İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Kısmi diferensiyel denklemler teorisinden de bilindiği gibi reel uzayda eliptik denklemler için Dirichlet ve Neumann adıyla bilinen iki temel sınır değer problemi tanımlanmıştır. Reel uzayda bazı problemlerin çözümleri kompleks diferensiyel denklemlerin çözüm metotları ile aşılmıştır. Mesela

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{0.1}$$

Laplace denkleminin reel uzayda genel çözümü olmadığı halde kompleks uzayda bu denklemin genel çözümü mevcuttur.

Düzlemde birinci mertebeden en basit eliptik sistem Cauchy-Riemann sistemidir. Cauchy-Riemann sistemi kompleks formda

$$w = u + iv, z = x + iy, \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

olmak üzere

$$w_{\bar{z}} = 0 \tag{0.2}$$

dır.

I.N.Vekua (0.2) den daha genel olan

$$w_{\bar{z}} + aw + b\overline{w} = 0 \tag{0.3}$$

formundaki denklemlerle ilgilenmiştir. Daha sonra (0.3) denkleminden daha genel olan Lineer olmayan

$$\partial_{\bar{z}} w = F(z, w, \partial_z w) \tag{0.4}$$

denklemi W.Tutschke tarafından incelenmiştir. En son olarak ise İshak ALTUN, Kerim KOCA ve Binali MUSAYEV tarafından (0.4) denklemi iki metrik kullanılarak incelenmiştir. Biz ise bu çalışmada aynı metotla (0.4) denkleminden elde edilen

$$\begin{aligned} w(z) &= \phi(z) + T_G F(., w(.), h(.))(z) \\ h(z) &= \phi'(z) + \prod\nolimits_G F(., w(.), h(.))(z) \end{aligned}$$

sisteminden daha genel olan

$$\begin{aligned} w(z) &= f_1(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.)))(z) \\ h(z) &= f_2(z, w(z), h(z), \prod\nolimits_G g_2(., w(.), h(.)))(z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} w(z) &= f_1\left(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z), \prod_G g_1(., w(.), h(.))(z)\right) \\ h(z) &= f_2\left(z, w(z), h(z), T_G g_2(., w(.), h(.))(z), \prod_G g_2(., w(.), h(.))(z)\right) \end{aligned}$$

Lineer olmayan singüler integral denklem sistemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini inceleyeceğiz.

BÖLÜM 1

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümde ele alınacak olan lineer olmayan singüler integral denklem sisteminin incelenmesinde temel teşkil eden kavram ve sonuçlar ile ilgili ön bilgiler verilmektedir.

1.1. Metrik Uzaylar

Tanım1.1.1. Boş olmayan bir X kümesi ve

$$d : X\text{x}X \to R_+ ,\quad (x,y) \to d(x,y),\, R_+ = [0,\infty)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x,y,z \in X$ için

$$(M1)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$(M2)\ d(x,y) = d(y,x)$$
$$(M3)\ d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)\ \left(\text{\textit{Üçgen eşitsizliği}}\right)$$

özelliklerini sağlıyorsa, X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır. (X,d) ikilisine metrik uzay adı verilir

Örnek 1.1.2.: $[a,b] \subset R\ (a,b \in R)$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ olsun. $f,g \in C[a,b]$ için

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [a,b]\}$$

şeklinde tanımlanan $d_\infty : C[a,b]\text{x}C[a,b] \to R_+$ dönüşümü $C[a,b]$ üzerinde bir metriktir.

(Musayev ve Alp. 2000)

Örnek 1.1.3.: $1 \le p < \infty$ olmak üzere $f,g \in C[a,b]$ için

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(s) - g(s)|^p\, ds \right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $d_p : C[a,b]\text{x}C[a,b] \to R_+$ dönüşümü $C[a,b]$ üzerinde bir metrik ve dolayısıyla $(C[a,b], d_p)$ bir metrik uzaydır. (Musayev ve Alp. 2000)

Tanım1.1.4.: $f:[a,b]\to R, (-\infty<a<b<\infty)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her bir $t_1,t_2\in[a,b]$ için

$$|f(t_1)-f(t_2)|\le A|t_1-t_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde $A>0$ ve $\alpha\in(0,1]$ sayıları varsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Hölder koşulunu sağlar denir. A tek olmadığından $\inf A$ sayısına Hölder katsayısı , α sayısına ise Hölder üssü denir. $[a,b]$ üzerinde α üssü ile Hölder koşulunu sağlayan bütün fonksiyonların kümesi $C^{(\alpha)}[a,b]$ (veya kısaca $C^{(\alpha)}$) ile gösterilir.

$C^{(\alpha)}([a,b])\subset C[a,b]$ olduğu açıktır. $\alpha_1<\alpha_2$ ise $C^{(\alpha_2)}([a,b])\subset C^{(\alpha_1)}([a,b])$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Fakat bunun tersi doğru olmayabilir. Örneğin, herhangi $t_1,t_2\in[0,1]$ için $\left|t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}\right|\le|t_1-t_2|^{\alpha}$, $(0<\alpha<1)$ olduğundan $u(t)=t^{\alpha}\in C^{(\alpha)}([0,1])$

olur. Öte yandan herhangi $t\in[0,1]$ için

$$|u(t)-u(0)|=t^{\alpha}$$

olduğundan $\alpha'\in(\alpha,1)$ sayısı için $t\to 0$ iken

$$|u(t)-u(0)|t^{-\alpha'}=t^{\alpha-\alpha'}\to\infty$$

dolayısıyla $u\notin C^{(\alpha_1)}([0,1])$ dir.

$C^{(\alpha)}([a,b]), (0<\alpha\le 1)$ kümesi verilsin. $u\in C^{(\alpha)}([a,b])$ için

$$H(u,\alpha)=\sup\left\{|u(t_1)-u(t_2)|\,|t_1-t_2|^{-\alpha} : t_1,t_2\in[a,b]\right\}$$

olsun. $u,v\in C^{(\alpha)}([a,b])$ için

$$d(u,v)=d_{\infty}(u,v)+H(u-v,\alpha) \tag{1.1.1}$$

şeklinde tanımlanan d: $C^{(\alpha)}([a,b])\text{x}\,C^{(\alpha)}([a,b])\to R_+$ dönüşümünün $C^{(\alpha)}([a,b])$ üzerinde metrik olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.1.5.: Bir (X,d) metrik uzayı, $x_0\in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin.

$$S_r(x_0)=\{x\in X: d(x,x_0)<r\}$$
$$\overline{S_r}(x_0)=\{x\in X: d(x,x_0)\le r\}$$

ve

$$\sigma_r(x_0)=\{x\in X : d(x,x_0)=r\}$$

kümelerine sırasıyla x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi denir. $S_r(x_0)$ açık yuvarına $x_0\in X$ noktasının bir komşuluğu(r-komşuluğu), $\overset{0}{S}_r(x_0)=S_r(x_0)/\{x_0\}$ kümesine de $x_0\in X$ noktasının delinmiş komşuluğu(delinmiş r-komşuluğu) denir.

(X,d) metrik uzayı, $A\subset X$ alt kümesi ve $x\in X$ noktası verilsin. Eğer $\forall r>0$ için $\overset{0}{S}_r(x_0)\cap A\neq \phi$ ise x noktasına A nın bir limit noktası denir. $A\subset X$ kümesinin bütün limit noktalarından oluşan A' kümesi ile A nın noktalarından oluşan kümeye A nın kapanışı adı verilir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $A=\overline{A}$ ise A kümesine X de kapalı bir küme adı verilir. $B\subset X$ ve $x\in B$ olsun. $S_r(x)\subset B$ olacak şekilde $r>0$ sayısı varsa, x noktasına B nin bir iç noktası denir ve B'nin iç noktalarının kümesi $\overset{0}{B}$ ile gösterilir. $B=\overset{0}{B}$ ise B kümesine X de açık küme denir.

Tanım1.1.6.: (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $f:N\to X$ fonksiyonuna X de (veya X içinde) bir dizi adı verilir ve $f(n)=f(x_n)$ ile gösterilir. (n_k), N içinde $n_k<n_{k+1}$, k=1,2,… ve $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=\infty$ koşullarını sağlayan herhangi bir dizi olmak üzere $(x_{n_k}), k\in N$ dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 1.1.7.: (X,d) metrik uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0\in X$ olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0$ ise, başka bir deyişle, eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\exists n_0\in N \ni \forall n>n_0$ için $d(x_n,x_0)<\varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$$x_n\to x_0 \text{ ya da } \lim_{n\to\infty} x_n=x_0$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.8.: (X,d) bir metrik uzay ve A, X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$d(A)=\sup\{d(x,y): x,y\in A\}$$

sayısına A kümesinin çapı denir. $d(A) < \infty$ ise A'ya X'de sınırlı bir küme denir. X içindeki (x_n) dizisinin terimlerinden oluşan küme X' de sınırlı ise (x_n) dizisine X'de sınırlı bir dizi denir.

Tanım 1.1.9.: (X,d) bir metrik uzay ve X içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m,n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $n_\varepsilon \in N$ sayısı varsa (x_n) dizisine X içinde bir Cauchy dizisi denir. *(Musayev ve Alp, 2000)*

Teorem 1.1.10.: Aşağıdaki önermeler doğrudur:

(a) Metrik uzay içindeki yakınsak her dizi Cauchy dizisidir.

(b) Metrik uzay içindeki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

(c) Bir (X,d) metrik uzayında bir (x_n) Cauchy dizisi $x \in X$
noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahipse (x_n) dizisi de x'e yakınsar.

(d) (X,d) metrik uzay olmak üzere (x_n) ve (y_n) X içinde birer Cauchy dizisi ise $(d(x_n, y_n))$ reel sayı dizisi yakınsaktır. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım 1.1.11.: Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir.

Örnek 1.1.12.: $(C[a,b], d_\infty)$ uzayı tamdır. (Musayev ve Alp, 2000)

Lemma 1.1.13.: $u, v \in C^{(\alpha)}([a,b])$ için $d(u,v) = d_\infty(u,v) + H(u - v, \alpha)$ olmak üzere $C^{(\alpha)}([a,b])$ metrik uzayı tamdır.

İspat: $C^{(\alpha)}([a,b])$ içinde bir Cauchy dizisi (f_n) olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in N$ öyle ki $n \geq n_\varepsilon, m \geq n_\varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall n, m \in N$ için

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon \tag{1.1.2}$$

olur. Şu halde (1.1.1)'e göre $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ için

$$d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon \tag{1.1.3}$$

olur. $(C[a,b], d_\infty)$ uzayı tam olduğundan $\exists f_0 \in C[a,b]$ öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty\left(f_n, f_0\right) = 0 \tag{1.1.4}$$

dır.

$f_0 \in C^{(\alpha)}([a,b])$ olduğunu gösterelim. (f_n) dizisi $C^{(\alpha)}([a,b])$ içinde bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır, yani $\exists M > 0$ sayısı vardır ki

$$d(f_n, \theta) \leq M \text{ , } n=,2,...$$

dir. O zaman her $t_1, t_2 \in [a,b]$ noktaları ve $\forall n \in N$ için

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limite geçilirse (1.1.4)'e göre

$$|f_0(t_1) - f_0(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu ve dolayısıyla $f_0 \in C^{(\alpha)}([a,b])$ olduğu görülür. Şimdi $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(f_n, f_0\right) = 0$ olduğunu gösterelim.

(1.1.2)' ye göre herhangi $t_1, t_2 \in [a,b]$ noktaları ve $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ sayıları için

$$H\left(f_n - f_m; \alpha\right) < \varepsilon$$

veya

$$\left|f_n(t_1) - f_m(t_1) - [f_n(t_2) - f_m(t_2)]\right| < |t_1 - t_2|^\alpha$$

olur. Bu eşitsizlikte sabit $n \geq n_\varepsilon$ için $m \to \infty$ iken limite geçersek $\forall n \geq n_\varepsilon$ sayısı ve $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ noktaları için ((1.1.4)'e göre $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(t) = f_0(t)$ olduğundan)

$$\left|f_n(t_1) - f_0(t_1) - [f_n(t_2) - f_0(t_2)]\right| \leq \varepsilon|t_1 - t_2|^\alpha \tag{1.1.5}$$

olduğu elde edilir. (1.1.4) ve (1.1.5) ten $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(f_n, f_0\right) = 0$ olduğu ve dolayısıyla $\left(C[a,b], d_\infty\right)$ metrik uzayının tam olduğu görülür.

Tanım 1.1.14.: (X, d) metrik uzay ve $E \subset X$ kümesi verilsin. E içindeki her dizinin, limiti E den olan yakınsak bir alt dizisi varsa, E kümesine X' de kompakt küme adı verilir. X kompakt küme ise (X, d) metrik uzayına kompakt metrik uzay adı verilir.

Tanım 1.1.15.: (X,d) metrik uzayında açık kümelerin bir ailesi $D=(D_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ olsun. Eğer bir $E\subset X$ kümesi için $E\subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Omega} D_\lambda$ oluyorsa D ailesine E kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer $\Omega_0\subset\Omega$ sonlu ve $E\subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Omega_0} D_\lambda$ ise $D_0=\bigcup\limits_{\lambda\in\Omega_0} D_\lambda$ ailesine *E* kümesinin sonlu bir alt örtüsü adı verilir. *E* kümesini örten *D* ailesinin her kümesinin çapı $\varepsilon\succ 0$ sayısından büyük değilse *D* örtüsüne *E* kümesinin ε örtüsü denir.

Tanım 1.1.16.: (X,d) metrik uzayı ve $E\subset X$ kümesi verilsin. Eğer $\forall\varepsilon>0$ sayısı için *E* kümesinin sonlu ε örtüsü varsa *E* kümesine *X*'de tamamen sınırlı bir küme denir. Tamamen sınırlı bir kümenin sınırlı olduğu açıktır.

Teorem 1.1.17.: (Hausdorff) (X,d) metrik uzay ve $E\subset X$ kümesi verilmiş olsun. *E*'nin *X*'de kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon>0$ için *E* nin sonlu ε örtüsünün var olmasıdır. (Musayev ve Alp, 2000)

Sonuç 1.1.18.: (X,d) tam metrik uzayının her kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır. (Musayev ve Alp, 2000)

Teorem 1.1.19.: Kompakt (X,d) metrik uzayı tamdır. *(Musayev ve Alp, 2000)*

Tanım 1.1.20.: $(C([a,b]),d_\infty)$ metrik uzayı ve $E\subset C[a,b]$ alt kümesi verilsin.

(*a*) Eğer $\forall f\in E$ ve $\forall t\in[a,b]$ için $|f(t)|\le M$ olacak şekilde
bir $M>0$ sayısı varsa *E* kümesi düzgün sınırlıdır.

(*b*) Eğer $\forall f\in E$ ve $\forall\varepsilon>0$, $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ için
$|t_1-t_2|<\delta \Rightarrow |f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)$ sayısı varsa, *E* kümesinin elemanları aynı dereceden düzgün süreklidir denir.

Teorem 1.1.21.: (Arzela-Ascoli) Kapalı ve sınırlı $[a,b]\subset R$ aralığı ve $C[a,b]$ uzayının bir *E* alt kümesi verilsin. *E* kümesinin $C[a,b]$ de kompakt olması için gerek ve yeter koşul *E* nin düzgün sınırlı ve elemanlarının da aynı dereceden düzgün sürekli olmasıdır.

Örnek 1.1.22.: $M>0$ olmak üzere $\left(C^{(\alpha)}([a,b]),d\right)$ Hölder uzayının $C^{(\alpha)}(M)=\left\{x\in C^{(\alpha)}([a,b]):d(x,\theta)\le M\right\}=\overline{S_M}(\theta)$ kapalı kümesi $(C[a,b],d_\infty)$'de kompakt bir kümedir.

