AFİN ve PROJEKTİF DÜZLEM

TÜBA KURNAZ

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AFİN ve PROJEKTİF DÜZLEM

Tüba KURNAZ

Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2016

TEZ ONAYI

Tüba KURNAZ tarafından hazırlanan "Afin ve Projektif Düzlem" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Başkan : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ — İmza

Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Basri ÇELİK — İmza

Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI — İmza

Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
01/11/2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/11/2016

İmza

Tüba KURNAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AFİN ve PROJEKTİF DÜZLEM

Tüba KURNAZ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Bu çalışmada afin ve projektif düzlemlerin koordinatlanmaları ve bir afin düzlemin bir doğrusunun noktaları kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Afin düzlem, projektif düzlem, bölümlü halka, üçlü halka, Dezarg Teoremi, Pappus Teoremi, Latin kare, Ortogonal Latin kareler, ortogonal bağıntılar, noktaların toplamı, noktaların çarpmı, düzlemlerin koordinatlanması.
2016, x + 73 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

AFFINE and PROJECTIVE PLANE

Tüba KURNAZ

Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ (Uludağ University)

In this work, coordinatization of affine and projective planes and addition and multiplication operations on points set of a line of affine plane are examined.

Key Words: Affine plane, projective plane, division ring, ternary ring, Desargues' Theorem, Pappus' Theorem, Latin square, Orthogonal Latin squares, Orthogonal relations, addition of points, multiplication of points, coordinatization of planes.
2016, x + 73 pages.

TEŞEKKÜR

Her şeyden önce şunu söylemek gerekir ki: Burada yapılacak olan teşekkür şimdiye kadar üzerimde emeği olan herkes için yok denilecek kadar azdır.

Yüksek lisans eğitim ve öğretimi boyunca ilim ve tecrübelerinden en çok istifade ettiğim, bu çalışma süresi boyunca ilgi, alaka, hoşgörü ve bilgisini hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman sabır gösteren, insani ve ahlaki olarak hep örnek aldığım, öğrencisi olmaktan onur duyduğum çok değerli hocam Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ' ye,

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında emeği geçmiş olan Prof. Dr. Basri ÇELİK hocama,

Gerek ders aşamasında gerekse bu tezin yazım aşamasında bilgi ve tecrübesine gereğinden fazla başvurduğum ama hep sabır ve güler yüz ile karşılaştığım, hocadan ziyade bir ağabey kadar yakın hissettiğim değerli hocam Doç. Dr. Atilla AKPINAR' a,

Yine bu çalışmada emeği geçen ve her anlamda bana yardımcı olan, yakınlığını her zaman hissettiren Arş. Gör. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN hocama,

Lisans eğitimi boyunca emeği geçen tüm hocalarıma ve

Aileme sonsuz teşekkürler…

01/11/2016

Tüba KURNAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$G \times G$	G kümesinin kartezyen çarpımı
$(G, *)$	grup
$(H, *, \circ)$	halka
$\mathcal{B} = (B, +, \cdot)$	bölümlü halka
$B \setminus \{0\}$	B kümesinin $\{0\}$ kümesinden farkı
β	bağıntı, $\beta \subset A \times B$
$\bar{x}=[x]$	x elemanının denklik sınıfı
$(\mathcal{N})$	$\mathcal{N}$ kümesinin f fonksiyonu altındaki resmi
$\mathbb{A}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\in)$	afin düzlem
$\mathcal{N}$	noktalar kümesi
$\mathcal{D}$	doğrular kümesi
M	nokta
d	doğru
$M \in d$	M noktası d doğrusunun üzerindedir
$N \notin d$	N noktası d doğrusunun üzerinde değildir
$d \parallel c$	d ve c doğruları paraleldir
$d \nparallel c$	d ve c doğruları paralel değildir
F	cisim
$\mathbb{A}_2F$	F cismi üzerine kurulan afin düzlem
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$	tamsayılar kümesi
(n)	n mertebeli ortogonal Latin karelerin maksimum sayısı
$\lvert\mathcal{N}\rvert$	$\mathcal{N}$ kümesinin eleman sayısı
Γ	paralel doğru demeti
$\mathbb{P} = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$	projektif düzlem
$\mathcal{N}'$	noktalar kümesi
$\mathcal{D}'$	doğrular kümesi
$\mathbb{P}_2\mathcal{B}$	$\mathcal{B}$ bölümlü halkası üzerine kurulan projektif düzlem
D_∞	ideal nokta (sonsuzdaki nokta)
d_∞	ideal doğru (sonsuzdaki doğru)
$c' \cap d'$	c' ve d' projektif doğrularının arakesit noktası
$\parallel$	paralel
$\sim$	denklik bağıntısı
$\cong$	izomorf
$\boldsymbol{v}$	vektör
(d,O,I)	birim elemanları O ve I olan bölümlü halka
(x,y,z)	vektör
$(L,*)$	yarıgrup
(R,t)	üçlü halka
$[a,b,c]$	doğru
(x)	nokta
(x,y)	nokta
(∞)	ideal nokta
$[m]$	doğru

$[m,]$	doğru
$[\infty]$	ideal doğru
$(x,y)(a,b)$	(x,y) ve (a,b) noktalarından geçen doğru
$\mathbb{P}_{(R,t)}$	düzlemsel üçlü halkası (R,t) olan projektif düzlem

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezi altı bölüm olarak düzenlenmiştir.

Bu bölümde tezdeki çalışma düzeni tanıtılacaktır. Tezde afin ve projektif düzlemler hakkında genel bilgiler verilip küçük mertebeli afin ve projektif düzlemlerin varlıkları hakkında bilinenler özetlenip genel olarak düzlemlerin koordinatlanmaları incelenmiştir.

2. Bölümde tezde kullanılan temel kavramlar tanıtılmıştır.

3. Bölümde afin düzlemler ve projektif düzlemler hakkında bazı temel bilgiler verilmiş ve 12. mertebeye kadar afin (projektif) düzlemlerin varlığı-yokluğu hakkında ve sayıları hakkında literatürde bilinen genel bilgiler kısaca verilmeye çalışılmıştır.

4. Bölümde afin düzlemlerde toplama ve çarpma işlemleri ele alınıp lineer denklemlerin çözümleri üzerinde durulmuştur.

5. Bölümde afin düzlemlerin koordinatlanması, lineer denklemler ve Pappus Teoremi ele alınmıştır.

6. Bölüm projektif düzlemlerin hem homojen hem de homojen olmayan biçimde koordinatlanmasına ayrılmıştır.

Bu tez bir derlemedir. Tezde afin ve projektif düzlemler hakkında genel bazı kavramların tanıtımına ilave olarak bu düzlemlerin koordinatlanması hakkında temel bilgiler verilerek ileri seviyede araştırma için taban oluşturma amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu çalışmada gerekli olan temel kavramlar bu bölümde verilecektir. Aşağıda verilen bilgiler cebir ve projektif geometri ile ilgili temel kaynakların birçoğunda mevcut olup, burada verilenler için Batten (1986), Kaya (1992) ve Çiftçi (2015) esas alınmıştır.

Tanım 2.1: G boş olmayan bir küme olmak üzere

$$*: G \times G \rightarrow G, \qquad *(a, b) = a * b$$

fonksiyonuna kümesi üzerinde bir ***ikili işlem*** veya bir ***iç işlem*** denir.

G kümesi üzerinde tanımlanan " $*$ " ikili işlemi aşağıdaki şartları sağlar:

i. G kümesi ikili işleme göre kapalıdır, yani her $a,\ b \in G$ için $a * b \in G$ dir.

ii. $*$ işlemi iyi tanımlıdır, yani her $a,\ b \in G$ için $a * b$ bir tektir.

Tanım 2.2: bir küme, $*$ işlemi de G üzerinde bir ikili işlem olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $(G,\ *)$ sistemine bir ***grup*** denir ve bu grup kısaca G ile gösterilir.

G1. Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir, yani $*$ işlemi birleşmelidir.

G2. Her $a \in G$ için $* a = a = a * e$ olacak şekilde bir $e \in G$ elemanı vardır. Bu e elemanına G nin $*$ işlemine göre etkisiz elemanı denir.

G3. Her $a \in G$ için $a' * a = e = a * a'$ olacak şekilde bir $a' \in G$ elemanı vardır. Bu a' elemanına a elemanının $*$ işlemine göre tersi denir.

Eğer her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise G grubuna ***değişmeli (abelyen, abel) grup*** denir.

Tanım 2.3: H bir küme, $*$ ve $\circ$ işlemleri de H kümesi üzerinde iki ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(H, *, \circ)$ sistemine bir ***halka*** denir:

H1. $(H, *)$ bir değişmeli gruptur.

H2. $\circ$ işlemi birleşmelidir.

H3. Her $a, b, c \in H$ için $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ sol dağılma ve $(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$ sağ dağılma kuralı geçerlidir.

Tanım 2.4: bir küme, $+$ ve $\cdot$ işlemleri de B kümesi üzerinde sırasıyla toplama ve çarpma denilen iki ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(B, +, \cdot)$ sistemine bir ***bölümlü halka*** denir:

B1. $(B, +)$ bir değişmeli gruptur.

B2. $(B \setminus \{0\}, \cdot)$ bir gruptur.

B3. $\cdot$ işlemi $+$ işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılır.

Çarpma işlemi değişmeli olan bir bölümlü halkaya bir ***cisim*** denir.

Teorem 2.5: Her sonlu bölümlü halka bir cisimdir (Wedderburn 1905).

Tanım 2.6: A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere $A \times B$ kartezyen çarpımının herhangi bir β alt kümesine A dan B ye bir ***bağıntı*** denir.

Tanım 2.7: Bir A kümesi üzerinde bir β bağıntısı verilsin. Eğer bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa β bağıntısına A kümesi üzerinde bir ***denklik bağıntısı*** denir:

i. Her $x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ dır (yansıma özelliği).

ii. Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ dır (simetri özelliği).

iii. Her $(x,), (y, z) \in \beta$ için $(x, z) \in \beta$ dır (geçişme özelliği).

Tanım 2.8: A kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı β olsun. $(x, y) \in \beta$ ise ***y elemanı β bağıntısı ile x elemanına denktir*** denir. A kümesinin bir x elemanına denk olan tüm elemanlarının kümesine x elemanının ***denklik sınıfı*** denir ve $\bar{x}$ veya $[x]$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre $\bar{x} = [x] = \{y \in A: (x, y) \in \beta\}$ dır.

Tanım 2.9: K ve V herhangi iki küme olsun. $K \times V$ den V ye bir fonksiyona V kümesi üzerinde bir ***dış işlem*** denir.

Tanım 2.10: $(K, +, \cdot)$ bir cisim olup, V kümesi üzerinde $* : V \times V \to V$ iç işlemi ve $o: K \times V \to V$ dış işlemi tanımlanmış olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V ye K cismi üzerinde bir ***vektör uzayı*** denir:

V1. Her $x, y, z \in V$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ dir.

V2. Her $x \in V$ için $x * \theta = x = \theta * x$ olacak şekilde $\exists \theta \in V$ vardır.

V3. Her $x \in V$ için $x * x' = \theta = x' * x$ olacak şekilde $\exists x' \in V$ vardır.

V4. Her $x, y \in V$ için $x * y = y * x$ dir.

V5. Her $a \in K$ ve her $x, y \in V$ için $a \circ (x * y) = (a \circ x) * (a \circ y)$ dir. **V6.** Her $a, b \in K$ ve her $x \in V$ için $(a + \mathrm{b}) \circ \mathrm{x} = (a \circ x) * (b \circ x)$ dir. **V7.** Her $a, b \in K$ ve her $x \in V$ için $(a \cdot \mathrm{b}) \circ \mathrm{x} = a \circ (b \circ x)$ dir.

V8. Her $x \in V$ için $1 \circ x =$ dir.

Tanım 2.11: $\mathcal{N}$, elemanlarına ***nokta*** denilen boştan farklı bir küme ve $\mathcal{D}$ ise $\mathcal{N}$ kümesinin ***doğru*** adı verilen belli alt kümelerinden oluşan bir küme olsun. Belli aksiyomları sağlayan bir $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ sistemine bir ***uzay (geometrik yapı)*** denir.

Tanım 2.12: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ uzayına bir ***yaklaşık lineer uzay*** denir:

YL1. Her doğrunun en az iki noktası vardır.

YL2. İki noktadan en çok bir doğru geçer.

Tanım 2.13: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ uzayına bir ***lineer uzay*** denir:

L1. Her doğrunun en az iki noktası vardır.

L2. Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

Tanım 2.14: Birebir Fonksiyon: A, B kümeleri ve bir f: $A \to B$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in A$ için $(x) = f(y)$ olduğunda $x = y$ oluyor ise f fonksiyonuna ***birebir fonksiyon*** denir.

Tanım 2.15: Örten Fonksiyon: A, B kümeleri ve bir $f: A \to B$ fonksiyonu verilsin. Her $y \in B$ elemanı için $(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ var ise f fonksiyonuna ***örten*** veya ***üzerine fonksiyon*** denir.

Tanım 2.16: Hem birebir hem örten bir fonksiyona bir ***birebir ve örten fonksiyon*** denir.

Tanım 2.17: $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ ve $(\mathcal{N}^{'}, \mathcal{D}^{'}, \circ\,')$ herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer
$f: \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \to \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$ fonksiyonu

i. $(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$,

ii. $(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}'$,

iii. Her $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ için $N \circ d \Rightarrow (N) \circ' f(d)$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ yapısından $(\mathcal{N}^{'}, \mathcal{D}^{'}, \circ\,')$ yapısına bir ***homomorfizm*** denir. Birebir ve örten özelliğe sahip bir homomorfizme bir ***izomorfizm*** denir. Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren bir izomorfizme de bir ***kolinasyon*** ya da bir ***otomorfizm*** denir.

3. AFİN ve PROJEKTİF DÜZLEMLER

Bu bölümde afin ve projektif düzlemler ile ilgili temel kavramlar verilecek ve on ikinci mertebeye kadar afin ve projektif düzlemlerin varlıkları hakkında literatür bilgileri özetlenecektir.

3.1. Afin Düzlemler

Tanım 3.1.1: $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$, elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan, $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \phi$ özelliğine sahip iki küme, $\in$ ise $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde olma bağıntısı (yani $\in \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ sistemine bir ***afin düzlem*** denir (Kaya 1992):

A1. Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$, noktaları için $M \in d$ ve $N \in d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A2. $N \notin d$ olmak üzere bir $N \in \mathcal{N}$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $N \in c$ ve $d \parallel c$ olacak şekilde bir tek $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. ($c \cap d = \emptyset$ ise c doğrusu d doğrusuna paraleldir denir ve $d \parallel c$ yazılır.)

A3. Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

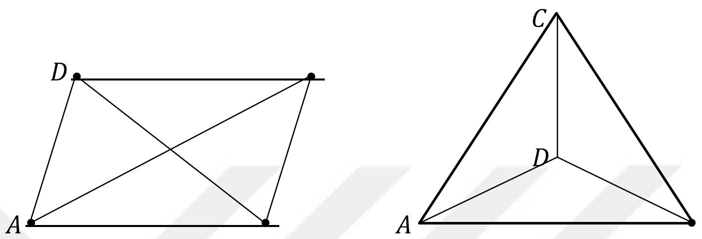
A3 aksiyomu "Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır ve en az iki doğru vardır (Bennett1995)." şeklinde de verilir.

Bir afin düzlem paralellik aksiyomunu sağlayan bir lineer uzay olarak da tanımlanır (Batten 1986).

Bundan sonra bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzlemi genellikle $\mathbb{A}$ biçiminde, M ve N noktalarından geçen doğru da MN biçiminde gösterilecektir.

Örnek 3.1.2: En küçük afin düzlem: Noktalar kümesi $\mathcal{N} = \{A, B, C, D\}$ ve doğrular kümesi $= \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ olsun. Noktaların tüm ikili alt kümeleri doğrular kümesinde var olduğundan, yani her farklı nokta ikilisinin üzerinde olduğu bir

tek doğru var olduğundan A1 aksiyomu sağlanır. $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ ve $AD \parallel BC$ olduğundan A2 aksiyomu sağlanır. Mesela BD doğrusu üzerinde olmayan A noktası için
A noktasından geçen ve BD doğrusuna paralel olan tek doğru AC doğrusudur. A3 aksiyomu da açık olarak sağlandığı için $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ sistemi bir afin düzlemdir. Bu şekildeki dört noktalı ve altı doğrulu afin düzlem en küçük afin düzlemdir. (Şekil 3.1.1) ile bu düzlemin iki farklı temsili verilmiştir (Kaya 1992).



Şekil 3.1.1. En küçük afin düzlem

Örnek 3.1.3: $\mathcal{N} = \{(x, y): x, y \in F, F$ bir cisim$\}$, her $d \in \mathcal{D}$ için
$d = \{(x, y): ax + by = c$ ve $a, b, c \in F, a^2 + b^2 \neq 0\}$ olmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ sistemi bir afin düzlemdir. F cismi üzerine bu şekilde kurulan afin düzlem $\mathbb{A}_2F$ ile gösterilir. ■

Yukarıdaki örnekte $F = \mathbb{R}$ alınırsa elde edilen bu afin düzleme ***reel afin düzlem*** denir.

Örnek 3.1.2 de $F = \mathbb{Z}_2$ alınıp $A = (0,\ 0)$, $B = (1,\ 0)$, $C = (0,\ 1)$ ve $D = (1,\ 1)$ olarak işaretlenirse $\mathbb{Z}_2$ üzerine kurulan afin düzlem elde edilir.

$\mathbb{A}$ da bir doğru ve ona paralel olan tüm doğrulardan oluşan bir kümeye bir ***demet*** denir.

Teorem 3.1.4: Her sonlu $\mathbb{A}$ düzlemi için aşağıdaki özelliklere uyan bir $n \geq 2$ tamsayısı vardır (Kaya 1992):

i. $\mathbb{A}$ düzleminin her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunur.

ii. $\mathbb{A}$ düzleminin her noktası tam olarak $n + 1$ tane doğru üzerindedir.

iii. $\mathbb{A}$ düzlemindeki noktaların toplam sayısı n^2 dir.

iv. $\mathbb{A}$ düzlemindeki doğruların toplam sayısı $n^2 + n$ dir.

v. Bir demette tane doğru vardır.

vi. Toplam demet sayısı $n+1$ dir.

Teorem 3.1.4 teki **v** ve **vi** özellikleri (Bennett 1995)'ten alınmıştır.

Teorem 3.1.5: Her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunan sonlu bir afin düz- lemin ***mertebesi*** n dir denir (Batten 1986).

Bir küme üzerindeki bir denklik bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelliğine sahip olduğu temel kavramlar bölümünde ifade edilmiştir. $\pi \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ şeklinde bir denklik bağıntısı verilsin, π bağıntısı $\mathcal{H}$ kümesi üzerinde bir ***parçalanış*** tanımlar, yani birleşimleri $\mathcal{H}$ kümesini oluşturan $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \dots$ ayrık kümeleri $\mathcal{H}$ kümesinin bir parçalanışıdır.
π bağıntısı ile belirlenmiş olan $\mathcal{A}_i$ kümeleri denklik sınıflarıdır. x ve y elemanlarının aynı $\mathcal{A}_i$ kümesinde olması için gerek ve yeter şart $x\pi y$ olması, yani (x, y) sıralı ikilisinin π bağıntısında olmasıdır. Denklik sınıfları ve parçalanışlar hakkında daha fazla detay için (Foulis ve Munem 1988)'e bakılabilir.

$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$, n mertebeli bir afin düzlem olsun. Bu durumda $|\mathcal{N}| = n^2$ dir ve $\mathcal{D}$ kümesindeki doğrular, her biri n doğrulu olan $n+1$ tane demette gruplanabilir. Eğer $\Gamma = \{d_1, \dots, d_n\}$ bir demet ise $\mathcal{N}$ kümesinin her bir noktası Γ demetinin tam olarak bir doğrusu üzerindedir, böylece Γ demeti $\mathcal{N}$ kümesinin noktalarını her bir kümede n nokta olacak şekilde n tane doğru kümesine ayırır. Γ ile belirlenen denklik bağıntısı (Γ) ile gösterilecektir. Γ ile belirlenen denklik bağıntısı, eğer $A = B$ ya da $AB \in \Gamma$ ise $A(\Gamma)B$ ile tanımlanır. Her bir demet böyle bir denklik bağıntısı belirttiğinden $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzlemi n^2 noktalı küme üzerinde $n+1$ tane denklik bağıntısı belirler (Bennett 1995).

Tanım 3.1.6: R ve S aynı $\mathcal{H}$ kümesi üzerinde denklik bağıntıları olsun. Eğer $R \circ S = S \circ R$ ise R ve S ***değişmelidir (commute)*** denir. Eğer xRz ve zSy olacak şekilde bir z elemanı varsa $xR \circ Sy$ dir denir. Δ eşitlik bağıntısı, yani $x\Delta y \Leftrightarrow x = y$ bağıntısı ve $I = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ olmak üzere sonlu $R \circ S \circ R \circ S \circ \cdots \circ R \circ S$ birleşimi ve $R \cap S = \Delta$ ise R ve S ***tümleyicidir (complementary)***. Eğer ve S tümleyici ve değişmeli (ki burada $R \circ S = I$ dır) ise R ve S ***ortogonaldir (orthogonal)***. R ve S sırasıyla değişmeli, tümleyici

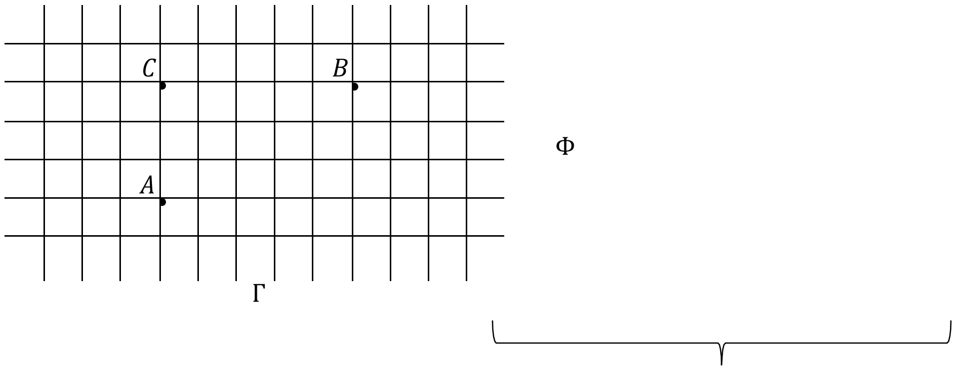
ya da ortogonal ise R ve S ye karşılık gelen parçalanışlara ***değişmelidir***, ***tümleyicidir*** ya da ***ortogonaldir*** denir. Denklik bağıntılarının ya da parçalanışların bir kümesine, eğer bu kümedeki her bir çift ortogonal ise bir ***ortogonal küme*** denir (Bennett 1995).
Burada R ve S ortogonal iken $R \circ R = R$ olduğunu kullanarak
$I = R \circ S \circ R \circ S \circ \cdots \circ R \circ S = R \circ R \circ \cdots \circ R \circ S \circ S \circ \cdots \circ S = R \circ S$ elde edilir.

