İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ İNDİRGEMELERİ

İLKER BURAK GİRESUNLU

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ İNDİRGEMELERİ

İlker Burak GİRESUNLU

Yrd. Doç. Dr. Emrullah YAŞAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2013

TEZ ONAYI

İlker Burak GİRESUNLU tarafından hazırlanan "İkinci Mertebeden Adi Diferensiyel Denklemlerin Simetri İndirgemeleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

Üye: Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Yrd. Doç. Dr. Emrullah YAŞAR
Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
İmza

Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat REİS
Uludağ Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi
Makine Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

.. / .. / ....

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.. / .. / ….

İmza

İlker Burak GİRESUNLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ İNDİRGEMELERİ

İlker Burak GİRESUNLU

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

Bu çalışmada ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerin (ADD) Lie grup teorisi ve bazı yarı-algoritmik metotlarla çözümlerinin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir. Söz konusu denklem sınıfının şayet Lie grup üreteci mevcutsa mertebesinin nasıl düşürülebileceği gösterilmiştir. Özellikle göz önüne alınan ADD in en az iki Lie üreteci mevcutsa dört farklı kanonik gruptan birine nasıl girebileceği 33. Painlevé-Gambier denklemi üzerinde ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. Öte yandan her diferensiyel denklemin Lie üreteci mevcut olmayabilir. Lie üretecinin mevcut olmadığı ya da aşikar olduğu hallerde mertebenin düşürülmesi ve çözüme nasıl ulaşılabileceği, teorinin genelleştirilmesi olan $\lambda-$simetri metodu ile gösterilmiştir. 2000 li yılların başlarında ortaya atılan ve büyük bir gelişim gösteren bu yeni teorinin uygulanabilirliği üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda lineer olmayan salınım denklemi göz önüne alınmış ve $\lambda-$simetri metodu ile denklemin integral çarpanı, indirgemesi ve çözümü elde edilmiştir. Bu metodun kapsayıcılığı iki yarı-algoritmik metot olan Prelle-Singer (P-S) ve eşlenik (adjoint) simetri metotları ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie Grup Teorisi, $\lambda-$Simetri, Prelle-Singer Metodu, Eşlenik Simetri, Simetri İndirgemeleri, İlk İntegraller
2013, vi + 45 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

SYMMETRY REDUCTİONS OF NONLİNEAR SECOND-ORDER ORDİNARY DİFFERENTİAL EQUATİONS

İlker Burak GİRESUNLU

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Emrullah YAŞAR

In this thesis, solution of second-order nonlinear ordinary differential equations are obtained by Lie group theory and some semi-alghoritmic methods. If one has a Lie group generator of the given equation, then it's shown that how to reduce order of the equation. Especially, when at least two Lie group generator of the equation under consideration is exist, then we show that how the equations can enter one of the four different canonical group is shown in detail on 33. Painlevé-Gambier equation. On the other hand, Lie generator of each diferential equations is not available. If any Lie group generator is not exist or is trivial, then it's shown that reduction of order and how to obtain solution with $\lambda-$symmetry method. This new theory which comes out in the early stages 2000 and there are lots of improvement so far, focused on the applicability. In this respect, the nonlinear oscillation equation is considered and integrating factor, reduction and solution of the equation are obtained by $\lambda-$symmetry method. It's shown that the comprehensiveness of this method compared with semi-algorithmic methods which are Prelle-Singer (P-S) method and adjoint symmetry method.

Key words: Lie Group Theory, $\lambda-$Symmetry, Prelle-Singer Method, Adjoint Symmetry, Symmetry Reductions, First Integrals
2013, vi + 45 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında, yaptığım çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren araştırmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek gelişimime katkıda bulunan, çalışmalarım süresince her anlamda bana destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Emrullah YAŞAR'a saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca, maddi ve manevi hiçbir desteğini esirgemeyip beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkürler.

