T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL VE KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI

Erkan KORKMAZ

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2011

TEZ ONAYI

Erkan KORKMAZ tarafından hazırlanan " İSTATİSTİKSEL VE KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN İmza
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. İlker Ercan İmza
Uludağ Üniversitesi Tıp Fakültesi
Biyoistatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Enstitü Müdürü
27/01/2011

Bilimsel Etik Bildirim Sayfası

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılana verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17/01/2011

Erkan Korkmaz

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİSTİKSEL VE KATLI ÇARPIM MANİFOLDLARI

Erkan KORKMAZ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak bazı temel tanımlar, örnekler ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde tanımlanan istatistiksel modellerin üzerine geometri inşa edebilmek için Fisher Informasyon metriği tanımlanmıştır. Beklenen değer ve potansiyel fonksiyon yardımıyla Gamma 2-Manifoldu ve Gaussian 2- Manifoldu için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde manifoldlar ve koneksiyonlar ile ilgili bazı kavramlar verilmiş ve bunlar yardımıyla istatistiksel manifoldun tanımı verilmiştir. Gamma ve Gaussian manifoldundaki $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonunun bileşenlerinin değerleri bulunmuştur. Eşlenik koneksiyonlar tanımlanmış, Riemann eğrilikleri ile ilgili bazı özellikler verilmiştir. Beşinci bölümde katlı çarpımların temel kavramları verilmiştir. Eşlenik koneksiyonların çift katlı çarpımları ile ilgili orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Çift katlı çarpım manifoldunda Riemann eğriliğinin denklemleri verilmiştir. Bu denklemler yardımıyla eşlenik olarak düzlemsel kavramı ile ilgili bazı sonuçlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fisher Informasyon metriği, beklenen değer, potansiyel fonksiyon, Gamma 2- manifold, Gaussian 2- manifold, $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyon, Riemann eğrilik tensörü, eşlenik koneksiyon, çift katlı çarpım manifoldu.

2011, vi + 71 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

STATISTICAL AND WARPED PRODUCT MANIFOLDS

Erkan KORKMAZ

Uludağ University

Graduate School of Naturel and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

This thesis fundamentally consists of five chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, for using in the other chapters, some main definitions, examples and theorems have been given. In the third chapter, the Fisher Information metric was defined for constructing a geometry in statistica models. Some results were obtained with helping expected value and potential function for Gamma 2-manifold and Gaussian 2-manifold. In the fourth chapter, some concepts have been given for manifolds and connections. And with the help of these concepts, statistical manifold were defined. The values of components of $\overset{\alpha}{\nabla}$ connection were calculated in Gamma and Gaussian manifolds. We defined conjugate connections and some properties were given about Riemannian curvature. In the fifth chapter, some main concepts about warped products have been given. Original results were found about conjugate connections in double warped product manifold. The equations about Riemannian curvature were calculated in double warped product manifold. With the help of these equations some results were found about the concept of dually flat.

Key Words: Fisher Information metric, expected value, potential function, Gamma 2-manifold, Gaussian 2- manifold, $\overset{\alpha}{\nabla}$ connection, Riemann curvature tensor, conjugate connection, double warped product manifold**.**

2011, vi + 71 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

İki yıldır, bu tezi meydana getirebilmek için benimle ilgilenen, anlayışını, emeğini, zamanını esirgemeyen, bu günüme ve geleceğime hem bilimsel hem de kişiliğiyle çok şeyler katan başta değerli hocam Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN' a ve tüm hocalarıma, çalışmalarım süresince birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen anneme, babama ve sevgili eşim Ferişte Adalı KORKMAZ'a en derin duygularla teşekkür ederim. Ayrıca, iki yıldır bana burs veren TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Erkan Korkmaz
17/01/2011

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	- Reel sayılar cümlesi
p	- Olasılık yoğunluk fonksiyonu
E	- Beklenen değer
σ_X^2	- X in varyansı
Θ	- Olasılık yoğunluk fonksiyonlarının parametre uzayı
$\langle , \rangle$	- Skalar çarpım
T_pM	- p noktasındaki teğet uzay
M	- Manifold
g, h	- Metrik tensör
C^∞	- Her mertebeden sürekli olma ve diferansiyellenebilme
∇	- Afin koneksiyon
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	- M den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\chi(M)$	- M nin vektör alanlarının uzayı
$\bar{\nabla}$	- Riemann koneksiyon
$[,]$	- Lie parantez operatörü
C	- Kübik form(çarpıklık)
R	- M nin Riemann eğrilik tensörü
S	- Olasılık dağılımlarının kümesi
Γ	- Christoffel Sembolü
R*	- ∇^* ın Riemann eğrilik tensörü
$\overset{\alpha}{\mathrm{R}}$	- $\overset{\alpha}{\nabla}$ nın Riemann eğrilik tensörü
∂	- Kısmi türev
φ	- Potansiyel fonksiyon
ξ	- Dik vektör alanı
∇^*	- ∇ nın eşlenik koneksiyonu
E, F, G	- 1. Temel form katsayıları
K	- Kesitsel eğrilik
$\overset{\alpha}{\nabla}$	- α - koneksiyon
T_{ijk}	- α - koneksiyon her bir değeri
$<,>$	- Çarpım manifoldundaki metrik
h	- 2. Temel form
σ_*	- Türev dönüşümü
$L(M)$	- Liftlerin kümesi
D	- Çarpım manifoldu üzerindeki koneksiyon

ŞEKİLLER DİZİNİ

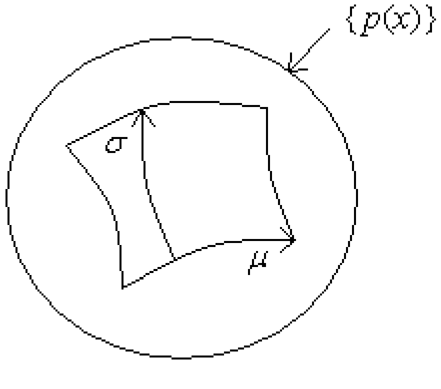
1. GİRİŞ

Olasılık dağılımların üzerinde çalışılan Bilgi (Informasyon) geometrisi 1980' lerde ortaya çıkmıştır. Matematikte çok geniş uygulama alanlarına sahiptir ve bu yüzden her geçen gün çalışma alanları artmaktadır. Bazı uygulama alanları olarak, istatistiksel sonuç çıkarma, lineer ve lineer olmayan sistemler, lineer programlama, konveks analiz, zaman serileri, sinir ağları, integrallenebilir sinir ağları, geometrik modelleme gibi alanlardan bahsedilebilir. Bir diğer alan Afin diferensiyel geometride, afin uzayda gömülü olan hiper yüzeyler üzerindeki çalışmalardır. Afin koneksiyon kavramının ortaya çıkmasıyla beraber, bu iki geometri dalında ortak noktalar oluşmuştur. İşte istatistiksel manifold kavramı, Bilgi geometrisinde olasılık dağılımlarında bir manifold iken, Afin diferensiyel geometride, bu manifold eş afin imersiyon kavramıyla örtüşmektedir (Matsuzoe 2006). İstatistiksel manifoldlar dokuların renk ve parlaklığıyla ilgili olarak görüntü analizinde kullanılır. Dokuların görüntüleri çok terimli dağılımlar olarak kabul edilir ve aralarındaki uzaklık Riemann geometrisinde jeodezik uzaklığıyla hesaplanır (Nassar ve ark. 2002).

Bilgi Geometrisi olasılık dağılımların diferensiyel geometrik yapılarını inceler. Örneğin Normal dağılımların kümesini oluşturan S =($p(x;\mu,\sigma)$) uzayında

$$p(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \qquad -\infty < x,\mu < \infty,\ \ \sigma^2 > 0$$

İstatistik biliminde μ, σ^2, sırasıyla ortalama ve varyans kavramını belirtmektedir. $p(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve (μ,σ) parametresiyle Gauss (Normal) dağılımı oluşturulur. S uzayı ve (μ,σ) koordinat sistemi 2- boyutlu manifold teşkil eder.



Şekil 1.1. 2- boyutlu Normal Dağılım

Olasılık dağılımlarının kümesi üzerinde incelenen g_{ij} metriği beklenen değer yardımıyla

$$g_{ij}(\theta) = \mathrm{E}_\theta[\partial_i(\ell)\partial_j(\ell)] = \int \partial_i \ell(\theta,x)\partial_j \ell(\theta,x) p_\theta(x)dx$$

eşitliğiyle tanımlanmış ve Fisher Bilgi (Informasyon) metriği ilk defa 1945 yılında Rao, sonlu ve ayrık örnek uzayda $\alpha-$koneksiyon kavramı ise 1972 yılında Chentsov tarafından çalışılmıştır. Daha sonra $\alpha-$koneksiyonların en genel hali 1982 yılında Amari tarafından açıklanmıştır. 1987 yılında Lauritzen tarafından istatistiksel manifold, diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde, üçüncü mertebeden simetrik kovaryant C tensörü ve g metriğinin oluşturduğu (M, g, C) yapısı olarak tanımlanmıştır.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan ve orijinallik içeren bu tezin amacı, istatistiksel kavramları geometrik olarak yorumlamak, diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde tanımlanan istatistiksel manifold, eşlenik koneksiyon, katlı ve çift katlı çarpım kavramlarını iyi bir şekilde anlamak ve anlaşılabilir hale getirmektir. İlk olarak O'Neill tarafından 1983 yılında tanımlanan katlı çarpım ve onun genel hali olan çift katlı çarpım kavramı eşlenik koneksiyonlarda çalışılmış ve Riemann eğriliği için bazı orijinal sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır.

Beş bölümden oluşan bu tezin ikinci bölümünde bazı istatistik kavramlarının daha iyi anlaşılabilmesi için temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümünde ise ilk olarak Fisher Bilgi (Informasyon) metriği tanımlanmış, Gamma 2-Manifoldu ve Gaussian 2-Manifoldu için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise Lauritzen'in istatistiksel manifold tanımı, bununla ilgili bazı önermeler ve sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde ilk önce katlı çarpımlar için bazı temel kavramlar verilip, bu kavramlar eşlenik koneksiyonlar yardımıyla çift katlı çarpımlara uyarlanmıştır. Son olarak, Riemann eğriliğinin çift katlı çarpım manifoldundaki eşitlikleri bulunmuş ve bunlar yardımıyla manifoldun eşlenik olarak düzlemsel olması durumu incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı istatistik kavramları tanıtılacaktır.

2.1. Rasgele Değişkenler ve Bazı Dağılımlar

Tanım 2.1.1: Bir deneyin tüm olası oluşlarını ihtiva eden uzaya **örnek uzay** denir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.1.2: Bir örnek uzay üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyona ya da değeri bir deney sonucuyla belirtilen bir değişkene **rasgele değişken** denir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.1.3: Gözlenebilir rasgele değişkenlerin fonksiyonuna **istatistik** denir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.1.4: X bir rasgele değişken olsun. X in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise X e **kesikli rasgele değişken** denir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.1.5: X bir rasgele değişken olsun. X bir aralıkta ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X e **sürekli rasgele değişken** denir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.1.6: X , sonlu sayıdaki $x_1, x_2, ..., x_n$ değerlerini $p(x_i) = \mathrm{P}(X), \quad i = 1, 2, ..., n$ olasılıkları ile alabilen kesikli rasgele değişken olsun.

$$p: X \to \mathbb{R}$$

için

$$\forall x \in X, \ p(x) \geq 0 \ \text{ ve } \ \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \qquad (2.1.1)$$

özelliklerini sağlayan fonksiyona X **kesikli rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir (Amari 2000).

Tanım 2.1.7: X sürekli rasgele değişkeni üzerinde tanımlanan

$$p: X \to \mathbb{R}$$

$\forall x \in X,\ p(x) \geq 0$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \qquad , -\infty < x < +\infty \tag{2.1.2}$$

özelliğini sağlayan fonksiyona X **sürekli rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir (Amari 2000).

Tanım 2.1.8 (Beklenen değer):

i) X aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip kesikli bir rasgele değişken, $p(x)$, X in olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere

$$\mathrm{E(x)} = x_1.p(x_1) + x_2.p(x_2) + ... + x_n.p(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p(x_i) \tag{2.1.3}$$

toplamına X in beklenen değeri denir.

ii) Eğer X rasgele değişkeni sayılabilir sonsuzluktaki $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ sonuçlarını alıyorsa bu beklenen değer

$$\mathrm{E(x)} = x_1.p(x_1) + x_2.p(x_2) + ... + x_n.p(x_n) + ... = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.p(x_i) \tag{2.1.4}$$

şeklinde tanımlanır.

iii) Eğer X bir boyutlu sürekli bir rasgele değişken ise beklenen değer

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x.p(x).dx \qquad , -\infty < x < +\infty$$

olarak tanımlanır (Akdeniz 2009).

Örnek 2.1.1: Sürekli X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \ x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

olsun. Bu durumda beklenen değer

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x.p(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-x}.dx = 1$$

dir.

Şimdi beklenen değerin özeliklerini bir sonuç olarak verelim.

Sonuç 2.1.1:

1) a ve b sabit ve X rasgele değişken ise

E(a.x+b) = a.E(x)+b (2.1.5)

dir.

2) Ortalamaları E(x) ve E(y) olan X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $p(x_i, y_j)$ i =1, 2, …m; j =1, 2, …, n olsun. Bu takdirde

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

dir.

3) Ortalamaları E(x) ve E(y) olan bağımsız X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $p(x_i, y_j)$ i =1, 2, …m ; j =1, 2, …, n olsun. Bu takdirde

$$E(x.y) = E(x).E(y)$$

dir (Akdeniz 2009).

Bir rasgele değişkenin beklenen değeri ya da ortalaması olasılık fonksiyonunun merkezi hakkında bize bilgi verir. Fakat ortalama değer, bir deneyden bir diğerine rasgele değişkenin değerlerinin dağılımı, değişimi ya da yayılması ile ilgili bilgi vermez. Şimdi bununla ilgili bilgi veren varyans kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 2.1.9 (Varyans): X, olasılık kesikli rasgele değişken olsun. X in ortalaması E(x) olmak üzere

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(x) = E(x- E(x))^2$$

değerine X in varyansı denir. Yani, gözlem değeri ile ortalama değer arasındaki sapmayı ölçen değerdir.

a) X kesikli rasgele değişken ise,

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 . p(x_i)$$

b) X sürekli rasgele değişken ise,

$$\sigma^2 = \mathrm{Var(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E(x)})^2 . p(x).dx$$

dir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.1.10: X, E(x) beklenen değere sahip kesikli ya da sürekli bir rasgele değişken olsun. X in standart sapması,

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var(x)}} = \sqrt{\mathrm{E(x\text{-}E(x))^2}}$$

dir (Akdeniz 2009).

Teorem 2.1.1: X, E(x) beklenen değere ve Var(x) $=\sigma^2$ varyansına sahip bir rasgele değişken ise

$$\sigma^2 = \mathrm{E(x^2)} - [\mathrm{E(x)}]^2$$

dir (Akdeniz 2009).

Örnek 2.1.2: 5 öğrencinin sınav sonuçları 70, 64, 50, 96, 55 olmak üzere bunların ortalaması 67 dir. İlk öğrencinin notu ile ortalama arasındaki fark 70-67=3 dür. Diğerleri -3, -17, 29, -12 dir. Elde edilen bu değerlerin basitçe aritmetik ortalamaları alınmaz. Çünkü bunların toplamı 0 olur. Bu sorunu gidermek için karesi alınmıştır. Karesi alınmış sapmalar 9, 9, 289, 841, 144 dür. Bu değerlerin aritmetik ortalaması(varyansı) verir. Yani varyans= 258.4 olur.

2.2. Bazı Kesikli Olasılık Dağılımları

Tanım 2.2.1 (Bernoulli rasgele değişkeni): Bir X rasgele değişkeni için yalnız iki sonuç varsa X 'e Bernoulli rasgele değişkeni denir(Akdeniz 2009).
Bir denemede elde edilecek iki sonuç için genellikle 0 ve 1 değerleri karşılık getirilir. 1 değeri belli bir denemenin başarılı olmasına 0 ise başarısızlığa karşılıktır.

Tanım 2.2.2 (Bernoulli dağılımı): X rasgele değişkeni 0 ve 1 değerlerini alsın.
X in olasılık fonksiyonu,

$$P(X=1)=\mathrm{p}$$
$$P(X=0)=1-\mathrm{p}=q$$

veya

$$p(x)=P(X=x)=\mathrm{p}^{x}.(1-\mathrm{p})^{1-x}, \quad x=0,1$$

dır. Bu dağılıma Bernoulli dağılımı adı verilir (Akdeniz 2009).

Teorem 2.2.1: X , Bernoulli dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun.

$$p(x)=\mathrm{p}^{x}.(1-\mathrm{p})^{1-x}, \quad x=0,1$$

Bernoulli dağılımının ortalaması(beklenen değeri) ve varyansı σ^2 , sırasıyla

$$\mathrm{E(x)}=\mathrm{p}$$
$$\sigma^2=\mathrm{E(x^2)\text{-}(E(x))^2}=\mathrm{p}.q=\mathrm{p}.(1-\mathrm{p})$$

dir (Akdeniz 2009).

İspat: Beklenen değer tanımından,

$$\mathrm{E(x)}=\sum_{x=0}^{1}x.p(x)$$
$$=\sum_{x=0}^{1}x.\mathrm{p}^{x}.(1-\mathrm{p})^{1-x}=\mathrm{p}$$

elde edilir. Varyans ise $\sigma^2=\mathrm{E(x^2)\text{-}(E(x))^2}$ den hareketle

$$\mathrm{E(x^2)}=\sum_{x=0}^{1}x^2.\mathrm{p}^{x}.(1-\mathrm{p})^{1-x}=\mathrm{p}$$

dir. Böylece

$$\sigma^2=\mathrm{p}-\mathrm{p}^2=\mathrm{p}.(1-\mathrm{p})=\mathrm{p}.q$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.2.3 (Binom dağılımı): Birbirinden bağımsız n-tane Bernoulli denemesi için X , her bir denemede başarı olasılığı p , başarısızlık olasılığı q olan binom rasgele değişkeni ise, X in olasılık fonksiyonu;

$$p(x)=\binom{n}{x}.\mathrm{p}^{x}.q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,...,n$$

dir. Bu dağılıma binom dağılımı denir (Akdeniz 2009).

Teorem 2.2.2: X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$p(x) = \binom{n}{x}.\mathrm{p}^x.q^{n-x} \quad , \qquad x = 0,1,2,...,n$$

olsun. Bu takdirde binom dağılımının ortalaması ve varyansı sırasıyla

$$\mathrm{E(x)} = n\mathrm{p}$$

$$\sigma^2 = \mathrm{E(x^2)} - (\mathrm{E(x)})^2 = n.\mathrm{p}.q$$

dır (Akdeniz 2009).

2.3. Bazı Sürekli Rasgele Değişkenlerin Dağılımları

Tanım 2.3.1: Sürekli bir X rasgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad , \qquad -\infty < x, \mu < \infty, \;\; \sigma^2 > 0$$

ise X e normal (Gauss) dağılımına sahiptir denir. p olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu için (2.1.2) den

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = 1$$

dir (Akdeniz 2009).

Teorem 2.3.1: Gauss dağılımına sahip X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad , \qquad -\infty < x, \mu < \infty, \;\; \sigma^2 > 0$$

için beklenen değer $\mathrm{E(x)}$ ve varyans sırasıyla,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E(x)} = \mu \\ &\mathrm{E(x^2)} - [\mathrm{E(x)}]^2 = \sigma^2 \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

dir (Akdeniz 2009).

İspat:

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx$$

dir. Burada $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{x-\mu}{\sigma}=t,\quad x=\mu+t\sigma,\ dx=\sigma dt$$

olmak üzere

$$E(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+t\sigma)e^{-\frac{1}{2}t^2}\sigma dt$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

dir. Ayrıca

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\sqrt{2\pi}\quad \text{ve}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2}dt=e^{-\frac{1}{2}t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0\quad \text{olduğundan}$$

$$E(x)=\mu.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{2\pi}$$

$$E(x)=\mu$$

dir.

$$\sigma^2=E(x^2)-(E(x))^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.p(x).dx+\left(\int_{-\infty}^{\infty} x.p(x).dx\right)^2$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx$$

Yine $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$ dönüşümü uygularsak istenen sonuç

$$\mathrm{E(x^2)}-\left[\mathrm{E(x)}\right]^2=\sigma^2$$

bulunur.

Tanım 2.3.2: Ortalaması $\mu=0$, varyansı $\sigma^2=1$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}\ , \qquad -\infty<x<\infty$$

olan normal dağılıma standart normal dağılım adı verilir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.3.3 (Gamma fonksiyonu): $\forall\alpha\in\mathbb{R}^+$ için tanımlanan

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}.e^{-x}.dx$$

fonksiyonuna Gamma fonksiyonu denir (Akdeniz 2009).

