

**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HOMOJEN OLMAYAN, EKSENEL SİMETRİK DİELEKTRİK CİSİMDEN
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA**

ÖMER ZOR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

BURSA 2006

**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HOMOJEN OLMAYAN, EKSENEL SİMETRİK DİELEKTRİK CİSİMDEN
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA**

ÖMER ZOR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

BURSA 2006

**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HOMOJEN OLMAYAN, EKSENEL SİMETRİK DİELEKTRİK CİSİMDEN
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA**

ÖMER ZOR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

Bu tez tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

| | | |
|----------------------------------|-------|-------|
| Prof.Dr. Ali OKTAY (Danışman) | | |
| Prof.Dr. Burak POLAT | | |
| Prof.Dr. Naim DEREBAŞI | | |

ÖZET

Bu çalışmada, homojen düzlemsel dalga uyarımı altındaki bir homojen olmayan, eksenel simetrik, dielektrik cismin içinde oluşan elektrik alan ifadeleri hesaplanmıştır. Hacim eşdeğer teoremi ile elde edilen eşdeğer akım yoğunluklarını içeren Maxwell denklemlerinden yola çıkarak cismin içindeki saçılan alanlar, dyadik Green fonksiyonları kullanılarak, ifade edilmiştir. Kullanılan dyadik Green fonksiyonlarında gözlem noktasının kaynak noktasına yakınsaması sonucu ortaya çıkan üçüncü dereceden tekil noktalar, hacim integralini uygun olmayan şekle sokar. Bu durum üç farklı temel teknik ile aşılmıştır. Bunlardan iki tanesi tekilliği içine alan çok küçük hacimsel bölgenin integrasyon hacminden çıkarıldığı asal hacim yöntemini (*principle volume method*) esas alır. Bu tekniklerden ilki, kaynakların oluşturduğu alan hesabının kullanıldığı teknik, ikincisi ise genelleştirilmiş fonksiyon açınımlarının kullanıldığı tekniktir. Bu iki yaklaşımın kullanılmasıyla oluşturulan ve dyadik Green fonksiyonlu hacim integrallerini içeren denklemler moment yöntemi ile çözülmüş ve aynı sonuçlar elde edilmiştir. Diğer teknik ise, integrasyon hacminden çok küçük hacim çıkarılmadan dyadik Green fonksiyonunun bulunduğu hacim integralinin hesaplanabildiği genel analitik tekniktir. Bu teknikde, ifadelerin sadece yüzey integralleri içermesinden dolayı dyadik Green fonksiyonunun herhangi bir tekilliği ile karşılaşılmaz. Yine cismin ayrıştırılması ile oluşan denklem sistemi moment yöntemi ile çözülmüştür. Bu formülle küre için elde edilen ifadeler asal hacim yöntemiyle elde edilenler ile aynı olduğu gösterilmiştir.

Saçıcı cismin eksenel simetrik olmasından dolayı çözümün sadece çeyrek bölge üzerinde gerçekleştirilmesinin yeterli olduğu görülmüştür. Cismin küplerle modellenmesi sonucu sabit dielektriğe ve iletkenliğe sahip alt bölgeler elde edilmiştir. Cismin elektriksel boyutları bir'e yakın olduğu durumda her bir alt bölgede elektrik alan da sabit kabul edilmiştir. Bu yaklaşımlar çözümü kolaylaştırmıştır.

Sonuç ifadelerinde ise, düşük frekanslarda cismin içindeki saçılan alanın frekansa bağımlılığının olmadığı görülür. Ortalama frekans bölgesinde modellenmenin yapıldığı küp sayısı çözümün hassasiyetini yakından etkilemiştir.

Anahtar kelimeler: Dyadik Green fonksiyonları, tekillik, hacim integral denklemi, genel analitik yöntem, moment metodu.

ABSTRACT

Scattering by An Inhomogeneous Dielectric Body of Revolution

In this study, the electric field distribution is calculated in an axially symmetric, inhomogeneous dielectric body illuminated by homogeneous plane waves. Starting with the Maxwell equations which has the term equivalent flux density obtained by using equivalent volume method, the electric field inside the body is derived by using volume integral equation. When the observation point converges the source point, dyadic Green's functions have third order singularity. This singularities makes the volume integral improper. This situation can be overcome by three different main procedures. First two procedures are essentially the principal-volume method, in which an infinitesimal volume around the singularity is excluded from the integration volume. The first method is based on calculating the electromagnetic waves by source equations and the second method is based on generalized functions approach. The equations obtained under these two approaches involve volume integrals with dyadic Green's functions. These integrals have been solved by the method of moments. Same results have been obtained from two approaches used here. The other is a general analytic technique to evaluate the dyadic Green's function in integral form without the need to specify an exclusion volume. In this procedure the expressions have only surface integrals so that there is no singularity of dyadic Green's function. The integrals have solved by the method of moments. It is shown that the expression for a sphere obtained by this formula gives exactly the same solution as the principal volume method for the same cell.

Because of the axial symmetry, it has seen that it suffices to investigate the solution only in quarter of the body. By modeling with the cubes, the subregions with constant dielectric and constant conductivity have obtained. It is accepted that when the electrical dimensions of the cubes are around unity, the electric field inside each subregion is constant. This choice simplifies the solution.

In the numerical implementations final results, it is seen that at the low frequencies the scattering waves inside the body are insensitive to the frequency. However, when the electrical dimension of the body is unity; the numerical results converge to the analytical reference solutions with the increasing the number of cubes

Keywords: Dyadic Green's functions, singularity, volume integral equation, moment method.

İÇİNDEKİLER

| | |
|---|----|
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI | 4 |
| 3. MATERYAL ve YÖNTEM | 6 |
| 3.1. Materyal | 6 |
| 3.1.1. Hacim Eşdeğer Teoremi | 7 |
| 3.1.2. Saçılan Alanın İntegral İfadesi | 8 |
| 3.2. Yöntem | 10 |
| 3.2.1. Gecikmeli Potansiyellerin Kullanıldığı Teknik | 11 |
| 3.2.1.1. Asal Değer İntegral İfadesine Eklenecek Katkının Hesabı | 11 |
| 3.2.1.2. Saçılan Alanın Belirlenmesi | 15 |
| 3.2.2. Genelleştirilmiş Fonksiyon Açılımlarının Kullanıldığı Teknik | 19 |
| 3.2.2.1. Genelleştirilmiş Fonksiyonların Tanımlanması | 19 |
| 3.2.2.2. Sonuçların Değerlendirilmesi | 23 |
| 3.2.2.3. Saçılan Alanların Belirlenmesi | 27 |
| 3.2.3. Genel Analitik Teknik | 31 |
| 3.2.3.1. Genel İntegral Türetme Tekniği | 32 |
| 3.2.3.2. Küp Boyunca İntegrasyon | 33 |
| 3.2.3.3. Saçılan Alanların Belirlenmesi | 38 |
| 3.2.3.4. Küresel Hacim Boyunca İntegrasyon | 40 |
| 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA | 42 |
| KAYNAKLAR | 52 |
| EKLER | 54 |
| Ek.1: Asal Değer İntegrallerinin Hesabı | 54 |
| Ek.2: Bir Düzlemsel Dalganın Homojen Dielektrik Küreden Saçılması | 57 |
| Ek.3: Bir Düzlemsel Dalganın İki Tabakalı Homojen Küreden Saçılması | 63 |

TEŞEKKÜR70

ÖZGEÇMİŞ71

ŞEKİLLER DİZİNİ

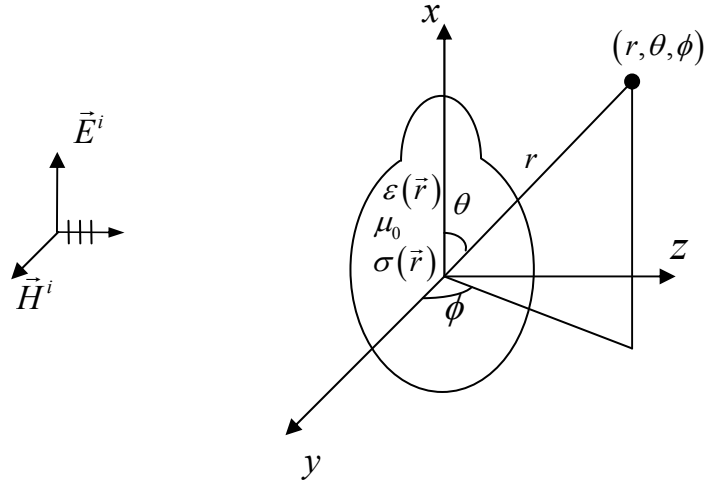
| | |
|---|----|
| Şekil 1.1 Düzlemsel dalgalar ile aydınlatılmış dielektrik cisim | 1 |
| Şekil 1.2 Bir küresel dielektrik cismin yaklaşık kübik modeli | 3 |
| Şekil 3.2.1. İçerisinden akım akan hacim | 11 |
| Şekil 3.2.2. Silindirik akım kaynağı | 12 |
| Şekil 3.2.3 Küçük silindirik hacmin hariç tutulduğu silindirik hacmin kesiti | 14 |
| Şekil 3.2.4 Küçük küresel hacmin hariç tutulduğu hacim | 14 |
| Şekil 3.2.5 (a) Cismin gelen alana paralel, (b) dik olması | 18 |
| Şekil 3.2.6 r gözlem noktasını içeren \mathcal{G}_α hacmi | 21 |
| Şekil 3.2.7 Yüzey parametreleri | 21 |
| Şekil 4.1 Düzlemsel dalgalar ile aydınlatılmış küre | 43 |
| Şekil 4.2 Farklı $k_0 r$ değerleri için kürenin içindeki alan değerleri | 44 |
| Şekil 4.3 Homojen kürenin içindeki alan ifadeleri | 45 |
| Şekil 4.4 Bağlı hata | 46 |
| Şekil 4.5 İletken homojen kürede yutulan güç | 47 |
| Şekil 4.6 Düzlemsel dalgalar ile aydınlatılmış homojen olmayan küre | 48 |
| Şekil 4.7 Tabakalı kürenin içindeki alan ifadeleri | 48 |
| Şekil 4.8 Tabakalı kürenin içindeki alan ifadeleri | 49 |
| Şekil 4.9 Tabakalı kürenin z eksenini boyunca elektrik alanlar | 50 |
| Şekil 4.10 Tabakalı kürenin z eksenini boyunca elektrik alanlar | 51 |
| Şekil 5.1 Düzlemsel dalgalar alanında küre | 61 |
| Şekil 5.2 Düzlemsel dalgalar alanında küre | 63 |

ÇİZELGELER DİZİNİ

| | |
|---|----|
| Çizelge 4.1 Homojen olmayan dielektrik kürenin içinde düşük frekanslarda oluşan elektrik alan ifadeleri | 43 |
|---|----|

1 GİRİŞ

Elektromanyetik dalgaların dielektrik cisimlerden saçılması problemi, yağmur ve kar yağışı altında dalga yayılımı, tıbbi teşhis, biyolojik cisimlerde güç yutumu ve homojen olmayan dielektrik ortamdaki anten verimi gibi uygulama alanları itibariyle bir çok araştırmacı tarafından geniş bir şekilde incelenmiştir. Özellikle, dielektrik cismin boyutu dalga boyu mertebesinde olduğunda Maxwell denklemlerinin kesin çözümü problemi önem taşır. Bunun nedeni, rezonans durumu olarak isimlenen bu durumda elektriksel olarak çok büyük veya çok küçük cisimler için geliştirilen pratik asimptotik yöntemlerin geçerliliğini kaybetmesidir.



Şekil 1.1 Düzlemsel dalgalar ile aydınlatılmış dielektrik cisim

Rezonans durumunda, bir dielektrik cisim içerisindeki saçılan alan dyadik Green fonksiyonlarını içeren hacim integralleri ile ifade edilir. Eğer cisim homojen değilse, yani konumla değişen bünye parametrelerine sahip ise, cismin içindeki her bir farklı bünye parametresine sahip bölgedeki elektrik alan ifadesi için ayrı ifadeler tanımlanmalıdır. Bu durum moment yöntemiyle sağlanır. Her bir ayrı ifadeye yer alan hacim integralinde gözlem noktasının kaynak noktasına yakınsamasıyla, dyadik Green fonksiyonlarından kaynaklanan üçüncü dereceden tekillikler ortaya çıkar. Dyadik Green fonksiyonunda ortaya çıkan bu tekillikler hacim integralini doğrudan hesaba elverişli olmayan hale sokar.

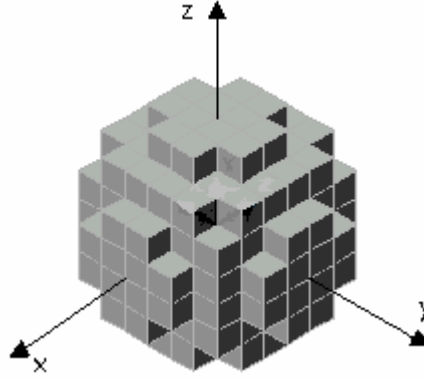
Bu çalışmada, ağırlıklı olarak, düzgün olmayan (*improper*) hacim integrallerinin tanımlı hale getirilmesi üzerinde durulacaktır. Doğrudan hesaba elverişli olmayan hacim

integralleri bu çalışmada üç farklı teknik ile tanımlı hale getirilmiştir. Bu tekniklerden iki tanesinde çözüm için hacim integral ifadeleri, birinde ise yüzey integral ifadeleri kullanılır. Hacim integral ifadelerinin kullanıldığı ilk iki teknik; tekilliğin etrafındaki çok küçük hacimsel bölgenin toplam integrasyon bölgesinden ayrıştırıldığı asal hacim yöntemidir. Bu tekniklerden ilkinde, asal değer integral ifadelerine eklenecek katkı toplam kaynakların oluşturduğu alan hesabı yardımıyla belirlenmiştir. Diğerinde ise; eklenecek katkı Hölder koşulu altındaki genelleştirilmiş fonksiyon yaklaşımı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu iki teknikten farklı olarak, çözüm için yüzey integrallerinin kullanıldığı üçüncü yöntem ise, genel analitik yöntemdir. Bu yöntemde tekillik için herhangi bir ek işleme gerek kalmamıştır. Aşağıda bu üç teknik ile ilgili esaslar kısaca özetlenmiştir:

- i) *Gecikmeli Potansiyellerin Kullanıldığı Teknik.* Dielektrik cismin merkezindeki elektrik alan ilk olarak gecikmeli potansiyeller yöntemi ile hesaplanır. Daha sonra dyadik Green fonksiyonunu içeren hacim integrali, integralin tanımsız olduğu kaynak bölgesi çözüm hacminden çıkarılarak, çözülür. Elde edilen bu çözümün, çıkarılan hacmin boyutları sıfıra gider iken, limit değeri hesaplanır ve bu limit değerine integralin asal değeri denir. Bu iki yöntem ile elde edilen sonuçların eşit olması gerektiğinden yola çıkarak düzeltme terimi bulunur. Yani integralin tanımsız olduğu tekil noktaları içeren çok küçük bölgenin integral hacminden çıkarılması ile ortaya çıkan yeni integral ifadesine eklenecek katkı terimi hesaplanmıştır.
- ii) *Genelleştirilmiş fonksiyon açınımlarının kullanıldığı teknik.* $\vec{J}(\vec{r}')$ 'nin \mathcal{V} içindeki bütün noktalarda Hölder şartını sağladığı farz edilerek saçılan alanların dyadik Green fonksiyonlu ifadesindeki skaler Green fonksiyonunun ikinci dereceden türevi terimi genelleştirilmiş fonksiyon olarak düşünülür ve eşdeğer ifadeleri kullanılır. Bu sayede tekil noktaların çıkarılması ile oluşan yeni integrale eklenecek katkı doğrudan durağan haldeki Green fonksiyonunun hacim integrasyonu ile elde edilmiş olur. Bölüm 3.2.3'te genelleştirilmiş fonksiyon tanımı ve ispatı yapılmıştır.
- iii) *Genel analitik teknik.* Tekil noktayı içine alan çok küçük hacimsel bölge cismin toplam hacminden çıkarılmadan dyadik Green fonksiyonunun integralinin hesaplanabildiği tekniktir. Bu teknikte dyadik Green fonksiyonunu içeren hacim

integrali, uygun analitik ifadeler ve diverjans teoremi ile yüzey integraline dönüştürülür. Böylece dyadik Green fonksiyonunun hacim integralinde oluşturduğu tekillik problemi ortadan kaldırılmış olur. Yani cismi oluşturan her bir parçanın yüzeyleri ile merkez noktalarının kesişmemesi sayesinde tekillik ortadan kalkar.

Her bir teknikte elde edilen integrodiferansiyel denklemler moment yöntemi kullanılarak doğrusal denklem sisteminin çözümüne indirgenir.



Şekil 1.2 Bir küresel dielektrik cismin yaklaşık kübik modeli

Saçıcı cisim, konuma bağlı olarak değişen dielektrik sabitine ve iletkenliğe sahiptir. Saçıcı cismin manyetik özelliği yoktur. Moment yöntemi ile aksel simetrik cismin küplere ayrıştırılmasıyla cismin farklı elektriksel parametrelere sahip bölgeleri farklı küplerle modellenebilir. İfadelerin her bir bölgede ayrı tanımlanması ile cismin homojen olmamasından kaynaklanan problem çözülmüş olur. Alanların hesabı, moment yöntemi kullanılarak doğrusal denklem sisteminin çözümüne indirgenir. Cismin içindeki elektrik alan hesaplanırken, cismin aksel simetrik olmasından dolayı, sadece çeyrek bölgede çözümün elde edilmesi yeterli olmaktadır. Bu durum, doğal olarak, bilinmeyen sayısını ve hesaplama süresini önemli ölçüde azaltır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Üç boyutlu düzgün olmayan şekilli dielektrik cisimlerden saçılma olayı incelenirken dyadik Green fonksiyonu formülasyonu (Chen, 1971) çok önemlidir. Bu yöntem toplam saçılan alanı dielektrik cisim üzerindeki hacim integrasyonu ile tanımlar. Bu yöntemde karşılaşılan temel zorluk ise gözlem noktası saçıcı cismin kapladığı bölgeye düştüğü zaman hacim integralinde oluşan tekilliktir. Bu tür tekilliklerin aşılması için literatürde birçok teknik vardır. Örneğin, Bladel (1961) tekilliği içeren küçük bir hacmi ayrıştırarak tekil terim için Cauchy integrasyonu tanımlayarak analitik sonuçlar elde etmiştir. Yaghjian (1980) elektrik alanı kaynak bölgesinin içinde ve dışında *genelleştirilmiş elektrik dyadik Green* fonksiyonlarıyla ifade etmiştir. Genelleştirilmiş elektrik dyadik Green fonksiyonu, tekilliğin dışındaki bölgede tanımlı olan *geleneksel dyadik* ve tekilliğin bulunduğu hacimde tanımlı olan *kaynak dyadik* olmak üzere iki parçadan oluşmaktadır. Gel'fand ve Shilov (1964) Green fonksiyonunun türevini *genelleştirilmiş fonksiyon* olarak tanımlar. Lee ve ark. (1980) bu genelleştirilmiş fonksiyon ifadelerini kullanarak kaynak bölgesindeki Green fonksiyonunun ikinci türevini genelleştirilmiş fonksiyon olarak tanımlıyorlar.

Gao ve ark. (2005) tarafından hacim integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürüldüğü genel analitik teknik geliştirilmiştir. Böylece gözlem noktasının kaynak bölgesine yakınsaması sonucu ortaya çıkan tekillikler ortadan kaldırılmış oluyor.

Dielektrik cisimlerden saçılma probleminin sayısal çözümlenmesine ilk olarak Richmond'un (1965) çalışmalarında karşılaşılmıştır. Integrodiferansiyel denklemleri lineer denklem sistemine dönüştüren Moment Yöntemi (MoM) (Harrington, 1968), bu tür problemlerin çözümünde standart bir yöntem gibidir. MoM'de herhangi bir dielektrik cisim farklı geometrik elemanlar ile modellenebilir. Örneğin Livesay ve Chen (1974) MoM'de cismi modellemek için kübik elemanları kullanıyor buna karşı Schaubert ve ark. (1984) tetrahedral elemanları ve Sertel ve Volakis (2002) de hegzahedral elemanları kullanıyor. Eğri geometriler için tetrahedral elemanların kübik elemanlara göre daha uygun olduğu görülür. Buna karşın ince tabakalar üzerinde çalışılırken hegzahedral elemanlar daha uygundur.

Ayrıca doğrudan hacim integral denklemleri (VIE) pek fazla etkin olamamıştır. Bunun nedeni bu denklemlerin çok yüksek mikroişlemci hızı ve hafıza gerektirmesidir.

Bunun yanında hızlı yöntemlerin ortaya çıkması hacim integral denklemlerinin çözümünü daha pratik hale sokmuştur.

Bu çalışmada, hacim integral denkleminin doğrudan çözümü küpler kullanılarak yapılacaktır. Bladel'in (1961) tanımladığı asal hacim integrallerinin kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar ile Lee ve ark.'nın (1980) Green fonksiyonunun ikinci dereceden türevini genelleştirilmiş fonksiyon olarak tanımladığı yöntemin uygulanması ile elde ettikleri aynıdır. Ayrıca, asal hacim teniğinden farklı olarak herhangi bir hacim ayrılmadan yüzey integralleri ile sonuca gidilmiştir. Bu teknik ile küresel hacim için elde edilen sonuçların asal hacim yöntemiyle elde edilenlerle aynı olduğu gösterilmiştir. Bu yeni teknik ilk kez bu çalışmada homojen olmayan dielektrik cisimlere uygulanmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada homojen olmayan, aksel simetrik dielektrik cisimden homojen düzlemsel elektromanyetik dalgaların saçılma mekanizması incelenmektedir. Saçıcı cisim konuma bağlı olarak değişen dielektrik katsayısına ve iletkenliğe sahiptir. Saçıcı cismin manyetik özelliğinin boşluğun değerlerine eşit olduğu varsayılacaktır.

Hacim eşdeğer teoremi ile oluşturulan eşdeğer akım yoğunluğunu içeren Maxwell denklemlerinden yola çıkarak cismin içindeki saçılan alanlar, dyadik Green fonksiyonlarının bulunduğu hacim integralleri ile ifade edilebilir. Kullanılan dyadik Green fonksiyonlarının, gözlem noktasının kaynak noktasına yakınsaması sonucu ortaya çıkan, üçüncü dereceden tekil noktaları hacim integralini doğrudan hesaba elverişli olmayan şekle sokar. Bu çalışmada doğrudan hesaba elverişli olmayan integrallerin tanımlı hale getirilmesi üzerinde durulacaktır. Bunun için üç farklı teknik uygulanır. Bu tekniklerden ilk ikisinde hacim integralleri ile diğerinde ise yüzey integralleri ile çözüme gidilir. Bu tekniklerden ilkinde, asal değer integral ifadelerine eklenecek katkı toplam kaynakların oluşturduğu alan hesabı yardımıyla belirlenmiştir. Diğerinde ise; eklenecek katkı Hölder koşulu altındaki genelleştirilmiş fonksiyon yaklaşımı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu iki teknikten farklı olarak çözüm için yüzey integrallerinin kullanıldığı üçüncü teknik ise, genel analitik yöntemdir. Bu yöntemde tekillik için herhangi bir ek işleme gerek kalmamıştır.

Bu üç teknikten elde edilen sonuçlar, moment yöntemi uygulanarak cismin küplerle modellenmesi ile herbir küpte ayrı ayrı tanımlanır ve her bir küpten gelen katkı doğrusal denklem sistemini oluşturur. Cismin içindeki elektrik alan hesaplanırken cismin aksel simetrik olmasından dolayı sadece çeyrek bölge üzerinde çözümün elde edilmesi yeterlidir.

3.1. Materyal

Bu kısımda içerisinden akım akan hacim elemanın oluşturduğu elektrik alanın ifadesi elde edilmiştir. Bu ifade, toplam saçılan alanın belirlenmesinde kullanılacaktır.

İlk olarak hacim eşdeğer teoremi ile oluşturulan eşdeğer akım yoğunluğu vektörünü içeren Maxwell denklemlerinin elde edilmesi üzerinde durulmuştur. Maxwell

denklemleri, eşdeğer kaynakların bulunduğu ortamda saçılan alan ifadelerini tanımlar. Saçılan alana ilişkin Maxwell denklemlerinden yola çıkarak indüksiyon akımlarını içeren cismin oluşturduğu elektrik alanı belirten hacim integral denklem ifadesi elde edilmiştir. Hacim integrali, uygun yaklaşımların yapılması ile cismin içindeki ve dışındaki saçılan alanları ifade edebilir. Hacim integralindeki dyadik Green fonksiyonlarından kaynaklanan tekillikler Kısım 3.2.'de farklı üç teknik kullanılarak aşılacaktır.

3.1.1. Hacim Eşdeğer Teoremi

Saçılan alanların belirlenmesinde eşdeğer akım kaynaklarının kullanıldığı hacim eşdeğer teoremi uygulanabilir. Bu teorem elektromanyetik dalganın dielektrik cisim içinde oluşturduğu toplam alanın indüksiyon akımı eşdeğerinin hesaplanması esasına dayanır ve kuramsal esasları aşağıda sunulmuştur.