İlker Burak GİRESUNLU
.. / .. / ….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
ξ,η	Sonsuz küçük simetriler
X	Vektör alanı (Operatör)
$X^{(n)}$	Lie simetriye göre n. uzanım
$X^{[\lambda,(n)]}$	$\lambda-$simetriye göre n. uzanım
μ	İntegral çarpanı
I	İlk integral
D	Total türev
$[\,,\,]$	Kamutatör
x,y	Orijinal değişkenler
t,u	Kanonik değişkenler

Kısaltmalar	**Açıklama**
ADD	Adi diferensiyel denklem
KDD	Kısmi diferensiyel denklem
P-S	Prelle-Singer

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi doğada meydana gelen fiziksel olaylar diferensiyel denklemlerle modellenmektedir. Homojen bir çubuktaki ısı iletiminin ikinci mertebeden parça türevli diferensiyel denklemle, duvara bağlanmış bir sarkacın yaptığı salınım hareketinin ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemle (ADD) ifade edilmeleri birer örnektir. Diferensiyel denklemlerde göz önüne alınan problemin çözümünün var olup olmadığı, varsa çözümün tekliği klasik olarak yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bunun yanında çözümün yapısının araştırılması da ilgi çeken bir konudur. Son yüzyılda oldukça üzerinde durulan ve çalışılan bu konudaki ilk çalışmalar 1800 lü yılların sonuna kadar gitmektedir. Zamanın Norveçli matematikçi Sophus M. Lie, Galois'in cebirsel denklemler üzerindeki grup teorisi ile uğraştı. Diferensiyel denklemlerin kabul ettiği dönüşüm grupları aracılığıyla sınıflandırılması, mertebe düşürülmesi, lineerleştirilmesi ve çözümlerinin elde edilmesi gibi problemleri çözmeyi başardı. Lie'nin ortaya attığı fikir oldukça yalın ve netti. Mertebesi kadar uzatılmış vektör alanı için göz önüne alınan denklemin değişmez kalması prensibinden hareketle üreteç denilen lineer operatörlerin elde edilmesi ana nokta idi. Buradaki problem, üreteçlerin kullanılması ile denklemin mertebesinin düşürülmesi (ADD de) ve çözümünün elde edilmesindeki belirleyici denklemleri çözmedeki hesaplama zorluğu idi. Teori, 1960 lı yıllara kadar fazla ilgi çekmedi. 1960 lı yılların sonunda L. Ovsiannikov ve öğrencileri (özellikle N. H. Ibragimov) teoriyi kullanarak birçok önemli denklemin sınıflandırması, korunum kanunları ve çözümlerini elde etti. 1990 lı yılların sonu ve 2000 li yılların başında üreteç hesaplamak için bilgisayar paketlerinin kullanılmaya başlanması ile teori çok ilgi çekmeye başladı.

Bu çalışmada yukarıda kısaca değindiğimiz teoriyi kullanarak bazı özel ikinci mertebeden lineer olmayan ADD lerin mertebe indirgemeleri, integral çarpanları ve çözümleri araştırılmıştır.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm önbilgilere ayrılmıştır. Bu bağlamda önce Lie grupları tanıtılmış daha sonra bu teorinin genellemesi olan $\lambda-$simetri yaklaşımı incelenmiştir. Ayrıca Prelle-Singer (P-S) ve eşlenik (adjoint) simetri metotları da kısaca özetlenmiştir. Üçüncü bölüm teorinin iki önemli lineer olmayan ADD e uygulaması yapılmıştır. Son bölümde ise sonuç ve tartışmalar verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.0. Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda ikinci mertebeden ADD için klasik Lie simetri metodu ele alınmıştır. Bu metot literatürde temel metottur.

İkinci kısımda son yıllarda geliştirilen $\lambda-$simetri metodu ile ikinci mertebeden ADD lerin simetri indirgemeleri ele alınmıştır. $\lambda-$simetri metodu, ele alınan ADD in simetrisi veya aşikar olmayan Lie simetrisi olmadığı durumlar için geliştirilmiştir.

Üçüncü kısımda P-S metodu ele alınarak ikinci mertebeden ADD in indirgenerek ilk integrali uygun kabullerle bulunmaktadır.

Son olarak dördüncü kısım ise ikinci mertebeden ADD lerin eşlenik simetri metoduyla indirgeyerek ilk integralinin bulunmasını ele almaktadır.

2.1. Lie Simetri

İkinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden ADD lerin sonsuz küçük simetrileri, belirleyici (overdetermined) denklemler yardımıyla hesaplanabilir. Bu kısımda,

$$y'' - f(x, y, y') = 0 \qquad (2.1.1)$$

ikinci mertebe ADD lerin simetri hesaplamalarına yönelik metotlar verilecektir.