Gamma fonksiyonunda kısmi integrasyon yardımıyla integral alınırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)&=-e^{-x}.x^{\alpha-1}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty[-e^{-x}.(\alpha-1).x^{\alpha-2}]\,dx\\&=0+(\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}.e^{-x}.dx\\&=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\end{aligned}$$

dir. $\alpha\in\mathbb{N}$ için bu formülün ardışık olarak uygulanmasıyla

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1).(\alpha-2).....\,\Gamma(1)$$

elde edilir. Burada

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$$

dir. Böylece $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$ elde edilir. $x=v^2$, $dx=2vdv$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\Gamma(\alpha) = 2\int_{0}^{\infty} v^{2\alpha-1} e^{-v^2} dv$$

dir (Akdeniz 2009).

Tanım 2.3.4 (Gamma olasılık yoğunluk fonksiyonu): X , pozitif değerler alan sürekli rasgele değişken olsun. X in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x;\alpha,r) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\Gamma(r)}.(\alpha x)^{r-1}.e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad \alpha, r > 0$$

ise X , Gamma olasılık dağılımına sahiptir.

Ayrıca,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\Gamma(r)}.(\alpha x)^{r-1}.e^{-\alpha x} dx = 1$$

dir (Akdeniz 2009).

Teorem 2.3.2: Gamma dağılımına sahip X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x;\alpha,r) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\Gamma(r)}.(\alpha x)^{r-1}.e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad \alpha, r > 0$$

için beklenen değer $\mathrm{E(x)}$ ve varyans σ^2 sırasıyla,

$$\mathrm{E(x)} = \frac{\mathrm{r}}{\alpha}$$
$$\sigma^2 = \frac{r}{\alpha^2} \tag{2.3.2}$$

dir (Akdeniz 2009).

İspat:

$$\mathrm{E(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x.\frac{\alpha}{\Gamma(r)}.(\alpha x)^{r-1}.e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \int_{-\infty}^{\infty} x^r.e^{-\alpha x} dx$$

Burada $x^r = u,\ e^{-\alpha x}dx = dv$ den başlayarak arka arkaya kısmi integrasyon yönteminin uygulanmasıyla

$$\mathrm{E(x)} = \frac{\mathrm{r}}{\alpha}$$

dır ve $\sigma^2 = \mathrm{E(x^2)} - (\mathrm{E(x)})^2$ tanımından hareketle $\sigma^2 = \dfrac{r}{\alpha^2}$ olduğu görülür.

3. İSTATİSTİKSEL MODELLERİN GEOMETRİSİ

Bu bölümde bazı istatistiksel modeller tanıtılacaktır.

3.1. Fisher Bilgi (Informasyon) Metriği

Tanım 3.1.1: X üzerindeki olasılık dağılımlarının kümesi

$$S = \{p_\theta = p(x,\theta) : \theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) \in \Theta, x \in X\}, \; \Theta \subset \mathbb{R}^n$$

olmak üzere S ye n boyutlu **istatistiksel ya da parametrik model**, Θ ya ise olasılık yoğunluk fonksiyonlarının parametre uzayı denir (Amari 2000).

Tanım 3.1.2: $\{p_\theta : \theta \in \Theta\}$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının ailesi için

$$\ell(\theta, x) = \ln(p_\theta(x)) \text{ ve } \partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$$

olmak üzere

$$g_{ij}(\theta) = \mathrm{E}_\theta[\partial_i(\ell)\partial_j(\ell)] = \int \partial_i \ell(\theta, x) \partial_j \ell(\theta, x) p_\theta(x) dx \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanmış olan g_{ij} metriğine Fisher Bilgi Metriği denir ve g_{ij} metriğinin bileşenlerinin oluşturduğu matris, Fisher Bilgi matrisi olarak tanımlanır (Amari 2000).

Sonuç 3.1.1: Fisher Bilgi Metriği için

$$g_{ij}(\theta) = \mathrm{E}_\theta[\partial_i(\ell)\partial_j(\ell)] = -\mathrm{E}_\theta[\partial_i \partial_j(\ell)] \tag{3.1.2}$$

eşitliği geçerlidir (Amari 2000).

İspat:

$$\begin{aligned} g_{ij}(\theta) &= \mathrm{E}_\theta[\partial_i(\ell)\partial_j(\ell)] = \int \partial_i \ell(\theta, x) \partial_j \ell(\theta, x) p_\theta(x) dx \\ &= \int \frac{\partial_i p(\theta, x)}{p(\theta, x)} \frac{\partial_j p(\theta, x)}{p(\theta, x)} p_\theta(x) dx \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

(3.1.2) denkleminin sağ tarafı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} -\mathrm{E}_\theta[\partial_i \partial_j(\ell)] &= -\int \partial_i \partial_j \ell(\theta, x) p_\theta(x) dx \\ &= -\int \partial_i \left(\frac{\partial_j p(\theta, x)}{p(\theta, x)} \right) p_\theta(x) dx = -\int \frac{\partial_i(\partial_j p(\theta, x)) p(\theta, x) - \partial_j p(\theta, x) \partial_i p(\theta, x)}{p(\theta, x)^2} p_\theta(x) dx \\ &= -\int \frac{\partial_i \partial_j (p(\theta, x)) p(\theta, x)}{p(\theta, x)^2} p_\theta(x) dx + \int \frac{\partial_j p(\theta, x) \partial_i p(\theta, x)}{p(\theta, x)^2} p_\theta(x) dx \end{aligned}$$

Burada $\partial_i \partial_j$ kısmi türevi x ten bağımsız olduğundan, $p_\theta(x)$ in x den farklı olan θ lara göre kısmi türevleri olduğundan integralle yer değiştirebilir. Yani;

$$
\begin{aligned}
&= -\partial_i \partial_j \int p_\theta(x)dx + \int \frac{\partial_j p(\theta,x)\partial_i p(\theta,x)}{p^2(\theta,x)} p_\theta(x)dx \\
&= \partial_i \partial_j (1) + \int \frac{\partial_j p(\theta,x)\partial_i p(\theta,x)}{p^2(\theta,x)} p_\theta(x)dx \\
&= \int \frac{\partial_j p(\theta,x)\partial_i p(\theta,x)}{p^2(\theta,x)} p_\theta(x)dx \qquad (3.1.4)
\end{aligned}
$$

dır. Böylece (3.1.3) ün (3.1.4) e eşit olduğu görülür.

Tanım 3.1.3: Fisher Bilgi matrisinin elemanlarının oluşturduğu yay uzunluğu fonksiyonu

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} d\theta^i d\theta^j \qquad (3.1.5)$$

dir (Arwini ve Dodson 2008).

3.2. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlarının Üstel Ailesi

Tanım 3.2.1: X bir örnek uzay, $x \in X$ ve

$$S = \{ p_\theta(x) : \theta \in \Theta \}$$

bir istatistiksel modeli olsun. $C, F_i : X \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$p(x;\theta) = e^{\{C(x) + \sum_i \theta_i F_i(x) - \varphi(\theta)\}} \qquad (3.2.1)$$

yoğunluk fonksiyonu yardımıyla tanımlı olan ve $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}$

$$\varphi(\theta) = \ln \int e^{\{C(x) + \sum_i \theta_i F_i(x\}} dx$$

φ ye **potansiyel fonksiyon**, $\{\theta_i\}_{1 \le i \le n}$ lere doğal parametre adı verilir (Arwini ve Dodson 2008).

Sonuç 3.2.1: (3.2.1) deki gibi tanımlı olan $p(x;\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu için,

$$\partial_i \ell(\theta,x) = F_i(x) - \partial_i \varphi(\theta) \text{ ve}$$
$$\partial_i \partial_j \ell(\theta,x) = -\partial_i \partial_j \varphi(\theta)$$

eşitlikleri sağlanır (Arwini ve Dodson 2008).

İspat:

$$\ell(\theta,x)=\ln(p(x;\theta))=\ln(e^{\{C(x)+\sum_i\theta_iF_i(x)-\varphi(\theta)\}})$$
$$=C(x)+\sum_i\theta_iF_i(x)-\varphi(\theta)$$

$$\partial_i(\ell(\theta,x))=\partial_i\left(C(x)+\sum_i\theta_iF_i(x)-\varphi(\theta)\right)$$
$$=F_i(x)-\partial_i\varphi(\theta)$$

dir.

Sonuç 3.2.2: Fisher Informasyon metriği potansiyel fonksiyona bağlı olarak

$$g(\theta)=[g_{ij}(\theta)]=-\int\partial_i\partial_j(\ell)p_\theta(x)dx=\partial_i\partial_j\varphi(\theta)=\varphi_{ij}(\theta) \qquad (3.2.2)$$

eşitliğiyle ifade edilir (Arwini ve Dodson 2008).

3.3. Gamma 2-Manifold

Tanım 3.3.1: Gamma yoğunluk fonksiyonlarının uzayı $\Omega=\mathbb{R}^+$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\{f(x;\gamma,r):\gamma,r\in\mathbb{R}^+\}$$

rasgele değişken $x\in\Omega=\mathbb{R}^+$ ve $M=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$f(x;\gamma,r)=\left(\frac{r}{\gamma}\right)^r\frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)}e^{-xr/\gamma}$$

dir (Arwini ve Dodson 2008).

Önerme 3.3.1: Gamma manifoldu üzerindeki olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\beta=\dfrac{r}{\gamma}$ için

$$p(x;\beta,r)=(\beta)^r\frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)}e^{-x\beta}$$

(β,r) doğal koordinat sistemine dönüşür ve $\theta=(\theta_1,\theta_2)=(\beta,r)$ olmak üzere

$$\varphi(\theta)=\ln\Gamma(r)-r\ln\beta \qquad (3.3.1)$$

potansiyel fonksiyonu elde edilir (Arwini ve Dodson 2008).

İspat: $$p(x;\beta,r)=\left(\beta\right)^r\frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)}e^{-x\beta}$$

eşitliğinde her iki taraftan ln alırsak

$$\begin{aligned}\ln p(x;\beta,r)&=\ln\left(\left(\beta\right)^r\frac{x^{r-1}}{\Gamma(r)}e^{-x\beta}\right)\\&=r\ln\left(\beta\right)+(r-1)\ln x-\ln\Gamma(r)-x\beta\\&=-\ln x+(r\ln x-x\beta)-\left(\ln\Gamma(r)-r\ln\left(\beta\right)\right)\end{aligned}$$

$$p(x;\beta,r)=e^{-\ln x+(r\ln x-x\beta)-\left(\ln\Gamma(r)-r\ln(\beta)\right)}$$

olur. Böylece denklem (β,r), doğal koordinatlarında elde edilmiş oldu. (3.2.1) den

$$\varphi(\theta)=\varphi(\beta,r)=\ln\Gamma(r)-r\ln\beta$$

dir.

Sonuç 3.3.1: Gamma manifoldunun doğal koordinatlara ((β,r)) göre Fisher Bilgi metriği

$$[g_{ij}(\beta,r)]=\begin{bmatrix}\frac{r}{\beta^2} & -\frac{1}{\beta}\\ -\frac{1}{\beta} & \frac{d^2}{dr^2}\ln(\Gamma(r))\end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca (γ,r) orijinal koordinatlarına göre ise

$$[g_{ij}(\gamma,r)]=\begin{bmatrix}\frac{r}{\gamma^2} & 0\\ 0 & \frac{d^2}{dr^2}\ln(\Gamma(r))-\frac{1}{r}\end{bmatrix}$$

dir. Görüldüğü gibi (γ,r) çifti, tanjant vektörlerine göre baz teşkil eder. Kolaylık olsun diye $\frac{d^2}{dr^2}\ln(\Gamma(r))=\psi^{''}(r)$ şeklinde gösterilecektir (Arwini ve Dodson 2008).

İspat: $\theta=(\theta_1,\theta_2)=(\beta,r)$ doğal koordinatları olsun. (3.2.2) eşitliği yardımıyla matrisin her bir elemanı bulunacaktır.

$$[g_{11}(\beta,r)]=[\frac{\partial^2\varphi(\theta)}{\partial\theta_1\partial\theta_1}]=[\frac{\partial^2\varphi(\theta)}{\partial\beta\partial\beta}]$$

(3.3.1) denklemi kullanılarak

$$[g_{11}(\beta,r)]=[\frac{\partial^2\varphi(\theta)}{\partial\beta\partial\beta}]$$
$$=\frac{\partial^2(\ln\Gamma(r)-r\ln\beta)}{\partial\beta\partial\beta}$$
$$=\frac{r}{\beta^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde matrisin diğer bileşenleri de bulunursa

$$[g_{ij}(\beta,r)]=\begin{bmatrix}\frac{r}{\beta^2} & -\frac{1}{\beta}\\ -\frac{1}{\beta} & \frac{d^2}{dr^2}\ln(\Gamma(r))\end{bmatrix}$$

sonucuna ulaşılır.

(γ,r) orijinal koordinatlarına göre ise (3.1.2) eşitliği yardımıyla

$$[g_{11}(\gamma,r)]=\mathrm{E}[\partial_1(\ell)\partial_1(\ell)]=-\mathrm{E}[\partial_1\partial_1(\ell)]=-\mathrm{E}[\partial_\gamma\partial_\gamma(\ell)]$$

eşitliğini hesaplayalım. $\ell(\theta,x)=\ln(f(x,\theta))$ olmak üzere

$$\ell(\theta,x)=r\ln(\frac{r}{\gamma})-(r-1)\ln x-\ln(\Gamma(r))-\frac{xr}{\gamma}$$

dir. (2.1.5) ile (2.3.2) eşitlikleri yardımıyla ve $\partial_\gamma\partial_\gamma(\ell)=\partial_\gamma\left(-\frac{r}{\gamma}+\frac{xr}{\gamma^2}\right)=\frac{r}{\gamma^2}-\frac{2xr}{\gamma^3}$

olduğundan

$$[g_{11}(\gamma,r)]=-\mathrm{E}[\partial_\gamma\partial_\gamma(\ell)]$$
$$=-\mathrm{E}[\frac{r}{\gamma^2}-\frac{2xr}{\gamma^3}]=-\frac{r}{\gamma^2}+\frac{2\mathrm{E}[x]r}{\gamma^3}=\frac{r}{\gamma^2}\quad,\qquad \mathrm{E}_\theta[x]=\gamma$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde matrisin diğer bileşenleri de bulunursa

$$[g_{ij}(\gamma,r)]=\begin{bmatrix}\frac{r}{\gamma^2} & 0\\ 0 & \frac{d^2}{dr^2}\ln(\Gamma(r))-\frac{1}{r}\end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.3.2: Gamma manifoldu üzerindeki eğrinin yay uzunluğu

$$ds^2 = \frac{r}{\gamma^2} d\gamma^2 + \left(\left(\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} \right)' - \frac{1}{r} \right) dr^2$$

dir.

İspat: (3.1.5) den

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} d\theta^i d\theta^j$$

olduğu biliniyor.

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11} d\theta^1 d\theta^1 + g_{12} d\theta^1 d\theta^2 + g_{21} d\theta^2 d\theta^1 + g_{22} d\theta^2 d\theta^2 \\ &= \frac{r}{\gamma^2} dy.dy + 0 + 0 + \left(\left(\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} \right)' - \frac{1}{r} \right) dr.dr \\ &= \frac{r}{\gamma^2} d\gamma^2 + \left(\left(\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} \right)' - \frac{1}{r} \right) dr^2 \end{aligned}$$

dir.

3.4. Gaussian Manifold

X örnek uzay olmak üzere $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bu uzaydaki gözlemleri göstersin. Deneyin her tekrarında bir örnek elde edilir ve bu örnekler farklı örnekler olacaktır. Yani, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ örneği $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rasgele değişkenin bir değeri olacaktır. Burada X_i ler bağımsız değişkenlerdir.

Tanım 3.4.1: n büyüklüğünde bir topluluktan X örneğinin Gauss ℓ olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell(x; \mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \right) \\ &= (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \sigma^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right\} \qquad (3.4.1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Lauritzen 1987).

Sonuç 3.4.1: Gauss manifoldu için Fisher Informasyon matrisi

$$[\,g_{ij}\,(\mu,\sigma)\,]=\begin{pmatrix}\dfrac{n}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \dfrac{2n}{\sigma^2}\end{pmatrix}=\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

dır (Lauritzen 1987).

İspat: $$\ell(x\,;\mu,\sigma)=(2\pi)^{\frac{-n}{2}}\,\sigma^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$\ln\ell=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$\ln\ell$ nin kısmi türevleri;

$$\frac{\partial\ln\ell}{\partial\mu}=\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu)\quad\text{ve}\quad\frac{\partial^2\ln\ell}{\partial\mu^2}=\frac{-n}{\sigma^2}\quad,\ \sigma\neq 0$$

$$\frac{\partial\ln\ell}{\partial\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2\ln\ell}{\partial\sigma^2}=\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\quad,\ \sigma\neq 0$$

$$\frac{\partial^2\ln\ell}{\partial\sigma\,\partial\mu}=\frac{\partial^2\ln\ell}{\partial\mu\partial\sigma}=\frac{-2n}{\sigma^3}(\bar{x}-\mu)\quad,\ \sigma\neq 0$$

dır. Teorem 2.3.1 yardımıyla E(X) = μ olduğundan ,

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2\ln\ell}{\partial\mu^2}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{-n}{\sigma^2}\right)=\frac{-n}{\sigma^2}$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2\ln\ell}{\partial\mu\partial\sigma}\right)=\frac{-2n}{\sigma^3}\mathrm{E}(\bar{x}-\mu)=\frac{-2n}{\sigma^3}(\mathrm{E}(\bar{x})-\mu)=0\qquad,\quad \mathrm{E}(\bar{x})=0$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2\ln\ell}{\partial\sigma^2}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i-\mu)^2$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i^{\,2})-2\mathrm{E}(x_i)\mu+\mu^2$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{-2n}{\sigma^2}\qquad,\quad \mathrm{E}\,(x_i^{\,2})-\mathrm{E}(x_i)^2=\sigma^2$$

O halde Fisher Bilgi matrisi

$$g=\left[g_{ij}\right]=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} -\mathrm{E}\left(\dfrac{\partial^2 \ln \ell}{\partial \mu^2}\right) & -\mathrm{E}\left(\dfrac{\partial^2 \ln \ell}{\partial \mu \partial \sigma}\right) \\ -\mathrm{E}\left(\dfrac{\partial^2 \ln \ell}{\partial \sigma \partial \mu}\right) & -\mathrm{E}\left(\dfrac{\partial^2 \ln \ell}{\partial \sigma^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}=\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dır.

3.5. Gaussian 2-Manifold

Tanım 3.5.1: $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ normal (Gauss) dağılımı (3.4.1) de n=1 için Gaussian 2-Manifold adını alır ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad \mu\in\mathbb{R}\,,\ \sigma>0$$

dır (Lauritzen 1987).

Sonuç 3.5.1: (3.4.2) den Gauss 2-manifoldunun Fisher Informasyon metriği n = 1 için

$$g=[g_{ij}]=\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dir (Lauritzen 1987).

Sonuç 3.5.2: Gauss 2-manifoldu üzerindeki eğrinin yay uzunluğu

$$ds^2=\frac{1}{\sigma^2}d\mu^2+\frac{2}{\sigma^2}d\sigma^2$$

dir.

4. İSTATİSTİKSEL MANİFOLD

Bu bölümde manifoldlar ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

4.1. Manifoldlar ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 4.1.1: M , Hausdorff uzayı olsun.

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \ , U_\alpha \subset M$$

dönüşümü için

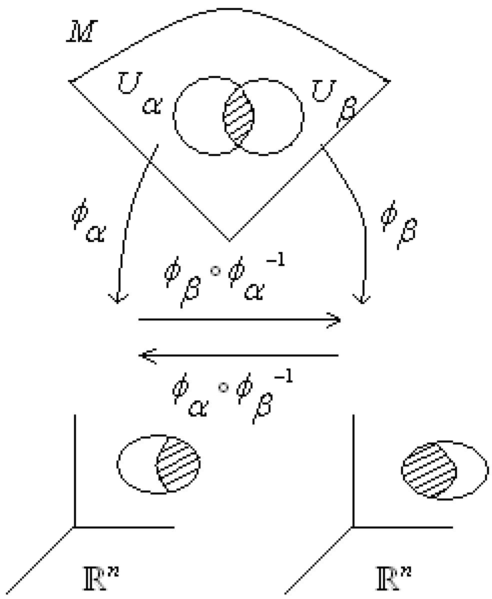
i) U_α lar M nin açık örtüsüdür.

ii) Her ϕ_α dönüşümü homeomorfizmdir.

iii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ iken

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \ \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri her mertebeden sürekli ve türevlenebilirdir.