Bir afin düzlemin paralel demetleri ile ortogonal denklik bağıntıları arasındaki yakın ilişki (Bennett 1995) ten alınarak aşağıdaki teorem ve sonucu ile verilebilir.

Teorem 3.1.7: Eğer Γ ve Φ bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzleminde paralel doğru demetleri ise (Γ) ve $\pi(\Phi)$ bağıntıları $\mathcal{N}$ kümesi üzerinde ortogonal denklik bağıntılarıdır.

İspat: Her Γ demeti için (Γ) bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Çünkü yansıma özelliğini ve her A, B nokta çifti için $AB = BA$ olduğundan simetri özelliğini sağlar. Ayrıca farklı A, B, C noktaları için AB ve BC doğruları Γ demetinde iken bu doğrular B noktasını bulunduran Γ demetindeki yalnızca bir doğruya eşit olduğundan geçişme özelliği de sağlanır.

Eğer A ve B noktaları $AB \in \Gamma$ olacak şekilde iki farklı nokta ise $A\pi(\Gamma)B$ ve $B\pi(\Phi)B$ dir, bu yüzden de $A\pi(\Gamma) \circ \pi(\Phi)B$ dir. Benzer şekilde eğer $AB \in \Phi$ ve $A\pi(\Gamma)A$ ve $A\pi(\Phi)B$ dir, bu yüzden $A\pi(\Gamma) \circ \pi(\Phi)B$ dir. A noktası Γ demetindeki d doğrusu üzerinde, B nokta- sı Φ demetindeki m doğrusu üzerinde ve $C = d \cap m$ olacak şekilde AB doğrusu iki demette de kapsanmasın. Bu takdirde $A\pi(\Gamma)C$, $C\pi(\Phi)B$ ve tekrar $A\pi(\Gamma) \circ \pi(\Phi)B$ dir.



Şekil 3.1.2. Γ ve Φ demetindeki A, B ve C noktalarının konumları

Böylece $(\Gamma) \circ \pi(\Phi) = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dir. Benzer olarak $\pi(\Phi) \circ \pi(\Gamma) = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $(\Gamma) \circ \pi(\Phi) = \pi(\Phi) \circ \pi(\Gamma)$ olur, yani denklik bağıntıları değişme- lidir (Şekil 3.1.2).

Eğer A, B farklı noktalar ve $A(\Gamma) \cap \pi(\Phi)B$ ise AB doğrusu hem Γ hem de Φ demetin- dedir ki bu bir çelişkidir. Böylece $(\Gamma) \cap \pi(\Phi)$ eşitlik bağıntısı olup $\pi(\Gamma)$ ve $\pi(\Phi)$ denk- lik bağıntıları tümleyicidir.

(Γ) ve $\pi(\Phi)$ denklik bağıntıları değişmeli ve tümleyici olduğundan ortogonal denklik bağıntılarıdır. ■

Sonuç 3.1.8: Kardinalitesi n^2 olan bir $\mathcal{H}$ kümesi verilsin. Eğer n mertebeli bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$ afin düzlemi varsa $\mathcal{H}$ kümesinin ikişer ikişer ortogonal olan $\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}$ parçalanışı vardır.

Bu sonucun karşıtı da doğrudur. Yani sonlu bir küme $n + 1$ tane ortogonal parçalanışın oluşturduğu bir koleksiyona sahip ise bu kümenin kardinalitesi n^2 dir ve bir afin düzlemin noktalar kümesi olarak düşünülebilir.

Teorem 3.1.9: $n \geq 2$ olmak üzere π_i $(i = 1, 2, \ldots, n + 1)$, n^2 ***noktalı*** bir kümenin $n + 1$ ortogonal parçalanışının herhangi bir kümesi olsun. Bu takdirde her bir parçalanış, noktaları her biri n nokta kapsayan n tane denklik sınıfına ayırır. Üstelik böyle oluşan her bir denklik sınıfındaki noktalar kümesine bir ***doğru*** denirse sonuçtaki noktalar ve doğrular n mertebeli bir afin düzlem oluşturur (Bennett 1995).

Bu teoremler ortogonal parçalanışlar ile afin düzlemlerin varlığı arasındaki direkt bağıntıyı ortaya koymaktadır.

Aşağıda matrisler ile ortogonal parçalanışlar arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

Tanım 3.1.10:
Girdileri $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ kümesinin elemanları olan ve $\mathbb{Z}_n$ kümesindeki her bir elemanın her bir satır ve her bir sütunda tam olarak bir defa bulunduğu $n \times n$ tipindeki bir matrise ***n mertebeli bir Latin kare*** denir.

Eğer $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ kümesindeki her bir (k, ℓ) elemanı için $(a_{ij}, \ _{ij}) = (k, \ \ell)$ olacak şekilde bir tek (i, j) çifti varsa $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ Latin kareleri ***ortogonaldir*** denir.

Eğer Latin karelerden oluşan bir kümedeki her bir kare çifti ortogonal ise Latin karelerin bu kümesi ***karşılıklı orogonaldir (mutually orthogonal)*** denir (Bennett 1995). ■

Euler 2 mertebeli ortogonal Latin kare çifti olmadığını; 3, 4 ve 5 mertebelerinin her biri için bir çift olduğunu göstermeyi başarmıştır. Ayrıca mertebesi 4 modunda 2 ye denk olan (6, 10, 14 gibi) herhangi bir çift olmadığını tahmin etmiştir. Ancak Euler'in konjektürü yalnızca 2 ve 6 mertebeli Latin kareler için geçerlidir. Gaston Tarry190'de 6 mertebeli ortogonal Latin kare çifti olmadığını göstermiştir. Bu durumun ispatı (Betten 1984)'de vardır. 10 ve 22 mertebeli ortogonal Latin kare çifti 1959 da Bose, Shrikhande ve Parker tarafından inşa edilmiştir. 2 ve 6 hariç herhangi bir n sayısı için n mertebeli bir ortogonal Latin kare çiftinin var olduğu bilinmektedir. Latin kareler hakkında daha fazla ayrıntı için (Bogart 1983) ve daha ileri düzey için de (Hall 1986), (Dé nes, Keedwell 1974)'e bakılabilir.

Daha genel bir yapının özel bir hali olan 5 mertebeli bir ortogonal Latin kare çifti örneği aşağıdaki gibidir (Bennett 1995):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.1.11: Herhangi $n = 2k + 1$ tek sayısı için $\times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin elemanları, $+$ ve $-$ işlemleri n modülüne göre tanımlanmak üzere, $a_{ij} = i + j$ ve $b_{ij} = i - j$ şeklinde seçilirse A ve B matrisleri ortogonal Latin kareler olur (Bennett 1995).

(n) ile n mertebeli karşılıklı ortogonal Latin karelerin maksimum sayısı gösterilmektedir. $(2) = H(6) = 1$ olduğu, aksi halde $H(n) \geq 2$ olduğu ve p bir asal sayı ise $(p^k) = p^k - 1$ olduğu bilinmektedir.

Paralel doğru demetleri ve Latin kareler arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde özetlenmiştir (Bennett 1995):

Teorem 3.1.12: $n \geq 2$ için n mertebeli bir afin düzlemin var olması için gerek ve yeter şart $H(n) \geq n - 1$ olmasıdır.

Bu teorem sonlu mertebeli afin düzlemlerin varlığı ile o mertebeden ortogonal Latin karelerin sayısı arasındaki ilişkiyi vermektedir. Sonlu mertebeli afin düzlemlerin bilgisayar çalışmaları ile varlığı araştırılırken aslında n mertebeli ortogonal Latin kareler araştırılmaktadır.

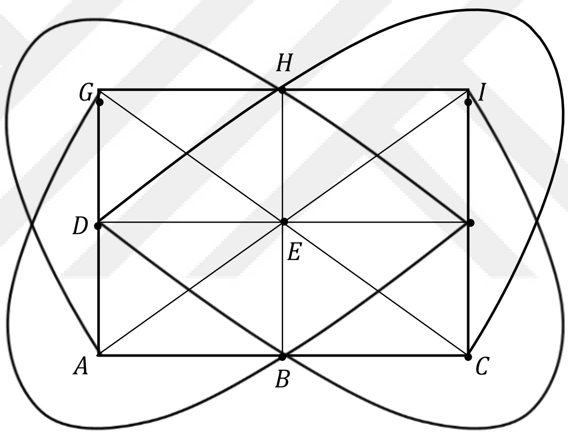
Mertebesi 2 olan bir afin düzlemin var olduğu Örnek 3.1.2 ile verilmiştir ve bu düzlein bir tek olduğu bilinmektedir. Şimdi de mertebeleri 3 ve 4 olan birer tek afin düzlemlerin var olduğunu belirterek bunları örnek olarak vereceğiz.

Örnek 3.1.13: 3 mertebeli afin düzlem: Noktalar kümesi $\mathcal{N} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ biçiminde ve doğrular kümesi de aşağıda gösteril- diği gibi noktalar kümesinin üç noktalı alt kümelerinden oluşsun:

$\{ABC\}$	$\{AEI\}$	$\{ADG\}$	$\{CEG\}$
$\{DEF\}$	$\{BFG\}$	$\{BEH\}$	$\{BDI\}$
$\{GHI\}$	$\{CDH\}$	$\{CFI\}$	$\{AFH\}$

Afin düzlem aksiyomlarının sağlandığı kolayca görülebilir.

Bu düzlemin noktaları $\mathbb{Z}_3$ ün elemanları kullanılarak $A = (0,\ 0)$, $B = (1,\ 0)$, $C = (2,\ 0)$, $D = (0,\ 1)$, $E = (1,\ 1)$, $F = (2,\ 1)$, $G = (0,\ 2)$, $H = (1,\ 2)$, $I = (2,\ 2)$ şeklinde isimlendirilebilir (Şekil 3.1.3).



Şekil 3.1.3. 3 mertebeli afin düzlem

Örnek 3.1.14: 4 mertebeli afin düzlem:

$\mathcal{N} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$ ve $\mathcal{D}$ kümesindeki doğrular da aşağıdaki demetlerde gruplandırılmıştır. Demetlerin üçünün Γ_1, Γ_2 ve Φ olarak isim- lendirildiğine dikkat ediniz (Bennett 1995).

Γ_1	Φ	
$m_0 = \{ODFI\}$	$h_0 = \{HBCD\}$	$\{HFKP\}$
$m_1 = \{ECPA\}$	$h_1 = \{EFGJ\}$	$\{BEOL\}$
$m_2 = \{KMJB\}$	$h_2 = \{IAKL\}$	$\{JNCI\}$
$m_3 = \{GHLN\}$	$h_3 = \{MNOP\}$	$\{AGDM\}$

$k_0 = \{OAJH\}$	$\{HEIM\}$
$k_1 = \{GPB\}$	$\{BFAN\}$
$k_2 = \{FCML\}\ \Gamma_2$	$\{CGKO\}$
$k_3 = \{EDKN\}$	$\{DJLP\}$

Yukarıdaki örnekte E noktası m_1 ve k_3 doğruları üzerinde olduğundan $(1, 3)$ şeklinde işaretlenir. Böylece düzlemin tüm noktaları aşağıdaki gibi elde edilir:

$A = \quad 0)$	$E = (1,\ 3)$	$I = (0,\ 1)$	$M = (2,\ 2)$
$B = \quad 1)$	$F = (0,\ 2)$	$J = (2,\ 0)$	$N = (3,\ 3)$
$C = (1,\ 2)$	$G = (3,\ 1)$	$K = (2,\ 3)$	$O = (0,\ 0)$
$D = (0,\ 3)$	$H = (3,\ 0)$	$L = (3,\ 2)$	$P = (1,\ 1)$

Φ demetinden bir Latin kare oluşturmak için demetteki noktaların işaretlenmişi düşünülecek olursa noktası $(1, 3)$ şeklindedir. noktası 4×4 tipindeki matrisin $(1, 3)$ girdisini belirtir, yani ikinci satır (satır 1) sonuncu kolondaki (kolon 3) girdidir. E noktası

k_1 doğrusu üzerinde olduğundan ikinci satır sonuncu kolon girdisi 1 dir. Bu şekilde oluş- turulan Latin karenin girdileri aşağıdaki gibidir (Bennett 1995):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \blacksquare$$

10 mertebeli dokuz tane karşılıklı ortogonal Latin kare çifti bulunmadığından 10 mertebeli afin düzlem yoktur. Aslında (10) un değeri bilinmemektedir. 10 mertebeli ortogonal Latin karelerin ilk çifti 1959 da inşa edilmiştir. Ancak 10 mertebeli üç ortogonal Latin kare varsa bile şu anda bilinmemektedir. John Wiley ve Sons, A.Ş.'nin

izniyle (Hall 1986)'de verilmiş olan (Şekil 3.1.4), 10 mertebeli iki ortogonal Latin kareyi göstermektedir.

01234	56789
34012	79865
43120	97658
12407	85396
20375	68941
57698	34120
89756	12034
65981	43207
98563	01472
76849	20513

01923	84657
67895	23104
93746	58210
38254	79061
14507	36982
25619	40873
40138	62795
56480	17329
82071	95436
79362	01548

Şekil 3.1.4. 10 mertebeli iki ortogonal Latin kare

p bir asal sayı ve $k \geq 1$ olmak üzere p^k mertebeli bir afin düzlemin var olduğu bilinmektedir. Bu nedenle $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9$ ve 11 mertebeli afin düzlemler vardır. 6 mertebeli bir afin düzlem yoktur. 12 mertebeli bir afin düzlemin var olup olmadığı ya da mertebesi asal sayı kuvveti olmayan herhangi bir afin düzlemin var olup olmadığı bilinmemektedir.

Bazı afin düzlemlerin yokluğu hakkında bazı şartları veren Bruck-Ryser Teoremi aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.1.15: Bruck-Ryser Teoremi: n sayısı iki negatif olmayan tamsayının kareleri toplamı olmamak üzere eğer n sayısı $4k + 1$ ya da $4k + 2$ biçiminde ise n mertebeli bir afin düzlem yoktur.

Bu teoreme göre mertebesi $6,\ 14,\ 21,\ 22,\ 30,\ 33,\ 38,\ \ldots$ olan herhangi bir afin düzlem yoktur. Bu teorem $10,\ 12,\ 15,\ \ldots$ gibi mertebesi $a^2 + b^2$ şeklinde yazılabilen afin düzlemlerin varlığı hakkında bir şey söylememektedir.

3.2. Projektif Düzlemler

Tanım 3.2.1: $\mathcal{N}'$ ve $\mathcal{D}'$ elemanlarına sırasıyla ***nokta*** ve ***doğru*** denilen boştan farklı olan ayrık iki küme ve $\in '$ de $\mathcal{N}' \times \mathcal{D}'$ kümesinde bir üzerinde olma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in ')$ sistemine bir ***projektif düzlem*** denir (Kaya 1992):

P1. Her $M, N \in \mathcal{N}'$, $M \neq N$, noktaları için $M \in 'd'$ ve $N \in 'd'$ olacak şekilde bir tek $d' \in \mathcal{D}'$ doğrusu vardır.

P2. Her $c', d' \in \mathcal{D}'$ için $N \in 'c'$ ve $N \in 'd'$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}'$ noktası vardır.

P3. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

P3 aksiyomu “Her bir doğru üzerinde en az üç nokta vardır ve en az iki doğru vardır (Bennett 1995).” şeklinde de verilir.

Bir projektif düzlem aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir lineer uzay olarak da tanımlanır (Batten 1986):

i. Herhangi iki doğru kesişir.

ii. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 3.2.2: Her sonlu $\mathbb{P} = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in ')$ projektif düzlemi için aşağıdaki şartlara uyan bir n pozitif tamsayısı vardır (Kaya 1992):

i. $\mathbb{P}$ nin her doğrusu üzerinde $n + 1$ tane nokta vardır.

ii. $\mathbb{P}$ nin her noktasından $n + 1$ doğru geçer.

iii. $\mathbb{P}$ deki tüm noktaların sayısı $n^2 + n + 1$ dir.

iv. $\mathbb{P}$ deki tüm doğruların sayısı $n^2 + n + 1$ dir.

Tanım 3.2.3: Bir projektif düzlemin herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının 1 eksiğine o projektif düzlemin ***mertebesi*** denir.

Sonlu mertebeden bazı projektif düzlemlerin var olmadığını gösteren ünlü Bruck-Ryser Teoremi (Kaya 1992) dan alınmıştır:

Teorem 3.2.4: Eğer $n \equiv 1\ (mod\ 4)$ ya da $n \equiv 2\ (mod\ 4)$ ise ve n negatif olmayan iki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa mertebesi n olan bir projektif düzlem yoktur.

Bu teoreme göre eğer n, $4k + 1$ ya da $4k + 2$ biçiminde yazılabilen bir pozitif tamsayı ve her a, b negatif olmayan tamsayıları için $n \neq a^2 + b^2$ ise Bruck-Ryser Teoremi n nin bir projektif düzlemin mertebesi olamayacağını gösterir. Buna göre 6, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 57, ... gibi sonsuz çokluktaki sayılardan hiç birisi bir projektif düzlemin mertebesi değildir.

$\mathcal{B}$ bir bölümlü halka ve $\mathcal{B}^3 = \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ üç-boyutlu standart vektör uzayı olsun. $\mathcal{B}^3$ ün sıfırdan farklı elemanlarının üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı şu şekilde tanımlansın: $(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow (x', y', z') = r(x, y, z)$ olacak şekilde $\mathcal{B}$ de sıfırdan farklı bir r elemanı vardır. $\mathcal{N}'$ kümesi $\mathcal{B}^3$ ün elemanlarının denklik sınıflarının kümesi olsun. Bu denklik sınıfına bir ***projektif nokta*** denir. Bir projektif nokta sıfırdan farklı bir vektör ve onun sıfırdan farklı tüm skaler katlarından ibarettir. (x, y, z) vektörünü kapsayan denklik sınıfı $< x, y, z >$ biçiminde gösterilir ve x, y, z elemanları, belirlenen noktanın ***homojen koordinatları*** denir.

$\mathcal{D}'$ kümesi ise

$$ax + by + c\ = 0$$

biçimindeki bir ***homojen*** denklemi sağlayan $< x, y, z >$ noktalarının bir kümesi olan d' doğrularından oluşsun. Bu doğru $[a, b, c]$ biçiminde gösterilsin. Bir $X =< x, y, z >$ noktasının bir $d' = [a, b, c]$ doğrusu üzerinde olması

$$X \in 'd' \ \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$$

şeklinde tanımlansın. $ax+by+cz=0$ ile $s \in \mathcal{B}$, $s \neq 0$ için $sax+sby+scz=0$ denklemleri denk olduğundan $[a, b, c]$ ile $[a, b, c]$ aynı doğruyu gösterir. Bu şekilde oluşturulan $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ geometrik yapısı $\mathbb{P}_2\mathcal{B}$ ile gösterilir.

Bu şekilde oluşturulan $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ geometrik yapısının bir projektif düzlem olduğunu bir teorem olarak ifade edip ispatlayacağız. Vereceğimiz ispatın benzerleri Stevenson (1972) gibi değişik kaynaklarda mevcuttur.

Teorem 3.2.5: $\mathbb{P}_2\mathcal{B}$ yapısı bir projektif düzlemdir.

İspat: $M =< x, y, z >$ ve $N =< x', y', z' >$ farklı iki nokta olsun. x, y, z nin tümü sıfır olmadığından $x \neq 0$ ve dolayısıyla $x = 1$ almak genelliği bozmaz. M ve N noktalarından geçen bir $d = [a, b, c]$ doğrusunun varlığını gösterelim.

$M \in d$ ve $\in d$ olması $ax+by+cz=0$ ve $ax'+by'+cz'=0$ denklemlerinin geçerliliğini gerektirir. Birinci denklemden $a=-by-cz$ çekilip ikinci denklemde kullanılırsa

$$(y'-yx')+c(z'-zx')=0 \tag{3.1}$$

eşitliği elde edilir. Burada $y'-yx'=0$ ve $z'-zx'=0$ eşitliklerinin aynı anda geçerli olması mümkün değildir. Aksi halde $1 \cdot x'=x', yx'=y', zx'=z'$ olur ve dolayısıyla
$M=N$ çelişkisi doğar.

Burada öncelikle $y'-yx' \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $c=0$ olamaz. Aksi halde (3.1) eşitliğinden $b=0$ ve dolayısıyla $a=-0y-0z=0$ olur ki bu d nin doğru temsili ile çelişir. Çünkü $d=[0, 0, 0]$ olur. O halde $c=1$ olarak alınabilir. O zaman $a=-by-z$ olup (3.1) eşitliğinden $b=(zx'-z')(y'-yx')^{-1}$ elde edilir. Bu durumda $ax+by+cz=-(by+z)\cdot 1+by+1\cdot z=0$ olur. Keza

$$\begin{aligned} ax'+by'+cz' &= -(by+z)x'+by'+z' \\ &= b(y'-yx')-zx'+z' \\ &= (zx'-z')(y'-yx')^{-1}(y-yx')-zx'+z'=0 \end{aligned}$$

Şimdi M ve N noktalarını kapsayan tek doğrunun d doğrusu olduğunu görelim. Tersine $d' = [a', b', c']$ doğrusunun da M ve N noktalarını kapsadığını kabul edelim. Eğer $c' = 0$ ise $a' + b'y = 0$ ve $a'x' + b'y' = 0$ olur. Bu yüzden $-b'yx' + b'y' = 0$ ve dolayısıyla $b'(y' - yx') = 0$ olur. $y' - yx' \neq 0$ olduğundan $b' = 0$ elde edilir. Şimdi

$a' + b'y' = 0$ eşitliğinden $a' = 0$ bulunur. Böylece $a' = b' = c' = 0$ sonucuna varılır. Bu çelişkiden dolayı $c' \neq 0$ olup $c' = 1$ kabul edilebilir. Bu durumda aşağıdaki eşitliklere sahip olunur:

$$a + by + z = 0 \tag{3.2}$$

$$ax' + by' + z' = 0 \tag{3.3}$$

$$a' + b'y + z = 0 \tag{3.4}$$

$$a'x' + b'y' + z' = 0 \tag{3.5}$$

(3.2) ile (3.4) eşitlikleri $a + by = a' + b'y$ ve (3.3) ile (3.5) eşitlikleri $ax' + y' = a'x' + b'y'$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla

$$-a' = (b' - b)y \tag{3.6}$$

$$(a - a')x' = (b' - b)y' \tag{3.7}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi $b \neq b'$ kabul edilsin. (3.6) ve (3.7)

eşitlikleri

$(b' - b)yx' = (b' - b)y'$ olmasını gerektirir. Buradan $(b' - b)(y' - yx') = 0$ ve dola- yısıyla $y' - yx' = 0$ çelişkisine varılır. O zaman (3.6) eşitliğinden $a = a'$ bulunur. Bu da

M ve N noktalarından geçen bir tek doğru bulunduğunu gösterir. $z' - zx' \neq 0$ kabulü için benzer şekilde M ve N noktalarından geçen bir tek doğrunun var olduğu görülür. O halde P1 aksiyomu sağlanır.