Gerçekten, $\forall f \in C^{(\alpha)}(M)$ için

$$d(f,\theta) = d_\infty(f,\theta) + H(f;\alpha) \le M$$

olduğundan, $\forall f \in C^{(\alpha)}(M)$ ve $\forall t \in [a,b]$ için $|f(t)| \le M$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/\alpha}$ alırsak, $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ve $\forall f \in C^{(\alpha)}(M)$ için $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \le M|t_1 - t_2|^\alpha < M\delta^\alpha = \varepsilon$ olur. Dolayısıyla $C^{(\alpha)}(M)$ kümesi $(C[a,b], d_\infty)$'de düzgün sınırlı ve aynı dereceden süreklidir. Buradan da Teorem 1.1.21 gereğince $C^{(\alpha)}(M)$'nin $(C[a,b], d_\infty)$'de kompakt bir küme olduğu görülür.

Teorem 1.1.19 ve Örnek 1.1.22 den aşağıdaki lemmanın doğruluğu görülür.

Lemma 1.1.23.: $C^{(\alpha)}(M)$ kümesi $(C[a,b], d_\infty)$ uzayının tam alt uzayıdır. $u, v \in C^{(\alpha)}(M)$ için

$$d_2(u,v) = \left(\int_a^b |u(t) - v(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan $d_2 : C^{(\alpha)}(M) \mathrm{x} C^{(\alpha)}(M) \to R_+$ dönüşümünün bir metrik olduğu açıktır.

Lemma 1.1.24.: $(C^{(\alpha)}(M), d_2)$ metrik uzayı tamdır.

İspat: (f_n), $(C^{(\alpha)}(M), d_2)$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. Lemma 1.1.23' e göre

$$\lim_{n\to\infty} d_2(f_n, f_0) = \lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f_0) = 0$$

olacak şekilde bir $f_0 \in C^{(\alpha)}(M)$ fonksiyonu vardır. Buradan $f_0 \in L_2[a,b]$ ve $\lim_{n\to\infty} d_2(f_n, f_0) = 0$ olduğu elde edilir.

Lemma 1.1.25.: $C^{(\alpha)}(M)$ kümesinde d_∞ ve d_2 metriklerine göre yakınsamalar denktir.

İspat: $u_0, u_n \in C^{(\alpha)}(M)$, n=1,2,…olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(u_n, u_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_2(u_n, u_0) = 0$$

olduğu açıktır. Bu sonucun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. $x, x+h \in [a,b]$ ve $f \in C^{(\alpha)}(M)$ olsun. $h > 0$ için

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt + \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[f(x) - f(t)]dt$$

ve $h < 0$ için

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)dt + \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}[f(x) - f(t)]dt$$

olduğundan $\forall x \in [a,b]$ ve $h \neq 0$ için

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{|h|}} d_2(f, \theta) + \frac{M}{1+\alpha} h^{\alpha}$$

olduğu elde edilir.

$u_0, u_n \in C^{(\alpha)}(M)$, ($n$=1,2,…) ve $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(u_n, u_0) = 0$ olsun. Yeteri kadar büyük n ler için sonuncu eşitsizlikte $h = d_2(u_n, u_0)$ alırsak

$$|u_n(x) - u_0(x)| \leq d_2^{1/2}(u_n, u_0) + \frac{2M}{1+\alpha} d_2^{\ \alpha}(u_n, u_0)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty} d_2(u_n, u_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_\infty(u_n, u_0) = 0$$

olduğu anlaşılır.

1.2. Normlu Uzaylar

Tanım1.2.1.: X boş olmayan bir küme ve K cismi R veya C olsun.

$$+ : X\text{x}X \to X,\ (x,y) \to x+y$$
$$. : K\text{x}X \to X,\ (\alpha,\text{x}) \to \alpha x$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x,y,z \in X$ ve $a,b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın.

1. $x+y=y+x$
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$
3. Her $x \in X$ için $x+\theta=\theta+x=x$

eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in X$ (sıfır elemanı) vardır.

4. Her $x \in X$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$

eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır.

5. Her $x \in X$ için $1.x = x$;
6. $a(x+y)=ax+ay$
7. $(a+b)x=ax+bx$
8. $(ab)x=a(bx)$

Bu durumda X kümesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. K=R alınırsa X'e bir reel vektör uzayı, $K=C$ alınırsa X'e bir kompleks vektör uzayı adı verilir.

Vektör uzayı tanımından şu basit sonuçları elde edebileceğimiz kolayca görülür.

(a) Her $x \in X$ için $0.x=\theta$;
(b) Her $a \in K$ için $a.\theta=\theta$;
(c) $(-1).x=-x$;
(d) $x \neq \theta$ olmak üzere $a.x=b.x$ ise $a=b$;
(e) $a \neq 0$ ve $a.x=a.y$ ise $x=y$;
(f) $y,z \in X$ vektörleri verildiğinde $x+y=z$ denkleminin tek bir $x=z-y \in X$ çözümü vardır

Tanım 1.2.2: X bir vektör uzayı ve Y, X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Y, X vektör uzayındaki işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa , Y ye X in bir alt uzayı denir.

Tanım 1.2.3: *X* bir vektör uzayı olmak üzere $x_1, x_2, ... x_n \in X$ verilsin. $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$$

şeklindeki bir toplama $x_1, x_2, ..., x_n$ nin bir lineer kombinasyonu denir.

$$\phi \neq M \subset X$$

ise *M* den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine *M* nin gereni(*Span*) denir ve *Span M* ile gösterilir. *Span M*, *X* in bir alt uzayıdır ve bu alt uzaya *M* nin ürettiği alt uzay denir. $M = \phi$ ise *Span M*=θ olur.

Tanım 1.2.4.: *X* bir vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \subset X$ olsun. $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$ =0 eşitliği ancak ve ancak

$$a_1 = a_2 = ... a_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlıdır denir.

Tanım1.2.5.: *X* bir vektör uzayı ve *M*, *X*'in boş olmayan bir alt kümesi için

1. *M* lineer bağımsızdır.
2. *X=Span M*

ise *M* ye *X* in bir tabanı veya bir bazı denir.

Eğer $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, *X* in bir tabanı ise her $x \in X$ vektörü $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$ şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

Eğer *X* vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa *X*'e sonlu boyutlu bir vektör uzayı, aksi halde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı denir. Sonlu boyutlu bir *X* vektör uzayının bir tabanındaki vektörlerin sayısına *X*'in boyutu denir ve *Boy X* ile gösterilir.

Tanım 1.2.6: Y_1 ve Y_2 X vektör uzayının iki alt uzayı olsun. Eğer $\forall x \in X$ elemanı $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ olmak üzere $x = y_1 + y_2$ şeklinde tek bir gösterime sahipse, X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 uzaylarının direkt toplamıdır denir ve $X = Y_1 \oplus Y_2$ olarak yazılır. Y_2'ye Y_1'in (ya da Y_1'e Y_2'nin) cebirsel tümleyeni denir.

Eğer Y_1 ve Y_2, *X* vektör uzayının iki alt uzayı ise

$$Y = \{y_1 + y_2 : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\}$$

olmak üzere

$$Boy(Y_1 + Y_2) = BoyY_1 + BoyY_2 - Boy(Y_1 \cap Y_2)$$

dir. Bu durumda

$$Boy(Y_1 \oplus Y_2) = BoyY_1 + BoyY_2$$

olduğu açıktır.

Eğer X_1 ve X_2 aynı cisim üzerinde tanımlı vektör uzayı ise $x_1, y_1 \in X_1$ ve $x_2, y_2 \in X_2$ vektörleri üzerindeki cebirsel işlemleri

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$$

şeklinde tanımlarsak $X = X_1 \mathrm{x} X_2$ kartezyen çarpımı bir vektör uzayına dönüştürülür.

$X_1, X_2, ..., X_n$ aynı cisim üzerinde tanımlı vektör uzaylarının kartezyen çarpımı

$X_1 \mathrm{x} X_2 \mathrm{x} ... \mathrm{x} X_n$

ye bu çarpım üzerinde cebirsel işlemler aşikar biçiminde tanımlanır.

$X_1 = X_2 = ... = X_n = X$

çarpımı X^n ile gösterilir.

Bir X vektör uzayının Bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$M = \{y \in X : y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2, 0 \le \lambda \le 1\} \subset Y$

oluyorsa Y alt kümesi dışbükeydir (konvekstir) denir.

Herhangi bir D kümesi ve bir X vektör uzayı verilsin. Tanım kümesi D ve görüntü kümesi X'in bir alt kümesi olan bütün fonksiyonlar kümesi

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), (\alpha f)(t) = \alpha f(t), t \in D, a \in K \quad (1.2.1)$$

cebirsel işlemleri altında bir vektör uzayı oluşturur ve *E(D;X)* ile gösterilir. Farklı D kümeleri ve farklı X vektör uzayları durumunda çeşitli *E(D;X)* vektör uzayları elde edilir.

Örnek 1.2.7.: $C([a,b];R)$ uzayı $D = [a,b]$ ve $X = C[a,b]$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (1.2.1) işlemleri altında reel bir vektör uzayı oluşturan reel değerli bütün fonksiyonlar kümesi olsun. Bu durumda $C([a,b];R) = E([a,b];C[a,b])$ reel bir vektör uzayıdır. Benzer şekilde, $C([a,b];C)$ kompleks vektör uzayı tanımlanır.

Eğer X vektör uzay metrik uzay ise X'e lineer metrik uzay adı verilir.

Tanım 1.2.8.: X bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun**.**

$$\|.\| : X \to R_+ , x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$(N1)\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$(N2)\|ax\| = |a|\,\|x\|$

$(N3)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçğen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X,\|.\|)$ ikilisin e bir normlu vektör uzayı denir. *(N1)-(N3)* özelliklerine norm aksiyomları denir.

$(X,\|.\|)$ normlu bir uzay olmak üzere

$$d : X\text{x}X \to R_+ , d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğu kolayca görülür. Gerçekten, $\forall x, y, z \in X$ için

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \theta \Rightarrow x = y,$$
$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1|\,\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x),$$

ve *(N3)* aksiyomundan dolayı

$$\begin{aligned} d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

olduğundan d, X üzerinde bir metriktir. Böylece, $\forall(X,\|.\|)$ normlu uzaydan bir (X,d) metrik uzayı elde edilebilir. Bu yolla elde edilen d metriğine $\|.\|$ normunun indirgediği metrik denir.

Lemma 1.2.9.: $(X,\|.\|)$ normlu bir uzay, $x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ ve $a \in K$ olsun. Bu durumda

$(a)\,\forall x, y, z \in X$ için $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (d nin öteleme özelliği)

$(b)\,d(ax, ay) = |a|\,d(x, y)$ (d' nin mutlak homojenlik özelliği)

özellikleri doğrudur.

Tanım 1.2.10.: $(X,\|.\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$x_n \to x_0$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama adı verilir.

Bir normlu uzay $(X,\|.\|)$ ve bunun bir alt kümesi A olsun.

$d(A) = \sup\{\|x-y\| : x \in A, y \in A\} \geq 0$

sayısına A kümesinin çapı denir. Eğer bir $A \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine sınırlı küme denir. X içindeki (x_n) dizisine karşılık gelen noktalar kümesi sınırlı ise (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 1.2.11.: $(X,\|.\|)$normlu bir uzay ve bu uzay içinde bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m,n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'a bağlı bir n_ε bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Lemma 1.2.12.: (X,d) bir metrik uzay ve d metriği öteleme ve mutlak homojenlik özelliklerine sahip olsun. O halde $x \in X$ için $\|x\| = d(x,\theta)$ olmak üzere (X,d)ve $(X,\|.\|)$ uzaylarının topolojik yapıları aynıdır, yani (X,d) $(X,\|.\|)$ içinde her yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi $(X,\|.\|)$ (X,d) içinde surasıyla yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım1.2.13.: Bir $(X,\|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X,\|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Örnek 1.2.14.: $(C[a,b],K)$ uzayı $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ normuna göre Banach uzayıdır. (Musayev ve Alp, 2000)

Örnek 1.2.15.: $C^{(\alpha)}[a,b](0 < \alpha \leq 1)$ uzayı $\|f\|_\alpha = d(f,\theta) = \|f\|_\infty + H(f;\alpha)$ normuna göre bir Banach uzayıdır. (Musayev ve Alp, 2000)

Örnek 1.2.16.:(Riesz-Fischer Teoremi) $L_p(E), 1 \leq p < \infty$ vektör uzayı, $f \in L_p(E)$ için

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım 1.2.17.: *X* ve *Y* boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. *D*'nin her elemanına *Y*'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala *D*'den *Y*'ye bir operatör veya dönüşüm denir. *A* operatörünün *x'*e karşılık getirdiği eleman *A(x)* ile gösterilir. *A* operatörünün $x \in D$'yi, $A(x) \in Y$ ye götürdüğünü belirtmek için $A : D \to Y$ gösterimi kullanılır. (Bu gösterim, *D* yi *Y* ye gönderen *A* operatörü veya *A*, *D*'den *Y*'ye şeklinde okunur).

Bu durumda *D* ye *A* operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle *D(A*) ile gösterilir.

$$R = R(A) = \{y \in Y : y = A(x), x \in D(A)\}$$

kümesine *A* operatörünün değer(veya görüntü) kümesi denir. *A* operatörünün yaptığı bu işlem

$$X \supset D(A) \xrightarrow{A} R(A) \subset Y$$

şeklinde veya kısaca $A : X \to Y$ biçiminde gösterilir. Bu gösterimde $D(A) \neq X$ veya $R(A) \neq Y$ olabilir.

Tanım 1.2.18.: *X,Y,Z* kümeleri ve $A : X \to Y, B : Y \to Z$ operatörleri verilsin. $R(A) \subset D(B)$ ise $\forall x \in X$ için $A(x) \in Y$ olduğundan

$$B(A(x)) \in Z$$

dir. *X* den Z'ye $(BA)(x) = B(A(x)), x \in D(A)$ ile tanımlı operatöre *B* ile *A*'nın bileşkesi denir ve *BA* ile gösterilir. Hatta *AB* operatörünün tanımlı olması (bu yalnız *Z*=*X* olması halinde geçerlidir.) durumunda da genellikle $AB \neq BA$ olur.

Tanım 1.2.19.: $A : X \to Y$ operatörü için *A(X)=Y* oluyorsa, *A* operatörüne örten veya surjektif, aksi halde içine operatör adı verilir. Buna göre eğer *A* örten bir operatör ise $\forall y \in Y$ için *A(x)=y* olacak şekilde $x \in X$ vardır.

Tanım 1.2.20.: $A : X \to Y$ operatörü için herhangi $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2)$$

ya da buna eşdeğer olarak

$$A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

oluyorsa *A* operatörüne birebir veya injektif operatör denir.

Tanım 1.2.21.: Hem birebir hem de örten olan operatöre birebir örten veya bijektif operatör denir.

Tanım1.2.22.: X ve Y metrik uzayları ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakiler sağlandığında A operatörü $x_0 \in D(A)$ noktasında süreklidir denir.

(a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni \forall x \in D(A)$ için $d_X(x, x_0) < \delta$ iken $d_Y(A(x), A(x_0)) < \varepsilon$ dir.

(b) $x_0 \in D(A)$ noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(A)$ için $\lim\limits_{n \to \infty} A(x_n) = A(x_0)$ $\left(\text{veya} \lim\limits_{n \to \infty} d_Y(A(x), A(x_0)) = 0\right)$ dır.

Tanım 1.2.23.: Eğer $A: X \to Y$ operatörü *D(A)* nın her noktasında sürekli ise, A operatörü *D(A)* üzerinde süreklidir denir.

Tanım 1.2.24.: X ve Y normlu uzayları ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. A operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart Y uzayında açık (veya kapalı) $\forall F \subset R(A)$ kümesi için $A^{-1}(F) \subset D(A)$ kümesinin X uzayında açık(veya kapalı) bir küme olmasıdır.