Şekil 4.1. Diferensiyellenebilir manifold

şartları sağlanıyorsa M ye n boyutlu **diferensiyellenebilir manifold** adı verilir (Şekil4.1). Burada (U_α, ϕ_α) ikilisine **harita**, bu ikililerin oluşturduğu aileye de **atlas** denir (Arwini ve Dodson 2008).

Örnek 4.1.1: n boyutlu birim küre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 +,...,+ (x^{n+1})^2 = 1\}$$

alınsın. n =1 için koordinat haritaları

$$U_1 = \{x \in S^1 \mid x^2 > 0\} \ , \ \phi(U_1) = x^1 \ ,$$
$$U_2 = \{x \in S^1 \mid x^2 < 0\} \ , \ \phi(U_2) = x^1 \ ,$$
$$U_3 = \{x \in S^1 \mid x^1 > 0\} \ , \ \phi(U_3) = x^2 \ ,$$
$$U_4 = \{x \in S^1 \mid x^1 < 0\} \ , \ \phi(U_4) = x^2$$

şeklinde verilsin. U_1, U_2, U_3, U_4 örtüleri S^1 in açık örtüsüdür. $U_1 \cap U_4$ için

$$x^2 = \sqrt{1-(x^1)^2} > 0$$
$$x^1 = -\sqrt{1-(x^2)^2} < 0$$

dir. Bu fonksiyonlar C^∞ dır. Buradan $\left(U_1, \phi(U_1)\right)$ ve $\left(U_4, \phi(U_4)\right)$ haritaları sürekli ve türevlenebilirdir. Benzer durumu diğer açık örtüler için de geçerlidir. Böylece S^1, 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Tanım 4.1.2: M n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\chi^*(M) = \{\, w \mid w : \chi(M) \xrightarrow{lineer} C^\infty(M, \mathbb{R})\}$$

olmak üzere

$$\mathrm{K} : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \xrightarrow{r+s\ lineer} C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümüne (r,s) tipinde **tensör alanı** denir ve $\mathrm{K} \in T^{\,r}_{s}(M)$ şeklinde gösterilir. Burada K **ya** ***r*. mertebeden kontravaryant**, ***s*. mertebeden kovaryant tensör alanı** denir (O'Neill 1983).

Örnek 4.1.2: M bir C^∞ manifold olsun.

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

simetrik ve iki-lineer metrik olsun. Burada r =0 ve s =2 olduğundan metrik (0,2) tipindedir.

Tanım 4.1.3: $X, Y, Z \in \chi(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \quad \text{olmak üzere}$$

i) $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z$

ii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (4.1.1)

iii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

özelliklerini sağlayan koneksiyona **afin koneksiyon** adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 4.1.4: M Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

∇ afin koneksiyon olmak üzere

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ (torsiyonsuz)

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (paralellik aksiyomu)

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya **Riemann koneksiyonu veya Levi-Civita koneksiyonu** adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 4.1.5: M Riemann manifoldu ve ∇, Riemann koneksiyonu olsun. Eğer $\mathrm{K} \in T^1_k(M)$ ise

$$(\nabla_X \mathrm{K})(X_1, \ldots, X_k) = X\mathrm{K}(X_1, \ldots, X_k) - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{K}(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_k)$$

şeklinde tanımlıdır ve $\nabla_X \mathrm{K}$ k. mertebedendir (O'Neill 1983).

Tanım 4.1.6: M bir C^∞ manifold ve ∇ afin koneksiyon olsun. Eğrilik tensörü R, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\mathrm{R} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \text{ olmak üzere}$$

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

dir (Lauritzen 1987).

Önerme 4.1.1: Eğer ∇ koneksiyonu torsiyonsuz ise **R eğrilik tensörü** aşağıdaki özellikleri sağlar (Lauritzen 1987).

i) $\mathrm{R}(X,Y)Z = -\mathrm{R}(Y,X)Z$

ii) $\mathrm{R}(X,Y)Z + \mathrm{R}(Y,Z)X + \mathrm{R}(Z,X)Y = 0$ 1. Bianchi özdeşliği

iii) $(\nabla_X \mathrm{R})(Y,Z) + (\nabla_Y \mathrm{R})(Z,X) + (\nabla_Z \mathrm{R})(X,Y) = 0$ 2. Bianchi özdeşliği

iv) $g(\mathrm{R}(X,Y)V, W) = g(\mathrm{R}(V,W)X, Y)$ (4.1.2)

Tanım 4.1.7: M , n boyutlu Riemann manifoldu ve ∇, Riemann koneksiyonu olsun. $U \subset M$ nin koordinat sistemi $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ olsun. $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i} | \ 1 \le i \le n\}$ M nin baz vektör alanları olmak üzere

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k \qquad 1 \le i, j \le n$$

şeklinde tanımlı reel değerli Γ^k_{ij} fonksiyonlarına **Christoffel Sembolleri** denir (O'Neill 1983).

(M, g) Riemann manifoldu üzerinde Γ_{ijk} reel değerli fonksiyonlar,

$$\Gamma_{ijk} = g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = \sum_h g_{kh} \Gamma^h_{ij}$$

olacak şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.8: (M, g) Riemann manifoldu olsun. $\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i} | \ 1 \le i \le n\}$ ler baz vektörleri olmak üzere eğrilik tensörünün elemanları

$$\mathrm{R}_{ijkm} = \mathrm{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_m) = g(\mathrm{R}_{ijk}, \partial_m)$$

dir. Burada $\mathrm{R}_{ijk} = \mathrm{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l \mathrm{R}^l_{kij} \partial_l$,

$$\mathrm{R}^l_{kij} = \frac{\partial}{\partial \theta^j} \Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial \theta^i} \Gamma^l_{jk} + \sum_p \Gamma^l_{jp} \Gamma^p_{ik} - \sum_p \Gamma^l_{ip} \Gamma^p_{jk} \ \text{ olmak üzere}$$

$$g(\mathrm{R}_{ijk}, \partial_m) = \left(\partial_i (\Gamma^s_{jk}) - \partial_j (\Gamma^s_{ik}\right) g_{sm} + \left(\Gamma_{irm} \Gamma^r_{jk} - \Gamma_{jrm} \Gamma^r_{ik}\right) \qquad (4.1.3)$$

eşitliğiyle bulunur (O'Neill 1983).

Tanım 4.1.9: M diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğrilik tensörü

$$\mathrm{R} \equiv 0$$

ise manifolda **düzlemseldir** denir (O'Neill 1983).

Tanım 4.1.10: M bir C^∞ manifold ve g, M üzerinde tanımlanmış bir metrik olsun.

$$K(X, Y) = \frac{g(\mathrm{R}(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \qquad (4.1.4)$$

eşitliğine M nin **kesit(Gauss) eğriliği** adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 4.1.11: (M,g) bir Riemann manifoldu**,** $f \in C^{\infty}$ fonksiyon olsun. f nin Hessianı

$$H^{f} = D(Df)$$

dır (O'Neill 1983).

Önerme 4.1.2: (M,g) bir Riemann manifoldu, D afin koneksiyon olsun. f nin Hessianı H^{f}, (0,2) tipinde simetrik tensör alanı olup,

$$H^{f}(X,Y) = X(Y.f) - (D_X Y)f = g(D_X(gradf),Y) \tag{4.1.5}$$

dir (O'Neill 1983).

4.2. Gauss Manifoldunun 1.Temel Form Katsayıları ve Gauss Eğriliği

Tanım 4.2.1: *M*, Gauss 2-manifoldu olsun. *M* nin Fisher Bilgi metriğinin bileşenleri 1. Temel Form katsayıları

$$E = g_{11} = g(\partial_{\mu},\partial_{\mu}), \quad F = g_{12} = g_{21} = g(\partial_{\mu},\partial_{\sigma}) \quad , \quad G = g_{22} = g(\partial_{\mu},\partial_{\mu})$$

dır. Gauss 2-manifoldunun 1.Temel Formu

$$ds^2 = Ed\mu^2 + 2Fd\mu d\sigma + Gd\sigma^2$$

dir. Burada E,F,G katsayıları (μ,σ) parametreli ve türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere $E_{\mu},E_{\sigma},F_{\sigma},F_{\mu},G_{\sigma}\ ve\ G_{\mu}$ kısmi türevleri vardır.

Sonuç 4.2.1: Gauss manifoldunun 0-koneksiyonu(Riemann koneksiyonu)nun Christoffel sembollerini

$$W\Gamma_{11}^{1} = \begin{vmatrix} E_{\mu}/2 & F \\ F_{\mu} - (E_{\sigma}/2) & G \end{vmatrix}, \qquad W\Gamma_{11}^{2} = \begin{vmatrix} E & E_{\mu}/2 \\ F & F_{\mu} - (E_{\sigma}/2) \end{vmatrix}$$

$$W\Gamma_{12}^{1} = \begin{vmatrix} E_{\sigma}/2 & F \\ G_{\mu}/2 & G \end{vmatrix} \quad , \qquad W\Gamma_{12}^{2} = \begin{vmatrix} E & E_{\sigma}/2 \\ F & G_{\mu}/2 \end{vmatrix},$$

$$W\Gamma_{22}^{1} = \begin{vmatrix} F_{\sigma} - (G_{\mu}/2) & F \\ G_{\sigma}/2 & G \end{vmatrix}, \qquad W\Gamma_{22}^{2} = \begin{vmatrix} E & F_{\sigma} - (G_{\mu}/2) \\ F & G_{\sigma}/2 \end{vmatrix}$$

şeklinde olup $W = EG - F^2$

dir (O'Neill 1983).

Örnek 4.2.1: Gauss 2-manifoldunun 1. Temel Form katsayıları

$$E=\frac{1}{\sigma^2}, \quad F=0, \quad G=\frac{2}{\sigma^2}$$

dır (Chen W. 1998).

$T_p(M)$ tanjant uzayının, iki boyutlu alt uzayı olan Π'ye , p noktasında M ye teğet olan düzlem adı verilir. $v,w \in T_p(M)$ tanjant vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$Q(v,w) = <v,v><w,w> - <v,w>^2$$

dır. Burada $Q(v,w) \neq 0$ olması Π düzleminin dejenere olmadığı anlamında olacaktır.

Önerme 4.2.1: Π, M ye p noktasındaki dejenere olmayan teğet düzlemi olsun.

$$K(v,w) = \frac{<\mathrm{R}_{vw}v, w>}{Q(v,w)}$$

denklemi v,w nin baz seçiminden bağımsızdır ve K'ya Π nin kesit eğriliği adı verilir (O'Neill 1983).

4.3. İstatistiksel Manifold

Tanım 4.3.1 (Lauritzen): (M,g), n boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifold olsun. $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$\text{Đ} : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow[2-lineer]{simetrik} \chi(M)$$

$$g(\text{Đ}(X,Y),Z) = \mathrm{C}(X,Y,Z) \tag{4.3.1}$$

dönüşümü yardımıyla tanımlanan

$$\mathrm{C} : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{simetrik} C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$\mathrm{C}(X,Y,Z) = \mathrm{C}(Y,X,Z) = \mathrm{C}(Y,Z,X)$$

$$\left(\mathrm{C}(X,Z,Y) = \mathrm{C}(Z,Y,X) = \mathrm{C}(Z,X,Y)\right)$$

üçüncü mertebeden simetrik kovaryant C tensörünün oluşturduğu (M,g,C) yapısına **istatistiksel manifold** denir. C ye manifoldun **çarpıklığı ya da kübik formu** adı verilir (Lauritzen 1987).

Şimdi istatistiksel manifoldun Kurose tarafından verilen tanımı verilecektir. Kurose'nin tanımı ile Lauritzen'in tanımın denk olduğu Önerme 4.3.1 de gösterilecektir.

Tanım 4.3.2: (M, g) Riemann manifoldu, ∇ torsiyonsuz afin koneksiyon olsun. Eğer ∇g tamamen simetrik ise (M, ∇, g) üçlüsüne **Kurose anlamında istatistiksel manifold** adı verilir (Matsuzoe 2006).

Tanım 4.3.3: (M, g, C) istatistiksel manifold ve $\overline{\nabla}$, M nin Riemann koneksiyonu olmak üzere α **-koneksiyon**

$$\overset{\alpha}{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \frac{\alpha}{2}\mathrm{C}(X, Y) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.3.2}$$

eşitliğiyle tanımlıdır (Lauritzen 1987).

Tanım 4.3.4: Θ parametre uzayı üzerinde afin koneksiyon(α - koneksiyon) ların, Riemann koneksiyonunun ve kübik formun bileşenleri sırasıyla

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ijk} = \overline{\Gamma}_{ijk} - \frac{\alpha}{2}\mathrm{T}_{ijk} \ , \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.3.3}$$

$$\overline{\Gamma}_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ik}) - \partial_k(g_{ij})\right) \tag{4.3.4}$$

$$\mathrm{T}_{ijk}(p_\theta) = \mathrm{E}_\theta\left(\partial_i(\ell)\partial_j(\ell)\partial_k(\ell)\right) \tag{4.3.5}$$

şeklinde tanımlanır (Lauritzen 1987).

Tanım 4.3.5: $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonu, $\alpha = 1$ için üstel koneksiyon, $\alpha = -1$ için karma koneksiyon adını alır (Amari 2000).

Önerme 4.3.1: $\overset{\alpha}{\nabla}$ torsiyonsuz koneksiyondur ve (4.3.2) yi sağlayacak şekilde var ve tektir. Daha fazlası,

$$(\overset{\alpha}{\nabla}_X g)(Y, Z) = \alpha.\mathrm{C}(X, Y, Z) \tag{4.3.6}$$

dir (Lauritzen 1987).

İspat: $\overset{\alpha}{\nabla}$ nın bir afin koneksiyon olduğunu göstermek için

$$
\begin{aligned}
\overset{\alpha}{\nabla}_X (fY) &= \overline{\nabla}_X (fY) - \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(X, fY) \\
&= X(f)Y + f\overline{\nabla}_X Y - \frac{\alpha}{2} f\text{Đ}(X,Y) \\
&= X(f)Y + f\left(\overline{\nabla}_X Y - \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(X,Y) \right) \\
&= X(f)Y + f\overset{\alpha}{\nabla}_X Y
\end{aligned}
$$

dir. (4.1.1) deki 3 özellik sağlandığından $\overset{\alpha}{\nabla}$ afin koneksiyondur. Şimdi $\overset{\alpha}{\nabla}$ nın torsiyonsuz olduğunu gösterelim.

$$\overset{\alpha}{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(X,Y)$$

$$\overset{\alpha}{\nabla}_Y X = \overline{\nabla}_Y X - \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(Y,X) \qquad , (\text{Đ} \text{ simetrik})$$

$$
\begin{aligned}
\overset{\alpha}{\nabla}_X Y - \overset{\alpha}{\nabla}_Y X &= \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X \\
&= [X,Y]
\end{aligned}
\qquad , (\overline{\nabla} \text{ torsiyonsuz})
$$

dir. Böylece $\overset{\alpha}{\nabla}$ torsiyonsuzdur. Daha fazlası,

$$
\begin{aligned}
(\overset{\alpha}{\nabla}_X g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overset{\alpha}{\nabla}_X Z) \\
&= Xg(Y,Z) - g\left(\overline{\nabla}_X Y - \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(X,Y), Z \right) - g\left(Y, \overline{\nabla}_X Z - \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(X,Z) \right) \\
&= Xg(Y,Z) - g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \frac{\alpha}{2} g\left(\text{Đ}(X,Y), Z \right) - g(Y, \overline{\nabla}_X Z) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} g\left(\text{Đ}(X,Z), Y \right) \\
&= Xg(Y,Z) - g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overline{\nabla}_X Z) + \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z) \\
&= (\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) + \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z) \qquad (4.3.7) \\
&= 0 + \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z) \\
&= \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z)
\end{aligned}
$$

dir. Tekliğini göstermek için torsiyonsuz ve (4.3.6) denklemini sağlayan bir başka $\overset{\square}{\nabla}$ koneksiyonunu göz önüne alınsın. O halde (4.3.7) den aşağıdaki, denklemler elde edilir.

i) $Xg(Y,Z) = g(\overset{\square}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overset{\square}{\nabla}_X Z) + \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z)$

ii) $Zg(X,Y) = g(\overset{\square}{\nabla}_X Z, Y) + g(\overset{\square}{\nabla}_Y Z, X) + \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X)$

iii) $Yg(Z,X) = g(\overline{\nabla}_Y Z, X) + g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z) - g([X,Y],Z)$

dir. Buradan

i) – ii) +iii) değeri hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
Xg(Y,Z) - Zg(X,Y) + Yg(Z,X) = \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z) &- g([Z,X],Y) \\
&- g([Z,Y],X) - g([X,Y],Z) + 2g(\overline{\nabla}_X Y, Z)
\end{aligned}
$$

olur. Bu eşitlik $\overset{\alpha}{\nabla}$ için de sağlandığından

$$g(\overline{\nabla}_X Y, Z) = g(\overset{\alpha}{\nabla}_X\, Y, Z)$$

dır. O halde $\overset{\alpha}{\nabla} = \overline{\nabla}$ dır.

Sonuç 4.3.1: $\alpha = 0$ için $\overset{0}{\nabla} = \overline{\nabla}$ olup 0 – koneksiyonu, Riemann koneksiyonuna eşit olur (Amari 2000).

Tanım 4.3.6: Θ parametre uzayı üzerinde afin koneksiyon(α - koneksiyon) ların ailesi

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(\alpha)}_{i\,j\,k}(\theta) &= \int \left(\partial_i \partial_j(\ell) + \frac{1-\alpha}{2} \partial_i(\ell) \partial_j(\ell) \right) \partial_k(\ell) p_\theta(x) dx \\
&= \frac{1-\alpha}{2} \partial_i \partial_j \partial_k \varphi(\theta) = \frac{1-\alpha}{2} \varphi_{i\,j\,k}(\theta)
\end{aligned}
\tag{4.3.8}
$$

dır (Arwini ve Dodson 2008).

Önerme 4.3.2: Gamma manifoldunda $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonun bileşenleri olan $\Gamma^{(\alpha)}_{i\,j\,k}$ değerleri;

$$\Gamma^{(\alpha)}_{111} = -\frac{(1-\alpha)r}{\beta^3} \qquad \Gamma^{(\alpha)}_{211} = \Gamma^{(\alpha)}_{212} = \Gamma^{(\alpha)}_{221} = \Gamma^{(\alpha)}_{122} = 0$$

$$\Gamma^{(\alpha)}_{121} = \Gamma^{(\alpha)}_{112} = \frac{1-\alpha}{2\beta^2}$$

$$\Gamma^{(\alpha)}_{222} = \frac{(1-\alpha)\dfrac{d^2}{dr^2}\ln(\Gamma(r))}{2}$$

dir (Arwini ve Dodson 2008).

İspat: $\varphi(\theta) = \varphi(\beta, r) = \ln \Gamma(r) - r \ln \beta$ olduğu (3.3.1) den biliniyor.

$$(\partial_1\varphi(\beta,r)) = \frac{\partial\varphi(\beta,r)}{\partial\beta}$$
$$= \frac{\partial(\ln\Gamma(r) - r\ln\beta)}{\partial\beta} = -\frac{r}{\beta}$$

(4.3.8) den hareketle

$$\Gamma_{111}^{(\alpha)}(\beta,r) = \frac{1-\alpha}{2}\partial_1\partial_1(\partial_1\varphi(\beta,r))$$
$$= \frac{1-\alpha}{2}\partial_1\partial_1(-\frac{r}{\beta})$$
$$= \frac{1-\alpha}{2}\partial_1(\frac{r}{\beta^2}) = -\frac{(1-\alpha)r}{\beta^3}$$

,

$$\Gamma_{121}^{(\alpha)}(\beta,r) = \frac{1-\alpha}{2}\partial_1\partial_2(\partial_1\varphi(\beta,r))$$
$$= \frac{1-\alpha}{2}\partial_1\partial_2(-\frac{r}{\beta})$$
$$= \frac{1-\alpha}{2}\partial_1(-\frac{1}{\beta}) = \frac{1-\alpha}{2\beta^2}$$

dir. Benzer şekilde diğerleri de bulunur.

Önerme 4.3.3: Gamma manifoldunda $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonun bileşenleri olan $\Gamma^{i\,(\alpha)}_{jk}$ değerleri;

$$\Gamma^{1(\alpha)}_{11} = \frac{(\alpha-1)(-1+2r\psi''(r))}{2\beta(-1+r\psi''(r))} \qquad \Gamma^{2(\alpha)}_{11} = \frac{(\alpha-1)r}{2\beta^2(-1+r\psi''(r))}$$
$$\Gamma^{2(\alpha)}_{12} = \frac{1-\alpha}{2\beta(-1+r\psi''(r))} \qquad \Gamma^{1(\alpha)}_{12} = -\frac{(\alpha-1)\psi''(r)}{-2+2r\psi''(r)}$$
$$\Gamma^{2(\alpha)}_{22} = -\frac{(\alpha-1)r\psi''(r)}{-2+2r\psi''(r)} \qquad \Gamma^{1(\alpha)}_{22} = -\frac{(\alpha-1)\beta\psi''(r)}{-2+2r\psi''(r)}$$
$$\Gamma^{1(\alpha)}_{21} = \Gamma^{2(\alpha)}_{21} = 0$$

dir (Arwini ve Dodson 2008).