P2 aksiyomunun sağlandığı da nokta ve doğruların rolleri değiştirilerek benzer biçimde görülür.

$< 0, 0, 1 >, < 0, 1, 0 >, < 1, 0, 0 >$ ve $< 1, 1, 1 >$ herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olduğundan P3 aksiyomu sağlanır. ■

Şimdi afin düzlemler ile projektif düzlemler arasındaki yakın ilişkiye bakabiliriz.

Her paralel doğru demetine bir nokta karşılık tutularak, $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzleminin her bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusuna içinde bulunduğu paralel demete karşılık gelen D_∞ noktası katılsın. Bu şekilde d doğrusuna D_∞ ***ideal noktası (sonsuzdaki nokta)*** katılarak elde edilen $d \cup \{D_\infty\}$ doğrusu d' ile gösterilsin. Eğer $\mathbb{A}$ sonlu mertebeli bir afin düzlem ise $n + 1$ tane paralel doğru demeti vardır. Dolayısıyla $n + 1$ tane ideal nokta bulunacaktır. $\mathcal{N}$ noktalar kümesine bu ideal noktaların katılması ile elde edilen noktalar kümesi $\mathcal{N}'$ ile gösterilsin. Ayrıca tüm ideal noktaların kümesi ***ideal doğru (sonsuzdaki doğru)*** olarak adlandırılıp d_∞ ile gösterilsin. $\mathbb{A}$ nın doğrularının bir nokta ile genişletilmesi ile elde edilen tüm d' doğrularının oluşturduğu kümeye d_∞ doğrusu eklenerek elde edilen küme $\mathcal{D}'$ ile gösterilsin.

Bu şekilde elde edilen $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ geometrik yapısına $\mathbb{A}$ nın ***tamamlanmışı*** denir. Aşağıdaki teorem $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ sisteminin bir projektif düzlem olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.2.6: Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir (Kaya 1992).

İspat: Bir $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzleminin tamamlanmışı $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ olsun. $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ yapısının bir projektif düzlem olduğunun gösterilmesi için P1, P2, P3 aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

P1. $M, N \in \mathcal{N}'$ olsun.

i. $M, N \in \mathcal{N}$ ise $N \notin d_\infty$ ve $M \notin d_\infty$ dur. $\mathbb{A}$ afin düzlem olduğundan A1 gereği $MN = d \in \mathcal{D}$ dir. Her doğru bir paralel demette yer aldığından d doğrusu da $\mathbb{A}$ da bir paralel demettedir. Bu paralel demette yer alan tüm doğrulara tamamlanmış yapıda D_∞

noktası ilave edilmiş olsun. Bu durumda $d^{'} = d \cup \{D_\infty\} \in \mathcal{D}^{'}$ olur ve M ile N noktası d' doğrusu üzerindedir.

ii. $N \in \mathcal{N}$ ve $M \notin \mathcal{N}$ ise $M = M_\infty \in \mathcal{N}^{'}$ olur. M_∞ noktasını belirleyen demetteki her doğru N noktasından geçemeyeceğinden $N \notin m$ olduğunu varsaymak genelliği bozmaz. A2 gereği $N \in d$ ve $d \parallel m$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Dolayısıyla d doğrusunun genişletilmişi MN doğrusu olur.

iii. $M, N \notin \mathcal{N}$ ise $M = M_\infty$ ve $N = N_\infty$ ideal noktalarından yalnızca ideal doğru geçer. Dolayısıyla da P1 aksiyomu sağlanır.

P2. $c', d' \in \mathcal{D}'$ olsun.

i. $c' \neq d_\infty$, $d' \neq d_\infty$ ve $c \nparallel d$ ise $c \cap d \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

ii. $c' \neq d_\infty$, $d' \neq d_\infty$ ve $c \parallel d$ ise $\mathbb{A}$ nın tamamlanmışında $c' \cap d' = C_\infty = D_\infty$ olur.

iii. $c' \neq d_\infty$ ve $d' = d_\infty$ ise $c' \cap d' = C_\infty$ dur. Dolayısıyla P2 aksiyomu da sağlanır.

P3. $\mathbb{A}$ afin düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır. Bu noktalardan hiçbiri d_∞ doğrusu üzerinde olmadığından bunlar $\mathbb{A}$ nın tamamlanmışında da aynı özelliğe sahiptir. Dolayısıyla P3 aksiyomu da sağlanmış olur. P1, P2 ve P3 aksiyomları sağlandığından $(\mathcal{N}^{'}, \mathcal{D}^{'}, \in ')$ sistemi bir projektif düzlemdir. ■

$\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ n mertebeli sonlu bir afin düzlem ise $(\mathcal{N}^{'}, \mathcal{D}^{'}, \in ')$ projektif düzleminin her doğrusu $n + 1$ noktalı olacağından $(\mathcal{N}^{'}, \mathcal{D}^{'}, \in ')$ projektif düzleminin mertebesi de n dir.

Herhangi bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}^{'}, \mathcal{D}^{'}, \in ')$ projektif düzleminin herhangi bir $d^{'}$ doğrusu seçilerek tüm noktaları ile birlikte geometrik yapıdan çıkarılsın. Bu durumda $\mathcal{D}'$ kümesinin her c' doğrusundan $c' \cap d'$ noktası çıkarılmış olur. c' doğrusundan $c' \cap d'$ noktasının çıkarıl- ması ile elde edilen tüm c doğrularının kümesi $\mathcal{D}$ ile gösterilsin. Ayrıca $\mathcal{N}^{'} \setminus d^{'} = \mathcal{N}$

olsun. Bu şekilde elde edilen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ geometrik yapısının her doğrusu, $\mathbb{P}$ nin d' doğrusundan farklı her bir doğrudan 1 nokta çıkarılarak elde edilmiş olur. Ayrıca $\mathcal{D}$ nin elemanlarının sayısı $\mathcal{D}'$ nün elemanlarından 1 eksiktir. Eğer $\mathbb{P}$ sonlu n mertebeli ise $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ geometrik yapısının her doğrusu n noktalı olup toplam nokta sayısı $(n^2 + n + 1) - (n + 1) = n^2$, toplam doğru sayısı $n^2 + n$ olup bir noktadan geçen doğru sayısı (değişmez) $n + 1$ dir.

Bu şekilde elde edilen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ sistemi bir afin düzlemdir.

Kısaca söylemek gerekirse her afin düzlem bir projektif düzleme dönüştürülebildiği gibi her projektif düzlemden de herhangi bir doğru çıkarılarak bir afin düzlem elde edilir. Bu, tüm afin düzlemler ile tüm projektif düzlemler arasında birebir bir eşleme bulunduğunu gösterir. Dolayısıyla sonlu mertebeli afin düzlemlerin varlığı ile aynı mertebeli projektif düzlemlerin varlığı hakkında söylenecekler tamamen aynıdır. Başka bir ifade ile sonlu n mertebeli bir afin düzlemin varlığı için gerek ve yeter şart n mertebeli bir projektif düzlemin var olmasıdır.

Bu bilgileri göz önünde bulundurarak sonlu mertebeli afin düzlemler ile sonlu mertebeli projektif düzlemler hakkında literatürde yaygın olarak geçen bazı bilgiler vereceğiz. "Hangi tamsayıları için n mertebeli afin düzlemler vardır?" sorusu afin geometrinin çözülemeyen önemli problemlerinden biri olarak durmaktadır. Bu sorunun cevabı bilinmemektedir. 2, 3 ve 4 mertebeli afin düzlem örneği verilmişti. Bir n pozitif tamsayısı ve p asal sayısı için p^n mertebeli bir afin düzlemin var olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla da 3, 5, 7 ve 8 mertebeli afin düzlemler vardır. 6 mertebeli afin düzlemin var olmadığı 1901 de G. Tarry tarafından gösterilmiştir ve bu düzlemin yokluğu Bruck-Ryser Teoreminin özel bir sonucudur. 12 mertebeli bir afin düzlemin var olup olmadığı ise hala bilinmemektedir.

9 mertebeli bilinen dört farklı projektif düzlem vardır. Bunlar Dezarg düzlemi, Sol yaklaşık cisim düzlemi, Sağ yaklaşık cisim düzlemi ve Hughes düzlemidir. Bu düzlemlerden başka 9 mertebeli herhangi bir projektif düzlemin var olup olmadığı uzun

zaman çalışılmış fakat teorik bir sonuca ulaşılamamıştır. Ancak Lam, Kolesova ve Thiel (1991) yaptıkları bir bilgisayar araştırmasıyla bilinenlerden farklı 9 mertebeli yeni bir projektif düzlemin var olmadığı sonucuna ulaşmışlardır. Bu araştımaya 8 mertebeli izomorf olmayan tüm 283 657 Latin kareleri üretmekle başlamışlardır. Dört adımda gerçekleştirilen bu araştırmanın ilk adımında 8 mertebeli Latin karelerin her bir asıl sınıfından bir temsilci oluşturulmuştur. İkinci adımında temsilci Latin kare, üzerinde olma matrisinin ilk 27 kolonuna çevrilmiştir ve 40 kolona genişletmek için tüm olası durumlar denenmiştir. Üçüncü adımda bulunan kısmi üzerinde olma matrisi 91 kolona genişletilmiştir ve son adımda da tamamlanmış üzerinde olma matrisine izomorfizm testi uygulanmıştır ve her birine onun kolinasyon grubundaki gibi bir sertifika çıkarılmıştır. Bu sertifikalar bilinen düzlemlerle karşılaştırılmıştır. Araştırmanın bu şekilde adımlara ayrılmasının birkaç sebebi vardır. Bunlarından biri, farklı simetri gruplarının etkisi altındaki 8 mertebeli Latin karelerin sayıları hakkındaki yayınların varlığıdır. Daha fazla ayrıntı için (Lam, Kolesova ve Thiel 1991)'e bakılabilir.

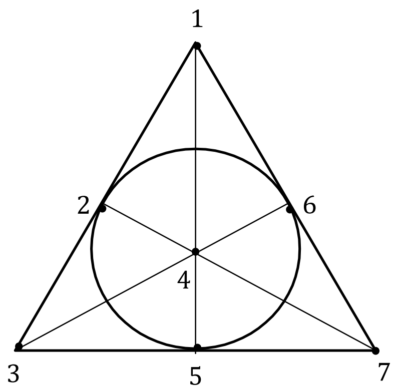
Buna göre 9 mertebeli farklı afin düzlemlerin de sayısı dörttür.

Bruck-Ryser Teoremi 10 mertebeli bir projektif düzlemin var olup olmadığı hakkında herhangi bir bilgi vermemektedir. (Lam 1991) da 10 mertebeli bir projektif düzlemin varlığı ile ilgili uzun yıllar süren bilgisayar araştırması ortaya konmuştur. Lam (1991) çalışmasında "$n \geq 3$ olsun. n mertebeli bir projektif düzlem inşa edebilmek için gerek ve yeter şart n mertebeli karşılıklı ortogonal Latin karelerin bir tam (complete) kümesinin inşa edilebilmesidir." teoreminden hareketle değişik alternatifleri kullanarak $n = 10$ için istenen özellikte Latin kareler kümesinin inşa edilemeyeceği sonucuna varmıştır. Dolayısıyla 10 mertebeli bir projektif düzlemin bulunamayacağı sonucuna varmıştır.

Sonlu mertebeli bazı projektif düzlem örnekleri (Akpınar 2001):

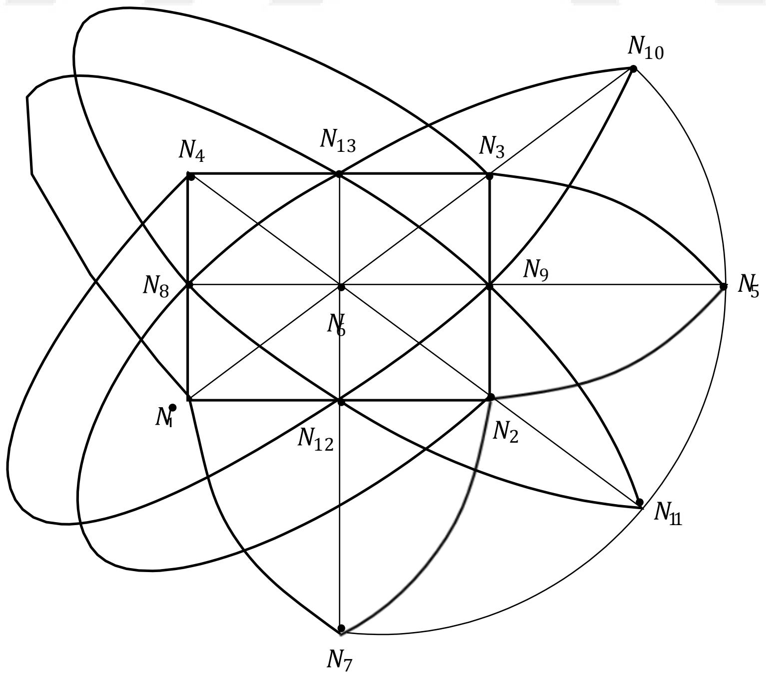
Örnek 3.2.7: 2 mertebeli projektif düzlem: Yedi nokta ve yedi doğrudan oluşan bu düzlem en küçük projektif düzlemdir ve bir tektir. Bu düzleme ***Fano düzlemi*** denir. Nokta ve doğrular $\mathcal{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $\mathcal{D} = \{d_1 = \{1,\ 2,\ 3\},\ d_2 = \{1,\ 4, 5\},$ $d_3 = \{1, 6, 7\}, d_4 = \{2, 4, 7\}\ , d_5 = \{2, 5, 6\}, d_6 = \{3, 4, 6\}, d_7 = \{3, 5, 7\}\}$

biçiminde isimlendirilebilir (Şekil 3.2.1).



Şekil 3.2.1. 2 mertebeli projektif düzlem

Örnek 3.2.8: 3 mertebeli projektif düzlem: Mertebesi 3 olan bütün projektif düzlemler izomorftur, yani 13 noktalı bir tek projektif düzlem vardır (Şekil 3.2.2).



Şekil 3.2.2. 3 mertebeli projektif düzlem

$\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_{13}\}$ ve doğruları da noktalar kümesin dörtlü alt kümelerinden oluşur. ■

4 ve 5 mertebeli projektif düzlemler birer tektir. 4 mertebeli tek projektif düzlem Örnek 3.1.14 ile verilen 4 mertebeli afin düzlemin tamamlanmışı olarak kurulabilir:

Örnek 3.2.8: 4 mertebeli projektif düzlem:
$\mathcal{N}' = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V\}$ ve doğrular kümesinin elemanları da aşağıdaki yirmi bir kümeden oluşur:

$\{OIDFR\}$	$\{HBCDS\}$	$\{HFKPT\}$	$\{OAJHU\}$	$\{HEIMV\}$	
$\{ECPAR\}$	$\{EFGJS\}$	$\{BEOLT\}$	$\{GIPBU\}$	$\{BFANV\}$	
$\{KMJBR\}$	$\{IAKLS\}$	$\{JNCIT\}$	$\{FCMLU\}$	$\{CGKOV\}$	$\{STUV\}$
$\{GHLNR\}$	$\{MNOPS\}$	$\{AGDMT\}$	$\{EDKNU\}$	$\{DJLPV\}$	■

Bu 4 mertebeli tek projektif düzlemdir. Mertebe büyüdükçe nokta ve doğru sayısı arttığından inceleme zorlaşmaktadır.

5 mertebeli projektif düzlemin tekliğinin ispatı için (Elkies 2000)'e bakılabilir.

7 mertebeli bir tek projektif düzlem vardır. W. A. Pierce elli yedi noktalı bir pojektif düzlemde herhangi bir Fano konfigürasyonunun bulunamayacağını gösterdiğinden (Pierce 1953), Marshall Hall, J. R. bu sonuçtan hareketle elli yedi noktalı herhangi bir projektif düzlemin Dezargsel olduğunu ve dolayısıyla da tek olduğunu ispatlamıştır (Hall 1953, 1954).

Teorik araştırmalarla 8 ve daha büyük mertebeli var olan projektif düzlemleri kurmak ve tekliklerini kanıtlamak zorlaşmaktadır. Bu nedenle araştırmalar bilgisayar destekli ya da tamamen bilgisayara dayalı olarak yapılmıştır. Ancak bu aşamada da bilgisayar araştırmaları bir noktaya kadar cevap verebilmektedir.

8 mertebeli projektif düzlemin tekliği 7 mertebeli Latin karelere dayanır. Hesapların teorik kaynağı ise n mertebeli bir projektif düzlemi bir kümenin elemanlarıyla homojen

olmayan bir biçimde koordinatlamayı sağlayan $\{O,\ E,\ U,\ V\}$ koordinatlama dörtgenine dayanır. Düzlemin OU, OV ve UV doğruları üzerinde olmayan sonlu sayıda noktaları $(n-1)$ mertebeli bir Latin kare örneği sağlar.

Bir Latin kare üzerinde satır, kolon ve a_{ij} girdilerinin değişmesi koordinatlama dörtgeninde O, U ve V noktalarından geçen doğruların yeniden adlandırılmasına karşılık gelir. Dolayısıyla $(n-1)$ mertebeli bir Latin kare, $\{O,\ U,\ V\}$ üçgeninin kenarları hariç O, U ve V noktalarından geçen demetlerin 3-ağını göstermek için kullanılabilir. Fakat herhangi bir Latin karenin bir tam düzleme genişletilebilen bir 3-ağı sağladığının doğruluğu açık değildir.
Norton satır, kolon ve a_{ij} girdilerinin değişmesinin denklikleri içerisinde 7 mertebeli 146 tane Latin karenin bir listesini verdi (Norton 1939). Sade bu listede bir eksik buldu ve eklenilen değişikliği kapsayan listenin tam olduğunu gösterdi (Sade 1951).

Toplam sayısı 147 olan bu 7 mertebeli Latin kareler 8 mertebeli düzlem araştırmasının başlangıç noktasıdır. 8 mertebeli bir projektif düzlemin üçgen ve dörtgen sayıları üzerinden yapılan bir teorik tartışma ile 147 Latin kareden sadece 100 tanesinin kullanılmasının yeterli olacağı görülmüştür.

Bundan sonra yapılan iş Latin karelerin tamamlanmasıdır. $[\infty]$ doğrusunun ve sonsuz noktalarının eklenmesiyle bir projektif düzleme tamamlama basit olduğundan işlemlerin kolaylığı için 8 mertebeli bir afin düzlem incelenecektir.

Teorik birkaç işlemden sonra bilgisayar yardımıyla yapılan düzleme tamamlamada bilgisayara girdi olarak alınan 7 mertebeli 100 Latin kareden sadece bir tanesi tam düzleme tamamlanabilmiştir. Ancak bu kareyi düzleme tamamlayan dört farklı yoldan ikisi Latin kareyi bir afin düzleme tamamlayamazken diğer ikisi benzer tamamlamaya yol açmıştır, yani elde edilen düzlemler izomorf olmaktadır. Bu yüzden tamamlama bir tektir ve elde edilen geometrik yapı 8 mertebeli afin düzlemdir. Dolayısıyla 8 mertebeli bir tek projektif düzlem vardır. Daha fazla ayrıntı için (Hall 1956)'e bakılabilir (Akpınar 2001).

4. AFİN DÜZLEMLERDE TOPLAMA ve ÇARPMA İŞLEMLERİ

Buradaki amaç bir afin düzlemdeki bir doğrunun noktaları için toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayıp o doğrunun noktalar kümesinin bu işlemler altında sağladığı özellikleri belirleyerek bir cebir yapısı kurmaktır. Düzlem Dezargsel ise bir doğrunun noktalar kümesinin tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri altında bir bölümlü halka oluşturduğu görülecektir.

Esas çalışmalar cebir yapısı bölümlü halkalar olan düzlemler hakkında olacaktır. Daha sonra afin düzlemler için verilen bilgilerin projektif düzlemlerdeki karşılıkları üzerinde durulacaktır.

4.1. Toplama İşlemi

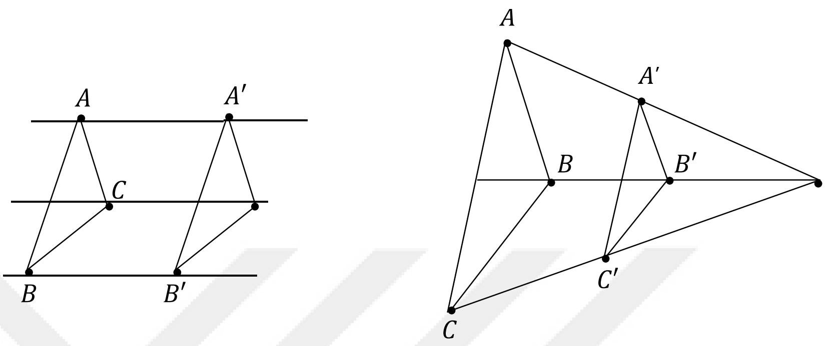
Önce afin ve projektif düzlemler için Dezarg aksiyomunu tanımlayacak bu düzlemleri Dezargsel Afin düzlem ve Dezargsel Projektif düzlem olarak ismlendireceğiz. Daha sonra bir afin düzlemin seçilen bir doğrusunun noktaları üzerinde toplama işlemini tanımlaya-cak ve tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 4.1.1: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir afin düzleme bir Dezargsel afin düzlem denir (Bennett 1995):

A4. Dezarg Teoremi

(I) $AA' \| BB' \| CC'$ olsun. Eğer $AB \| A'B'$ ve $AC \| A'C'$ ise $BC \| B'C'$ dür.

(II) $AA' \cap BB' \cap CC' = P$ olsun. Eğer $AB \| A'B'$ ve $AC \| A'C'$ ise $BC \| B'C'$ dür (Şekil 4.1.1).

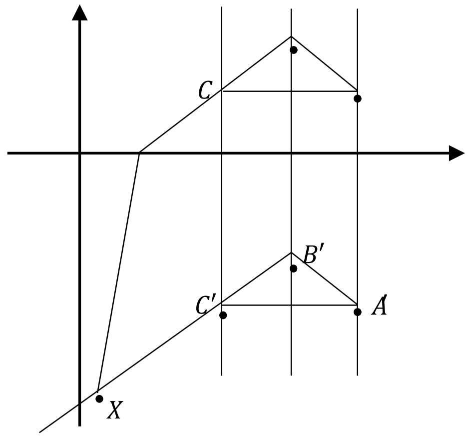


Şekil 4.1.1. Dezargsel afin düzlem

Her afin düzlem Dezarg Teoremini sağlamaz. Örnek olarak Moulton düzlemi bir Dezargsel afin düzlem değildir.

