (3.20) gerçekleşirse A $AG^l(n,D)$ den $AG^r(n,D)$ ye doğruları doğrulara ve düzlemleri düzlemlere taşıyan bir 1:1 ve örten dönüşüme indirgenir. Buradan Teorem 2.44 ün genelleştirilmişi yardımıyla $m=n$ bulunur.

$$A\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \dots\dots & 0 \\ y_{21} & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots & . \\ y_{n1} & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu varsayılsın, bu takdirde τ D nin bir anti-otomorfizmi, $S \in GL_n(D)$ ve $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in D^n$ olmak üzere

$$(y_{11},y_{21},\dots,y_{n1})^T = S\left[(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n})^\tau\right]^T + (a_1,a_2,\dots,a_n)^T$$

elde edilir. $A(0)=0$ olduğundan $(a_1,a_2,\dots,a_n)=0$ bulunur. Böylece $\forall\ X \in M_{m\times n}(D)$ için $X \longrightarrow \left(\left(S^{-1}X\right)^{\tau^{-1}}\right)^T$ (3.3) formundaki 1:1 ve örten dönüşüme A yı uyguladıktan sonra (3.21) elde edilir. Bu yüzden (3.21) in geçerli olduğu daima kabul edilebilir.

iii) Açık olarak, M_1 ve M_1' 0 ve E_{11} i bulunduran rankı 1 olan maksimal kümelerdir. Sonuç 3.2.5 yardımıyla verilen eşlenik iki noktayı kapsayan ve rankı 1 olan iki ve yalnız iki maksimal küme vardır. $A(M_1)=M_1$ olduğundan $A(M_1')=M_1'$ elde edilir.

$$A\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ y_{21} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ y_{m1} & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}^{*} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ y_{21}^{*} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ y_{m1}^{*} & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

olduğu varsayılsın, bu takdirde afin geometrinin temel teoremi yardımıyla $P \in GL_m(D)$ ve τ_1 D nin bir otomorfizmi olmak üzere

$$\begin{pmatrix} y_{11}^{*} \\ y_{21}^{*} \\ . \\ . \\ . \\ y_{m1}^{*} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ . \\ . \\ . \\ y_{m1} \end{pmatrix}^{\tau_1}$$

olur. $P = \left(p_{ij}\right)_{1\le i,\, j\le m}$ olsun. xE_{11} i (3.21) ve (3.22) de yerine yazarak ve sonuçları eşitleyerek

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{11} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}^{\tau_1}$$

elde edilir. $x_{11} = 1$ yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$p_{11} = 1,\ p_{21} = p_{31} = \cdots = p_{m1} = 0$$

bulunur. Böylece, $\forall x_{11} \in D$ için $x_{11} = x_{11}^{\tau_1}$ ve dolayısıyla τ_1 D nin özdeşlik otomorfizmidir, yani $\tau_1 = 1$ dir. $\forall X \in M_{m\times n}(D)$ için $X \longrightarrow P^{-1}X$ biçiminde tanımlı M_1 in her elemanını sabit bırakan 1:1 ve örten dönüşüme A yı uyguladıktan sonra $\forall\, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{m1} \in D$ için

$$A\begin{pmatrix} y_{11} & 0 & .... & 0 \\ y_{21} & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ y_{m1} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & .... & 0 \\ y_{21} & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ y_{m1} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.23)$$

elde edilir.

iv) $i = 1, 2, ..., m$ için $M_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & .... & x_{in} \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \middle| \; x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in} \in D \right\}$ ve

$j = 1, 2, ..., n$ için $M'_j = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & .... & 0 & y_{1j} & 0 & .... & 0 \\ 0 & .... & 0 & y_{2j} & 0 & .... & 0 \\ . & .... & . & . & . & .... & . \\ . & .... & . & . & . & .... & . \\ . & .... & . & . & . & .... & . \\ . & .... & . & . & . & .... & . \\ 0 & .... & 0 & y_{mj} & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \middle| \; y_{1j}, y_{2j}, ..., y_{mj} \in D \right\}$

olsun. M_i, (3.23) e göre A tarafından sabit bırakılan 0 ve E_{i1} i kapsayan ve rankı 1 olan bir maksimal kümedir. Bu takdirde Sonuç 3.2.5 yardımıyla $i = 1, 2, ..., n$ için $A(M_i) = M_i$ dir. M'_j , 0 ve E_{1j} yi kapsayan rankı 1 olan bir maksimal kümedir. Sonuç 3.2.5 gereği $j = 1, 2, ..., m$ için $A\left(M'_j\right) = M'_j$ dir.

$$A\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots\cdots\cdots & x_{in} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ x^*_{i1} & x^*_{i2} & \cdots\cdots\cdots & x^*_{in} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$A\begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & y_{1j} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & y_{2j} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & y_{mj} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & y^*_{1j} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & y^*_{2j} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ . & \cdots\cdots & . & . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & y^*_{mj} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu kabul edilsin. Bu takdirde afin geometrinin temel teoremi gereği $Q_1 = \mathrm{I}_n$, $Q_i \in GL_n(D)$ $(i = 2,3,...,m)$, $P_1 = \mathrm{I}_m$, $P_j \in GL_m(D)$ $(j = 2,3,...,n)$, $\sigma_1 = \tau_1 = 1$ ve σ_i $(i = 2,3,...,m)$ ve τ_j $(j = 2,3,...,n)$ D nin otomorfizmleri olmak üzere

$$\left(x^*_{i1}, x^*_{i2}, ..., x^*_{in}\right) = \left(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}\right)^{\sigma_i} Q_i,\ \ i = 1,2,...,\ m \tag{3.24}$$

ve

$$\begin{pmatrix} y^*_{1j} \\ y^*_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ y^*_{mj} \end{pmatrix} = P_j \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ y_{mj} \end{pmatrix}^{\tau_j},\ \ j = 1,2,...,n \tag{3.25}$$

olduğu kabul edilebilir. $M_i \cap M'_j = \{x_{ij}E_{ij} \mid x_{ij} \in D\}$ olduğundan $1 \le i \le m$ ve $1 \le j \le n$ için $A(x_{ij}E_{ij}) = x_{ij}^{*}E_{ij}$ elde edilmelidir. Buradan Q_i $(i = 2,3,...,m)$ ve P_j $(j = 2,3,...,n)$ nin her ikisinin de diyagonal matris olduğu sonucu çıkar.