İspat: g metrik tensörünün g_{ij} bileşenleri arasında

$$\Gamma^{k\,(\alpha)}_{ij} = \sum_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma^{(\alpha)}{}_{ijl} \quad \text{ve} \quad \Gamma^{(\alpha)}{}_{ijk} = \sum_{h=1}^{2} g_{kh}\Gamma^{h\,(\alpha)}_{ij} \tag{4.3.9}$$

ilişkisi vardır. Buradan

$$\Gamma^{(\alpha)}_{111} = g_{11}\Gamma^{1(\alpha)}_{11} + g_{12}\Gamma^{2(\alpha)}_{11}$$
$$\Gamma^{(\alpha)}_{112} = g_{21}\Gamma^{1(\alpha)}_{11} + g_{22}\Gamma^{2(\alpha)}_{11}$$

Bir önceki Önerme'den elde edilen sonuçlar ve g_{ij} metriğinden

$$-\frac{(1-\alpha)r}{\beta^3} = \frac{r}{\beta^2}\Gamma^{1(\alpha)}_{11} - \frac{1}{\beta}\Gamma^{2(\alpha)}_{11}$$
$$\frac{1-\alpha}{2\beta^2} = -\frac{1}{\beta}\Gamma^{1(\alpha)}_{11} + \psi''(r)\Gamma^{2(\alpha)}_{11}$$

elde edilir. İki denklemi taraf tarafa toplanıp yok etme metodu uygulanırsa

$$\Gamma_{11}^{1(\alpha)} = \frac{(\alpha-1)(-1+2r\psi''(r))}{2\beta(-1+r\psi''(r))} \quad \text{ve} \quad \Gamma_{11}^{2(\alpha)} = \frac{(\alpha-1)r}{2\beta^2(-1+r\psi''(r))}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde diğerleri de ispatlanır.

Önerme 4.3.4: Gamma manifoldunun $\mathrm{R}_{ijkl}^{\alpha}$, α -eğrilik tensörleri

$$\mathrm{R}_{1212}^{\alpha} = \frac{(\alpha^2-1)(1+r)\psi''(r)}{4\beta^2(-1+r\psi''(r))}$$

iken diğerleri sıfırdır (Arwini ve Dodson 2008).

Önerme 4.3.5: Gauss manifoldunda $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonun bileşenleri olan $\Gamma_{ijk}^{(\alpha)}$ değerleri;

$$\Gamma_{112}^{(\alpha)} = \frac{1-\alpha}{\sigma^3} \qquad \Gamma_{111}^{(\alpha)} = \Gamma_{122}^{(\alpha)} = \Gamma_{212}^{(\alpha)} = \Gamma_{221}^{(\alpha)} = 0$$

$$\Gamma_{121}^{(\alpha)} = \Gamma_{211}^{(\alpha)} = \frac{-(1+\alpha)}{\sigma^3}$$

$$\Gamma_{222}^{(\alpha)} = \frac{-2(1+2\alpha)}{\sigma^3}$$

dir (Lauritzen 1987).

İspat: (4.3.4) ve (4.3.5) den

$$\mathrm{T}_{ijk} = \mathrm{E}\left(\partial_i(f)\partial_j(f)\partial_k(f)\right) \quad \text{ve}$$

$$\Gamma_{ijk}^{(\alpha)} = \overline{\Gamma}_{ijk} - \frac{\alpha}{2}\mathrm{T}_{ijk}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.3.10}$$

idi. Buradan her bir T_{ijk} değerini bulalım.

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{222} = \mathrm{E}\left(\partial_2(f)\partial_2(f)\partial_2(f)\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{\partial^3 \ln f}{\partial\sigma^3}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(-\frac{2}{\sigma^3} + \frac{12}{\sigma^5}(x-\mu)^2\right) = \left(-\frac{2}{\sigma^3} + \frac{12}{\sigma^3}\right) \\ &= \frac{10}{\sigma^3}\end{aligned}$$

Benzer şekilde diğerleri $\mathrm{T}_{111} = \mathrm{T}_{122} = \mathrm{T}_{212} = \mathrm{T}_{221} = 0$ ve

$$\mathrm{T}_{112} = \mathrm{T}_{121} = \mathrm{T}_{211} = \frac{2}{\sigma^3}$$

dir. Ayrıca $\overline{\Gamma}_{ijk}$ (Riemann koneksiyonları) için de,

$$\overline{\Gamma}_{112} = \frac{1}{2}\left(\partial_1(g_{12}) + \partial_1(g_{12}) - \partial_2(g_{11})\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sigma^3}\right) = \frac{1}{\sigma^3}$$

dir. Benzer şekilde diğerleri de

$$\overline{\Gamma}_{111} = \overline{\Gamma}_{122} = \overline{\Gamma}_{212} = \overline{\Gamma}_{221} = 0 \ , \ \ \overline{\Gamma}_{121} = \overline{\Gamma}_{211} = \frac{-1}{\sigma^3} \ , \ \ \overline{\Gamma}_{222} = \frac{-2}{\sigma^3}$$

şeklinde hesaplanır.

(4.3.10) dan

$$\Gamma^{(\alpha)}_{111} = \Gamma^{(\alpha)}_{122} = \Gamma^{(\alpha)}_{212} = \Gamma^{(\alpha)}_{221} = 0 \, ,$$

$$\Gamma^{(\alpha)}_{121} = \Gamma^{(\alpha)}_{211} = \frac{-(1+\alpha)}{\sigma^3} \quad ,$$

$$\Gamma^{(\alpha)}_{222} = \frac{-2(1+2\alpha)}{\sigma^3} \quad , \quad \Gamma^{(\alpha)}_{112} = \frac{1-\alpha}{\sigma^3}$$

değeri bulunur.

Önerme 4.3.6: Gauss manifoldunda $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonun bileşenleri olan $\Gamma^{i\,(\alpha)}_{\ jk}$ değerleri;

$$\Gamma^{2\,(\alpha)}_{\ 11} = \frac{1-\alpha}{2\sigma} \ , \qquad \Gamma^{1\,(\alpha)}_{\ 12} = -\frac{1+\alpha}{\sigma}$$
$$\Gamma^{2(\alpha)}_{\ 22} = \frac{-(1+2\alpha)}{\sigma} \qquad \Gamma^{1\,(\alpha)}_{\ 21} = -\frac{1+\alpha}{\sigma}$$
$$\Gamma^{1\,(\alpha)}_{\ 11} = \Gamma^{2\,(\alpha)}_{\ 21} = \Gamma^{1\,(\alpha)}_{\ 22} = \Gamma^{2\,(\alpha)}_{\ 12} = 0$$

dır (Lauritzen 1987).

İspat: (4.3.9) dan

$$\Gamma^{k\,(\alpha)}_{ij} = \sum_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma^{(\alpha)}_{\ \ ijl}$$

ve $g^{kl} = (g_{kl})^{-1}$ olduğu biliniyor. Buradan $[\,g_{kl}\,]$ matrisinin tersi

$$\left[g^{kl}\right] = \frac{\sigma^2}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır. Bilinen değerlerin yerine konmasıyla

$$\Gamma_{11}^{2\,(\alpha)} = g^{2l}\Gamma^{(\alpha)}{}_{11l} = g^{21}\Gamma^{(\alpha)}{}_{111} + g^{22}\Gamma^{(\alpha)}{}_{112} = \frac{1-\alpha}{2\sigma}$$

ve

$$\Gamma_{11}^{1\,(\alpha)} = g^{1l}\Gamma^{(\alpha)}{}_{11l} = g^{11}\Gamma^{(\alpha)}{}_{111} + g^{12}\Gamma^{(\alpha)}{}_{112} = 0$$

dır. Benzer şekilde diğerleri bulunur.

Önerme 4.3.7: Gauss manifoldunda $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonun $\alpha-$eğrilik tensörü olan

$$\overset{(\alpha)}{R}_{1212} = \frac{1-\alpha^2}{\sigma^4}$$

iken diğerleri sıfırdır (Arwini ve Dodson 2008).

İspat:

$$\begin{aligned}\overset{(\alpha)}{R}_{ijkm} &= \overset{(\alpha)}{R}(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_m)\\ &= \sum_{s=1}^{2}\left(\partial_i(\Gamma_{jk}^{s\,(\alpha)}) - \partial_j(\Gamma_{ik}^{s\,(\alpha)}\right)g_{sm} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma^{(\alpha)}{}_{irm}\Gamma_{jk}^{r\,(\alpha)} - \Gamma^{(\alpha)}{}_{jrm}\Gamma_{ik}^{r\,(\alpha)}\right)\end{aligned}$$

olduğu (4.1.3) den biliniyor. Buradan

$$\begin{aligned}\overset{(\alpha)}{R}_{1212} &= \overset{(\alpha)}{R}(\partial_1,\partial_2,\partial_1,\partial_2)\\ &= \sum_{s=1}^{2}\left(\partial_1(\Gamma_{21}^{s\,(\alpha)}) - \partial_2(\Gamma_{11}^{s\,(\alpha)}\right)g_{s2} + \sum_{r=1}^{2}\left(\Gamma^{(\alpha)}{}_{1r2}\Gamma_{21}^{r\,(\alpha)} - \Gamma^{(\alpha)}{}_{2r2}\Gamma_{11}^{r\,(\alpha)}\right)\\ &= \frac{1-\alpha^2}{\sigma^4}\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde diğerleri de bulunur.

Sonuç 4.3.2: Gauss manifoldunun kesit(Gauss) eğriliği

$$\overset{\alpha}{K}(\sigma,\mu) = \frac{\alpha^2-1}{2}$$

dır (Lauritzen 1987).

Tanım 4.3.7: (M,g) Riemann manifoldu ve ∇ afin koneksiyonu olsun. $X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla^*_X Z) \qquad (4.3.11)$$

şeklinde tanımlanan ∇^* a ∇ nın **eşlenik ya da dual koneksiyonu** denir (Lauritzen 1987).

Önerme 4.3.8: (M,g) Riemann manifoldu ve ∇ afin koneksiyonu olsun. ∇^* bir afin koneksiyondur ve $(\nabla^*)^*=\nabla$ dır (Lauritzen 1987).

İspat: $X,Y,Z,W\in\chi(M)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $f,g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere ve (4.3.11) denklemi yardımıyla

$$\nabla^*_X(\alpha Y+\beta Z)=\alpha\nabla^*_X Y+\beta\nabla^*_X Z$$

olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}g\left(\nabla^*_X(\alpha Y+\beta Z),W\right)&=Xg(\alpha Y+\beta Z,W)-g(\alpha Y+\beta Z,\nabla_X W)\\&=\alpha Xg(Y,W)+\beta Xg(Z,W)-\alpha g(Y,\nabla_X W)-\beta g(Z,\nabla_X W)\\&=\alpha\left[Xg(Y,W)-g(Y,\nabla_X W)\right]+\beta\left[Xg(Z,W)-g(Z,\nabla_X W)\right]\\&=\alpha g(\nabla^*_X Y,W)+\beta g(\nabla^*_X Z,W)\\&=g(\alpha\nabla^*_X Y+\beta\nabla^*_X Z,W)\end{aligned}$$

Buradan $\nabla^*_X(\alpha Y+\beta Z)=\alpha\nabla^*_X Y+\beta\nabla^*_X Z$ olur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}g\left(\nabla^*_X(fY),Z\right)&=Xg(fY,Z)-g(fY,\nabla_X Z)\\&=X(f)g(Y,Z)+fXg(Y,Z)-fg(Y,\nabla_X Z)\\&=g(X(f)Y,Z)+f\left(g(\nabla^*_X Y,Z)\right)\\&=g(X(f)Y,Z)+g(f\nabla^*_X Y,Z)\\&=g(X(f)Y+f\nabla^*_X Y,Z)\end{aligned}$$

dir. Buradan $\nabla^*_X(fY)=X(f)Y+f\nabla^*_X Y$

dir. (4.1.1) deki diğer özellikte sağlandığından ∇^* afin koneksiyondur. Ayrıca

$$\begin{aligned}g\left((\nabla^*)^*_X Y,Z\right)&=Xg(Y,Z)-g(Y,\nabla^*_X Z)\\&=Xg(Y,Z)-\left\{Xg(Z,Y)-g(\nabla_X Y,Z)\right\}\\&=g(\nabla_X Y,Z)\end{aligned}$$

ise $(\nabla^*)^*=\nabla$ dir.

Önerme 4.3.9: $\overset{\alpha}{\nabla}$ koneksiyonun eşleniği

$$(\overset{\alpha}{\nabla})^*=\overset{-\alpha}{\nabla}$$

dır (Lauritzen 1987).

İspat: $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere ve (4.3.2) denklemi yardımıyla

$$g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) = g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2}\mathrm{C}(X,Y,Z)$$

$$g(Y, \overset{-\alpha}{\nabla}_X Z) = g(Y, \overline{\nabla}_X Z) + \frac{\alpha}{2}\mathrm{C(X,Y,Z)}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overset{-\alpha}{\nabla}_X Z) &= g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z) \\ &= Xg(Y,Z) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$g(Y, \overset{-\alpha}{\nabla}_X Z) = Xg(Y,Z) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) \quad \text{dır.}$$

O halde (4.3.11) den $(\overset{\alpha}{\nabla})^* = \overset{-\alpha}{\nabla}$ dır.

Sonuç 4.3.3: (M, g, C) istatistiksel manifold olsun. Bu durumda

$$g(\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y, Z) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) = \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z) \tag{4.3.12}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere ve (4.3.2) den

$$\overset{\alpha}{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(X,Y)$$

$$\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \frac{\alpha}{2}\text{Đ}(X,Y)$$

dir. Bu iki denklem taraf tarafa çıkartılırsa

$$\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y - \overset{\alpha}{\nabla}_X Y = \alpha \text{Đ}(X,Y)$$

denklemi g metriği için

$$g(\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y - \overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) = \alpha g(\text{Đ}(X,Y), Z) = \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z)$$

denklemi elde edilir. Böylece

$$g(\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y, Z) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) = \alpha \mathrm{C}(X,Y,Z)$$

dir.

Önerme 4.3.10: R ve R* sırasıyla ∇ ve ∇^* koneksiyonlarının eğrilik tensörleri olsun. $\forall X,Y,Z,V \in \chi(M)$ için

$$g(\mathrm{R}(X,Y)Z,V)=-g(Z,\mathrm{R}^*(X,Y)V)$$

eşitliği geçerlidir (Matsuzoe 2006).

İspat: $\forall X,Y,Z,V\in\chi(M)$ olmak üzere ve eğrilik tensörü tanımından

$$\begin{aligned} g(\mathrm{R}(X,Y)Z,V) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z,V) \\ &= g(\nabla_X\nabla_Y Z,V)-g(\nabla_Y\nabla_X Z,V)-g(\nabla_{[X,Y]}Z,V) \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

eşitliği ve (4.3.11) denklemi ile

$$g(\nabla_X\nabla_Y Z,V)=XYg(Z,V)-g(\nabla_X Z,\nabla_Y^* V)-g(\nabla_Y Z,\nabla_X^* V)-g(Z,\nabla_X^*\nabla_Y^* V)$$

$$g(\nabla_Y\nabla_X Z,V)=YXg(Z,V)-g(\nabla_Y Z,\nabla_X^* V)-g(\nabla_X Z,\nabla_Y^* V)-g(Z,\nabla_Y^*\nabla_X^* V)$$

$$g(\nabla_{[X,Y]}Z,V)=[X,Y]g(Z,V)-g(Z,\nabla_{[X,Y]}^* V)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu değerler (4.3.13) de yerine konulursa aranılan sonuç olan

$$g(\mathrm{R}(X,Y)Z,V)=-g(Z,\mathrm{R}^*(X,Y)V)$$

bulunur.

Sonuç 4.3.4: R ve R* sırasıyla ∇ ve ∇^* koneksiyonlarının eğrilik tensörleri olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktirler.

i) R = R*

ii) R(X,Y,Z,W)= -R(X,Y,W,Z) , $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$

dır (Lauritzen 1987).

Sonuç 4.3.5: (M,g,C) istatistiksel manifold, ∇ afin koneksiyon olsun. ∇ afin koneksiyonunun M de düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul ∇^* afin koneksiyonunun da M de düzlemsel olmasıdır (Lauritzen 1987).

Tanım 4.3.8: (M,g) bir Riemann manifold, (∇,∇^*) afin koneksiyonlar olsun. Eğer (∇,∇^*) koneksiyonları torsiyonsuz ve düzlemsel ise (∇,∇^*) koneksiyon çiftine **eşlenik olarak düzlemsel**, (M,g,∇,∇^*) yapısına da **eşlenik olarak düzlemsel uzay** adı verilir (Lauritzen 1987).

Önerme 4.3.11: (M,g) bir C^∞ manifold , ∇ torsiyonsuz afin koneksiyon ve ∇^*, ∇ nın eşlenik koneksiyonu olmak üzere fark tensörü Ð1 $=\nabla^*-\nabla$ şeklinde tanımlansın. Böylece $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$\mathrm{D}_1(X,Y,Z) = g\left(\overline{\mathrm{D}}_1(X,Y),Z\right) \tag{4.3.14}$$

tanımlı olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) $\nabla *$ torsiyonsuz

ii) D_1 simetriktir

iii) $\overline{\nabla} = \frac{1}{2}\left(\nabla + \nabla *\right)$ (4.3.15)

(Lauritzen 1987).

İspat: $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere D_1 simetriktir. Çünkü

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_1(X,Y,Z) &= g(\nabla^*_X Y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) \\
&= Xg(Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z) - \left[Xg(Y,Z) - g(\nabla^*_X Z,Y) \right] \\
&= g(\nabla^*_X Z,Y) - g(Y,\nabla_X Z) = \mathrm{D}_1(X,Z,Y)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{D}_1(X,Y,Z) = \mathrm{D}_1(X,Z,Y)$

i) $\Leftrightarrow$ ii) Farz edelim ki $\nabla, \nabla *$ torsiyonsuz olsun.

$$g(\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X - \left[X,Y\right],Z) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - \left[X,Y\right],Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad g(\nabla^*_X Y,Z) - g(\nabla^*_Y X,Z) - g(\left[X,Y\right],Z) = g(\nabla_X Y,Z) - g(\nabla_Y X,Z) - g(\left[X,Y\right],Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad g(\nabla^*_X Y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) = g(\nabla^*_Y X,Z) - g(\nabla_Y X,Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{D}_1(X,Y,Z) = \mathrm{D}_1(X,Z,Y)$$

$\Leftrightarrow$ D_1 simetriktir

iii) $\Rightarrow$ i)

$\nabla^* = 2\overline{\nabla} - \nabla$ iken ∇ ve $\overline{\nabla}$ torsiyonsuz olduğundan $\nabla *$ da torsiyonsuzdur.

i) $\Rightarrow$ iii) Farz edelim ki $\nabla *$ torsiyonsuz olsun. Bu durumda Riemann koneksiyonun tekliğinden hareket edilip $\overline{\nabla} = \frac{1}{2}\left(\nabla + \nabla *\right)$ alındığında $\nabla *$ ve ∇ torsiyonsuz olduğundan $\overline{\nabla}$ da torsiyonsuzdur. Böylece

$$\begin{aligned}
g(\overline{\nabla}_X Y,Z) + g(Y,\overline{\nabla}_X Z) &= \frac{1}{2}g(\nabla_X Y,Z) + \frac{1}{2}g(\nabla^*_X Y,Z) + \frac{1}{2}g(Y,\nabla_X Z) + \frac{1}{2}g(Y,\nabla^*_X Z) \\
&= \frac{1}{2}\left(g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla^*_X Z)\right) + \frac{1}{2}\left(g(Y,\nabla_X Z) + g(\nabla^*_X Y,Z)\right) \\
&= \frac{1}{2}Xg(Y,Z) + \frac{1}{2}Xg(Y,Z)
\end{aligned}$$

$$= Xg(Y,Z)$$

$$\Rightarrow \quad g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z) = Xg(Y,Z)$$

elde edilir. Buda $\overline{\nabla}$ nın Riemann koneksiyonu olduğunu gösterir. Buradan

$$\overline{\nabla} = \frac{1}{2}\left(\nabla + \nabla^*\right)$$

olduğu görülür.

Önerme 4.3.12: C ve C^* sırasıyla (M,∇,g) ve (M,∇^*,g) yapılarının kübik formları ise

$$\mathrm{C} = -\mathrm{C}^*$$

dir (Matsuzoe 2006).