Saçıcı cisim (\vec{E}^i, \vec{H}^i) düzlemsel dalgaları ile aydınlanmış olsun. Ortamda kaynakların bulunmadığı halde (\vec{E}^i, \vec{H}^i) alanlarının her noktada sağladığı Maxwell denklemleri

$$\text{rot}\vec{E}^i(\vec{r}) = -i\omega\mu_0\vec{H}^i(\vec{r}) \quad (3.1.1a)$$

$$\text{rot}\vec{H}^i(\vec{r}) = i\omega\varepsilon_0\vec{E}^i(\vec{r}) \quad (3.1.1b)$$

şeklindedir. Bu çalışmanın tümünde zamana bağlılık $e^{i\omega t}$ olarak esas alınmıştır. Cismin varlığı durumunda ise, aynı kaynaklar her noktada \vec{E} ve \vec{H} toplam alanlarını oluşturur ve bunların sağladığı Maxwell denklemleri

$$\text{rot}\vec{E}(\vec{r}) = -i\omega\mu_0\vec{H}(\vec{r}) \quad (3.1.2a)$$

$$\text{rot}\vec{H}(\vec{r}) = i\omega\varepsilon_c(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \quad (3.1.2b)$$

şeklindedir. Burada $\varepsilon_c(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r}) - i\sigma(\vec{r})/\omega$, μ_0 sırasıyla, cismin içindeki elektriksel ve manyetik parametreleri temsil eder. (3.1.2a,b)'de rotasyonel operatörünün doğrusallık özelliği göz önünde bulundurularak, (3.1.2a,b)'den (3.1.1a,b) taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\text{rot}(\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}^i(\vec{r})) = -i\omega\mu_0(\vec{H}(\vec{r}) - \vec{H}^i(\vec{r})) \quad (3.1.3a)$$

$$\text{rot}(\vec{H}(\vec{r}) - \vec{H}^i(\vec{r})) = i\omega(\epsilon_c(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) - \epsilon_0\vec{E}^i(\vec{r})) \quad (3.1.3b)$$

elde edilir. Uzayda her noktada \vec{E} ile \vec{E}^i ve \vec{H} ile \vec{H}^i arasındaki farka saçılan alanlar denir ve sırasıyla \vec{E}^s , \vec{H}^s ile gösterilir:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}^i(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}^i(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}^s(\vec{r}) \quad (3.1.4a)$$

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{r}) - \vec{H}^i(\vec{r}) \Rightarrow \vec{H}^i(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{r}) - \vec{H}^s(\vec{r}) \quad (3.1.4b)$$

Saçılan alanın sağladığı (3.1.4a, b) denklemleri kullanılırsa (3.1.3a,b) ifadeleri (3.1.5a,b) ile verilen şekli alır:

$$\text{rot}\vec{E}^s(\vec{r}) = -i\omega\mu_0\vec{H}^s(\vec{r}) \quad (3.1.5a)$$

$$\text{rot}\vec{H}^s(\vec{r}) = i\omega(\epsilon_c(\vec{r}) - \epsilon_0)\vec{E}(\vec{r}) + i\omega\epsilon_0\vec{E}^s(\vec{r}) \quad (3.1.5b)$$

(3.1.5b)'nin sağ tarafındaki ilk terim, sadece cisim içinde sıfırdan farklı değerlere sahip olan hacimsel eşdeğer akımın yoğunluk vektörüdür.

$$\vec{J}^{es}(\vec{r}) = i\omega(\epsilon_c(\vec{r}) - \epsilon_0)\vec{E}(\vec{r}) \quad (3.1.6)$$

Bu halde $\vec{J}_{es}(\vec{r})$ cisimden saçılan alana ilişkin son halini almış olur:

$$\text{rot}\vec{E}^s(\vec{r}) = -i\omega\mu_0\vec{H}^s(\vec{r}) \quad (3.1.7a)$$

$$\text{rot}\vec{H}^s(\vec{r}) = \vec{J}^{es}(\vec{r}) + i\omega\epsilon_0\vec{E}^s(\vec{r}) \quad (3.1.7b)$$

Bundan sonraki kısımlarda (3.1.7a,b) denklemlerindeki saçılan alan bileşenlerinin çözümü için literatürde mevcut olan üç farklı integral teknik kullanılacaktır.

3.1.2. Saçılan Alanın İntegral İfadesi

Bu kısımda (3.1.7a,b) denklemleri, Green fonksiyonu tekniğine dayanarak çözülecektir. Bu amaçla, elektromanyetik uzaya ilişkin vektör ve skaler potansiyellerden faydalanılacaktır.

Lorentz koşulu altında $\vec{E}^s(\vec{r})$ ve $\vec{H}^s(\vec{r})$ alanları, $\vec{A}(\vec{r})$ vektör potansiyeli cinsinden

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -i\omega \left[1 + \frac{1}{k_0^2} \text{grad grad} \cdot \right] \vec{A}(\vec{r}) \quad (3.1.8a)$$

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) \quad (3.1.8b)$$

şeklinde yazılır (Balanis 1989). Burada $k_0 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, boş uzaya ilişkin dalga sayısıdır. Bu şekilde $\vec{E}^s(\vec{r})$ ve $\vec{H}^s(\vec{r})$ alanlarının hesabı $\vec{A}(\vec{r})$ vektör potansiyelinin bulunmasına indirgenmiş olur. $\vec{A}(\vec{r})$ ise, Helmholtz denklemini sağlar (Balanis 1989).

$$\text{lap}\vec{A}(\vec{r}) + k_0^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}_{es}(\vec{r}) \quad (3.1.9)$$

(3.1.9) denkleminin Green fonksiyonu tekniği ile çözümü, kolaylıkla,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{\mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}_{es}(\vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.1.10)$$

olarak elde edilebilir. Burada $g(\vec{r}, \vec{r}')$,

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.1.11)$$

şeklinde tanımlanan boşluktaki skaler Green fonksiyonudur (Balanis 1989).

Cismin içindeki bir r' noktasında x doğrultulu birim, dirac eşdeğer akım kaynağının bulunduğu düşünölsün.

$$\vec{J}_{es}(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{x}, \quad (3.1.12)$$

bu akımdan kaynaklanan vektör potansiyeli (3.1.10) ifadesinden,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{\mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{x} d\mathcal{G}' = \mu_0 g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{x} \quad (3.1.13)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.13) ve (3.1.8a) ifadelerinden yola çıkarak, x doğrultulu birim kaynak tarafından oluşturulan elektrik alan boşluktaki vektör Green fonksiyonu olarak ($\vec{G}_{0x}(\vec{r}, \vec{r}')$) tanımlanır. Bu durumda $\vec{G}_{0x}(\vec{r}, \vec{r}')$,

$$\text{rotrot}\vec{G}_{0x}(\vec{r}, \vec{r}') - k_0^2 \vec{G}_{0x}(\vec{r}, \vec{r}') = -i\sigma\mu_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{x} \quad (3.1.14)$$

dalga denklemini sağlar. Bu denklemin çözümü,

$$\vec{G}_{0x}(\vec{r}, \vec{r}') = -i\omega\mu_0 \left(1 + \frac{1}{k^2} \text{grad grad} \cdot \right) g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{x} \quad (3.1.15)$$

şeklinde olduğu bilinir. Aynı şekilde y ve z doğrultulu birim kaynaklardan meydana gelen, sırası ile, y ve z doğrultulu boşluktaki vektör Green fonksiyonları ($\vec{G}_{0y}(\vec{r}, \vec{r}')$ ve $\vec{G}_{0z}(\vec{r}, \vec{r}')$) da türetilebilir. Bu üç vektör Green fonksiyonunu içeren boşluktaki dyadik Green fonksiyonu

$$\vec{\vec{G}}_0(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{G}_{0x}(\vec{r}, \vec{r}') \hat{x} + \vec{G}_{0y}(\vec{r}, \vec{r}') \hat{y} + \vec{G}_{0z}(\vec{r}, \vec{r}') \hat{z} \quad (3.1.16)$$

şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca boşluktaki dyadik Green fonksiyonu aşağıdaki dalga denklemini sağlar.

$$\text{rot rot } \overline{\overline{G}}_0(\vec{r}, \vec{r}') - k_0^2 \overline{\overline{G}}_0(\vec{r}, \vec{r}') = \overline{\overline{I}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.1.17)$$

Burada $\overline{\overline{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$ şeklinde üç ortonormal vektör ile tanımlı birim dyadiktir. $\overline{\overline{G}}_0(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin fiziksel anlamı; r' noktasındaki dirac akım kaynağının r 'de oluşturduğu elektrik alanıdır.

(3.1.7) Maxwell denklemlerinden ve (3.1.17) ifadesinden saçılan alanın integral ifadesi

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}} \vec{J}^{es}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.1.18)$$

şeklini alır ve burada

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') = -i\omega\mu_0 \left(\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k_0^2} \text{grad grad} \right) g(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.1.19)$$

olmak üzere, şeklinde elde edilir. Bu ifadede $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin üçüncü dereceden tekilliği söz konusudur. Bu integral cismin içindeki \mathcal{G} hacminde (kaynak bölgesinde) bulunan r noktasında ıraksar. Bu çalışmada doğrudan hesaba elverişli olmayan bu integrallerin düzgün şekle getirilmesi üzerinde durulacaktır (Sadiku 2001).

3.2. Yöntem

Bu kısımda, akım ihtiva eden cismin oluşturduğu elektrik alan üzerinde durulacaktır. Eğer gözlemlenen nokta kaynak noktasına yakınsar ise (3.1.18) hacim integralindeki dyadik Green fonksiyonunda üçüncü dereceden tekillikler ortaya çıkar. Bu tekillikler hacim integralini doğrudan hesaba elverişli olmayan şekle sokar. Eğer cismin iç bölgesindeki elektrik alan hesaplanmak isteniyorsa bu tekillikler ortadan kaldırılmalıdır. Bunun için bu kısımda, gecikmeli potansiyellerin kullanıldığı teknik, genelleştirilmiş fonksiyon açınımlarının kullanıldığı teknik ve genel analitik teknik olmak üzere üç farklı teknik açıklanmıştır.

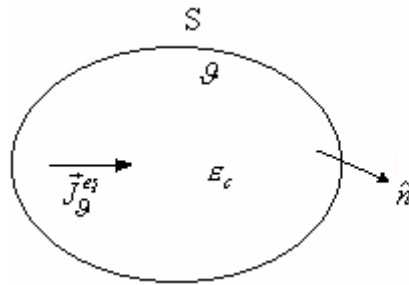
3.2.1. Gecikmeli Potansiyellerin Kullanıldığı Teknik

Bu yöntem, yansıyan alana ait asal değer integralinin de bulunduğu toplam elektrik alan ifadesine moment yönteminin uygulanması ile elde edilen doğrusal denklem sisteminin çözümü esasına dayanır. Cismin içindeki elektrik alan hesaplanırken cismin eksenal simetrik olmasından dolayı sadece çeyrek bölgede çözümün elde edilmesi yeterli olmaktadır.

Kısım 3.2.1.1.'de, asal değer integral ifadesinin elde edilmesi açıklanmıştır. Bunun için dielektrik cismin merkezindeki elektrik alan ilk olarak gecikmeli potansiyeller yöntemi ile hesaplanmaktadır. Daha sonra dyadik Green fonksiyonunu içeren hacim integrali, kaynak bölgesini kapsayan çok küçük bir hacimsel bölgenin integrasyon hacminden çıkarılması ile çözülür. Bu çözümün ayrılan hacmin boyutları sıfıra gider iken limit değeri hesaplanır. Bu iki yöntem ile elde edilen sonuçların eşit olması gerektiğinden yola çıkarak asal değer integral ifadesi tanımlanır. Bu ifadede tekil noktaların bulunduğu hacimsel bölgenin integral hacminden çıkarılmasından dolayı eklenecek olan katkı yer almaktadır.

3.2.1.1. Asal Değer İntegral İfadesine Eklenecek Katkının Hesabı

Hacim integralinde ortaya çıkan tekil noktalar asal değer integral ifadesi tanımlanarak ortadan kaldırılacaktır.



Şekil 3.2.1 İçerisinden akım akan hacim

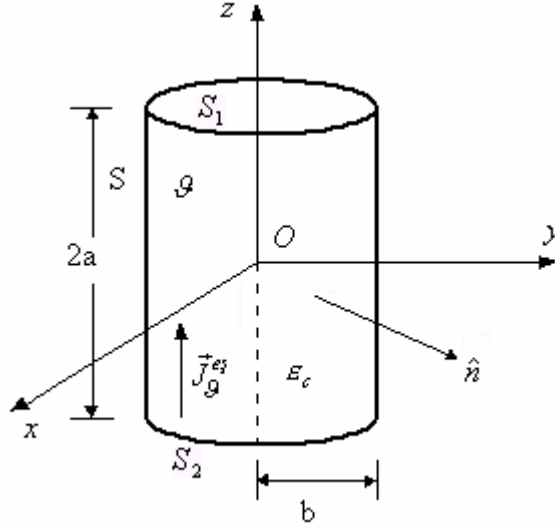
Yük taşıyan hacmin dışındaki elektrik alan (3.1.18)'deki dyadik Green fonksiyonunu içeren hacim integrali ile rahatlıkla ifade edilir. Fakat r , r' noktasına yakınsarken, yani gözlemlenen noktanın cismin içinde bulunması durumunda, Green

dyadiğı tanımsız hal alır ve bunun sonucu olarak (3.1.18) integralinin doğrudan hesaba elverişli olamayacağı görülür. Bölüm 3.2.1.1’de bu düzgün olmayan integralin yapısı incelenecektir.

Örnek olarak şekil 3.2.2’deki üzerinde akım dağılımı mevcut olan dairesel kesitli silindirik sütün yapı incelenmektedir. Akım yoğunluğu \vec{J}_g^{es} homojen ve

$$\vec{J}_g^{es} = J\hat{z} \quad (3.2.1)$$

fazörü ile gösterilsin. Bu akım dağılımı teorik olarak (3.1.18) ifadesini sağladığı düşünülerek oluşturulmuştur. Dielektrik cisim “O” merkezindeki elektrik alanı hesaplanacaktır.



Şekil 3.2.2 Silindirik akım kaynağı

Lorentz koşulu altında elektrik alanın potansiyel terimleri cinsinden verilen

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\phi_e(\vec{r}) - i\omega\vec{A}(\vec{r}) \quad (3.2.2)$$

ifadesinde skaler ve vektörel potansiyellerin kaynaklar cinsinden ifadesi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{G}} \vec{J}_g^{es}(\vec{r}') \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\mathcal{G}' \quad (3.2.3a)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\mathcal{G}} \rho_g^{es}(\vec{r}') \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\mathcal{G}' \quad (3.2.3b)$$

yerlerine yazılırsa,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} grad \left[\int_{\mathcal{G}-\mathcal{G}_a} \rho_g^{es}(\vec{r}') \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\mathcal{G}' + \int_S \rho_S^{es}(\vec{r}') \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS' \right] - \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{G}-\mathcal{G}_a} \vec{J}_g^{es}(\vec{r}') \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\mathcal{G}' \quad (3.2.4)$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.2.4)'te ρ_g^{es} ve ρ_s^{es} sırasıyla eşdeğer hacimsel ve yüzeysel yük yoğunluklarına karşı düşmektedir. Bu ifadede \mathcal{G}_ε hacimsel bölgesi, r merkezli ve ε yarıçaplı bir küre olarak düşünülebilir. Bu integraller, aslında \mathcal{G}_ε hacminin boyutlarının sıfıra yaklaşması durumunda elde edilen limit değerleridir. Potansiyel teorisine göre bu limitler mevcuttur ve \mathcal{G}_ε 'nin şekline bağlı değildir. Seçilen şekle göre $z = \pm a$ için $\rho_g^{es} = 0$, $\rho_s^{es} = \pm J/i\omega$ olur ve burada J sabittir. Bu ifadeler hesaplamayı basitleştirir ve bunun sonucu olarak $\vec{E}(\vec{r})$, z doğrultusunda ve genliği

$$E_z(0) = \underbrace{\frac{Ja}{i\omega\varepsilon} \left[\frac{-e^{-ika}}{a} + \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]}_{\text{skaler potansiyelden gelen katkı}} + \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} J \int_0^a e^{-ik\sqrt{b^2+z^2}} dz + \frac{J}{i\omega\varepsilon} [e^{-ika} - 1]}_{\text{vektör potansiyelden gelen katkı}} \quad (3.2.5)$$

olarak elde edilir (Bladel 1961).

Aynı cismin merkezindeki elektrik alan (3.1.18) ifadesi ile hesaplanırsa elektrik alan ifadelerinin eşit olması beklenir. Yine akım kaynağının homojen ve z doğrultusunda olduğu farz edilirse, ifade

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \vec{J} \int_{\mathcal{G}} \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\mathcal{G}' - \frac{i\omega\mu_0}{4\pi k^2} J \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\text{grad} \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] d\mathcal{G}' \quad (3.2.6)$$

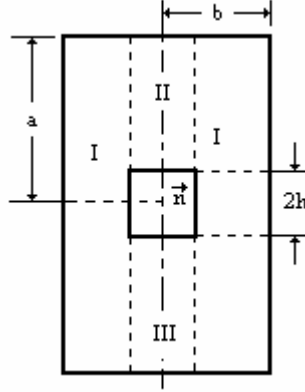
şeklini alır. Bu ifadede ilk terimin herhangi bir ıraksaması söz konusu değildir ve çözümü (3.2.5) ifadesindeki vektör potansiyelden gelen katkıya eşit olur. Üzerinde durulması gereken ikinci terimdir. Bu ifadede r sıfıra eşit iken simetriden dolayı z doğrultulu bir vektör elde edilir.

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right) d\mathcal{G}' \quad (3.2.7)$$

Burada $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ orjine olan uzaklık olmak üzere, (3.2.7) integrali incelenmelidir. Bu integralin $R = 0$ noktasında tanımsız olduğu açıktır. Bu integrali tanımlı hale getirmek için orijin bir \mathcal{G}_ε hacmi ile ayrılmalı ve integral $\mathcal{G} - \mathcal{G}_\varepsilon$ hacmi boyunca tanımlanmalıdır. Buna karşı elde edilen integral yine de yakınsamaz. Bunun nedeni ayrılan hacmin sıfıra yakınsaması durumunda integralin değerinin ayrılan hacmin şekline bağlı olmasıdır. Bu durum bir örnek ile incelenirse; yarıçapı η ve yüksekliği $2h$ olan bir yuvarlak silindir alınacak olursa integral,

$$I = 2\pi \int_{S=I+II+III} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{e^{-ik_0 \sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} \right] r dr dz \quad (3.2.8)$$

şeklini alır ve birkaç işlemde sonra

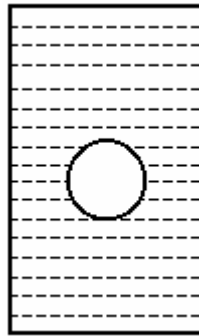


Şekil 3.2.3 Küçük silindir hacminin hariç tutulduğu silindirik hacmin kesiti

$$I = 4\pi \left[1 - e^{-ik} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{-ik_0 \sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\eta^2}{h^2}}} \right] \quad (3.2.9)$$

elde edilir (Bladel 1961). İfadenin \mathcal{G}_ε hacmi sıfıra yaklaşırken limiti silindirin η/h oranına bağlıdır.

Bir başka örnek de orjinin η yarıçaplı küçük küre ile sarıldığı durum olsun. η sıfıra yaklaşırken (3.2.8) integralinin değeri birkaç basit aşamadan sonra



Şekil 3.2.4 Küçük küresel hacmin hariç tutulduğu hacim

$$I = 4\pi \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{-ik_0 \sqrt{a^2+b^2}} - e^{-ik_0 a} + \frac{1}{3} \right] \quad (3.2.10)$$

olarak elde edilir. I burada küçük kürenin yarıçapı sıfıra yaklaşırken iyi tanımlanmıştır. Bu limit değeri integralin “asal değeri” (*principle value-PV*) olarak adlandırılır. Bu ifade (3.2.6)’da yerine yazılıp (3.2.5) ile kıyaslanırsa (3.1.18)’in sağ tarafının anlamı açıklanmış olur.

Belirlenen geometri için ifade,

$$PV \int_{\mathcal{G}} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' = \vec{E}^s(\vec{r}) + \frac{\vec{J}(\vec{r})}{3i\omega\epsilon_0} \quad (3.2.11)$$

şeklini alır (Bladel 1961).

3.2.1.2. Saçılan Alanın Belirlenmesi

Bu bölümde cismin içindeki toplam alan ifadesi elde edilecektir. (3.2.11) alan ifadesi

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^i(\vec{r}) + \vec{E}^s(\vec{r}) \quad (3.2.12)$$

toplam elektrik alanın gelen ve yansıyan alan terimlerinin toplamı şeklindeki ifadesinde yerine yazılır ve (3.1.6) ifadesi göz önünde bulundurulursa,

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = \left[1 + \frac{\tau(\vec{r})}{3i\omega\epsilon_0} \right] \vec{E}(\vec{r}) - PV \int_{\mathcal{G}} \tau(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.2.13)$$

elde edilir. Burada $\tau(\vec{r}) = i\omega(\epsilon_c(\vec{r}) - \epsilon_0)$, $\vec{E}^i(\vec{r})$ cisme gelen, bilinen elektrik alan ve $\vec{E}(\vec{r})$ cismin içindeki bilinmeyen toplam alandır.

Alanların hesabı için, (3.2.13) integrodiferansiyel denkleminde moment yöntemi uygulanarak doğrusal denklem sistemi çözümüne indirgenir.

$\vec{E}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ iç çarpımı,

$$\vec{E}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{bmatrix} G_{xx}(\vec{r}, \vec{r}') & G_{xy}(\vec{r}, \vec{r}') & G_{xz}(\vec{r}, \vec{r}') \\ G_{yx}(\vec{r}, \vec{r}') & G_{yy}(\vec{r}, \vec{r}') & G_{yz}(\vec{r}, \vec{r}') \\ G_{zx}(\vec{r}, \vec{r}') & G_{zy}(\vec{r}, \vec{r}') & G_{zz}(\vec{r}, \vec{r}') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(\vec{r}') \\ E_y(\vec{r}') \\ E_z(\vec{r}') \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$G_{x_p x_q}(\vec{r}, \vec{r}') = -i\omega\mu_0 \left(\delta_{pq} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p} \right) g(\vec{r}, \vec{r}') \quad p, q=1,2,3 \quad (3.2.15a)$$

$$\begin{aligned}\delta_{pq} &= 1 & p = q & \text{ için} \\ \delta_{pq} &= 0 & p \neq q & \text{ için}\end{aligned}\quad (3.2.15b)$$

olarak tanımlıdır (Livesay ve Chen 1974). (3.2.15a)'daki x_1, x_2, x_3 sırasıyla x, y, z olarak tanımlıdır. (3.2.14) matrisinin simetrik olmasından dolayı (3.2.13) ifadesinin her bir skaler bileşeni

$$\left[1 + \frac{\tau(\vec{r})}{3i\omega\epsilon_0}\right] E_{x_p}(\vec{r}) - PV \int_{\mathcal{G}} \tau(\vec{r}') \left[\sum_{q=1}^3 G_{x_p x_q}(\vec{r}, \vec{r}') E_{x_q}(\vec{r}') \right] d\mathcal{G}' = E_{x_p}^i(\vec{r}) \quad p=1,2,3 \quad (3.2.16)$$

şeklinde yazılabilir. Moment metodu kullanılarak (3.2.13) ifadesi doğrusal denklem sistemine dönüştürülebilir. Bunun için cisim N tane parçaya ayrılıyor ve her bir parçada $E(\vec{r})$ ve $\tau(\vec{r})$ 'nin sabit olduğu farz ediliyor. m . hacim elemanı \mathcal{G}_m ile ve merkezi de r_m ile gösterilecektir. (3.2.16) ifadesinin her bir r_m noktasında sağlandığı düşünülerek,

$$\left[1 + \frac{\tau(\vec{r}_m)}{3i\omega\epsilon_0}\right] E_{x_p}(\vec{r}_m) - \sum_{q=1}^3 \sum_{n=1}^N \left[\tau(\vec{r}_n) PV \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' \right] E_{x_q}(\vec{r}_n) = E_{x_p}^i(\vec{r}_m) \quad p=1,2,3, m=1,2,\dots,N \quad (3.2.17)$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir.

$$\Omega_{x_p x_q}^{mn} = \tau(\vec{r}_n) PV \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.2.18)$$

olarak tanımlanırsa (3.2.17) ifadesi

$$\sum_{q=1}^3 \sum_{n=1}^N \left[\Omega_{x_p x_q}^{mn} - \delta_{pq} \delta_{mn} \left(1 + \frac{\tau(\vec{r}_m)}{3i\omega\epsilon_0}\right) \right] E_{x_q}(\vec{r}_n) = -E_{x_p}^i(\vec{r}_m) \quad m=1,2,\dots,N, p=1,2,3 \quad (3.2.19)$$

şeklinde toparlanabilir. $[S_{x_p x_q}]$ $N \times N$ matris olsun ve elemanları,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \Omega_{x_p x_q}^{mn} - \delta_{pq} \delta_{mn} \left[1 + \frac{\tau(\vec{r}_m)}{3i\omega\epsilon_0}\right] \quad (3.2.20)$$

olarak tanımlansın. $[E_{x_p}]$ ve $[E_{x_p}^i]$,

$$[E_{x_p}] = \begin{bmatrix} E_{x_p}(\vec{r}_1) \\ \vdots \\ E_{x_p}(\vec{r}_N) \end{bmatrix} \quad [E_{x_p}^i] = \begin{bmatrix} E_{x_p}^i(\vec{r}_1) \\ \vdots \\ E_{x_p}^i(\vec{r}_N) \end{bmatrix}, \quad p=1,2,3 \quad (3.2.21)$$

N boyutlu vektörler olarak tanımlanırsa ve (3.2.19) ifadesi olası bütün m ve p değerlerini alırsa

$$\begin{bmatrix} [S_{xx}] & [S_{xy}] & [S_{xz}] \\ [S_{yx}] & [S_{yy}] & [S_{yz}] \\ [S_{zx}] & [S_{zy}] & [S_{zz}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E_x] \\ [E_y] \\ [E_z] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} [E_x^i] \\ [E_y^i] \\ [E_z^i] \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

şeklindeki matris denklemleri elde edilir. Bu ifade sembolik olarak ,

$$[S][E] = -[E^i] \quad (3.2.23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[E]$ ve $[E^i]$, $3N$ boyutlu vektörler iken $[S]$ $3N \times 3N$ matristir. N tane seçilen noktanın herbirindeki toplam elektrik alan $[S]$ ' nin tersi alınarak bulunabilir.