$$Q_i = \begin{pmatrix} q_{i1} & & & & & \\ & q_{i2} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & q_{in} \end{pmatrix} \text{ ve } P_j = \begin{pmatrix} p_{1j} & & & & & \\ & p_{2j} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & p_{mj} \end{pmatrix}$$

olsun. (3.24) ve (3.25) karşılaştırılarak $\forall x_{ij} \in D$ için $x_{ij}^{\sigma_i} q_{ij} = p_{ij} x_{ij}^{\tau_j}$ elde edilir. Yukarıdaki denklemde $x_{ij} = 1$ yazarak, $q_{ij} = p_{ij}$ bulunur. Ancak $i = 1$ iken, $\sigma_1 = 1$ ve $\forall j = 1,2,...,n$ için $q_{1j} = 1$ elde edilir, bu yüzden $\forall j = 1,2,...,m$ için $\tau_j = 1$ ve $p_{1j} = 1$ dir. Benzer şekilde, $j = 1$ iken , $\forall i = 1,2,...,m$ için $\sigma_i = 1$ ve $q_{i1} = 1$ sonucuna varılır. Herhangi bir $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}) \neq 0$ için,

$$\begin{pmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots\cdots & x_{in} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots\cdots & x_{in} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

noktaları eşleniktir, bu yüzden bunların A altında görüntüleri

$$\begin{pmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \dots\dots & x_{in} \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots\dots & x_{in} \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ . & . & \dots\dots & . \\ . & . & \dots\dots & . \\ 0 & 0 & \dots\dots & 0 \end{pmatrix} Q_i$$

dir ve eşleniktir. Sonuç olarak, $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ ve $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})Q_i$ lineer bağımlıdır, yani bir $\mu_i \in D-\{0\}$ için

$$(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})Q_i = \mu_i (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$$

dir. Yukarıdaki denklemde $x_{i1} = x_{i2} = \cdots = x_{in} = 1$ yazılırsa,

$$q_{i1} = q_{i2} = \cdots = q_{in} = \mu_i$$

bulunur. Ancak $q_{i1} = 1$, bu yüzden $\forall i = 1, 2, ..., m$ için $Q_i = \mathrm{I}_n$ dir. Benzer şekilde $\forall j = 1, 2, ..., n$ için $P_j = \mathrm{I}_m$ dir. Bu yüzden $\forall X \in M_1, M_2, ..., M_m$ ve $M_1', M_2', ..., M_n'$ için

$$A(X) = X \tag{3.26}$$

dir.

v) $\forall X \in M_{m\times n}(D)$ için $A(X) = X$ olduğu ispatlanacaktır. İspat, $m \le n$ ve $m \ge n$ durumları irdelenerek verilecektir. Ancak her ikisi de benzer biçimde ispatlanabildiğinden sadece $m \le n$ durumu göz önüne alınacaktır. Bu yüzden $m \le n$ kabul edilebilir.

İlk olarak X in rankının m olduğu durum göz önüne alınacaktır. $A(X) = X^*$ olsun. A , $M_{m\times n}(D)$ nin herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığı koruduğundan ve $A(0) = 0$ olduğundan X^* ın da rankı m dir. $x_1, x_2, ..., x_m, x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*$ D üzerinde $n-$ boyutlu satır vektörleri olmak üzere

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad X^*=\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ . \\ . \\ . \\ x_m^* \end{pmatrix}$$

olsun. (3.26) yardımıyla $\lambda_2,...,\lambda_m \in D$ için

$$A\begin{pmatrix} x_1-\lambda_2x_2-\cdots-\lambda_mx_m \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-\lambda_2x_2-\cdots-\lambda_mx_m \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

dir.

$$X-\begin{pmatrix} x_1-\lambda_2x_2-\cdots-\lambda_mx_m \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_2x_2+\cdots+\lambda_mx_m \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix}$$

nin rankı $m-1$ olduğundan $\forall\lambda_2,...,\lambda_m \in D$ için

$$X^*-\begin{pmatrix} x_1-\lambda_2x_2-\cdots-\lambda_mx_m \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1^*-x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_mx_m \\ x_2^* \\ . \\ . \\ . \\ x_m^* \end{pmatrix}$$

matrisinin de rankı $m-1$ dir. Böylece, $\mu_j \ (j=2,3,...,m)$ ve $\mu_{kj} \ (k,\ j=2,3,...,m)$ D nin elemanları olmak üzere

$$x_1 = x_1^* + \sum_{j=2}^{m} \mu_j x_j^*,$$

$$x_k = \sum_{j=2}^{m} \mu_{kj} x_j^*, \; k = 2,3,...,m$$

dir. Benzer işlemleri $(i = 2,3,...,m)$ için i. satıra uygulayarak; silinen i. indek $\hat{i}$ ve $\mu_j^{(i)}$ $\left(j = 1,\, 2,...,\, \hat{i},...,m\right)$, $\mu_{kj}^{(i)}$ $\left(k,\, j = 1,2,...,\, \hat{i},...,m\right)$ D nin elemanları olmak üzere

$$x_i = x_i^* + \sum_{j \neq i} \mu_j^{(i)} x_j^*,$$

$$x_k = \sum_{j \neq i} \mu_{kj}^{(i)} x_j^*, \; k = 1,2,...,\, \hat{i},...,m$$

elde edilir. x_1 i yok ederek,

$$x_1^* = \sum_{j \neq i} \mu_{1j}^{(i)} x_j^* - \sum_{j=2}^{m} \mu_j x_j^*$$

bulunur. $rankX^* = m$ olduğundan $x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*$ lineer bağımsızdır. Böylece, $i = 2,3,...,m$ için $\mu_i = 0$ elde edilir. Bu yüzden $x_1^* = x_1$ dir. Benzer şekilde $x_i^* = x_i$ $(i = 2,3,...,m)$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak X in rankı m iken $A(X) = X$ dir.

vi) Şimdi X in rankının $< m$ olduğu durumu göz önüne alınacaktır. Burada iki durum altında inceleme yapılacaktır.