F. R. Moulton 1902 de ***Moulton Düzlemi*** denilen basit bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzlem örneği vermiştir. Bu düzlemde Dezarg Teoremi geçerli değildir. Bu düzlemin noktaları reel sayı- ların sıralı ikilileridir, yani reel koordinat düzleminin noktalarıdır. $\mathcal{D}$ kümesinin eleman- ları ise Euclid düzleminin tüm yatay, düşey doğruları ile negatif eğimli doğrularından ve m pozitif bir tamsayı olmak üzere eğimi x-ekseninin üzerinde m, altında ise 2m olacak şekildeki tüm kırık-çizgi Euclid doğrularından oluşur. Moulton düzleminin herhangi iki noktasının yalnızca bir doğru (Moulton doğrusu) üzerinde olduğunu göstermek bir analitik geometri alıştırmasıdır. Eğer bu doğru bir Euclid doğrusu ise denklemi bulunur, eğer kırık-çizgi bir doğru ise doğrunun x-ekseni ile yaptığı arakesit noktası bulunur. Yatay doğrular paraleldir, düşey doğrular paraleldir ve aynı negatif eğimli doğrular da paraleldir. Eğimleri x-ekseninin hem altında hem üstünde aynı olan kırık-çizgi doğrular da paraleldir, dolayısıyla da Moulton düzleminde paralellik aksiyomu sağlanır.

A3 aksiyomu da açık olarak sağlanır (Şekil 4.1.2).

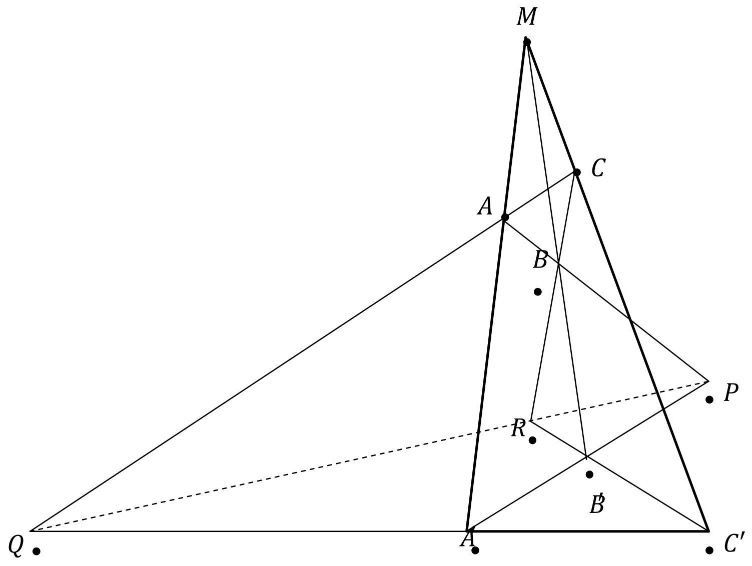


Şekil 4.1.2. Moulton Düzlemi

Moulton düzleminin Dezarg Teoremini sağlamadığını görmek için (Şekil 4.1.2) ye bakmak yeterlidir. Burada Dezarg Teoremi hipotezleri sağlanır fakat $BC \cap B'C' = X$ tir.

Şimdi de projektif düzlemler için Dezarg aksiyomunu ele alacağız.

P4. Dezarg Teoremi: $AA' \cap BB' \cap CC' = M$ olarak alınsın. $P = AB \cap A'B'$, $Q = AC \cap A'C'$ ve $R = BC \cap B'C'$ olsun. Bu takdirde P, Q, R noktaları doğrudaştır (Şekil 4.1.3).



Şekil 4.1.3. Dezarg düzlemi

Tanım 4.1.2: P4 Dezarg aksiyomunu sağlayan bir projektif düzleme ***Dezarg düzlemi*** ya da ***Dezargsel düzlem*** denir (Kaya 1992):

Dezarg aksiyomu aşağıda tanımlanacak kavramlar kullanılarak başka bir ifade ile de verilebilir.

Tanım 4.1.3: A, B, C, A', B', C' bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A, B, C noktaları doğrudaş değilse $\{A, B, C\}$ kümesine bir ***üçgen*** denir. $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ iki üçgen olsun. A ve A', B ve B', C ve C' ye üçgenlerin karşılıklı köşeleri denilsin. Eğer M, A, A'; M, B, B' ve M, C, C' nokta üçlüleri doğrudaş olacak biçimde bir M noktası varsa bu üçgenler M noktasından ***perspektiftir*** denir. Ayrıca M noktasına iki üçgenin ***perspektiflik merkezi***; AB ve $A'B'$, AC ve $A'C'$, BC ve $B'C'$ doğru ikililerine bu üçgenlerin ***karşılıklı kenarları*** denir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının

$$P = AB \cap A'B',\ Q = AC \cap A'C',\ R = BC \cap B'C'$$

arakesit noktaları doğrudaş ise bu noktaların üzerinde bulunduğu doğruya ***üçgenlerin perspektiflik ekseni*** denir. Perspektiflik ekseni e doğrusu olan iki üçgene ***e ekseninden perspektif üçgenler*** denir (Kaya 1992).

P4 aksiyomu “Bir noktadan perspektif iki üçgen bir doğrudan da perspektiftir.” şeklinde de verilebilir.

Teorem 4.1.4: herhangi bir cisim olmak üzere $\mathbb{P}_2F$ projektif düzlemlerinin hepsi Dezargseldir (Kaya 1992).

İspat: $\mathbb{P}_2F$ de $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ kümeleri M noktasından perspektif herhangi iki üçgen olsun. Ayrıca $M =< m_1, m_2, m_3 >, A =< a_1, a_2, a_3 >$,
$=< b_1, b_2, b_3 >$, $C =< c_1, c_2, c_3 >$, $A' =< a'_1, a'_2, a'_3 >$,
$B' =< b'_1, b'_2, b'_3 >, C' =< c'_1, c'_2, c'_3 >$ olsun. Bu noktalar birbirinden farklı olduğundan $i = 1, 2, 3$ için $a'_i = m_i + \lambda a_i$, $b'_i = m_i + \mu b_i$, $c'_i = m_i + \nu c_i$ olacak şekilde $\lambda, \mu, \nu \in F$ elemanları vardır. Şimdi koordinatları $\lambda a_i - \mu b$ olan nokta

düşünülsün. (Burada $A \neq B$ olduğundan $\lambda a_i - \mu b_i$ sayılarının hepsi sıfır değildir. Dolayısıyla bir noktanın koordinatlarını verir.) Ayrıca

$$\lambda a_i - \mu b_i = (m_i + \lambda a_i) - (m_i + \mu b_i) = a_i' - b_i'$$

olduğundan bu nokta hem AB hem $A'B'$ doğrusu üzerindedir. Dolayısıyla da $P = AB \cap A'B'$ noktasının koordinatları $\lambda a_i - \mu b_i$ olur. Benzer şekilde $Q = BC \cap B'C'$ noktasının koordinatları $\lambda a_i - \nu c_i$ ve $R = AC \cap A'C'$ noktasının koordinatları da $\mu b - \nu c_i$ olur.

Burada

$$(\lambda a_i - \mu b_i) + (\mu b_i - \nu c_i) = \lambda a_i - \nu c_i$$

eşitliği geçerli olup bu Q noktasının PR doğrusu üzerinde olduğunu yani, $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ üçgenlerinin bir eksenden perspektif olduğunu gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. ■

Özel olarak $\mathbb{R}$ reel koordinat düzlemi üzerine kurulan $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}$ rasyonel koordinat düzlemi üzerine kurulan $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$ düzlemleri Dezargseldir.

Tanım 4.1.5: Bir afin düzlemde noktalar için toplama işlemi: Herhangi bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzleminde bir $d \in \mathcal{D}$ ve $O \in d$ orijini seçilsin. d doğrusu üzerindeki A ve C noktalarının O noktasına göre toplamının bulunması için aşağıdaki sıra izlenir (Bennett 1995):

1. d doğrusu dışında bir B noktası seçilir.

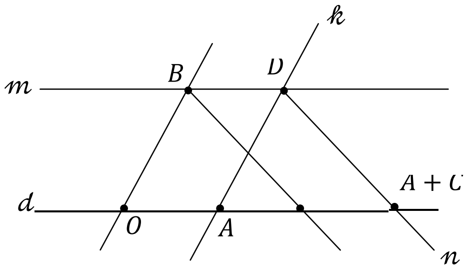
2. B noktasından geçen ve d doğrusuna paralel olan m doğrusu çizilir.

3. A noktasından geçen, OB doğrusuna paralel ya da eşit olan k doğrusu çizilir.

4. $D = m \cap k$ noktası bulunur.

5. D noktasından geçen, BC doğrusuna paralel ya da eşit olan n doğrusu çizilir.

6. $n \cap d$ noktası $A + C$ olarak tanımlanır (Şekil 4.1.4).



Şekil 4.1.4. A ve C noktalarının toplamı

Aşağıdaki iki teorem ve sonuç (Bennett 1995) ten alınmıştır.

Teorem 4.1.6: d doğrusu üzerindeki herhangi C noktası için $O + C =$ dir.

Teorem 4.1.7: d doğrusu üzerindeki herhangi A noktası için $A + O = A$ dır.

Sonuç 4.1.8: $O + O =$ dur.

Bir afin düzlemde koordinatlar toplamını tanımlamak için $O \in d$ orijini ve yardımcı nokta denilen $B \notin d$ şeklinde iki özel nokta seçilir. Dezarg Teoremi kullanılarak B noktasının seçimi ne olursa olsun, d doğrusu üzerindeki A ve C noktalarının O noktasına göre toplamının aynı olduğu aşağıdaki teoremde verilir (Bennett 1995).

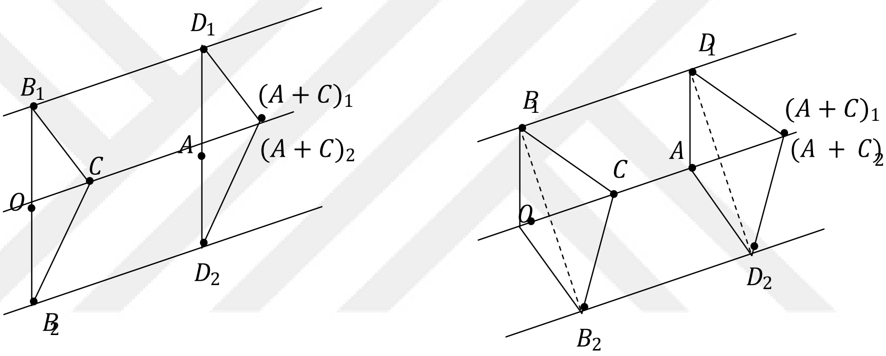
Teorem 4.1.9:
i. $A + C$ nin tanımı B noktasının seçiminden bağımsızdır.
ii. Her bir $A \in d$ noktası için $A + (-A) = (-A) + A = O$ olacak şekilde bir $(-A) \in d$ noktası vardır.
iii. A, C ve E noktaları d doğrusu üzerinde olsun. Bu takdirde
$(A + C) + E = A + (C + E)$ dir.

İspat: **i.** Farklı B_1 ve B_2 noktalarına göre A ile C noktalarının toplamı sırasıyla $(A + C)_1$

ve $(A + C)_2$ ile gösterilsin (Şekil 4.1.5). İki durum söz konusudur.

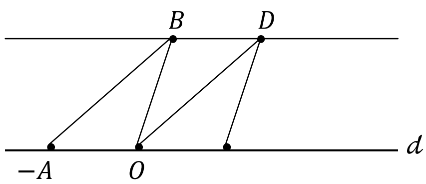
1. Durum: O, B_1 ve B_2 noktaları doğrudaş olsun. O zaman A, D_1 ve D_2 noktaları da doğrudaş olup $OB_1 \parallel AD_1$ dir. $\{B_1, B_2, C\}$ ve $\{D_1, D_2, (A + C)_1\}$ üçgenlerine Dezarg Teoremi uygulanırsa $B_2C \parallel D_2(A + C)_1$ sonucu elde edilir. Fakat $B_2C \parallel D_2(A + C)_2$ olduğunu biliyoruz. İki doğru en çok bir noktada kesiştiğinden $(A + C)_1 = (A + C)_2$ dir.

2. Durum: $B_2 \notin OB_1$ olsun. $\{B_1, O, B_2\}$ ve $\{D_1, A, D_2\}$ üçgenlerine Dezarg Teoremi uygulanırsa $B_1B_2 \parallel D_1D_2$ olduğu görülür. Dezarg Teoremini bu defa $\{B_1, B_2, C\}$ ve $\{D_1, D_2, (A + C)_1\}$ üçgenlerine uygulayarak $B_2C \parallel D_2(A + C)_1$ elde ederiz ki bu $(A + C)_1 = (A + C)_2$ sonucunu verir.



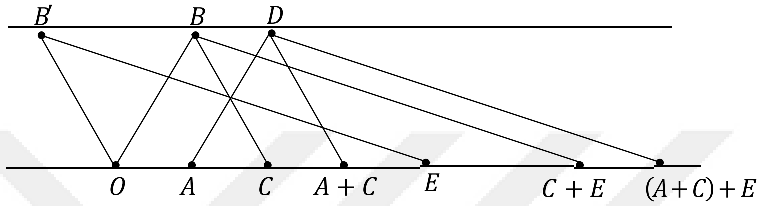
Şekil 4.1.5. $(A + C)_1 = (A + C)_2$

ii. d doğrusu dışında bir B noktası alınır ve $BD \parallel d$ ve $OB \parallel AD$ olacak şekilde D noktası bulunur. B noktasını bulunduran ve OD doğrusuna paralel olan doğru ile d doğrusunun arakesiti $(-A)$ noktasıdır. B ve D noktaları kullanılarak $A + (-A) = O$ olduğu ve D, B noktaları kullanılarak da $(-A) + A = O$ olduğu bulunur (Şekil 4.1.6).



Şekil 4.1.6. $A + (-A) = (-A) + A = O$

iii. İlk olarak $A + C$ toplamı B noktası kullanılarak bulunur. Bu takdirde $(A + C) + E$ toplamı B' noktası kullanılarak bulunur, burada D noktası ikinci yardımcı nokta olmak zorundadır. $B'E \parallel ((A+C)+E)$ elde edilir (Şekil 4.1.7). Daha sonra da $C + E$ toplamı B' ve B noktaları kullanılarak bulunur ve son olarak da $A + (C + E)$ toplamı B ve D noktaları kullanılarak bulunur. Buradan $(C + E) \parallel D(A + (C + E))$ elde edilir. $B'E \parallel (C + E)$ olduğundan paralellik aksiyomu $(A + C) + E$ ve $A + (C + E)$ toplamlarının aynı olduğunu ifade eder. ∎



Şekil 4.1.7. $(A + C) + E = A + (C + E)$

Aşağıdaki üç teorem (Bennett 1995) ten alınmıştır.

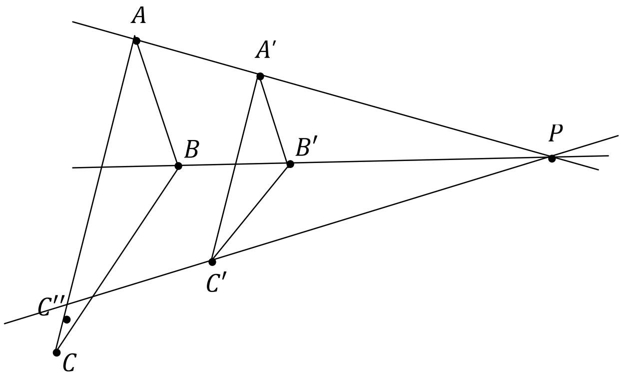
Teorem 4.1.10: Afin düzlemler için Dezarg Teoreminin karşıtı: Bir Dezargsel afin düzlemdeki $\{A, \ , \ C\}$ ve $\{A', \ B', \ C'\}$ üçgenleri için

$$AB \parallel A'B',\ AC \parallel A'C' \text{ ve } BC \parallel B'C'$$

olsun. Bu takdirde ya $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ ya da belli bir P noktası için $AA' \cap BB' \cap CC' = P$ dir.

İspat: A1, A2, A3 ve Dezarg Teoremi II kullanılarak ispat yapılacaktır, yani Dezarg Teoremi yerine yalnızca Dezarg Teoremi II yi kullanmak yeterli olacaktır. $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ ve $BC \parallel B'C'$ olsun. Eğer AA', BB' ve C' doğruların tümü paralel durumda değilse onların ikisi kesişmek zorundadır. $AA' \cap BB' = P$ olsun. $C'P \cap AC = C''$ olsun.
$BC'' \parallel B'C'$ nün elde edilmesi için A, B, C'' ve A', B', C' üçlüleri üzerinde Dezarg Teoremi II kullanılsın. B noktasından geçen, $B'C'$ doğrusuna paralel olan tek doğru BC

doğrusudur.

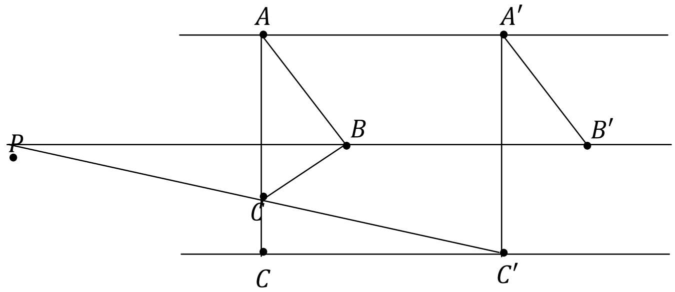


Şekil 4.1.8. $C = C''$

Bu doğru AC doğrusunu en çok bir noktada keser. Böylece $C = C^{''}$ ve $P \in CC^{'}$ olur (Şekil 4.1.8). ■

Teorem 4.1.11: Karşıtının geçerli olduğu herhangi bir afin düzlemde Dezarg Teoremi geçerlidir.

İspat: Dezarg Teoremi (I): A, B, C ve $A^{'}, B^{'}, C'$ doğrudaş olmayan nokta üçlüleri olup $AA' \parallel BB^{'} \parallel CC'$ olsun ve $AB \parallel A^{'}B^{'}$, $AC \parallel A^{'}C^{'}$ olarak kabul edilsin. $BC \parallel B^{'}C^{'}$ olduğu gösterilmelidir. Aksine BC ve $B'C'$ doğruları paralel olmasın. Bu takdirde $BC'' \parallel B'C'$ olacak şekilde $C'' \in AC$ noktası alınsın. Eğer $C \neq C''$ ise C' noktasından geçen ve BB' doğrusuna paralel olan tek doğru CC' olduğundan $^{''}C^{'} \cap BB^{'} = P$ noktası vardır (Şekil 4.1.9).



Şekil 4.1.9. $C = C''$

$AA^{'}$, BB' ve CC' doğrularının tümünün paralel ya da tümünün bir noktada kesiştiğinin gösterilmesi için A, B, C'' ve $A^{'}, B^{'}, C'$ üçlüleri üzerinde Dezarg Teoreminin karşıtı kullanılsın. İlk iki doğru paralel ve son iki doğrunun P noktasında kesişmesi bir çelişkidir, dolayısıyla $C = C''$ olur.

Dezarg Teoremi (II): A, B, C ve $A^{'}, B^{'}, C'$ doğrudaş olmayan nokta üçlüleri olup $AA^{'} \cap BB^{'} \cap CC^{'} = P$ olsun ve $AB \parallel A^{'}B^{'}$, $AC \parallel A^{'}C^{'}$ olarak kabul edilsin. $BC \parallel B^{'}C^{'}$ olduğu gösterilmelidir.

Aksine BC ve $B'C'$ doğruları paralel olmasın. Bu takdirde $BC'' \parallel B'C'$ olacak şekilde $C'' \in AC$ noktası alınsın. Eğer $C \neq C''$ ise P noktası $C''C'$ doğrusu üzerinde bulunmaz. $AA^{'}$, BB' ve CC' doğrularının tümünün paralel ya da tümünün bir noktada kesiştiğinin gösterilmesi için A, B, C'' ve $A^{'}, B^{'}, C'$ üçlüleri üzerinde Dezarg Teoreminin karşıtı kullanılsın. İlk iki doğrunun P noktasında kesiştiği kabul edilmişti, fakat P noktası üçüncü doğrunun üzerinde değildir, buradan bir çelişki elde edilir. ■

Teorem 4.1.12: Herhangi bir Dezargsel düzlemde bir doğru üzerindeki noktaların toplamı değişmelidir.

4.2. Çarpma İşlemi

Tanım 4.2.1: Bir afin düzlemde noktalar için çarpma işlemi: Bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in')$ Dezargsel afin düzleminde bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu ve d üzerinde bulunan farklı iki nokta O ve I olarak alınsın. d üzerindeki herhangi iki A ve C noktalarının, seçilen O ve I noktalarına göre çarpımının bulunması için aşağıdaki sıra takip edilir (Şekil 4.2.1) (Bennett 1995):

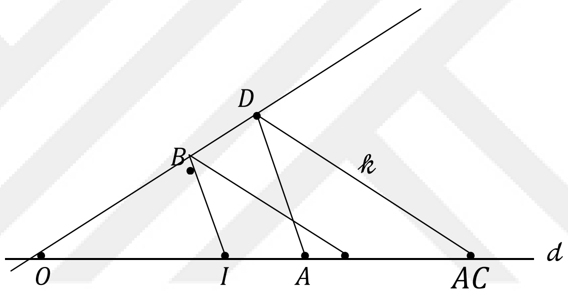
1. d doğrusunun dışında bir B noktası seçilir.

2. A noktasından geçen ve IB doğrusuna paralel ya da eşit olan m doğrusu çizilir.

3. $D = m \cap OB$ noktası bulunur.

4. D noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel ya da eşit olan k doğrusu çizilir.

5. AC çarpımı $k \cap d$ noktası olarak belirlenir.



Şekil 4.2.1. A ve C noktalarının çarpımı

Teorem 4.2.2: Bir Dezargsel afin düzleminde aşağıdaki özellikler geçerlidir (Bennett 1995):

i. d doğrusu üzerindeki herhangi bir A noktası için $AI = IA = A$ dır.

ii. d doğrusu üzerindeki herhangi bir A noktası için $AO = OA = O$ dur.

iii. Eğer $A \neq O$ ise $(A^{-1}) = (A^{-1})A = I$ olacak şekilde bir $(A^{-1}) \in d$ noktası vardır.

iv. AC noktasının tanımı çarpma tanımında verilen B noktasının seçiminden bağımsızdır.