(3.2.18) ve (3.2.20) denklemleri $[S_{x_p x_q}]$ matrisinin elemanlarını tanımlar ve

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) PV \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \delta_{pq} \delta_{mn} \left(1 + \frac{\tau(\vec{r}_m)}{3i\omega\epsilon_0} \right) \quad (3.2.24)$$

şeklinde elde edilir.

İlk olarak $[S_{x_p x_q}]$ 'nün asal köşegen üzerinde bulunmayan elemanları inceleniyor.

Bu durumda $\vec{r}_m \notin \mathcal{G}_n$ olduğundan $G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}')$ \mathcal{G}_n boyunca süreklidir. Bunun sonucu olarak hesaplamalardan asal değer işlemleri çıkartılır. Böylece (3.2.24) ifadesi,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}', \quad m \neq n \quad (3.2.25)$$

şeklini alır. Yaklaşıklık olarak (3.2.25) ifadesi,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \Delta\mathcal{G}_n, \quad m \neq n \quad (3.2.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Delta\mathcal{G}_n = \int_{\mathcal{G}_n} d\mathcal{G}'$ yaklaşımı yapılıyor. $[S_{x_p x_q}]$ 'nün

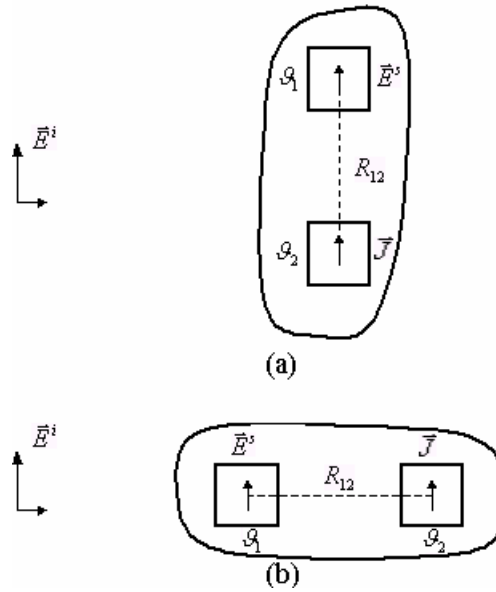
hesaplanması için (3.2.15) ifadesinin kullanılması ile ($m \neq n$) durumu için,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \frac{-i\omega\mu_0 k_0 \tau(\vec{r}_n) \Delta\mathcal{G}_n \exp(-i\gamma_{mn})}{4\pi\gamma_{mn}^3} \left[(\gamma_{mn}^2 - 1 - i\gamma_{mn}) \delta_{pq} + \cos\theta_{x_p}^{mn} \cos\theta_{x_q}^{mn} (3 - \gamma_{mn}^2 + 3i\gamma_{mn}) \right] \quad (3.2.27)$$

elde edilir. Burada, $\gamma_{mn} = k_0 R_{mn}$, $R_{mn} = |\vec{r}_m - \vec{r}_n|$, $\cos\theta_{x_p}^{mn} = (\vec{x}_p^m - \vec{x}_p^n) / R_{mn}$, $\cos\theta_{x_q}^{mn} = (\vec{x}_q^m - \vec{x}_q^n) / R_{mn}$, olarak tanımlıdır. r_m ve r_n sırasıyla, $r_m = (x_1^m, x_2^m, x_3^m)$ ve $r_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)$ şeklindedir.

Eğer N değerleri yeterince büyük seçilirse (3.2.26) ve (3.2.27)'de verilen yaklaşımlardan uygun sonuçlar elde edilebilir. Daha fazla uygunluk için (3.2.25) integrali sayısal olarak hesaplanabilir. $k_0 a \gg 1$ durumunda (3.2.25)'teki integrasyon ifadesinde Green fonksiyonunun frekansa bağımlılığından ötürü etkin bir değişimi ortaya çıkar. Bundan dolayı \mathcal{G}_n hacmi boyunca Green fonksiyonunun değeri olarak alt hacmin merkezindeki değerinin alınması çözümü olumsuz etkiler.

Eğer cismin kesitinin uzun boyutu gelen $\vec{E}^i(\vec{r})$ alanına, Şekil (3.2.5a)'daki gibi, paralel ise (3.2.25)'nin sayısal integrasyonu çözümün doğruluğunu oldukça artırır. $k_0 R_{12} \ll 1$ durumunda Şekil 3.2.5a'daki \mathcal{G}_2 alt hacminin içindeki paralel birim akım tarafından oluşturulan \mathcal{G}_1 içindeki saçılan alanın genliği Şekil 3.2.5b'dekinin genliğinin iki katı kadardır. Genel olarak da Şekil 3.2.5a'daki durum ile daha fazla karşılaşılır.



$[S_{x_p x_q}]$ 'nin diyagonal elemanları için (3.2.24) ifadesi

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(\vec{r}_n) PV \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_n, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \delta_{pq} \left(1 + \frac{\tau(\vec{r}_n)}{3i\omega\epsilon_0} \right) \quad (3.2.28)$$

şeklini alır. \mathcal{G}_n hacminin, r_n merkezli eşdeğer hacim ile, yaklaşımı yapılabilir. Bu sahede (3.2.28) integrali hesaplanabilir. Asal değer integrallerinin hesaplarının yapıldığı Ek 1'deki (E.7) ifadesinde çözümü gerçekleştirilen bu integralin ifadesi yerine yazılırsa,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \delta_{pq} \left[\frac{-2i\omega\mu_0\tau(\vec{r}_n)}{3k_0^2} [\exp(-ik_0 a_n)(1+ik_0 a_n)-1] - \left(1 + \frac{\tau(\vec{r}_n)}{3i\omega\varepsilon_0}\right) \right] \quad (3.2.29)$$

şeklinde elde edilir. Burada $a_n = \left(\frac{3\Delta\mathcal{G}}{4\pi}\right)^{1/3}$ olarak tanımlıdır. Not olarak; eğer \mathcal{G}_n 'nin gerçek boyutu küreden oldukça farklı ise yapılan yaklaşım zayıf sonuçlara neden olur. Böylece $[S_{x_p x_q}]$ matrisinin elemanları hesaplanmış olur (Livesay ve Chen 1974).

3.2.2. Genelleştirilmiş Fonksiyon Açılımlarının Kullanıldığı Teknik

Kısım 3.2.2.1.'de, dyadik Green fonksiyonlarını içeren hacim integrallerinde karşılaşılan tekillikler genelleştirilmiş fonksiyon ifadeleri kullanılarak ortadan kaldırılır. Bu yöntemde $\vec{J}(\vec{r}')$ 'nin \mathcal{G} içindeki bütün noktalarda Hölder şartını sağladığı kabul edilerek hacim integralindeki dyadik Green fonksiyonu ifadesindeki skaler Green fonksiyonunun ikinci genelleştirilmiş fonksiyon olarak düşünülür ve eşdeğer ifadeleri kullanılır. Bu kısımda genelleştirilmiş fonksiyon tanımı ve ispatı yapılmıştır. Saçılan alan ifadeleri hesabı için, Kısım 3.2.1.'e benzer şekilde ekstenel simetrik cisim moment yöntemi kullanılarak küplere ayrıştırılıyor ve çeyrek bölge üzerinde çözüm elde ediliyor.

3.2.2.1. Genelleştirilmiş Fonksiyonların Tanımlanması

(3.1.18) ifadesinde dyadik Green fonksiyonunun açık şekli yerine yazılırsa

$$I_{pq}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}} J(\vec{r}') \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' \quad p, q = 1, 2, 3 \text{ için} \quad (3.2.30)$$

şeklinde integrallerle karşılaşılır. Boşluktaki skaler Green fonksiyonu $g(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin ikinci türevinin üçüncü dereceden tekilliği mevcuttur. Bu tekil noktalar hacim integralini doğrudan hesaba elverişli olmayan şekle sokar.

(3.2.30) ifadesindeki $J(\vec{r}')$ 'nin Hölder şartını sağlaması durumunda $g(\vec{r}, \vec{r}')$ fonksiyonunun ikinci türevinin genelleştirilmiş fonksiyon tanımı yakınsak ifadelere dönüşür.

$J(\vec{r}')$ 'nin r' 'de Hölder şartını sağlaması için, $R \leq c$ koşulunu sağlayan bütün r' noktalarında

$$|J(\vec{r}) - J(\vec{r}')| \leq AR^\alpha \quad (3.2.31)$$

olacak şekilde üç tane pozitif katsayının (c , A , ve α) bulunması gerekir. Bu çalışmada $J(\vec{r}')$ 'nin \mathcal{G} içindeki bütün noktalarda Hölder şartını sağladığı kabul edilecektir.

Skaler Green fonksiyonunun ikinci türevi

$$\left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\}_R + \left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\}_S \quad (3.2.32)$$

olarak tanımlansın. Burada (3.2.32) ifadesinin sağındaki ilk terim, skaler Green fonksiyonunun ikinci türevinin \mathcal{G}_ϵ hacminin dışındaki bölgedeki ifadesi (regüler kısmı), ikinci terim ise \mathcal{G}_ϵ hacmi içerisindeki bölgedeki ifadesidir (tekil kısmı).

$$I_{pq}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}} J(\vec{r}') \left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\} d\mathcal{G}' \quad p, q = 1, 2, 3 \quad (3.2.33a)$$

$$= A_{pq} + B_{pq} + C_{pq} \quad (3.2.33b)$$

Burada

$$A_{pq} = \int_{\mathcal{G} - \mathcal{G}_\alpha} J(\vec{r}') \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' \quad (3.2.33c)$$

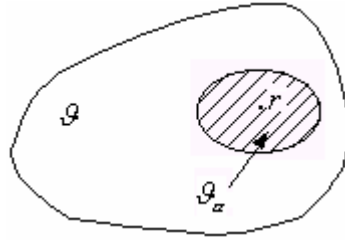
$$B_{pq} = \int_{\mathcal{G}_\alpha} \left[J(\vec{r}') \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} - J(\vec{r}) \frac{\partial^2 g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right] d\mathcal{G}' \quad (3.2.33d)$$

$$C_{pq} = J(\vec{r}') \frac{-1}{4\pi} \int_{\partial \mathcal{G}_\alpha} \frac{(\hat{x}_p \cdot \hat{n})(\hat{x}_q \cdot \hat{R})}{R^2} dS' = J(\vec{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_p \partial x'_q} \int_{\mathcal{G}_\alpha} \frac{1}{4\pi R} d\mathcal{G}' \quad (3.2.33e)$$

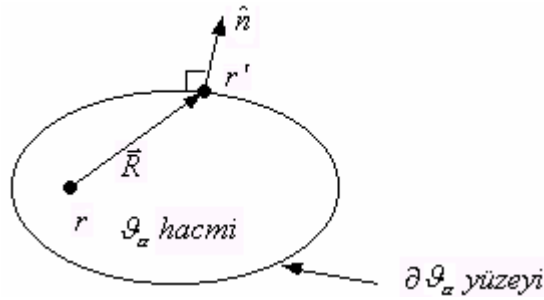
olmak üzere, şeklinde tanımlanır. (3.2.33d) ifadesindeki $g_0(\vec{r}, \vec{r}')$ statik Green fonksiyonu olarak isimlendirilir ve

$$g_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi R} \quad (3.2.34)$$

olarak tanımlanır. (3.1.11)'deki (zamana bağlı haldeki) Green fonksiyonunda $k_0 = 0$ yazılarak elde edilir (Lee ve ark. 1980). (3.2.33) ifadelerindeki diğer terimler Şekil 3.2.6 yardımıyla açıklanacaktır.



Şekil 3.2.6 r gözlem noktasını içeren \mathcal{G}_α hacmi



Şekil 3.2.7 Yüzey parametreleri

\mathcal{G}_α hacmi \mathcal{G} 'nin içinde gelişigüzel bir hacimdir ve r gözlem noktasını içerir.

Burada vurgulanması gereken iki nokta vardır:

- i) \mathcal{G}_α 'nın sonsuz küçük olmasına gerek yoktur.
- ii) $I_{pq}(\vec{r})$ 'nin değeri \mathcal{G}_α 'nın seçimine bağlı değildir.

(3.2.33c)'deki A_{pq} terimi yakınsaktır çünkü \mathcal{G}_α bölgesi integrasyon hacminden çıkarılmıştır. Ayrıca belirtmelidir ki $g(\vec{r}, \vec{r}')$ ve $g_0(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin $R=0$ 'da R^{-1} tekillikleri vardır. Bu durum ve (3.2.31)'deki Hölder şartı (3.2.33d)'deki B_{pq} teriminin yakınsamasını sağlar. (3.2.33e)'deki C_{pq} terimi içinde, $\partial\mathcal{G}_\alpha$ (Şekil 3.2.7) ile gösterilen, \mathcal{G}_α hacmini sınırlayan sınır yüzeyi boyunca olan yüzey integrali mevcuttur. \hat{n} vektörü $\partial\mathcal{G}_\alpha$ yüzeyi üzerindeki r' noktasından dışarı doğru olan birim normaldir ve \hat{R} , $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$ doğrultulu birim vektördür. C_{pq} için alternatif ifade hacim integralli ifade ile verilmiştir.

Bu aşamada (3.2.33) formüllerinin türetilmesi üzerinde durulacaktır. Gel'fand ve Shilov (1964) Green fonksiyonunun türevini

$$f(\vec{r}') = \left\{ \frac{\partial g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_q} \right\} \quad (3.2.35)$$

şeklinde genelleştirilmiş fonksiyon olarak tanımlanmışlardır. Bu (-2)'nci dereceden homojen fonksiyondur. (3.2.35)'in türevini Muller (1969) tanımlamıştır ve bu ifade;

$$\int_{\mathcal{G}} J(\vec{r}') \left\{ \frac{\partial^2 g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\} d\mathcal{G}' = \int_{\mathcal{G}-\mathcal{G}_\alpha} J(\vec{r}') \frac{\partial^2 g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' + \int_{\mathcal{G}_\alpha} [J(\vec{r}') - J(\vec{r})] \frac{\partial^2 g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' + C_{pq} \quad (3.2.36)$$

şeklinindedir. (3.2.36)'daki C_{pq} ,

$$C_{pq} = J(\vec{r}) \int_{\partial \mathcal{G}_\alpha} \frac{\partial g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_q} dx'_s dx'_t \quad s, t \neq p \text{ için} \quad (3.2.37)$$

olarak tanımlıdır. C_{pq} 'yü basitleştirmek için (Şekil 3.2.7'den)

$$\frac{\partial g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_q} = \frac{-\cos \theta_q}{4\pi R^2} = \frac{-\hat{x}_q \cdot \hat{R}}{4\pi R^2} \quad (3.2.38a)$$

$$dx'_s dx'_t = (\hat{x}_p \cdot \hat{n}) dS' \quad (3.2.38b)$$

yazılır ve (3.2.38a,b)'nin (3.2.37)'de yerine konmasıyla C_{pq} 'nün (3.2.33e)'deki son hali elde edilir.

$g_0(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nün türevi ile $g(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nün türevi arasında ilişki kurmak için,

$$\left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\} = \frac{\partial^2 (g(\vec{r}, \vec{r}') - g_0(\vec{r}, \vec{r}'))}{\partial x'_p \partial x'_q} + \left\{ \frac{\partial^2 g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\} \quad (3.2.39)$$

ayrışımı göz önünde bulundurulur. (3.2.39)'un sağ tarafındaki ilk terim iyi tanımlıdır çünkü $R = 0$ komşuluğunda

$$g(\vec{r}, \vec{r}') - g_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi R} \left[(-ik_0 R) + \frac{1}{2} (-ik_0 R)^2 + \dots \right] \quad (3.2.40)$$

şeklinde seri açılımı mevcuttur. (3.2.39) ifadesinin (3.2.33a)'da yerine yazılması ve (3.2.36)'nın kullanılması sonucu (3.2.33b)'deki istenen formül elde edilir.

3.2.2.2. Sonuçların Değerlendirilmesi

(3.2.30)'daki I_{pq} iraksak integralleri herhangi bir \mathcal{G}_α hacmi için (3.2.33) ifadeleri ile tanımlı hale getirilmiştir. Bu kısımda (3.2.33)'teki sonuç ifadeleri yorumlanacaktır.

a) C_{pq} 'nin açık ifadeleri

(3.2.33e)'de tanımlanan C_{pq} terimi birkaç özel \mathcal{G}_α için hesaplanabilir.

i) \mathcal{G}_α hacmi, a yarıçaplı ve içindeki herhangi bir nokta r ile belirlenen bir küre olduğunda;

$$C_{pq} = -\frac{1}{3}J(\vec{r})\delta_{pq} \quad (3.2.48)$$

şeklinde elde edilir.

ii) \mathcal{G}_α hacmi r mekezli fakat gelişigüzel yerleştirilmiş (kübün yüzlerinin x_1, x_2, x_3 eksenlerine dik olmasına gerek yok) olduğunda;

$$C_{pq} = -\frac{1}{3}J(\vec{r})\delta_{pq} \quad (3.2.49)$$

şeklinde elde edilir.

iii) \mathcal{G}_α hacmi r mekezli, a yarıçaplı, $2b$ yükseklikli ve ayrıca eksen x_3 eksenine ile çakışan silindir olduğu durumda;

$$C_{11} = C_{22} = -\frac{b}{2\sqrt{a^2 + b^2}}J(\vec{r}) \quad (3.2.50a)$$

$$C_{33} = \left(\frac{b}{2\sqrt{a^2 + b^2}} - 1 \right) J(\vec{r}) \quad (3.2.50b)$$

$$C_{pq} = 0 \quad p \neq q \quad \text{için} \quad (3.2.50c)$$

şeklinde elde edilir. Gelişigüzel \mathcal{G}_α hacmi için C_{pq} ifadesi,

$$C_{11} + C_{22} + C_{33} = J(\vec{r})\text{lap}\psi(\vec{r}) = -J(\vec{r}) \quad (3.2.51)$$

şeklinindedir. Buradaki ψ ,

$$\psi(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}_\alpha} \frac{1}{4\pi R} d\mathcal{G}' \quad (3.2.52)$$

şeklinde tanımlıdır ve \mathcal{G}_α üzerindeki birim yük dağılımından kaynaklanan elektrostatik potansiyeldir. Bu özellik ilk olarak Yaghjian (1978) tarafından bulunmuştur.

b) Genelleştirilmiş fonksiyonlar kullanılmadan (3.2.33)'deki sonuçlar klasik analizler ile de elde edilebilir.

(3.2.30) ifadesinin,

$$I_{pq}(\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x'_p \partial x'_q} \int_{\mathcal{G}} J(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad p, q = 1, 2, 3 \text{ için} \quad (3.2.53)$$

ifadesine eşit olduğu rahatlıkla gösterilebilir. (3.2.53) ifadesi,

$$I_{pq} = A_{pq} + E_{pq} \quad (3.2.54)$$

şeklinde tekrar yazılıyor. Burada

$$E_{pq} = \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} \int_{\mathcal{G}_\alpha} J(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.2.55)$$

şeklinde tanımlıdır. İlk olarak, (3.2.55)'teki integralin birinci dereceden türevinin alınması ile,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_q} \int_{\mathcal{G}_\alpha} J(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' &= - \int_{\mathcal{G}_\alpha} J(\vec{r}') \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_q} d\mathcal{G}' \\ &= - \int_{\partial \mathcal{G}_\alpha} J(\vec{r}') g(\vec{r}, \vec{r}') (\hat{x}_q \cdot \hat{n}) dS' + \int_{\mathcal{G}_\alpha} \frac{\partial J(\vec{r}')}{\partial x'_q} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

ifadesi elde edilir. Burada son ifade elde edilirken Green teoremi uygulanır. (3.2.56) ifadesinin ikinci türevi alınır

$$E_{pq} = \int_{\partial \mathcal{G}_\alpha} J(\vec{r}') \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p} (\hat{x}_q \cdot \hat{n}) dS' - \int_{\mathcal{G}_\alpha} \frac{\partial}{\partial x'_q} [J(\vec{r}') - J(\vec{r})] \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p} d\mathcal{G}' \quad (3.2.57)$$

elde edilir. Bu ifade elde edilirken $\partial J(\vec{r}') / \partial x'_q = 0$ durumu kullanılmıştır. (3.2.57)'deki son integrale Green teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} E_{pq} &= J(\vec{r}) \int_{\partial \mathcal{G}_\alpha} \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p} (\hat{x}_q \cdot \hat{n}) dS' + \int_{\mathcal{G}_\alpha} [J(\vec{r}') - J(\vec{r})] \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' \\ &= J(\vec{r}) \int_{\partial \mathcal{G}_\alpha} \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p} (\hat{x}_q \cdot \hat{n}) dS' + \int_{\mathcal{G}_\alpha} \left[J(\vec{r}') \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} - J(\vec{r}) \frac{\partial^2 g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right] d\mathcal{G}' \\ &\quad - J(\vec{r}) \int_{\mathcal{G}_\alpha} \frac{\partial^2 (g(\vec{r}, \vec{r}') - g_0(\vec{r}, \vec{r}'))}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

ve son integrale tekrar Green teoremi uygulanırsa

$$E_{pq} = B_{pq} + C_{pq} \quad (3.2.59)$$

elde edilir. (3.2.59)'un (3.2.54)'te yerine konmasıyla (3.2.33)'teki istenen formül elde edilir. Böylece klasik analiz ile elde edilen ispat tamamlanmış olur.

c) Boşluktaki bir $\vec{J}(\vec{r}')$ akım yoğunluğundan kaynaklanan $\vec{E}(\vec{r})$ elektrik alanı $\vec{J}(\vec{r}')$ ve $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$, dyadik Green fonksiyonunun konvolüsyonundan elde edilebilir. Bu ifadeler kısım 3.1.'de açıklanmıştır.

İraksak integrallerden sakınmak ve $\vec{E}(\vec{r})$ 'yi doğru bir şekilde hesaplamak için (3.2.15a)'daki skaler Green fonksiyonunun ikinci dereceden türev ifadeleri (3.2.33)'teki gibi, genelleştirilmiş fonksiyon olarak kabul edilerek, çözülür. Bu durum seçilen bir akım kaynağı ile irdelenecektir.