1. Durum: $D \neq \mathbb{F}_2,\; A(X) = X^*$ ve

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & .... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & .... & x_{2n} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ x_{m1} & x_{m2} & .... & x_{mn} \end{pmatrix}, \; X^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & .... & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & .... & x_{2n}^* \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ x_{m1}^* & x_{m2}^* & .... & x_{mn}^* \end{pmatrix}$$

olsun. Eğer $x_{11} \neq 0$ ise (v). adım kullanılarak $\forall \lambda_2, ..., \lambda_m \neq 0$ için

$$A\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1m} & x_{1(m+1)} & \cdots & x_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & . & & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & & \lambda_m & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1m} & x_{1(m+1)} & \cdots & x_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & . & & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & & \lambda_m & & & \end{pmatrix}$$

elde edilir. X ve

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1m} & x_{1(m+1)} & \cdots & x_{1n} \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & . & & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & & \lambda_m & & & \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

nin aritmetik uzaklığı $< m$ olduğundan X^* ve (3.27) nin aritmetik uzaklığı $< m$ dir, yani herhangi bir $\lambda_2, ..., \lambda_m \neq 0$ için

$$\begin{pmatrix} x_{11}^* - x_{11} & x_{12}^* - x_{12} & \cdots & x_{1m}^* - x_{1m} & x_{1(m+1)}^* - x_{1(m+1)} & \cdots & x_{1n}^* - x_{1n} \\ x_{21}^* & x_{22}^* - \lambda_2 & \cdots & x_{2m}^* & x_{2(m+1)}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ x_{m1}^* & x_{m2}^* & \cdots & x_{mm}^* - \lambda_m & x_{m(m+1)}^* & \cdots & x_{mn}^* \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı $< m$ dir. $D \neq \mathbb{F}_2$ olduğundan $x_{11}^* = x_{11}$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $x_{11}^* \neq 0$ ise bu takdirde A^{-1} dikkate alınarak $x_{11}^* = x_{11}$ bulunur. Bu yüzden her zaman $x_{11}^* = x_{11}$ olur. Benzer şekilde $\forall i = 1, 2, ..., m$ ve $\forall j = 1, 2, ..., n$ için $x_{ij}^* = x_{ij}$ olduğu ispatlanabilir. Bu yüzden X in rankı $< m$ iken $A(X) = X$ olur.

2. Durum: $D = \mathbb{F}_2$ olsun. İlk olarak $m = n = 2$ durumu göz önüne alınacaktır. Zaten $X \in M_1, M_2, M_1', M_2'$ ve $rankX = 2$ için $A(X) = X$ olduğu bilinmektedir. Eğer $rank\, X = 1$ ve $X \notin M_1, M_2, M_1', M_2'$ ise bu takdirde $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak zorundandır. Bu yüzden

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

dir. Sonuç olarak, $\forall X \in M_2(D)$ için $A(X)=X$ olur.

Şimdi $n\geq 3$ durumunu göz önüne alınacaktır. $A(X)=X^*$ olsun. $x_1, x_2,..., x_m, x_1^*, x_2^*,..., x_m^*$ $(\mathbb{F}_2)^n$ de $n-$ boyutlu satır vektörleri olmak üzere

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ x_m\end{pmatrix}, \quad X^*=\begin{pmatrix}x_1^*\\ x_2^*\\ .\\ .\\ x_m^*\end{pmatrix}$$

yazılabilir. X in rankının $m-1$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x_1, x_2,..., x_m$ vektörleri arasında $m-1$ tane lineer bağımsız vektör bulunmak zorundadır. $x_2, x_3,..., x_m$ nin lineer bağımsız olduğu varsayılsın.

$$X=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n\\ & & x_2 & & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & x_m & & \end{pmatrix}$$

nın rankı m olacak şekilde $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in(\mathbb{F}_2)^n$ nin 2^n-2^{m-1} farklı seçimi vardır. v). adımdan dolayı her bir seçim için $A(X)=X$ elde edilir.

$x_1^*=\left(x_{11}^*, x_{12}^*,..., x_{1n}^*\right)$ olsun. X ve X eşlenik olduğundan

$$\begin{pmatrix}x_{11}^*-\lambda_1 & x_{12}^*-\lambda_2 & .... & x_{1n}^*-\lambda_n\\ & x_2^*-x_2 & & \\ & . & & \\ & . & & \\ & x_m^*-x_m & & \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

matrisinin rankı 1 dir. Eğer $x_2^* \neq x_2$ ise (3.28) in ilk iki satırı lineer bağımsız olacak şekilde $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{F}_2)^n$ nin sadece iki seçeneği vardır. $n \geq m$ ve $n \geq 3$ olduğundan $2^n - 2^{m-1} \geq 4$ elde edilir. Böylece, X nın rankı m ve (3.28) in ilk iki satırı lineer bağımsız olacak şekilde bir $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{F}_2)^n$ seçimi vardır. Bu yüzden, $x_2^* = x_2$ olmalıdır. Benzer şekilde, $i = 3, 4, ..., m$ için $x_i^* = x_i$ elde edilir. Böylece,

$$A(X) = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix}$$

dir. Eğer $x_1 \neq 0$ ise bu takdirde $x_1, x_{i_2}, x_{i_3}, ..., x_{i_{m-1}}$ lineer bağımsız olacak şekilde $1 < i_2 < i_3 < ... < i_{m-1} \leq m$ özelliğinde $i_2, i_3, ..., i_{m-1}$ indisleri vardır. Yukarıdakine benzer işlemlerle $x_1^* = x_1$ olduğu ispatlanabilir. Eğer $x_1 = 0$ ise bu takdirde $x_1^* = 0$ olmalıdır, aksi takdirde A^{-1} in dikkate alınması ile $x_1 \neq 0$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak rankı $m-1$ olan $\forall X$ için $A(X) = X$ dir.

Şimdi X in rankının $m-2$ olduğunu kabul edilsin. $x_3, x_4, ..., x_m$ nin lineer bağımsız olduğu varsayılabilir.

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ & & x_2 & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & x_m & \end{pmatrix}$$

nin rankı $m-1$ olacak biçimde $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{F}_2)^n$ nin $2^n - 2^{m-2}$ seçimi vardır. Bu takdirde yukarıdakine benzer işlemlerle $A\left(X\right) = X$ elde edilir. X ve X eşlenik olduğundan

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{*}-\lambda_1 & x_{12}^{*}-\lambda_2 & \dots\dots\dots & x_{1n}^{*}-\lambda_n \\ & x_2^{*}-x_2 & & \\ & . & & \\ & . & & \\ & x_m^{*}-x_m & & \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı 1 dir. $rank\, X = m-1$ durumundaki gibi $i = 2,3,...,m$ için $x_i^{*} = x_i$ olduğu ispat edilebilir. Yine $rank\, X = m-1$ durumundakine benzer olarak $x_1^{*} = x_1$ olduğu ispatlanabilir. Sonuç olarak rankı $m-2$ olan $\forall\, X$ için $A(X) = X$ dir.

Bu şekilde devam ederek $\forall\, X \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_2)$ için $A(X) = X$ sonucuna varılır.