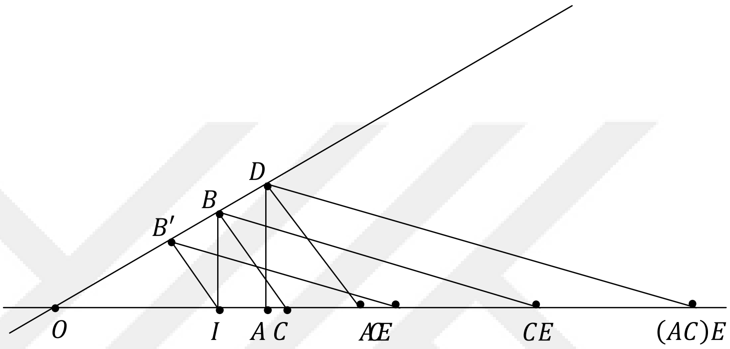
v. d doğrusu üzerindeki A, C ve E noktaları için $(AC)E = A(CE)$ dir.

İspat: Verilen önermelerin geçerli olduğu şekiller üzerinden kolayca görülebilir. Biz örnek olarak **ii** ve **v** şıklarının ispatını veriyoruz.

ii. AO çarpımı hesaplanırken tanımdaki dördüncü adımda bulunan doğrusu BO doğrusuna eşit olur ve böylece $AO = O$ dur. OA çarpımı bulunurken de tanımda geçen D

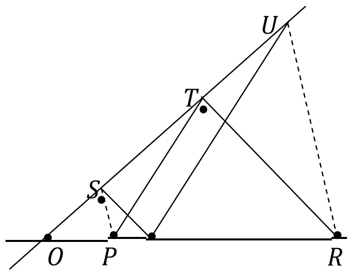
yardımcı noktası O noktasına eşittir, dolayısıyla da $OA = O$ bulunur. Yani $A = OA = O$ dur.

v. İlk olarak B ve D noktaları kullanılarak AC çarpımı hesaplanır. Sonra da (AC) çarpımı B' ve D noktaları kullanılarak hesaplanır ki $IB' \parallel (AC)D$ dir. B' ve B noktaları kullanılarak CE ve son olarak da B ve D noktaları kullanılarak $A(CE)$ çarpımı hesaplanır. Sonuç olarak $(CE) = (AC)E$ eşitliği elde edilir (Şekil 4.2.2). ■



Şekil 4.2.2. $(AC)E = A(CE)$

Teorem 4.2.3: Pappus Teoremi: $d \cap m = O$ olup $P, Q, R \in d$ ve $S, T, U \in m$ olmak üzere $PT \parallel QU$ ve $QS \parallel RT$ olsun. Bu takdirde $PS \parallel RU$ dur (Şekil 4.2.3) (Bennett 1995).



Şekil 4.2.3. Pappus Teoremi

Teorem 4.2.4: Pappus Teoreminin bir Dezargsel afin düzlemde geçerli olması için gerek ve yeter şart doğruları üzerindeki noktaların çarpımının değişmeli olmasıdır (Bennett 1995).

Teorem 4.2.2 den de anlaşılacağı gibi bir Dezargsel afin düzleminde noktası çarpma işleminde birim eleman özelliği, O noktası yutan eleman özelliği taşır. O noktasından farklı her elemanın çarpmaya göre tersi vardır. Ayrıca çarpma işlemi birleşmelidir. Ancak çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

Ayrıca bir Dezargsel afin düzlemindeki herhangi d doğrusu üzerindeki herhangi $A,\ C$ ve E noktaları için $(A+C)E=AE+CE$, $E(I+C)=E+EC$ dir ve bu ikisinin sonucun- da da $E(A+C)=EA+EC$ dir, yani çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği vardır.

Bir Dezargsel afin düzlemindeki doğrular üzerinde toplama işleminin değişmeli özellikte olduğu, her elemanın toplamaya göre tersinin olduğu ve O noktasının bu işleme göre etkisiz eleman rolünde olduğu gösterilmiştir.

Bir Dezargsel afin düzlemdeki bir doğru ve üzerindeki toplama, çarpma işlemleri düşünülürse bu doğrunun üzerindeki O ve I noktalarıyla (ki böyle iki nokta mutlaka vardır) birlikte ele alınırsa aslında bir bölümlü halka olduğu görülür. Sonraki bölümde bir afin düzlem bir bölümlü halkayla koordinatlanırken O ve I noktalarının sırasıyla $(0,\ 0)$ ve $(1,\ 0)$ noktalarına karşılık geleceği gösterilecektir.

Bu bilgileri aşağıdaki teorem ile özetleyebiliriz.

Teorem 4.2.5: Sentetik afin geometrinin temel teoremi: Bir Dezargsel afin düzlemde-ki herhangi bir doğru belirli O ve I ya bağlı koordinatlama ile bir bölümlü halka oluşturur. Bu yapıda toplama ve çarpma asosyatiftir ve etkisiz elemanlara sahiptir. Her elemanın toplamaya göre tersi vardır. Sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi vardır. Toplama değişmelidir ve çarpma toplama üzerine dağılma özelliklerine sahiptir.

5. AFİN DÜZLEMLERİN KOORDİNATLANMASI

Bu bölümdeki bilgiler (Bennett 1995) ten alınmıştır.

Burada herhangi bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası için $\mathcal{B}^2$ nin bir Dezargsel afin düzlem olduğu gösterilecek ve herhangi bir Dezargsel afin düzleminin belli bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası için $\mathcal{B}^2$ olarak düşünülebileceği gösterilecektir. Tahmin edileceği gibi $\mathcal{B}^2$ nin noktaları onun (x, y) vektörleridir ve onun doğruları da lineer denklemleri sağlar.

Burada skaler çarpanların vektörlerin solunda olduğu durum olan sol vektör uzayları kullanılacaktır. Dolayısıyla lineer denklemler katsayıları sağda olacak şekilde yazılacaktır.

5.1. Noktaların Koordinatlanması

Koordinatlamaya geçmeden önce ihtiyaç duyulan bazı teoremleri vereceğiz.

Teorem 5.1.1: $\mathcal{B}$ bir bölümlü halka olsun. $\mathcal{N} = \mathcal{B}^2$ ve bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu a, , $c \in \mathcal{B}$ ve a ile b aynı anda sıfır olmamak üzere $d = \{(x, y) \in \mathcal{B}^2 : xa + yb = c\}$ kümesi olarak tanımlansın. Bu takdirde $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ bir afin düzlemdir.

İspat: A1. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları $\mathcal{B}^2$ nin elemanları olsun. Bu noktaların sağladığı $xa + yb = c$ denklemindeki $a, b, c \in \mathcal{B}$ elemanları, a ve aynı anda sıfır olmayacak şekilde bulunmalıdır.

1. Durum: $x_1 = x_2$ olsun. Bu takdirde (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları $x = x_1$ denklemini sağlar. Bu ise reel koordinat düzlemindeki düşey doğruya karşılık gelir.

2. Durum: $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu takdirde bu noktadan geçen, $(= (x_2 - x_1)^{-1}(y_2 - y_1))$ sonlu eğimine sahip olan doğrunun denklemi $y = y_1 + (x - x_1)\lambda$ dır ve eksenleri $(0, y_1 - x_1\lambda)$ ile $(x_1 - y_1\lambda^{-1}, 0)$ noktalarında keser.

Bu doğrunun bir tek olduğunu göstermek için $y_1 \neq y_2$ olduğu kabul edilsin. Aşağıdaki denklemlerin bir tek çözüme sahip olduğu gösterilmelidir:

$$x_1 \quad + y_1 b =$$
$$x_2 \quad + y_2 b = c$$

İkinci denklem $-1 \in \mathcal{B}$ ile çarpılıp birinci denklemle toplanırsa

$$(x_1 \ - x_2) + (y_1 \ - y_2) = 0$$

bulunur. Böylece

$$= \ (y_1 \quad - y_2)^{-1}(x_2 \quad - x_1)$$

ve

$$c = {}_1 + y_1(y_1 - y_2)^{-1}(x_2 - x_1)$$

dir. Bu nedenle b ve c tek olarak belirlenir. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarının sağladığı diğer lineer denklemler $x + yb =$ denkleminin bir skaler katıdır. Eğer $y_1 = y_2$ ise $x_1 \neq x_2$ dir ve (x_1, y_1) ile (x_2, y_2) noktalarından geçen tek doğru denklemi $y = y_1$ dır.

A2. Aşağıdaki durumu inceledikten sonra paralellik aksiyomunu kanıtlamak kolaydır. $c \neq d$ olmak üzere $c, d \in \mathcal{B}$ için

$$xa + yb = c$$

ve

$$xa + yb = d$$

denklemli doğruların ortak noktası yoktur. (x_1, y_1) noktasının iki doğrunun da üzerinde olması $c = x_1 a + y_1 b = d$ olduğunu ifade eder ki bu da bir çelişkidir. Böylece $xa + yb = c$ doğrusu üzerinde olmayan (x_1, y_1) noktasından geçen doğrunun denklemi $xa + yb = x_1 a + y_1 b$ dir ve $xa + yb = c$ doğrusuna paraleldir. Bu doğru bir tektir.

A3. Bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkasının birbirinden farklı en az iki tane 0 ve 1 elemanları var olduğundan, $a \neq 0$ olmak üzere $xa + yb = c$ denklemiyle verilen doğrunu üzerinde

$(ca^{-1},\ 0)$ ve $((c-b)^{-1},\ 1)$ noktaları vardır. $x=0$ ve $x=1$ denklemli doğrular birbirinden farklıdır. Dolayısıyla en az iki doğru vardır. ■

Bu şekilde tanımlanan afin düzleme ***$\mathcal{B}$ üzerindeki afin düzlem*** denir ve $\mathbb{A}_2\mathcal{B}$ veya kısaca $\mathcal{B}^2$ ile gösterilir.

Dezarg Teoreminin $\mathcal{B}^2$ de geçerli olduğunu göstermek için aşağıdaki üç paralellik sonucuna gerek vardır:

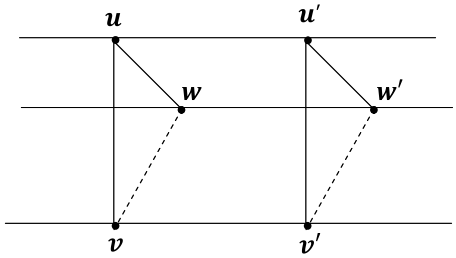
Teorem 5.1.2: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{B}^2$ için $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})$ nin bir paralelkenar olması için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ olmasıdır.

Teorem 5.1.3: $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ noktaları $\mathcal{B}^2$ de farklı, doğrudaş noktalar olsun. Bu takdirde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{z})$ olacak şekilde bir $t \in \mathcal{B}$ elemanı vardır.

Teorem 5.1.4: Eğer $\mathcal{B}^2$ de $\boldsymbol{uv} \parallel \boldsymbol{zw}$ ise bu takdirde $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}$ nin sıfırdan farklı bir katıdır. Tersine, eğer $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}$ doğrudaş değilse ve $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}$ nin sıfırdan farklı bir katı ise bu takdirde $\boldsymbol{uv} \parallel \boldsymbol{zw}$ dir.

Teorem 5.1.5: Dezarg Teoremi I: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{w}$ noktaları $\mathcal{B}^2$ de doğrudaş olmayan noktalar olsun. Bu takdirde, eğer $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v})$ ve $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})$ paralelkenar iseler $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})$ da bir paralelkenardır.

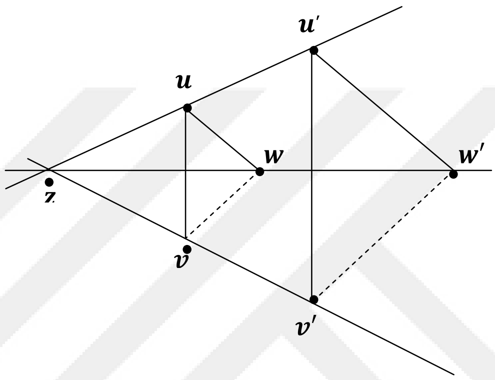
İspat: Teorem 5.1.2 den $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{u}$ dur (Şekil 5.1.1). Bu yüzden $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}' + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{w}' - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$ olur ve $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}', \boldsymbol{w})$ bir paralelkenardır. ■



Şekil 5.1.1. $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}',\ ', \boldsymbol{w})$ paralelkenarı

Teorem 5.1.6: Dezarg Teoremi II: $\boldsymbol{uu'} \cap \boldsymbol{vv'} \cap \boldsymbol{ww'} = \boldsymbol{z}$ olsun. Ayrıca $\boldsymbol{uv} \parallel \boldsymbol{u'v'}$ ve $\boldsymbol{uw} \parallel \boldsymbol{u'w'}$ olsun. Bu takdirde $\boldsymbol{vw} \parallel \boldsymbol{v'w'}$ dür.

İspat: Teorem 5.1.3 ten $\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{u})$ dur. Eğer $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{v})$ ise bu takdirde $\boldsymbol{x}$ noktası $\boldsymbol{vz}$ doğrusu üzerindedir ve Teorem 5.1.4 ten $\boldsymbol{uv} \parallel \boldsymbol{u'x}$ dir. Böylece $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v'}$ dür. Benzer şekilde $\boldsymbol{w'} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{w})$ dur. Fakat bu $\boldsymbol{w'} - \boldsymbol{v'} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{w} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{v}) = (1 - t)(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v})$ olduğunu ifade eder. Dolayı-sıyla $\boldsymbol{vw} \parallel \boldsymbol{v'w'}$ dür (Şekil 5.1.2). ■



Şekil 5.1.2. $\boldsymbol{vw}$ ve $\boldsymbol{v'w'}$ doğrularının

paralelliği Teorem 5.1.5 ve Teorem 5.1.6 aşağıdaki teoremi

gerektirir:

Teorem 5.1.7: Herhangi bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası için $\mathcal{B}$ üzerindeki afin düzlem Dezargseldir.

İspat: Teorem 5.1.5 ve Teorem 5.1.6 dan elde edilir. ■

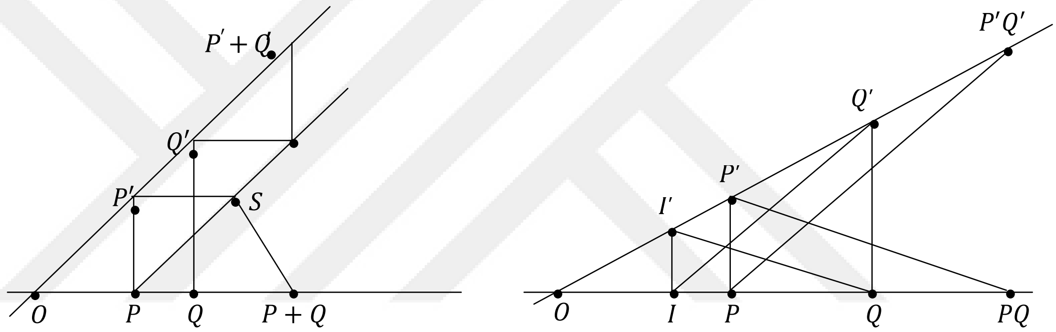
Şimdi $\mathcal{B}^2$ afin düzleminin noktalarının koordinatlanmasına geçebiliriz.

Koordinatlamanın ilk adımı olarak bir Dezargsel afin düzlemindeki herhangi iki doğrunun aynı kardinaliteye sahip olmalarının yanı sıra aslında bölümlü halkalar olarak izomorf oldukları gösterilebilir. Bu kısımda d doğrusu üzerinde toplamanın ve çarpmanın

etkisiz elemanları olarak farklı O ve I noktaları (yani farklı O lar ve I lar) seçildiğinden $(d, +, \times)$ halkasından ziyade (d, O, I) halkası demeyi tercih edeceğiz.

Teorem 5.1.8: $d = OI$ ve $m = O'I'$ doğruları bir Dezargsel afin düzlemde herhangi iki doğru olsun. Bu takdirde (d, O, I) ve $(m, O^{'}, I^{'})$ halkaları izomorftur.

İspat: 1.Durum: $d \cap m = O = O'$ olsun (Şekil 5.1.3). $\phi: d \longrightarrow m, (O) = O, \phi(I) = I'$ ve O ile I dan farklı X noktası için $\phi(X) = X'$ noktası, X noktasından geçen ve II' doğrusuna paralel olan doğru ile m doğrusunun arakesiti olsun. Bu nedenle X ve Y noktaları d doğrusu üzerindeki sıfırdan farklı noktalar olmak üzere $XX' \parallel YY'$ dür. Dönüşümün birebir ve örten olduğu kolayca görülebilir.



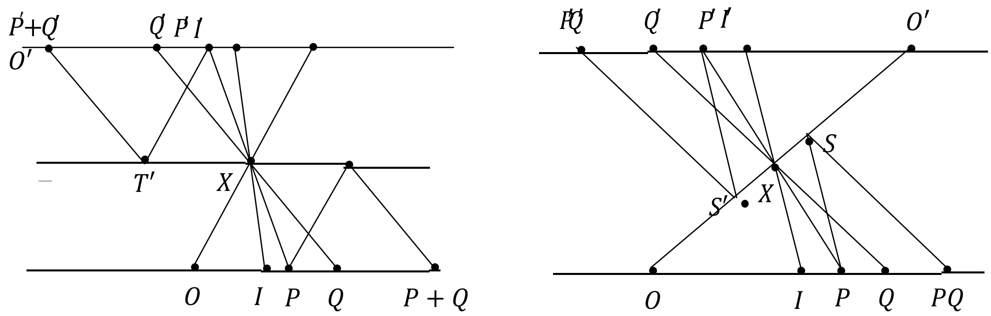
Şekil 5.1.3. $d \cap m = O = O'$ için $(d, O, I) \cong (m, O', I^{'})$ dür

ϕ nin toplama işlemini koruduğunu göstermek için d doğrusu üzerinde farklı P ve Q noktaları alınsın. P' noktası ile S noktası kullanılarak $P + Q$ toplamı ve P noktası ile T noktası kullanılarak $Q^{'} + P'$ toplamı hesaplanır. Bu toplamlardan $P'Q \parallel (P+Q)$ ve $PP' \parallel (Q^{'} + P^{'})$ olduğu bulunur. $(P + Q) \parallel Q'Q$ paralelliğini elde etmek için $\{T, S, P + Q\}$ ve $\{Q^{'}, P^{'}, Q\}$ üçgenleri için Dezarg Teoremi kullanılır. Burada $(Q^{'} + P^{'}) \parallel PP' \parallel QQ'$ dür. Bu da $P + Q, T$ ve $Q^{'} + P^{'} = P^{'} + Q'$ noktalarının doğrudaş olduğunu ve PP' doğrusuna paralel bir doğru üzerinde olduklarını ifade eder. Fakat $(P + Q)(P + Q)' \parallel PP'$ dür. Bu nedenle $(P + Q)^{'} = P^{'} + Q'$ olur ve dolayısıyla da toplama işlemi korunur.

ϕ nin çarpma işlemini koruduğunu göstermek için I' noktası ile P' noktası kullanılarak PQ çarpımı ve I noktası ile P noktası kullanılarak $P'Q'$ çarpımı hesaplansın. Şimdi Q noktası ile PQ noktası kullanılarak $P'Q'$ çarpımı hesaplansın. Bu takdirde $QQ' \parallel P(P'Q')$ olur ve buradan $P'Q' = (PQ)'$ dür yani çarpma işlemi korunur. ($P = Q$
iken de toplama ve çarpma işlemleri korunur.)

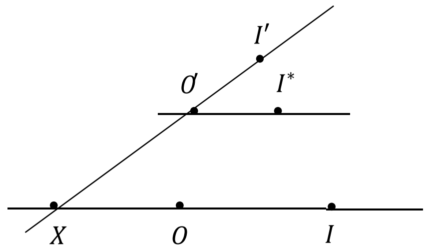
2. Durum: $d = m, O = O'$, $I \neq I'$ olsun. $k \neq d$ doğrusu O noktasından geçen herhangi bir doğru ve I^* noktası noktasından farklı k doğrusu üzerinde bir nokta olsun. 1. Durumdan $(d, O, I) \cong (k, O, I^*)$ ve $(k, O, I^*) \cong (d, O, ')$ olur. Bu nedenle $(d, , I) \cong (d, O, I')$ dür.

3. Durum: $d \parallel m$ olsun. Eğer gerekliyse farklı bir I' noktası seçilerek, $X = OO' \cap II'$ olsun. d doğrusu üzerindeki herhangi P noktası için $\phi(P) = P' = PX \cap m$ olarak tanımlansın. d üzerindeki fakl P ve Q noktaları için X noktası ile T noktası kullanılarak
$P + Q$ toplamı ve X noktası ile T' noktası kullanılarak $P' + Q'$ toplamı hesaplanır.
$P' + Q'$, X ve $P + Q$ noktalarının doğrudaş olduğunun bulunması için $\{P, T, P + Q\}$ ve
$\{P', T', P' + Q'\}$ üçgenleri üzerinde Dezarg Teoreminin karşıtı kullanılır. Buradan
$P' + Q' = (P + Q)'$ olur ve ϕ dönüşümü toplama işlemini korur. Çarpma işleminin korunduğunu göstermek için X noktası ile S noktası kullanılarak PQ çarpımı ve X noktası ile S' noktası kullanılarak $P'Q'$ çarpımı bulunur. PQ, X ve $P'Q'$ noktalarının doğrudaş olduğunun bulunması için $\{P, S, PQ\}$ ve $\{P', S', P'Q'\}$ üçgenleri üzerinde Dezarg Teoreminin karşıtı kullanılır ve $P'Q' = (PQ)'$ olduğu görülür. Böylece 3. Durumun ispatı tamamlanır (Şekil 5.1.4).



Şekil 5.1.4. $d \parallel m$ için $(d, O, I) \cong (m, O', I')$ dür

4. Durum: $d \cap m = X$, X noktası ya da O' noktasından farklı bir nokta olsun.
2. Durumdan X noktasının I ya da I' noktasından farklı olduğu kabul edilebilir. k doğrusu O' noktasından geçen ve d doğrusuna paralel olan doğru olsun. $I^* \neq O'$ noktası k doğrusu üzerinde bir nokta olsun. $(d, O, I) \cong (k, O', I^*) \cong (m, O', I')$ olur (Şekil 5.1.5). Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

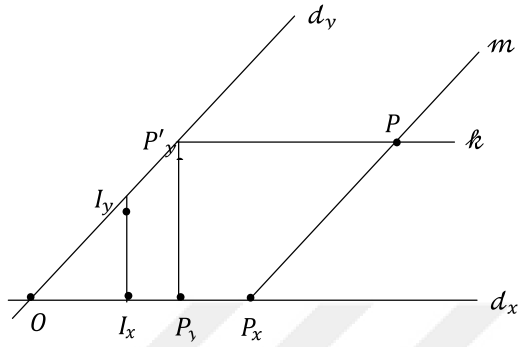


Şekil 5.1.5. $d \cap m = X$ için $(d, O, I) \cong (m, O', I')$ dür

Sıra bu bölümün esas sonucu olan Dezargsel afin düzlemlerin koordinatlanmasına geldi. Buradaki amaç her bir P noktasını bir bölümlü halkanın sıralı ikilileriyle belirlemek ve her bir d doğrusunu da aynı halka üzerindeki bir lineer denklemle belirlemektir.