Tanım 1.2.25.: X ve Y normlu uzaylar ve A tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü *D(A)*'nın *X*'de sınırlı her kümesine *R(A)*'nın *Y*'de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa A operatörüne sınırlı bir operatör adı verilir.

Tanım1.2.26.: X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, *X*'in bir alt uzayı, $\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ ise A operatörüne lineer operatör denir.

Teorem 1.2.27.: $A: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. A tek bir noktada sürekli ise, her noktada süreklidir. (Musayev ve Alp, 2000)

Tanım1.2.28.: $A: X \to Y$ bir lineer operatörü verildiğinde $\forall x \in D(A)$ için

$$\|A(x)\| \leq c\|x\| \tag{1.2.2}$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörü *D(A)* üzerinde sınırlıdır denir.(1.2.2) eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sayılarının en küçük alt sınırına $A: X \to Y$ sınırlı lineer operatörünün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

$$\|A\| = \inf\{c > 0 : \forall x \in D(A) \text{için} \|A(x)\| \leq c\|x\|\}$$

1.3. Banach Sabit Nokta ve Schauder Prensipleri.

Tanım1.3.1.: Bir (X,d) metrik uzayı, $D \subset X$ kapalı kümesi ve $A: D \to D$ operatörü (veya dönüşümü) verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in D$ için

$$d(Ax, Ay) \le \alpha d(x,y) \qquad (1.3.1)$$

olacak şekilde $0 \le \alpha < 1$ sayısı varsa $A: D \to D$ operatörüne daralma operatörü(daralma dönüşümü) denir.

$$Ax^* = x^*$$

olacak şekilde $x^* \in D$ vektörüne $A: D \to D$ operatörünün sabit noktası denir.

Teorem 1.3.2.: (Metrik Uzaylarda Daralma Dönüşümü Prensibi)

(X,d) tam metrik uzayının $D \subset X$ kapalı kümesinde $A: D \to D$ daralma operatörünün tek bir $x^* \in D$ sabit noktası vardır ve her bir $x_0 \in D$ başlangıç noktası için

$$x_n = Ax_{n-1}, n = 1,2,... \qquad (1.3.2)$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi (iterasyon prosesi) x^* vektörüne yaklaşır ve (x_n) dizisinin x^*'a yakınsama hızı

$$d(x_n, x^*) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) \qquad (1.3.3)$$

eşitsizliği ile verilir. (Musayev ve Alp, 2000)

İspat: $x_{n+1} = Ax_n, x_n = Ax_{n-1}, n = 1,2,...$ olduğundan (1.3.1)'e göre

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Ax_n, Ax_{n-1}) \le \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

dir. Benzer eşitsizlikler sırayla kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\le d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\le (\alpha^{n+p-1} + ... + \alpha^n) d(x_1, x_0) \qquad (1.3.4) \\ &= \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

dir. $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ olduğundan son eşitsizliğe göre (x_n) dizisi Cauchy dizisidir. X tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

olacak şekilde bir $x^* \in X$ vektörü vardır. $\forall n = 0,1,2,...$ için $x_n \in D$ ve D kapalı olduğundan $x^* \in D$ dir. (1.3.1)'e göre

$$d\left(x_{n+1}, Ax^*\right) = d\left(Ax_n, Ax^*\right) \le \alpha d\left(x_n, x^*\right), n = 0,1,2,...$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x^*\right) = 0$$

olduğuna göre $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n+1}, Ax^*\right) = 0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = Ax^*$ dır. Buradan $x^* = Ax^*$, yani $x^* \in D$ vektörü $x=Ax$ denkleminin bir çözümüdür. Bunun tek bir çözüm olduğunu gösterelim. $y^* \in D$ vektörü de $x=Ax$ denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\left\|x^* - y^*\right\| = \left\|Ax^* - Ay^*\right\| \le \alpha \left\|x^* - y^*\right\|$$

dır ve dolayısıyla $\left\|x^* - y^*\right\|$=0, yani $x^* = y^*$ olur. (1.3.4) eşitsizliğinde $p \to \infty$ iken limite geçersek (1.3.3) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 1.3.3.: *A* operatörü (*X*,*d*) tam metrik uzayında tanımlı ve $A(X) \subset X$ olsun. Eğer *A* operatörü *X* üzerinde daralma operatörü ise, *A* operatörünün tek bir $x^* \in D$ sabit noktası vardır ve her başlangıç $x_0 \in D$ vektörü için (1.3.2) şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi x^* vektörüne (1.3.3) hızla yaklaşır. (Musayev ve Alp, 2000)

Sonuç 1.3.4.: (*X*,*d*) tam metrik uzayının $\overline{S_r}(a) = \{x \in X : d(x,a) \le r\}$ kapalı yuvarında tanımlı $A : \overline{S_r}(a) \to X$ operatörü verilmiş olsun. *A* operatörü $\overline{S_r}(a)$ üzerinde daralma operatörü ve $d(Aa, a) \le (1-\alpha)r$ ise *A* operatörünün tek bir $x^* \in \overline{S_r}(a)$ sabit noktası vardır. Her $x_0 \in \overline{S_r}(a)$ başlangıç vektörü için (1.3.2) şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi x^* vektörüne (1.3.3) hızla yaklaşır. (Musayev ve Alp, 2000)

Şimdi sabit nokta prensibinin (Teorem 1.3.2) aşağıdaki değiştirilmiş formunun ispatını verelim.

Teorem 1.3.5.: (X, d') bir kompakt metrik uzayı verilmiş olsun. Eğer

(a) X üzerinde öyle d'' metriği tanımlanmıştır ki X içinde d' metriğine göre yakınsak her (x_n) dizisi d'' metriğine göre de yakınsaktır.

(b) $A : X \to X$ operatörü d'' metriğine göre daralma dönüşümüdür, yani $\forall x, y \in X$ için

$$d''(Ax, Ay) \le l d''(x, y)$$

olacak şekilde $0 \le l < 1$ sayısı vardır; koşulları sağlanıyorsa *x=Ax* denkleminin tek çözümü ardışık yaklaşımlar yöntemi ile bulunabilir. Ardışık yaklaşımlar d' metriğine göre yakınsaktır.

İspat: Banach sabit nokta prensibinin uygulanabilmesi için (X, d') metrik uzayının d'' metriğine göre de tam olduğunu gösterelim. (x_n), X içinde d'' metriğine göre bir Cauchy dizisi olsun. (X, d') metrik uzayı kompakt olduğuna göre (x_n) dizisinin d' metriğine göre yakınsayan (x_{n_k}) alt dizisi vardır.

d' metriğine göre $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, yani $\lim\limits_{k\to\infty} d'(x_{n_k}, x_0) = 0$ olsun. Teoremin (a) hipotezine göre $\lim\limits_{k\to\infty} d''(x_{n_k}, x_0) = 0$ yazabiliriz.

$$d''(x_k, x_0) \le d''(x_k, x_{n_k}) + d''(x_{n_k}, x_0)$$

eşitsizliğinde $k \to \infty$ iken limite geçersek,

$$\lim_{k\to\infty} d''(x_k, x_{n_k}) = 0$$

$((x_n), d''$metriğetr göre bir Cauchy dizisi olduğldu göre$)$ ve

$$\lim_{k\to\infty} d''(x_{n_k}, x_0) = 0$$

olduğuna göre $\lim\limits_{k\to\infty} d''(x_k, x_0) = 0$ olduğu ve dolayısıyla (x_n) dizisinin d'' metriğine göre yakınsak olduğu anlaşılır. Bu da (X, d'') metrik uzayının tam olduğunu gösterir.

$x = Ax$ denkleminin çözümü x_0^* olsun. $x_0 \in X, x_n = Ax_{n-1}, n = 1,2,...$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} d'(x_n, x_0^*) = 0 \tag{1.3.5}$$

olduğunu gösterelim. $\forall n \in N$ için

$$d''(x_n, x_0^*) = d''(Ax_{n-1}, Ax_0^*) \le l d''(x_{n-1}, x_0^*) \le l^2 d''(x_{n-2}, x_0^*) \le ... \le l^n d''(x_0, x_0^*)$$

eşitsizliği doğru olduğundan ve $\lim\limits_{n\to\infty} l^n = 0$ olduğuna göre

$$\lim_{n\to\infty} d''(x_n, x_0^*) = 0 \tag{1.3.6}$$

elde edilir.

(x_n)dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} d'(x_n, x_0^*) \ne 0$ olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin

$$d'(x_{n_k}, x_0^*) \ge d \tag{1.3.7}$$

olacak şekilde (x_{n_k}) bir alt dizisi ve bir $d > 0$ sayısı vardır. (X, d') metrik uzayı kompakt olduğundan (x_{n_k}) dizisinin d' metriğine göre yakınsak $(x_{n_{k_m}})$ alt dizisi vardır.

$\lim_{m\to\infty} x_{n_{k_m}} = \widetilde{x}_0^*$

yani

$$\lim_{m\to\infty} d'\left(x_{n_{k_m}}, \widetilde{x}_0^*\right) = 0 \qquad (1.3.8)$$

olsun. $x_0^* = \widetilde{x}_0^*$ olduğunu gösterelim.

d' üzere yakınsamadan d'' üzere yakınsama çıktığından (1.3.8)'e göre

$$\lim_{m\to\infty} d''\left(x_{n_{k_m}}, \widetilde{x}_0^*\right) = 0 \qquad (1.3.9)$$

olur. (1.3.6) den dolayı

$$\lim_{m\to\infty} d''\left(x_{n_{k_m}}, x_0^*\right) = 0 \qquad (1.3.10)$$

dır. (1.3.9) ve (1.3.10) den $\widetilde{x}_0^* = x_0^*$ olduğu, yani

$$\lim_{m\to\infty} d'\left(x_{n_{k_m}}, x_0^*\right) = 0 \qquad (1.3.11)$$

olduğu elde edilir.

(1.3.7) eşitsizliğinde (x_{n_k}) dizisi yerine onun $(x_{n_{k_m}})$ alt dizisini alırsak

$$d'\left(x_{n_{k_m}}, x_0^*\right) \geq d \qquad (1.3.12)$$

olduğu elde edilir. (1.3.11) ve (1.3.12) dan d=0 olduğu anlaşılır. Bu ise $d \succ 0$ olması ile çelişki olduğundan $\lim_{n\to\infty} d'\left(x_n, x_0^*\right) \neq 0$ olması yanlıştır. Demek ki $\lim_{n\to\infty} d'\left(x_n, x_0^*\right) = 0$ dır. (Hüseynov ve Muhtarov,1980)

Teorem 1.3.6: *A* operatörü *X* normlu uzayından *Y* normlu uzayına lineer olsun. *A* operatörü *D*(*A*) üzerinde sürekli ve *D*(*A*)içinde her sınırlı alt kümeye *Y* nin kompakt bir kümesini karşılık getiriyorsa *A* ya tamamen sürekli bir operatör denir. (Musayev ve Alp. 2000)

Teorem 1.3.7:*A* operatörü *X* normlu uzayının dışbükey *D* alt kümesini kendisine dönüştürür ve *A* operatörü *D* üzerinde tamamen sürekli ise onun *D* üzerinde sabit noktası vardır. (Musayev ve Alp. 2000)

NOT: İspatlanmış teoremde *A* operatörü d' metriğine göre bir daralma dönüşümü olmayabilir.

BÖLÜM 2

BELLİ TİPTEN LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

2.1 Giriş

$G \subset C$ düzgün sınırlı (Yani çapı $d = d(G) = \sup\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in \overline{G}\} < \infty$) olan basit bağlantılı bir bölge olsun. Bilindiği gibi

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= H_1(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) \\ u_y + v_x &= H_2(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

formundaki reel kısmi türevli denklem sistemi

$$\partial_{\bar{z}} w = F(z, w, \partial_z w) \tag{2.1.2}$$

kompleks kısmi türevli denkleme eşdeğerdir. Burada

$$w = u + iv, z = x + iy, \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

dir.

(2.1.2) denkleminin

$$\operatorname{Re} w \updownarrow_{\partial G} = g(z), g \in C^{(\alpha)}(\partial G) \tag{2.1.3}$$

$$\operatorname{Im} w(z_0) = c_0, z_0 \in \overline{G} \tag{2.1.4}$$

Dirichlet sınır şartlarını sağlayan çözümünün varlığı Tutschke W.1976 tarafından çalışıldı.

(2.1.2) deki F fonksiyonu

$$D = \{(z, w, h) : z \in \overline{G}, w, h \in C\} = G\text{x}C^2 \tag{2.1.5}$$

bölgesi üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $f \in C^{(\alpha)}(\overline{G})$ için

$$\begin{aligned} T_G f(z) &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \\ \Pi_G f(z) &= -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \qquad \varsigma = \xi + i\eta \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

İ.N.Vekua integral operatörlerini göz önüne alalım. Bu durumda (2.1.2) denkleminin çözümü problemi $h_z = \partial_z w$ olmak üzere

$$\begin{aligned} w(z) &= \phi(z) + T_G F(.,w(.),h(.))(z) \\ h(z) &= \phi'(z) + \prod\nolimits_G F(.,w(.),h(.))(z) \end{aligned} \qquad (2.1.7)$$

lineer olmayan singüler integral denklem sisteminin çözümünün bulunması problemine dönüştürülür. Burada $\phi(z)$, G üzerinde tanımlı keyfi holomorf bir fonksiyondur.

W.Tutschke tarafından (2.1.7) denklem sistemi Schauder ve Banach sabit nokta Prensipleri yardımıyla incelendiğinde $F : D \to C, D = GxC^2, G \subset C$

$F(z,w,h)$ fonksiyonunun w ve h değişkenlerine göre kimsi türevlerinin varlıgı ve bu kimsi türevlerin z'ye göre Hölder koşulunu, w ve h değişkenlerine göre ise Lipschitz koşulunu sağlaması istenmektedir. W.Tutschke'nin koymuş olduğu bu koşulun gerekli olmadığı Altun,I., K.,Koca, B.,Musayev (2006) tarafından yazılmış makalede ortaya konmuştur. Bununla ilgili olarak

$$F(z,w,h) = \left| z^{\alpha} - w - h \right|$$

olmak üzere bu fonksiyonun W.Tutschke'nin şartı sağlanmadan çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. İleride ele alacağımız (2.1.8) ve (2.1.9) denklem sistemlerinin de incelenmesinde bu düşünceler dikkate alınmıştır.

Bu çalışmada daha genel olan

$$\begin{aligned} w(z) &= f_1(z, w(z), h(z), T_G g_1(.,w(.),h(.)))(z) \\ h(z) &= f_2(z, w(z), h(z), \prod\nolimits_G g_2(.,w(.),h(.)))(z) \end{aligned} \qquad (2.1.8)$$

ve

$$\begin{aligned} w(z) &= f_1(z, w(z), h(z), T_G g_1(.,w(.),h(.))(z), \prod\nolimits_G g_1(.,w(.),h(.))(z)) \\ h(z) &= f_2(z, w(z), h(z), T_G g_2(.,w(.),h(.))(z), \prod\nolimits_G g_2(.,w(.),h(.))(z)) \end{aligned} \qquad (2.1.9)$$

lineer olmayan singüler integral denklem sisteminin çözümü için f_1, f_2, g_1, g_2 fonksiyonlarının sağlaması gereken şartlar incelenecektir.