Teorem 3.1.5 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Teorem 3.3.8. D ve D' iki bölümlü halka, m,n,m' ve $n' \geq 2$ olacak şekilde tamsayılar, $M_{m\times n}(D)$ D üzerinde $m\times n$ matris uzayı ve $M_{m'\times n'}(D')$ D' üzerinde $m'\times n'$ matris uzayı olsun.

$$A : M_{m\times n}(D) \longrightarrow M_{m'\times n'}(D')$$

biçiminde tanımlı A dönüşümü 1:1 ve örten bir dönüşüm olsun ve A ile A^{-1} in nokta çiftlerinin eşlenikliğini koruduğunu varsayılsın. Bu takdirde $m = m'$, $n = n'$ ya da $m = n'$, $n = m'$ dür. İlk durumda; D, D' ye izomorftur ve A dönüşümü, σ D den D' ye bir izomorfizm, $P \in GL_{m'}(D')$, $Q \in GL_{n'}(D')$ ve $R \in M_{m'\times n'}(D')$ olmak üzere $\forall\, X \in M_{m\times n}(D)$ için

$$A(X) = PX^{\sigma}Q + R \tag{3.29}$$

formundadır. İkinci durumda; D, D' ye anti-izomorftur ve A dönüşümü, τ D den D' ye bir anti-izomorfizm, $P \in GL_{m'}(D')$, $Q \in GL_{n'}(D')$ ve $R \in M_{m'\times n'}(D')$ olmak üzere $\forall\, X \in M_{m\times n}(D)$ için

$$A(X) = P\left(X^{\tau}\right)^{T} Q + R \tag{3.30}$$

formundadır. Tersine olarak; $M_{m\times n}(D)$ den $M_{m'\times n'}(D')$ ye (3.29) formundaki bir dönüşüm $m=m'$ ve $n=n'$ iken 1:1 ve örtendir ve bu dönüşüm ile onun tersi nokta çiftlerinin eşlenikliğini korur. Aynı durum $m=n'$ ve $n=m'$ iken $M_{m\times n}(D)$den $M_{m'\times n'}(D')$ ye (3.30) formundaki bir dönüşüm için de geçerlidir.

4. ALTERNE MATRİSLERİN GEOMETRİSİ

n, $n \geq 4$ özelliğinde bir tamsayı ve F keyfi karakteristikli bir cisim olsun. Girdileri F den alınarak oluşturulan tüm $n \times n$ mertebeli alterne matrislerin oluşturduğu küme $K_n(F)$ ile gösterilsin. $K_n(F)$ uzayına $n \times n$ *alterne matris uzayı* denir ve elemanlarına da $K_n(F)$ *uzayın noktaları* adı verilir.

$P \in GL_n(F)$ ve $K_0 \in K_n(F)$ olmak üzere $K_n(F)$ uzayı üzerinde her $X \in K_n(F)$ için

$$X \longrightarrow P^T XP + K_0 \tag{4.1}$$

formundaki dönüşümler ele alınacaktır. (4.1) formundaki bir dönüşümün 1:1 ve örten olduğu açıktır. Üstelik bu dönüşümler $K_n(F)$ üzerinde bir hareketler grubu oluşturmaktadır. Bu grup $GK_n(F)$ ile gösterilecektir.

Önerme 3.1.1, Tanım 3.1.2, Önerme 3.1.3 ve Önerme 3.1.4 e paralel olarak aşağıdakiler ifade edilebilir.

Önerme 4.1. $GK_n(F)$ grubu $K_n(F)$ üzerinde geçişkendir.

Tanım 4.2. $K_n(F)$ nin herhangi iki noktası X_1 ve X_2 olsun. X_1 *ile* X_2 *arasındaki aritmetik uzaklık* $ad(X_1, X_2)$ ile gösterilir ve $ad(X_1, X_2) = \dfrac{rank(X_1 - X_2)}{2}$ olarak tanımlanır. Şayet $ad(X_1, X_2) = 1$ yani $rank(X_1 - X_2) = 2$ ise bu takdirde X_1 ve X_2 ye *eşleniktir* denir.

Bu aritmetik uzaklık aşağıdaki üç özelliği sağlar.

Önerme 4.3. $X_1, X_2, X_3 \in K_n(F)$ olsun. Bu takdirde,

1) $ad(X_1, X_2) \geq 0$ dır ve $ad(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2$ dir.

2) $ad(X_1, X_2) = ad(X_2, X_1)$ dir.

3) $ad(X_1, X_2) + ad(X_2, X_3) \geq ad(X_1, X_3)$ dür.

Önerme 2.42 nin bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.4. $GK_n(F)$ grubunun elemanları $K_n(F)$ uzayının herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığı invaryant (değişmez) bırakır. Üstelik, $1 \le r \le \left[\frac{n}{2}\right]$ özelliğindeki herhangi bir r için $K_n(F)$ uzayındaki aritmetik uzaklığı r olan nokta ikililerinin kümesi $GK_n(F)$ grubu altında bir yörünge oluşturur.

İspat.

Böylece, $K_n(F)$ uzayının herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığın $GK_n(F)$ grubu altında bir geometrik invaryant olduğu sonucuna varılmış olur. Özellikle de $K_n(F)$ uzayının eşlenik olan bir nokta çifti için de bu sonuç geçerlidir. Amacımız (4.1) formundaki dönüşümleri mümkünse bu tür birkaç geometrik invaryantla karakterize etmektir. Bunun için F nin otomorfizmleri içinde sadece eşlenikliğin hemen hemen yeterli olacağı gösterilecektir. Alterne matris geometrisinin temel teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teorem ifade edilecektir.

Teorem 4.5. n, $n \ge 4$ özelliğinde bir tamsayı, F keyfi karakteristikli bir cisim ve A da $K_n(F)$ den kendisine 1:1 ve örten bir dönüşüm olsun. Hem A hem de A^{-1} in eşlenikliği koruduğu, yani "Herhangi $X_1, X_2 \in K_n(F)$ için $rank(X_1 - X_2) = 2$ olması için gerek ve yeter şart $rank(A(X_1) - A(X_2)) = 2$ olmasıdır." önermesinin doğru olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $n > 4$ iken A dönüşümü $\rho \in F - \{0\}$, $P \in GL_n(F)$, σ F nin bir otomorfizmi ve $K_0 \in K_n(F)$ olmak üzere her $X \in K_n(F)$ için

$$A(X) = \rho P^T X^{\sigma} P + K_0 \tag{4.2}$$

formundadır. $n = 4$ iken A dönüşümü $X \to X^*$ dönüşümü ya özdeşlik ya da

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{23} \\ -x_{12} & 0 & x_{14} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{14} & 0 & x_{34} \\ -x_{23} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}$$ olmak üzere her $X \in K_4(F)$ için

$$A(X) = \rho P^T \left(X^*\right)^\sigma P + K_0 \tag{4.3}$$

formundadır. Tersine olarak, $K_n(F)$ den kendisine (4.2) ya da (4.3) formundaki herhangi bir dönüşüm 1:1 ve örtendir ve bu dönüşüm ile onun tersi olan dönüşüm $K_n(F)$ deki eşlenikliği korur.