Verilen bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzleminde d_x ve d_y denilen ve birbirine paralel olmayan iki sabit doğru seçilsin. $d_x \cap d_y = O$ olsun. I_x ile I_y sırasıyla d_x ve d_y doğruları üzerinde O noktasından farklı noktalar olsun. Teorem 5.1.8 in 1.Durumundan $(d_x, O, I_x) \cong (d_y, O, I_y)$ dir. Üstelik d_x doğrusu üzerindeki A noktasının resmi, d_y doğrusu üzerinde bulunan O ve I_y noktalarından farklı olup $AA' \parallel I_xI_y$ olacak şekildeki A' noktasıdır.

P, $\mathcal{N}$ kümesinden alınan bir nokta olsun. P noktasından geçen, d_y doğrusuna eşit ya da paralel olan doğru m ve $P_x = m \cap d_x$ olsun. P noktasından geçen ve d_x doğrusuna eşit ya da paralel olan doğru k olsun. $P_y = k \cap' d_y$ olsun. P'_y den geçen ve I_xI_y doğrusuna paralel olan doğrunun d_x doğrusunu kestiği nokta P_y ile gösterilsin. P_x ve P_y noktalarının d_x bölümlü halkasının elemanları olduğuna dikkat ediniz. d bölümlü halkasının elemanları kullanılarak P noktası (P_x, P_y) sıralı ikilisiyle yeniden adlandırılsın .$P \in d_x$ noktası için, m doğrusu P noktasından geçtiğinden $P_x = P$ ve k doğrusu d_x doğrusuna eşit olduğundan $k \cap d_y = O$ olur. Bu nedenle $P = (P, O)$ olur. Benzer şekilde her $Q' \in d_y$ noktası için $Q' = (O, Q)$ olur. Kartezyen koordinatlarla uyumlu olması için I_x, I_y noktalarına sırasıyla I, I' ve d_x, d_y doğrularına da sırasıyla x-ekseni, y-ekseni denilecektir (Şekil 5.1.6).



Şekil 5.1.6. x ve y-eksenleri

Yukarıdaki sonuçlar aşağıdaki teoremde özetlenebilir:

Teorem 5.1.9: Eksenleri $d_x = OI$ ve $d_y = OI'$ ($d_x, d_y \in \mathcal{D}$) olan herhangi bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$ Dezargsel afin düzlemi için $\mathcal{N}$ kümesinin noktaları $d_x \times d_x$ in sıralı ikilileriyle birebir eşlenir.

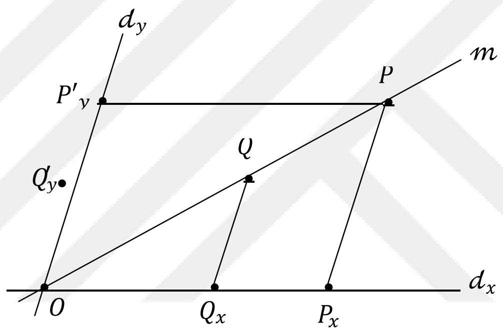
5.2. Lineer Denklemler

Önceki kısımdan $d_x \cap d_y = O, I \in d_x, I' \in d_y$ olmak üzere O, I ve I' noktalarının koordinatlarının sırasıyla (O, O), (I, O) ve (O, I) olduğu açıktır. d_x doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta (P, O) şeklindedir, bu yüzden d_x üzerindeki her nokta $y = O$ denklemini sağlar. Benzer şekilde d_y doğrusunun denklemi $x = O$ dur. Eğer bir doğru d_x doğrusuna paralel ise bu doğrunun noktalarının ikinci bileşenleri aynıdır, bu yüzden bu doğru d_x üzerindeki belli bir Q noktası için $y = Q$ denklemini sağlar. Benzer şekilde $_y$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemi $P \in d_x$ olmak üzere $x = P$ şeklindedir.

Her bir doğru üzerindeki noktaların, katsayıları d_x doğrusunun noktaları ile oluşturulan bir lineer denklemi sağladığını göstermek için aşağıdaki ön geometrik sonucuna ihtiyaç vardır.

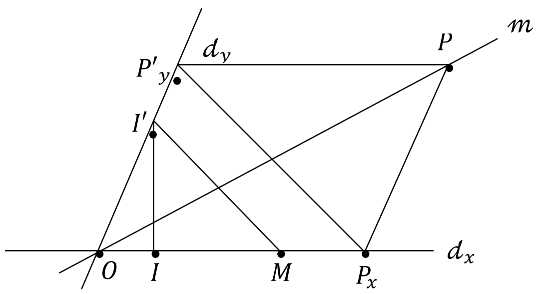
Teorem 5.2.1: $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ bir Dezargsel afin düzlem ve d_x, d_y doğruları da yukarıda tanımlandığı gibi olsun. m doğrusu O noktasından geçen fakat d_x ve d_y doğrularından farklı bir doğru olsun. Bu takdirde doğrusu üzerindeki herhangi bir $P=(P_x, P_y)$ ve $= (Q_x, Q_y)$ farklı nokta ikilileri için $P'_yP_x \parallel Q'_yQ_x$ tir.

İspat: P, P'_y, P_x ve Q, Q'_y, Q_x üçgenlerinde $P'_yP \parallel Q'_yQ$ ve $PP_x \parallel QQ$ olduğundan Dezarg Teoremi gereği $P'_yP_x \parallel Q'_yQ_x$ tir (Şekil 5.2.1). ■



Şekil 5.2.1. $P'_yP_x \parallel Q'_yQ_x$

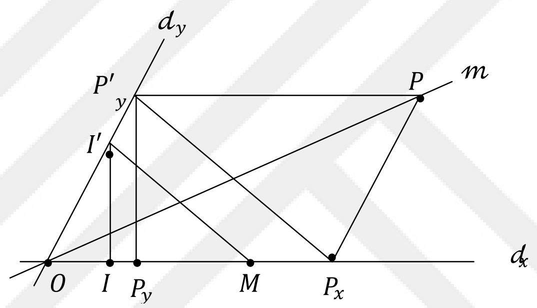
Teorem 5.2.1 den, Şekil 5.2.2 de gösterildiği gibi O noktasından geçen fakat d_x ve d_y doğrularından farklı herhangi bir m doğrusu d_x doğrusu üzerindeki öyle bir M noktası ile ilişkilendirilebilir ki m doğrusu üzerindeki O noktasından farklı herhangi bir (P_x, P_y) noktası için $I'M$ doğrusu P'_yP_x doğrusuna paralel ya da eşit olur.



Şekil 5.2.2. $I'M \parallel P'_yP_x$

Teorem 5.2.2: m doğrusu O noktasından geçen fakat d_x, d_y doğrularından farklı bir doğru olsun. d_x doğrusu üzerindeki M noktası, m doğrusu üzerindeki her $P = (P_x, P_y)$ noktası için $I'M \parallel P'_y P_x$ özelliğinde olsun. Bu takdirde m doğrusu üzerindeki her bir nokta $x = yM$ denklemini sağlar.

İspat: $P = (P_x, P_y) \in m$ noktası O noktasından farklı bir nokta olsun. (Şekil 5.2.3) te gösterildiği gibi I' ve P'_y yardımcı noktaları kullanılarak $P_y M$ çarpımı bulunur. $P'_y P_x$ doğrusu $I'M$ doğrusuna paralel ya da eşit olduğundan $P_x = P_y M$ olduğu görülür. Herhangi bir M noktası için $O = OM$ olduğundan ve dolayısıyla $O = (O, O)$ noktası $P_x = P_y M$ denklemini sağladığından m doğrusu üzerindeki her nokta bu denklemi sağlar. ■

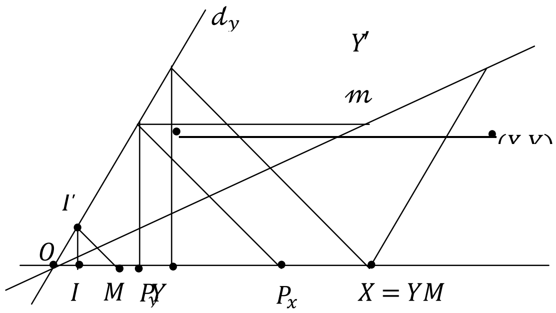


Şekil 5.2.3. $P_x \quad = \ P_y M$

Teorem 5.2.3: Eğer m doğrusu ve M noktası Teorem 5.2.2 de tanımlanan şekilde ise bu takdirde $\mathcal{N}$ kümesindeki $X = YM$ özelliğindeki herhangi bir (X, Y) noktası için $(X, Y) \in m$ dir.

İspat: (P_x, P_y) noktası m doğrusu üzerinde O noktasından farklı bir nokta olsun. Eğer $(P_x, P_y) = (X, Y)$ ise (X, Y) noktası m doğrusu üzerindedir ve ispat tamamdır. Aksi halde I' ve P'_y noktaları kullanılarak yapılan YM çarpımı $I'M$ doğrusunun $Y'X$ doğrusuna paralel ya da eşit olduğunu verir, bu nedenle $I'M \parallel P'_y P_x$ dir. Dezarg Teoreminin karşıtı gereği Y', (X, Y), X ve P'_y, P, P_x üçgenleri için $Y'P'_y$, (X, Y) ve XP_x doğruları ya paraleldir ya da bir noktada kesişirler. Birinci ve üçüncü doğrular O noktasında kesiştiğinden $(X, Y)P$ doğrusu da O noktasından geçmek zorundadır. Bu yüzden bu doğru P ve O noktalarını bulunduran doğruya eşittir, yani $\mathscr{m}$ doğrusudur (Şekil 5.2.4).

■

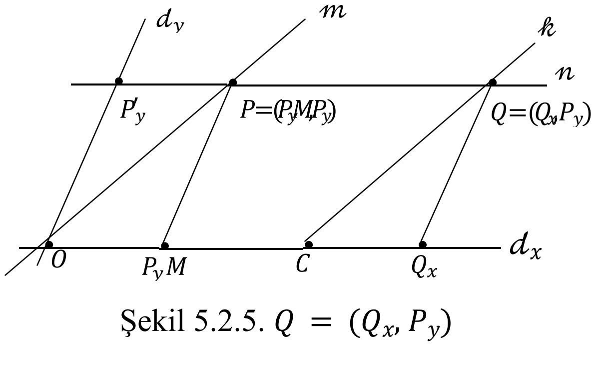


Şekil 5.2.4. P ve O noktalarından geçen doğru $\mathscr{m}$ doğrusudur

Teorem 5.2.4: $\mathscr{k} \in$ doğrusu O noktasından geçmeyen ve $\mathcal{D}$ kümesinin d_x ile d_y doğrularına paralel olmayan bir doğrusu olsun. $\mathscr{k}$ doğrusu d_x doğrusunu C noktasında kessin. $\mathscr{m}$ doğrusu da O noktasından geçen ve $\mathscr{k}$ doğrusuna paralel olan bir doğru olsun. Bu takdirde eğer $\mathscr{m}$ doğrusu $x = yM$ denklemini sağlarsa $\mathscr{k}$ doğrusu da $x = yM + C$ denklemini sağlar.

İspat: Q noktası $\mathscr{k}$ doğrusu üzerinde C noktasından farklı bir nokta ve $\mathscr{n}$ doğrusu da Q noktasından geçen ve aynı zamanda d_x doğrusuna paralel olan doğru olsun. $\mathscr{n} \cap \mathscr{m} = P = (P_yM, P_y)$ olsun. Bu takdirde (Şekil 5.2.5) te gösterildiği gibi Q noktasının koordinatları (Q_x, P_y) dir. P ve Q noktaları kullanılarak $C + P_yM$ toplamı bulunur. $(P_yM) \parallel d_y \parallel QQ_x$ olduğundan $Q_x = C + P_yM$ dir. Böylece toplama işlemi değişmeli olduğundan $Q = (Q_x, P_y)$ noktası $x = C + yM = yM + C$ denklemini sağlar.

$\mathscr{k}$ doğrusu üzerindeki (X, Y) koordinatlı herhangi bir nokta $x = yM + C$ denklemini sağlar. ■



Şekil 5.2.5. $Q = (Q_x, P_y)$

Doğrular hakkındaki bu sonuçlar aşağıdaki teoremde özetlenebilir:

Teorem 5.2.5: $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ bir Dezargsel afin düzlem, d_x ve d_y doğruları da seçilen eksenler olsun. Bu takdirde

i. d_x doğrusunun denklemi $y = O$,

ii. d_y doğrusunun denklemi $x = O$,

iii. Eğer $O \in m$ ise m doğrusunun denklemi $x = yM$,

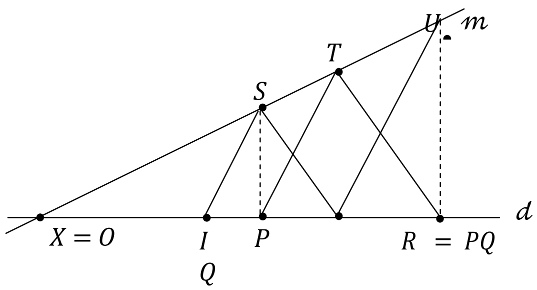
iv. Eğer $k \parallel m$ ve $k \cap d_x = C$ ise k doğrusunun denklemi $x = yM + C$ dir.

5.3. Pappus Teoremi

Eğer bir afin düzlemde Pappus Teeoremi geçerli ise bu takdirde bu düzlemin herhangi bir doğrusu üzerindeki koordinatların çarpımının değişmeli olduğunu hatırlayınız. Şimdi bu sonucun tersi koordinatlamaya dayalı olarak ispatlanabilir.

Teorem 5.3.1: $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası üzerindeki afin düzlem olsun. Bu takdirde Pappus Teoreminin $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzleminde geçerli olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{B}$ bölümlü halkasının bir cisim olmasıdır.

İspat: Burada yalnızca $\mathcal{B}$ üzerinde çarpma işlemi değişmeli iken Pappus Teoreminin geçerli olduğunu göstermeye ihtiyaç vardır. $d \cap m = X$ ve $P,\ Q,\ R$ noktaları d doğrusu üzerinde, S, T, U noktaları m doğrusu üzerinde kabul edilsin. $PT \parallel QU$ ve $QS \parallel RT$ olsun. $PS \parallel RU$ olduğu gösterilmelidir. Tüm doğrular bölümlü halka olarak izomorf olduklarından d doğrusu üzerindeki I noktası $IS \parallel PT$ olacak şekilde seçilebilir ve X noktası da O noktası üzerinde olacak şekilde seçilebilir (Şekil 5.3.1).

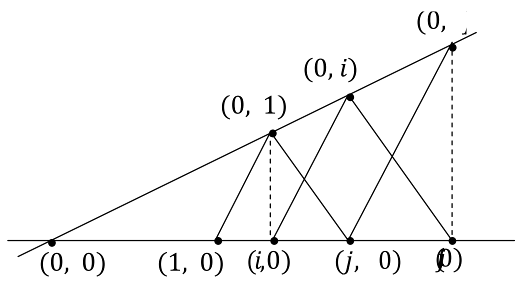


Şekil 5.3.1. $PS \parallel RU$

d doğrusu üzerinde çarpma işlemi değişmeli olduğundan $(d, O, I) \cong \mathcal{B}$ dir. Ama S ve T noktaları kullanılarak hesaplanan PQ çarpımı R noktasına eşittir, bu yüzden QP noktası R noktasına eşittir. Bu nedenle $PS \parallel RU$ dur. ■

Pappus Teoreminin geçersiz olduğu bir afin düzlem örneği vermek mümkündür. Wedderburn Teoremi gereği her ***sonlu*** bölümlü halka bir cisimdir, bu yüzden Pappus Teoremi tüm sonlu Dezargsel afin düzlemlerde geçerlidir. Ancak
$H = \{a + bi + cj + dk\colon a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$ kuaterniyonlar bölümlü halkasının değişmeli olmadığı biliniyor. Burada $a + bi + cj + dk$ elemanları için $i^2 = j^2 = k^2 = -1$,
$ij = -ji = k, jk = -kj = i$ ve $ki = -ik = j$ dir.

$(\mathcal{N},\ )$, kuaterniyonlar üzerindeki afin düzlem olsun. Değişmeli olmayan bir kuaterniyon çifti bulmak kolaydır, örneğin $ij \neq ji$ dir. $P = (i, 0)$, $Q = (j, 0)$,
$O = (0, 0), I = (1, 0), S = (0, 1), T = (0, i), U = (0, j)$ ve $R = (ij, 0)$ olsun. Bu takdirde H kümesi üzerine kurulan bu afin düzlemde, (Şekil 5.3.2) de gösterilen $(0, 1)(i, 0)$ ve $(0,\ j)(ij,\ 0)$ doğruları paralel olamaz; aksi halde R noktası $(ji,\ 0)$ noktasına eşit olurdu ki bu da bir çelişkidir.



Şekil 5.3.2. $(0, 1)(i, 0) \nparallel (0, i)(ij, 0)$

6. PROJEKTİF DÜZLEMLERİN KOORDİNATLANMASI

Bu bölümde bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası üzerine kurulan projektif düzlemler incelenecektir.

6.1. Projektif Düzlemlerin Koordinatlanması

Bu kısımda bir projektif düzlemin homojen koordinatlanması ele alınacaktır.

Bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası için $\mathcal{B}^3$ ün sıfırdan farklı vektörleri üzerinde $\sim$ bağıntısı, "$(p, q, r) \sim (s, t, u)$ olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı belli bir $m \in \mathcal{B}$ elemanı için $(p, q, r) = m(s, t, u)$ olmasıdır." şeklinde tanımlansın. Bu denklik bağıntısının her bir denklik sınıfı bir projektif nokta olarak adlandırılsın. Bir (p, q, r) vektörünün temsil ettiği $< p, q, r >$ noktası üç durumda olabilir. $r \neq 0$ ise nokta
$< p, q, 1 >$ olarak, $r = 0$ ve $q \neq 0$ ise nokta $< p, 1, 0 >$ olarak, $r = q = 0$ ise nokta
$< 1, 0, 0 >$ olarak alınabilir. Böylece $\mathcal{N}'$ noktalar kümesi
$\mathcal{N}' = \{< p, q, 1 > : p, q \in \mathcal{B}\} \cup \{< p, 1, 0 > : p \in \mathcal{B}\} \cup \{< 1, 0, 0 >\}$ biçimindedir.
Noktaların bu şekildeki temsiline ***standart formda*** temsil denir. Benzer durum doğrular için de söz konusu olup bir $[a, b, c]$ doğrusu $a \neq 0$ ise $[1, b, c]$ olarak,
$a = 0, b \neq 0$ ise $[0, 1, c]$ olarak ve $a = b = 0$ ise $[0, 0, 1]$ olarak alınabilir. Bu gösterimlere doğrunun ***standart formu*** denir. Böylece
$\mathcal{D}' = \{[1, b, c] : b, c \in \mathcal{B}\} \cup \{[0, 1, c] : c \in \mathcal{B}\} \cup \{[0, 0, 1]\}$ olur. Bu şekilde oluşturulan $(\mathcal{N}', \mathcal{D}')$ geometrik yapısında bir $< x, y, z >$ noktasının bir $[a, b, c]$ doğrusu üzerinde bulunması

$$< x, y, z > \in {}'[a, b, c] \Leftrightarrow xa + yb + zc = 0$$

şeklinde tanımlanırsa elde edilen projektif düzlem $\mathbb{P}_2\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ile gösterilir.

Teorem 6.1.1: $\mathcal{B}$ bir bölümlü halka olmak üzere,
i. $\mathcal{B}^3$ te projektif noktalar

$$\{< p, q, 1 > : p, q \in \mathcal{B}\} \cup \{< p, 1, 0 > : p \in \mathcal{B}\} \cup \{< 1, 0, 0 >\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

ii. Her homojen lineer denklem $x + yb + zc = 0, y + zc = 0$ ya da $z = 0$ biçimindeki denklemlerden birine denktir.

Tanım 6.1.2: $\mathcal{B}$ bir bölümlü halka olmak üzere sıfırdan farklı belli bir $m \in \mathcal{B}$ için $xa+yb+zc=0$ ve $xam+ybm+zcm=0$ şeklindeki iki homojen lineer denkleme ***denk denklemler*** denir.

Buradan nokta ve doğrular arasındaki benzerlik hemen göze çarpmaktadır. Bir projektif düzlemde noktalar ve doğrular arasında çok yakın ilişki söz konusudur. Bu ilişkiyi bir tanım ve bir teorem ile netleştirelim.

Tanım 6.1.3: S bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. S de "nokta" sözcüğü yerine "doğru", "doğru" sözcüğü yerine de "nokta" sözcüğünü koyarak bulunan yeni ifadeye S nin ***dual ifadesi*** denir (Kaya 1992).

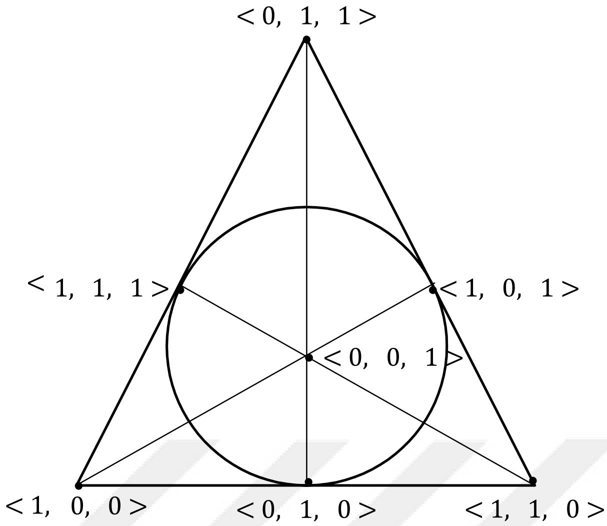
Teorem 6.1.4: Bir projektif düzlemde L1, L2, P2 ve P3 aksiyomlarının dualleri geçerlidir (Batten 1986).

Bu teorem gereği bir projektif düzlemde noktalar veya doğrulardan birisi için geçerli olan bir ifade diğeri için de geçerlidir. Dolayısıyla herhangi birini incelemek yeterlidir. Bu da işlemleri yarı yarıya azaltır.

Noktalar $< p, q, r >$ nin denklik sınıfı olarak ve doğrular da homojen lineer denklemleri sağlayan noktalar topluluğu olarak alınırsa bir projektif düzlem elde edilir. Tersine her Dezargsel afin düzlemin bu şekilde koordinatlanabileceği de gösterilecektir.