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.1.2)$$

sonsuz küçük operatörünü ele alalım. Buradan belirleyici denklem

$$X^{(2)}\left(y''-f(x,y,y')\right)\Big|_{y''=f(x,y,y')}=(\eta^{(2)}-\eta^{(1)}f_{y'}-\eta f_y-\xi f_x)\Big|_{y''=f(x,y,y')} \qquad (2.1.3)$$
$$=0$$

olup buradaki uzanımlar

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}&=D_x(\eta)-y'D_x(\xi)\\ \eta^{(2)}&=D_x(\eta^{(1)})-y''D_x(\xi)\end{aligned} \qquad (2.1.4)$$

dir (Ibragimov 2006). (2.1.4) uzanım formülleri (2.1.3) belirleyici denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})y'^2-\xi_{yy}y'^3-\xi f_x-\eta f_y+(\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y)f\\ &-\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-y'^2\xi_y\right)f_{y'}=0\end{aligned} \qquad (2.1.5)$$

belirleyici denklemi elde edilir. Burada (2.1.5) denklemi x,y,y' değişkenlerini içerdiği halde ξ,η fonksiyonları y' değişkenini içermemektedir. Dolayısıyla y' nün polinomu olarak yazıldığında y' nün her bir kuvvetinin katsayısı sıfıra eşittir.

Sonuç olarak ξ ve η fonksiyonları, belirleyici denklemler yardımıyla hesaplanarak (2.1.2) operatörü elde edilir.

Yukarıda bahsedilen belirleyici denklemlerin tüm çözümlerinin kümesi (yani sonsuz küçükler olan ξ, η ve dolayısıyla operatörler) aşağıda tanıtılacak olan Lie cebir yapısını oluşturur.

Aşağıdaki birinci mertebe lineer kısmi diferensiyel operatörlerini

$$X_1=\xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \text{ ve } X_2=\xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \qquad (2.1.6)$$

göz önüne alalım.

Tanım 2.1.1 : (2.1.6) operatörlerinin $\left[X_1, X_2\right]$ kamutatörü

$$\left[X_1, X_2\right] = X_1X_2 - X_2X_1$$

ya da denk olarak

$$\left[X_1, X_2\right] = \left(X_1\left(\xi_2\right) - X_2\left(\xi_1\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(X_1\left(\eta_2\right) - X_2\left(\eta_1\right)\right)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.1.7}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.2 : L_r, (2.1.6) formundaki herhangi r tane lineer bağımsız operatör ile gerilmiş $r-$boyutlu lineer uzay olsun. Yani

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_rX_r, \quad c_1, c_2, ..., c_r = sabit.$$

L_r uzayı kamutatör altında kapalı ise yani $X, Y \in L_r$ iken $\left[X, Y\right] \in L_r$ ise L_r ye **Lie Cebri** denir. Bu tanım denk olarak

$$\left[X_i, X_j\right] \in L_r \;\; (i, j = 1, ..., r) \text{ ise } \left[X_i, X_j\right] = c^k{}_{ij}X_k$$

dir. Buradaki $c^k{}_{ij} = sabit$ tir.

Tanım 2.1.3 : L_r, X_i $(i = 1, ..., r)$ lerin gerdiği Lie cebri olsun. L_s, $X_1, X_2, ..., X_s$, $s < r$ tarafından gerilen L_r nin bir alt uzayı olmak üzere, eğer $X, Y \in L_s$ için $\left[X, Y\right] \in L_s$ ise ya da $\left[X_i, X_j\right] \in L_s$ $(i, j = 1, ..., s)$ ise L_s alt uzayına, L_r nin bir **alt cebri** denir.

Üstelik şayet $X \in L_s$, $Y \in L_r$ için $\left[X, Y\right] \in L_s$ ya da $\left[X_i, X_j\right] \in L_s$, $\left(i = 1, ..., s; \; j = 1, ..., r\right)$ ise L_s, L_r nin bir **ideal**idir.