Tanım 3.1.6, Önerme 3.1.7 ve Sonuç 3.1.8 e paralel olarak aşağıdakiler verilebilir.

Tanım 4.6. $X,\ X' \in K_n(F)$ olsun. $X \neq X'$ iken, $i = 0,1,2,...,r$ için X_i ile X_{i+1} eşlenik ve $X_0 = X$, $X_r = X'$ olacak şekilde $K_n(F)$ de $r+1$ elemanlı $X_0, X_1, ..., X_r$ dizisi vardır şartını sağlayan en küçük pozitif r tamsayısına *X ve X' arasındaki uzaklık* denir ve $d(X, X') = r$ ile gösterilir. $X = X'$ iken $d(X, X) = 0$ olarak tanımlanır.

Önerme 4.7. $K_n(F)$ uzayının herhangi iki noktası X ve X' olsun. Bu takdirde,

$$ad(X, X') = d(X, X')$$

dir.

Sonuç 4.8. A, $K_n(F)$ den kendisine 1:1 ve örten bir dönüşüm olup hem A hem de A^{-1} in eşlenikliği koruduğu kabul edilsin. Bu takdirde, A aritmetik uzaklıklarını da korur, yani herhangi $X_1,\ X_2 \in K_n(F)$ için $rank(X_1 - X_2) = rank(A(X_1) - A(X_2))$ dir.

5. SİMETRİK MATRİSLERİN GEOMETRİSİ

n, $n \geq 2$ özelliğinde bir tamsayı ve F keyfi bir cisim olsun. Girdileri F den alınarak oluşturulan tüm $n \times n$ mertebeli simetrik matrislerin oluşturduğu küme $S_n(F)$ ile gösterilsin. $S_n(F)$ uzayına $n \times n$ *simetrik matris uzayı* denir ve elemanlarına da $S_n(F)$ *uzayın noktaları* adı verilecektir.

$P \in GL_n(F)$ ve $S \in S_n(F)$ olmak üzere $S_n(F)$ uzayı üzerinde her $X \in S_n(F)$ için

$$X \longrightarrow P^T XP + S \tag{5.1}$$

formundaki dönüşümler ele alınacaktır. Bu dönüşümler $S_n(F)$ üzerinde bir hareketler grubu oluşturmaktadır. Bu grup $GS_n(F)$ ile gösterilecektir. Bu grubun elemanları geometrik invaryantlarla karakterize edilecektir.

Önerme 3.1.1, Tanım 3.1.2, Önerme 3.1.3 ve Önerme 3.1.4 e paralel olarak aşağıdakiler ifade edilebilir.

Önerme 5.1. $GS_n(F)$ grubu $S_n(F)$ üzerinde geçişkendir.

Tanım 5.2. $S_n(F)$ nin herhangi iki noktası S_1 ve S_2 olsun. S_1 *ile* S_2 *noktaları arasındaki aritmetik uzaklık* $ad(S_1, S_2)$ ile gösterilir ve $ad(S_1, S_2) = rank(S_1 - S_2)$ olarak tanımlanır. Şayet $ad(S_1, S_2) = 1$ ise bu takdirde S_1 ve S_2 nin *eşlenik* olduğu söylenir.

Bu aritmetik uzaklık aşağıdaki üç özelliği sağlar.

Önerme 5.3. $S_1, S_2, S_3 \in S_n(F)$ olsun. Bu takdirde,

1) $ad(S_1, S_2) \geq 0$ dır ve $ad(S_1, S_2) = 0 \Leftrightarrow S_1 = S_2$ dir.

2) $ad(S_1, S_2) = ad(S_2, S_1)$ dir.

3) $ad(S_1, S_2) + ad(S_2, S_3) \geq ad(S_1, S_3)$ dür.

Önerme 5.4. $GS_n(F)$ grubunun elemanları $S_n(F)$ uzayının herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığı invaryant (değişmez) bırakır.

Ancak, $1 \le r \le n$ özelliğindeki herhangi bir r için F üzerinde aralarındaki aritmetik uzaklık r olan $n \times n$ simetrik matris ikililerinin kümesinin $GS_n(F)$ nin bir yörüngesini oluşturması şart değildir. Çünkü, aynı ranka sahip olan iki $n \times n$ simetrik matrisin cogredient olması zorunlu değildir.

Önerme 5.4 den $S_n(F)$ uzayının herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığın $GS_n(F)$ grubu altında bir geometrik invaryant olduğu sonucuna varılmış olur. Özellikle de $S_n(F)$ uzayının eşlenik olan bir nokta çifti için de bu sonuç geçerlidir. F nin otomorfizmleri ve $F-\{0\}$ ın elemanlarıyla skalar çarpımlar içinde (5.1) formundaki dönüşümleri karakterize etmek için sadece eşleniklik yeterlidir. Simetrik matris geometrisinin temel teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teorem ifade edilecektir.

Teorem 5.5. n, $n \ge 2$ özelliğinde bir tamsayı, F keyfi karakteristikli bir cisim olsun. A da $S_n(F)$ den kendisine 1:1 ve örten bir dönüşüm olup hem A hem de onun tersi A^{-1} in $S_n(F)$ de eşlenikliği koruduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $n \ne 3$ ve $F \ne \mathbb{F}_2$ iken A dönüşümü her $X \in S_n(F)$ için

$$A(X) = aP^T X^{\sigma} P + S_0 \tag{5.2}$$

formundadır ki burada $a \in F-\{0\}$, $P \in GL_n(F)$, σ F nin bir otomorfizmi, $S_0 \in S_n(F)$ dir. $n=3$ ve $F=\mathbb{F}_2$ iken her $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{33} \in \mathbb{F}_2$ için $S_3(\mathbb{F}_2)$ den kendisine

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 1 \\ x_{13} & 1 & x_{33} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} x_{11}+1 & x_{12}+1 & x_{13}+1 \\ x_{12}+1 & x_{22} & 1 \\ x_{13}+1 & 1 & x_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

formunda 1:1 ve örten bir dönüşüm vardır ve A dönüşümü (5.2) formundaki 1:1 ve örten dönüşümlerin bir çarpımıdır ve bu ekstradan (5.3) 1:1 ve örten dönüşümdür. Tersine olarak, $S_n(F)$ den kendisine (5.2) ya da (5.3) formundaki herhangi bir dönüşüm 1:1 ve örtendir ve bu dönüşüm ile onun tersi eşlenikliği korur.