Teorem 6.1.5: Bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası verilsin. $\mathcal{N}' = \{< p, q, r >: (p, q, r) \in \mathcal{B}^3, (p,q,r) \neq (0, 0, 0)\}$ ve $\mathcal{D}'$ ise $\forall d' \; xa+yb+zc=0$ denklemini sağlayan $< p, q, r >$ noktalar kümesi olmak üzere tüm d' doğrularının kümesi olarak tanımlansın. Bu takdirde $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in ')$ bir projektif düzlemdir (Bennett 1995).

Örnek 6.1.6: $\mathbb{Z}$ üzerindeki projektif düzlem: Bu düzlem Fano düzlemiyle aynıdır ve (Şekil 6.1.1) deki gibi işaretlenmiştir.



Şekil 6.1.1. Fano düzleminin koordinatları

Bu düzlemin doğrular kümesi $\mathcal{D}' = \{[1, 1, 1], [1, 1, 0], [1, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ olup bu doğrular $x + y + z = 0$, $x + y = 0$, $x + z = 0$, $y + z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ ve $z = 0$ denklemleri ile temsil edilir. Bu doğruların noktaları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
[1, 1, 1] &= \{<0, 1, 1>, <1, 0, 1>, <1, 1, 0>\} \\
[1, 1, 0] &= \{<1, 1, 1>, <0, 0, 1>, <1, 1, 0>\} \\
[1, 0, 1] &= \{<1, 0, 1>, <1, 1, 1>, <0, 1, 0>\} \\
[0, 1, 1] &= \{<1, 1, 1>, <0, 1, 1>, <1, 0, 0>\} \\
[1, 0, 0] &= \{<0, 1, 1>, <0, 1, 0>, <0, 0, 1>\} \\
[0, 1, 0] &= \{<0, 0, 1>, <1, 0, 0>, <1, 0, 1>\} \\
[0, 0, 1] &= \{<0, 1, 0>, <1, 1, 0>, <1, 0, 0>\}
\end{aligned}$$

Örnek 6.1.7: $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki projektif düzlem: $p, q \in \mathbb{Z}_3$ olmak üzere bu düzlemin noktalarının dokuz tanesi $<p, q, 1>$ in denklik sınıfındaki $<2, 2, 1>$, $<2, 1, 1>$, $<2, 0, 1>$, $<1, 2, 1>$, $<1, 1, 1>$, $<1, 0, 1>$, $<0, 2, 1>$, $<0, 1, 1>$, $<0, 0, 1>$ noktalarıdır, üç tanesi $<p, 1, 0>$ ın denklik sınıfındaki $<2, 1, 0>$, $<1, 1, 0>$, $<0, 1, 0>$ noktalarıdır ve bir tanesi de $<1, 0, 0>$ noktasıdır.

Düzlemin doğruları ise $b, c \in \mathbb{Z}_3$ olmak üzere $x+by+cz=0, y+cz=0$ ve $z=0$ denklemlerini sağlayan $[1, 2, 2]$, $[1, 2, 1]$, $[1, 2, 0]$, $[1, 1, 2]$, $[1, 1, 1]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 0, 2]$, $[1, 0, 1]$, $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 2]$, $[0, 1, 1]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ doğrularıdır. $\mathbb{Z}_3$ bir cisim olduğundan denklemlerin katsayılarının solda olacak şekilde yazılabildiğine dikkat ediniz.

Aşağıdaki bilgiler büyük oranda (Bennett 1995) ten alınmıştır.

Dezargsel Projektif Düzlemlerin Koordinatlanması

Daha önceden tanımlanan Dezargsel afin düzlemlerin koordinatlanması, Dezargsel projektif düzlemlerin koordinatlanmasına genişletilebilir. İlk olarak bir Dezargsel projektif düzlemden sonsuzdaki doğrunun çıkarılması sonucunda kalan yapının bir Dezargsel afin düzlem olduğu gösterilebilir.

Teorem 6.1.8: $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ bir Dezargsel projektif düzlem olsun. Bir doğru sonsuzdaki d_∞ doğrusu olarak seçilsin ve $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzleminin elde edilmesi için $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ yapısından bu doğru çıkarılsın. Bu takdirde $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ afin düzlemi Dezargseldir.

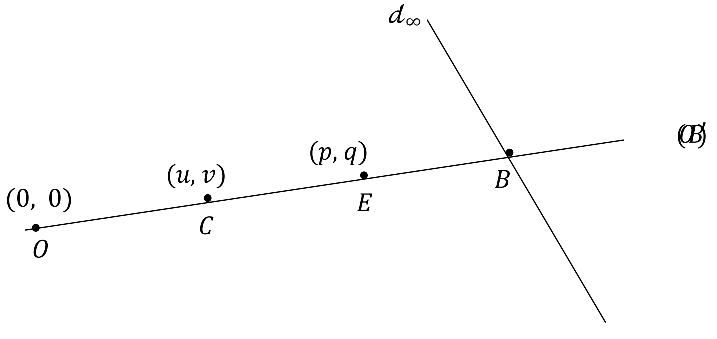
İspat: Teorem 4.1.10 ve Teorem 4.1.11 gereği yalnızca $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ düzleminde Dezarg Teoremi II nin geçerli olduğunu göstermek yeterlidir. A, B, C ve A', B', C' doğrudaş olmayan noktalar olmak üzere $AA' \cap BB' \cap CC' = P, AB \parallel A'B'$ ve $AC \parallel A'C'$ olsun. Bu takdirde $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ düzleminde $(AA')' \cap (BB')' \cap (CC')' = P$ dir. Dolayısıyla ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri bir noktadan perspektiftir. Bu yüzden onlar bir m' doğrusundan perspektiftir. Fakat $(AB)' \cap (A'B')' \in d_\infty$ ve $(AC)' \cap (A'C')' \in d_\infty$ olduğundan $m' = d_\infty$ dur. Bu da $(BC)' \cap (B'C')' \in d_\infty$ olduğunu ifade eder. Dolayısıyla $BC \parallel B'C'$ dür. ■

Noktaların Koordinatlanması

Bir $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ Dezarg projektif düzlemi verilsin ve d_∞ doğrusu seçilsin. $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ Dezarg afin düzleminin elde edilmesi için $(\mathcal{N}', \mathcal{D}')$ düzleminden d_∞ doğrusu çıkarılsın. Şimdi $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cup d_\infty$ dur. $(\mathcal{N}, \mathcal{D})$ düzleminin doğruları $xa + yb + c = 0$ şeklindeki lineer denklemleri sağlarken, noktaları da bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkasının elemanlarından alınarak oluşturulan (x, y) sıralı ikilileri şeklinde temsil edilebilir. $A \in \mathcal{N}'$ olsun. Eğer $A \in \mathcal{N}$ ise belli bir $x, y \in \mathcal{B}$ elemanları için $A = (x, y)$ dir. A noktasının ***homojen koordinatları*** $< x, y, 1 >$ olarak tanımlanır. Özellikle de $O \in \mathcal{N}$ orijin noktasının homojen koordinatları $< 0, 0, 1 >$, $I =< 1, 0, 1 >$ ve $I' =< 0, 1, 1 >$ dir. Eğer $B \in d_\infty$ ise $OB \in \mathcal{D}'$ olmak üzere herhangi bir üçüncü $C \in OB$ noktası seçilir. Bu takdir- de $C \in \mathcal{N}$ dir. Dolayısıyla belli bir $u, v \in \mathcal{B}$ elemanları için $C = (u, v)$ dir. B noktasının koordinatları da $< u, v, 0 >$ dır.

Teorem 6.1.9: $B \in d_\infty$ noktasının koordinatlanması $C \in OB$ noktasının seçimine bağlı değildir (Şekil 6.1.2).

İspat: E noktası $(OB)'$ doğrusu üzerindeki dördüncü bir nokta olsun. Bu takdirde $E \in \mathcal{N}$ dir ve bir afin nokta olarak koordinatları (p, q) dur. O, E ve C afin noktaları doğrudaş, farklı olduklarından ve $O = (0, 0)$ olduğundan E noktası C noktasının sıfırdan farklı bir katıdır. Dolayısıyla $\mathcal{B}$ bir bölümlü halka olmak üzere sıfırdan farklı bir $m \in \mathcal{B}$ elemanı için $(p, q) = (mu, mv)$ dir. Bu nedenle $< p, q, 0 >=< mu, mv, 0 >=< u, v, 0 >$ dır ve böylece B noktasının homojen koordinatlarının C veya E noktasına bağlı olmadan tanımlanmış olduğu görülür. ■



Şekil 6.1.2. B nin koordinatlanması C nin seçiminden bağımsızdır

Doğruların Koordinatlanması

Yukarıda projektif noktaların koordinatlanmasında d_∞ doğrusu üzerindeki her bir noktanın üçüncü koordinatı 0 iken $\mathcal{N}$ kümesindeki her bir noktanın üçüncü koordinatı 1 dir. Bu yüzden d_∞ doğrusu $z = 0$ homojen denklemini sağlar.

Eğer $d' \neq d_\infty$ ise bu takdirde d' doğrusundan üzerindeki sonsuz noktası çıkarılarak elde edilen d doğrusu bir afin doğrudur ve bir $xa + yb + c = 0$ denklemini sağlar. Böylece herhangi bir $A = (p, q) \in d$ noktası için $pa + qb + c = 0$ dır. Bu yüzden de $pa + qb + 1c = 0$ dır ve $< p, q, 1 >$ noktası

$$xa+yb+zc=0 \tag{6.1}$$

denklemini sağlar.

$B = d' \cap d_\infty$ olsun. Bu durumda d afin doğrusunun paralel olduğu ve orijinden geçen $xa + yb = 0$ denklemli bir tek m doğrusu vardır. Bu yüzden $B \in m'$ dür, dolayısıyla (u, v) noktası m doğrusu üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere B noktasının projektif koordinatları $< u, v, 0 >$ dır. Dolayısıyla herhangi bir $c \in \mathcal{B}$ elemanı için
$ua + vb + 0c = 0$ dır ve B noktası (6.1) denklemini sağlar. Bu yüzden d' doğrusu üzerindeki her nokta (6.1) denklemini sağlar.

Eğer B noktası diğer bir k' doğrusu üzerinde ise $k \parallel d$ olduğundan belli bir $t \in \mathcal{B}$ için k doğrusunun denklemi $xa + yb + t = 0$ dır. Bu yüzden $0 = ua + vb = ua + vb + 0t$ dir ve $< u, v, 0 >$ noktası $xa + yb + zt = 0$ denklemini sağlar.

Tersine $xa + yb + zc = 0$ denklemi bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası üzerinde herhangi bir homojen lineer denklem olsun. Bu takdirde $a = b = 0$ ise bu denklem d_∞ doğrusunun denklemidir; aksi takdirde $xa + yb + c = 0$ denklemi $\mathcal{D}$ kümesindeki herhangi bir d doğrusunun denklemidir, bu yüzden $xa + yb + zc = 0$ denklemi $\mathcal{D}'$ kümesindeki d' doğrusunun denklemidir.

Bu sonuçlar aşağıdaki teoremde özetlenebilir:

Teorem 6.1.10: $(\mathcal{N}^{'}, \mathcal{D}^{'}, \in')$ yapısının noktaları ve doğruları bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası üzerindeki projektif koordinat düzleminin noktaları ve doğruları ile birebir eşlenir. Ayrıca
$A \in d'$ olması için gerek ve yeter şart A noktasının homojen koordinatları olan $< p, q, r >$ nin d' doğrusunun homojen lineer denklemini sağlamasıdır.

6.2. Homojen Olmayan Koordinatlama

Bir Dezarg düzleminin bir bölümlü halka ile homojen olarak koordinatlanabileceğini gördük. Dezargsel olmayan birçok projektif düzlem mevcuttur. Dezargsel olmayanlar da dahil projektif düzlemler için homojen olmayan tarzda koordinatlamalar yapılabilmektedir. Bunlar için bölümlü halkadan farklı olan cebir yapılarına da ihtiyaç duyulmaktadır. Bu cebir yapılarının genel adı üçlü halkadır. Bu koordinatlamalara hazırlık olarak bazı tanım ve önermelere ihtiyaç vardır.

Burada verilen bilgiler için büyük oranda (Stevenson 1972) esas alınmıştır.

Tanım 6.2.1: R, 0 ve 1 ile gösterilen farklı iki elemanı da kapsayan bir küme, t R kümesi üzerinde bir üçlü işlem yani t: $R \times R \times R \longrightarrow R$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (R, t) sistemine bir ***üçlü halka*** denir:
T1. Her $a, b \in R$ için $(0, a, b) = t(a, 0, b) = b$ dir.
T2. Her $a, b \in R$ için $(1, a, 0) = t(a, 1, 0) = a$ dır.
T3. Verilen $a, b, c \in R$ için $(a, b, x) = c$ olacak şekilde bir tek $x \in R$ vardır.
T4. Verilen $a, b, c, d \in R$, $a \neq c$ için

$$t(a,x,b)=t(c,x,d)$$

olacak şekilde bir tek $x \in R$ vardır.
T5. Verilen $a,b,c,d \in R, a \neq c$ için $(x,a,y) = b$ ve $t(x,c,y) = d$ olacak şekil-de bir tek $(x, y) \in R^2$ sıralı ikilisi vardır.

Tanım 6.2.2: $(R,\ t)$ ve (R',t') iki üçlü halka olsun. R den R' ye $(t(a,b,c))=t'(f(a),f(b),f(c))$ özelliğinde birebir ve örten bir f dönüşümü varsa
$(R,\ t)$ ve $(R',\ t')$ üçlü halkaları ***izomorftur*** denir.

Teorem 6.2.3: Eğer $(R,+,\cdot)$ bir bölümlü halka ise $(a,b,c)=a\cdot b+c$ şeklinde tanımlanan $t:R\times R\times R\longrightarrow R$ üçlü işlemi için (R,t) bir üçlü halkadır.

İspat: T1. Her $a,b\in R$ için $(0,a,b)=0\cdot a+b=b, t(a,0,b)=a\cdot 0+b=\ b$ dir.

T2. Her $a,b\in R$ için $(1,a,0)=1\cdot a+0=a, t(a,1,0)=a\cdot 1+0=a$ dır.

T3. Verilen $a,b,c\in R$ için $(a,b,x)=c\Rightarrow a\cdot b+x=c\Rightarrow c-a\cdot b=x\in R$ tek çözümdür.

T4. Verilen $a,b,c\in R, a\neq c$ için $(a,x,b)=t(c,x,d)\Rightarrow a\cdot x+b=c\cdot x+d\Rightarrow(a-c)x=d-b$ olup $a\neq c$ olduğundan $x=(a-c)^{-1}(d-b)\in R$ tek çözümdür.

T5. Verilen $a,b,c\in R, a\neq c$ için $(x,a,y)=b$ ve $t(x,c,y)=d$ ise $x\cdot a+y=b$ ve $x\cdot c+y=d\Rightarrow x(a-c)=b-d$ olup $a\neq c$ olduğundan $x=(b-d)(a-c)^{-1}$ tek çözümdür. Bu değer yerine yazılarak $y=b-x\cdot a$ bir tek olarak bulunur.

Tanım 6.2.4: L bir küme ve $*$ da onun üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $a,b\in L$ için
L1. $a*x=b$ denkleminin bir tek x çözümü vardır.
L2. $y*a=b$ denkleminin bir tek y çözümü vardır.
L3. Her $a\in L$ için $e*a=a=a*e$ özelliğinde bir tek $e\in L$ elemanı vardır.
şartları sağlanıyorsa $(L,*)$ sistemine bir ***loop*** ya da ***yarıgrup*** denir.

Örnek 6.2.5: $L = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi aşağıdaki tablo ile tanımlanmış olsun. Bu takdirde $(L, *)$ sistemi bir yarıgruptur.

$*$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	b	f	c
b	b	d	e	f	c	a
c	c	b	f	e	a	d
d	d	f	c	a	e	b
f	f	c	a	d	b	e

Tablo 6.2.1. $*$ işlemi

Tanım 6.2.6: Herhangi bir (R, t) üçlü halkasının t işleminin

$$x + y = (1, x, y) \text{ ve } x \cdot y = t(x, y, 0)$$

biçiminde tanımlanan özel hallerine sırasıyla R üzerinde ***toplama*** ve ***çarpma*** (ikili) işlemleri denir (Kaya 1992).

Teorem 6.2.7: $T = (R, t)$ bir üçlü halka, $+$ ve $\cdot$ da R üzerinde Tanım 6.2.6 daki toplama ve çarpma işlemleri ise $(R,\ t)$ ve $(R\backslash\{0\},\ \cdot)$ yapıları, birim elemanları sırayla 0 ve 1 olan birer yarıgruptur (Kaya 1992).

İspat: Önce $(R,\ +)$ yapısı incelensin. $+$ işleminin tanımından $x + 0 = t(1,\ x,\ 0)$ ve T2 gereğince $t(1, x, 0) = x$ tir. Benzer olarak tanımdan $0 + x = (1, 0, x)$ ve T1 gereğin- ce de $t(1,$ $0,\ x) = x$ olup buradan $x + 0 = 0 + x = x$ bulunur. Yani 0, $+$ işlemine göre birim elemandır. Şimdi $a + x = b$ ve $y + c = d$ denklemleri ele alınsın.
$a + x = b \Leftrightarrow (1,\ a,\ x) = b$ olduğundan T3 gereğince bu özellikte bir tek $x \in R$ vardır. Aynı biçimde $y + c = d \Leftrightarrow (1,\ y,\ c) = d$ dir ve T1 gereğince $d = t(0, y, d)$ yazılabileceğinden $y + c = d \Leftrightarrow t(1, y, c) = t(0,\ y,\ d)$ olur. T4 gereğince bu özellik- te bir tek $y \in R$ elemanı vardır. Dolayısıyla $(R, +)$ birim elemanı 0 olan bir yarıgruptur.

Şimdi $(R\backslash\{0\},\ \cdot)$ yapısı incelensin. $\cdot$ işleminin tanımından $1\cdot x = t(1,\ x,\ 0)$ ve T2 gereğince $t(1, x, 0) = x$ tir. Aynı biçimde $x\cdot 1 = (x, 1, 0)$ ve T2 gereğince de $(x,\ 1,\ 0) = x$ olduğundan $1\cdot x = x\cdot 1 = x$ elde edilir. Dolayısıyla 1, bu işleme göre birim elemandır. $a\cdot x = b \Leftrightarrow (a, x, 0) = b$ ve T1 den $b = t(0, x, b)$ olduğundan $(a,\ x,\ 0) = t(0,\ x,\ b)$ bulunur ki T4 gereğince bu özellikte bir tek $x \in R$ vardır. Benzer olarak tanımdan $y\cdot c = d \Leftrightarrow (y, c, 0) = d$ dir. Oysa T5 gereğince

$$(y,\ \ c,\ \ z) = d \text{ ve } t(y,\ \ 0,\ \ z) = 0$$

yapısı için bir tek (y, z) ikilisi vardır. İkinci denklemden $z = 0$ olduğundan bu değer birinci denklemde kullanılırsa $(y,\ c,\ 0) = d$ olacak biçimde bir tek $y \in R$ nin varlığı bulunur. Dolayısıyla $(R\backslash\{0\}, \cdot)$ yapısı birim elemanı 1 olan bir yarıgruptur.

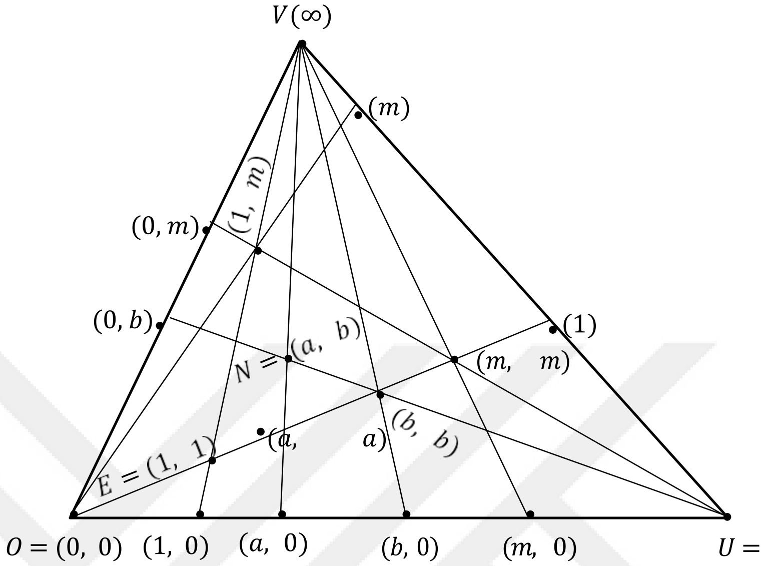
Gösterim 6.2.8: $T = (R,\ t)$ Teorem 6.2.7 deki işlemlerle elde edilen $+$ ve $\cdot$ işlemleri altında oluşturulan $(R, +, \cdot)$ sistemi P_T ile gösterilir.

Bundan sonraki kısımlarda (R, t) üçlü halkasının bir projektif düzlemi koordinatlamada nasıl kullanılacağı ve elde edilen düzlemin geometrik özellikleri ile P_T nin cebirsel özellikleri arasındaki ilişki incelenecektir.

Şimdi de mertebesi $n \geq 2$ olan herhangi bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin homojen olmayan şekilde nasıl koordinatlanacağını görelim (Kaya 1992).

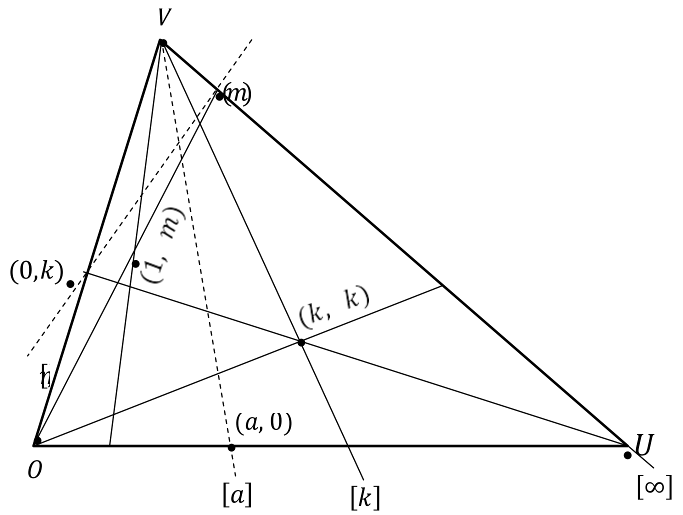
kardinalitesi n olup 0 ve 1 ile gösterilen iki özel elemanı bulunan herhangi bir küme olsun. $\mathbb{P}$ içinde herhangi üçü doğrudaş olmayan O, E, U, V noktalarının oluşturduğu keyfi bir $\{O,\ E,\ U,\ V\}$ kümesi koordinatlama dörtgeni olsun. $\mathbb{P}$ nin noktaları şu şekilde isimlendirilsin: OE doğrusu üzerinde $OE \cap UV$ noktasından başka her bir noktaya R^2 nin (a, a) biçiminde bir tek elemanını karşılık tutulsun ve özel olarak $O = (0,\ \ 0)$, $E = (1, 1)$ alınsın. UV doğrusu üzerinde bulunmayan seçimli her bir N noktası için eğer $NU \cap OE = (b,b)$ ve $NV \cap OE = (a,a)$ ise $N = (a, b)$ denilsin. Özel olarak OU doğrusu üzerindeki noktalar $(a, 0)$ ve OV doğrusunun üzerindeki noktalar $(0, b)$

biçiminde koordinatlara sahip olur. OV doğrusunun $(0, 0)(1, m) \cap UV$ noktasına (m) koordinatı verilsin.