Bir Lie Cebri, alt cebiri ve diğer özellikleri ortaya çıkarmanın en uygun yolu kamutatör tablosu oluşturmaktır. Buradaki amaç, Lie'nin orijinal çalışmalarında bahsettiği (Ibragimov 2006) iki boyutlu L_2 cebrini kullanarak kanonik koordinatlar yardımıyla göz önüne alınan denklemi basit integre edilebilir forma dönüştürmektir.

Teorem 2.1.4 : Herhangi iki-boyutlu Lie cebri, uygun t,u kanonik değişkenleri ve uygun bazlar ile aşağıdaki tabloda belirtilen *benzer olmayan* dört forma dönüştürülebilir.

Tablo 2.1.5 : L_2 nin yapısı ve standart formu

Tipi	L_2 **nin Yapısı**	L_2 **nin Standart Formu**
I	$[X_1, X_2] = 0, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}$
II	$[X_1, X_2] = 0, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial u}$
III	$[X_1, X_2] = X_1, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}$
IV	$[X_1, X_2] = X_1, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}$

Lie, $2-$boyutlu bir Lie cebrini kabul eden tüm ikinci mertebeden ADD ler için yukarıda verilen teoremin geçerli olduğunu göstermiştir. Metot, denklemin Tablo 2.1.5 teki dört tipe göre sınıflandırmayla işler. Yani, oluşturulan kanonik değişkenlerle L_2 Lie cebirli denklemler, Tablo 2.1.5 deki standart forma indirgenir. İndirgenen denklem olan

$$u'' - g(t,u,u') = 0 \tag{2.1.8}$$

Tablo 2.1.6 da verilen dört integrallenebilir formdan birine dönüşür. Ve böylece integral alınarak genel çözüme ulaşılır.

Şimdi Lie metodunu adım adım gösterelim.

1. Adım : Verilen denklemin, operatörleri ile Tablo 2.1.5 e göre yapısı belirlenir.
2. Adım : Denklemin tipine göre kanonik değişkenler bulunur:

$$\begin{array}{lll} \textbf{I. Tip :} & X_1(t)=1,\quad X_2(t)=0; & X_1(u)=0,\quad X_2(u)=1 \\ \textbf{II. Tip :} & X_1(t)=0,\quad X_2(t)=0; & X_1(u)=1,\quad X_2(u)=t \\ \textbf{III. Tip :} & X_1(t)=0,\quad X_2(t)=t; & X_1(u)=1,\quad X_2(u)=u \\ \textbf{IV. Tip :} & X_1(t)=0,\quad X_2(t)=0; & X_1(u)=1,\quad X_2(u)=u \end{array} \tag{2.1.9}$$

Bu değişkenler elde edildikten sonra (2.1.1) denklemi t,u kanonik değişkenlerine göre yeniden yazılır. Burada, t yeni bağımsız değişken, u yeni bağımlı değişkendir. Elde edilen (2.1.8) kanonik denklem Tablo 2.1.6 da verilen formlardan birisi haline gelecektir. Dolayısıyla klasik çözüm metotlarıyla kanonik denklemin genel çözümüne ulaşılabilir.

3. Adım : Son olarak kanonik genel çözümde t,u değişkenleri yerine x,y orijinal değişkenleri yazılır. Böylece verilen denklemin genel çözümüne ulaşılmış olur.

Tablo 2.1.6 : L_2 cebrini kabul eden ikinci mertebeden denklemlerin dört tipi

Tip	L_2 **nin Standart Formu**	**Denklemin Kanonik Formu**
I	$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial u}$	$u''=g(u')$
II	$X_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=t\frac{\partial}{\partial u}$	$u''=g(t)$
III	$X_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=t\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial u}$	$u''=\frac{1}{t}g(u')$
IV	$X_1=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=u\frac{\partial}{\partial u}$	$u''=u'g(t)$

2.2. $\lambda-$ Simetri Metodu

X , $M\subset X\times U$ açık alt kümesinde tanımlı operatör ve $M^{(n)}\subset X\times U^{(n)}$ jet uzayı olsun. Elemanları $(x,y^{(n)})=(x,y,y',...,y^{(n)})$ olmak üzere $i=1,2,...,n$ için $y^{(i)}$ ler x e göre y nin $i.$ mertebe türevleridir.

$$y^{(n)}-F\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)=0 \tag{2.2.1}$$

$n.$ mertebeden bir ADD in Lie simetrileri iki basit adımda hesaplanır. Bunlar genel uzanım formülü ve sonsuz küçük değişmezlik prensibidir. (2.2.1) ADD in değişmezlik prensibini sağlaması için X operatörünün $n.$ uzanımını göz önüne almak gerekir. Bu durumda değişmezlik prensibi

$$X^{(n)}\left(y^{(n)}-F\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)\right)=0$$

biçiminde olup $X^{(n)}$ e X nin n. *uzanımı* denir.