Tanım 3.1.6 ya benzer olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 5.6. $S,\, S' \in S_n(F)$ olsun. $S \neq S'$ iken, "$i = 0,1,2,...,r-1$ için $S_0 = S$, $S_r = S'$ ve S_i ile S_{i+1} eşlenik olacak şekilde $r+1$ elemanlı bir $S_0, S_1,...., S_r$ dizisi vardır." şartını sağlayan en küçük pozitif r tamsayısına *S ve S' arasındaki uzaklık* denir ve $d(S,\, S') = r$ ile gösterilir. $S = S'$ iken $d(S,S) = 0$ olarak tanımlanır.

Önerme 3.1.7 ye ters olarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.7. $S_n(F)$ uzayının herhangi iki noktası olan S ve S' için

$$ad(S,S') \leq d(S,S')$$

dir. Özel olarak, $KarF \neq 2$ iken $ad(S,S') = d(S,S')$ ve $KarF = 2$ iken

$$ad(S,S') = \begin{cases} d(S,S') & ;\ S - S' \text{ alterne değil ise} \\ d(S,S') - 1 & ;\ S - S' \text{ alterne ise} \end{cases}$$

dir.

İspat. $d(S,S') = r$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $i = 0,1,2,...,r-1$ için S_i ve S_{i+1} eşlenik olacak şekilde $S_n(F)$ de $S_0 = S, S_1, S_2,...., S_r = S'$ biçiminde bir dizi vardır. Yani $i = 0,1,2,...,r-1$ için $rank(S_i - S_{i+1}) = 1$ dir. Buradan Önerme 2.30 gereği $ad(S,S') = rank(S - S') \leq \sum_{i=0}^{r-1} rank(S_i - S_{i+1}) = r = d(S,S')$ elde edilir. Böylece ilk iddia ispatlanmış olur.

Şimdi, $KarF \neq 2$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $ad(S,S') = r'$ yani $rank(S - S') = r'$ olduğu varsayılacaktır. Sonuç 2.38 gereği $a_1, a_2, ..., a_{r'} \in F - \{0\}$ olmak üzere

$$P^t\left(S-S'\right)P=\left[a_1,a_2,...,a_{r'},0,...,0\right] \tag{5.4}$$

bir diyagonal matris olacak biçimde bir $P\in GL_n\left(F\right)$ matrisi vardır. $i=1,2,...,r'$ için $R_i=\left(P^{-1}\right)^T\left[a_1,a_2,...,a_i,0,...,0\right]P^{-1}$ olsun. Bu takdirde, $i=0,1,2,...,r'-1$ için S_i ve S_{i+1} eşlenik olacak şekilde $S_n\left(F\right)$ de $S_0=S,S_1=S-R_1,S_2=S-R_2,....,S_{r'}=S-R_{r'}$ özelliğinde bir noktalar dizi oluşturulabilir. Buradan $d\left(S,S'\right)\leq r'=ad\left(S,S'\right)$ elde edilir. Bu sonuçla ilk iddia birleştirilirse $ad\left(S,S'\right)=d\left(S,S'\right)$ bulunur.

Son olarak, $KarF=2$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda ispat iki duruma ayrılarak verilecektir. Bunlar $S-S'$ nün alterne olmaması ve $S-S'$ nün alterne olması durumlarıdır.

i. Durum: $S-S'$ alterne olmasın. $ad\left(S,S'\right)=r'$ yani $rank\left(S-S'\right)=r'$ olduğunu varsayılacaktır. Önerme 2.43 yardımıyla $P^T\left(S-S'\right)P$ matrisi (5.4) formunda bir diyagonal matris olacak biçimde bir $P\in GL_n\left(F\right)$ matrisi vardır. Karakteristik $\neq 2$ durumundaki gibi $ad\left(S,S'\right)=d\left(S,S'\right)$ olduğu gösterilebilir.

ii. Durum: $S-S'$ alterne olsun. Önerme 2.42 yardımıyla $rank\left(S-S'\right)$ çifttir, yani $\exists s\in\mathbb{Z}^+$ için $rank\left(S-S'\right)=2s$ dir. $S-S'=P^T\begin{pmatrix}0 & I_s & \\ I_s & 0 & \\ & & 0_{n-2s}\end{pmatrix}P$ olacak biçimde bir $P\in GL_n\left(F\right)$ matrisi vardır. Böylece $S-S'+P^TE_{11}P$ rankı $2s$ olan bir alterne olmayan matristir. i. durumdan $d\left(S,S'-P^TE_{11}P\right)=ad\left(S,S'-P^TE_{11}P\right)=2s$ ve buradan $d\left(S,S'\right)\leq d\left(S,S'-P^TE_{11}P\right)+d\left(S'-P^TE_{11}P,S'\right)=2s+1$ sonucuna varılır. Bu önermenin ilk iddiası kullanılarak $ad\left(S,S'\right)\leq d\left(S,S'\right)$ elde edilir. Ancak $ad\left(S,S'\right)=2s$ dir. Bu yüzden $d\left(S,S'\right)=2s$ ya da $d\left(S,S'\right)=2s+1$ olabilir. İddia ediyoruz ki $d\left(S,S'\right)\neq 2s$ dir. Bunu göstermek için $d\left(S,S'\right)=2s$ olduğu kabul edilip bir çelişki bulunacaktır. Kabulden dolayı $d\left(S,W\right)=1$ ve $d\left(W,S'\right)=2s-1$ olacak şekilde bir $W\in S_n\left(F\right)$ noktası vardır. $Q=S-W$ olsun. Bu takdirde $rankQ=1$ dir.

Önermenin ilk iddiası kullanılarak $ad(W,S') \le d(W,S') = 2s-1$ yazılabilir. Diğer yandan, $ad(W,S') = rank(W-S') = rank(S-S'-Q)$ dur. Bu yüzden $rank(S-S'-Q) \le 2s-1$ dir. $Q_1 = \left(P^{-1}\right)^T QP^{-1}$ olsun. Bu takdirde $rankQ_1 = 1$ ve $rank\left(\left(P^{-1}\right)^T (S-S')P^{-1} - Q_1\right) \le 2s-1$ dir.