2.2 (2.1.8) Denklem Sistemi İçin Varlık ve Teklik Teoremleri

$C(\overline{G})$, $\overline{G}$ üzerindeki sürekli bütün fonksiyonların sınıfı olsun. $w \in C(\overline{G})$ için

$$\|w\|_\infty = \|w\|_{C(\overline{G})} = \max_{\overline{G}} \left\{ |w(z)| : z \in \overline{G} \right\}$$

tanımıyla $C(\overline{G})$ vektör uzayı bir Banach uzayıdır. $\overline{G}$ üzerindeki Hölder sürekli bütün fonksiyonların sınıfını $C^{(\alpha)}(\overline{G})(0 < \alpha \le 1)$ ile gösterelim. $w \in C^{(\alpha)}(\overline{G})$ için

$$H(w,\alpha) = \sup\left\{ |w(z_1) - w(z_2)| |z_1 - z_2|^{-\alpha} : z_1 \ne z_2, z_1, z_2 \in \overline{G} \right\}$$

olmak üzere

$$\|w\|_\alpha \equiv \|w\|_{C^{(\alpha)}(\overline{G})} = \|w\|_\infty + H(w,\alpha)$$

tanımıyla $C^{(\alpha)}(\overline{G})$ vektör uzayı bir Banach uzayıdır. $\overline{G}$ üzerinde tanımlı, z ve $\overline{z}$ değişkenlerine göre birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip Hölder sürekli bütün fonksiyonların sınıfı $C^{(1,\alpha)}(\overline{G})$ ile gösterilir. Bu sınıf $w \in C^{(1,\alpha)}(\overline{G})$ için

$$\|w\|_{1,\alpha} \equiv \|w\|_{C^{(1,\alpha)}(\overline{G})} = \max\left\{ \|w\|_\alpha, \|\partial_z w\|_\alpha, \|\partial_{\overline{z}} w\|_\alpha \right\}$$

normuyla bir Banach uzayı olur. Ayrıca

$$C^2(\overline{G}) = C(\overline{G}) \mathrm{x} C(\overline{G}) = \left\{ (w,h) : w,h \in C(\overline{G}) \right\}$$
$$C^{(\alpha,2)}(\overline{G}) = C^{(\alpha)}(\overline{G}) \mathrm{x} C^{(\alpha)}(\overline{G}) = \left\{ (w,h) : w,h \in C^{(\alpha)}(\overline{G}) \right\}$$

vektör uzayları sırasıyla

$$\|(w,h)\|_{\infty,2} \equiv \|(w,h)\|_{C^2(\overline{G})} = \max\left\{ \|w\|_\infty, \|h\|_\infty \right\}$$
$$\|(w,h)\|_{\alpha,2} \equiv \|(w,h)\|_{C^{(\alpha,2)}(\overline{G})} = \max\left\{ \|w\|_\alpha, \|h\|_\alpha \right\}$$

normlarıyla birer Banach uzayı olurlar. Bu uzaylar sırasıyla

$$\left(C^2(\overline{G}), \|(.,.)\|_{\infty,2} \right) \text{ve} \left(C^{(\alpha,2)}(\overline{G}), \|(.,.)\|_{\alpha,2} \right)$$

ile gösterilir.

$L_p(\overline{G}) = \left\{ f : \iint_G |f(z)|^p \, dxdy < \infty \right\}$, $1 \le p < \infty$ göz önüne alalım. $w \in L_p(\overline{G})$ için bu sınıftaki norm

$$\|w\|_p \equiv \|w\|_{L_p(\overline{G})} = \left(\iint_G |w(\zeta)|^p \, d\xi d\eta \right)^{1/p}$$

olarak tanımlanır.

$L_p{}^2(\overline{G}) = L_p(\overline{G}) \mathrm{x} L_p(\overline{G})$ olmak üzere $(w,h) \in L_p{}^2(\overline{G})$ için norm

$$\|(w,h)\|_{p,2} \equiv \|(w,h)\|_{L_p{}^2(\overline{G})} = \max\{\|w\|_p, \|h\|_p\}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.2.1.: Eğer $(w,h) \in C^{(\alpha,2)}(\overline{G}), 0 < \alpha < 1$ ise bu takdirde $1 < p < \infty$ ve $0 < \varepsilon \le \dfrac{d}{2}$ için

$$\|(w,h)\|_{\infty,2} \le 2.\varepsilon^{\alpha} \|(w,h)\|_{\alpha,2} + \frac{1}{\left(\pi\varepsilon^2\right)^{1/p}} \|(w,h)\|_{p,2} \qquad (2.2.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $w \in C^{(\alpha)}(\overline{G}), 0 < \alpha < 1$ fonksiyonu ve herhangi bir $t \in G$ noktası verilsin. t, G nin bir iç noktası olduğundan $B(t,\varepsilon) = \{z \in G : |z - t| < \varepsilon\} \subset G$ olacak şekilde $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{d}{2}\right)$ sayısı vardır.

$$w(t) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint_{B(t,\varepsilon)} w(\zeta) d\xi d\eta + \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint_{B(t,\varepsilon)} [w(t) - w(\zeta)] d\zeta d\eta$$

$w \in C^{(\alpha)}(\overline{G})$ olduğundan herhanği $1 < p < \infty$ sayısı için

$$\begin{aligned} |w(t)| &\le \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint_{B(t,\varepsilon)} |w(\zeta)| d\xi d\eta + \frac{H(w,\alpha)}{\pi\varepsilon^2} \iint_{B(t,\varepsilon)} |\zeta - t|^{\alpha} d\xi d\eta \\ &\le \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \left(\iint_{B(t,\in)} |w(\zeta)|^p d\xi d\eta \right)^{1/p} \left(\iint_{B(t,\varepsilon)} d\xi d\eta \right)^{1/q} + \varepsilon^{\alpha} H(w,\alpha) \\ &\le \frac{1}{\left(\pi\varepsilon^2\right)^{1-1/q}} \|w\|_p + \varepsilon^{\alpha} \|w\|_{\alpha} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada q, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan bir sayıdır.

$t \in \partial G$ olsun. Bu durumda $t_0 \in B(t,\varepsilon) \cap G$ olacak şekilde G nin içinde en az bir t_0 noktası vardır. O halde $w \in C^{(\alpha)}(\overline{G})$ olmak üzere son elde edilen eşitsizlik $t_0 \in G$ için de geçerli olduğundan

$$
\begin{aligned}
|w(t)| &\le |w(t)-w(t_0)| + |w(t_0)| \\
&\le H(w,\alpha)|t-t_0|^{\alpha} + \frac{1}{\left(\pi\varepsilon^2\right)^{1/p}}\|w\|_p + \varepsilon^{\alpha}\|w\|_{\alpha} \\
&\le 2.\varepsilon^{\alpha}\|w\|_{\alpha} + \frac{1}{\left(\pi\varepsilon^2\right)^{1/p}}\|w\|_p
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Demek ki $w \in C^{(\alpha)}\left(\overline{G}\right), 0<\alpha<1$ fonksiyonu ve herhangi $0<\varepsilon\le d$ ve $1<p<\infty$ için

$$\|w\|_{\infty} \le 2\varepsilon^{\alpha}\|w\|_{\alpha} + \frac{1}{\left(\pi\varepsilon^2\right)^{1/p}}\|w\|_p \tag{2.2.2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $h \in C^{(\alpha)}\left(\overline{G}\right), 0<\alpha<1$ fonksiyonu için de herhangi $0<\varepsilon\le d$ ve $1<p<\infty$ için

$$\|h\|_{\infty} \le 2\varepsilon^{\alpha}\|h\|_{\alpha} + \frac{1}{\left(\pi\varepsilon^2\right)^{1/p}}\|h\|_p \tag{2.2.3}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilebilir. (2.2.2) ve (2.2.3) eşitsizliklerinden (2.2.1) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. (Altun ve ark. 2006)

Teorem 2.2.2.: Herhangi $(w,h) \in C^{(\alpha,2)}\left(\overline{G}\right), 0<\alpha<1$ ve $1 \prec p \prec \infty$ için

$$\|(w,h)\|_{\infty,2} \le M(\alpha,p)\|(w,h)\|_{\alpha,2}^{\frac{2}{2+\alpha p}}\|(w,h)\|_{p}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$
\begin{aligned}
&m(\alpha,p) = \left(\alpha p\sqrt[p]{\pi}\right)^{-\frac{p}{2+\alpha p}}, M_1(\alpha,p) = 2m^{\alpha}(\alpha,p) + \left(\pi m^2(\alpha,p)\right)^{-\frac{1}{p}} \\
&M_2(\alpha,p) = \frac{2\sqrt[p]{4}}{\sqrt[p]{4}-1}m^{\alpha}(\alpha,p)
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$M(\alpha,p) = \max\{M_1(\alpha,p), M_2(\alpha,p)\}$$

dir.

İspat: $A = \|(w,h)\|_{\infty,2}, B = \|(w,h)\|_{\alpha,2}$ ve $C = \|(w,h)\|_{p,2}$ olmak üzere (2.2.1) den

$$A \le 2\varepsilon^{\alpha}B + \frac{\varepsilon^{-2/p}}{\sqrt[p]{\pi}}C \tag{2.2.5}$$

yazılır. $\varepsilon \in (0,\infty)$ için

$$r(\varepsilon) = 2B\varepsilon^{\alpha} + \frac{C}{\sqrt[p]{\pi}}\varepsilon^{-2/p}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\varepsilon_* = m(\alpha, p)B^{-\frac{p}{2+\alpha p}}C^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}}$$

olmak üzere

$$\min\{r(\varepsilon) : 0 < \varepsilon < \infty\} = r(\varepsilon_*) = M_1(\alpha, p)B^{\frac{2}{2+\alpha p}}C^{\frac{p}{2+\alpha p}} \tag{2.2.6}$$

olduğu açıktır. Eğer $0 < \varepsilon_* \le d$ ise (2.2.5) ve (2.2.6) dan

$$\|(w,h)\|_{\infty,2} \le M_1(\alpha, p)\|(w,h)\|_{\alpha,2}^{\frac{2}{2+\alpha p}}\|(w,h)\|_{p,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \tag{2.2.7}$$

yazılabilir. Şimdi $d < \varepsilon_*$ olsun. Bu durumda mG, G bölgesinin alanı olmak üzere

$$C = \|(w,h)\|_{p,2} \le \|(w,h)\|_{\infty,2}(mG)^{1/p} \le \sqrt[p]{\frac{\pi}{4}}d^{2/p}A$$

olduğunu dikkate aldığımızda (2.2.5) den

$$A \le 2Bd^{\alpha} + \frac{d^{-2/p}}{\sqrt[p]{\pi}}C$$

ve buradan da

$$A \le 2Bd^{\alpha} + \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$$

veya

$$A \le \frac{2\sqrt[p]{4}}{\sqrt[p]{4}-1}Bd^{\alpha}$$

olduğu anlaşılır. O halde

$$\begin{aligned} A &\le \frac{2\sqrt[p]{4}}{\sqrt[p]{4}-1}B\varepsilon_*^{\alpha} \\ &= \frac{2\sqrt[p]{4}}{\sqrt[p]{4}-1}m^{\alpha}(\alpha, p)B^{\frac{2}{2+\alpha p}}C^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\|(w,h)\|_{\infty,2} \le M_2(\alpha, p)\|(w,h)\|_{\alpha,2}^{\frac{2}{2+\alpha p}}\|(w,h)\|_{p,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \tag{2.2.8}$$

olur. (2.2.7) ve (2.2.8) den (2.2.4) eşitsizliğinin geçerli olduğu gözükür. (Altun ve ark. 2006)

Tanım 2.2.3.: $\overline{D} = G\text{x}C^3$ olmak üzere $h:\overline{D} \to C$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $(z_1, p_1, q_1, r_1), (z_2, p_2, q_2, r_2) \in \overline{D}$ için

$$\begin{aligned} &\left|h(z_1, p_1, q_1, r_1) - h(z_2, p_2, q_2, r_2)\right| \le l_1 |z_1 - z_2|^\alpha \\ &+ l_2 |p_1 - p_2| + l_3 |q_1 - q_2| + l_4 |r_1 - r_2| \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde l_1, l_2, l_3, l_4 pozitif sabitleri varsa h fonksiyonuna $\overline{D}$ üzerinde $H_{\alpha,1,1,1}(l_1, l_2, l_3, l_4; \overline{D})$ sınıfındandır denir ve $h \in H_{\alpha,1,1,1}(l_1, l_2, l_3, l_4; \overline{D})$ yazılır.

Tanım 2.2.4: $\overline{D_1} = \overline{G}\text{x}C^2$ olmak üzere $h^*:\overline{D_1} \to C$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $(z_1, p_1, q_1), (z_2, p_2, q_2) \in \overline{D_1}$ için

$$\begin{aligned} &\left|h^*(z_1, p_1, q_1) - h^*(z_2, p_2, q_2)\right| \le m_1 |z_1 - z_2|^\alpha \\ &+ m_2 |p_1 - p_2| + m_3 |q_1 - q_2| \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde m, m_2, m_3 sabitleri varsa h^* fonksiyonuna $\overline{D_1}$ üzerinde $H_{\alpha,1,1}(m_1, m_2, m_3; \overline{D_1})$ sınıfındandır ve $h^* \in H_{\alpha,1,1}(m_1, m_2, m_3, \overline{D_1})$ yazılır. (Altun ve ark. 2006)

$u \in C^{(\alpha)}(\overline{G})(0 < \alpha < 1)$ için $z = x + iy$ ve $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$T_G u(.)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \Pi_G u(.)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

alışılmış Vekua integral operatörleri verilsin.

Sınırlı (*Tutschke* 1983), $T_G, \Pi_G : C^{(\alpha)}(\overline{G}) \to C^{(\alpha)}(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$ operatörleri için

$$\begin{aligned} \|T_G\|_\alpha &= \sup\left\{\|T_G w\|_\alpha : w \in C^{(\alpha)}(\overline{G}), \|w\|_\alpha < 1\right\} \\ \|\Pi_G\|_\alpha &= \sup\left\{\|\pi_G w\|_\alpha : w \in C^{(\alpha)}(\overline{G}), \|w\|_\alpha < 1\right\} \end{aligned}$$

olsun.

Lemma 2.2.5.: $f_k \in H_{\alpha,1,1,1}(l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}, l_{k4}; \overline{D}), g_k \in H_{\alpha,1,1}(m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}; \overline{D_1})$ $(k = 1,2)$, $\theta = (0,0)$ fonksiyon çifti ve $S_\alpha(\theta, R) = \left\{(w,h) : \|(w,h)\|_{\alpha,2} \le R\right\}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} l_{0k} &= \max\left\{|f_k(z,0,0,0)| : z \in \overline{G}\right\}, \\ m_{ok} &= \max\left\{|g_k(z,0,0)| : z \in \overline{G}\right\}, \\ K_1 &= l_{01} + l_{11} + 2(l_{12} + l_{13})R + 2l_{14}\left[m_{01} + 2m_{11} + 2(m_{12} + m_{13})R\right]\|T_G\|_\alpha, \\ K_2 &= l_{02} + l_{21} + 2(l_{22} + l_{23})R + 2l_{24}\left[m_{02} + 2m_{21} + 2(m_{22} + m_{23})R\right]\|\Pi_G\|_\alpha \end{aligned}$$

olmak üzere $\max\{K_1, K_2\} \le R$ ise

$$A : C^{(\alpha,2)}\left(\overline{G}\right) \to C^{(\alpha,2)}\left(\overline{G}\right), 0 < \alpha < 1$$
$$(w,h) \to A(w,h) = \left(\widetilde{w}, \widetilde{h}\right)$$
$$\widetilde{w}(z) = f_1\left(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z)\right)$$
$$\widetilde{h}(z) = f_2\left(z, w(z), h(z), \prod\nolimits_G g_2(., w(.), h(.))(z)\right)$$

operatörü $S_\alpha(\theta, R)$ küresini kendi içine dönüştürür.