Akım değerininin sabit ve homojen olduğu ve sadece x doğrultusunda bileşeninin olduğu ($\vec{J} = J\hat{x}$) kabul edilirse akım matrisi,

$$[J] = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.60)$$

olarak ifade edilir. (3.1.18) ifadesi kullanılarak içerisinde akım akan hacmin içindeki elektrik alan ($\vec{J} = J\hat{x}$ Hölder koşulunu sağlıyor) elde edilir.

$$E_1(\vec{r}) = -i\omega\mu_0 J \int_{\mathcal{G}} \left[g(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x_1'^2} \right] d\mathcal{G}' \quad (3.2.61)$$

$$E_1(\vec{r}) = -i\omega\mu_0 J \int_{\mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' + \frac{J}{i\omega\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x_1'^2} d\mathcal{G}' \quad (3.2.62)$$

(3.2.62) ifadesindeki ilk integral ifadesi yakınsaktır ve ikinci integral ifadesi ise R^{-3} tekiliği olan iraksak integraldir. Bunun için ikinci integraldeki skaler Green fonksiyonunun ikinci türevi genelleştirilmiş olarak kabul ediliyor ve (3.2.33) gibi ifade ediliyor.

$$E_1(\vec{r}) = -i\omega\mu_0 J \int_{\mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' + \frac{J}{i\omega\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x_1'^2} \right\} d\mathcal{G}' \quad (3.2.63)$$

Böylece sağ taraftaki ikinci integral yerine (3.2.33) ifadesi yazılırsa,

$$E_1(\vec{r}) = -i\omega\mu_0 J \int_{\mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' + \frac{1}{i\omega\epsilon_0} I_{11}(\vec{r}) \quad (3.2.64a)$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde diğer alan bileşenleri de

$$E_2(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} I_{21}(\vec{r}) \quad (3.2.64b)$$

$$E_3(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} I_{31}(\vec{r}) \quad (3.2.64c)$$

şeklinde elde edilir. Burada $I_{pq}(\vec{r})$ (3.2.33)'te verilmiştir. (3.2.33) ifadelerinde V_α hacminin sıfıra yakınsaması durumunda alan ifadeleri elde edilir (Lee ve ark. 1980).

r' , \mathcal{G}_α hacmini kaplayan yüzey üzerinde bir nokta olsun ve bu yüzey (Şekil 3.2.7'den);

$$\partial\mathcal{G}_\alpha \text{ yüzeyi: } \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{f}(u, v), \quad (3.2.65)$$

şeklinde tanımlanıyor. Burada (u, v) yüzeyin parametreleridir. Örnek olarak (u, v) , r merkezli (θ, ϕ) küresel koordinatları olabilir. $\alpha \rightarrow 0$ iken \mathcal{G}_α şekli, hacmi sıfıra düşene kadar kalır. Bu durumda (3.2.33)'teki $I_{pq}(\vec{r})$ ifadesi,

$$I_{pq}(\vec{r}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [A_{pq} + C_{pq}] \quad (3.2.66)$$

şeklini alır. Burada B_{pq} terimi yok çünkü (3.2.32)'deki Hölder koşulu gereği α sıfıra giderken o da sıfıra gidiyor. (3.2.66)'daki integral asal değer integralidir.

- A_{pq} 'nin limit değerinin elde edilmesi;

$$\lim_{\mathcal{G}_\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathcal{G}-\mathcal{G}_\alpha} J \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' \quad (3.2.67)$$

$p=q$ durumunda A_{pq} 'nin limit değeri Ek.1'deki (E.5) denklemden

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_{pq} = \frac{J}{3} \delta_{pq} \left[-(ik_0 a_0 + 1) e^{-ik_0 a_0} + 1 \right] \quad (3.2.68)$$

olarak belirlenir. Burada $a_0 = \left(\frac{3\mathcal{G}_n}{4\pi} \right)^{1/3}$ olarak tanımlıdır.

- C_{pq} için;

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} C_{pq} = \frac{-J}{3} \delta_{pq} \quad (3.2.69)$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$I_{mn}(\vec{r}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [A_{pq} + C_{pq}] = -\frac{J}{3} (ik_0 R_0 + 1) e^{-ik_0 R_0} \delta_{pq} \quad (3.2.70)$$

elde edilir.

3.2.2.3. Saçılan Alanların Belirlenmesi

Saçılan alanların belirlenmesinde eşdeğer akım kaynaklarının kullanıldığı hacim eşdeğer teoremi kullanılacaktır. Hacim eşdeğer teoremi ile elde edilen dyadik Green fonksiyonlu hacim integral ifadesi, (3.1.18) ve (3.1.6) ifadesi göz önünde bulundurularak,

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}} \tau(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.2.71)$$

şeklinde yazılabilir. $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin üçüncü dereceden tekliği söz konusudur. Bu integral cismin içindeki \mathcal{G} hacminde (kaynak bölgesinde) bulunan r noktasında ıraksar. Bu problem genelleştirilmiş fonksiyonlar kullanılarak çözülecektir.

(3.2.71)'deki alan ifadesi (3.2.12)'deki toplam elektrik alanın gelen ve yansıyan alan terimlerinin toplamı şeklindeki ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) - \int_{\mathcal{G}} \tau(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.2.72)$$

şeklinde elde edilir. $\vec{E}(\vec{r})$ toplam elektrik alanı moment yöntemi kullanılarak bulunabilir.

(3.2.72) ifadesindeki $\vec{E}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ iç çarpımı (3.2.14,15a,b) denklemleri ile tanımlanmıştır.

Böylece (3.2.72) ifadesinin herbir skaler bileşeni.

$$E_{x_p}(\vec{r}) - \int_{\mathcal{G}} \tau(\vec{r}') \left[\sum_{q=1}^3 G_{x_p x_q}(\vec{r}, \vec{r}') E_{x_q}(\vec{r}') \right] d\mathcal{G}' = E_{x_p}^i(\vec{r}) \quad p=1,2,3 \quad (3.2.73)$$

şeklinde yazılabilir. Moment metodu kullanılarak (3.2.72) ifadesi lineer denklem sistemine dönüşürülebilir. Bunun için cisim N tane parçaya ayrılıyor ve herbir parçada $E(\vec{r})$ ve $\tau(\vec{r})$ 'nin sabit olduğu kabul ediliyor. m 'ninci hacim \mathcal{G}_m ile gösterilecek ve bu

hacmin merkezi r_m ile gösterilecektir. (3.2.73) ifadesinin her bir r_m 'de sağlandığı düşünülerek,

$$E_{x_p}(\vec{r}_m) - \sum_{q=1}^3 \sum_{n=1}^N \left[\tau(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' \right] E_{x_q}(\vec{r}_n) = E_{x_p}^i(\vec{r}_m) \quad (3.2.74)$$

elde edilir. Burada $p=1,2,3$, $m=1,2,\dots,N$ 'dir.

$$\Omega_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.2.75)$$

olarak tanımlanırsa (3.2.74) ifadesi

$$\sum_{q=1}^3 \sum_{n=1}^N \left[\Omega_{x_p x_q}^{mn} - \delta_{pq} \delta_{mn} \right] E_{x_q}(\vec{r}_n) = -E_{x_p}^i(\vec{r}_m) \quad m=1,2,\dots,N, \quad p=1,2,3 \quad (3.2.76)$$

şekline dönüşür. $[S_{x_p x_q}]$ $N \times N$ matris olsun ve elemanları,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \Omega_{x_p x_q}^{mn} - \delta_{pq} \delta_{mn} \quad (3.2.77)$$

olarak tanımlansın. $[E_{x_p}]$ ve $[E_{x_p}^i]$, (3.2.21) ifadeleriyle tanımlanan N boyutlu vektörlerdir. (3.2.76) ifadesi olası bütün m ve n değerlerini alırsa (3.2.22) şeklindeki matris denklemi elde edilir. Bu ifade sembolik olarak (3.2.23)'e benzer şekilde yazılabilir. Burada $[E]$ ve $[E^i]$ nin $3N$ boyutu var iken $[S]$ $3N \times 3N$ matristir. N 'tane seçilen noktanın herbirindeki toplam elektrik alan $[S]$ 'nin tersi alınarak bulunabilir.

(3.2.75) ve (3.2.77) denklemleri $[S_{x_p x_q}]$ matrisinin elemanlarını tanımlar. Bu denklemlerden,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \delta_{pq} \delta_{mn} \quad (3.2.78)$$

şeklinde elde edilir.

İlk olarak $[S_{x_p x_q}]$ 'nin asal köşegen üzerinde bulunmayan elemanlar inceleniyor. Bu durumda $r_m \notin \mathcal{G}_n$ olduğundan $G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}')$ \mathcal{G}_n boyunca süreklidir. Bunun sonucu olarak hesaplamalarda herhangi bir tekil nokta ile karşılaşılmaz. Böylece (3.2.78) ifadesi,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (3.2.79)$$

şeklini alır. Yaklaşık olarak (3.2.79) ifadesi,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \Delta \mathcal{G}_n \quad (3.2.80)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\Delta \mathcal{G}_n = \int_{\mathcal{G}_n} d\mathcal{G}'$ yaklaşımı yapılıyor. $[S_{x_p x_q}]$ 'nin

hesaplanması için (3.2.15a) ifadesinin kullanılması ile ($m \neq n$) durumu için,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \frac{-i\omega\mu_0 k_0 \tau(\vec{r}_n) \Delta \mathcal{G}_n \exp(-j\alpha_{mn})}{4\pi\alpha_{mn}^3} \left[(\gamma_{mn}^2 - 1 - i\gamma_{mn}) \delta_{pq} + \cos\theta_{x_p}^{mn} \cos\theta_{x_q}^{mn} (3 - \gamma_{mn}^2 + 3i\gamma_{mn}) \right] \quad (3.2.81)$$

elde edilir. Burada, $\gamma_{mn} = k_0 R_{mn}$, $R_{mn} = |r_m - r_n|$, $\cos\theta_{x_p}^{mn} = (x_p^m - x_p^n)/R_{mn}$, $\cos\theta_{x_q}^{mn} = (x_q^m - x_q^n)/R_{mn}$, olarak tanımlıdır. r_m ve r_n noktaları sırasıyla, $r_m = (x_1^m, x_2^m, x_3^m)$ ve $r_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)$ olarak belirlenmiştir.

Eğer N değerleri yeterince büyük seçilirse (3.2.80) ve (3.2.81)'de verilen yaklaşımlardan uygun sonuçlar elde edilebilir. Daha fazla uygunluk için (3.2.79) sayısal olarak integrallenebilir.

$[S_{x_p x_q}]$ 'nin asal köşegen üzerindeki elemanları için (3.2.78) ifadesi

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_n, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \delta_{pq} \quad (3.2.82)$$

şeklini alır. \mathcal{G}_n hacminin, r_n merkezli eşdeğer hacim ile, yaklaşımı yapılabilir. Bu ifadede (3.2.15) dyadik Green ifadesi yerine yazılırsa,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{G}_n} -i\omega\mu_0 \left(\delta_{pq} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p} \right) g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \delta_{pq}$$

$$S_{x_p x_q}^{mn} = -i\omega\mu_0 \tau(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{G}_n} \delta_{pq} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \frac{\tau(\vec{r}_n)}{i\omega\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}_n} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \delta_{pq} \quad (3.2.83)$$

elde edilir. İkinci integraldeki skaler Green fonksiyonunu genelleştirilmiş fonksiyon ifadeleri yazılırsa (Lee ve ark. 1980) ve

$$S_{x_p x_q}^{mn} = -i\omega\mu_0 \tau(\vec{r}_n) \int_{\mathcal{G}_n} \delta_{pq} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \frac{\tau(\vec{r}_n)}{i\omega\epsilon_0} \int_{\mathcal{G}_n} \left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x_q \partial x_p} \right\} d\mathcal{G}' - \delta_{pq} \quad (3.2.84)$$

şeklinde yazılır. (3.2.84) ifadesinin birinci teriminin integral ifadesinin çözümü için (Ek 1)'deki (E.1) ifadesi kullanılarak

$$\int_{\mathcal{G}_n} g(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' = \frac{1}{k_0^2} \left[(ik_0 a_n + 1) e^{-ik_0 a_n} - 1 \right] \quad (3.2.85)$$

elde edilir. İkinci terim için ise (3.2.33) ifadeleri kullanılır.

$$I_{pq}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}_n} \left\{ \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right\} d\mathcal{G}' \quad p, q = 1, 2, 3 \quad (3.2.86a)$$

$$= A_{pq} + B_{pq} + C_{pq} \quad (3.2.86b)$$

burada

$$A_{pq} = \int_{\mathcal{G}_n - \mathcal{G}_\alpha} \frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} d\mathcal{G}' \quad (3.2.86c)$$

$$B_{pq} = \int_{\mathcal{G}_\alpha} \left[\frac{\partial^2 g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} - \frac{\partial^2 g_0(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial x'_p \partial x'_q} \right] d\mathcal{G}' \quad (3.2.86d)$$

$$C_{pq} = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathcal{G}_\alpha} \frac{(\hat{x}_p \cdot \hat{n})(\hat{x}_q \cdot \hat{R})}{R^2} dS' = \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} \int_{\mathcal{G}_\alpha} \left(\frac{1}{4\pi R} \right) d\mathcal{G}' \quad (3.2.86e)$$

olarak tanımlanır. İfadelerdeki integraller $\mathcal{G}_\alpha \rightarrow 0$ iken limit değerlerinde hesaplanırsa,

$$\lim_{\mathcal{G}_\alpha \rightarrow 0} A_{pq} = \frac{\delta_{pq}}{3} \left[-(ik_0 a_n + 1) e^{-ik_0 a_n} + 1 \right] \quad (3.2.87)$$

olarak belirlenir. Burada $a_n = \left(\frac{3\mathcal{G}_n}{4\pi} \right)^{1/3}$ olarak tanımlıdır. Diğer ifadeler,

$$\lim_{\mathcal{G}_\alpha \rightarrow 0} B_{pq} = 0 \quad (3.2.88)$$

$$\lim_{\mathcal{G}_\alpha \rightarrow 0} C_{pq} = -\frac{\delta_{pq}}{3} \quad (3.2.89)$$

olarak hesaplanır. Tüm bu ifadeler (3.2.84)'te yerine yazılırsa

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \frac{\tau(\vec{r}_n) \delta_{pq}}{i\omega \varepsilon_0} \left[(ik_0 a_n + 1) e^{-ik_0 a_n} - 1 \right] - \frac{\tau(\vec{r}_n) \delta_{pq}}{3i\omega \varepsilon_0} (ik_0 a_n + 1) e^{-ik_0 a_n} - \delta_{pq}$$

$$S_{x_p x_q}^{nn} = \delta_{pq} \left[\frac{-2i\omega \mu_0 \tau(\vec{r}_n)}{3k_0^2} \left[\exp(-ik_0 a_n)(1 + ik_0 a_n) - 1 \right] - \left(1 + \frac{\tau(\vec{r}_n)}{3i\omega \varepsilon_0} \right) \right] \quad (3.2.90)$$

elde edilir. (3.2.90) ifadesi Kısım 3.2.1.'de elde edilen (3.2.29) ifadesiyle aynıdır. Böylece genelleştirilmiş fonksiyon ifadelerinin kullanılmasıyla $g(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin ikinci türevinin hacim üzerinde integrallenemeyen R^{-3} tekilliği kaldırılmış oldu.

Eğer \mathcal{G}_n 'nin gerçek boyutu küreden oldukça farklı ise yapılan yaklaşım zayıf sonuçlara neden olur.

3.2.3. Genel Analitik Teknik

Bu kısımda çok küçük hacim cisimden çıkarılmadan dyadik Green fonksiyonunun integralinin hesaplanabildiği genel analitik teknik üzerinde durulacaktır. Bu yöntemde dyadik Green fonksiyonunu içeren hacim integrali, uygun analitik ifadeler ve gradyant teoremi ile yüzey integraline dönüştürülür. Böylece dyadik Green fonksiyonunun hacim integralinde oluşturduğu tekillik problemi ortadan kaldırılmış olur. Yani cismi oluşturan her bir parçanın yüzeyleri ile merkez noktalarının kesişmemesinden ötürü tekillik ortadan kalkar. Yine bu bölümde moment yöntemi ile integrodiferansiyel denklem lineer denklem sistemine dönüştürülerek çeyrek bölge üzerinde çözülmüştür.

Dyadik Green fonksiyonu genel olarak genelleştirilmiş veya dağılım fonksiyonu olarak tanımlanır. Genel olarak hacim integralini hesaplamak için kullanılan prosedür; tekilliğin etrafındaki çok küçük hacmin integrasyon hacminden çıkarıldığı asal hacim yöntemidir. Bu bölümde hacim çıkarılmadan dyadik Green fonksiyonunun integralinin hesaplanabildiği genel analitik teknik üzerinde durulacaktır.

Genel analitik teknik farklı şekildeki hacimler boyunca olan integraller için kullanılabilir. Burada dyadik Green fonksiyonunun küre ve küp boyunca olan integralleri için açık ifadeler türetilecektir. Ayrıca küresel hacimler için açıklanan integrasyon tekniğinin kullanılması ile basit analitik ifadelerin türetilebildiği ve bu ifadelerin asal hacim yöntemi ile elde edilenlerle aynı olduğu gösterilecektir. Bu integraller için olan analitik ifadeler, gözlem noktasının cismin içinde veya dışında olmasına bakılmadan mevcuttur. Bunun nedeni ifadelerin sadece yüzey integralleri içermesidir. Ayrıca bunların hesabı oldukça yüksek doğruluk oranında yapılabilir.

Dyadik Green fonksiyonunun kaynak bölgesindeki tekilliği geniş bir şekilde Bladel (1961) ve Yaghjian (1980) tarafından araştırılmıştır. Bunların çalışmaları, dyadik Green fonksiyonunu sadece delta dirac fonksiyonu tekilliğini içeren genelleştirilmiş fonksiyon olarak ve dağılım fonksiyonu olarak göstermiştir. Bunun hesabı da asal hacim metodu denen ve tekilliğin etrafındaki hacmin ayrıştırıldığı yaklaşım ile yapılır. Asal hacim integrasyonunda ayrıştırma hacimlerinin farklı şekilleri için sıkça eşdeğer hacim (3D de küre) yaklaşımı yapılmaktadır.

Asal hacim metodu şu ana kadar kaynak bölgesindeki dyadik Green fonksiyonunun integralini sağlayan yaklaşık tek yöntem olmuştur. Bu kısımda asal

hacmin aslında gerekmediği gösterilecek ve alternatif bir yöntem üzerinde durulacaktır. Bu bölümdeki ifadeler herhangi bir şekildeki ayrıştırma hacmi ve uzaydaki herhangi bir konum için geçerlidir.

3.2.3.1. Genel İntegral Türetme Tekniği

Asal hacim metodu, kaynak bölgesindeki dyadik Green fonksiyonunun neden olduğu tekilliği çok küçük bir hacmin hariç tutulması ile aşar. Buna karşı hariç tutulan hacmin gerekmediği ve

$$\bar{\bar{\Omega}}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}} \bar{\bar{G}}(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.2.91)$$

ifadesinin doğrudan hesaplanabileceği gösterilebilir. (3.1.19) ifadesi (3.2.91)'de yerine yazılırsa,

$$\bar{\bar{\Omega}}(\vec{r}) = -i\omega\mu_0 \left(\bar{\bar{I}} + \frac{1}{k_0^2} \text{grad grad} \right) f(\vec{r}) \quad (3.2.92)$$

elde edilir. Burada ,

$$f(\vec{r}) = \int_{\mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.2.93)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\text{lapg}(\vec{r}, \vec{r}') + k_0^2 g(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

ifadesinden;

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{k_0^2} \delta(\vec{r} - \vec{r}') - \frac{1}{k_0^2} \text{lapg}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.2.94)$$

elde edilir. (3.2.94), (3.2.93)'de yerine yazılırsa

$$f(\vec{r}) = -\frac{1}{k_0^2} \int_{\mathcal{G}} \text{lapg}(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' - \frac{1}{k_0^2} \int_{\mathcal{G}} \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.2.95)$$

elde edilir. Boşluktaki skaler Green fonksiyonun gradyanları arasındaki $\text{grad} = -\text{grad}'$ bağıntısının (burada gradyanın üssü kaynak koordinatlarına bağlı diferansiyeli belirtmek için konulmuştur) kullanılmasıyla;

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{k_0^2} \text{div} \int_{\mathcal{G}} \text{grad}' g(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' - \frac{1}{k_0^2} D(\vec{r}) \quad (3.2.96)$$

elde edilir. Burada,

$$D(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & r \in \mathcal{G} \\ 0 & r \notin \mathcal{G} \end{cases} \quad (3.2.97)$$

olarak tanımlıdır. Gradyant teoremi kullanılarak,

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{k_0^2} \operatorname{div} \oint_{\partial \mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' - \frac{1}{k_0^2} D(\vec{r}) \quad (3.2.98)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\partial \mathcal{G}$, \mathcal{G} integrasyon hacmini kaplayan kapalı yüzey ve \hat{n} , $\partial \mathcal{G}$ yüzey sınırındaki dışa doğru olan birim normal vektörüdür. Benzer işlemler uygulanarak,

$$\operatorname{grad} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \oint_{\partial \mathcal{V}} g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' \quad (3.2.99)$$

elde edilir. (3.2.98) ve (3.2.99) (3.2.92)'de yerlerine yazılırsa;

$$\bar{\bar{\Omega}}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \left[-D(\vec{r}) \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{I}} \operatorname{div} \oint_{\partial \mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' - \operatorname{grad} \oint_{\partial \mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' \right] \quad (3.2.100)$$

elde edilir. Böylece hacim integrali yüzey integraline dönüştürülmüş oldu. Sınırlı sayıdaki hücreler için hacim sınırı ile hücre merkezi arasındaki uzaklık hiçbir zaman sıfır olamaz. Bu durum (3.2.100) ifadesinin kullanılması ile tekilliğin tamamen kaldırıldığını gösterir. (3.2.100) denkleminin bir diğer avantajı da uzaydaki herhangi bir noktadaki integralin hesabında kullanılabilmesidir. Bu formüller diğer nümerik yöntemlere nazaran daha düşük hesaplama vakti sağlarlar. Bunun nedeni yüzey integrallerinin hesabı hacim integrallerine göre daha etkili olmasıdır.

(3.2.100) denklemi herhangi bir şekildeki hücre için evrenseldir. Hücre şekline bağlı olarak, $\partial \mathcal{G}$ farklı yüzeyleri temsil eder, böylece farklı ifadeler elde edilebilir. (3.2.100)'deki ifadenin küpe ve küreye uygulanması sonraki kısımlarda yapılacaktır.

3.2.3.2. Küp Boyunca İntegrasyon

Dyadik Green fonksiyonunun küp üzerindeki integrasyonu incelenecektir. Bloğun merkezinin (x_n, y_n, z_n) 'de bulunduğu, gözlem noktasının (x, y, z) 'de bulunduğu ve küpün kenar uzunluklarının her birinin $2a$ olduğu farz edilerek bir kartezyen koordinat sistemi düşünölsün. (3.2.100) denklemi

$$\bar{\bar{\Omega}}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega \epsilon_0} \left[-D(\vec{r}) \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{I}} \operatorname{div} (I_x(\vec{r}) \hat{x} + I_y(\vec{r}) \hat{y} + I_z(\vec{r}) \hat{z}) - \operatorname{grad} (I_x(\vec{r}) \hat{x} + I_y(\vec{r}) \hat{y} + I_z(\vec{r}) \hat{z}) \right] \quad (3.2.101)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$I_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{y_n-a}^{y_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} \left(\frac{e^{-ik_0 R_{x1}}}{R_{x1}} - \frac{e^{-ik_0 R_{x2}}}{R_{x2}} \right) dz' dy' \quad (3.2.102)$$

$$I_y(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} \left(\frac{e^{-ik_0 R_{y1}}}{R_{y1}} - \frac{e^{-ik_0 R_{y2}}}{R_{y2}} \right) dz' dx' \quad (3.2.103)$$

$$I_z(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{y_n-a}^{y_n+a} \left(\frac{e^{-ik_0 R_{z1}}}{R_{z1}} - \frac{e^{-ik_0 R_{z2}}}{R_{z2}} \right) dy' dx' \quad (3.2.104)$$

$$R_{x1} = \left[(x - x_n - a)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.105)$$

$$R_{x2} = \left[(x - x_n + a)^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.106)$$

$$R_{y1} = \left[(x - x')^2 + (y - y_n - a)^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.107)$$

$$R_{y2} = \left[(x - x')^2 + (y - y_n + a)^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.108)$$

$$R_{z1} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z_n - a)^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.109)$$

$$R_{z2} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z_n + a)^2 \right]^{1/2} \quad (3.2.110)$$

olarak tanımlıdır.