İspat: $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere ve (4.3.1) denkleminden

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(X,Y,Z) &= g(Y, \mathrm{D}_1(X,Z)) \\ &= g(Y,\nabla^*_X Z) - g(Y,\nabla_X Z) \\ &= g(Y,\nabla^*_X Z) + g(\nabla^*_X Y, Z) - Xg(Y,X) \\ &= -(\nabla^*_X g)(Y,Z) = -\mathrm{C}^*(X,Y,Z) \end{aligned} \qquad \text{(4.3.14) ve (4.3.11) den}$$

dir. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için $\mathrm{C} = -\mathrm{C}^*$ dır.

Önerme 4.3.13: (M,g,C) istatistiksel manifold, $\overline{\nabla}$ Riemann koneksiyon olsun.

$$g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y, Z) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Z, Y) = g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(\overline{\nabla}_X Z, Y)$$

dır (Lauritzen 1987).

Tanım 4.3.9: M bir C^∞ manifold, $\overline{\nabla}$, Riemann koneksiyonu ve C manifoldun çarpıklığı olmak üzere

$$\mathrm{F}(X,Y,Z,W) = (\overline{\nabla}_X \mathrm{C})(Y,Z,W)$$

dır (Lauritzen 1987).

Önerme 4.3.14: M bir C^∞ manifold, $\overline{\nabla}$, Riemann koneksiyonu ve C manifoldun çarpıklığı olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

i) $\overset{\alpha}{\mathrm{R}} = \overset{-\alpha}{\mathrm{R}}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii) F simetriktir (Lauritzen 1987).

İspat: $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\overset{-\alpha}{\mathrm{R}}\left(X,Y,Z,W\right)-\overset{\alpha}{\mathrm{R}}\left(X,Y,Z,W\right)=\alpha\left\{\mathrm{F}\left(X,Y,Z,W\right)-\mathrm{F}\left(Y,X,Z,W\right)\right\} \text{ olsun.} \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} 2\alpha\mathrm{F}\left(X,Y,Z,W\right) &= 2\alpha X\mathrm{C}\left(Y,Z,W\right) \\ &\quad -2\alpha\left\{\mathrm{C}\left(\overline{\nabla}_X Y,Z,W\right)+\mathrm{C}\left(Y,\overline{\nabla}_X Z,W\right)+\mathrm{C}\left(Y,Z,\overline{\nabla}_X W\right)\right\} \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Ayrıca (4.3.15) ve (4.3.12) den

$$\overline{\nabla}=\frac{1}{2}\left(\overset{\alpha}{\nabla}+\overset{-\alpha}{\nabla}\right) \text{ ve } \alpha\mathrm{C}(X,Y,Z)=g(\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y,Z)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_X Y,Z) \text{ dir. Buradan}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha\mathrm{C}\left(\overline{\nabla}_X Y,Z,W\right) &= 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Z W,\overline{\nabla}_X Y)-2g(\overset{\alpha}{\nabla}_Z W,\overline{\nabla}_X Y) \\ &= g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Z W,\overset{\alpha}{\nabla}_X Y)+g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Z W,\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Z W,\overset{\alpha}{\nabla}_X Y)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Z W,\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha\mathrm{C}\left(Y,\overline{\nabla}_X Z,W\right) &= 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y W,\overline{\nabla}_X Z)-2g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y W,\overline{\nabla}_X Z) \\ &= g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y W,\overset{\alpha}{\nabla}_X Z)+g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y W,\overset{-\alpha}{\nabla}_X Z)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y W,\overset{\alpha}{\nabla}_X Z)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y W,\overset{-\alpha}{\nabla}_X Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\alpha\mathrm{C}\left(Y,Z,\overline{\nabla}_X W\right) &= 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,\overline{\nabla}_X W)-2g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,\overline{\nabla}_X W) \\ &= g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{\alpha}{\nabla}_X W)+g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{-\alpha}{\nabla}_X W)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{\alpha}{\nabla}_X W)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{-\alpha}{\nabla}_X W) \end{aligned}$$

olmak üzere bunun yanında

$$\begin{aligned} 2\alpha X\mathrm{C}\left(Y,Z,W\right) &= 2X\left(g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,W)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,W)\right) \\ &= 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_X \overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,W)-2g(\overset{\alpha}{\nabla}_X \overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,W) \\ &\quad + 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{\alpha}{\nabla}_X W)-2g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{-\alpha}{\nabla}_X W) \end{aligned}$$

dir. Bulunan bütün bu değerler (4.3.17) de yerine konulursa

$$\begin{aligned} 2\alpha\mathrm{F}\left(X,Y,Z,W\right) &= 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_X \overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,W)-2g(\overset{\alpha}{\nabla}_X \overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,W) \\ &\quad + g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{\alpha}{\nabla}_X W)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{-\alpha}{\nabla}_X W) \\ &\quad + g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{\alpha}{\nabla}_X W)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z,\overset{-\alpha}{\nabla}_X W) \\ &\quad + g(\overset{\alpha}{\nabla}_z W,\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_z W,\overset{\alpha}{\nabla}_X Y) \\ &\quad + g(\overset{-\alpha}{\nabla}_z W,\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y)-g(\overset{\alpha}{\nabla}_z W,\overset{-\alpha}{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y W, \overset{-\alpha}{\nabla}_X Z) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y W, \overset{\alpha}{\nabla}_X Z) \\
&+ g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y W, \overset{\alpha}{\nabla}_X Z) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y W, \overset{-\alpha}{\nabla}_X Z) \\
&+ g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z, \overset{-\alpha}{\nabla}_X W) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z, \overset{\alpha}{\nabla}_X W) \\
&+ g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z, \overset{\alpha}{\nabla}_X W) - g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y Z, \overset{-\alpha}{\nabla}_X W)
\end{aligned} \tag{4.3.18}
$$

(4.3.18) deki 4. ve 5. satırlar torsiyonsuz ve alterne özelliğinden, 2. ve 4. satırların toplamı sıfır olduğundan, 3. ve 7. satırlar ile 6. ve 8. satırlar, alterne özelliğinden birbirini götürdükten sonra geriye sadece 1. satır kalır. Yani,

$$2\alpha \mathrm{F}\left(X,Y,Z,W\right) = 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_X \overset{-\alpha}{\nabla}_Y Z, W) - 2g(\overset{\alpha}{\nabla}_X \overset{\alpha}{\nabla}_Y Z, W) \tag{4.3.19}$$

dir. Benzer şekilde

$$2\alpha \mathrm{F}\left(Y,X,Z,W\right) = 2g(\overset{-\alpha}{\nabla}_Y \overset{-\alpha}{\nabla}_X Z, W) - 2g(\overset{\alpha}{\nabla}_Y \overset{\alpha}{\nabla}_X Z, W) \tag{4.3.20}$$

dır. (4.3.19) ve (4.3.20) deki değerleri (4.3.16) da yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
&2\alpha \mathrm{F}\left(X,Y,Z,W\right) - 2\alpha \mathrm{F}\left(Y,X,Z,W\right) \\
&= 2\overset{-\alpha}{\mathrm{R}}\left(X,Y,Z,W\right) - 2\overset{\alpha}{\mathrm{R}}\left(X,Y,Z,W\right)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan $i) \Leftrightarrow ii)$ elde edilir.

Tanım 4.3.10: M bir C^∞ manifold olsun. F simetrik ise M manifolduna **eşlenik simetriktir** denir (Lauritzen 1987).

Sonuç 4.3.6: M bir C^∞ manifold olsun.

$\exists \alpha \neq 0$ için $\overset{\alpha}{\mathrm{R}} = 0$ ise M manifoldu eşlenik simetriktir ve M ye α - düzlemsel denir (Lauritzen 1987).

Sonuç 4.3.7: $\overset{\alpha}{\mathrm{R}} = \overset{-\alpha}{\mathrm{R}}$ olduğundan Gauss manifoldu eşlenik simetriktir (Lauritzen 1987).

Sonuç 4.3.8: M bir C^∞ manifold olsun. M deki üstel aileler ∓ 1 – düzlemsel ve eşlenik simetriktir (Lauritzen 1987).

Sonuç 4.3.9: M bir C^∞ manifold olsun. Eğrilik tensörü $\overset{\alpha}{\mathrm{R}}$,

$$\overset{\alpha}{\mathrm{R}}(X,Y,Z,W) = -\overset{\alpha}{\mathrm{R}}(X,Y,W,Z)$$

$$\overset{\alpha}{\mathrm{R}}(X,Y,Z,W)=\overset{\alpha}{\mathrm{R}}(Z,W,X,Y)$$

eşitliklerini sağlar (Lauritzen 1987).

5. EŞLENİK KONEKSİYONLARIN KATLI ÇARPIMLARI

L. Todjihounde (Todjihounde 2006) bir katlı çarpım manifoldu üzerinde tanımlanan bir eşlenik yapının, baz ve fiber manifoldlar üzerine izdüşümlerinin de birer eşlenik yapı indirgediğini göstermiştir. Bunun sonucu olarak, eğer katlı çarpım uzayı üzerinde eşlenik olarak düzlemsel bir yapı var ise o zaman baz manifoldu eşlenik olarak düzlemsel iken fiber manifoldu sabit kesit eğriline sahip olduğunu göstermiştir. Bu çalışma, tezimizin orijinal bölümünü teşkil edecek olan bölüm 5.2 deki çift katlı çarpımlar için yol gösterici olacaktır.

5.1. Katlı (warped) Çarpım Manifoldu

Analizden bilindiği üzere $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir. Fakat diferensiyel geometri açısından bakıldığında $\mathbb{R}$ 1- boyutlu, $\mathbb{R}^2$ 2-boyutlu bir manifold olur. O halde akla şu soru gelebilir. M ve N sırasıyla m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifold iken $B = M \times N$, m+n boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olur mu? Şimdi aşağıda bunun cevabı verilecektir.

$$\zeta = (x_1, x_2, ..., x_m) : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^m, \; M \text{ ' nin koordinat sistemi,}$$

$$\eta = (y_1, y_2, ..., y_n) : V \subset N \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; N \text{ 'nin koordinat sistemi}$$

olsun.

$$\zeta \times \eta : U \times V \subset M \times N \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

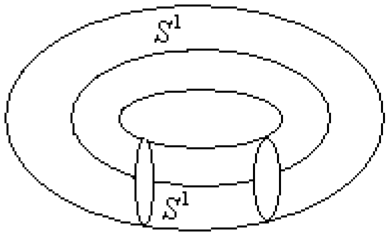
$$(p,q) \longrightarrow (\zeta \times \eta)(p,q)$$

$$(\zeta \times \eta)(p,q) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_m(p), y_1(q), y_2(q), ..., y_n(q))$$

çarpım fonksiyonu $B = M \times N$ üzerinde bir koordinat sistemi olur. Böylece $(U \times V, \zeta \times \eta)$, $M \times N$ üzerinde bir diferensiyellenebilir m+n boyutlu atlas tanımlar.

Önerme 5.1.1: M ve N sırasıyla m ve n boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold iseler $M \times N$ deki her çarpım koordinat sistemi $M \times N$ üzerinde bir m+n boyutlu atlastır ve $M \times N$, M ve N nin çarpım manifoldudur (O'Neill 1983).

Örnek 5.1.1: $\mathrm{T}^2 = S^1 \times S^1$ toru ele alınsın.



Şekil 5.1. Tor yüzeyi

İçerideki çemberler S^1 manifoldu dıştaki çemberlerde S^1 manifoldu olup çarpım manifoldu $T^2 = S^1 \times S^1$ tor yüzeyi elde edilir (Şekil 5.1).

Örnek 5.1.2: $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ Gamma 2- manifoldu da bir çarpım manifoldu örneği olarak verilebilir.

Tanım 5.1.1: M ve N diferensiyellenebilir iki manifold ve bunların çarpım manifoldları $M \times N$ olsun.

$$\begin{array}{ll} \pi : M \times N \to M & , \ \sigma : M \times N \to N \\ (p,q) \to p & \quad (p,q) \to q \end{array}$$

sırasıyla birinci ve ikinci doğal izdüşüm fonksiyonları olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 5.1.2: M ve N sırasıyla m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olsunlar.

a) $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere ϕ nin $M \times N$ ye lifti (yükseltilmişi) $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ olarak tanımlanır.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\phi} = \phi \circ \pi"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

b) $p \in M$, $q \in N$ ve $X_p \in T_p(M)$ olsun. X_p tanjant vektörünün lifti $\tilde{X}_p$, $T_{(p,q)}(M \times \{q\})$ da

$$\pi_* \big|_{(p,q)}(\tilde{X}_{(p,q)}) = X_p, \quad \sigma_* \big|_{(p,q)}(\tilde{X}_{(p,q)}) = 0$$

olacak şekilde bir tek $\tilde{X}_{(p,q)}$ tanjant vektörü olarak tanımlanır.

c) $X \in \chi(M)$ vektör alanı olsun. $\tilde{X} \in \chi(M \times N)$ olmak üzere her $(p,q) \in M \times N$ noktası için $\tilde{X}_{(p,q)}$, X_p için bir lift oluşturuyorsa $\tilde{X}$ ye X in lifti denir. Burada ifade edilen $\tilde{X}$ lere yatay lift adı verilir ve $\tilde{X} \in L_H(M)$ şeklinde gösterilir. Yani $L_H(M) = \chi(M) \times \{q\}$ dir.

N üzerindeki fonksiyonların, tanjant vektörlerin, vektör alanlarının $M \times N$ ye lifti için de σ izdüşüm fonksiyonu yardımıyla benzer tanımlamalar verilebilir. Burada ifade edilecek olan $\tilde{Y}$ lere de dikey lift adı verilir ve $\tilde{Y} \in L_V(N)\,(=\{p\} \times \chi(N))$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983).

Sonuç 5.1.1: $M \times N$ çarpım manifold olsun. $\forall (p,q) \in M \times N$ noktasındaki $T_{(p,q)}(M \times N)$ tanjant uzayı, $T_p(M)$ ile $T_q(N)$ tanjant uzaylarının direkt toplamına izomorfiktir. Yani

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p(M) \oplus T_q(N)$$

dır (O'Neill 1983).

Sonuç 5.1.2: $\tilde{X} \in L_H(M),\ \tilde{Y} \in L_V(N)$ olsun.

$$\chi(M \times N) = L_H(M) \oplus L_V(N)$$

dir (O'Neill 1983).

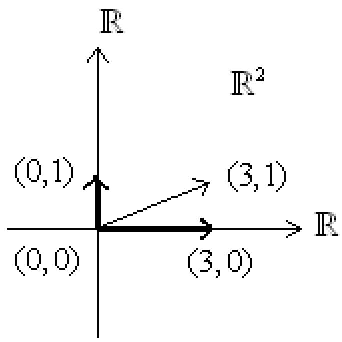
Önerme 5.1.2: $\tilde{X} \in L_H(M)$ ve $\tilde{V} \in L_V(N)$ olmak üzere $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$ dir (O'Neill 1983).

Örnek 5.1.3: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerindeki doğal koordinat vektör alanı $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathbb{R}$ deki $\dfrac{d}{dx}$ vektör alanının yatay liftidir.

Örnek 5.1.4: $\mathbb{R}^2$ üzerinde

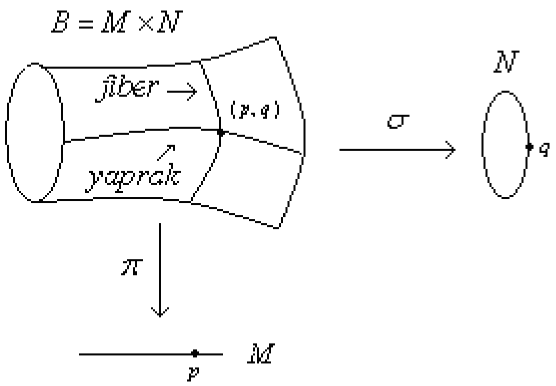
$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (3,1) &\to 3 \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (3,1) &\to 1 \end{aligned}$$

izdüşüm fonksiyonları olsun. $X_p = X_0 = 3 \in T_0(\mathbb{R})$ nin (0,0) noktasındaki yatay lifti (3,0) dır. Benzer şekilde (0,0) noktasındaki dikey lift (0,1) dir. Sonuç olarak $(3,1) = (3,0) \oplus (0,1)$ dir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2. $\mathbb{R}^2$ de bir vektörün yatay ve dikey lifti

Tanım 5.1.3: $\pi : M \times N \to M$, $\sigma : M \times N \to N$ izdüşüm fonksiyonları olsun. O halde Riemann çarpım durumunda $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times N$ (ya da kısaca $p \times N$) ye B nin fiberi, $\sigma^{-1}(q) = M \times \{q\}$ (ya da kısaca $M \times q$) ya da B nin yaprakları denir (Şekil 5.3). Yapraklara teğet vektör alanları yatay alanlar, fibere teğet olan vektör alanları da düşey alanlar olarak adlandırılır (O'Neill 1983).



Şekil 5.3. Çarpım manifoldu üzerindeki fiber ve yapraklar

Tanım 5.1.4 (Katlı çarpım): $f : M \to \mathbb{R}^+$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $\forall X, Y \in \chi(B)$ için $B = M \times N$ üzerinde

$$<,> = \pi^*(g) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(h) \tag{5.1.1}$$

şeklinde tanımlı $<,>$ Riemann metriği ile belli $(B, <,>)$ ikilisine (M, g) ve (N, h) nın katlı(warped) çarpımı denir, $B = M \times_f N$ şeklinde gösterilir ve f fonksiyonu da katlı(warping) fonksiyonu olarak adlandırılır, $<,>$ ye B nin katlı metriği denir. $f = 1$ ise $M \times N$ çarpım manifoldu elde edilir (O'Neill 1983).

Örnek 5.1.5: $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ın bir katlı temsili:

$\mathbb{R}^3 - \{0\}$ da $\{r, \theta, \varphi\}$ küresel koordinat sistemi göz önüne alınsın. Bu halde ds^2 metrik tensörü için

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

dir. $r = 1$ için S^2 birim küresi üzerindeki metrik elde edilir. Böylece $\mathbb{R}^3 - \{0\}$;

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$t \to f(t) = t$$

$(\mathbb{R}^+, G)$ ve $(S^2, ds^2{}_{|r=1})$ olmak üzere $\mathbb{R}^+ \times_f S^2$ katlı çarpımdır ve

$$\psi : \mathbb{R}^+ \times_f S^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(t, p) \to t.p$$

izometrik gömmedir.

Tanım 5.1.5: (M, g) ve (N, h) iki Riemann manifoldu ve bunların katlı çarpımı $B = M \times_f N$ olsun. M ye B nin baz manifoldu ve N ye ise B nin fiber manifoldu denir (O'Neill 1983).

Sonuç 5.1.2: $B = M \times_f N$ katlı çarpımı ve her $(p, q) \in B$ için $M \times q$ yaprağı ile $p \times N$ fiberi (p, q) noktasında ortogonaldir (O'Neill 1983).

Bundan sonra $X, Y \in L_H(M)$ ve $U, V \in L_V(N)$, $\bar{X} \in \chi(M)$ ve $\tilde{U} \in \chi(N)$ olmak üzere

$$\pi_*(X) = \bar{X}, \quad \sigma_*(U) = \tilde{U} \tag{5.1.2}$$

ve $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu üzerinde $(<,>, D, D^*)$ eşlenik yapı için,

$$\pi_*(D_X Y) = {}^M\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} \text{ ve } \pi_*(D^*{}_X Y) = {}^M\nabla'_{\bar{X}} \bar{Y},$$

$$\sigma_*(D_U V) = {}^N\nabla_{\tilde{U}} \tilde{V} \text{ ve } \sigma_*(D^*{}_U V) = {}^N\nabla'_{\tilde{U}} \tilde{V} \tag{5.1.3}$$

gösterimleri kullanılacaktır. Burada ${}^M\nabla'$, ${}^M\nabla$ M üzerinde, ${}^N\nabla$ ve ${}^N\nabla'$ ise N üzerinde afin koneksiyonlardır.

Önerme 5.1.3: $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu üzerinde $(<,>, D, D^*)$ eşlenik yapı olsun. $(g, {}^M\nabla, {}^M\nabla')$, M üzerinde , $(h, {}^N\nabla, {}^N\nabla')$ ise N üzerindeki eşlenik yapısı için

$$ {}^{M}\nabla' = ({}^{M}\nabla)^{*} \text{ ve } {}^{N}\nabla' = ({}^{N}\nabla)^{*} $$

dir (Todjihounde 2006).