İspat:

$$\left|\widetilde{w}(z)\right| = \left|f_1\left(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z)\right)\right|$$
$$\le \left|f_1\left(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z)\right) - f_1\left(z,0,0,T_G g_1(.,0,0)(z)\right)\right| +$$
$$\left|f_1\left(z,0,0,T_G g_1(.,0,0)(z)\right) - f_1(z,0,0,0)\right| + \left|f_1(z,0,0,0)\right|$$

(2.2.9) eşitsizliğinden

$$\le l_{12}|w(z)| + l_{13}|h(z)| + l_{14}\left|T_G\left[g_1(., w(.), h(.))(z) - g_1(.,0,0)(z)\right]\right|$$
$$+ l_{14}\left|T_G g_1(.,0,0)(z)\right| + \left|f_1(z,0,0,0)\right|$$

$$\le l_{12}|w(z)| + l_{13}|h(z)| + l_{14}\|T_G\|_\alpha \left\|g_1(., w(.), h(.)) - g_1(.,0,0)\right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)}$$
$$+ l_{14}\|T_G\|_\alpha \left\|g_1(.,0,0)\right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)} + l_{01} \tag{2.2.11}$$

olur. Şimdi

$$\left\|g_1(., w(.), h(.)) - g_1(.,0,0)\right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)}$$

ifadesini sınırlandırmaya çalışalım.

Her $z, z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$\left|g_1(z, w(z), h(z)) - g_1(z,0,0)\right| \le m_{12}|w(z)| + m_{13}|h(z)| \le (m_{12} + m_{13})R \tag{2.2.12}$$

ve

$$\left|\left[g_1(., w(.), h(.)) - g_1(.,0,0)\right](z_1) - \left[g_1(., w(.), h(.)) - g_1(.,0,0)\right](z_2)\right|$$
$$= \left|g_1(z_1, w(z_1) h(z_1)) - g_1(z_2, w(z_2) h(z_2)) - \left[g_1(z_1,0,0) - g_1(z_2,0,0)\right]\right|$$

(2.2.10) eşitsizliğinden

$$\le m_{11}|z_1 - z_2|^\alpha + m_{12}|w(z_1) - w(z_2)| + m_{13}|h(z_1) - h(z_2)| + m_{11}|z_1 - z_2|^\alpha$$
$$\le 2m_{11}|z_1 - z_2|^\alpha + m_{12}\|w\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{G}\right)}|z_1 - z_2|^\alpha + m_{13}\|h\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{G}\right)}|z_1 - z_2|^\alpha$$
$$\le \left[2m_{11} + (m_{12} + m_{13})R\right]|z_1 - z_2|^\alpha \tag{2.2.13}$$

(2.2.12) ve (2.2.13) eşitsizliklerinden

$$\left\|g_1(., w(.), h(.)) - g_1(.,0,0)\right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)} \le 2\left[m_{11} + (m_{12} + m_{13})R\right] \tag{2.2.14}$$

olur.

Şimdi

$$\left\| g_1(.,0,0) \right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)}$$

için bir sınırlandırma bulmaya çalışalım. Herhangi $z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$\begin{aligned} \left| g_1(.,0,0)(z_2) - g_1(.,0,0)(z_1) \right| &= \left| g_1(z_2,0,0) - g_1(z_1,0,0) \right| \\ &\leq m_{11} \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\| g_1(.,0,0) \right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)} \leq m_{11} + m_{01} \qquad (2.2.15)$$

olur. (2.2.14) ve (2.2.15) eşitsizliklerini (2.2.11) de kullanırsak her $z \in \overline{G}$ için

$$\left| \widetilde{w}(z) \right| \leq l_{01} + (l_{12} + l_{13})R + l_{14}\left[m_{01} + 3m_{11} + 2(m_{12} + m_{13})R \right] \left\| T_G \right\|_{\alpha}$$

elde edilir.

Şimdi $H(\widetilde{w}, \alpha)$ Hölder sabitini bulmaya çalışalım. Her $z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$\begin{aligned} &\left| \widetilde{w}(z_1) - \widetilde{w}(z_2) \right| \leq \\ &\left| f_1(z_1, w(z_1), h(z_1), T_G g_1(., w(.), h(.))(z_1)) - f_1(z_2, w(z_2), h(z_2), T_G g_1(., w(.), h(.))(z_2)) \right| \\ &\leq l_{11}\left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha} + l_{12}\left| w(z_1) - w(z_2) \right| + l_{13}\left| h(z_1) - h(z_2) \right| \\ &+ l_{14}\left| T_G\left[g_1(., w(.), h(.))(z_1) - g_1(., w(.), h(.))(z_2) \right] \right| \\ &\leq \left[l_{11} + (l_{12} + l_{13})R \right] \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha} + l_{14}\left\| T_G \right\|_{\alpha} \left\| g_1(., w(.), h(.)) \right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)} \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha} \end{aligned}$$

olur. $\forall z, z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$\left| g_1(z_1, w(z_1), h(z_1)) - g_1(z_2, w(z_2), h(z_2)) \right| \leq \left[m_{11} + (m_{12} + m_{13})R \right] \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha}$$

olduğundan

$$\left\| g_1(., w(.), h(.)) \right\|_{C^{(\alpha)}\left(\overline{D_1}\right)} \leq m_{01} + m_{11} + 2(m_{12} + m_{13})R$$

yazılır. O halde $\forall z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$\left| \widetilde{w}(z_2) - \widetilde{w}(z_1) \right| \leq \left[l_{11} + (l_{12} + l_{13})R + l_{14}\left\| T_G \right\|_{\alpha} (m_{01} + m_{11} + 2(m_{12} + m_{13})R) \right] \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha}$$

veya

$$H(\widetilde{w}, \alpha) \leq \left[l_{11} + (l_{12} + l_{13})R + l_{14}\left\| T_G \right\|_{\alpha} (m_{01} + m_{11} + 2(m_{12} + m_{13})R) \right]$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$K_1 = l_{01} + 2(l_{12} + l_{13})R + l_{11} + 2l_{14}(m_{01} + 2m_{11} + 2(m_{12} + m_{13})R) \left\| T_G \right\|_{\alpha}$$

olmak üzere

$$\|\tilde{w}\|_{\alpha} \leq K_1$$

olur. Benzer şekilde

$$K_2 = l_{02} + 2(l_{22} + l_{23})R + l_{11} + 2l_{24}(m_{02} + 2m_{21} + 2(m_{22} + m_{23})R)\|\Pi_G\|_{\alpha}$$

olmak üzere

$$\|\tilde{h}\|_{\alpha} \leq K_2$$

olduğu gösterilebilir. Buna göre

$$\|(\tilde{w}, \tilde{h})\|_{\alpha,2} = \max\left\{\|\tilde{w}\|_{\alpha}, \|\tilde{h}\|_{\alpha}\right\} \leq \max\{K_1, K_2\}$$

olur. Eğer

$$\max\{K_1, K_2\} \leq R$$

ise

$$\|(\tilde{w}, \tilde{h})\|_{\alpha,2} \leq R$$

yani

$A(w,h) = (\tilde{w}, \tilde{h}) \in S_{\alpha}(\theta, R)$ olduğu anlaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$(w,h), (\overline{w}, \overline{h}) \in C^{\alpha,2}(\overline{G}), 0 < \alpha < 1$ ve $1 \leq p \prec \infty$ için

$$d_{\infty,2}\left[(w,h),(\overline{w},\overline{h})\right] = \max\left\{\|w - \overline{w}\|_{\infty}, \|h - \overline{h}\|_{\infty}\right\},$$
$$d_{p,2}\left[(w,h),(\overline{w},\overline{h})\right] = \max\left\{\|w - \overline{w}\|_{p}, \|h - \overline{h}\|_{p}\right\},$$

biçiminde tanımlanan $d_{\infty,2}, d_{p,2} : C^{\alpha,2}(\overline{G}) \to [0,\infty)$ dönüşümleri $C^{\alpha,2}(\overline{G}), 0 < \alpha < 1$ üzerinde metrik oldukları ve dolayısıyla $\left(C^{\alpha,2}(\overline{G}), d_{\infty,2}\right)$ ve $\left(C^{\alpha,2}(\overline{G}), d_{p,2}\right)$ uzaylarının birer metrik uzay oldukları açıktır.

Lemma 2.2.6.: $S_{\alpha}(\theta, R)$ küresi $\left(C^{\alpha,2}(\overline{G}); \|(.,.)\|_{\infty,2}\right)$ uzayında kompakt bir kümedir.

İspat: Herhangi $(w,h) \in S_{\alpha}(\theta, R)$ için $\|(w,h)\|_{\infty,2} \leq R$ ve herhangi $\varepsilon > 0$ için $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{1/\alpha}$ olarak alırsak $\forall z_1, z_2 \in \overline{G}$ için $|z_1 - z_2| < \delta$ iken

$$|(w(z_1), h(z_1)) - (w(z_2), h(z_2))| \leq R|z_1 - z_2|^{\alpha} < \varepsilon$$

olur. Buradan $S_\alpha(\theta,R)$ kümesinin düzgün sınırlı ve elemanlarının da aynı dereceden düzgün sürekli olduğu anlaşılır. Bu da Arzela-Ascoli teoremi gereğince $S_\alpha(\theta,R)$ küresinin $\left(C^{\alpha,2}(\overline{G}),\|(.,.)\|_{\infty,2}\right)$ uzayının kompakt bir kümesi olması demektir. (Altun ve ark. 2006)

Sonuç 2.2.7: $S_\alpha(\theta,R)$ küresi $\left(C^{\alpha,2}(\overline{G}),\|(.,.)\|_{\infty,2}\right)$ uzayının tam alt uzayıdır.

Lemma 2.2.8: $0<\alpha<1$ ve $1\le p<\infty$ olsun. Bu takdirde $S_\alpha(\theta,R)$ küresi üzerinde $d_{\infty,2}$ ve $d_{p,2}$ metriklerine göre yakınsamalar eşdeğerdir.

İspat: (w_0,h_0) ve $(w_n,h_n)\in S_\alpha(\theta,R)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} d_{\infty,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]=0$

olsun. $(n=1,2,...)$. Bu durumda mG, G bölgesinin alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right] &= \max\left\{\|w_n-w_0\|_p,\|h_n-h_0\|_p\right\} \\ &\le (mG)^{1/p} d_{\infty,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right] \end{aligned}$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\lim_{n\to\infty} d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]=0$$

elde ederiz.

Şimdi bu iddianın tersinin de doğru olduğunu gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty} d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]=0$$

olsun. (2.2.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|(w_n,h_n),(w_0,h_0)\|_{\infty,2} &= \|w_n-w_0,h_n-h_0\|_{\infty,2} \\ &\le M(\alpha,p)\|w_n-w_0,h_n-h_0\|_{\alpha,2}^{\frac{2}{2+\alpha p}}\|w_n-w_0,h_n-h_0\|_{p,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \\ &\le (2R)^{2/2+\alpha p} M(\alpha,p)\|w_n-w_0,h_n-h_0\|_{p,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \end{aligned}$$

veya

$$d_{\infty,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]\le (2R)^{2/2+\alpha p} M(\alpha,p) d_{p,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]$$

yazılabilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]=0$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} d_{\infty,2}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]=0$$

anlaşılır. (Altun ve ark.2006)

$T_G, \Pi_G : L_p(\overline{G}) \to L_p(\overline{G}), 1 < p < \infty$ operatörleri için

$$\|T_G\|_{L^p(\overline{G})} = \|T_G\|_p = \sup\left\{\|T_G w\|_p : w \in C^{(\alpha)}(\overline{G}), \|w\|_p < 1\right\}$$

$$\|\Pi_G\|_{L^p(\overline{G})} = \|\Pi_G\|_p = \sup\left\{\|\Pi_G w\|_\alpha : w \in C^{(\alpha)}(\overline{G}), \|w\|_p < 1\right\}$$

şeklinde tanımlayalım. (Altun ve ark. 2006)

Lemma 2.2.9: $f_k \in H_{\alpha,1,1,1}(l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}, l_{k4}; \overline{D})$,

$g_k \in H_{\alpha,1,1}(m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}; \overline{D_1})$ $(k = 1,2), (0 < \alpha < 1)$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda Lemma 2.2.5 de tanımlanan A operatörü için

$\forall (w_1, h_1), (w_2, h_2) \in S_\alpha(\theta, R)$ için

$$d_{p,2}[A(w_1, h_1), A(w_2, h_2)] \le M_3(p) d_{\infty,2}[(w_1, h_1), (w_2, h_2)] \qquad (2.2.17)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$M_3(p) = (mG)^{1/p} \max\left\{l_{12} + l_{13} + l_{14}(m_{12} + m_{13})\|T_G\|_p, l_{22} + l_{23} + l_{24}(m_{22} + m_{23})\|\Pi_G\|_p\right\}$$

dir.

İspat: $\forall (w_1, h_1), (w_2, h_2) \in S_\alpha(\theta, R)$ ve $\forall z \in \overline{G}$ için

$$\|A(w_1, h_1) - A(w_2, h_2)\|_{p,2} = \left\|(\widetilde{w}_1, \widetilde{h}_1) - (\widetilde{w}_2, \widetilde{h}_2)\right\|_{p,2}$$

$$= \max\left\{\|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}_2\|_p, \left\|\widetilde{h}_1 - \widetilde{h}_2\right\|_p\right\} \qquad (2.2.18)$$

olduğundan $\|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}_2\|_p$ ve $\left\|\widetilde{h}_1 - \widetilde{h}_2\right\|_p$ normlarını değerlendirelim. $\forall z \in \overline{G}$ için

$$|\widetilde{w}_1(z) - \widetilde{w}_2(z)| = |f_1(z, w_1(z), h_1(z), T_G g_1(., w_1(.), h_1(.))(z)) -$$
$$f_1(z, w_2(z), h_2(z), T_G g_1(., w_2(.), h_2(.))(z))|$$

$$\le l_{12}|w_1(z) - w_2(z)| + l_{13}|h_1(z) - h_2(z)| + l_{14}|T_G(g_1(., w_1(.), h_1(.)) - g_1(., w_2(.), h_2(.)))(z)|$$

olduğundan Minkowski eşitsizliği ve $g_1 \in H_{\alpha,1,1}(m_{11}, m_{12}, m_{13}; \overline{D_1})$ gereğince

$$\left(\iint_{\ddot{U}} \left| \tilde{w}_1(z) - \tilde{w}_2(z) \right|^p dxdy \right)^{1/p} \leq$$

$$\left\{ \iint_G \left[l_{12} |w_1(z) - w_2(z)| + l_{13} |h_1(z) - h_2(z)| + l_{14} \left| T_G \left(g_1(.,w_1(.),h_1(.)) - g_1(.,w_2(.),h_2(.)) (z) \right) \right|^p dxdy \right\}^{1/p}$$

$$\leq l_{12} \|w_1 - w_2\|_p + l_{13} \|h_1 - h_2\|_p + l_{14} \|T_G\|_p \|g_1(.,w_1(.),h_1(.)) - g_1(.,w_2(.),h_2(.))\|_p$$

$$\leq l_{12} \|w_1 - w_2\|_p + l_{13} \|h_1 - h_2\|_p + l_{14} \|T_G\|_p \left(m_{12} \|w_1 - w_2\|_p + m_{13} \|h_1 - h_2\|_p \right)_p$$

$$\leq \left[l_{12} + l_{13} + l_{14} (m_{12} + m_{13}) \|T_G\|_p \right] \max \left\{ \|w_1 - w_2\|_p , \|h_1 - h_2\|_p \right\}$$

$$\leq (mG)^{1/p} \left[l_{12} + l_{13} + l_{14} (m_{12} + m_{13}) \|T_G\|_p \right] d_{\infty,2} [(w_1,h_1),(w_2,h_2)]$$

olduğundan

$$\|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2\|_p \leq (mG)^{1/p} \left[l_{12} + l_{13} + l_{14} (m_{12} + m_{13}) \|T_G\|_p d_{\infty,2} [(w_1,h_1),(w_2,h_2)] \right] \quad (2.2.19)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\left\| \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 \right\|_p \leq (mG)^{1/p} \left[l_{22} + l_{23} + l_{24} (m_{22} + m_{23}) \|\Pi_G\|_p d_{\infty,2} [(w_1,h_1),(w_2,h_2)] \right] \quad (2.2.20)$$

olduğu gösterilebilir.

(2.2.19) ve (2.2.20) eşitsizliklerinin dikkate alınmasıyla (2.2.18) den istenen (2.2.17) eşitsizliğinin sağlandığı anlaşılır.