Şekil 6.2.1. Noktaların tayini

Buradan $U = (0)$, $OE \cap UV = (1)$ olur (Şekil 6.2.1). UV doğrusunun V noktasına da $\infty \notin R$ olmak üzere $V = (\infty)$ koordinatı verilsin. $\mathbb{P}$ nin doğrularına gelince $V = (\infty)$ noktasından geçmeyen ve dolayısıyla UV doğrusu ile bir (m) ortak noktasına ve OV doğrusu ile bir $(0, k)$ ortak noktasına sahip olan doğruya $[m, k]$ koordinatı, $V = (\infty)$ noktasından geçen ve $OU = [0, 0]$ doğrusuyla bir $(k, 0)$ ortak noktasına sahip olan



Şekil 6.2.2. Doğruların tayini

doğruya $[k]$ koordinatı ve UV doğrusuna da $[\infty]$ koordinatı tayin edilsin (Şekil 6.2.2).

Dikkat edilirse genişletilmiş Euclid düzleminin koordinatlanmasına benzetilerek yapılan bu koordinatlamada, koordinatlar seçilen $\{O, E, U, V\}$ dörtgenine bağlıdır.

Şimdi de üzerinde olma bağıntısının belirlenmesi ve düzlemsel üçlü halkaların elde edilmesine geçilebilir.

Nokta ve doğruların koordinatlarının tayininden açık olarak her $m, k, x, y \in R$ için

$$(\infty) \in' [\infty] \quad ; \quad (\infty) \in' [k] \quad ; \quad (\infty) \notin' [m,k]$$
$$(x) \in' [\infty] \quad ; \quad (x) \notin' [k] \quad ; \quad (x) \in' [m, k] \Leftrightarrow m = x$$
$$(x,y) \notin' [\infty]; \quad (x,y) \in' [k] \Leftrightarrow x = k;$$

dır. Fakat (x, y) noktasının $[m, k]$ doğrusunun üzerinde bulunup bulunmama şartları henüz bilinmemektedir. Bunu belirlemek için R^3 ten R ye "$t: (m, x, k) \longrightarrow y \Leftrightarrow (x, y) \in' [m, k]$" olacak şekilde bir t eşlemesi tanımlamak yeterli olacaktır.

Teorem 6.2.9: R, bir projektif düzlemi koordinatlamada kullanılan herhangi bir küme ve t de R^3 ten R ye

$$t(m, \quad x, \quad k) = y \Leftrightarrow (x, \quad y) \in '[m, \quad k]$$

özelliğinde bir eşleme olsun. Bu durumda t, R üzerinde bir üçlü işlemdir (Kaya 1992).

İspat: Her bir (m, x, k) sıralı üçlüsü için $y = (m, x, k)$ olacak şekilde bir tek $y \in R$ olduğu gösterilmelidir. İlk koordinatı x olan bütün noktalar $(\infty)(x, x) = [x]$ doğrusu üzerindedir. Ayrıca tanımdan $y = (m, x, k) \Leftrightarrow (x, y) \in [m, k]$ ve dolayısıyla aynı x ilk koordinatlı nokta $[m, k]$ doğrusunun da üzerindedir. Böylece $(x, y) = [x] \cap [m, k]$ olur. Oysa iki doğrunun bir tek (x, y) ortak noktası bulunduğundan bir tek $y \in R$ elemanı vardır. ■

R kümesi üzerinde tanımlanan ve bu küme üzerine bir cebirsel yapı koymaya olanak sağ- layacak olan bu t üçlü işleminin temel özellikleri aşağıdaki teorem ile verilebilir:

Teorem 6.2.10: R, herhangi bir projektif düzlemi koordinatlama kümesi ve t de bu küme üzerinde Teorem 6.2.9 da tanımlanan üçlü işlem olsun. t aşağıdaki özelliklere sahiptir (Kaya 1992):

T1. Her $m, x, k \in R$ için $(0, x, k) = k = t(m, 0, k)$ dır.

T2. Her $m, x \in R$ için $(m, 1, 0) = m$ ve $t(1, x, 0) = x$ tir.

T3. Verilen her bir $m, x, y \in R$ üçlüsü için $(m, x, k) = y$ olacak şekilde bir tek $k \in R$ elemanı vardır.

T4. $m_1 \neq m_2$ olmak üzere verilen $m_1, m_2, k_1, k_2 \in R$ için $(m_1, x, k_1) = t(m_2, x, k_2)$ olacak şekilde bir tek $x \in R$ elemanı vardır.

T5. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere verilen $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ için $(m, x_1, k) = y_1$ ve $(m, x_2, k) = y_2$ olacak şekilde R kümesinde bir tek m, k eleman çifti vardır.

İspat: T1-T5 özelliklerinin gerçeklendiği gösterilmelidir.

T1. $(0,\ x,\ k)\ =\ z$ olsun. Tanımdan $(0,\ x,\ k)\ =\ z \Leftrightarrow (x,\ z) \in{}'[0,\ k]$ olur. Oysa doğru koordinatlarının tanımı gereğince $[0, k] = (0)(0, k)$ doğrusu üzerindeki her nokta $(?, k)$ biçiminde olduğundan $z = k$ olmalıdır. Dolayısıyla $(0, x, k) = k$ dir.
Ayrıca $(m, 0, k) = z \Leftrightarrow (0, z) \in [m, k]$ tanımdan biliniyor. Oysa
$[m, k] = (m)(0, k)$ ve aynı zamanda $(0, z) \in [0]$ olduğundan $(0, z) = [0] \cap [m k]$
ve dolayısıyla $k = z$ olur. Çünkü iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.

T2. $(m, 1, 0) = z$ denirse $(1, z) \in{}'[m, 0]$ olur. Oysa $[m, 0] = (m)(0, 0)$ ve $(m) = [(0, 0)(1, m)] \cap [\infty]$ olarak tanımlandığından $(1, m) \in{}'[m, 0]$ dır. Hem $(1,\ m)$ hem de $(1,\ z)$ aynı anda $[1]$ doğrusu üzerinde olduklarından $[1] \cap [m, 0] = (1,\ z) = (1,\ m)$ ve dolayısıyla $z = m$ olmalıdır. Bu da
$(m, 1, 0) = m$ demektir. Benzer olarak $(1, x, 0) = z$ denirse $(x, z) \in{}'[1, 0]$ olur. $[1, 0]$ doğrusu üzerinde yalnızca $(x,\ x)$ tipindeki bütün noktalar ve (1) noktası bulunduğundan $z = x$ olmalıdır. Buradan da $(1, x, 0) = x$ bulunur.

T3. Tanımdan $(m, x, k) = y \Leftrightarrow (x, y) \in [m, k]$ olduğu biliniyor. Bu $[m, k] = (m)(0, k)$ ile birleştirilirse (x, y), (m), $(0, k)$ noktalarının doğrudaş olduğu açık olarak görülür. Böylece $(0,\ k)$ noktası hem $(x,\ y)(m)$ doğrusu hem de $[0]$ doğrusu üzerinde olduğundan ve $(0, k) = [0] \cap [(m)(x, y)]$ noktasının bir tek olmasından bir tek $k \in R$ elemanı vardır.

T4. $t(m_1,\ x,\ k_1) = t(m_2,\ x,\ k_2) = z$ denirse $(x,\ z) \in{}'[m_1,\ k_1]$ ve
$(x, z) \in{}'[m_2, k_2]$ olur, $m_1 \neq m_2$ olması dolayısıyla da $(x, z) = [m_1, k_1] \cap [m_2,\ k_2]$ elde edilir. İki doğrunun bir tek ortak noktası olduğundan (x, z) noktası bir tektir. Buradan x in tekliği çıkar.

T5. $(m,\ \ x_1,\ \ k)\ = y_1 \quad \Leftrightarrow (x_1,\ y_1) \in{}'[m,\ k]$ ve
$(m, x_2, k) = y_2 \Leftrightarrow (x_2, y_2) \in{}'[m, k]$ dır. (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları bir tek doğru üzerinde bulunabilecekleri ve $x_1 \neq x_2$ olduğu için bu doğru (∞) noktasından geçmeyen bir doğru olacağından $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = [m, k]$ olup, dolayısıyla da bu
özellikte bir tek $m,\ k$ eleman çifti vardır. Böylece teoremin ispatı t nin tanımı ve projektif düzlem aksiyomlarına dayanılarak tamamlanmıştır. ■

R kümesi ve t üçlü işleminin birlikte düşünülmesiyle yeni bazı kavramlar tanımlanabilir.

Tanım 6.2.11: Eğer bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin koordinatlama kümesi ve t de bu koordinatlamadaki üçlü işlemse $(R,\ t)$ üçlü halkasına $\mathbb{P}$ nin ***düzlemsel üçlü halkası*** ya da ***düzlemsel üçlü halka*** denir (Kaya 1992).

Teorem 6.2.10 her projektif düzlemden bir düzlemsel üçlü halka üretilebildiğini göstermektedir. Bunun karşıtının da doğru olduğu aşağıdaki teoremde gösterilecektir. Bu, bir projektif düzlem ve bir düzlemsel üçlü halkanın bir diğerini belirtmekte kullanılabileceği (ya da birbirlerinden elde edilebilecekleri) önemli sonucu doğurmaktadır. Bu nedenledir ki ilginç yapılar oldukları halde düzlemsel üçlü halkalar projektif düzlemlerin temsilinde kullanılabilecek ideal sistemlerdir. Şimdi sözü edilen karşıt teoreme geçilebilir.

Teorem 6.2.12: Her $(R,\ t)$ üçlü halkası bir düzlemsel üçlü halkadır, yani verilen her $(R,\ t)$ üçlü halkası için öyle bir $\mathbb{P}$ projektif düzlemi vardır ki onun düzlemsel üçlü halkası (R, t) dir (Kaya 1992).

İspat: (R, t) verilen bir üçlü halka ve ∞ da R kümesinde bulunmayan bir eleman olsun. $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ geometrik yapısının nokta ve doğru kümeleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{N}' &= \{(x, y): x, y \in R\} \cup \{(x): x \in R\} \cup \{(\infty)\},\\ \mathcal{D}' &= \{[m, k]: m, k \in R\} \cup \{[k]: k \in R\} \cup \{[\infty]\}\end{aligned}$$

biçiminde ve bir noktanın bir doğru üzerinde olması da her $x, y, m, k \in R$ için

$$(x,y) \in' [m,k] \Leftrightarrow t(m,x,k) = y \quad (x,y) \in' [k] \Leftrightarrow x = k$$

$$(x) \in' [m,k] \Leftrightarrow x = m \quad (x) \in$$

$$'[\infty]$$

$$(\infty) \in '[\infty]$$

$$(\infty) \in '[k]$$

şeklinde tanımlansın. Bu tanımlamadan hemen, yine $x, y, m, k, a \in R$ için

$$(x,\ y) \notin '[\infty]$$
$$(x)\ \notin '[k]$$
$$(\infty) \notin '[m, k]$$

olduğu açık olarak görülür. Şimdi $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in ')$ yapısının projektif düzlem olduğunu gösterelim. P1 aksiyomunun sağlandığını görmek için göz önüne alınacak N_1, N_2 noktalarının konumlarına göre şu durumlar mümkündür:

1. Durum: $N_1 = (x_1, y_1)$ ve $N_2 = (x_2, y_2)$ şeklinde noktalar olsun. Eğer $x_1 \neq x_2$ ise $(x_1, y_1) \in '[m,k] \Leftrightarrow t(m, x_1, k) = y_1$ ve $(x_2, y_2) \in '[m, k] \Leftrightarrow t(m, x_2, k) = y_2$ elde edilir. Oysa (R, t) nin T5 özelliği gereğince bu şekilde bir tek $[m, k]$ doğrusu vardır. $x_1 \neq x_2$ olduğundan N_1N_2 doğrusu $[k]$ biçiminde olamaz. Eğer $x_1 = x_2$ ise t üçlü işlem olduğundan bu noktaları birleştiren doğru $[m, k]$ biçiminde olamaz. Tanımdan bu noktalar $[\infty]$ doğrusu üzerinde değildir. Fakat
$(x_1, y_1) \in '[x_1]$ ve $(x_2, y_2) \in '[x_1]$ olduğundan $N_1N_2 = [x_1]$ doğrusu istenen bir tek doğrudur.

2. Durum: $N_1 = (x_1, y_1)$ ve $N_2 = (x_2)$ olsun. Eğer $(x_2) = (\infty)$ ise (∞) noktasından geçen doğrular tek bileşenli olduğu ve $(x_1, y_1) \notin [\infty]$ olduğu için $N_1N_2 = [x_1]$ dir. Eğer $(x_2) \neq (\infty)$ ise yine $(x_1, y_1) \notin [\infty]$ ve $(x) \notin [k]$ olduğundan N_1N_2 doğrusu $[m, k]$ biçimindedir. Buradan

$$(x_1, y_1) \in '[m,k] \Leftrightarrow t(m, x_1, k) = y_1 (x_2) \in '[m, k] \Leftrightarrow m = x_2$$

ve dolayısıyla $t(x_2, x_1, k) = y_1$ bulunur. Oysa (R, t) üçlü halkasının T3 özelliği gereği bir tek $k \in R$ elemanı vardır ve dolayısıyla $N_1N_2 = [x_2, k]$ dir. $N_1 = (x_1)$,
$N_2 = (x_2)$ ise $N_1N_2 = [\infty]$ dur.

Geri kalan durumlarda P1 aksiyomunun gerçeklendiğinin gösterilmesi ya tamamen yukarıdakilerin tekrarı ya da çok basittir. P2 aksiyomunun ispatı ise P1 aksiyomunun ispatının dualidir. Bir doğrunun bir nokta üzerinde olması tanımından $(0,\ 0)(1,\ 1)=[1,\ 0]$, $(0,\ 0)(\infty)=[0]$, $(0,\ 0)(0)=[0,\ 0]$, $(1,\ \ 1)(\infty)=[1]$, $(1,\ 1)(0)=[0,\ 1]$, $(\infty)(0)=[\infty]$ doğrularının hepsi farklı olduğundan $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, (0), (∞) noktalarının herhangi üçü doğrudaş değildir. Böylece $(\mathcal{N}',\ \mathcal{D}')$ yapısının projektif düzlem olduğunun ispatı tamamlanmıştır. Eğer $(0, 0)=O$, $(1, 1)=E$, $(0)=U$ ve $(\infty)=V$ olarak seçilirse bu düzlemin düzlemsel üçlü halkası (R, t) olur. ■

Gösterim 6.2.13: Teorem 6.2.12 ki projektif düzlem $\mathbb{P}_{(R,t)}$ ile gösterilir (Kaya 1992).

Dikkat edilirse verilen bir $(R,\ t)$ üçlü halkasının, bu üçlü halkadan elde edilen projektif düzleme ait düzlemsel üçlü halka olması için koordinatlama dörtgeni olarak $\{(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (0),\ (\infty)\}$ kümesinin seçimi zorunlu olmuştur. Bir projektif düzlemde $O,\ E,\ U,\ V$ koordinatlama dörtgeninin değişik seçilmesiyle yapılacak yeni koordinatlama ile doğal olarak öncekinden tamamen farklı bir üçlü halka elde edilebilir. Bir düzlemden elde edilecek üçlü halkalar arasındaki ilişki tamamen açıklanabilmiş değildir. Yani daha genel olarak "Aynı sayıda elemanı olan iki düzlemsel üçlü halka ne zaman aynı (izomorfik) düzlemi koordinatlar?" sorusu henüz tamamen çözülememiştir.

Bir $\mathbb{P}$ projektif düzleminin üçlü halkasının cebirsel özellikleri ile $\mathbb{P}$ de bazı özel Dezarg teoremlerinin geçerliliği arasında çok yakın bir ilişki vardır. Bunlara kısaca değineceğiz.

Tanım 6.2.14: (R, t) üçlü halka olsun. Eğer t üçlü işlemi her $a, b, c \in$ için $(a, b, c) = t(1, t(a, b, 0), c)$ özelliğine sahip ise, yani $+$ ve $\cdot$ Tanım 6.2.6 daki ikili işlemler olmak üzere

$$t(a,\ b, c) = a \cdot b + c$$

ise (R, t) ye ***lineer üçlü halka*** denir (Kaya 1992).

Teorem 6.2.15: (R, t) üçlü halkasının lineer olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{P}_{(R,t)}$ projektif düzleminde (M, e) −Dezarg Teoreminin $M = (\infty)$, $e = [\infty]$, $AA' = [0]$, $R = (0)$ özel konumunda geçerli olmasıdır (Kaya 1992).

$\mathbb{P}$ herhangi bir projektif düzlem olsun. $\mathbb{P}$ de bir O, E, U, V dörtgeni seçilerek oluşturulan $(R,\ t)$ üçlü halkası ile non-homojen koordinatlarla kurulan projektif düzlem $\mathbb{P}_{(R,t)}$ ile gösterilirse $\mathbb{P}$ ile $\mathbb{P}_{(R,t)}$ izomorftur (Stevenson 1972).

$\mathcal{B}$ bir bölümlü halka ve $(R,\ t)$ de $\mathcal{B}$ bölümlü halkası ile oluşturulan düzlemsel üçlü halka olsun. $\mathbb{P}_{(R,t)}$ projektif düzlemi ile $\mathbb{P}_2\mathcal{B}$ projektif düzlemi arasında noktalar için

$$f:(x,y) \longrightarrow \ < x, y, 1 > \quad (x) \longrightarrow \ < 1, x, 0 >$$
$$(\infty) \longrightarrow \ < 0,\ \ 1,\ \ 0 >$$

ve doğrular için

$$f:[m,k] \longrightarrow [m, \qquad -1, k]$$
$$[k] \longrightarrow [-1, 0, k]$$
$$[\infty] \longrightarrow [0,\ \ 0,\ \ 1]$$

şeklinde tanımlanan f dönüşümü bir izomorfizmdir.

Bu kısmı Stevenson (1972)'den alınan aşağıdaki teorem ile tamamlıyoruz:

Teorem 6.2.16: $\mathbb{P}$ nin bir Dezarg (Pappus) düzlemi olması için gerek ve yeter şart $(R,\ t)$ düzlemsel halkası bir bölümlü halka (cisim) olan $\mathbb{P}_{(R,t)}$ projektif düzlemine izomorf olmasıdır.

KAYNAKLAR

Akpınar, A. 2001. Sonlu Mertebeli Projektif Düzlemler. *Yüksel Lisans Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Batten, L. M. 1986. Combinatorics of Finite Geometries. Cambridge University Press, New York, 173 pp.

Bennett, M. K. 1995. Affine and Projective Geometry. John Wiley & Sons, Inc, New York, 229 pp.

Betten, D. 1984. Die 12 Lateinischen Quadre der Ordung 6. M. *Helungen aus dem Math. Sem. Giessen,* 163.

Bogart, K. P. 1983. Introductory Combinatorics, London: Pitman, 642 pp.

Bose, R. C., Parker, E. T., Shrikhande, S. 1960. Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and hte falsity of a conjecture of Euler. *Can. J. Math.,* 12: 189-203.

Bruck, R. H., Ryser, H. J. 1949. The non-existenceof certain finite projective planes. *Can. J. Math.,* 1: 88-93.

Çiftçi, S. 2015. Lineer Cebir. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti, Bursa, 430 s.

Dénes, J., Keedwell, A. D. 1974. Latin Squares and their Applications. England: University Press, Guildford, 438 pp.

Elkies, N. 2000. Proof the Uniqueness of the Projective Plane of Order 5. elkies@MATH.HARVARD.EDU.

Foulis, D. J., Munem, M. 1988. After Calculus: Algebra, San Francisco: Dellen, 488 pp.

Hall, M. JR. 1953. Uniqueness of the Projective Plane with 57 Points. *Am. Math. Soc. Proc.,* 4: 912-916.

Hall, M. JR. 1954. Correction to Uniqueness of the Projective Plane with 57 Points. *Am. Math. Soc. Proc.,* 5: 994-997.

Hall, M. JR., Swift, J. D., Walker, R. J. 1956. Uniqueness of the Projective Plane of Order Eight. Math. *Tables Aids. Comput,* 10: 186-194.

Hall, M. 1986. Combinatorial Theory, 2d ed. Wiley Interscience, New York, 464 pp.

Kaya, R. 1992. Projektif Geometri. Anadolu Üniversitesi Yayınları, No: 551, Eskişehir, 465 s.

Lam, C. W. H., Kolesova, G., Thiel, L. 1991. A computer search for finite projective planes of order 9. *Discrete Mathematics,* 92: 187-195.

Lam, C. W. H. 1991. The Search for a Finite Projective Plane of Order 10. *The American Mathematical Monthly,* 98: 305-318.

Moulton, F. R. 1902. A simple non-Deserguasian plane geometry. *Trans AMS*, 3: 192-195.

Norton, H. W. 1939. The 7 × 7 Squares. *Ann. Eugenics*, 9: 269-307.

Pierce, W. A. 1953. The Impossibility of Fano's Configuration in a Projective Plane with Eight Points Per Line. *Am. Math. Soc. Proc.,* 4: 908-912.

Sade, A. 1951. An omission in Norton's list of 7 × 7 Squares. *Annals Math. Statistics,* 22: 306-307.

Stevenson, F. W. 1972. Projective Planes. University of Arizona, W. H. Freeman and Company San Francisco, 616 pp.

Tarry, G. 1900. Le Problé me des 36 officers. *C. R. Assoc. Av. Sci.,* 1: 122-123.

Tarry, G. 1901. Le Problé me des 36 officers. *Compte Rendu de I'Association Française pour I'Avancement de Science Naturel,* 2: 170-203.

Wedderburn, J. H. M. 1905. A Theorem on Finite Algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 6: 349-352.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Tüba KURNAZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Havza/SAMSUN, 01/04/1991
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Süleyman Çelebi Lisesi, 2004-2008
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2009-2014
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2014-2016
İletişim (e–posta)	: krnz-tuba@hotmail.com