İspat: $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}\in\chi(M)$ ve bunların yatay liftleri sırasıyla $X,Y,Z\in L_H(M)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\bar{X}.g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi &= X.<Y,Z> \\
&= <D_XY,Z> + <Y,D_X^{*}Z> \\
&= g(\pi_{*}(D_XY),\bar{Z})\circ\pi + g(\bar{Y},\pi_{*}(D_X^{*}Z))\circ\pi \\
&= [g({}^{M}\nabla_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z}) + g(\bar{Y},{}^{M}\nabla'_{\bar{X}}\bar{Z})]\circ\pi
\end{aligned}
$$

Buradan $\bar{X}.g(\bar{Y},\bar{Z}) = g({}^{M}\nabla_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z}) + g(\bar{Y},{}^{M}\nabla'_{\bar{X}}\bar{Z})$ dir.

O halde ${}^{M}\nabla' = ({}^{M}\nabla)^{*}$ dir.

$\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}\in\chi(N)$ ve bunların dikey liftleri sırasıyla $U,V,W\in L_V(N)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}.h(\tilde{V},\tilde{W})\circ\sigma &= (f\circ\pi)^{-2}U.<V,W> \\
&= (f\circ\pi)^{-2}[<D_UV,W> + <V,D_U^{*}W>] \\
&= (f\circ\pi)^{-2}\{(f\circ\pi)^{2}h(\sigma_{*}(D_UV),\tilde{W})\circ\sigma + (f\circ\pi)^{2}h(\tilde{V},\sigma_{*}(D_U^{*}W))\circ\sigma\} \\
&= [h({}^{N}\nabla_{\tilde{U}}\tilde{V},\tilde{W}) + h(\tilde{V},{}^{N}\nabla'_{\tilde{U}}\tilde{W})]\circ\sigma
\end{aligned}
$$

Buradan $\tilde{U}.h(\tilde{V},\tilde{W}) = h({}^{N}\nabla_{\tilde{U}}\tilde{V},\tilde{W}) + h(\tilde{V},{}^{N}\nabla'_{\tilde{U}}\tilde{W})$ dır.

O halde ${}^{N}\nabla' = ({}^{N}\nabla)^{*}$

Tanım 5.1.6: (g,∇,∇^{*}), M üzerinde , $(h,\tilde{\nabla},\tilde{\nabla}^{*})$ ise N üzerindeki eşlenik yapı ve D,D' $M\times_f N$ katlı çarpım manifoldu üzerindeki torsiyonsuz afin koneksiyonlar olsun. $X,Y\in L_H(M)$ ve $U,V\in L_V(N)$ için

i) $D_XY = (\nabla_{\bar{X}}\bar{Y})^{H}$

ii) $D_XU = D_UX = \dfrac{X.f}{f}U$

iii) $D_UV = -\dfrac{<U,V>}{f}\,gradf + (\tilde{\nabla}_{\tilde{U}}\tilde{V})^{V}$

ve

a) $D'_XY = (\nabla^{*}_{\bar{X}}\bar{Y})^{H}$

b) $D'_XU = D'_UX = \dfrac{X.f}{f}U$

c) $D'_U V = -\dfrac{<U,V>}{f} gradf + (\tilde{\nabla}^*_{\tilde{U}} \tilde{V})^V$

dır (Todjihounde 2006).

Kolaylık olsun diye $f = f \circ \pi$ ve $grad(f \circ \pi) = gradf$ şeklinde gösterilmiştir.

Önerme 5.1.4: $M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu üzerinde tanımlı $(<,>, D, D')$ eşlenik yapısı verilsin. O halde

$$D' = D^*$$

dir (Todjihounde 2006).

İspat: $X, Y, Z \in L_H(M)$ ve $U, V, W \in L_V(N)$ olsun.

$$\begin{aligned} X.<Y,Z> &= \overline{X}.g(\overline{Y}, \overline{Z}) \circ \pi \\ &= g(\nabla_{\overline{X}} \overline{Y}, \overline{Z}) \circ \pi + g(\overline{Y}, \nabla^*_{\overline{X}} \overline{Z}) \circ \pi \\ &= <D_X Y, Z> + <Y, D'_X Z> \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U.<V,W> &= f^2 \tilde{U}.h(\tilde{V}, \tilde{W}) \circ \sigma \\ &= f^2 [h(\tilde{\nabla}_{\tilde{U}} \tilde{V}, \tilde{W}) + h(\tilde{V}, \nabla^*_{\tilde{U}} \tilde{W})] \circ \sigma \\ &= <(\tilde{\nabla}_{\tilde{U}} \tilde{V})^V, W> + <V, (\nabla^*_{\tilde{U}} \tilde{W})^V> \\ &= <D_U V + \frac{<U,V>}{f} gradf, W> \\ &\quad + <V, D'_U W + \frac{<U,W>}{f} gradf> \\ &= <D_U V, W> + <V, D'_U W> + \frac{<U,V>}{f} <gradf, W> \\ &\quad + \frac{<U,W>}{f} <V, gradf> \\ &= <D_U V, W> + <V, D'_U W> \end{aligned}$$

Burada

$$D_U V + \frac{<U,V>}{f} gradf = (\tilde{\nabla}_{\tilde{U}} \tilde{V})^V \quad , \quad D'_U W + \frac{<U,W>}{f} gradf = (\tilde{\nabla}^*_{\tilde{U}} \tilde{W})^V$$

ve $gradf \in L_H(M)$ olduğundan $<gradf, W> = <gradf, V> = 0$

dır. Bunlar yerine konulup istenen sonuca ulaşılmıştır. Benzer şekilde diğer değerlerde

$$< D_U Y, Z > = < Y, D'_U Z > = 0 \text{ olduğundan}$$

$$U. < Y, Z > = < D_U Y, Z > + < Y, D'_U Z > = 0,$$

$$< D_X V, Z > = < V, D'_X Z > = 0 \text{ olduğundan}$$

$$X < V, Z > = < D_X V, Z > + < V, D'_X Z > = 0,$$

$$< D_X Y, W > = < Y, D'_X W > = 0 \text{ olduğundan}$$

$$X < Y, W > = < D_X Y, W > + < Y, D'_X W > = 0$$

dir. O halde $\forall A, B, C \in \chi(M \times N)$

$$A < B, C > = < D_A B, C > + < B, D'_A C >$$

dır. Buradan $D' = D^*$ dır.

Önerme 5.1.5: $X, Y, Z \in L_H(M)$ ve $U, V, W \in L_V(N)$ olsun.

i) $\mathrm{R}_{XY} Z = ({}^g\mathrm{R}_{\bar{X}\bar{Y}} \bar{Z})^H$

ii) $\mathrm{R}_{VY} Z = -\dfrac{1}{f} H^f(Y, Z) V$

iii) $\mathrm{R}_{XY} V = \mathrm{R}_{VW} X = 0$

iv) $\mathrm{R}_{XV} W = -\dfrac{< V, W >}{f} D_X(gradf)$

v) $\mathrm{R}_{VW} U = (\mathrm{R}(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{U})^V + \dfrac{< gradf, gradf >}{f^2}\left[< V, U > W - < W, U > V \right]$

dir (Todjihounde 2006).

İspat:

ii) $X, Y, Z \in L_H(M)$ ve $U, V, W \in L_V(N)$ olsun.

$[V, Y] = 0$ olduğu Önerme 5.1.2 den biliniyor.

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{VY} Z &= \mathrm{R}(V, Y) Z = D_V D_Y Z - D_Y D_V Z - D_{[V,Y]} Z \\ &= D_V D_Y Z - D_Y D_V Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_Y D_V Z &= D_Y \left(\frac{Z(f)}{f} V \right) = Y\left(\frac{Z(f)}{f}\right) V + \left(\frac{Z(f)}{f}\right) D_Y V \\ &= \left[\frac{Y(Z(f))}{f} + Z(f) Y\left(\frac{1}{f}\right)\right] V + \left(\frac{Z(f)}{f}\right)\left(\frac{Y(f)}{f} V\right) \end{aligned}$$

$$D_Y D_V Z = \frac{Y(Z(f))}{f} V$$

dir. $D_Y Z \in L_H(M)$ olduğundan $D_V D_Y Z = \frac{(D_Y Z)(f)}{f} V$ olur. Bulunan değerler yerine konulursa

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{VY} Z &= \frac{(D_Y Z)(f)}{f} V - \frac{Y(Z(f))}{f} V = [\left((D_Y Z)(f) - Y(Z(f))\right)/f]V \\ &= -\frac{H^f(Y,Z)}{f} V \end{aligned}$$

dır.

iii) $[V,W]=0$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{VW} X &= D_V D_W X - D_W D_V X - D_{[V,W]} X \\ &= D_V D_W X - D_W D_V X \end{aligned}$$

$$D_V D_W X = D_V(\frac{X(f)}{f} W) = V(\frac{X(f)}{f})W + \frac{X(f)}{f} D_V W$$

$\frac{X(f)}{f}$, M üzerinde sabit olduğundan $V(\frac{X(f)}{f}) = 0$ dır. Böylece $D_V D_W X = \frac{X(f)}{f} D_V W$ ve benzer şekilde $D_W D_V X = \frac{X(f)}{f} D_W V$ olur.

$$\mathrm{R}_{VW} X = D_V D_W X - D_W D_V X = \frac{X(f)}{f}\left(D_V W - D_W V\right) = \frac{X(f)}{f}[V,W] = 0$$

dır.

Eğrilik tensörünün simetri özelliğinden ve $\mathrm{R}_{XY} Z \in L_H(M)$ olduğundan

$$<\mathrm{R}_{XY} V, Z> = -<\mathrm{R}_{XY} Z, V> = 0$$

$$<\mathrm{R}_{XY} V, W> = <\mathrm{R}_{VW} X, Y> = 0$$

$\forall Z \in L_H(M)$ *ve* $\forall W \in L_V(N)$ için sağlandığından $\mathrm{R}_{XY} V = 0$ dır.

iv) R nin simetri özelliği ve (4.1.2) den

$$<\mathrm{R}_{XV} W, U> = <\mathrm{R}_{WU} X, V> = 0$$

dir. Burada $U \in L_V(N)$ olduğundan $\mathrm{R}_{XV} W \in L_H(M)$ olur.

$\mathrm{R}_{VW} X = 0$ idi. Eğriliğin simetri özelliğinden $\mathrm{R}_{XV} W = \mathrm{R}_{XW} V$ olduğu biliniyor.

$$< \mathrm{R}_{XV}W,Y> = < \mathrm{R}_{VX}Y,W> = -\frac{H^f(X,Y)}{f} < V,W>$$
$$= -\left(\frac{< V,W>}{f}\right) < D_X(gradf),Y>$$
$$= - < \frac{< V,W>}{f} D_X(gradf),Y>$$

Buradan $\mathrm{R}_{XV}W = -\frac{< V,W>}{f} D_X(gradf)$ olur.

v) ${}^{B}\mathrm{R}(V,W)U = D_V D_W U - D_W D_V U - D_{[V,W]}U$

$$= D_V\left((\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^V - \frac{1}{f} < W,U > gradf\right) - D_W\left((\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^V - \frac{1}{f} < V,U > gradf\right)$$
$$-\left((\tilde{\nabla}_{[\tilde{V},\tilde{W}]}\tilde{U})^V - \frac{1}{f} < [V,W],U > gradf\right)$$
$$= \tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U} - \frac{1}{f} < V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^V > gradf - \frac{1}{f} < D_V W,U > gradf$$
$$-\frac{1}{f} < W,D^*{}_V U > gradf - \frac{1}{f} < W,U > D_V gradf - \tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U}$$
$$+\frac{1}{f} < W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^V > gradf + \frac{1}{f} < D_W V,U > gradf$$
$$+\frac{1}{f} < V,D^*{}_W U > gradf + \frac{1}{f} < V,U > D_W gradf - (\tilde{\nabla}_{[\tilde{V},\tilde{W}]}\tilde{U})^V$$
$$-\frac{1}{f} < D_W V,U > gradf + \frac{1}{f} < D_V W,U > gradf$$
$$= \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U}\right)^V - \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U}\right)^V - \left(\tilde{\nabla}_{[\tilde{V},\tilde{W}]}\tilde{U}\right)^V - \frac{1}{f} < V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^V > gradf$$
$$+\frac{1}{f} < W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^V > gradf - \frac{1}{f} < W,\left((\tilde{\nabla}^*_{\tilde{V}}\tilde{U})^V - \frac{1}{f} < V,U > gradf\right) > gradf$$
$$+\frac{1}{f} < V,\left((\tilde{\nabla}^*_{\tilde{W}}\tilde{U})^V - \frac{1}{f} < W,U > gradf\right) > gradf + \frac{1}{f} < V,U > D_W gradf$$
$$-\frac{1}{f} < W,U > D_V gradf$$
$$= (\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^V - \frac{1}{f} < V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^V > gradf + \frac{1}{f} < W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^V > gradf$$
$$-\frac{1}{f} < W,(\tilde{\nabla}^*_{\tilde{V}}\tilde{U})^V > gradf + \frac{1}{f^2} < V,U > < W,gradf > gradf$$

$$+\frac{1}{f}<V,(\tilde{\nabla}^*_{\tilde{W}}\tilde{U})^{\,V}> gradf-\frac{1}{f^2}<W,U><V,gradf> gradf$$

$$+\frac{1}{f}<V,U>\left(\frac{gradf(f)}{f}W\right)-\frac{1}{f}<W,U>\left(\frac{gradf(f)}{f}V\right)$$

$$=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^V-\frac{1}{f}<V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^V-(\tilde{\nabla}^*_{\tilde{W}}\tilde{U})^{\,V}> gradf$$

$$+\frac{1}{f}<W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^V-(\tilde{\nabla}^*_{\tilde{V}}\tilde{U})^{\,V}> gradf+\frac{1}{f^2}<V,U> gradf(f)W$$

$$-\frac{1}{f^2}<W,U> gradf(f)V$$

(4.3.14) den ve $<W,gradb>=<V,gradb>=0$ olduğundan

$$=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^V-\frac{1}{f}<V,-\tilde{\mathrm{D}}_1(\tilde{W},\tilde{U})> gradf$$

$$+\frac{1}{f}<W,-\tilde{\mathrm{D}}_1(\tilde{V},\tilde{U})> gradf+\frac{1}{f^2}\big[<V,U>W-<W,U>V\big]gradf(f)$$

$$=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^V+\frac{1}{f}g(\tilde{V},\tilde{\mathrm{D}}_1(\tilde{W},\tilde{U}))gradb-\frac{1}{f}g(W,\tilde{\mathrm{D}}_1(\tilde{V},\tilde{U}))gradb$$

$$+\frac{<gradf,gradf>}{f^2}\big[<V,U>W-<W,U>V\big]$$

$$=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^V+\frac{<gradf,gradf>}{f^2}\big[<V,U>W-<W,U>V\big]$$

Burada $gradf(f)=<gradf,gradf>$ olduğu kullanıldı.

Sonuç 5.1.3: M bağlantılı uzay, f sabit olmayan katlama fonksiyonu olsun. Eğer $(M\times_f N,<,>,D,D^*)$ yapısı eşlenik olarak düzlemsel uzay ise o zaman (M,g,∇,∇^*) yapısı da eşlenik olarak düzlemseldir ve $(N,h,\tilde{\nabla},\tilde{\nabla}^*)$ yapısı sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldudur (Todjihounde 2006).

İspat: $(M\times N,<,>,D,D^*)$ eşlenik olarak düzlemsel uzay olsun. Önerme 5.1.5 i) den

$${}^g\mathrm{R}\equiv 0$$

Buradan ∇ koneksiyonu düzlemseldir. Öte yandan Sonuç 4.3.5 den ∇^* koneksiyonu da düzlemseldir. Buda (M,g,∇,∇^*) yapısının eşlenik olarak düzlemsel olduğunu gösterir.

$X \in L_H(M)$ ve $U,V,W \in L_V(N)$ olsun. $(M \times N, <,>, D, D^*)$ eşlenik olarak düzlemsel uzay olduğundan Önerme 5.1.5 iv) den

$$\mathrm{R}_{XV}W = \frac{<V,W>}{f} D_X(gradf) = 0$$

dır. Buradan

$$D_X(gradf) = 0 \quad , \qquad \forall X \in L_H(M)$$

dır. M bağlantılı olduğundan $gradf$ sabit vektör alanıdır.

Önerme 5.1.5 v) den

$$\mathrm{R}_{VW}U = (\mathrm{R}_{\tilde{V}\tilde{W}}\tilde{U})^V - \frac{<gradf, gradf>}{f^2}(<V,U>W - <W,U>V) = 0$$

$$(\mathrm{R}_{\tilde{V}\tilde{W}}\tilde{U})^V = \frac{<gradf, gradf>}{f^2}(<V,U>W - <W,U>V)$$

$$f^2.(\mathrm{R}_{\tilde{V}\tilde{W}}\tilde{U})^V = \|gradf\|^2 (<V,U>W - <W,U>V)$$

$$\mathrm{R}_{\tilde{V}\tilde{W}}\tilde{U} = \|gradf\|^2 \{h(\tilde{U},\tilde{V})\tilde{W} - h(\tilde{U},\tilde{W})\tilde{V}\}$$

$\|gradf\|^2$ sabit olduğundan M sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldudur.

5.2. Eşlenik Koneksiyonların Çift Katlı Çarpımları

Bu alt bölümde 5.1 bölümündeki katlı çarpım için yapılanların, çift katlı çarpımlardaki karşılıkları verilmiştir. Elde edilen sonuçlar orijinaldir.

Tanım 5.2.1: (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldu ve $b: M \to \mathbb{R}^+$, $f: N \to \mathbb{R}^+$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. $\pi: M \times N \to M$, $\sigma: M \times N \to N$ izdüşüm fonksiyonları $M \times N$ çarpım manifoldu üzerinde tanımlı olsun. $B =_f M \times_b N$ çarpım manifolduna **çift katlı çarpım manifoldu** adı verilir ve üzerindeki metrik tensör

$$<,> = (f \circ \sigma)^2 \pi^*(g) + (b \circ \pi)^2 \sigma^*(h)$$

dir. Kısaca $<,> = f^2 g + b^2 h$ şeklinde de gösterilir. b, f katlı(warping) fonksiyonlarıdır. $b=1$ veya $f=1$ durumundan biri sağlandığında tek katlı çarpım elde edilir (Ünal 2000).

Önerme 5.2.1: $B = {}_f M \times {}_b N$ çift katlı çarpım manifoldu üzerinde $(<,>, D, D^*)$ eşlenik yapı olsun. $(g, {}^M\nabla, {}^M\nabla')$, M üzerinde , $(h, {}^N\nabla, {}^N\nabla')$ ise N üzerindeki eşlenik yapı için

$$ {}^M\nabla' = ({}^M\nabla)^* \text{ ve } {}^N\nabla' = ({}^N\nabla)^* $$

dir.

İspat: $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \chi(M)$ ve bunların yatay liftleri sırasıyla $X, Y, Z \in L_H(M)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\bar{X}.g(\bar{Y}, \bar{Z}) \circ \pi &= (f \circ \sigma)^{-2} X. < Y, Z > \\
&= (f \circ \sigma)^{-2} \left(< D_X Y, Z > + < Y, D_X^* Z > \right) \\
&= (f \circ \sigma)^{-2} \left((f \circ \sigma)^2 g(\pi_*(D_X Y), \bar{Z}) \circ \pi + (f \circ \sigma)^2 g(\bar{Y}, \pi_*(D_X^* Z)) \circ \pi \right) \\
&= [g({}^M\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}) + g(\bar{Y}, {}^M\nabla'_{\bar{X}} \bar{Z})] \circ \pi
\end{aligned}$$

Buradan $\bar{X}.g(\bar{Y}, \bar{Z}) = g({}^M\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}) + g(\bar{Y}, {}^M\nabla'_{\bar{X}} \bar{Z})$ dir. Yani ${}^M\nabla$ ve ${}^M\nabla'$ birbirinin eşleniğidir. O halde ${}^M\nabla' = ({}^M\nabla)^*$ dir.

$\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \chi(N)$ ve bunların dikey liftleri sırasıyla $U, V, W \in L_V(N)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\tilde{U}.h(\tilde{V}, \tilde{W}) \circ \sigma &= (b \circ \pi)^{-2} U. < V, W > \\
&= (b \circ \pi)^{-2} [< D_U V, W > + < V, D_U^* W >] \\
&= (b \circ \pi)^{-2} \{ (b \circ \pi)^2 h(\sigma_*(D_{\tilde{U}} \tilde{V}), \tilde{W}) \circ \sigma + (b \circ \pi)^2 h(\tilde{V}, \sigma_*(D_{\tilde{U}}^* \tilde{W})) \circ \sigma \} \\
&= [h({}^N\nabla_{\tilde{U}} \tilde{V}, \tilde{W}) + h(\tilde{V}, {}^N\nabla'_{\tilde{U}} \tilde{W})] \circ \sigma
\end{aligned}$$

Buradan $\tilde{U}.h(\tilde{V}, \tilde{W}) = h({}^N\nabla_{\tilde{U}} \tilde{V}, \tilde{W}) + h(\tilde{V}, {}^N\nabla'_{\tilde{U}} \tilde{W})$ dır. ${}^N\nabla$ ve ${}^N\nabla'$ birbirinin eşleniğidir. O halde ${}^N\nabla' = ({}^N\nabla)^*$

Önerme 5.2.2: $B = {}_f M \times {}_b N$ çift katlı çarpım manifoldu ve üzerindeki metrik $<,> = f^2 g + b^2 h$ olsun. $\phi : M \to \mathbb{R}$ ve $\vartheta : N \to \mathbb{R}$ olmak üzere $M \times N$ üzerindeki gradient operatörü

$$\begin{aligned}
grad(\phi \circ \pi) &= \frac{1}{(f \circ \sigma)^2} grad_M(\phi) \\
grad(\vartheta \circ \sigma) &= \frac{1}{(b \circ \pi)^2} grad_N(\vartheta)
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

dir (Ünal 2000).