Lemma 2.2.10: Lemma 2.2.9 in koşulları sağlansın ve K_1, K_2 Lemma 2.2.5 de belirtilen sabitler olmak üzere $\max\{K_1, K_2\} \leq R$ olsun. Bu durumda Lemma 2.2.5 de tanımlanan $A : S^\alpha(\theta;R) \to S^\alpha(\theta;R)$ operatörü $d_{\infty,2}$ metriğine göre sürekli bir operatördür.

İspat: $(w_0,h_0),(w_n,h_n) \in S^\alpha(\theta,R) \quad n = 1,2,3...$

ve

$$\lim_{n\to\infty} d_{\infty,2} [(w_n,h_n),(w_0,h_0)] = 0$$

olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} d_{\infty,2} [A(w_n,h_n), A(w_0,h_0)] = 0$ olduğunu gösterelim. (2.2.4) eşitsizliğinden

$$\| [A(w_n,h_n), A(w_0,h_0)] \|_{\infty,2} \leq M(\alpha,p) \| A(w_n,h_n) - A(w_0,h_0) \|_{\alpha,2}^{\frac{2}{2+\alpha p}} \| A(w_n,h_n) - A(w_0,h_0) \|_{p,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}}$$

yazılabilir. (2.2.17) den dolayı buradan

$$\left\|\left[A(w_n,h_n),A(w_0,h_0)\right]\right\|_{\infty,2} \le M(\alpha,p)\left[M_3(p)\right]^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} d_{\infty,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]$$

$$.\left\|A(w_n,h_n)-A(w_0,h_0)\right\|_{\alpha,2}^{\frac{2}{2+\alpha p}}$$

$$\le (2R)^{\frac{2}{2+\alpha p}} M(\alpha,p)\left[M_3(p)\right]^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} d_{\infty,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}}\left[(w_n,h_n),(w_0,h_0)\right]$$

olduğu elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} d_{\infty,2}\left[A(w_n,h_n),A(w_0,h_0)\right]=0$$

olur. Dolayısıyla lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Böylece Schauder prensibi geregince aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem2.2.11: $f_k \in H_{\alpha,1,1,1}\left(l_{k1},l_{k2},l_{k3},l_{k4};\overline{D}\right), g_k \in H_{\alpha,1,1}\left(m_{k1},m_{k2},m_{k3};\overline{D_1}\right), (k=1,2)$ ve $\max\{K_1,K_2\} \le R$ olsun. Bu durumda lineer olmayan (2.1.8) singüler integral denklem sisteminin $S^{\alpha}(\theta,R)$ küresinde en az bir çözümü vardır.

İspat: $\max\{K_1,K_2\} \le R$ olduğunda Lemma 2.2.5 de tanımlanan A operatörü $C^{\alpha,2}\left(\overline{G}\right), 0<\alpha<1$ uzayının konveks, kapalı ve kompakt $S^{\alpha}(\theta,R)$ küresini kendi içine çevirir ve bu küre üzerinde $d_{\infty,2}$ metriğine göre sürekli olduğundan Schauder prensibi gereğince bu operatörün $S^{\alpha}(\theta,R)$ küresinde (veya (2.1.8) denklem sisteminin $C^{\alpha,2}\left(\overline{G}\right), 0<\alpha<1$ uzayında) en azından bir sabit noktası (bir çözümü) vardır.

Şimdi (2.1.8) denklem sisteminin çözümünün tekliği ve bu çözümün yaklaşık olarak nasıl bulanabileceği problemini ele alalım.

Teorem2.2.12: $f_k \in H_{\alpha,1,1,1}\left(l_{k1},l_{k2},l_{k3},l_{k4};\overline{D}\right), g_k \in H_{\alpha,1,1}\left(m_{k1},m_{k2},m_{k3};\overline{D_1}\right)$, $(k=1,2)$ ve $0<\alpha<1$ olmak üzere $\max\{K_1,K_2\} \le R$ ve

$$l=\max\left\{l_{12}+l_{13}+(m_{12}+m_{13})l_{14}\left\|T_G\right\|_p, l_{22}+l_{23}+(m_{22}+m_{23})l_{24}\left\|\Pi_G\right\|_p\right\}<1$$

koşulları sağlandığında (2.1.8) lineer olmayan singüler integral denklem sisteminin tek bir $(w_*,h_*) \in S_{\alpha}(\theta,R)$ çözümü vardır ve bu çözüm, $(w_0,h_0) \in S^{\alpha}(\theta,R)$ herhangi bir başlangıç yaklaşım olmak üzere, terimleri (n=1,2,…)

$$\begin{aligned} w_n(z) &= f_1\left(z,w_{n-1}(z),h_{n-1}(z),T_G g_1(.,w_{n-1}(.),h_{n-1}(.))(z)\right) \\ h_n(z) &= f_2\left(z,w_{n-1}(z),h_{n-1}(z),\Pi_G\, g_1(.,w_{n-1}(.),h_{n-1}(.))(z)\right) \end{aligned} \qquad (2.2.21)$$

biçiminde tanımlanan (w_n,h_n) dizisinin limiti olarak bulunabilir. Üstelik

$$d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_*,h_*)\right]=\frac{l^k}{1-l}d_{p,2}\left[(w_1,h_1),(w_0,h_0)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 1.3.5 de $X=S^{\alpha}(\theta;R),(0<\alpha<1)$ ve A operatörü Lemma 2.2.5 de tanımlanan operatör, $\rho_1=d_{\alpha,2}(0\prec\alpha\prec 1)$ ve $\rho_2=d_{p,2}(1<p<\infty)$ olsun. $\max\{K_1,K_2\}\leq R$ olduğundan A operatörü $(X,d_{\alpha,2})$ uzayını kendi içine dönüştürür.

$l<1$ olduğunda A operatörünün $S^{\alpha}(\theta;R)$ üzerinde $d_{p,2}$ metriğine göre bir daralma operatörü olduğunu gösterelim.

$(w,h)\in S^{\alpha}(\theta,R)$ için

$$\begin{aligned}A_1(w,h)(z)&=f_1(z,w(z),h(z),T_G g_1(.,w(.),h(.))(z))\\A_2(w,h)(z)&=f_2(z,w(z),h(z),\Pi_G\, g_2(.,w(.),h(.))(z))\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A(w,h)(z)=(A_1(w,h)(z),A_2(w,h)(z))$$

olduğuna göre herhangi $(w^{(1)},h^{(1)}),(w^{(2)},h^{(2)})\in S^{\alpha}(\theta;R)$ için

$$\begin{aligned}d_{p,2}\left(A(w^{(1)},h^{(1)}),A(w^{(2)},h^{(2)})\right)=\max\Big\{&\left\|A_1(w^{(1)},h^{(1)})-A_1(w^{(2)},h^{(2)})\right\|_p,\\&,\left\|A_2(w^{(1)},h^{(1)})-A_2(w^{(2)},h^{(2)})\right\|_p\Big\}\end{aligned}$$

yazılabilir. $f_1\in H_{\alpha,1,1,1}(l_{11},l_{12},l_{13},l_{14};\overline{D}),g_1\in H_{\alpha,1,1}(m_{11},m_{12},m_{13};\overline{D_1})$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\left\|A_1(w^{(1)},h^{(1)})-A_1(w^{(2)},h^{(2)})\right\|_p=\\&\left\|f_1(.,w^{(1)}(.),h^{(1)}(.),T_G g_1(.,w^{(1)}(.),h^{(1)}(.)))-f_1(.,w^{(2)}(.),h^{(2)}(.),T_G g_1(.,w^{(2)}(.),h^{(2)}(.)))\right\|_p\\&\qquad\leq\Big\{\iint_G\Big[l_{12}\left|w^{(1)}(z)-w^{(2)}(z)\right|+l_{13}\left|h^{(1)}(z)-h^{(2)}(z)\right|\\&\qquad+l_{14}\left|T_G(g_1(.,w^{(1)}(.),h^{(1)}(.))-g_1(.,w^{(2)}(.),h^{(2)}(.)))(z)\right|\Big]^p dxdy\Big\}^{1/p}\\&\qquad\leq l_{12}\left\|w^{(1)}-w^{(2)}\right\|_p+l_{13}\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|_p+\\&\qquad+l_{14}\left(\iint_G\left|T_G(g_1(.,w^{(1)}(.),h^{(1)}(.))-g_1(.,w^{(2)}(.),h^{(2)}(.)))(z)\right|^p dxdy\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$\leq l_{12}\left\|w^{(1)}-w^{(2)}\right\|_p + l_{13}\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|_p +$$

$$+ l_{14}\left\|T_G\right\|_p \left(\iint_G \left|\left(g_1\left(z,w^{(1)}(z),h^{(1)}(z)\right)-g_1\left(z,w^{(2)}(z),h^{(2)}(z)\right)\right)\right|^p dxdy\right)^{1/p}$$

$$\leq l_{12}\left\|w^{(1)}-w^{(2)}\right\|_p + l_{13}\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|_p + l_{14}\left\|T_G\right\|_p\left(m_{12}\left\|w^{(1)}-w^{(2)}\right\|_p + m_{13}\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|_p\right)$$

$$= \left(l_{12}+m_{12}l_{14}\left\|T_G\right\|_p\right)\left\|w^{(1)}-w^{(2)}\right\|_p + \left(l_{13}+l_{14}m_{13}\left\|T_G\right\|_p\right)\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|_p$$

$$\leq l_1 d_{p,2}\left(\left(w^{(1)},h^{(1)}\right),\left(w^{(2)},h^{(2)}\right)\right)$$

olur. Burada

$$l_1 = l_{12} + l_{13} + \left(m_{12}+m_{13}\right)l_{14}\left\|T_G\right\|_p$$

dir.

Benzer şekilde

$$\left\|A_2\left(w^{(1)},h^{(1)}\right)-A_2\left(w^{(2)},h^{(2)}\right)\right\|_p \leq l_2 d_{p,2}\left(\left(w^{(1)},h^{(1)}\right),\left(w^{(2)},h^{(2)}\right)\right)$$

olduğu gösterilebilir. Burada

$$l_2 = l_{22} + l_{23} + \left(m_{22}+m_{23}\right)l_{24}\left\|\Pi_G\right\|_p$$

dir. Buna göre $l = \max\{l_1, l_2\}$ olmak üzere $\forall\left(w^{(1)},h^{(1)}\right),\left(w^{(2)},h^{(2)}\right) \in S_\alpha(\theta,R)$ için

$$d_{p,2}\left[A\left(w^{(1)},h^{(1)}\right),A\left(w^{(2)},h^{(2)}\right)\right] \leq l d_{p,2}\left[\left(w^{(1)},h^{(1)}\right),\left(w^{(2)},h^{(2)}\right)\right] \tag{2.2.22}$$

olur. Böylece $l < 1$ olduğunda A operatörü $S_\alpha(\theta,R)$ üzerinde $d_{p,2}$ metriğine göre bir daralma operatörüdür.

Teorem 1.3.5 e göre (2.1.8) sisteminin $S_\alpha(\theta,R)$ üzerinde en az bir çözümü vardır. Gerçekten $\left(w_n,h_n\right) = A\left(w_{n-1},h_{n-1}\right), \quad n = 1,2,...$ olduğundan $(2.2.22)$ye göre

$$\begin{aligned} d_{p,2}\left[\left(w_{n+1},h_{n+1}\right),\left(w_n,h_n\right)\right] &= d_{p,2}\left[A\left(w_n,h_n\right),A\left(w_{n-1},h_{n-1}\right)\right] \\ &\leq l d_{p,2}\left[\left(w_n,h_n\right),\left(w_{n-1},h_{n-1}\right)\right] \end{aligned}$$

olur. Benzer eşitsizlikler sırasıyla kullanılarak $\forall n,m \in N$ için

$$\begin{aligned} d_{p,2}\left[\left(w_{n+m},h_{n+m}\right),\left(w_n,h_n\right)\right] &\leq l^n\left(1+l+l^2+...+l^{m-1}\right)d_{p,2}\left[\left(w_1,h_1\right),\left(w_0,h_0\right)\right] \\ &= l^n\frac{1-l^m}{1-l}d_{p,2}\left[\left(w_1,h_1\right),\left(w_0,h_0\right)\right] \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty} l^n = 0$$

olduğundan son eşitsizliğe göre (w_n, h_n)dizisi $d_{p,2}$ metriğine göre bir Cauchy dizisidir. $(X, d_{p,2})$ metrik uzayı tam olduğundan $\lim_{n\to\infty}(w_n, h_n) = (w_*, h_*) \in X$ elemanı vardır.

$$d_{P,2}\left[(w_{n+1}, h_{n+1}), A(w_*, h_*)\right] = d_{p,2}\left[A(w_n, h_n), A(w_*, h_*)\right]$$
$$\leq l d_{p,2}\left[(w_n, h_n), (w_*, h_*)\right]$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} d_{p,2}\left[(w_n, h_n), (w_*, h_*)\right] = 0$$

olduğuna göre

$$\lim_{n\to\infty} d_{p,2}\left[(w_{n+1}, h_{n+1}), (w_n, h_n)\right] = 0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} d_{p,2}(w_{n+1}, h_{n+1}) = A(w_*, h_*)$$

olur.

Buradan $(w_*, h_*) = A(w_*, h_*)$ yani $(w_*, h_*) \in X$ elemanının $(w, h) = A(w, h)$ denkleminin bir çözümü olduğu anlaşılır. Bu çözümün tek olduğu kolayca gösterilebilir.

Sonuç 2.2.13: $d_{p,2}$ metriğine göre terimleri $(w_n, h_n) = A(w_{n-1}, h_{n-1}),\ n = 1,2,...$ ve (2.2.21) formülleri yardımıyla tanımlanan $\{(w_n, h_n)\}$dizisi (w_*, h_*) çözümüne (2.2.23) den elde edilen

$$d_{p,2}\left[(w_n, h_n), A(w_*, h_*)\right] \leq \frac{l^n}{1-l} d_{p,2}\left[(w_1, h_1), A(w_*, h_*)\right]$$

den dolayı yakınsaktır. $d_{\infty,2}$ ile $d_{p,2}$ denk olduklarından $d_{\infty,2}$ metriğine göre de yakınsaktır.

2.3. (2.1.9) Denklem Sistemi İçin Varlık ve Teklik Teoremleri

Tanım 2.3.1.: $\overline{D} = G\text{x}C^4$ olmak üzere $h:\overline{D} \to C$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $(z_1, p_1, q_1, r_1, s_1), (z_2, p_2, q_2, r_2, s_2) \in \overline{D}$ için

$$\begin{aligned} &\left|h(z_1, p_1, q_1, r_1, s_1) - h(z_2, p_2, q_2, r_2, s_2)\right| \le l_1 |z_1 - z_2|^{\alpha} \\ &+ l_2 |p_1 - p_2| + l_3 |q_1 - q_2| + l_4 |r_1 - r_2| + l_5 |s_1 - s_2| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 pozitif sabitleri varsa h fonksiyonuna $\overline{D}$ üzerinde $H_{\alpha,1,1,1,1}(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5; \overline{D})$ sınıfındandır denir ve $h \in H_{\alpha,1,1,1,1}(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5; \overline{D})$ yazılır.