Gradyant ve diverjansın genel ifadelerinin kullanılmasıyla (3.2.101) ifadesi

$$\bar{\bar{\Omega}}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} \left[-D(\vec{r}) + v_{xx}(\vec{r}) + v_{yy}(\vec{r}) + v_{zz}(\vec{r}) \right] \bar{\bar{I}} - \\ v_{xx}(\vec{r}) \hat{x}\hat{x} - v_{xy}(\vec{r}) \hat{x}\hat{y} - v_{xz}(\vec{r}) \hat{x}\hat{z} - v_{yx}(\vec{r}) \hat{y}\hat{x} - \\ v_{yy}(\vec{r}) \hat{y}\hat{y} - v_{yz}(\vec{r}) \hat{y}\hat{z} - v_{zx}(\vec{r}) \hat{z}\hat{x} - v_{zy}(\vec{r}) \hat{z}\hat{y} - v_{zz}(\vec{r}) \hat{z}\hat{z} \end{array} \right\} \quad (3.2.111)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.111)'de birim dyadiğin üç ortonormal vektörlü ifadesi yerine yazılmasıyla

$$\bar{\bar{\Omega}}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} \left[-D(\vec{r}) + v_{yy}(\vec{r}) + v_{zz}(\vec{r}) \right] \hat{x}\hat{x} - v_{xy}(\vec{r}) \hat{x}\hat{y} \\ -v_{xz}(\vec{r}) \hat{x}\hat{z} - v_{yx}(\vec{r}) \hat{y}\hat{x} + \left[-D(\vec{r}) + v_{xx}(\vec{r}) + v_{zz}(\vec{r}) \right] \hat{y}\hat{y} \\ -v_{yz}(\vec{r}) \hat{y}\hat{z} - v_{zx}(\vec{r}) \hat{z}\hat{x} - v_{zy}(\vec{r}) \hat{z}\hat{y} + \left[-D(\vec{r}) + v_{xx}(\vec{r}) + v_{yy}(\vec{r}) \right] \hat{z}\hat{z} \end{array} \right\} \quad (3.2.112)$$

şeklini alır. Matris ifadesinin kullanılmasıyla,

$$\bar{\bar{\Omega}}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \begin{bmatrix} -D(\vec{r}) + v_{yy}(\vec{r}) + v_{zz}(\vec{r}) & -v_{xy}(\vec{r}) & -v_{xz}(\vec{r}) \\ -v_{yx}(\vec{r}) & -D(\vec{r}) + v_{xx}(\vec{r}) + v_{zz}(\vec{r}) & -v_{yz}(\vec{r}) \\ -v_{zx}(\vec{r}) & -v_{zy}(\vec{r}) & -D(\vec{r}) + v_{xx}(\vec{r}) + v_{yy}(\vec{r}) \end{bmatrix} \quad (3.2.113)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
v_{xx}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} [I_x(\vec{r})] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{y_n-a}^{y_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} \left(\frac{(x-x_n+a)e^{-ik_0R_{x2}}(ik_0R_{x2}+1)}{R_{x2}^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(x-x_n-a)e^{-ik_0R_{x1}}(ik_0R_{x1}+1)}{R_{x1}^3} \right) dz'dy' \right] \tag{3.2.114}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{yy}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial y} [I_y(\vec{r})] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} \left(\frac{(y-y_n+a)e^{-ik_0R_{y2}}(ik_0R_{y2}+1)}{R_{y2}^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(y-y_n-a)e^{-ik_0R_{y1}}(ik_0R_{y1}+1)}{R_{y1}^3} \right) dz'dx' \right] \tag{3.2.115}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{zz}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial z} [I_z(\vec{r})] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{y_n-a}^{y_n+a} \left(\frac{(z-z_n+a)e^{-ik_0R_{z2}}(ik_0R_{z2}+1)}{R_{z2}^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(z-z_n-a)e^{-ik_0R_{z1}}(ik_0R_{z1}+1)}{R_{z1}^3} \right) dy'dx' \right] \tag{3.2.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{yx}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial y} [I_x(\vec{r})] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{y_n-a}^{y_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} (y-y') \left(\frac{e^{-ik_0R_{x2}}(ik_0R_{x2}+1)}{R_{x2}^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{e^{-ik_0R_{x1}}(ik_0R_{x1}+1)}{R_{x1}^3} \right) dz'dy' \right] \tag{3.2.117}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{zx}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial z} [I_x(\vec{r})] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{y_n-a}^{y_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} (z-z') \left(\frac{e^{-ik_0R_{x2}}(ik_0R_{x2}+1)}{R_{x2}^3} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\left. -\frac{e^{-ik_0 R_{x1}} (ik_0 R_{x1} + 1)}{R_{x1}^3} \right) dz' dy' \right] \quad (3.2.118)$$

$$\begin{aligned} v_{xy}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} [I_y(\vec{r})] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} (x-x') \left(\frac{e^{-ik_0 R_{y2}} (ik_0 R_{y2} + 1)}{R_{y2}^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{-ik_0 R_{y1}} (ik_0 R_{y1} + 1)}{R_{y1}^3} \right) dz' dx' \right] \end{aligned} \quad (3.2.119)$$

$$\begin{aligned} v_{zy}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial z} [I_y(\vec{r})] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{z_n-a}^{z_n+a} (z-z') \left(\frac{e^{-ik_0 R_{y2}} (ik_0 R_{y2} + 1)}{R_{y2}^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{-ik_0 R_{y1}} (ik_0 R_{y1} + 1)}{R_{y1}^3} \right) dz' dx' \right] \end{aligned} \quad (3.2.120)$$

$$\begin{aligned} v_{xz}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} [I_z(\vec{r})] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{y_n-a}^{y_n+a} (x-x') \left(\frac{e^{-ik_0 R_{z2}} (ik_0 R_{z2} + 1)}{R_{z2}^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{-ik_0 R_{z1}} (ik_0 R_{z1} + 1)}{R_{z1}^3} \right) dy' dx' \right] \end{aligned} \quad (3.2.121)$$

$$\begin{aligned} v_{yz}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial y} [I_z(\vec{r})] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_n-a}^{x_n+a} \int_{y_n-a}^{y_n+a} (y-y') \left(\frac{e^{-ik_0 R_{z2}} (ik_0 R_{z2} + 1)}{R_{z2}^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{-ik_0 R_{z1}} (ik_0 R_{z1} + 1)}{R_{z1}^3} \right) dy' dx' \right] \end{aligned} \quad (3.2.122)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadelerde

$$v_{xy} = v_{yx}$$

$$v_{xz} = v_{zx} \quad (3.2.123)$$

$$v_{yz} = v_{zy}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $r = r'$ için

$$v_{xy} = v_{xz} = v_{yz} = 0 \quad (3.2.124)$$

olduğu görülür. Bu durumda tekil hacim için;

$$\bar{\Omega}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \begin{bmatrix} -1 + v_{yy}^s(\vec{r}) + v_{zz}^s(\vec{r}) & 0 & 0 \\ 0 & -1 + v_{xx}^s(\vec{r}) + v_{zz}^s(\vec{r}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 + v_{xx}^s(\vec{r}) + v_{yy}^s(\vec{r}) \end{bmatrix} \quad (3.2.125)$$

matrisi elde edilir. Burada

$$v_{xx}^s(\vec{r}) = \frac{a}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{e^{-ik_0 R_x} (ik_0 R_x + 1)}{R_x^2} \right) dz' dy' \quad (3.2.126)$$

$$v_{yy}^s(\vec{r}) = \frac{a}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{e^{-ik_0 R_y} (ik_0 R_y + 1)}{R_y^2} \right) dz' dx' \quad (3.2.127)$$

$$v_{zz}^s(\vec{r}) = \frac{a}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{e^{-ik_0 R_z} (ik_0 R_z + 1)}{R_z^2} \right) dy' dx' \quad (3.2.128)$$

$$R_x = [a^2 + y'^2 + z'^2]^{1/2} \quad (3.2.129)$$

$$R_y = [x'^2 + a^2 + z'^2]^{1/2} \quad (3.2.130)$$

$$R_z = [x'^2 + y'^2 + a^2]^{1/2} \quad (3.2.131)$$

olarak tanımlıdır. Görüldüğü gibi hacim içindeki tekillik için herhangi bir ek işlem yapılmamıştır. Bunun nedeni işlem yapılan yüzey integralleri ile cismin içindeki tekil noktaların kesişmesinin mümkün olmayışıdır.

Bu bölümdeki matris ifadesi cismi oluşturan tek bir parça hacim için elde edilmiştir. Cismin tamamı için gereken ifade, her biri küp şeklindeki hacimlerin oluşturduğu katkının moment metodu ile birleştirilmesi ile elde edilecektir. Bir sonraki kısımda bu konu üzerine durulacaktır.

3.2.3.3. Saçılan Alanların Belirlenmesi

Saçılan alanların belirlenmesinde eşdeğer akım kaynaklarının kullanıldığı hacim eşdeğer teoremi kullanılacaktır. (3.2.71)'deki hacim eşdeğer teoremi ile elde edilen dyadik Green fonksiyonlu hacim integral ifadesinde $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ 'nin üçüncü dereceden tekliği söz konusudur. Bu integral cismin içindeki \mathcal{G} hacminde (kaynak bölgesinde) bulunan r noktasında ıraksar.

Kısım 3.2.2.3'te uygulanan yol izlenerek moment matrisi ifadesi

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) \int_{\mathcal{G}_n} G_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}') d\mathcal{G}' - \delta_{pq} \delta_{mn} \quad (3.2.132)$$

şeklinde elde edilir. (3.2.113) göz önünde bulundurularak ve cismin N tane küpten meydana geldiği düşünülerek,

$$\overline{\overline{\Omega}}^{mn}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -D(\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{yy}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{zz}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) & -v_{xy}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) & -v_{xz}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \\ -v_{yx}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) & -D(\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{xx}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{zz}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) & -v_{yz}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \\ -v_{zx}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) & -v_{zy}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) & -D(\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{xx}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{yy}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \end{bmatrix} \quad (3.2.133)$$

ifadesi yazılabilir. Matrisin elemanları kısım 3.2.3.2.'de tanımlanmıştır. Bu matristen yola çıkarak moment matrisi oluşturulabilir.

(3.2.91) ifadesi de göz önünde bulundurularak,

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) \Omega_{x_p x_q}^{mn} - \delta_{pq} \delta_{mn} \quad (3.2.134)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $[S_{x_p x_q}]$ matrisinin elemanları hesaplanacaktır. Bu hesaplamalarda dört farklı durum ortaya çıkar.

İlk olarak asal köşegen üzerinde bulunmayan elemanları inceleniyor. $m \neq n$ ve $p \neq q$ durumunda (3.2.132) ifadesinin

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \tau(r_n) \Omega_{x_p x_q}^{mn} \quad (3.2.135)$$

şeklini aldığı görülür. (3.2.133) ifadesinden

$$S_{x_p x_q}^{mn} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} \left(-v_{x_p x_q}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \right) \quad (3.2.136)$$

yazılır. Ayrıca $S_{x_p x_q}^{mn} = S_{x_q x_p}^{mn}$ olduğu belirtilmelidir. $m \neq n$ ve $p = q$ durumunda (3.2.132) ifadesi

$$S_{x_p x_p}^{mn} = \tau(r_n) \Omega_{x_p x_p}^{mn} \quad (3.2.137)$$

şeklini alır ve (3.2.133) ifadesinden

$$S_{x_1 x_1}^{mn} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} (v_{x_2 x_2} (\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{x_3 x_3} (\vec{r}_m, \vec{r}_n)) \quad (3.2.138)$$

$$S_{x_2 x_2}^{mn} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} (v_{x_1 x_1} (\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{x_3 x_3} (\vec{r}_m, \vec{r}_n)) \quad (3.2.139)$$

$$S_{x_3 x_3}^{mn} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} (v_{x_1 x_1} (\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{x_2 x_2} (\vec{r}_m, \vec{r}_n)) \quad (3.2.140)$$

şeklinde yazılır.

Diyagonal elemanlar için; $m = n$ ve $p = q$ durumunda (3.2.132) ifadesinin,

$$S_{x_p x_p}^{mm} = \tau(r_n) \Omega_{x_p x_p}^{mm} - 1 \quad (3.2.141)$$

şeklini aldığı görülür. (3.2.125) ifadesinden;

$$S_{x_1 x_1}^{mm} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} (-1 + v_{x_2 x_2}^s + v_{x_3 x_3}^s) - 1 \quad (3.2.142)$$

$$S_{x_2 x_2}^{mm} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} (-1 + v_{x_1 x_1}^s + v_{x_3 x_3}^s) - 1 \quad (3.2.143)$$

$$S_{x_3 x_3}^{mm} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} (-1 + v_{x_1 x_1}^s + v_{x_2 x_2}^s) - 1 \quad (3.2.144)$$

yazılır. İfadelerdeki $v_{x_p x_p}^s$ terimleri (3.2.126-131) denklemlerinde tanımlanmıştır.

$m = n$ ve $p \neq q$ durumunda (3.2.132) ifadesi

$$S_{x_p x_q}^{mm} = \tau(r_n) \Omega_{x_p x_q}^{mm} \quad (3.2.145)$$

şeklini alır. (3.2.125) ifadesinden;

$$S_{x_p x_q}^{mm} = 0 \quad (3.2.146)$$

yazılır.

Moment matrisinin oluşturulması ile elde edilen her bir elemanın değeri nümerik integrasyon ile hesaplanabilir.

3.2.3.4. Küresel Hacim Boyunca İntegrasyon

Kürenin yarıçapının a olduğu farz edilsin. (3.2.125) denkleminde uygun olarak sadece $v_{xx}^s, v_{yy}^s, v_{zz}^s$ ifadeleri hesaplanmalıdır. Küresel hacim için bütün diyagonal olmayan elemanlar sıfırdır. Simetriden dolayı $v_{xx}^s, v_{yy}^s, v_{zz}^s$ için aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$v_{xx}^s = v_{yy}^s = v_{zz}^s \quad (3.2.147)$$

(3.2.100) denkleminde bağılı olarak

$$v_{xx}^s + v_{yy}^s + v_{zz}^s = \text{div} \oint_{\partial \mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' \quad (3.2.148)$$

yazılabilir. Böylece (3.2.147) ile (3.2.148) ifadelerinden

$$v_{xx}^s = v_{yy}^s = v_{zz}^s = \frac{1}{3} \text{div} \oint_{\partial \mathcal{G}} g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' \quad (3.2.149)$$

elde edilir. (3.2.149) denkleminde

$$v_{xx}^s = v_{yy}^s = v_{zz}^s = -\frac{1}{3} \oint_{\partial \mathcal{G}} \text{div}' g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' \quad (3.2.150)$$

şeklinde de yazılabilir. Kartezyen koordinatlarda,

$$\text{grad}' = \frac{\partial}{\partial x'} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y'} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z'} \hat{z} \quad (3.2.151)$$

şeklinde tanımlıdır. Kartezyen koordinatlardaki ve küresel koordinatlardaki ortonormal vektörler arasındaki bağıntılardan bir tanesi

$$\hat{r}' = \hat{x} \sin \theta' \cos \phi' + \hat{y} \sin \theta' \sin \phi' + \hat{z} \cos \theta' \quad (3.2.152a)$$

şeklindedir ve buradan

$$\frac{\partial}{\partial r'} = \sin \theta' \cos \phi' \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta' \sin \phi' \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta' \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.2.152b)$$

yazılabilir. (3.2.152a) ve (3.2.152b) denklemlerinin kullanılması ile

$$\oint_{\partial \mathcal{G}} \text{grad}' g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' = \oint_{\partial \mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial r'} (g(\vec{r}, \vec{r}')) dS' \quad (3.2.153)$$

kolaylıkla elde edilir. Burada (3.1.11) ifadesinde $r' = 0$ yazılarak

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = g(r') = \frac{e^{-ik_0 r'}}{4\pi r'} \quad (3.2.154)$$

elde edilir. Bu ifadenin kullanılması ile

$$\frac{\partial}{\partial r'}[g(\vec{r}, \vec{r}')] = \frac{\partial}{\partial r'}[g(\vec{r}')] = -\frac{(ik_0 r' + 1)e^{-ikr'}}{4\pi r'^2} \quad (3.2.155)$$

elde edilir. (3.2.155)'in (3.2.153)'de yerine yazılması ile

$$\oint_{\partial \mathcal{G}} \text{grad}' g(\vec{r}, \vec{r}') \hat{n}(\vec{r}') dS' = -\frac{(ik_0 a + 1)e^{-ika}}{4\pi a^2} \oint_{\partial \mathcal{G}} dS' = -(ik_0 a + 1)e^{-ika} \quad (3.2.156)$$

elde edilir. (3.2.156)'nın (3.2.149)'da yerine yazılması ile

$$v_{xx}^s = v_{yy}^s = v_{zz}^s = \frac{1}{3}(ik_0 a + 1)e^{-ika} \quad (3.2.157)$$

elde edilir. (3.2.157)'nin (3.2.125)'te yerine yazılması ile

$$\overline{\overline{\Omega}}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left[-1 + \frac{2}{3}(1 + ik_0 a)e^{-ika} \right] \overline{\overline{I}} \quad (3.2.157)$$

elde edilir. Bu dyadik denklemin açık şekli daha önce elde edilen (3.2.29) ve (3.2.93) ifadeleri ile aynıdır.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

Bu çalışmada düzlemsel dalgaların homojen olmayan, aksenal simetrik dielektrik cismin içinde oluşturduğu alan ifadeleri hesaplanmıştır. Rezonans durumunda, bir dielektrik cisim içerisindeki saçılan alan dyadik Green fonksiyonlarını içeren hacim integralleri ile ifade edilir. Eğer cisim homojen değilse, yani konumla değişen bünye parametrelerine sahip ise, cismin içindeki her bir farklı bünye parametresine sahip bölgedeki elektrik alan ifadesi için ayrı ifadeler tanımlanmalıdır. Bu ifadeler moment yöntemiyle sağlanır. Her bir ayrı ifadeye yer alan hacim integralinde gözlem noktasının kaynak noktasına yakınsamasıyla, dyadik Green fonksiyonlarından kaynaklanan üçüncü dereceden tekillikler ortaya çıkar. Dyadik Green fonksiyonunda ortaya çıkan bu tekillikler hacim integralini doğrudan hesaba elverişli olmayan şekle sokar.

Doğrudan hesaba elverişli olmayan hacim integralleri bu çalışmada üç farklı teknik ile tanımlı hale getirilmiştir. Bu tekniklerden iki tanesinde çözüm için hacim integral ifadeleri, birinde ise yüzey integral ifadeleri kullanılır. Hacim integral ifadelerinin kullanıldığı ilk iki teknik; tekilliğin etrafındaki çok küçük hacimsel bölgenin toplam integrasyon bölgesinden ayrıştırılması esasına dayanan asal hacim yöntemidir. Bu tekniklerden ilkinde, asal değer integral ifadelerine eklenecek katkı toplam kaynakların oluşturduğu alan hesabı yardımıyla belirlenmiştir. Diğerinde ise; eklenecek katkı Hölder koşulu altındaki genelleştirilmiş fonksiyon yaklaşımı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu iki teknikten farklı olarak, çözüm için yüzey integrallerinin kullanıldığı üçüncü teknik ise, genel analitik tekniktir. Bu teknikte tekillik için herhangi bir ek işleme gerek kalmamaktadır.

Asal hacim tekniğini esas alan iki teknikten de aynı sonuçlar elde edilmiştir. Bu kısımda elde edilen sonuçların analitik sonuçlarla kıyaslanması yapılacaktır.

Cismin küplerle modellenmesi sonucu sabit dielektriğe ve iletkenliğe sahip alt bölgeler elde edilmiştir. Rezonans bölgesinde her bir alt bölgede elektrik alan da sabit kabul edilmiştir. Bu yaklaşımlar çözümü kolaylaştırmıştır.

Düşük ve rezonans frekans bölgelerinde hesaplamalar yapılmıştır. Hesaplamaların tümünde Şekil 1.1'deki doğrultular seçilmiştir.

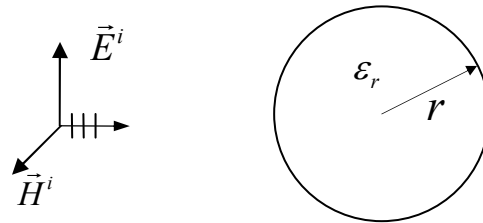
Teorik olarak düşük frekanslarda kürenin merkezindeki elektrik alanının genliği gelen alanın genliğinin $3/(\epsilon_r + 2)$ katı kadardır. Sonuç ifadelerinde de düşük

frekanslarda cismin içindeki saçılan alanın frekansa bağımlılığının olmadığı görülür ve bu ifadeler farklı ϵ_r bağıl dielektrik sabitleri için hesaplanmış ve Tablo 4.1’de verilmiştir. Bu değerlerden *Asal Hacim tekniği* ve *Genel Analitik teknik* ile hesaplanan değerlerin analitik sonuca yakınsadığı görülür.

Çizelge 4.1 Homojen olmayan dielektrik kürenin içinde düşük frekanslarda oluşan elektrik alan ifadeleri

| f [Hz] | λ_0 [cm] | ϵ_r | λ_ϵ [cm] | $\frac{3}{\epsilon_r + 2}$ | AHT merkezdeki $ \vec{E} $ [V/m] | GAT merkezdeki $ \vec{E} $ [V/m] |
|-----------|---------------------|--------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 10^7 | $3 \cdot 10^3$ | 5.0 | $1.342 \cdot 10^3$ | 0.4286 | 0.4172 | 0.4120 |
| 10^6 | $3 \cdot 10^4$ | 5.0 | $1.342 \cdot 10^4$ | 0.4286 | 0.4172 | 0.4120 |
| 10^3 | $3 \cdot 10^7$ | 5.0 | $1.342 \cdot 10^7$ | 0.4286 | 0.4172 | 0.4120 |
| 10^3 | $3 \cdot 10^7$ | 20.0 | $6.708 \cdot 10^6$ | 0.1364 | 0.112 | 0.1398 |
| 10^3 | $3 \cdot 10^7$ | 51.7 | $4.172 \cdot 10^6$ | 0.0559 | 0.0503 | 0.0589 |

Şekil 4.1’de görülen 1 [V/m] genlikli düzlemsel dalga ile aydınlatılmış dielektrik kürenin içindeki toplam elektrik alanın farklı $k_0 r$ değerleri için aldığı değerler Şekil 4.2’de görülmektedir. Görüldüğü gibi farklı $k_0 r$ değerlerinde sabit genlikli düzlemsel dalganın dielektrik küre içinde oluşturduğu toplam alan ifadeleri değişmektedir. $k_0 r$ değeri arttıkça küreyi aydınlatan düzlemsel dalganın kürenin içinde oluşturduğu toplam alan değerlerinin genliği de artmaktadır. Bu durum elde edilen ifadelerden de anlaşılmaktadır. Şekil 4.2’de toplam alan ifadesi bir yarıçap için hesaplanmıştır ve çiziminde normalize yarıçap kullanılmıştır.

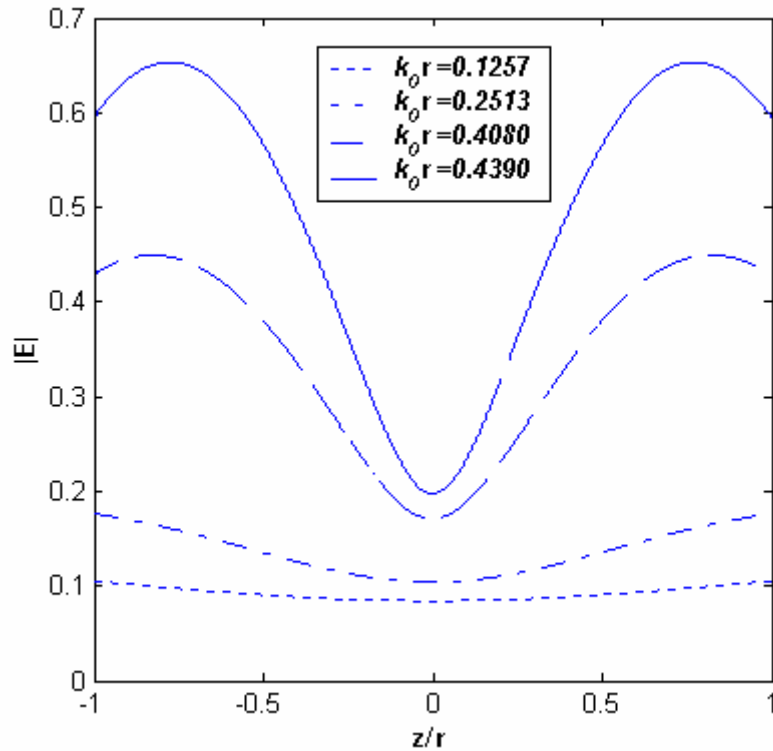


Şekil 4.1 Düzlemsel dalgalar ile aydınlatılmış homojen küre

Şekil 4.2'deki analitik referans çözüm, bir düzlemsel dalganın homojen dielektrik küreden saçılmasının analitik yollarla incelendiği Ek.2'de elde edilen (E.60-63) katsayılarının kullanıldığı Mie Serisi çözümü ile hesaplanmıştır.

Düzlemsel dalga ile aydınlatılmış homojen kürenin içindeki toplam alan iki farklı sayısal teknik ile hesaplanmıştır. Bunlardan ilki, *Asal Hacim Tekniği*, diğeri ise *Genel Analitik Teknik*dir. Kürenin bağıl dielektrik katsayısı $\epsilon_r = 5$ ve $k_0 r = 0.1257$ olduğu durumda bu iki teknik ile elde edilen sonuçlar Şekil 4.3'te Mie Serisi çözümü ile kıyaslanmıştır. Her bir sayısal tekniğin analitik sonuca yakınsadığı görülür.

Şekil 4.3'teki sonuçlar elde edilirken sayısal yöntemlerde kürenin modellenmesi için bir yarıçap boyunca dört küp örnek alınmıştır. Bu durumda asal hacim tekniğinin genel analitik tekniğe göre analitik çözüme yakınsamasının daha fazla olduğu gözlemlenmektedir.