Tanım 5.2.2: (g,∇,∇^*), M üzerinde , $(h,\tilde{\nabla},\tilde{\nabla}^*)$ ise N üzerindeki eşlenik yapı ve $D,D^{'}$ $B={}_fM\times{}_bN$ çift katlı çarpım manifoldu üzerindeki torsiyonsuz afin koneksiyonlar olsun. $X,Y\in L_H(M)$ ve $U,V\in L_V(N)$ için

i) $D_XY=(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y})^H-\dfrac{1}{f}<X,Y>gradf$

ii) $D_XV=D_VX=\dfrac{X(b)}{b}V+\dfrac{V(f)}{f}X$

iii) $D_UV=(\tilde{\nabla}_{\tilde{U}}\tilde{V})^V-\dfrac{1}{b}<U,V>gradb$

ve

a) $D^{'}_XY=(\nabla^*_{\bar{X}}\bar{Y})^H-\dfrac{1}{f}<X,Y>gradf$

b) $D^{'}_XV=D^{'}_VX=\dfrac{X(b)}{b}V+\dfrac{V(f)}{f}X$

c) $D^{'}_UV=(\tilde{\nabla}^*_{\tilde{U}}\tilde{V})^V-\dfrac{1}{b}<U,V>gradb$

dır.

Önerme 5.2.3: $B={}_fM\times{}_bN$ üzerinde tanımlı $(<,>,D,D^{'})$ eşlenik yapısı verilsin. O halde

$$D^{'}=D^*$$

dır.

İspat: $X,Y,Z\in L_H(M)$ ve $U,V,W\in L_V(N)$ olsun.

$$\begin{aligned}
X.<Y,Z> &= (f\circ\sigma)^2\,\bar{X}.g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi \\
&= (f\circ\sigma)^2\{g(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi+g(\bar{Y},\nabla^*_{\bar{X}}\bar{Z})\circ\pi\} \\
&= (f\circ\sigma)^2g(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi+(f\circ\sigma)^2g(\bar{Y},\nabla^*_{\bar{X}}\bar{Z})\circ\pi \\
&= <(\nabla_{\bar{X}}\bar{Y})^H,Z>+<Y,(\nabla^*_{\bar{X}}\bar{Z})^H> \\
&= <D_XY+\frac{1}{f}<X,Y>gradf,Z>+<Y,D^{'}_XZ+\frac{1}{f}<X,Z>gradf> \\
&= <D_XY,Z>+<Y,D^{'}_XZ>+\frac{1}{f}<X,Y><gradf,Z>
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{f}<X,Z><Y,gradf>$$

dir. $gradf\in L_V(N)$ olduğundan $<gradf,Z>=0$, $<Y,gradf>=0$ dır. O halde

$$X.<Y,Z>=<D_XY,Z>+<Y,D^{'}_XZ>$$

dır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}U.<V,W>&=(b\circ\pi)^2\tilde{U}.h(\tilde{V},\tilde{W})\circ\sigma\\&=(b\circ\pi)^2[h(\tilde{\nabla}_{\tilde{U}}\tilde{V},\tilde{W})+h(\tilde{V},\nabla^*_{\tilde{U}}\tilde{W})]\circ\sigma\\&=(b\circ\pi)^2h(\tilde{\nabla}_{\tilde{U}}\tilde{V},\tilde{W})\circ\sigma+(b\circ\pi)^2h(\tilde{V},\nabla^*_{\tilde{U}}\tilde{W})\circ\sigma\\&=<(\tilde{\nabla}_{\tilde{U}}\tilde{V})^V,W>+<V,(\tilde{\nabla}^*_{\tilde{U}}\tilde{W})^V>\\&=<D_UV+\frac{1}{b}<U,V>gradb,W>+<V,D^{'}_UW+\frac{1}{b}<U,W>gradb>\\&=<D_UV,W>+<V,D^{'}_UW>+\frac{1}{b}<U,V><gradb,W>\\&+\frac{1}{b}<U,W><V,gradb>\end{aligned}$$

Burada $gradb\in L_H(M)$ olduğundan $<gradb,W>=<gradb,V>=0$ dır. O halde

$$U.<V,W>=<D_UV,W>+<V,D^{'}_UW>$$

dır.

Şimdi de $U<Y,Z>=<D_UY,Z>+<Y,D^{'}_UZ>$ eşitliğinin sağlandığını göstermeye çalışalım.

$$\begin{aligned}U<Y,Z>&=\tilde{U}[(f\circ\sigma)^2g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi]\\&=2(f\circ\sigma)\left(\tilde{U}(f\circ\sigma)\right)g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi+(f\circ\sigma)^2\tilde{U}\left(g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi\right)\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

$g(\bar{Y},\bar{Z})\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ olduğundan $\tilde{U}g(\bar{Y},\bar{Z})=0$ dır. Böylece (5.2.2) denklemi aşağıdaki denkleme indirgenir.

$$U<Y,Z>=2(f\circ\sigma)\tilde{U}(f\circ\sigma)g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi\tag{5.2.3}$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}<D_UY,Z>&=<\frac{Y(b)}{b}U+\frac{U(f)}{f}Y,Z>\\&=\frac{Y(b)}{b}<U,Z>+\frac{U(f)}{f}<Y,Z>,\qquad <U,Z>=0\\&=\frac{U(f)}{f}<Y,Z>=\frac{\tilde{U}(f)}{f}f^2g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi=\tilde{U}(f)(f\circ\sigma)g(\bar{Y},\bar{Z})\circ\pi\end{aligned}$$

$$< Y, D'_U Z > = < Y, \frac{Z(b)}{b} U + \frac{U(f)}{f} Z >$$
$$= \frac{Z(b)}{b} < Y, U > + \frac{U(f)}{f} < Y, Z >, \qquad < Y, U > = 0$$
$$= \frac{U(f)}{f} < Y, Z > = \frac{\tilde{U}(f)}{f} f^2 g(\overline{Y}, \overline{Z}) \circ \pi = \tilde{U}(f)(f \circ \sigma) g(\overline{Y}, \overline{Z}) \circ \pi$$

dır. Yani

$$< D_U Y, Z > + < Y, D'_U Z > = 2\tilde{U}(f)(f \circ \sigma) g(\overline{Y}, \overline{Z}) \circ \pi \tag{5.2.4}$$

olduğu görülür.

(5.2.3) ve (5.2.4) den $U < Y, Z > = < D_U Y, Z > + < Y, D'_U Z >$ dır.

Ayrıca,

$X < V, Z > = 0 = < D_X V, Z > + < V, D_X' Z >$ eşitliğinin sağlandığını göstermek için;

$$< D_X V, Z > = < \frac{X(b)}{b} V + \frac{V(f)}{f} X, Z > = \frac{X(b)}{b} < V, Z > + \frac{V(f)}{f} < X, Z >, \quad < V, Z > = 0$$
$$= \frac{V(f)}{f} < X, Z > = \frac{\tilde{V}(f)}{f} f^2 g(\overline{X}, \overline{Z}) \circ \pi = \tilde{V}(f)(f \circ \sigma) g(\overline{X}, \overline{Z}) \circ \pi$$

$$< V, D_X' Z > = < V, (\nabla^*_{\overline{X}} \overline{Z})^H - \frac{1}{f} < X, Z > gradf >$$
$$= < V, (\nabla^*_{\overline{X}} \overline{Z})^H > - \frac{1}{f} < X, Z >< V, gradf >, \qquad < V, (\nabla^*_{\overline{X}} \overline{Z})^H > = 0$$
$$= -\frac{1}{f} < X, Z >< V, gradf >, \qquad < V, gradf > = V(f)$$
$$= -\frac{V(f)}{f} < X, Z > = -\frac{\tilde{V}(f)}{f} f^2 g(\overline{X}, \overline{Z}) \circ \pi = -\tilde{V}(f)(f \circ \sigma) g(\overline{X}, \overline{Z}) \circ \pi$$

$< D_X V, Z > + < V, D_X' Z > = 0 = X < V, Z >$ olduğu görülür. O halde $\forall A, B, C \in \chi(M \times N)$ için

$$A < B, C > = < D_A B, C > + < B, D'_A C >$$

dır. Buradan $D' = D^*$ dır.

Önerme 5.2.4: $B = {}_f M \times_b N$ çift katlı çarpım manifoldu ve üzerindeki Riemann eğriliği ^{B}R olsun. $X, Y, Z \in L_H(M)$ ve $U, V, W \in L_V(N)$ için

i) $^{B}\mathrm{R}(X,Y)Z=(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^{H}-\frac{1}{fb^{2}}\left[\frac{X(b)}{b}<Y,Z>-\frac{Y(b)}{b}<X,Z>\right]grad_{N}f$

$$-\frac{1}{b^{2}}\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right]grad_{N}f(f)$$

ii) $^{B}\mathrm{R}(V,Y)Z=-\frac{H^{b}(Y,Z)}{b}V+\frac{H^{f}(Z,V)}{f}Y$

$$-\frac{g(Y,Z)}{b}\left[\frac{f}{b}\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}grad_{N}f-\frac{V(f)}{f}grad_{M}b\right]$$

iii) $^{B}\mathrm{R}(X,Y)U=-\frac{H^{f}(Y,U)}{f}X+\frac{H^{f}(X,U)}{f}Y$

iv) $^{B}\mathrm{R}(V,W)X=-\frac{H^{b}(W,Z)}{b}V+\frac{H^{b}(V,Z)}{b}W$

v) $^{B}\mathrm{R}(X,V)W=-\frac{H^{f}(V,W)}{f}X+\frac{H^{b}(X,W)}{b}V$

$$-\frac{h(V,W)}{f}\left[\frac{b}{f}(\nabla_{\bar{X}}grad_{M}b)^{H}-\frac{X(b)}{b}grad_{N}f\right]$$

vi) $^{B}\mathrm{R}(V,W)U=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^{V}+\frac{1}{bf^{2}}\left[<V,U>\frac{W(f)}{f}-<W,U>\frac{V(f)}{f}\right]grad_{M}b$

$$+\frac{1}{f^{2}}\left[h(V,U)W-h(W,U)V\right]grad_{M}b(b)$$

dir.

İspat:

i) $^{B}\mathrm{R}(X,Y)Z=D_{X}D_{Y}Z-D_{Y}D_{X}Z-D_{[X,Y]}Z$

$$=D_{X}\left((\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^{H}-\frac{1}{f}<Y,Z>gradf\right)-D_{Y}\left((\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^{H}-\frac{1}{f}<X,Z>gradf\right)$$

$$-\left((\nabla_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{Z})^{H}-\frac{1}{f}<[X,Y],Z>gradf\right)$$

$$=D_{X}((\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^{H})-D_{X}(\frac{1}{f}<Y,Z>gradf)-D_{Y}((\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^{H})$$

$$+D_{Y}(\frac{1}{f}<X,Z>gradf)-(\nabla_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{Z})^{H}+\frac{1}{f}<[X,Y],Z>gradf$$

$$= (\nabla_{\bar{X}}\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H - \frac{1}{f} < X, (\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H > gradf$$

$$-\frac{1}{f}[< D_X Y, Z > + < Y, D^*{}_X Z >]gradf - \frac{1}{f} < Y, Z > D_X gradf$$

$$-(\nabla_{\bar{Y}}\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^H + \frac{1}{f} < Y, (\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^H > gradf$$

$$+\frac{1}{f}[< D_Y X, Z > + < X, D^*{}_Y Z >]gradf + \frac{1}{f} < X, Z > D_Y gradf - (\nabla_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{Z})^H$$

$$+\frac{1}{f} < D_X Y - D_Y X, Z > gradf$$

$$= (\nabla_{\bar{X}}\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H - (\nabla_{\bar{Y}}\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^H - (\nabla_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{Z})^H - \frac{1}{f} < X, (\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H > gradf$$

$$-\frac{1}{f} < D_X Y, Z > gradf - \frac{1}{f} < Y, D^*{}_X Z > gradf - \frac{1}{f} < Y, Z > D_X gradf$$

$$+\frac{1}{f} < Y, (\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^H > gradf + \frac{1}{f} < D_Y X, Z > gradf + \frac{1}{f} < X, D^*{}_Y Z > gradf$$

$$+\frac{1}{f} < X, Z > D_Y gradf + \frac{1}{f} < D_X Y, Z > gradf - \frac{1}{f} < D_Y X, Z > gradf$$

$$= (\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H - \frac{1}{f} < X, (\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H > gradf + \frac{1}{f} < Y, (\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^H > gradf$$

$$-\frac{1}{f} < Y, \left((\nabla^*{}_{\bar{X}}\bar{Z})^H - \frac{1}{f} < X, Z > gradf \right) > gradf$$

$$-\frac{1}{f} < Y, Z > \left(\frac{X(b)}{b} gradf + \frac{gradf(f)}{f} X \right)$$

$$+\frac{1}{f} < X, \left((\nabla^*{}_{\bar{Y}}\bar{Z})^H - \frac{1}{f} < Y, Z > gradf \right) > gradf$$

$$+\frac{1}{f} < X, Z > \left(\frac{Y(b)}{b} gradf + \frac{gradf(f)}{f} Y \right)$$

$$= (\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H - \frac{1}{f} < X, (\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H > gradf + \frac{1}{f} < Y, (\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^H > gradf$$

$$-\frac{1}{f} < Y, (\nabla^*{}_{\bar{X}}\bar{Z})^H > gradf + \frac{1}{f^2} < X, Z >< Y, gradf > gradf$$

$$-\frac{X(b)}{bf} < Y, Z > gradf - \frac{1}{f^2} < Y, Z > gradf(f) X$$

$$+\frac{1}{f} < X, (\nabla^*{}_{\bar{Y}}\bar{Z})^H > gradf - \frac{1}{f^2} < Y, Z >< X, gradf > gradf$$

$$+\frac{Y(b)}{bf}<X,Z>gradf+\frac{1}{f^2}<X,Z>gradf(f)Y$$

$$=(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H-\frac{1}{f}\left[<Y,(\nabla^*_{\bar{X}}\bar{Z})^H-\nabla_{\bar{X}}\bar{Z})^H>\right]gradf$$

$$-\frac{1}{f}\left[<X,(\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H-(\nabla^*_{\bar{Y}}\bar{Z})^H>\right]gradf+\frac{1}{f^2}<X,Z><Y,gradf>gradf$$

$$-\frac{1}{f^2}<Y,Z>gradf(f)X-\frac{X(b)}{bf}<Y,Z>gradf$$

$$-\frac{1}{f^2}<Y,Z><X,gradf>gradf+\frac{Y(b)}{bf}<X,Z>gradf$$

$$+\frac{1}{f^2}<X,Z>gradf(f)Y$$

(4.3.14) den ve $<Y,gradf>=<X,gradf>=0$ olduğundan

$$^{B}\mathrm{R}(X,Y)Z=(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H-\frac{1}{f}\left[<Y,\tilde{\mathrm{D}}_1(\bar{X},\bar{Z})>\right]gradf$$

$$-\frac{1}{f}\left[<X,-\tilde{\mathrm{D}}_1(\bar{Y},\bar{Z})>\right]gradf-\frac{1}{f^2}<Y,Z>gradf(f)X$$

$$-\frac{X(b)}{bf}<Y,Z>gradf+\frac{Y(b)}{bf}<X,Z>gradf+\frac{1}{f^2}<X,Z>gradf(f)Y$$

$$=(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H-f\left[g(Y,\tilde{\mathrm{D}}_1(\bar{X},\bar{Z}))\right]gradf$$

$$+f\left[g(X,\tilde{\mathrm{D}}_1(\bar{Y},\bar{Z}))\right]gradf-\frac{1}{f^2}<Y,Z>gradf(f)X$$

$$-\frac{X(b)}{bf}<Y,Z>gradf+\frac{Y(b)}{bf}<X,Z>gradf+\frac{1}{f^2}<X,Z>gradf(f)Y$$

$$=(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H-f.\mathrm{C}(Y,X,Z)gradf+f.\mathrm{C}(X,Y,Z)gradf$$

$$-\frac{1}{f^2}<Y,Z>gradf(f)X-\frac{X(b)}{bf}<Y,Z>gradf$$

$$+\frac{Y(b)}{bf}<X,Z>gradf+\frac{1}{f^2}<X,Z>gradf(f)Y \quad , \qquad \text{C simetrik}$$

$$=(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H-\frac{1}{bf}\left[X(b)<Y,Z>-Y(b)<X,Z>\right]gradf$$

$$-\frac{1}{f^2}\left[<Y,Z>X-<X,Z>Y\right]gradf(f)$$

Önerme 5.2.2 den

$$= (\mathrm{R}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z})^H - \frac{1}{fb^2}\left[\frac{X(b)}{b}<Y,Z>-\frac{Y(b)}{b}<X,Z>\right]grad_N f$$

$$-\frac{1}{b^2}\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right]gradf_N(f)$$

ii)

$${}^{B}\mathrm{R}(V,Y)Z = D_V D_Y Z - D_Y D_V Z - D_{[V,Y]}Z \ , \qquad [V,Y]=0$$

$$= D_V\left((\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H - \frac{1}{f}<Y,Z>gradf\right) - D_Y\left(\frac{Z(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}Z\right)$$

$$= D_V(\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H + \frac{V(f)}{f^2}<Y,Z>gradf - \frac{1}{f}\left[<D_V Y,Z>+<Y,D^*{}_V Z>\right]gradf$$

$$-\frac{1}{f}<Y,Z>D_V gradf - Y\left(\frac{Z(b)}{b}\right)V - \frac{Z(b)}{b}D_Y V - Y\left(\frac{V(f)}{f}\right)Z - \frac{V(f)}{f}D_Y Z$$

$$= \frac{(\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H(b)}{b}V + \frac{V(f)}{f}(\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H + \frac{V(f)}{f^2}<Y,Z>gradf - \frac{1}{f}<\frac{Y(b)}{b}V$$

$$+\frac{V(f)}{f}Y,Z>gradf - \frac{1}{f}<Y,\frac{Z(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}Z>gradf$$

$$-\frac{1}{f}<Y,Z>D_V grad - \frac{Y(Z(b))}{b}V + \frac{Z(b)Y(b)}{b^2}V$$

$$-\frac{Z(b)}{b}\left(\frac{Y(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}Y\right) - \frac{Y(V(f))}{f}Z + \frac{V(f)Y(f)}{f^2}Z$$

$$-\frac{V(f)}{f}\left((\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H - \frac{1}{f}<Y,Z>gradf\right)$$

$$= \frac{(\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H(b)}{b}V + \frac{V(f)}{f}(\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H + \frac{V(f)}{f^2}<Y,Z>gradf$$

$$-\frac{V(f)}{f^2}<Y,Z>gradf - \frac{V(f)}{f^2}<Y,Z>gradf - \frac{Y(Z(b))}{b}V + \frac{Z(b)Y(b)}{b^2}V$$

$$-\frac{Z(b)Y(b)}{b^2}V - \frac{Z(b)V(f)}{bf}Y - \frac{Y(V(f))}{f}Z + \frac{V(f)Y(f)}{f^2}Z$$

$$-\frac{V(f)}{f}(\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H + \frac{V(f)}{f^2}<Y,Z>gradf$$

$$-\frac{1}{f}<Y,Z>D_V gradf,$$

$$= \frac{(\nabla_{\overline{Y}}\overline{Z})^H(b)}{b}V - \frac{Y(Z(b))}{b}V - \frac{Z(b)V(f)}{bf}Y - \frac{1}{f}<Y,Z>D_V gradf$$

$$= -\left(\frac{Y(Z(b)) - (\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z})^H(b)}{b}\right)V + \frac{Z(V(f))}{f}Y - \frac{V(f)Z(f)}{f^2}Y - \frac{Z(b)V(f)}{bf}Y$$

$$-\frac{1}{f} < Y, Z > \left[(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} gradf)^V - \frac{1}{b} < V, gradf > gradb\right].$$