$\left(P^{-1}\right)^T (S-S')P^{-1} - Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_s & \\ I_s & 0 & \\ & & 0_{n-2s} \end{pmatrix} - Q_1$ matrisinin sol üst köşesindeki $2s \times 2s$ minörün 1 olduğu kolayca hesaplanabilir. Bu ise $rank\left(\left(P^{-1}\right)^T (S-S')P^{-1} - Q_1\right) \le 2s-1$ olması ile çelişir. Bu sebeple kabul yanlış yani $d(S,S') \ne 2s$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 5.7 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.8. F, karakteristiği 2 den farklı olan bir cisim ve A da $S_n(F)$ den kendisine 1:1 ve örten bir dönüşüm olsun. Hem A hem de A^{-1} in $S_n(F)$ de eşlenikliği koruduğu kabul edilsin. Bu takdirde A, $S_n(F)$ deki aritmetik uzaklığı korur.

6. HERMİTYEN MATRİSLERİN GEOMETRİSİ

D, “ $^{-}$ ” ile gösterilen bir involusyonlu anti otomorfizme sahip bir bölümlü halka ve $F=\{a\in D \mid \overline{a}=a\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} t: D &\rightarrow F \\ a &\rightarrow a+\overline{a} \end{aligned}$$

özelliğinde t iz dönüşümü ve

$$\begin{aligned} n: D &\rightarrow F \\ a &\rightarrow a\overline{a} \end{aligned}$$

özelliğinde n norm dönüşümü tanımlansın. Böylece, aşağıdaki iki varsayım yapılabilir:

1. Varsayım: F, D nin bir has alt cismidir ve D nin merkezinde bulunmaktadır. Bu durumda F ye D nin $^{-}$ involusyonunun sabit cismi denir.

2. Varsayım: t dönüşümü örtendir yani herhangi bir $\alpha\in F$ elemanı en az bir $a\in D$ için $\alpha=a+\overline{a}$ olarak ifade edilebilir.

1. Varsayım'ın D nin bir cisim ve $^{-}$ dönüşümünün özdeşlik dönüşümü olması durumunu kapsamadığına dikkat ediniz.

Girdileri D den alınarak oluşturulan tüm $n\times n$ mertebeli Hermityen matrislerin oluşturduğu küme $H_n(D)$ ile gösterilsin. $H_n(D)$ uzayına $n\times n$ *Hermityen matris uzayı* denir ve elemanlarına da bu *uzayın noktaları* adı verilecektir.

$P\in GL_n(D)$ ve $H\in H_n(D)$ olmak üzere $H_n(D)$ uzayı üzerinde her $Z\in H_n(D)$ için

$$Z \longrightarrow \overline{P}^{T} ZP+H \tag{6.1}$$

formundaki dönüşümler ele alınacaktır. Bu dönüşümler $H_n(D)$ üzerinde bir hareketler grubu oluşturmaktadır. Bu grup $GH_n(D)$ ile gösterilecektir. (6.1) deki dönüşümün 1:1 ve örten olduğu açıktır.

Önerme 3.1.1, Tanım 3.1.2, Önerme 3.1.3 ve Önerme 3.1.4 e paralel olarak aşağıdakiler ifade edilebilir.

Önerme 6.1. $GH_n(D)$ grubu $H_n(D)$ üzerinde geçişkendir.

Tanım 6.2. $H_n(D)$ nin herhangi iki noktası H_1 ve H_2 olsun. H_1 *ile* H_2 *noktaları arasındaki aritmetik uzaklık* $ad(H_1, H_2)$ ile gösterilir ve $ad(H_1, H_2) = rank(H_1 - H_2)$ olarak tanımlanır. Şayet $ad(H_1, H_2) = 1$ ise bu takdirde H_1 ve H_2 ye *eşleniktir* denir.

Bu aritmetik uzaklık aşağıdaki üç özelliği sağlar.

Önerme 6.3. $H_1, H_2, H_3 \in H_n(D)$ olsun. Bu takdirde,

1) $ad(H_1, H_2) \geq 0$ dır ve $ad(H_1, H_2) = 0 \Leftrightarrow H_1 = H_2$ dir.

2) $ad(H_1, H_2) = ad(H_2, H_1)$ dir.

3) $ad(H_1, H_2) + ad(H_2, H_3) \geq ad(H_1, H_3)$ dür.

Önerme 6.4. $GH_n(D)$ grubunun elemanları $H_n(D)$ uzayının herhangi iki noktası arasındaki aritmetik uzaklığı invaryant (değişmez) bırakır.

Ancak, $1 \leq r \leq n$ özelliğindeki herhangi bir r için $H_n(D)$ uzayındaki aritmetik uzaklığı r olan nokta ikililerinin kümesi $GH_n(D)$ grubu altında her zaman bir yörünge oluşturmaz. Çünkü, aynı ranklı iki $n \times n$ Hermityen matris cogredient olmak zorunda değildir. Buna karşın, şayet n dönüşümünün örten olduğu, yani herhangi bir $\alpha \in F$ elemanının en az bir $a \in D$ için $\alpha = a\bar{a}$ olarak ifade edilebileceği kabul edilirse bu takdirde rankı r olan herhangi bir $n \times n$ Hermityen matris $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ matrisine cogredienttir ve böylece aynı ranklı herhangi iki $n \times n$ Hermityen matris cogredient olur. Buradan $1 \leq r \leq n$ özelliğindeki herhangi bir r için her ikili arasındaki aritmetik uzaklığın r olduğu $n \times n$ Hermityen matrislerin ikililerinin kümesinin $GH_n(D)$ grubu altında bir yörünge oluşturduğu sonucu çıkar. Önerme 6.4 den aritmetik uzaklığın dolayısıyla eşlenikliğin $GH_n(D)$ altında bir geometrik invaryant olduğunu bilinmektedir. Buradaki amaç, (6.1) formundaki dönüşümleri mümkün olduğu kadar az invaryantla karakterize etmektir. D nin otomorfizmleri ve $F-\{0\}$ ın elemanlarıyla skalar çarpımlar içinde yalnızca eşlenikliğin (6.1) formundaki dönüşümleri karakterize etmek için hemen hemen yeterli olacağı gösterilecektir. Hermityen matris geometrisinin temel teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teorem ifade edilecektir.