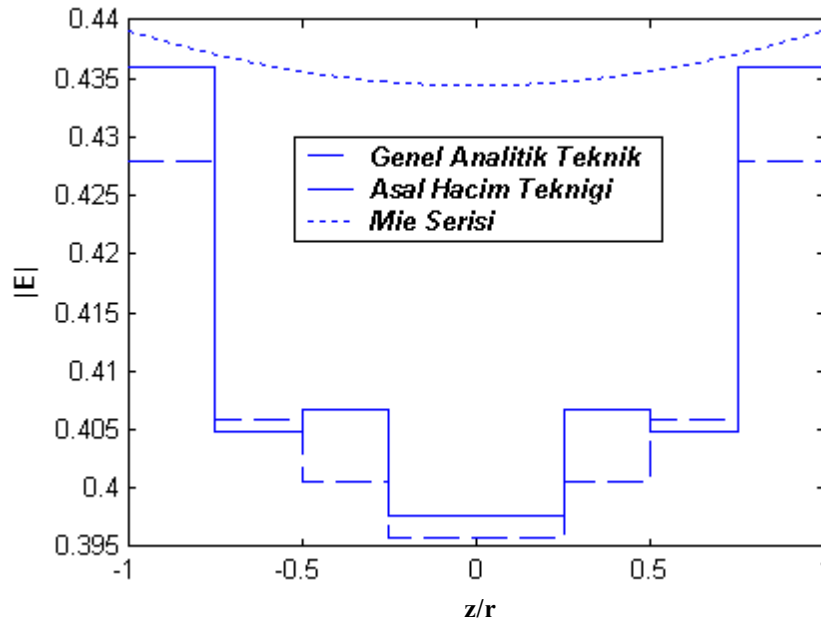
Şekil 4.2 Farklı $k_0 r$ değerleri için kürenin içindeki alan değerleri

Burada belirtilmesi gereken noktalardan bir tanesi, asal hacim tekniğinde hesaplama yapılırken (3.2.26) yaklaşımının kullanılması ve bir diğeri ise genel analitik teknikte de kürenin küplerle modellenmiş olması ve bunların yüzey integralleri ile sonuca gidilmesidir. Ayrıca her bir sayısal yöntemde cismin eksenel simetrik

olmasından çeyrek cisim üzerindeki çözüm yeterli olmuştur. Bu hesaplama süresi için önemli bir faktördür.

Genel analitik teknikte teklik için herhangi bir ek işleme gerek olmadığı görülmüştür. Bu durum doğal olarak bir takım sonuçlar doğurmuştur. Örneğin, dielektrik cismin modellenmesinde kullanılan geometrik hacimler daha uygun olarak, yani modelleme oranı daha yüksek şekilde seçilerek doğrudan eleman sayısı değişmeden, sadece modelleyici hacim uygun seçilerek analitik çözümlere bir yakınsama elde edilebilir.

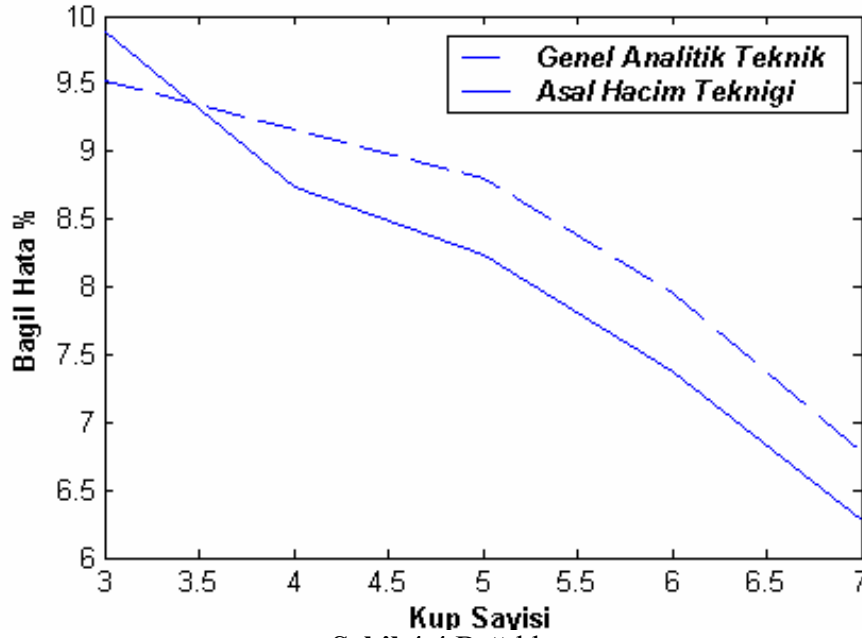
Modelleme için seçilen uygun geometrik hacimlerin yüzey integrasyonu kolaylıkla elde edilebilir. Bu integrasyonların elde edilmesi için herhangi bir yaklaşıma da gerek yoktur. Burada belirtilmesi gereken bir durum da bu çalışmada küplerle yapılan modellemenin sonucunda asal hacim tekniğinde hacim integrallerinin hesaplanmasında iki farklı yaklaşım yapılmıştır. Bunlardan ilki, küplerin kürelere benzetilmesi, ikincisi ise kürelerin merkezindeki çok küçük hacmin ayrıştırılması ve bu ayrık hacmin sıfıra yaklaşması durumundaki limit değerinde hesaplama yapılmasıdır. Ayrıca moment yöntemi uygulanmasında her bir kübün içindeki elektrik alan ifadesi sabit kabul edilmiştir.



Şekil 4.3 Homojen kürenin içindeki alan ifadeleri

Şekil 4.1'deki sistemde yine aynı genlikli düzlemsel dalga ile aydınlatılmış homojen kürenin bağıl dielektrik katsayısı $\epsilon_r = 5$ ve $k_0 r = 0.1257$ olduğu durumda küp sayısının

artması durumunda her iki yöntem için ortaya çıkan bağıl hata değerleri kıyaslanmıştır. Her bir yöntemin kendi içinde bağıl hata oluşma mekanizması farklıdır. Şekil 4.4'te görüldüğü gibi asal hacim tekniğinin bağıl hatası daha düşüktür. Bunun anlamı sayısal hesaplamalarda uygulanan yöntemlerin yaklaşıklık oranları daha yüksektir. Yani sayısal yöntemlerdeki hesaplamalar yapılırken uygulanan yaklaşıklıklar daha az hataya neden olur. Daha önce bahsedildiği gibi asal hacim tekniğinde bu hatanın kaynağı (3.2.26) denkleminin kullanılması, hacim integralleri hesaplanırken bir takım yaklaşıklıkların yapılması ve moment yöntemidir. Bağıl hata oranı (3.2.25) integral ifadesinin yaklaşıklık yapılmadan sayısal integrasyon ile çözülmesi ve küp sayısının artırılması ile düşürülebilir. Aynı şekilde genel analitik teknikte küp sayısının artırılması ile bağıl hata oranı düşürülebilir.

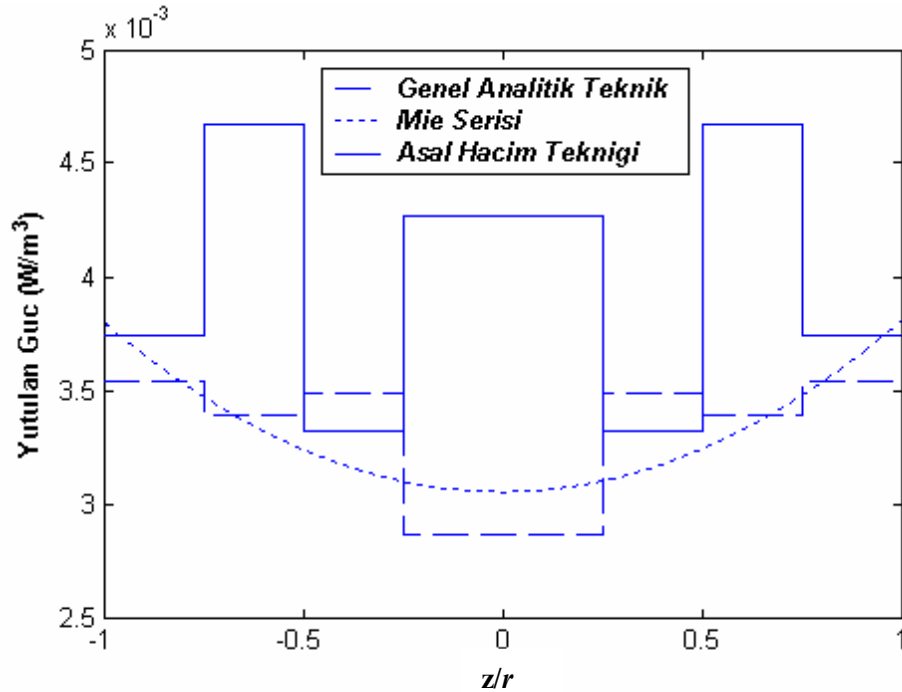


Şekil 4.4 Bağıl hata

$k_0 r = 0.1257$ frekans bölgesinde Şekil 4.1 deki sistemdeki homojen kürenin elektriksel parametreleri $\varepsilon_r = 5$ ve $\sigma = 0.39$ şeklinde tanımlı ve manyetik özelliği bulunmamaktadır ($\mu = \mu_0$). 1 [V/m] genlikli düzlemsel dalga ile aydınlatılmış kürenin içindeki yutulan güç $P = (\sigma/2)|E|^2$ ile ifade edilmektedir. Yutulan gücün mW'lar civarında olduğu Şekil 4.5'te görülmektedir. Böylece homojen kürenin iletkenliğinden kaynaklanan güç kaybı belirlenmiş olmaktadır.

Biyolojik yapılar düşünüldüğünde iletkenlik kayıplarının en büyük nedeni yapılarında içerdikleri su molekülleridir. Bu kayıpların ortaya çıkardığı yük hareketleri gözlemlenebilir ve böylece pratik sonuçlar elde edilebilir.

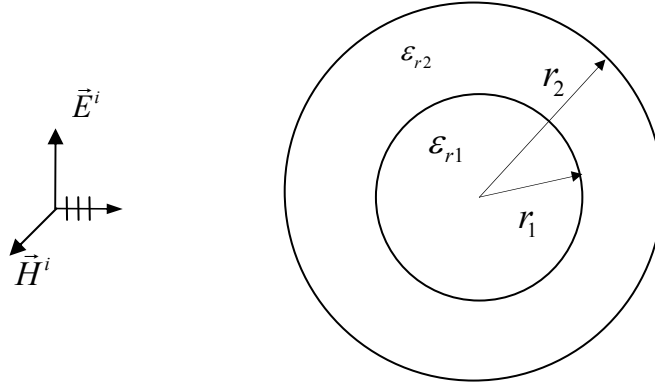
Bu çalışmada ortaya konulan temel durum, cismin homojen olmaması durumunda saçılma mekanizmasının belirlenmesidir. Bu durumda saçılan alanın belirlenmesini sağlayan hacim integral denkleminin doğrudan hesabı mümkün olmaz. Bu durum tabakalı küre için ve homojen küre için iki sayısal teknik ile ve sınır koşullarının kullanıldığı analitik yöntem ile aşılmıştır.



Şekil 4.5 İletken homojen kürede yutulan güç

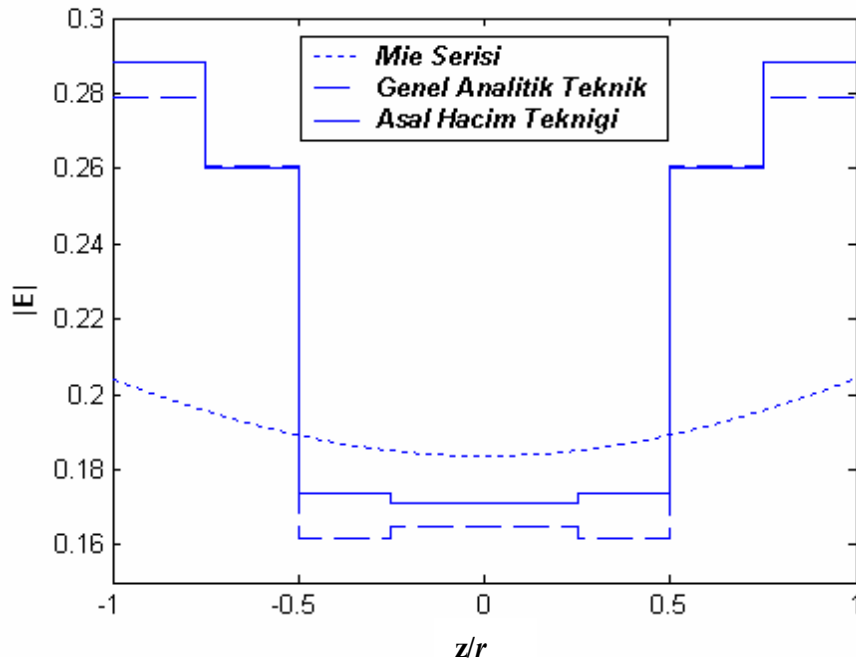
Literatürde homojen olmayan saçıcı cisim olarak en çok incelenen örnek tabakalı küre olarak karşımıza çıkıyor. Bu yüzden bu çalışmada da homojen olmayan cisim olarak tabakalı küre seçilmiştir. Bu durumda yine bir eksenel olarak homojenlik söz konusudur.

Şekil 4.6'daki tabakalı küre düzlemsel dalga ile aydınlatılıyor. $k_0 r_1 = 0.1257$ ve $k_0 r_2 = 0.2322$ olduğu durumda ve kürenin elektriksel parametreleri $\epsilon_{r_1} = 5$ ve $\epsilon_{r_2} = 16$ ve manyetik özelliği bulunmadığı durumda ($\mu = \mu_0$) homojen düzlemsel dalgalar ile aydınlatılan kürenin içinde oluşan elektrik alan ifadeleri iki sayısal yöntem ile ve Ek 3.'te açıklanan analitik yöntem ile ayrı ayrı hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerler Şekil 4.7'de görülmektedir.



Şekil 4.6 Düzlemsel dalgalar ile aydınlatılmış homojen olmayan küre

Şekil 4.7’de asal hacim tekniğinin yakınsaklığının genel analitik tekniğine göre daha fazla olduğu görülmektedir. Kürenin homojen olmamasından dolayı her bir farklı dielektrik sabitine sahip bölge elektriksel yapısına göre moment matrisine farklı katkı sağlayacaktır. Bu ayrık elektriksel yapı gösteren cismin içindeki elektrik alan moment

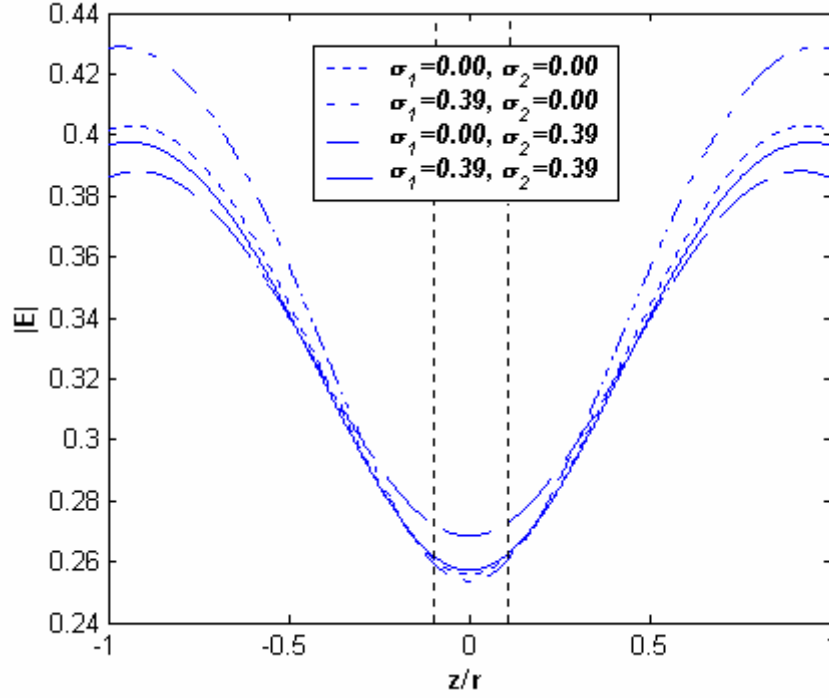


Şekil 4.7 Tabakalı kürenin içindeki alan ifadeleri

yöntemi ile hesaplanabilir. Burada kullanılan her bir sayısal yöntemin bir hata doğurduğu unutulmamalıdır.

Bu çalışmadaki saçıcı cisim, tabakalı kürenin saçıcılık özelliğini belirlemek için farklı elektriksel parametrelere sahip iken içinde oluşan toplam elektrik alan ifadesi analitik tekniklerle elde ediliyor.

Şekil 4.8, 4.9 ve 4.10'da düzlemsel dalgalar ile aydınlatılan homojen olmayan kürenin içinde oluşan toplam alan ifadeleri, farklı tabaka genişliklerinde tabakaların iletkenlikleri değiştiği durumda çizilmiştir.



Şekil 4.8 Tabakalı kürenin içindeki alan ifadeleri

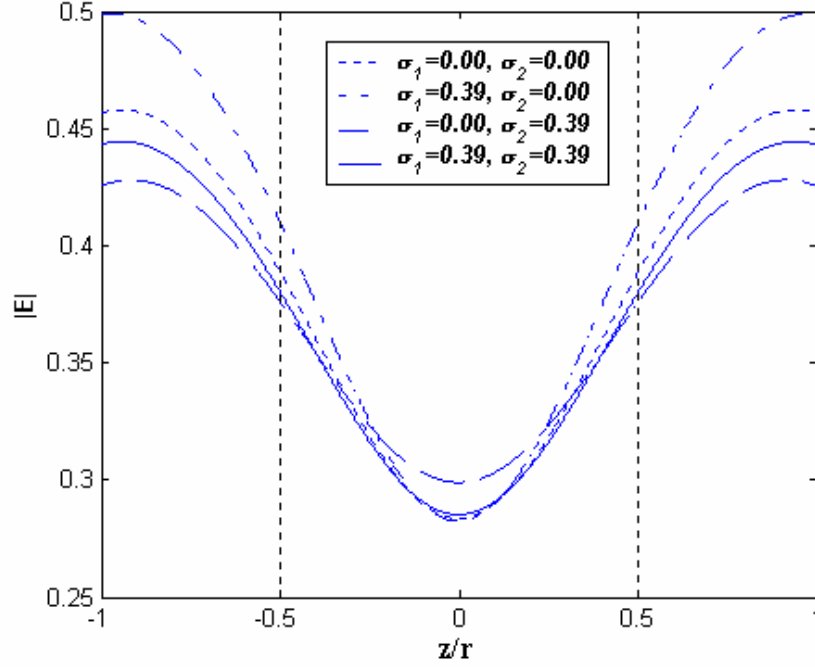
Tabakalı küreleri aydınlatan homojen düzlemsel dalgaların frekansı $f = 11.2 \cdot 10^8$ [Hz] ve tabakaların bağıl dielektrik sabitleri $\epsilon_{r_1} = 5$ ve $\epsilon_{r_2} = 16$ olduğu durumda farklı tabakalara ait farklı iletkenlik değerleri için grafikler elde edilmiştir.

Şekil 4.8 $r_1 = 0.02$, $r_2 = 0.002$ durumunda tabakalı kürenin iletkenlik özellikleri $\sigma_{1,2} = 0.39$ olduğunda ve manyetik özelliği bulunmadığı durumda tabakalı kürenin içinde oluşan toplam elektrik alan ifadesi çizilmiştir.

Şekilde görüldüğü gibi kürenin merkezindeki bölgenin iletkenliği merkezinin etrafındaki elektrik alan ifadelerini etkiliyor. Yani kürenin merkezindeki bölgenin iletkenliği bu bölgenin saçıcılığını artırır.

Kürenin iletkenliğe sahip olmasından dolayı küre içinde yutulan bir güç oluştuğu hatırlatılmalıdır. Ayrıca biyolojik yapıların da bir elektriksel iletkenliğe sahip olduğu bilinmektedir.

Kürenin merkezindeki iletken bölgede bu iletkenlikten dolayı toplam saçılan elektrik alan değeri düşer. Bu durum aynı elektriksel yapıdaki tabakalı kürelerde farklı r_1 , r_2 değerleri için incelenmiştir.



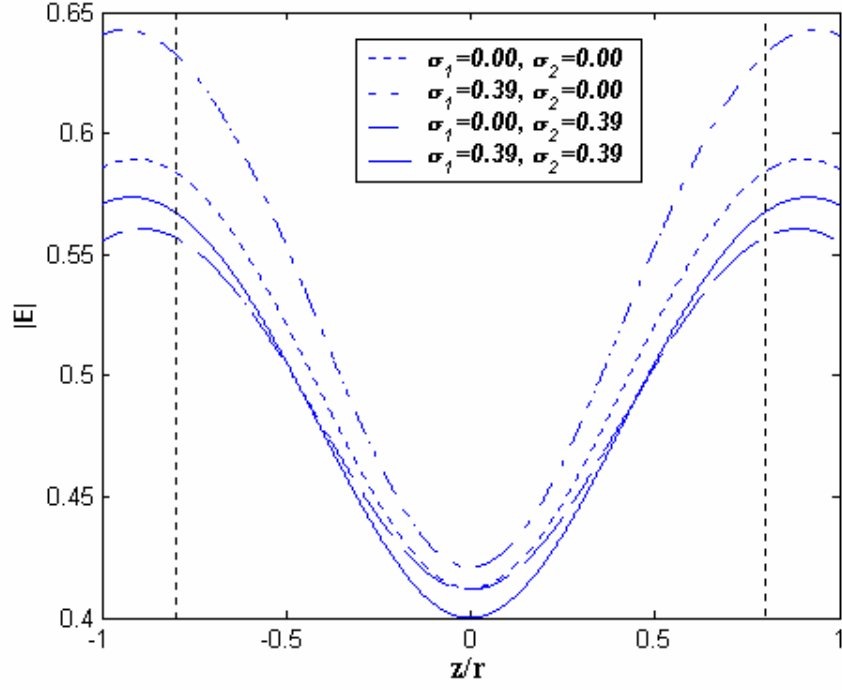
Şekil 4.9 Tabakalı kürenin z eksenini boyunca elektrik alanlar

Şekil 4.9'da $r_1 = 0.02$ cm ve $r_2 = 0.01$ cm olduğu durumda ve Şekil 4.10'da $r_1 = 0.18$ cm ve $r_2 = 0.02$ cm olduğu durumda tabakalı kürenin içindeki toplam elektrik alan incelenmiştir. Her iki durumda da tabakalı küre için sabit frekanslarda farklı elektriksel iletkenliğe sahip küre örnekleri incelenmektedir. Bu iki durumda kürenin içinde ortaya çıkan toplam alan ifadeleri cismin iletken bölgesinden kaynaklanan saçıcılık ve bu bölgenin genişliğinin artması durumunda nasıl değiştiği gözlemlenmektedir.

Bu elde edilen grafikler kürenin elektriksel iletkenliği ile içinde oluşan saçılan toplam elektrik alan arasında ilişki kurulmasını sağlar. Bu şekilde modellenen cismin iletkenliğinin, tabaka genişliğinin ve dielektrik katsayısının saçılma mekanizmasında önemli rol oynadığı görülür.

Elde edilen bu sayısal sonuçlar ile bu çalışmada yapılan hesaplamaların analitik sonuçlara yakınsadığı görülür. Bu yakınsamalar ve hesaplama süreleri sayısal yöntemlerin işlevselliğini belirten etkenlerdir. Her bir yöntemin kendi hata mekanizması

farklıdır ve bu mekanizmaların azaltılabilmesi tek başına yeterli değil aynı zamanda hesaplama süresi de oldukça önemlidir.



Şekil 4.10 Tabakalı kürenin z eksenı boyunca elektrık alanlar

KAYNAKLAR:

BALANIS, C. A. 1989. Advanced Engineering Electromagnetics. John Wiley & Sons, America.

BLADEL, J. V. 1961. Some Remarks on Green's Dyadic for Infinite Space. IRE Trans. Antennas Propagat. AP-9: 563-566.

CHEN-TO, T. 1971. Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory. IEEE Press.

FIKIORIS, J. G. 1965. Electromagnetic Field Inside a Current-Carrying Region. J. Math. Phys. 6: 1617-1620.

GAO, G, C.T. VERDIN ve T. M. HABASHY. 2005. Analytical Techniques to Evaluate the Integrals of 3D and 2D Spatial Dyadic Green's Functions. PIER. 52: 47-80.

GEL'FAND, I. M. ve G. E. SHILOV. 1964. Generalized Functions. Academic, New York.

HARRINGTON, R. F. 1968. Field Computation by Moment Methods. Macmillan, New York.

HOHMANN, G. W. 1975. Three-dimensional Induced Polarization and Electromagnetic Modeling. Geophysics. 40:309-324

LEE, S. , J. BOERSMA, C. LAW ve G. A. DESCHAMPS. 1980. Singularity in Green's Function and Its Numerical Evaluation. IEEE Trans. Antennas Propagat. AP-28: 311-317.

LIVESAY, D. E. ve K. CHEN. 1974. Electromagnetic Fields Induced Inside Arbitrarily Shaped Biological Bodies. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-22: 1273-1280.

MORITA, N., N. KUMAGAI ve J. R. MAUTZ. 1990. Integral Equation Methods for Electromagnetics. Artech House, Boston, London.

MULLER, C. 1969. Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. Springer-Verlag, Berlin.

RICHMOND, J. H. 1965. Scattering by Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section Shape. IEEE Trans. Antennas Propagat. AP-35: 334-341.

SADIKU, M. N. O. 2001. Numerical Techniques in Electromagnetics. CRC Press, New York. p 54-61.