Burada $Z(V(f)) = 0, V(f)Z(f) = 0$ olduğu kullanılmıştır. Böylece,

$${}^B\mathrm{R}(V,Y)Z = -\frac{H^b(Y,Z)}{b}V + \frac{H^f(Z,V)}{f}Y - \frac{1}{f}f^2 g(Y,Z)\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\frac{1}{b^2}grad_N f$$

$$+\frac{1}{bf}f^2 g(Y,Z)V(f)\frac{1}{f^2}grad_M b$$

$$= -\frac{H^b(Y,Z)}{b}V + \frac{H^f(Z,V)}{f}Y - \frac{g(Y,Z)}{b}\left[\frac{f}{b}\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}grad_N f - \frac{V(f)}{f}grad_M b\right]$$

elde edilir.

iii) ${}^B\mathrm{R}(X,Y)U = D_X D_Y U - D_Y D_X U - D_{[X,Y]}U$

$$= D_X\left(\frac{Y(b)}{b}U + \frac{U(f)}{f}Y\right) - D_Y\left(\frac{X(b)}{b}U + \frac{U(f)}{f}X\right)$$

$$-\left(\frac{[X,Y](b)}{b}U + \frac{U(f)}{f}[X,Y]\right)$$

$$= X\left(\frac{Y(b)}{b}\right)U + \frac{Y(b)}{b}D_X U + X\left(\frac{U(f)}{f}\right)Y + \frac{U(f)}{f}D_X Y$$

$$-Y\left(\frac{X(b)}{b}\right)U - \frac{X(b)}{b}D_Y U - Y\left(\frac{U(f)}{f}\right)X - \frac{U(f)}{f}D_Y X$$

$$-\frac{X(Y(b)) - Y(X(b))}{b}U - \frac{U(f)}{f}D_X Y + \frac{U(f)}{f}D_Y X$$

$$= \frac{X(Y(b))}{b}U - \frac{Y(b)X(b)}{b^2}U + \frac{Y(b)}{b}\left(\frac{X(b)}{b}U + \frac{U(f)}{f}X\right)$$

$$+\frac{X(U(f))}{f}Y - \frac{U(f)X(f)}{f^2}Y - \frac{Y(X(b))}{b}U + \frac{X(b)Y(b)}{b^2}U$$

$$-\frac{X(b)}{b}\left(\frac{Y(b)}{b}U + \frac{U(f)}{f}Y\right) - \frac{Y(U(f))}{f}X + \frac{U(f)Y(f)}{f^2}X$$

$$-\frac{X(Y(b)) - Y(X(b))}{b}U$$

$$= \frac{Y(b)U(f)}{bf}X - \frac{Y(U(f))}{f}X + \frac{U(f)Y(f)}{f^2}X + \frac{X(U(f))}{f}Y$$

$$-\frac{X(b)U(f)}{bf}Y-\frac{U(f)X(f)}{f^2}Y$$

$$=\frac{1}{f}\left[-Y(U(f))+\left(\frac{Y(b)}{b}U+\frac{U(f)}{f}Y\right)(f)\right]X$$

$$+\frac{1}{f}\left[X(U(f))-\left(\frac{X(b)}{b}U+\frac{U(f)}{f}X\right)(f)\right]Y$$

$$=-\frac{\left(Y(U(f))-D_YU(f)\right)}{f}X+\frac{\left(X(U(f))-D_XU(f)\right)}{f}Y$$

$$=-\frac{H^f(Y,U)}{f}X+\frac{H^f(X,U)}{f}Y$$

iv) ${}^B\mathrm{R}(V,W)Z=D_VD_WZ-D_WD_VZ-D_{[V,W]}Z$

$$=D_V\left(\frac{Z(b)}{b}W+\frac{W(f)}{f}Z\right)-D_W\left(\frac{Z(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}Z\right)$$

$$-\left(\frac{[V,W](f)}{f}Z+\frac{Z(b)}{b}[V,W]\right)$$

$$=V\left(\frac{Z(b)}{b}\right)W+\frac{Z(b)}{b}D_VW+V\left(\frac{W(f)}{f}\right)Z+\frac{W(f)}{f}D_VZ$$

$$-W\left(\frac{Z(b)}{b}\right)V-\frac{Z(b)}{b}D_WV-W\left(\frac{V(f)}{f}\right)Z-\frac{V(f)}{f}D_WZ$$

$$-\frac{V(W(f))-W(V(f))}{f}Z-\frac{Z(b)}{b}D_VW+\frac{Z(b)}{b}D_WV$$

$$=\frac{V(Z(b))}{b}W-\frac{Z(b)V(b)}{b^2}W+\frac{W(f)}{f}\left(\frac{Z(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}Z\right)$$

$$+\frac{V(W(f))}{f}Z-\frac{V(f)W(f)}{f^2}Z-\frac{W(Z(b))}{b}V+\frac{W(b)Z(b)}{b^2}V$$

$$-\frac{V(f)}{f}\left(\frac{Z(b)}{b}W+\frac{W(f)}{f}Z\right)-\frac{W(V(f))}{f}Z+\frac{V(f)W(f)}{f^2}Z$$

$$-\frac{V(W(f))-W(V(f))}{f}Z$$

$$=\frac{W(f)Z(b)}{fb}V-\frac{W(Z(b))}{b}V+\frac{W(b)Z(b)}{b^2}V+\frac{V(Z(b))}{b}W$$

$$-\frac{V(f)Z(b)}{fb}W-\frac{Z(b)V(b)}{b^2}W$$

$$=-\frac{1}{b}\left[W(Z(b))-\left(\frac{Z(b)}{b}W+\frac{W(f)}{f}Z\right)(b)\right]V$$

$$+\frac{1}{b}\left[V(Z(b))-\left(\frac{Z(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}Z\right)(b)\right]W$$

$$=-\frac{\left(W(Z(b))-(D_Z W)(b)\right)}{b}V+\frac{\left(V(Z(b))-(D_Z V)(b)\right)}{b}W$$

$$=-\frac{H^b(W,Z)}{b}V+\frac{H^b(V,Z)}{b}W$$

v) $^{B}\mathrm{R}(X,V)W=D_X D_V W-D_V D_X W-D_{[X,V]}W \quad , \qquad [X,V]=0$

$$=D_X\left((\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V-\frac{1}{b}<V,W>gradb\right)-D_V\left(\frac{X(b)}{b}W+\frac{W(f)}{f}X\right)$$

$$=D_X(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V+\frac{1}{b^2}X(b)<V,W>gradb-\frac{1}{b}<D_X V,W>gradb$$

$$-\frac{1}{b}<V,D^*{}_X W>gradb-\frac{1}{b}<V,W>D_X gradb-V\left(\frac{X(b)}{b}\right)W$$

$$-\frac{X(b)}{b}D_V W-V\left(\frac{W(f)}{f}\right)X-\frac{W(f)}{f}D_V X$$

$$=\frac{X(b)}{b}(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V+\frac{(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V(f)}{f}X+\frac{1}{b^2}X(b)<V,W>gradb$$

$$-\frac{1}{b}<\frac{X(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}X,W>gradb-\frac{1}{b}<V,\frac{X(b)}{b}W+\frac{W(f)}{f}X>gradb$$

$$-\frac{1}{b}<V,W>D_X gradb-\frac{V(X(b))}{b}W+\frac{V(b)X(b)}{b^2}W$$

$$-\frac{X(b)}{b}\left((\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V-\frac{1}{b}<V,W>gradb\right)-\frac{V(W(f))}{f}X$$

$$+\frac{W(f)V(f)}{f^2}X-\frac{W(f)}{f}\left(\frac{X(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}X\right)$$

$$=\frac{X(b)}{b}(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V+\frac{(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V(f)}{f}X+\frac{1}{b^2}X(b)<V,W>gradb$$

$$-\frac{1}{b^2}X(b)<V,W>gradb-\frac{1}{b^2}X(b)<V,W>gradb$$

$$+\frac{1}{b^2}X(b)<V,W>gradb-\frac{1}{b}<V,W>D_X gradb$$

$$-\frac{X(b)}{b}(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V-\frac{V(W(f))}{f}X+\frac{W(f)V(f)}{f^2}X$$

$$-\frac{W(f)V(f)}{f^2}X-\frac{W(f)X(b)}{bf}V$$

$$=\frac{(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V(f)}{f}X-\frac{V(W(f))}{f}X-\frac{1}{b}<V,W>D_X gradb$$

$$-\frac{W(f)X(b)}{bf}V$$

$$=-\left[\frac{V(W(f))-(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{W})^V(f)}{f}\right]X+\frac{X(W(b))}{b}V-\frac{X(b)W(b)}{b^2}V$$

$$-\frac{W(f)X(b)}{bf}V-\frac{1}{b}<V,W>\left[(\nabla_{\bar{X}}gradb)^H-\frac{1}{f}<X,gradb>gradf\right]$$

Burada $X(W(b))=X(b)W(b)=0$ olduğu kullanılmıştır. Böylece,

$$^B\mathrm{R}(X,V)W=-\frac{H^f(V,W)}{f}X+\frac{1}{b}\left[X(W(b))-(\frac{X(b)}{b}W+\frac{W(f)}{f}X)(b)\right]V$$

$$-\frac{1}{b}b^2h(V,W)\left[(\nabla_{\bar{X}}\frac{1}{f^2}grad_M b)^H-\frac{1}{f}X(b)\frac{1}{b^2}grad_N f\right]$$

$$=-\frac{H^f(V,W)}{f}X+\frac{H^b(X,W)}{b}V$$

$$-\frac{h(V,W)}{f}\left[\frac{b}{f}(\nabla_{\bar{X}}grad_M b)^H-\frac{X(b)}{b}grad_N f\right]$$

vi) $^B\mathrm{R}(V,W)U=D_V D_W U-D_W D_V U-D_{[V,W]}U$

$$=D_V\left((\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^V-\frac{1}{b}<W,U>gradb\right)-D_W\left((\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^V-\frac{1}{b}<V,U>gradb\right)$$

$$-\left((\tilde{\nabla}_{[\tilde{V},\tilde{W}]}\tilde{U})^V-\frac{1}{b}<[V,W],U>gradb\right)$$

$$=\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U}-\frac{1}{b}<V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^V>gradb-\frac{1}{b}<D_V W,U>gradb$$

$$-\frac{1}{b}<W,D^*_V U>gradb-\frac{1}{b}<W,U>D_V gradb-\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U}$$

$$+\frac{1}{b}<W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^V>gradb+\frac{1}{b}<D_W V,U>gradb$$

$$+\frac{1}{b}<V,D^{*}{}_{W}U>gradb+\frac{1}{b}<V,U>D_{W}gradb-(\tilde{\nabla}_{[\tilde{V},\tilde{W}]}\tilde{U})^{V}$$

$$-\frac{1}{b}<D_{W}V,U>gradb+\frac{1}{b}<D_{V}W,U>gradb$$

$$=\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U}\right)^{V}-\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U}\right)^{V}-\left(\tilde{\nabla}_{[\tilde{V},\tilde{W}]}\tilde{U}\right)^{V}-\frac{1}{b}<V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^{V}>gradb$$

$$+\frac{1}{b}<W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^{V}>gradb-\frac{1}{b}<W,\left((\tilde{\nabla}^{*}_{\tilde{V}}\tilde{U})^{V}-\frac{1}{b}<V,U>gradb\right)>gradb$$

$$+\frac{1}{b}<V,\left((\tilde{\nabla}^{*}_{\tilde{W}}\tilde{U})^{V}-\frac{1}{b}<W,U>gradb\right)>gradb+\frac{1}{b}<V,U>D_{W}gradb$$

$$-\frac{1}{b}<W,U>D_{V}gradb$$

$$=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^{V}-\frac{1}{b}<V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^{V}>gradb+\frac{1}{b}<W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^{V}>gradb$$

$$-\frac{1}{b}<W,(\tilde{\nabla}^{*}_{\tilde{V}}\tilde{U})^{V}>gradb+\frac{1}{b^{2}}<V,U><W,gradb>gradb$$

$$+\frac{1}{b}<V,(\tilde{\nabla}^{*}_{\tilde{W}}\tilde{U})^{V}>gradb-\frac{1}{b^{2}}<W,U><V,gradb>gradb$$

$$+\frac{1}{b}<V,U>\left(\frac{gradb(b)}{b}W+\frac{W(f)}{f}gradb\right)$$

$$-\frac{1}{b}<W,U>\left(\frac{gradb(b)}{b}V+\frac{V(f)}{f}gradb\right)$$

$$=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^{V}-\frac{1}{b}<V,(\tilde{\nabla}_{\tilde{W}}\tilde{U})^{V}-(\tilde{\nabla}^{*}_{\tilde{W}}\tilde{U})^{V}>gradb$$

$$+\frac{1}{b}<W,(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}\tilde{U})^{V}-(\tilde{\nabla}^{*}_{\tilde{V}}\tilde{U})^{V}>gradb+\frac{1}{b^{2}}<V,U>gradb(b)W$$

$$+\frac{W(f)}{bf}<V,U>gradb-\frac{1}{b^{2}}<W,U>gradb(b)V$$

$$-\frac{V(f)}{bf}<W,U>gradb$$

(4.3.14) den ve $<W,gradb>=<V,gradb>=0$ olduğundan

$$=(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^{V}-\frac{1}{b}<V,-\tilde{\mathrm{D}}_{1}(\tilde{W},\tilde{U})>gradb$$

$$+\frac{1}{b}<W,-\tilde{\mathrm{D}}_{1}(\tilde{V},\tilde{U})>gradb+\frac{1}{b^{2}}\left[<V,U>W-<W,U>V\right]gradb(b)$$

$$+\frac{1}{b}\left[<V,U>\frac{W(f)}{f}-<W,U>\frac{V(f)}{f}\right]gradb$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^{V} + \frac{f^2}{b^2} g(\tilde{V}, \tilde{\mathrm{D}}_1(\tilde{W},\tilde{U}))gradb - \frac{f^2}{b^2} g(W, \tilde{\mathrm{D}}_1(\tilde{V},\tilde{U}))gradb \\
&+ \frac{1}{bf^2}\left[< V,U > \frac{W(f)}{f} - < W,U > \frac{V(f)}{f} \right] grad_M b \\
&+ \frac{1}{f^2}\left[h(V,U)W - h(W,U)V \right] grad_M b(b) \\
&= (\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^{V} + b\mathrm{C}(\tilde{V},\tilde{W},\tilde{U})gradb - b\mathrm{C}(W,\tilde{V},\tilde{U})gradb \\
&+ \frac{1}{bf^2}\left[< V,U > \frac{W(f)}{f} - < W,U > \frac{V(f)}{f} \right] grad_M b \\
&+ \frac{1}{f^2}\left[h(V,U)W - h(W,U)V \right] grad_M b(b) \,, \qquad \text{C simetrik} \\
&= (\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^{V} + \frac{1}{bf^2}\left[< V,U > \frac{W(f)}{f} - < W,U > \frac{V(f)}{f} \right] grad_M b \\
&+ \frac{1}{f^2}\left[h(V,U)W - h(W,U)V \right] grad_M b(b)
\end{aligned}
$$

dir.

Sonuç 5.2.1: M ve N sırasıyla m >1 ve n >1 diferensiyellenebilir manifold, $b \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}^{+})$ ve $f \in C^{\infty}(N,\mathbb{R}^{+})$ olsun. Eğer $({}_f M \times {}_b N, <,>, D, D^*)$ yapısı eşlenik olarak düzlemsel uzay ise o zaman (M, g, ∇, ∇^*) ya da $(N, h, \tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*)$ yapılarından biri eşlenik olarak düzlemsel iken diğeri sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldudur.

İspat: $({}_f M \times {}_b N, <,>, D, D^*)$ yapısı eşlenik olarak düzlemsel uzay olsun. Önerme 5.2.4 i) ‘den

$$
{}^{B}\mathrm{R}(X,Y)Z \equiv 0
$$

dır. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^{H} &- \frac{1}{fb^2}\left[\frac{X(b)}{b} < Y,Z > - \frac{Y(b)}{b} < X,Z > \right] grad_N f \\
&- \frac{grad_N f(f)}{b^2}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \right] = 0
\end{aligned}
$$

olur. Elde edilen bu eşitlik yatay ve dikey liftlerin bileşenleri olarak ifade edilirse; yatay lifti

$$
(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^{H} - \frac{grad_N f(f)}{b^2}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \right] = 0 \qquad (5.2.5)
$$

iken düşey lifti

$$\frac{1}{fb^2}\left[\frac{X(b)}{b}<Y,Z>-\frac{Y(b)}{b}<X,Z>\right]grad_N f=0 \tag{5.2.6}$$

dir. Şimdi bu iki denklem yardımıyla bazı sonuçlar elde edilecektir.

a) (5.2.6) denkleminden

$$\left[X(b)<Y,Z>-Y(b)<X,Z>\right]grad_N f=0$$

dır. Farz edelim ki $grad_N f\neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}0&=X(b)<Y,Z>-Y(b)<X,Z>\\&=<X(b)Y,Z>-<Y(b)X,Z>\\&=<X(b)Y-Y(b)X,Z>\end{aligned}$$

$\forall Z\in L_H(M)$ için $X(b)Y-Y(b)X=0$

dir. Bu eşitlik b 'nin sabit olduğunu gösterir. *b* sabit ise Önerme 5.2.4 vi) dan

$$(\mathrm{R}(\tilde{V},\tilde{W})\tilde{U})^V=0\ , \qquad \forall\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}\in\chi(N)$$

Bulunan bu eşitlik $(N,h,\tilde{\nabla},\tilde{\nabla}^*)$ yapısının eşlenik olarak düzlemsel olduğunu gösterir. Önerme 5.2.4 ii) den ve *b* sabit olduğundan

$$\frac{H^f(Z,V)}{f}Y=0$$

dir. (4.1.5) denkleminden

$$\frac{h(\tilde{\nabla}_Z grad_N f,V)}{f}Y=0$$

Olmak üzere $\tilde{\nabla}_Z grad_N f=0$ dir. Böylece $grad_N f$ sabit olur. (5.2.5) eşitliğinde

$$(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H=\frac{grad_N f(f)}{b^2}\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right]$$

olduğu biliniyor. $grad_N f=b^2 gradf$ ve $gradf(f)=<gradf,gradf>$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z})^H&=<gradf,gradf>\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right]\\&=\|gradf\|^2\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right], \qquad gradf=sbt\end{aligned}$$

$\forall X,Y,Z\in L_H(M)$ için $\|gradf\|^2$ sabit olduğundan *M* sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldudur.

b) Benzer sonuçlar $grad_N f = 0$ ve $\left[X(b) < Y, Z > -Y(b) < X, Z >\right] grad_N f \neq 0$ kabul ederek (M, g, ∇, ∇^*) yapısının eşlenik olarak düzlemsel, *N* manifoldunun ise sabit kesit eğrilikli Riemann manifoldu olduğu gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Amari S., 1985. Differential-Geometrical methods in statistic, Springer Lectures Notes in Statistics 28.

Amari S., Nagaoka H., 2000. Methods of information geometry, AMS, Oxford University Press, Vol. 191, s. 25-77.

O'Neill B., 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Press, New-York.

Lauritzen S.L., 1987, Statistical Manifolds, Lecture Notes--Monograph Series, Volume 10 Hayward, CA, s. 165-197.

Arwini K.A., Dodson C.T.J., 2008. Information Geometry Near Randomness and Near Independence, Springer, Berlin, s.1-53.

Matsuzoe H., 2006. Geometry of statistical manifolds and its generalization, Proceedings of the 8th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Bulgaria,

Nomizu K., Sasaki T., 1994. Affine Differential Geometry, Cambridge University Press.

Akdeniz, F. 2009. Olasılık ve İstatistik, Nobel Kitabevi, Adana, s.147-158, 239-266.

Vos P. W., 1989. Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the bartlett correction, *Ann. Ins. Statist. Math*. Vol. 41, No. 3, 429-450.

Todjihounde L., 2006. Dualistic structures on warped product manifolds, *Differential Geometry –Dynamical Systems, Geometry Balkan Press*, Vol.8, pp. 278-284.

Chen W.S., 1999. On computing gaussian curvature of some well known distributions, Turning Administrative Systems Into Information Systems,Statistics of Income Division, Baltimore, MD., August.

Ünal, B. 2000. Doubly warped products. *Ph. D. Thesis,* the Faculty of the Graduate School University of Missouri-Columbia, U.S.A.

Nassar H. Abdel-All , H.N. Abd-Ellah, H.M. Moustafa, 2002. Information geometry and statistical manifold, Chaos, Solitons and Fractals 15 (2003) 161–172

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Erkan KORKMAZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bulgaristan - 06.12.1983
Eğitim Durumu(Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Erkek Lisesi - 2002
Lisans	: Ege Üniversitesi - 2008
İletişim(e-posta)	: erkankorkmaz2007@hotmail.com