Teorem 6.5. D, $\bar{\ }$ involusyona sahip bir bölümlü halka olsun ve 1. ile 2. Varsayımlar'ın geçerli olduğunu kabul edelim. n, $n \geq 2$ özelliğinde bir tamsayı olsun. $n=2$ iken fazladan D nin bir cisim olduğu kabul edilecektir. $H_n(D)$ den kendisine 1:1 ve örten bir A dönüşümünün hem A hem de onun tersi A^{-1} in eşlenikliği koruyacak biçimde verildiği kabul edilsin. Bu takdirde, A dönüşümü $\forall Z \in H_n(D)$ için

$$A(Z)=\alpha \overline{P}^T Z^\sigma P+H_0 \tag{6.2}$$

formundadır ki burada $\alpha \in F-\{0\}$, $P \in GL_n(D)$, σ D nin bir otomorfizmi, $H_0 \in H_n(D)$ ve $\left(\overline{a}\right)^\sigma=\overline{\left(a^\sigma\right)}$ dir. Tersine olarak, $H_n(D)$ den kendisine (6.2) formundaki herhangi bir dönüşüm 1:1 ve örtendir ve hem bu dönüşüm hem de onun tersi Hermityen matris ikililerinin eşlenikliğini korur.

Tanım 3.1.6, Önerme 3.1.7 ve Sonuç 3.1.8 e paralel olarak aşağıdakiler verilebilir.

Tanım 6.6. $H,\ H' \in H_n(D)$ olsun. $H \neq H'$ iken, $i=0,1,2,...,r-1$ için H_i ile H_{i+1} eşlenik ve $H_0=H$, $H_r=H'$ olacak şekilde $r+1$ elemanlı bir $H_0,H_1,....,H_r$ dizisi vardır şartını sağlayan en küçük pozitif r tamsayısına *H ve H' arasındaki uzaklık* denir ve $d(H,\ H')=r$ ile gösterilir. $H=H'$ iken $d(H,H)=0$ olarak tanımlanır.

Önerme 6.7. $H_n(D)$ uzayının herhangi iki noktası olan H ve H' için

$$ad(H,\ H')=d(H,\ H')$$

dir.

Sonuç 6.8. A, $H_n(D)$ den kendisine 1:1 ve örten bir dönüşüm olsun. Hem A hem de A^{-1} in eşlenikliği koruduğu kabul edilsin. Bu takdirde A, $H_n(D)$ de aritmetik uzaklığı korur, yani H_1 ve H_2 $H_n(D)$ nin herhangi iki noktası iken $rank(H_1 - H_2) = rank(A(H_1) - A(H_2))$ dir.

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında bilinen bazı matris uzayları üzerinde çalışılmıştır. Bunlar, tezdeki sıraya göre, karesel olmayan matrislerden oluşan dikdörtgensel matris uzayı, alterne matrislerden oluşan alterne matris uzayı, simetrik matrislerden oluşan simetrik matris uzayı ve Hermityen matrislerden oluşan Hermityen matris uzayıdır.

Bu uzayların elemanı olan her bir matrise birer nokta gözüyle bakılmış ve belli özellikteki noktaların kümesi olarak doğru ve düzlem kavramları tanımlanmıştır. Bu tanımlara bağlı olarak bu uzaylarda bir üzerinde olma bağıntısı verilmiştir. Böylece, bu uzaylara bir geometrik yapı olarak bakmak mümkün olmuştur. Bu uzaylarda belirli dönüşümler tanımlanmış ve bunlar ile birer grup yapısı kurulmuş ve bu grup altında ilgili uzayın geometrik invaryantları incelenmiştir. Aritmetik uzaklık kavramı yardımıyla tanımlanan eşlenikliğin bir geometrik invaryant olduğu gösterilmiştir. Eşlenik nokta ikilileri yardımıyla ilgili uzayın iki noktası arasındaki uzaklık kavramı tanımlanmıştır. Böylece aritmetik uzaklık ile uzaklık arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur. Sadece dikdörtgensel matris uzayı üzerinde rankı 1 olan bir maksimal küme yardımıyla doğru denklemi ve onun parametrik denklemi ve ayrıca rankı 2 olan bir maksimal küme yardımıyla bir düzlem denklemi ve onun parametrik denklemi verilmiştir. Nihayetinde dikdörtgensel matris geometrisinin temel teoremi ifade edilip ispatlanmıştır. Diğer uzaylar için karşılık gelen geometrilerde ise ilgili geometrinin temel teoremi ifade edilmiştir.

Ayrıca, yukarıda belirtilen dört farklı uzayda belirlenen dönüşümler altında invaryant kalan özellikler incelenmiştir. İncelenen uzayların; cebir, geometri ve graf teoride ilginç uygulamalarının olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Albert, A.A. 1938. Symmetric and alternate matrices in an arbitrary field. I, Trans. Amer. Math. Soc. 43, 386-436.

Brualdi, R. A., Cvetkovic, D. 2009. A combinatorial Approach to Matrix Theory and its Applications, Discrete Math. And Its Applications Series Editor Rosen K. H., CRC Press, Boca Raton, 267 pp.

Cullen, C. G. 1972. Matrices and Linear Transformations, Dover Publications, New York, 318 pp.

Çiftçi, S. 2015. Lineer Cebir, Dora Yayınevi, Bursa, 430 s.

Fraleigh, J. B. 1989. A First Course in Abstract Algebra, Addison Wesley P.C., USA, 518 pp.

Hartfiel, D. J. 2001. Matrix Theory and Applications with Matlab, CRC Press, Boca Raton, 371 pp.

Herstein, I. N., Winter, D. J. 1988. Matrix Theory and Linear Algebra, Macmillan Publishing Company, New York, 508 pp.

Hohn, F. E. 1973. Elementary Matrix Algebra, Dover Publications, New York, 522 pp.

Hungerford, T. W. 1974. Algebra, Halt, Rinehart and Winston Inc., New York, 502 pp.

Jacobson, N. 1985. Basic Algebra, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 499 pp.

Johnson, C. R. (Editör) 1990. Matrix Theory and Applications, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 260 pp.

Nomizu, K. 1966. Fundamentals of Linear Algebra, McGraw-Hill, New York, 325 pp.

Perlis, S. 1991. Theory of Matrices, Dover Publications, New York, 237 pp.

Schneider, H., Barker, G. P. 1973. Matrices and Linear Algebra, Dover Publications, New York, 413 pp.

Wan, Z. X. 1996. Geometry of Matrices, World Scientific, Singapore, 376 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Berçem BOZTEMÜR
Doğum Yeri ve Tarihi	: Diyarbakır / 1991
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: Bursa Cem Sultan Lisesi
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, F.E.F., Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı
Çalıştığı Kurum/Kurumlar	: Ercişli Emrah Anadolu Lisesi/Erciş-VAN
İletişim (e-posta)	: bercem1991@gmail.com
Yayınları	:

Akpınar, A., Doğan, İ., Demirci, E., Gürel, Z.S., Boztemür, B. 2019. Some Remarks on a Class of Finite Projective Klingenberg Planes, Journal of Advances in Mathematics (JAM) 14(2), 7893-7902.