SCHAUBERT, D. H. , D. R. WILTON ve A. W. GLISSON. 1984. A Tetrahedral Modeling Method for Electromagnetic Scattering by Arbitrarily Shaped Inhomogeneous Dielectric Bodies. IEEE Trans. Antennas Propagat. AP-32: 77-85.

SERTEL, K. ve J. L. VOLAKIS. 2002. Method of Moments Solution of Volume Integral Equations Using Parametric Geometry Modeling. *Radio Science*. 37(10):1-7.

YAGHJIAN, A. D. 1978. A Direct Approach to the Derivation of Electric Dyadic Green's Functions. Nat. Bur. Stund., Boulder, CO, NBS Tech. Note 1000.

YAGHJIAN, A. D. 1980. Electric Dyadic Green's Functions in The Source Region. *Proc. IEEE*. 68: 248-263.

EKLER

Ek-1 :

Asal değer integrallerinin hesabı

Bu bölümde skaler Green fonksiyonunun ve türevlerinin tekil noktalarının bulunduğu hacimdeki integrasyonları yaklaşık olarak elde edilecektir. Burada ilk olarak belirlenmesi gereken boşluktaki skaler Green fonksiyonunun tekil noktalarının bulunduğu hacimdeki integrasyonudur.

$$\begin{aligned}
 \int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}} \int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}} \int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dx' dy' dz' &\cong \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\theta d\phi dR \\
 &= \int_0^{R_0} R e^{-ikR} dR \\
 &= \frac{1}{k^2} \left[(ikR_0 + 1) e^{-ikR_0} - 1 \right] \quad (E.1)
 \end{aligned}$$

(Hohmann 1975) şeklinde elde edilir. Bu ifadedeki $R_0 = \left(\frac{3\Delta \mathcal{G}}{4\pi} \right)^{1/3}$ ve

$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ olarak tanımlıdır. Burada görülmektedir ki integrasyon alınırken kartezyen koordinatlarda tanımlanan \mathcal{G}_0 hacminin küresel koordinatlardaki bir küreye yaklaşımı yapıyor ve böylece boşluktaki skaler Green fonksiyonunun tekilliği kaldırılmış oluyor.

Bir diğer ifade ise boşluktaki skaler Green fonksiyonunun ikinci dereceden differansiyellerinin integralleridir.

$$\int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}} \int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}} \int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dx' dy' dz' = \int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}} \int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right]_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}} dy' dz' = 0 \quad (E.2)$$

Burada görülmektedir ki eğer ikinci dereceden differansiyel tek parametreye bağlı değilse sonuç sıfır olur. Bunun nedeni Green fonksiyonunun tek bir eksen boyunca türevinin bu eksen boyunca tek fonksiyon olmasıdır.

Tek parametrelili differansiyelli ifade de

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{g}_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dx' dy' dz' &= \frac{1}{3} \int_{\mathfrak{g}_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dx' dy' dz' \\
&= \frac{1}{3} \int_{\mathfrak{g}_0} \text{lap} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dx' dy' dz'
\end{aligned} \tag{E.3}$$

şeklinde belirlenmesi ile

$$\begin{aligned}
\int_{z-\frac{\Delta}{2}}^{z+\frac{\Delta}{2}} \int_{y-\frac{\Delta}{2}}^{y+\frac{\Delta}{2}} \int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}} \text{lap} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dx' dy' dz' &\cong \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right) \right] R^2 \sin \theta d\theta d\phi dR \\
&= 4\pi \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{R_0} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right) \right] dR \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[-(ikR+1)e^{-ikR} \right]_{\alpha}^{R_0} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[-(ikR+1)e^{-ikR} + -(ik\alpha+1)e^{-ik\alpha} \right] \\
&= -(ikR_0+1)e^{-ikR_0} + 1
\end{aligned} \tag{E.4}$$

elde edilir. Bu ifade yine yaklaşık olarak hacmin, küresel hacme dönüştürülmesi ile elde edilen integrasyonun çözümü ve daha sonra da limit değerinin alınması ile elde edilir.

(E.4) ifadesinden her eksen için ikinci dereceden differansiyel ifadeleri,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{g}_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dr' &= \int_{\mathfrak{g}_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dr' \\
&= \int_{\mathfrak{g}_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dr' \\
&= \frac{1}{3} \left[-(ikR_0+1)e^{-ikR_0} + 1 \right]
\end{aligned} \tag{E.5}$$

şeklinde elde edilir.

Böylece bu ifadelerden diyadik Green fonksiyonunun integrasyonu hesaplanabilir.

Örnek olarak;

$$I_{x_p x_q}^n = \int_{\mathfrak{g}_0} -i\omega\mu_0 \left(\delta_{pq} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p} \right) \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \quad p, q=1,2,3$$

(E.6) ifadesindeki integral ayrıştırılırsa

$$I_{x_p x_q}^n = -i\omega\mu_0 \int_{\mathcal{G}_0} \delta_{pq} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} d\mathcal{G}' + \frac{1}{i\omega\epsilon} \int_{\mathcal{G}_0} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} d\mathcal{G}' \quad (\text{E.6})$$

birinci terimdeki integral çözümünü için (E.1) ve ikincisi için de (E.5) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} I_{x_p x_q}^n &= \delta_{pq} \left[\frac{1}{i\omega\epsilon} [(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} - 1] + \frac{1}{3i\omega\epsilon} [-(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} + 1] \right] \\ &= \frac{2\delta_{pq}}{3i\omega\epsilon} [(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} - 1] \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

şeklinde elde edilir. Burada belirtilmesi gereken husus, (E.5) çözümünün sadece $x_p = x_q$ durumu için mevcut olduğu (E.2)'den anlaşılıyor bu yüzden (E.6)'nın ikinci teriminin çözüm ifadesine δ_{pq} ekleniyor. (E.7) ifadesinden,

$$\int_{\mathcal{G}_0} \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') dr' = \frac{2}{3i\omega\epsilon} [(ikR_0 + 1)e^{-ikR_0} - 1] \overline{\overline{I}} \quad (\text{E.8})$$

olarak elde edilir. Burada $\overline{\overline{I}}$ birim dyadiktir.

Ayrıca not olarak belirtmelidir ki,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p} g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\partial^2}{\partial x'_q \partial x'_p} g(\vec{r}, \vec{r}') \quad (\text{E.9})$$

olmasından

$$G_{x_p x_q}(\vec{r}, \vec{r}') = -i\omega\mu_0 \left(\delta_{pq} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial x_p} \right) g(\vec{r}, \vec{r}') \quad p, q=1,2,3 \quad (\text{E.10})$$

ifadesinin yerine,

$$G_{x_p x_q}(\vec{r}, \vec{r}') = -i\omega\mu_0 \left(\delta_{pq} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x'_q \partial x'_p} \right) g(\vec{r}, \vec{r}') \quad p, q=1,2,3 \quad (\text{E.11})$$

yazılabilir. Bu çalışmada matris elemanları hesaplanırken (E.11)'deki Green fonksiyonunun üslü koordinatlardaki diferansiyelleri kullanılıyor. Fakat ektaki hesaplamalar üssüz koordinatlara göre yapılmıştır. (E.10)'un yerine (E.11)'in yazılabilecek olması bu hesaplamaların her iki durum için de kullanılabileceğini gösterir.

Ek-2 :

Bir düzlemsel dalganın homojen dielektrik küreden saçılması

- Gelen Alanın Küresel Harmonikler Türünden İfadesi:

Küresel cisimlerden saçılma olayı incelenirken gelen düzlemsel dalganın küresel koordinatlardaki ifadesi gereklidir. Bu durumda, $\vec{E}(\vec{r})$ vektör alanı küresel vektör dalga denklemlerinin doğrusal bileşimi olarak ifade edilebilir. $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, küresel koordinatlarında herhangi iki küresel vektör fonksiyonu \vec{M} ve \vec{N} ,

$$\text{lap}\vec{M} + k_1^2\vec{M} = 0 \quad (\text{E.12})$$

$$\text{lap}\vec{N} + k_1^2\vec{N} = 0 \quad (\text{E.13})$$

Helmholtz denklemlerini sağlıyor olsun. Bu türden alanlar üç türden öz fonksiyonun bileşiminden oluşurlar. Bu öz fonksiyonlardan bir tanesi,

$$\vec{L}_{pn}(\vec{r}) = \frac{1}{k_1} \text{grad} \{Y_{pn}(\theta, \phi) z_n(kr)\} \quad (\text{E.14})$$

şeklinde bir irrotasyonel vektör alanı, diğer ikisi ise

$$\vec{M}_{pn}(\vec{r}) = \frac{1}{k_1} \text{rot} \{ \vec{r} Y_{pn}(\theta, \phi) z_n(k_1 r) \} = \frac{1}{k_1} \text{rot} \vec{N}_{pn} \quad (\text{E.15})$$

$$\vec{N}_{pn} = \frac{1}{k_1} \text{rot} \vec{M}_{pn} \quad (\text{E.16})$$

şeklinde selonoidal alanlardır. Burada Y_{pn} küresel harmonik fonksiyon ve z_n , genel küresel Bessel fonksiyonudur. $\vec{E}(\vec{r})$ ve $\vec{H}(\vec{r})$ elektromanyetik alanları birbirlerine rotasyonel operasyonu ile bağlı ve manyetik alanın diverjansı sıfıra eşit olduğundan $\vec{E}(\vec{r})$ ve $\vec{H}(\vec{r})$ 'nin küresel vektör dalgaları açılımında \vec{L}_{pn} şeklindeki fonksiyonlar yer almazlar (Morita ve ark. 1990).

Bu durumda \vec{M} ve \vec{N} alanlarının açık ifadeleri

$$\begin{aligned} \vec{M}_{\sigma pn} = & \mp \hat{\theta} \frac{p}{\sin \theta} z_n(k_1 r) P_n^p(\cos \theta) \frac{\sin}{\cos} p\phi \\ & - \hat{\phi} z_n(k_1 r) \frac{\partial P_n^p(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\cos}{\sin} p\phi \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned}
\vec{N}_{\sigma pn} = & \mp \hat{r} \frac{n(n+1)}{k_1 r} z_n(k_1 r) P_n^p(\cos \theta) \frac{\cos}{\sin} p \phi \\
& - \hat{\theta} \frac{1}{k_1 r} \frac{\partial}{\partial r} \{r z_n(k_1 r)\} \frac{\partial P_n^p(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\cos}{\sin} p \phi \\
& \mp \hat{\phi} \frac{p}{k_1 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \{r z_n(k_1 r)\} P_n^p(\cos \theta) \frac{\sin}{\cos} p \phi
\end{aligned} \quad (E.18)$$

şekline indirgenmiş olur. (E.17) ve (E.18) ifadelerinde σ , “e” veya “o”, sırasıyla tek veya çift anlamında kullanılmıştır.

(E.17) ve (E.18) çözümleri uyarınca elektrik alanın \vec{M} ve \vec{N} alanları cinsinden genel gösterilimi,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_n \sum_p \sum_{\sigma=e,0} (a_{\sigma pn} \vec{M}_{\sigma pn} + b_{\sigma pn} \vec{N}_{\sigma pn}) \quad (E.19)$$

şeklinde olur ve buna bağlı olarak, \vec{H} alanı Faraday denklemi ve (E.15), (E.16) bağıntıları göz önüne alınarak,

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{i}{Z_1} \sum_n \sum_p \sum_{\sigma=e,0} (a_{\sigma pn} \vec{N}_{\sigma pn} + b_{\sigma pn} \vec{M}_{\sigma pn}) \quad (E.20)$$

şeklinde yazılır. (E.20)’de $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$, dalga empedansı olarak tanımlıdır.

+z yönünde ilerleyen düzlemsel dalganın elektrik alanı,

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = \hat{x} A_0 e^{-ik_1 z} = \hat{x} A_0 e^{-ik_1 r \cos \theta} \quad (E.21)$$

şeklinde varsayılmaktadır. Bu alan ifadesindeki \hat{x} birim vektörü, küresel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden yazılırsa (E21),

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = A_0 \left(\hat{r} \sin \theta \cos \phi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \phi - \hat{\phi} \sin \phi \right) e^{-ik_1 r \cos \theta} \quad (E.22)$$

şeklini alır. (E.22) ifadesindeki ϕ ’nin değişimi, (E.17) ve (E.18) ifadelerdeki ϕ ’nin değişimleri ile kıyaslanırsa (E.19) ve (E.20) açılımlarında sadece $(\vec{M}_{o1n}, \vec{N}_{e1n}, n = 1, 2, \dots)$ şeklindeki harmoniklerin yeterli (sıfırdan farklı) olacağı görülür.

$r \geq a$ için (I bölgesinde), (E.19) alanı sınırlı olmak zorundadır ve bundan dolayı (E.17) ve (E.18)’de görülen $z_n(k_1 r)$ genel küresel Bessel fonksiyonu, $j_n(kr)$ olarak yer almalıdır. Küresel harmoniklerin I bölgesindeki gösterilimi $\vec{M}_{o1n}^{(1)}, \vec{N}_{e1n}^{(1)}$ ile belirtilsin. Bu terimlerin açık ifadeleri

$$\vec{M}_{oin}^{(1)}(k_1 a) = M_{or}^{(1)} \hat{r}(k_1 a) + M_{o\theta}^{(1)} \hat{\theta}(k_1 a) + M_{o\phi}^{(1)} \hat{\phi}(k_1 a) \quad (\text{E.23})$$

$$M_{or}^{(1)}(k_1 a) = 0 \quad (\text{E.24})$$

$$M_{o\theta}^{(1)}(k_1 a) = \cos \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) j_n(rk_1 a) \quad (\text{E.25})$$

$$M_{o\phi}^{(1)}(k_1 a) = -\sin \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) j_n(rk_1 a) \quad (\text{E.26})$$

$$\vec{N}_{ein}^{(1)}(k_1 a) = N_{er}^{(1)} \hat{r}(k_1 a) + N_{e\theta}^{(1)} \hat{\theta}(k_1 a) + N_{e\phi}^{(1)} \hat{\phi}(k_1 a) \quad (\text{E.27})$$

$$N_{er}^{(1)}(k_1 a) = n(n+1) \cos \phi \sin \theta \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{j_n(rk_1 a)}{rk_1 a} \quad (\text{E.23})$$

$$N_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) = \cos \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) \frac{[rk_1 a j_n(rk_1 a)]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.28})$$

$$N_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) = -\sin \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{[rk_1 a j_n(rk_1 a)]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.29})$$

$$\vec{M}_{ein}^{(1)}(k_1 a) = M_{er}^{(1)} \hat{r}(k_1 a) + M_{e\theta}^{(1)} \hat{\theta}(k_1 a) + M_{e\phi}^{(1)} \hat{\phi}(k_1 a) \quad (\text{E.30})$$

$$M_{er}^{(1)}(k_1 a) = 0 \quad (\text{E.23})$$

$$M_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) = -\sin \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) j_n(rk_1 a) \quad (\text{E.31})$$

$$M_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) = -\cos \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) j_n(rk_1 a) \quad (\text{E.32})$$

$$\vec{N}_{oin}^{(1)}(k_1 a) = N_{or}^{(1)} \hat{r}(k_1 a) + N_{o\theta}^{(1)} \hat{\theta}(k_1 a) + N_{o\phi}^{(1)} \hat{\phi}(k_1 a) \quad (\text{E.33})$$

$$N_{or}^{(1)}(k_1 a) = n(n+1) \sin \phi \sin \theta \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{j_n(rk_1 a)}{rk_1 a} \quad (\text{E.23})$$

$$N_{o\theta}^{(1)}(k_1 a) = \sin \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) \frac{[rk_1 a j_n(rk_1 a)]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.34})$$

$$N_{o\phi}^{(1)}(k_1 a) = \cos \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{[rk_1 a j_n(rk_1 a)]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.35})$$

ile verilir (Morita ve ark. 1990). (E.25) ifadesindeki P_n^1 , n. dereceden ve 1. tür assosiyel Legendre fonksiyonudur.

Gelen alan I bölgesinde,

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{M}_{oln}^{(1)}(k_1 a) - i \vec{N}_{eln}^{(1)}(k_1 a) \right] \quad (\text{E.36})$$

şeklinde gösterime sahiptir.

$$\vec{H}^i = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot} \vec{E}^i \quad \text{şeklindeki Maxwell denklemi nedeniyle (E.36) elektrik alan}$$

ifadesi ile ilintili manyetik alan,

$$\vec{H}^i(\vec{r}) = \frac{-A_0}{Z_1} \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[\vec{M}_{eln}^{(1)}(k_1 a) + i \vec{N}_{oln}^{(1)}(k_1 a) \right] \quad (\text{E.37})$$

şeklinde hesaplanır.

Kürenin merkezi referans alındığı durumda $r \geq a$ için (I Bölgesinde) ışınım koşulu uyarınca $z_n(kr)$ n. dereceden 1. tür küresel Hankel fonksiyonu $h_n^{(1)}(kr)$ olarak yer almalıdır. Böylece küresel harmonik ifadeleri,

$$\vec{M}_{oln}^{(2)}(k_1 a) = M_{or}^{(2)} \hat{r}(k_1 a) + M_{o\theta}^{(2)} \hat{\theta}(k_1 a) + M_{o\phi}^{(2)} \hat{\phi}(k_1 a) \quad (\text{E.38})$$

$$M_{or}^{(2)}(k_1 a) = 0 \quad (\text{E.39})$$

$$M_{o\theta}^{(2)}(k_1 a) = \cos \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) h_n^{(1)}(rk_1 a) \quad (\text{E.40})$$

$$M_{o\phi}^{(2)}(k_1 a) = -\sin \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) h_n^{(1)}(rk_1 a) \quad (\text{E.41})$$

$$\vec{N}_{eln}^{(2)}(k_1 a) = N_{er}^{(2)} \hat{r}(k_1) + N_{e\theta}^{(2)} \hat{\theta}(k_1) + N_{e\phi}^{(2)} \hat{\phi}(k_1) \quad (\text{E.42})$$

$$N_{er}^{(2)}(k_1 a) = n(n+1) \cos \phi \sin \theta \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{h_n^{(1)}(rk_1 a)}{rk_1 a} \quad (\text{E.43})$$

$$N_{e\theta}^{(2)}(k_1 a) = \cos \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) \frac{\left[rk_1 a h_n^{(1)}(rk_1 a) \right]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.44})$$

$$N_{e\phi}^{(2)}(k_1 a) = -\sin \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{\left[rk_1 a h_n^{(1)}(rk_1 a) \right]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.45})$$

$$\vec{M}_{eln}^{(2)}(k_1 a) = M_{er}^{(2)} \hat{r}(k_1 a) + M_{e\theta}^{(2)} \hat{\theta}(k_1 a) + M_{e\phi}^{(2)} \hat{\phi}(k_1 a) \quad (\text{E.46})$$

$$M_{er}^{(2)}(k_1 a) = 0 \quad (\text{E.47})$$

$$M_{e\theta}^{(2)}(k_1 a) = -\sin \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) h_n^{(1)}(rk_1 a) \quad (\text{E.48})$$

$$M_{e\phi}^{(2)}(k_1 a) = -\cos \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) h_n^{(1)}(rk_1 a) \quad (\text{E.49})$$

$$\vec{N}_{o1n}^{(2)}(k_1 a) = N_{or}^{(2)} \hat{r}(k_1 a) + N_{o\theta}^{(2)} \hat{\theta}(k_1 a) + N_{o\phi}^{(2)} \hat{\phi}(k_1 a) \quad (\text{E.50})$$

$$N_{or}^{(2)}(k_1 a) = n(n+1) \sin \phi \sin \theta \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{h_n^{(1)}(rk_1 a)}{rk_1 a} \quad (\text{E.51})$$

$$N_{o\theta}^{(2)}(k_1 a) = \sin \phi \left(\partial P_n^1 / \partial \theta \right) \frac{\left[rk_1 a h_n^{(1)}(rk_1 a) \right]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.52})$$

$$N_{o\phi}^{(2)}(k_1 a) = \cos \phi \left(P_n^1 / \sin \theta \right) \frac{\left[rk_1 a h_n^{(1)}(rk_1 a) \right]'}{rk_1 a} \quad (\text{E.53})$$

ile verilir. Bu harmonik ifadeler, küreden saçılma probleminin çözümünün elde edilmesine büyük katkı sağlar.

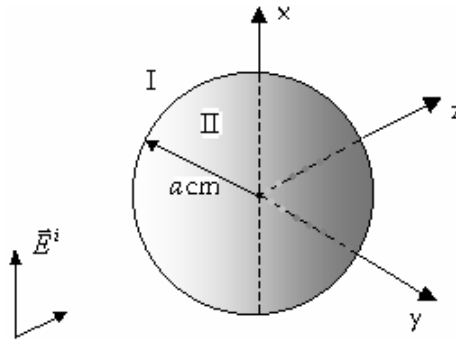
- *Homojen Dielektrik Küreden Saçılan Alanların Hesabı:*

Gelen alanın I bölgesindeki ifadesi (E.36) ve (E.37) ile verildiği göz önünde bulundurularak ışınım koşulu uyarınca küreden uzaklaşan (saçılan) dalgalar,

$$\vec{E}_I^s(\vec{r}) = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[a_n \vec{M}_{o1n}^{(2)}(k_1 a) - i b_n \vec{N}_{e1n}^{(2)}(k_1 a) \right] \quad (\text{E.54})$$

$$\vec{H}_I^s(\vec{r}) = \frac{-A_0}{Z_1} \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[b_n \vec{M}_{e1n}^{(3)}(k_1 a) + i a_n \vec{N}_{o1n}^{(3)}(k_1 a) \right] \quad (\text{E.55})$$

şeklinde harmonik fonksiyonlar ile ifade edilirler.



Şekil 5.1 Düzlemsel dalgalar alanında küre

Kürenin içindeki toplam alan ifadeleri

$$\vec{E}_H^T(\vec{r}) = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[c_n \vec{M}_{o1n}^{(1)}(k_2 a) - i d_n \vec{N}_{e1n}^{(1)}(k_2 a) \right] \quad (\text{E.56})$$

$$\vec{H}_H^T(\vec{r}) = \frac{-A_0}{Z_2} \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[d_n \vec{M}_{e1n}^{(1)}(k_2 a) + i c_n \vec{N}_{o1n}^{(1)}(k_2 a) \right] \quad (\text{E.57})$$

olarak yazılabilir. Kürenin yüzeyindeki sınır koşulları,

$$\hat{n} \times \vec{E}_I^T(k_1 a) + \hat{n} \times \vec{E}_I^s(k_1 a) = \hat{n} \times \vec{E}_H(k_2 a) \quad (\text{E.58})$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_I^t(k_1 a) + \hat{n} \times \vec{H}_I^s(k_1 a) = \hat{n} \times \vec{H}_H(k_2 a) \quad (\text{E.59})$$

şeklinde tanımlıdır. Bu koşullardan, dört tane denklem elde edilir. Bu dört bilinmeyenli dört denklemden bilinmeyen katsayılar,

$$a_n = \frac{\mu_1 m^2 j_n(k_2 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \mu_2 j_n(k_1 a) [k_2 a j_n(k_2 a)]'}{\mu_1 m^2 j_n(k_2 a) [k_1 a h_n^{(1)}(k_1 a)]' - \mu_2 h_n^{(1)}(k_1 a) [k_2 a j_n(k_2 a)]'} \quad (\text{E.60})$$

$$b_n = \frac{\mu_2 j_n(k_2 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \mu_1 j_n(k_1 a) [k_2 a j_n(k_2 a)]'}{\mu_2 j_n(k_2 a) [k_1 a h_n^{(1)}(k_1 a)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(k_1 a) [k_2 a j_n(k_2 a)]'} \quad (\text{E.61})$$

$$c_n = \frac{\mu_2 j_n(k_1 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]' - \mu_2 h_n^{(1)}(k_1 a) [k_1 a j_n(k_1 a)]'}{\mu_2 j_n(k_2 a) [k_1 a h_n^{(1)}(k_1 a)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(k_1 a) [k_2 a j_n(k_2 a)]'} \quad (\text{E.62})$$

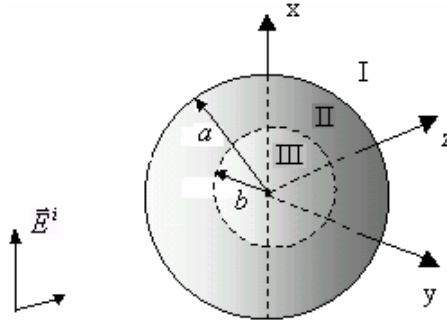
$$d_n = \frac{\mu_2 m j_n(k_2 a) [k_1 a h_n^{(1)}(k_1 a)]' - \mu_2 m h_n^{(1)}(k_1 a) [k_1 a j_n(k_2 a)]'}{\mu_1 m^2 j_n(k_2 a) [k_1 a h_n^{(1)}(k_1 a)]' - \mu_2 h_n^{(1)}(k_1 a) [k_2 a j_n(k_2 a)]'} \quad (\text{E.63})$$

şeklinde elde edilir. (E.54) ifadesinde $m = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}}$, dir.