Lemma2.3.2.: $f_k \in H_{\alpha,1,1,1,1}(l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}, l_{k4}, l_{k5}; \overline{D})$, $g_k \in H_{\alpha,1,1}(m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}; \overline{D_1})$ $(k = 1,2)$, $\theta = (0,0)$ ve $S_\alpha(\theta, R) = \{(w,h) \in C^{\alpha,2} : \|(w,h)\|_{\alpha,2} \le R\}$ olsun. Eğer

$$l_{0k} = \max\left\{\left|f_k(z,0,0,0)\right| : z \in \overline{G}\right\}$$

$$m_{0k} = \max\left\{\left|g_k(z,0,0)\right| : z \in \overline{G}\right\}$$

$$K_1 = l_{01} + l_{11} + 2(l_{12} + l_{13})R + \left[2m_{01} + 4m_{11} + 4(m_{12} + m_{13})R\right]\left(l_{14}\|T_G\|_\alpha + l_{15}\|\Pi_G\|_\alpha\right)$$
$$K_2 = l_{02} + l_{21} + 2(l_{22} + l_{23})R + \left[2m_{02} + 4m_{21} + 4(m_{22} + m_{23})R\right]\left(l_{24}\|T_G\|_\alpha + l_{25}\|\Pi_G\|_\alpha\right)$$

olmak üzere $\max\{K_1, K_2\} \le R$ ise

$$A : C^{\alpha,2}(\overline{G}) \to C^{\alpha,2}(\overline{G}), 0 < \alpha < 1$$
$$(w,h) \to A(w,h) = (\widetilde{w}, \widetilde{h})$$
$$\widetilde{w}(z) = f_1(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z), \Pi_G\, g_1(., w(.), h(.))(z))$$
$$\widetilde{h}(z) = f_2(z, w(z), h(z), T_G g_2(., w(.), h(.))(z), \Pi_G\, g_2(., w(.), h(.))(z))$$

operatörü $S_\alpha(\theta, R)$ küresini kendi içine dönüştürür.

İspat:

$$\begin{aligned} &|\widetilde{w}(z)| = \left|f_1(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z), \Pi_G\, g_1(., w(.), h(.))(z))\right| \le \\ &\left|f_1(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z), \Pi_G\, g_1(., w(.), h(.))(z)) - f_1(z,0,0, T_G g_1(.,0,0)(z), \Pi_G\, g_1(.,0,0)(z))\right| \\ &+ \left|f_1(z,0,0, T_G g_1(.,0,0)(z), \Pi_G\, g_1(.,0,0)(z)) - f_1(z,0,0,0,0)\right| + \left|f_1(z,0,0,0,0)\right| \\ &\le l_{12}|w(z)| + l_{13}|h(z)| + l_{14}\left|T_G\left[g_1(., w(.), h(.)) - g_1(.,0,0)\right](z)\right| \\ &+ l_{15}\left|\Pi_G\left[g_1(., w(.), h(.)) - g_1(.,0,0)\right](z)\right| + l_{14}\left|T_G g_1(.,0,0)(z)\right| + l_{15}\left|\Pi_G\, g_1(.,0,0)(z)\right| + l_{01} \end{aligned}$$

$$\leq l_{12}\|w(z)\|_{\alpha} + l_{13}\|h(z)\|_{\alpha} + l_{14}\|T_G\|_{\alpha}\|g_1(.,w(.),h(.)) - g_1(.,0,0)\|_{C^{\alpha}(\overline{D_1})}$$
$$+ l_{15}\|\Pi_G\|_{\alpha}\|g_1(.,w(.),h(.)) - g_1(.,0,0)\|_{C^{\alpha}(\overline{D_1})} + l_{14}\|T_G\|_{\alpha}\|g_1(.,0,0)\|_{C^{\alpha}(\overline{D_1})} \tag{2.3.2}$$
$$+ l_{15}\|\Pi_G\|_{\alpha}\|g_1(.,0,0)\|_{C^{\alpha}(\overline{D_1})} + l_{01}$$

olur. Şimdi

$$\|g_1(.,w(.),h(.)) - g_1(.,0,0)\|_{C^{\alpha}(\overline{D_1})}$$

ifadesini sınırlandırmaya çalışalım. Her $z, z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$|g_1(z,w(z),h(z)) - g_1(z,0,0)| \leq m_{12}|w(z)| + m_{13}|h(z)| \leq (m_{12} + m_{13})R \tag{2.3.3}$$

ve

$$|[g_1(.,w(.),h(.)) - g_1(.,0,0)](z_1) - [g_1(.,w(.),h(.)) - g_1(.,0,0)](z_2)|$$
$$= |[g_1(z_1,w(z_1),h(z_1)) - g_1(z_2,w(z_2),h(z_2))] - [g_1(z_1,0,0) - g_1(z_2,0,0)]|$$

(2.2.10) eşitsizliğinden

$$\leq m_{11}|z_1 - z_2|^{\alpha} + m_{12}\|w\|_{\alpha}|z_1 - z_2|^{\alpha} + m_{13}\|h\|_{\alpha}|z_1 - z_2|^{\alpha} + m_{11}|z_1 - z_2|^{\alpha}$$
$$\leq [2m_{11} + (m_{12} + m_{13})R]|z_1 - z_2|^{\alpha} \tag{2.3.4}$$

(2.3.3) ve (2.3.4) eşitsizliklerinden

$$\|g_1(.,w(.),h(.)) - g_1(.,0,0)\|_{\alpha} \leq 2[m_{11} + (m_{12} + m_{13})R] \tag{2.3.5}$$

olur. Şimdi

$$\|g_1(.,0,0)\|_{\alpha}$$

için bir sınırlandırma bulmaya çalışalım. Herhangi $z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$|g_1(.,0,0)(z_2) - g_1(.,0,0)(z_1)| = |g_1(z_2,0,0) - g_2(z_1,0,0)|$$
$$\leq m_{11}|z_1 - z_2|^{\alpha}$$

olduğundan

$$\|g_1(.,0,0)\|_{\alpha} \leq m_{11} + m_{01} \tag{2.3.6}$$

olur. (2.3.5) ve (2.3.6) eşitsizliklerini (2.3.2) de kullanırsak her $z \in \overline{G}$ için

$$|\widetilde{w}(z)| \leq (l_{12} + l_{13})R + (l_{14}\|T_G\|_{\alpha} + l_{15}\|\Pi_G\|_{\alpha})2[m_{11} + (m_{12} + m_{13})R]$$
$$+ (l_{14}\|T_G\|_{\alpha} + l_{15}\|\pi_G\|_{\alpha})(m_{11} + m_{01}) + l_{01}$$

Şimdi $H(\widetilde{w},\alpha)$ Hölder sabitini bulalım. Her $z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{w}(z_1)-\widetilde{w}(z_2)| &= |f_1(z_1,w(z_1),h(z_1),T_G g_1(.,w(.),h(.))(z_1),\Pi_G\, g_1(.,w(.),h(.))(z_1))- \\
&\quad - f_1(z_2,w(z_2),h(z_2),T_G g_1(.,w(.),h(.))(z_2),\Pi_G\, g_1(.,w(.),h(.))(z_2))| \\
&\le l_{11}|z_1-z_2|^{\alpha} + l_{12}|w(z_1)-w(z_2)| + l_{13}|h(z_1)-h(z_2)| \\
&\quad + l_{14}|T_G[g_1(.,w(.),h(.))(z_1)-g_1(.,w(.),h(.))(z_2)]| \\
&\quad + l_{15}|\Pi_G[g_1(:,w(.),h(.))(z_1)-g_1(:,w(.),h(.))(z_2)]| \\
&\le [l_{11}+(l_{12}+l_{13})R]|z_1-z_2|^{\alpha} + l_{14}\|T_G\|_{\alpha}\|g_1(.,w(.),h(.))\|_{\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha} \\
&\quad + l_{15}\|\Pi_G\|_{\alpha}\|g_1(.,w(.),h(.))\|_{\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha} \\
&\qquad = \left[l_{11}+(l_{12}+l_{13})R+\left(l_{14}\|T_G\|_{\alpha}+l_{15}\|\Pi_G\|_{\alpha}\right)\|g_1(.,w(.),h(.))\|_{\alpha}\right]|z_1-z_2|^{\alpha}
\end{aligned}
$$

olur. $\forall z, z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$
\begin{aligned}
|g_1(z,w(z),h(z))| &\le |g_1(z,w(z),h(z))-g_1(z,0,0)| + |g_1(z,0,0)| \\
&\le (m_{12}+m_{13})R + m_{01}
\end{aligned}
$$

$$
|g_1(z_1,w(z_1),h(z_1))-g_1(z_2,w(z_2),h(z_2))| \le [m_{11}+(m_{12}+m_{13})R]|z_1-z_2|^{\alpha}
$$

olduğundan

$$
\|g_1(.,w(.),h(.))\|_{\alpha} \le m_{01}+m_{11}+2(m_{12}+m_{13})R
$$

yazılır. O halde $\forall z_1, z_2 \in \overline{G}$ için

$$
|\widetilde{w}(z_1)-\widetilde{w}(z_2)| \le \left[l_{11}+(l_{12}+l_{13})R+\left(l_{14}\|T_G\|_{\alpha}+l_{15}\|\Pi_G\|_{\alpha}\right)(m_{01}+m_{11}+2(m_{12}+m_{13})R)\right]|z_1-z_2|^{\alpha}
$$

veya

$$
H(\widetilde{w},\alpha) \le l_{11}+(l_{12}+l_{13})R+\left(l_{14}\|T_G\|_{\alpha}+l_{15}\|\Pi_G\|_{\alpha}\right)(m_{01}+m_{11}+2(m_{12}+m_{13})R)
$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$
K_1 = l_{01}+l_{11}+2(l_{12}+l_{13})R+[2m_{01}+4m_{11}+4(m_{12}+m_{13})R]\left(l_{14}\|T_G\|_{\alpha}+l_{15}\|\pi_G\|_{\alpha}\right)
$$

olmak üzere

$$
\|\widetilde{w}\|_{\alpha} \le K_1
$$

olur. Benzer şekilde

$$
K_2 = l_{02}+l_{21}+2(l_{22}+l_{23})R+[2m_{02}+4m_{21}+4(m_{22}+m_{23})R]\left(l_{24}\|T_G\|_{\alpha}+l_{25}\|\Pi_G\|_{\alpha}\right)
$$

olmak üzere

$$
\|\widetilde{h}\|_{\alpha} \le K_2
$$

olduğu gösterilebilir. Buna göre

$$
\|(\widetilde{w},\widetilde{h})\|_{\alpha,2} = \max\{\|\widetilde{w}\|_{\alpha}, \|\widetilde{h}\|_{\alpha}\} \le \max\{K_1, K_2\}
$$

olur.Eğer $\max\{K_1, K_2\} \leq R$ ise $\left\|\left(\tilde{w}, \tilde{h}\right)\right\|_{\alpha,2} \leq R$ ise

$A(w,h) = \left(\tilde{w}, \tilde{h}\right) \in S_\alpha(\theta, R)$ olduğu anlaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.3.3: $f_k \in H_{\alpha,1,1,1,1}\left(l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}, l_{k4}, l_{k5}; \overline{D}\right), g_k \in H_{\alpha,1,1}\left(m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}; \overline{D_1}\right),$

$(k = 1,2), 0 < \alpha < 1$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda Lemma 2.3.2 de tanımlanan A operatörü için $\forall(w_1, h_1), (w_2, h_2) \in S_\alpha(\theta; R)$ için

$$d_{p,2}\left[A(w_1, h_1), A(w_2, h_2)\right] \leq M_4(p) d_{\infty,2}\left[(w_1, h_1), (w_2, h_2)\right] \tag{2.3.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned} M_4(p) = (mG)^{1/p} \max\Big\{ & l_{12} + l_{13} + \left(l_{14}\|T_G\|_p + l_{15}\|\Pi_G\|_p\right)(m_{12} + m_{13}), \\ & l_{22} + l_{23} + \left(l_{24}\|T_G\|_p + l_{25}\|\Pi_G\|_p\right)(m_{22} + m_{23})\Big\} \end{aligned}$$

İspat: $\forall(w_1, h_1), (w_2, h_2) \in S_\alpha(\theta; R)$ ve $\forall z \in \overline{G}$ için

$$\begin{aligned} \|A(w_1, h_1) - A(w_2, h_2)\|_{p,2} &= \left\|\left(\tilde{w}_1, \tilde{h}_1\right) - \left(\tilde{w}_2, \tilde{h}_2\right)\right\|_{p,2} \\ &= \max\left\{\|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2\|_p, \left\|\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2\right\|_p\right\} \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

olduğundan $\|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2\|_p$ ve $\left\|\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2\right\|_p$ normlarını değerlendirelim. $\forall z \in \overline{G}$ için

$$\begin{aligned} |\tilde{w}_1(z) - \tilde{w}_2(z)| = |& f_1(z, w_1(z), h_1(z), T_G g_1(., w_1(.), h_1(.))(z), \Pi_G\, g_1(., w_1(.), h_1(.))(z)) - \\ & f_1(z, w_2(z), h_2(z), T_G g_1(., w_2(.), h_2(.))(z), \Pi_G\, g_2(., w_2(.), h_2(.))(z))| \\ \leq\ & l_{12}|w_1(z) - w_2(z)| + l_{13}|h_1(z) - h_2(z)| + l_{14}|T_G(g_1(., w_1(.), h_1(.)) - g_1(., w_2(.), h_2(.)))| \\ & + l_{15}|\Pi_G(g_1(., w_1(.), h_1(.)) - g_1(., w_2(.), h_2(.)))| \end{aligned}$$

olduğundan Minkowski eşitsizliği ve $g_1 \in H_{\alpha,1,1}\left(m_{11}, m_{12}, m_{13}; \overline{D_1}\right)$ gereğince

$$\begin{aligned} \left(\iint_G |\tilde{w}_1(z) - \tilde{w}_2(z)|^p dxdy\right)^{1/p} \leq & \left\{\iint_G \left[l_{12}|w_1(z) - w_2(z)| + l_{13}|h_1(z) - h_2(z)| + \right.\right. \\ & \left.\left. + l_{14}|T_G[g_1(., w_1(.), h_1(.)) - g_1(., w_2(.), h_2(.))]| + l_{15}|\Pi_G[g_1(., w_1(.), h_1(.)) - g_1(., w_2(.), h_2(.))]|\right]^p\right\}^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq l_{12}\|w_1 - w_2\|_p + l_{13}\|h_1 - h_2\|_p + l_{14}\|T_G\|_p \|g_1(., w_1(.), h_1(.)) - g_1(., w_2(.), h_2(.))\|_p \\ &+ l_{15}\|\Pi_G\|_p \|g_1(., w_1(.), h_1(.)) - g_1(., w_2(.), h_2(.))\|_p \\ &\leq (l_{12} + l_{13}) \max\left\{\|w_1 - w_2\|_p, \|h_1 - h_2\|_p\right\} + l_{14}\|T_G\|_p \left(m_{12}\|w_1 - w_2\|_p + m_{13}\|h_1 - h_2\|_p\right) \\ &+ l_{15}\|\Pi_G\|_p \left(m_{12}\|w_1 - w_2\|_p + m_{13}\|h_1 - h_2\|_p\right) \end{aligned}$$

$$\le \left[\left(l_{12} + l_{13} \right) + \left(l_{14} \left\| T_G \right\|_p + l_{15} \left\| \Pi_G \right\|_p \right) \left(m_{12} + m_{13} \right) \right] \max \left\{ \left\| w_1 - w_2 \right\|_p , \left\| h_1 - h_2 \right\|_p \right\}$$

$$\le \left(mG \right)^{1/p} \left[l_{12} + l_{13} + \left(l_{14} \left\| T_G \right\|_p + l_{15} \left\| \Pi_G \right\|_p \right) \left(m_{12} + m_{13} \right) \right] d_{\infty,2} \left[\left(w_1 , h_1 \right), \left(w_2 , h_2 \right) \right]$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\left\| \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 \right\|_p$$

$$\le \left(mG \right)^{1/p} \left[l_{22} + l_{23} + \left(l_{24} \left\| T_G \right\|_p + l_{25} \left\| \Pi_G \right\|_p \right) \left(m_{22} + m_{23} \right) \right] d_{\infty,2} \left[\left(w_1 , h_1 \right), \left(w_2 , h_2 \right) \right]$$

(2.3.10)

olduğu gösterilebilir.

(2.3.9) ve (2.3.10) eşitsizliklerinin dikkate alınmasıyla (2.3.8) den istenen (2.3.7) eşitsizliğinin sağlandığı anlaşılır.