Ek_3

Bir Düzlemsel Dalganın İki Tabakalı Homojen Küreden Saçılması:

İki tabakalı küre halinde uzayda üç farklı bölge oluşmaktadır. Bu bölgeler şekil 4.7'de gösterildiği şekilde numaralandırılsın. Bu halde I bölgesi için Ek 2.1'de verilen (E.36), (E.37) gelen alan ifadeleri ve (E.54), (E.55) saçılan alan ifadeleri gösterilimlerini korurlar.



Şekil 5.2 Düzlemsel dalgalar alanında küre

II bölgesindeki toplam alan;

$$\vec{E}_{II}(\vec{r}) = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[c_n \vec{M}_{oln}^{(1)}(k_2 a) - i d_n \vec{N}_{eln}^{(1)}(k_2 a) + e_n \vec{M}_{oln}^{(2)}(k_2 a) - i f_n \vec{N}_{eln}^{(2)}(k_2 a) \right] \quad (\text{E.64})$$

$$\vec{H}_{II}(\vec{r}) = \frac{-A_0}{Z_2} \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[d_n \vec{M}_{eln}^{(1)}(k_2 a) + i c_n \vec{N}_{oln}^{(1)}(k_2 a) + f_n \vec{M}_{eln}^{(2)}(k_2 a) + i e_n \vec{N}_{oln}^{(2)}(k_2 a) \right] \quad (\text{E.65})$$

şeklinde yazılabilir. III bölgesindeki toplam alan ise,

$$\vec{E}_{III}(\vec{r}) = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[g_n \vec{M}_{oln}^{(1)}(k_3 a) - i h_n \vec{N}_{eln}^{(1)}(k_3 a) \right] \quad (\text{E.66})$$

$$\vec{H}_{III}(\vec{r}) = \frac{-A_0}{Z_3} \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[h_n \vec{M}_{eln}^{(1)}(k_3 a) + i g_n \vec{N}_{oln}^{(1)}(k_3 a) \right] \quad (\text{E.67})$$

şeklinde yazılabilir $r=a$ ve $r=b$ arayüzelerindeki süreklilik koşulları,

$$\hat{n} \times \vec{E}_{III}(k_3 b) = \hat{n} \times \vec{E}_{II}(k_2 b) \quad (\text{E.68})$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{III} (k_3 b) = \hat{n} \times \vec{H}_{II} (k_2 b) \quad (\text{E.69})$$

$$\hat{n} \times \vec{E}_{II} (k_2 a) = \hat{n} \times E_I (k_1 a) \quad (\text{E.70})$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{II} (k_2 a) = \hat{n} \times \vec{H}_I (k_1 a) \quad (\text{E.71})$$

şeklinde ifade edilir. Bu bağıntılardan sekiz bilinmeyen çözümlenerek sekiz tane denklem elde edilir. (E.68) ifadesinde $\hat{n} = \hat{r}$ yerine yazılırsa ve işlem kolaylığı için

$$R = A_0 i^n \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad P_i = R \frac{-1}{Z_i}$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \hat{r} \times \left[Rg_n \left(M_{o\theta}^{(1)} (k_3 b) \hat{\theta} + M_{o\phi}^{(1)} (k_3 b) \hat{\phi} \right) - iRh_n \left(N_{er}^{(1)} (k_3 b) \hat{r} + N_{e\theta}^{(1)} (k_3 b) \hat{\theta} + N_{e\phi}^{(1)} (k_3 b) \hat{\phi} \right) \right] = \\ & \hat{r} \times \left[Rc_n \left(M_{o\theta}^{(1)} (k_2 b) \hat{\theta} + M_{o\phi}^{(1)} (k_2 b) \hat{\phi} \right) - iRd_n \left(N_{er}^{(1)} (k_2 b) \hat{r} + N_{e\theta}^{(1)} (k_2 b) \hat{\theta} + N_{e\phi}^{(1)} (k_2 b) \hat{\phi} \right) \right. \\ & \left. + Re_n \left(M_{o\theta}^{(3)} (k_2 b) \hat{\theta} + M_{o\phi}^{(3)} (k_2 b) \hat{\phi} \right) - iRf_n \left(N_{er}^{(3)} (k_2 b) \hat{r} + N_{e\theta}^{(3)} (k_2 b) \hat{\theta} + N_{e\phi}^{(3)} (k_2 b) \hat{\phi} \right) \right] \quad (\text{E.72}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Vektörel çarpım işleminin toplama üzerindeki dağılım özelliği uygulanarak,

$$\begin{aligned} & Rg_n M_{o\theta}^{(1)} (k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + Rg_n M_{o\phi}^{(1)} (k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ & - iRh_n N_{e\theta}^{(1)} (k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) - iRh_n N_{e\phi}^{(1)} (k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \\ & Rc_n M_{o\theta}^{(1)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + Rc_n M_{o\phi}^{(1)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) - iRd_n N_{e\theta}^{(1)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) \\ & - iRd_n N_{e\phi}^{(1)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) + Re_n M_{o\theta}^{(3)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + Re_n M_{o\phi}^{(3)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ & - iRf_n N_{e\theta}^{(3)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) - iRf_n N_{e\phi}^{(3)} (k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \quad (\text{E.73}) \end{aligned}$$

yöndeş vektörlerin bileşenlerinin toplamsallığı ilkesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \left[Rg_n M_{o\theta}^{(1)} (k_3 b) - iRh_n N_{e\theta}^{(1)} (k_3 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\theta}) + \left[Rg_n M_{o\phi}^{(1)} (k_3 b) - iRh_n N_{e\phi}^{(1)} (k_3 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \\ & \left[Rc_n M_{o\theta}^{(1)} (k_2 b) - iRd_n N_{e\theta}^{(1)} (k_2 b) + Re_n M_{o\theta}^{(3)} (k_2 b) - iRf_n N_{e\theta}^{(3)} (k_2 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\theta}) \\ & \left[Rc_n M_{o\phi}^{(1)} (k_2 b) - iRd_n N_{e\phi}^{(1)} (k_2 b) + Re_n M_{o\phi}^{(3)} (k_2 b) - iRf_n N_{e\phi}^{(3)} (k_2 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\phi}) \quad (\text{E.74}) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (E. 74) denkleminin iki yanındaki vektörlerin bileşenlerinin eşit olması gerektiğinden

$$g_n M_{o\theta}^{(1)}(k_3 b) - i h_n N_{e\theta}^{(1)}(k_3 b) = c_n M_{o\theta}^{(1)}(k_2 b) - i d_n N_{e\theta}^{(1)}(k_2 b) + e_n M_{o\theta}^{(3)}(k_2 b) - i f_n N_{e\theta}^{(3)}(k_2 b) \quad (\text{E.75})$$

$$g_n M_{o\phi}^{(1)}(k_3 b) - i h_n N_{e\phi}^{(1)}(k_3 b) = c_n M_{o\phi}^{(1)}(k_2 b) - i d_n N_{e\phi}^{(1)}(k_2 b) + e_n M_{o\phi}^{(3)}(k_2 b) - i f_n N_{e\phi}^{(3)}(k_2 b) \quad (\text{E.76})$$

skaler denklemleri elde edilir.

(E.69) denkleminde,

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \left[P_3 h_n \left(M_{e\theta}^{(1)}(k_3 b) \hat{\theta} + M_{e\phi}^{(1)}(k_3 b) \hat{\phi} \right) + i P_3 g_n \left(N_{or}^{(1)}(k_3 b) \hat{r} + N_{o\theta}^{(1)}(k_3 b) \hat{\theta} + N_{o\phi}^{(1)}(k_3 b) \hat{\phi} \right) \right] = \\ \hat{r} \times \left[P_2 d_n \left(M_{e\theta}^{(1)}(k_2 b) \hat{\theta} + M_{e\phi}^{(1)}(k_2 b) \hat{\phi} \right) + i P_2 c_n \left(N_{or}^{(1)}(k_2 b) \hat{r} + N_{o\theta}^{(1)}(k_2 b) \hat{\theta} + N_{o\phi}^{(1)}(k_2 b) \hat{\phi} \right) \right. \\ \left. + P_2 f_n \left(M_{e\theta}^{(3)}(k_2 b) \hat{\theta} + M_{e\phi}^{(3)}(k_2 b) \hat{\phi} \right) + i P_2 e_n \left(N_{or}^{(3)}(k_2 b) \hat{r} + N_{o\theta}^{(3)}(k_2 b) \hat{\theta} + N_{o\phi}^{(3)}(k_2 b) \hat{\phi} \right) \right] \quad (\text{E.77}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Vektörel çarpım işleminin toplama üzerindeki dağılıma özelliği uygulanarak,

$$\begin{aligned} P_3 h_n M_{e\theta}^{(1)}(k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + P_3 h_n M_{e\phi}^{(1)}(k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) + i P_3 g_n N_{o\theta}^{(1)}(k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + i P_3 g_n N_{o\phi}^{(1)}(k_3 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \\ P_2 d_n M_{e\theta}^{(1)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + P_2 d_n M_{e\phi}^{(1)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ + i P_2 c_n N_{o\theta}^{(1)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + i P_2 c_n N_{o\phi}^{(1)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) + P_2 f_n M_{e\theta}^{(3)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) \\ + P_2 f_n M_{e\phi}^{(3)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) + i P_2 e_n N_{o\theta}^{(3)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + i P_2 e_n N_{o\phi}^{(3)}(k_2 b) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \quad (\text{E.78}) \end{aligned}$$

yöndeş vektörlerin bileşenlerinin toplamsallığı ilkesi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left[P_3 h_n M_{e\theta}^{(1)}(k_3 b) + i P_3 g_n N_{o\theta}^{(1)}(k_3 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\theta}) + \left[P_3 h_n M_{e\phi}^{(1)}(k_3 b) + i P_3 g_n N_{o\phi}^{(1)}(k_3 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \\ \left[P_2 d_n M_{e\theta}^{(1)}(k_2 b) + i P_2 c_n N_{o\theta}^{(1)}(k_2 b) + P_2 f_n M_{e\theta}^{(3)}(k_2 b) + i P_2 e_n N_{o\theta}^{(3)}(k_2 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\theta}) \\ + \left[P_2 d_n M_{e\phi}^{(1)}(k_2 b) + i P_2 c_n N_{o\phi}^{(1)}(k_2 b) + P_2 f_n M_{e\phi}^{(3)}(k_2 b) + i P_2 e_n N_{o\phi}^{(3)}(k_2 b) \right] (\hat{r} \times \hat{\phi}) \quad (\text{E.79}) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (E. 79) denkleminin iki yanındaki vektörlerin bileşenlerinin eşit olması gerektiğinden

$$\begin{aligned} P_3 h_n M_{e\theta}^{(1)}(k_3 b) + i P_3 g_n N_{o\theta}^{(1)}(k_3 b) = P_2 d_n M_{e\theta}^{(1)}(k_2 b) + i P_2 c_n N_{o\theta}^{(1)}(k_2 b) \\ + P_2 f_n M_{e\theta}^{(3)}(k_2 b) + i P_2 e_n N_{o\theta}^{(3)}(k_2 b) \quad (\text{E.80}) \end{aligned}$$

$$P_3 h_n M_{e\phi}^{(1)}(k_3 b) + i P_3 g_n N_{o\phi}^{(1)}(k_3 b) = P_2 d_n M_{e\phi}^{(1)}(k_2 b) + i P_2 c_n N_{o\phi}^{(1)}(k_2 b)$$

$$+P_2 f_n M_{e\phi}^{(3)}(k_2 b) + iP_2 e_n N_{o\phi}^{(3)}(k_2 b) \quad (\text{E.81})$$

uygun sadeleştirmeler yapılarak,

$$\begin{aligned} \frac{k_2}{k_3} \left[h_n M_{e\theta}^{(1)}(k_3 b) + i g_n N_{o\theta}^{(1)}(k_3 b) \right] &= d_n M_{e\theta}^{(1)}(k_2 b) + i c_n N_{o\theta}^{(1)}(k_2 b) \\ &+ f_n M_{e\theta}^{(3)}(k_2 b) + i e_n N_{o\theta}^{(3)}(k_2 b) \end{aligned} \quad (\text{E.82})$$

$$\begin{aligned} \frac{k_2}{k_3} \left[h_n M_{e\phi}^{(1)}(k_3 b) + i g_n N_{o\phi}^{(1)}(k_3 b) \right] &= d_n M_{e\phi}^{(1)}(k_2 b) + i c_n N_{o\phi}^{(1)}(k_2 b) \\ &+ f_n M_{e\phi}^{(3)}(k_2 b) + i e_n N_{o\phi}^{(3)}(k_2 b) \end{aligned} \quad (\text{E.83})$$

skaler denklemleri elde edilir.

(E.70) denkleminde,

$$\begin{aligned} \hat{r} \times \left[R c_n \left(M_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) \hat{\theta} + M_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) - i R d_n \left(N_{er}^{(1)}(k_2 a) \hat{r} + N_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) \hat{\theta} + N_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) \right. \\ \left. + R e_n \left(M_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) \hat{\theta} + M_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) - i R f_n \left(N_{er}^{(1)}(k_2 a) \hat{r} + N_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) \hat{\theta} + N_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) \right] = \\ \hat{r} \times \left[R \left(M_{o\theta}^{(1)}(k_1 a) \hat{\theta} + M_{o\phi}^{(1)}(k_1 a) \hat{\phi} \right) - i R \left(N_{er}^{(1)}(k_1 a) \hat{r} + N_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) \hat{\theta} + N_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) \hat{\phi} \right) \right. \\ \left. + R a_n \left(M_{o\theta}^{(3)}(k_1 a) \hat{\theta} + M_{o\phi}^{(3)}(k_1 a) \hat{\phi} \right) - i R b_n \left(N_{er}^{(3)}(k_1 a) \hat{r} + N_{e\theta}^{(3)}(k_1 a) \hat{\theta} + N_{e\phi}^{(3)}(k_1 a) \hat{\phi} \right) \right] \quad (\text{E.84}) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Vektörel çarpım işleminin toplama üzerindeki dağılıma özelliği uygulanarak,

$$\begin{aligned} R c_n M_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + R c_n M_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ - i R d_n N_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) - i R d_n N_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ + R e_n M_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + R e_n M_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ - i R f_n N_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) - i R f_n N_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \\ R M_{o\theta}^{(1)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + R M_{o\phi}^{(1)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ - i R N_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) - i R N_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ + R a_n M_{o\theta}^{(3)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + R a_n M_{o\phi}^{(3)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\ - i R b_n N_{e\theta}^{(3)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) - i R b_n N_{e\phi}^{(3)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \quad (\text{E.85}) \end{aligned}$$

yöndeş vektörlerin bileşenlerinin toplamsallığı ilkesi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left[Rc_n M_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) - Rd_n N_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) + Re_n M_{o\theta}^{(3)}(k_2 a) - iRf_n N_{e\theta}^{(3)}(k_2 a) \right] (\hat{r} \times \hat{\theta}) \\
& + \left[Rc_n M_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) - iRd_n N_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) + Re_n M_{o\phi}^{(3)}(k_2 a) - iRf_n N_{e\phi}^{(3)}(k_2 a) \right] (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \\
& \quad \left[RM_{o\theta}^{(1)}(k_1 a) - iRN_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) + Ra_n M_{o\theta}^{(3)}(k_1 a) - iRb_n N_{e\theta}^{(3)}(k_1 a) \right] (\hat{r} \times \hat{\theta}) \\
& \quad + \left[RM_{o\phi}^{(1)}(k_1 a) - iRN_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) + Ra_n M_{o\phi}^{(3)}(k_1 a) - iRb_n N_{e\phi}^{(3)}(k_1 a) \right] (\hat{r} \times \hat{\phi}) \quad (E.86)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (E. 86) denkleminin iki yanındaki vektörlerin bileşenlerinin eşit olması gerektiğinden

$$\begin{aligned}
c_n M_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) - id_n N_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) + e_n M_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) - if_n N_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) = \\
M_{o\theta}^{(1)}(k_1 a) - iN_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) + a_n M_{o\theta}^{(3)}(k_1 a) - ib_n N_{e\theta}^{(3)}(k_1 a) \quad (E.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_n M_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) - id_n N_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) + e_n M_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) - if_n N_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) = \\
M_{o\phi}^{(1)}(k_1 a) - iN_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) + a_n M_{o\phi}^{(3)}(k_1 a) - ib_n N_{e\phi}^{(3)}(k_1 a) \quad (E.88)
\end{aligned}$$

skaler denklemleri elde edilir.

(E.71) denkleminde,

$$\begin{aligned}
& \hat{r} \times \left[P_2 d_n \left(M_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) \hat{\theta} + M_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) + iP_2 c_n \left(N_{or}^{(1)}(k_2 a) \hat{r} + N_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) \hat{\theta} + N_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) \right. \\
& \left. + P_2 f_n \left(M_{e\theta}^{(2)}(k_2 a) \hat{\theta} + M_{e\phi}^{(2)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) + iP_2 e_n \left(N_{or}^{(2)}(k_2 a) \hat{r} + N_{o\theta}^{(2)}(k_2 a) \hat{\theta} + N_{o\phi}^{(2)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) \right] = \\
& \quad \hat{r} \times \left[P_1 \left(M_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) \hat{\theta} + M_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) \hat{\phi} \right) + iP_1 \left(N_{or}^{(1)}(k_1 a) \hat{r} + N_{o\theta}^{(1)}(k_1 a) \hat{\theta} + N_{o\phi}^{(1)}(k_1 a) \hat{\phi} \right) \right. \\
& \quad \left. + P_1 b_n \left(M_{e\theta}^{(2)}(k_2 a) \hat{\theta} + M_{e\phi}^{(2)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) + iP_1 a_n \left(N_{or}^{(2)}(k_2 a) \hat{r} + N_{o\theta}^{(2)}(k_2 a) \hat{\theta} + N_{o\phi}^{(2)}(k_2 a) \hat{\phi} \right) \right] \quad (E.89)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Vektörel çarpım işleminin toplama üzerindeki dağılma özelliği uygulanarak,

$$\begin{aligned}
& P_2 d_n M_{e\theta}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + P_2 d_n M_{e\phi}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\
& + iP_2 c_n N_{o\theta}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + iP_2 c_n N_{o\phi}^{(1)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\
& + P_2 f_n M_{e\theta}^{(3)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + P_2 f_n M_{e\phi}^{(2)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) \\
& + iP_2 e_n N_{o\theta}^{(2)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + iP_2 e_n N_{o\phi}^{(2)}(k_2 a) (\hat{r} \times \hat{\phi}) = \\
& \quad P_1 M_{e\theta}^{(1)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\theta}) + P_1 M_{e\phi}^{(1)}(k_1 a) (\hat{r} \times \hat{\phi})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +iP_1N_{o\theta}^{(1)}(k_1a)(\hat{r} \times \hat{\theta}) + iP_1N_{o\phi}^{(1)}(k_1a)(\hat{r} \times \hat{\phi}) \\
& +P_1b_nM_{e\theta}^{(3)}(k_1a)(\hat{r} \times \hat{\theta}) + P_1b_nM_{e\phi}^{(2)}(k_1a)(\hat{r} \times \hat{\phi}) \\
& +iP_1a_nN_{o\theta}^{(2)}(k_1a)(\hat{r} \times \hat{\theta}) + iP_1a_nN_{o\phi}^{(2)}(k_1a)(\hat{r} \times \hat{\phi}) \quad (E.90)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (E. 89) denkleminde uygun sadeleştirmeler yapılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{k_2}{k_1} \left[d_n M_{e\theta}^{(1)}(k_2a) + ic_n N_{o\theta}^{(1)}(k_2a) + f_n M_{e\theta}^{(2)}(k_2a) + ie_n N_{o\theta}^{(2)}(k_2a) \right] = \\
M_{e\theta}^{(1)}(k_1a) + iN_{o\theta}^{(1)}(k_1a) + b_n M_{e\theta}^{(2)}(k_1a) + ia_n N_{o\theta}^{(2)}(k_1a) \quad (E.91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{k_2}{k_1} \left[d_n M_{e\phi}^{(1)}(k_2a) + ic_n N_{o\phi}^{(1)}(k_2a) + f_n M_{e\phi}^{(2)}(k_2a) + ie_n N_{o\phi}^{(2)}(k_2a) \right] = \\
M_{e\phi}^{(1)}(k_1a) + iN_{o\phi}^{(1)}(k_1a) + b_n M_{e\phi}^{(2)}(k_1a) + ia_n N_{o\phi}^{(2)}(k_1a) \quad (E.92)
\end{aligned}$$

skaler denklemleri elde edilir.

(E.75), (E.76), (E.82), (E.83), (E.87), (E.88), (E.91), (E.92) denklemlerinden oluşan doğrusal denklem sisteminin çözülmesi ile

$$e_n = \frac{-P_1 P_5}{P_2 P_3 - P_1 P_4} \quad (E.93)$$

$$f_n = \frac{-P_2 P_5}{P_1 P_4 - P_2 P_3} \quad (E.94)$$

$$g_n = \frac{j_n(k_2b)c_n + h_n^{(1)}(k_2b)e_n}{j_n(k_3b)c_n} \quad (E.95)$$

$$e_n = \frac{-t_1 t_5}{t_2 t_3 - t_1 t_4} \quad (E.96)$$

$$f_n = \frac{-t_2 t_5}{t_1 t_4 - t_2 t_3} \quad (E.97)$$

$$g_n = \frac{j_n(k_2b)c_n + h_n^{(1)}(k_2b)e_n}{j_n(k_3b)c_n} \quad (E.98)$$

şeklinde katsayılar hesaplanır. Bu ifadelerdeki sabitler,

$$p_1 = m_2 \frac{[rk_3 b j_n(rk_3 b)]'}{rk_3 b} j_n(rk_2 b) - j_n(rk_3 b) \frac{[rk_2 b j_n(rk_2 b)]'}{rk_2 b} \quad (E.99)$$

$$p_2 = m_2 \frac{[rk_3bj_n(rk_3b)]'}{rk_3b} j_n(rk_2b) - j_n(rk_3b) \frac{[rk_2bh_n^{(1)}(rk_2b)]'}{rk_2b} \quad (\text{E.100})$$

$$p_3 = \frac{[rk_3bh_n^{(1)}(rk_3b)]'}{rk_3b} j_n(rk_2a) - m_1 j_n(rk_1a) \frac{[rk_2aj_n(rk_2a)]'}{rk_2a} \quad (\text{E.101})$$

$$p_4 = \frac{[rk_3bh_n^{(1)}(rk_1a)]'}{rk_1a} j_n(rk_2a) - m_1 h_n^{(1)}(rk_1a) \frac{[rk_2bh_n^{(1)}(rk_2a)]'}{rk_2a} \quad (\text{E.102})$$

$$p_5 = \frac{[rk_3bh_n^{(1)}(rk_1a)]'}{rk_1a} j_n(rk_1a) - h_n^{(1)}(rk_1a) \frac{[rk_2bj_n(rk_1a)]'}{rk_1a} \quad (\text{E.103})$$

$$t_1 = m_2 \frac{[rk_3bj_n(rk_2b)]'}{rk_2b} j_n(rk_3b) - j_n(rk_2b) \frac{[rk_2bj_n(rk_3b)]'}{rk_3b} \quad (\text{E.104})$$

$$t_2 = m_2 \frac{[rk_3bh_n^{(1)}(rk_2b)]'}{rk_2b} j_n(rk_3b) - h_n^{(1)}(rk_2b) \frac{[rk_2bj_n(rk_3b)]'}{rk_2b} \quad (\text{E.105})$$

$$t_3 = m_1 \frac{[rk_3bh_n^{(1)}(rk_1a)]'}{rk_1a} j_n(rk_2a) - h_n^{(1)}(rk_1a) \frac{[rk_2aj_n(rk_2a)]'}{rk_2a} \quad (\text{E.106})$$

$$t_4 = m_1 \frac{[rk_1ah_n^{(1)}(rk_1a)]'}{rk_1a} j_n(rk_2a) - h_n^{(1)}(rk_1a) \frac{[rk_2bj_n(rk_2a)]'}{rk_2a} \quad (\text{E.107})$$

$$t_5 = \frac{[rk_3bh_n^{(1)}(rk_1a)]'}{rk_1a} j_n(rk_1a) - h_n^{(1)}(rk_1a) \frac{[rk_2bj_n(rk_1a)]'}{rk_1a} \quad (\text{E.108})$$

olarak tanımlıdır. (E.99-108) ifadelerinde $m_1 = k_1/k_2$ ve $m_1 = k_2/k_3$ olarak tanımlıdır.

TEŐEKKÖR

Çalıőmaya verdiği destekden dolayı Prof.Dr. Ali OKTAY'a teőekkÖr ederim. Çalışmanın oluőması sÖrecinde sağladığı katkıdan dolayı Dr. Sevim KURTULDU'ya teőekkÖr ederim. Her konuda yardımını esirgemeyen ve çalıőmaya bÖyÖk katkılar sağlayan Prof.Dr. Burak POLAT'a teőekkÖr ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Ömer Zor 1978 yılında Rize’de doğdu. Orta eğitimini Yalova’da tamamladıktan sonra 1996 yılında Uludağ Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümünde yüksek öğrenimine başladı. 2002 yılında Fen Bilimleri Enstitüsünün Elektronik Mühendisliği Anabilim dalında lisanüstü eğitimine devam etti.