Lemma 2.3.4: Lemma 2.3.3 ün koşulları sağlansın ve $\max\{K_1 , K_2\} \le R$ olsun. Bu durumda Lemma 2.3.2 de tanımlanan $A : S_\alpha(\theta; R) \to S_\alpha(\theta; R)$ operatörü $d_{\infty,2}$ metriğine göre sürekli bir operatördür.

İspat: $(w_0 , h_0), (w_n , h_n) \in S_\alpha(\theta; R), n = 1,2,...$ ve

$$\lim_{n\to\infty} d_{\infty,2} \left[\left(w_n , h_n \right), \left(w_0 , h_0 \right) \right] = 0$$

olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} d_{\infty,2} \left[A\left(w_n , h_n \right), A\left(w_0 , h_0 \right) \right] = 0$ olduğunu gösterelim. (2.2.4) eşitsizliğinden

$$\left\| \left[A\left(w_n , h_n \right), A\left(w_0 , h_0 \right) \right] \right\|_{\infty,2} \le M(\alpha, p) \left[M_3(p) \right]^{\frac{2}{2+\alpha p}} d_{\infty,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \left[\left(w_n , h_n \right), \left(w_0 , h_0 \right) \right]$$

$$\left\| \left[A\left(w_n , h_n \right), A\left(w_0 , h_0 \right) \right] \right\|_{\alpha,2}^{\frac{2}{2+\alpha p}}$$

$$\le (2R)^{\frac{2}{2+\alpha p}} M(\alpha, p) \left[M_3(p) \right]^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} d_{\infty,2}^{\frac{\alpha p}{2+\alpha p}} \left[\left(w_n , h_n \right) \left(w_0 , h_0 \right) \right]$$

olduğu elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} d_{\infty,2} \left[A\left(w_n , h_n \right), A\left(w_0 , h_0 \right) \right] = 0$$

olur. Dolayısıyla lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Böylece Schauder prensibi gereğince aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 2.3.5: $f_k \in H_{\alpha,1,1,1,1}\left(l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}, l_{k4}, l_{k5}; \overline{D} \right), g_k \in H_{\alpha,1,1}\left(m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}; \overline{D_1} \right)$ $(k = 1,2)$ ve lemma 2.3.2 de tanımlanan K_1 , K_2 ler için $\max\{K_1 , K_2\} \le R$ olsun. Bu durumda lineer olmayan (2.1.9) singüler integral sisteminin $S_\alpha(\theta;R)$ küresinde en az bir çözümü vardır.

İspat: $\max\{K_1,K_2\}\le R$ olduğundan Lemma 2.3.2 de tanımlanan A operatörü $C^{\alpha,2}(\overline{G}),0<\alpha<1$ uzayının konveks, kapalı ve kompakt $S_\alpha(\theta;R)$ küresini kendi içine dönüştürür ve bu küre üzerinde $d_{\infty,2}$ metriğine göre sürekli olduğundan Schauder prensibi gereğince bu operatörün $S_\alpha(\theta;R)$ küresinde (veya (2.1.9) denklem sisteminin $C^{\alpha,2}(\overline{G}),0<\alpha<1$ uzayında en azından bir sabit noktası(bir çözümü) vardır.

Şimdi (2.1.9) denklem sisteminin çözümünün tekliği ve bu çözümün yaklaşık olarak nasıl bulunabileceği problemini araştıralım.

Teorem 2.3.6: $f_k\in H_{\alpha,1,1,1,1}\left(l_{k1},l_{k2},l_{k3},l_{k4},l_{k5};\overline{D}\right)$, $g_k\in H_{\alpha,1,1}\left(m_{k1},m_{k2},m_{k3};\overline{D_1}\right)$ $(k=1,2)$ve $0<\alpha<1$ olmak üzere $\max\{K_1,K_2\}\le R$ ve

$$l=\max\Big\{l_{12}+l_{13}+\left(l_{14}\|T_G\|_p+l_{15}\|\Pi_G\|_p\right)(m_{12}+m_{13}),$$
$$l_{22}+l_{23}+\left(l_{24}\|T_G\|_p+l_{25}\|\Pi_G\|_p\right)(m_{22}+m_{23})\Big\}<1$$

koşulları sağlandığında (2.1.9) lineer olmayan singüler integral denklem sisteminin tek bir $(w^*,h^*)\in S_\alpha(\theta,R)$çözümü vardır ve bu çözüm $(w_0,h_0)\in S_\alpha(\theta;R)$ herhangi başlangıç yaklaşım olmak üzere terimleri

$$w_n(z)=f_1\left(z,w_{n-1}(z),h_{n-1}(z),T_G g_1(.,w_{n-1}(.),h_{n-1}(.))(z),\Pi_G\, g_1(.,w_{n-1}(.),h_{n-1}(.))(z)\right)$$
$$h_n(z)=f_2\left(z,w_{n-1}(z),h_{n-1}(z),T_G g_2(.,w_{n-1}(.),h_{n-1}(.))(z),\Pi_G\, g_2(.,w_{n-1}(.),h_{n-1}(.))(z)\right)$$

biçiminde tanımlanan (w_n,h_n) dizisinin limiti olarak bulunabilir. Üstelik

$$d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w^*,h^*)\right]\le\frac{l^k}{1-l}d_{p,2}\left[(w_1,h_1),(w_0,h_0)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 1.3.5 de $X=S_\alpha(\theta;R),0<\alpha<1$ ve A operatörü Lemma 2.3.2 de tanımlanmış bir operatör, $\rho_1=d_{\alpha,2},(0<\alpha<1),\rho_2=d_{p,2},(1<p<\infty)$ olsun. $\max\{K_1,K_2\}\le R$ olduğundan A operatörü $(X,d_{\alpha,2})$ uzayını kendi içine dönüştürür.

$l<1$ olduğunda A operatörünün $S_\alpha(\theta;R)$ üzerinde $d_{p,2}$ metriğine göre bir daralma operatörü olduğunu gösterelim.

$(w,h)\in S_\alpha(\theta;R)$ için

$$A_1(w,h)(z) = f_1\left(z, w(z), h(z), T_G g_1(., w(.), h(.))(z), \Pi_G\, g_1(., w(.), h(.))(z)\right)$$
$$A_2(w,h)(z) = f_2\left(z, w(z), h(z), T_G g_2(., w(.), h(.))(z), \Pi_G\, g_2(., w(.), h(.))(z)\right)$$

olmak üzere

$$A(w,h)(z) = \left(A_1(w,h)(z), A_2(w,h)(z)\right)$$

olduğuna göre herhangi $\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right), \left(w^{(2)}, h^{(2)}\right) \in S_\alpha(\theta; R)$ için

$$d_{p,2}\left(A\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right), A\left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right) = \max\Big\{\left\|A_1\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right) - A_1\left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right\|_p ,$$
$$\left\|A_2\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right) - A_2\left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right\|_p\Big\}$$

yazılabilir.

$$f_k \in H_{\alpha,1,1,1,1}\left(l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}, l_{k4}, l_{k5}; \overline{D}\right), g_k \in H_{\alpha,1,1}\left(m_{k1}, m_{k2}, m_{k3}; \overline{D_1}\right)(k = 1,2)$$

olduğundan

$$\left\|A_1\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right) - A_1\left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right\|_p = \Big\| f_1\left(., w^{(1)}(.), h^{(1)}(.), T_G g_1\left(., w^{(1)}(.), h^{(1)}(.)\right), \Pi_G\, g_1\left(., w^{(1)}(.), h^{(1)}(.)\right)\right) -$$
$$f_1\left(., w^{(2)}(.), h^{(2)}(.), T_G g_1\left(., w^{(2)}(.), h^{(2)}(.)\right), \Pi_G\, g_1\left(., w^{(2)}(.), h^{(2)}(.)\right)\right)\Big\|_p$$
$$\le \Big\{\iint_G \Big[l_{12}\left|w^{(1)}(z) - w^{(2)}(z)\right| + l_{13}\left|h^{(1)}(z) - h^{(2)}(z)\right| + l_{14}\left|T_G\left(g_1\left(., w^{(1)}(.), h^{(1)}(.)\right) - g_1\left(., w^{(1)}(.), h^{(1)}(.)\right)\right)\right| +$$
$$l_{15}\left|\Pi_G\left(g_1\left(., w^{(1)}(.), h^{(1)}(.)\right) - g_1\left(., w^{(1)}(.), h^{(1)}(.)\right)\right)\right|\Big]^p dxdy\Big\}^{1/p}$$
$$\le l_{12}\left\|w^{(1)} - w^{(2)}\right\|_p + l_{13}\left\|h^{(1)} - h^{(2)}\right\|_p + l_{14}\left\|T_G\right\|_p\left(m_{12}\left\|w^{(1)} - w^{(2)}\right\|_p + m_{13}\left\|h^{(1)} - h^{(2)}\right\|_p\right) +$$
$$l_{15}\left\|\Pi_G\right\|_p\left(m_{12}\left\|w^{(1)} - w^{(2)}\right\|_p + m_{13}\left\|h^{(1)} - h^{(2)}\right\|_p\right)$$
$$\le l_1 d_{p,2}\left(\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right), \left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right)$$

olur. Burada

$$l_1 = l_{12} + l_{13} + \left(l_{14}\left\|T_G\right\|_p + l_{15}\left\|\Pi_G\right\|_p\right)(m_{12} + m_{13})$$

dir.

Benzer şekilde

$$\left\|A_2\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right) - A_2\left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right\|_p \le l_2 d_{p,2}\left(\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right), \left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right)$$

olduğu gösterilebilir. Burada

$$l_2 = l_{22} + l_{23} + \left(l_{24}\left\|T_G\right\|_p + l_{25}\left\|\Pi_G\right\|_p\right)(m_{22} + m_{23})$$

dir.

Buna göre $l = \max\{l_1, l_2\}$ olmak üzere $\forall\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right), \left(w^{(2)}, h^{(2)}\right) \in S_\alpha(\theta; R)$ için

$$d_{p,2}\left(A\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right), A\left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right) \le l d_{p,2}\left(\left(w^{(1)}, h^{(1)}\right), \left(w^{(2)}, h^{(2)}\right)\right) \qquad (2.3.11)$$

olur. Böylece $l<1$ olduğunda A operatörü $S_\alpha(\theta;R)$ üzerinde $d_{p,2}$ metriğine göre bir daralma operatörüdür.

Teorem 1.3.5'e göre (2.1.9) sisteminin $S_\alpha(\theta;R)$ küresinde en az bir çözümü vardır. Gerçekten $(w_n,h_n)=A(w_{n-1},h_{n-1}), n=1,2,...$ olduğundan (2.3.11)'e göre

$$\begin{aligned} d_{p,2}\left[(w_{n+1},h_{n+1}),(w_n,h_n)\right] &= d_{p,2}\left[A(w_n,h_n),A(w_{n-1},h_{n-1})\right] \\ &\le l d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_{n-1},h_{n-1})\right] \end{aligned}$$

olur. Benzer eşitsizlikler sırayla kullanılarak $\forall n,m\in N$ için

$$\begin{aligned} d_{p,2}\left[(w_{n+1},h_{n+1}),(w_n,h_n)\right] &\le l^n\left(1+l+l^2+...+l^{m-1}\right)d_{p,2}\left[(w_1,h_1),(w_0,h_0)\right] \\ &= l^n\frac{1-l^m}{1-l}d_{p,2}\left[(w_1,h_1),(w_0,h_0)\right] \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

yazılabilir. $\lim\limits_{n\to\infty} l^n=0$ olduğundan son eşitsizliğe göre (w_n,h_n) dizisi $d_{p,2}$ metriğine göre bir Cauchy dizisidir. $(X,d_{p,2})$ metrik uzayı tam metrik uzay olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}(w_n,h_n)=(w_*,h_*)$ olacak şekilde bir $(w_*,h_*)\in X$ elemanı vardır.

$$\begin{aligned} & d_{p,2}\left[(w_{n+1},h_{n+1}),(w_*,h_*)\right]\le l d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_*,h_*)\right] \\ & = d_{p,2}\left[A(w_n,h_n),A(w_*,h_*)\right]\le l d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_*,h_*)\right] \end{aligned}$$

ve $\lim\limits_{n\to\infty} d_{p,2}\left[(w_n,h_n),(w_*,h_*)\right]=0$ olduğuna göre

$$\lim_{n\to\infty} d_{p,2}\left[(w_{n+1},h_{n+1}),(w_n,h_n)\right]=0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty}(w_{n+1},h_{n+1})=A(w_*,h_*)$$

olur. Buradan $(w_*,h_*)=A(w_*,h_*)$, yani $(w_*,h_*)\in X$ elemanının $(w,h)=A(w,h)$ denkleminin bir çözümü olduğu anlaşılır. Bu çözümün tek olduğu kolayca gösterilebilir.

Kabul edelim ki $(w_{**},h_{**})\in X$ elemanı $(w,h)=A(w,h)$ denkleminin ikinci bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\left\|(w_{**},h_{**})-(w_*,h_*)\right\|_{p,2}=\left\|A(w_{**},h_{**})-A(w_*,h_*)\right\|_{p,2}\le l\left\|(w_{**},h_{**})-(w_*,h_*)\right\|_{p,2}$$

$0<l<1$ olduğundan

$$\left\|(w_{**},h_{**})-(w_*,h_*)\right\|_{p,2}=0$$

yani

$$\left(w_{**}, h_{**}\right) = \left(w_*, h_*\right)$$

olmalıdır.

Sonuç 2.3.7: $d_{p,2}$ metriğine göre terimleri $\left(w_n, h_n\right) = A\left(w_{n-1}, h_{n-1}\right)$, $n = 1,2,...$ ile tanımlanan $\left\{\left(w_n, h_n\right)\right\}$ dizisi $\left(w_*, h_*\right)$ çözümüne (2.3.12) den elde edilen

$$d_{p,2}\left[\left(w_n, h_n\right), A\left(w_*, h_*\right)\right] \leq \frac{l^n}{1-l} d_{p,2}\left[\left(w_1, h_1\right), A\left(w_*, h_*\right)\right]$$

den dolayı yakınsaktır. $d_{\infty,2}$ ile $d_{p,2}$ denk olduklarından $d_{\infty,2}$ metriğine göre de yakınsaktır.

KAYNAKLAR

ALTUN,I., K,KOCA., B,MUSAYEV. 2006 "Existence and uniqueness theorems for a certain class of non-linear singular integral equations".Complex Variables and Elliptic Equations ,Vol.51,No.2,181-195

HÜSEYNOV.A.I, H.S.,MUHTAROV,1980,"Vvedeniye v teoriyu nelineynıh sıgulyainıh integralnıh", Moscow:Nauka

MUSAYEV. B, M,ALP 2000 “Fonksiyonel Analiz” Dumlupınar Üniversitesi

TUTSCHKE,W. 1976"Lösung nichtlinearer Partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung eine komplexen Normalform"
Math. Nachr 75, 283-298

TUTSCHKE,W. 1977 "Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer in mehrenen komplexen Variablen", VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

TUTSCHKE,W. 1983"Partielle Differentialgleichungen, klassische funktional analytische und komplexe Methoden".

VEKUA, I.N. 1963"Verallgemeinerte analytische Funktionen"Akademie Verlag,Berlin.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bana yol gösteren ve hiçbir yardımını esirgemeyen değerli hocalarım Prof Dr. Mehmet ÇAĞLIYAN, Prof. Dr. Kerim KOCA ve Prof. Dr. Binali MUSAYEV'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

21.07.1977 yılında Karabük'te doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Karabük’te tamamladım. 1994 yılında Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 1998 yılında mezun oldum ve aynı yıl içerisine açılan araştırma görevliliği sınavını kazandım. 2001 yılına Yüksek lisansımı tamamladım. 2002 yılında Kurumlararası yeniden atama yoluyla öğretmenlik başvurusunda bulundum ve atamam yapıldı. Şu anda Karabük Mehmet Vergili Fen Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.