Şimdi $\lambda\in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ olmak üzere X nin yeni bir uzanımını tanımlayalım (Muriel ve Romero 2001).

Tanım 2.2.1 (Yeni Uzanım Formülü) **:** $X=\xi\left(x,y\right)\dfrac{\partial}{\partial x}+\eta\left(x,y\right)\dfrac{\partial}{\partial y}$, M de tanımlı bir operatör ve $\lambda\in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ keyfi fonksiyon olsun. X nin $n.$ mertebe $\lambda-$uzanımı $X^{[\lambda,(n)]}$ ile gösterilir. Uzanım formülleri

$$\begin{aligned}
&\eta^{[\lambda,(0)]}\left(x,y\right)=\eta\left(x,y\right),\\
&\eta^{[\lambda,(i)]}\left(x,y,y',...,y^{(i-1)}\right)=D_x\left(\eta^{[\lambda,(i-1)]}\left(x,y,y',...,y^{(i-1)}\right)\right)-D_x\left(\xi\left(x,y\right)\right)y^{(i)}\\
&\qquad\qquad+\lambda\left(\eta^{[\lambda,(i-1)]}\left(x,y,y',...,y^{(i-1)}\right)-\xi\left(x,y\right)y^{(i)}\right)
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

şeklinde olmak üzere X operatörünün $n.$ uzanımı

$$X^{[\lambda,(n)]}=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{i=0}^{n-1}\eta^{[\lambda,(i)]}\left(x,y,y',...,y^{(i)}\right)\frac{\partial}{\partial y^{(i)}}$$

biçimindedir.

Şayet, $\lambda=0$ ise X nin $n.$ mertebe $\lambda-$uzanımı, X nin Lie anlamında $n.$ uzanımıdır.

Tanım 2.2.2 : $n.$ mertebe (2.2.1) ADD için şayet

$$X^{[\lambda,(n)]}\left(y^{(n)}-F\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)\right)\Big|_{y^{(n)}=F\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)}=0$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda\in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ varsa X , M de tanımlı bir $C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)-$ simetridir. Yani X , denklemin bir $\lambda-$simetrisidir.

Teorem 2.2.3 :

1. $\lambda\in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ için X , (2.2.1) ADD in bir $\lambda-$simetrisi olduğunda $\mu\in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ olmak üzere

$$\left[X^{[\lambda,(n-1)]},D\right]=\lambda X^{[\lambda,(n-1)]}+\mu D$$

dir.

2. Tersine, eğer $\lambda,\mu\in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ olmak üzere $[V,D]=\lambda V+\mu D$ eşitliğini sağlayan $V=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta_0(x,y)\frac{\partial}{\partial y}+\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i(x,y,y',...,y^{(i)})\frac{\partial}{\partial y^{(i)}}$, $M^{(n-1)}$ de bir operatörü ise M de tanımlı $X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ operatörü bir $\lambda-$simetridir ve

$$V=X^{[\lambda,(n-1)]}$$

dir.

Şayet X, bir $C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)-$simetri ise 1. mertebe ve $(n-1)$. mertebe denklemler için indirgeme prosedürü olduğunu göreceğiz. Bu sonuç ile $\lambda \in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ olmak üzere X, bir $\lambda-$simetri ise düşük mertebeden invaryantların türevleriyle X nin $\lambda-$uzanımı için invaryantları hesaplayabileceğimiz bir teorem ifade edelim.

Teorem 2.2.4 : X, $M \subset \mathrm{X} \times U$ da bir operatör ve $\lambda \in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ olsun. Şayet,

$$X^{[\lambda,(k)]}\left(\alpha\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right)\right) = X^{[\lambda,(k)]}\left(\beta\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right)\right) = 0$$

olmak üzere $\alpha = \alpha\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right), \beta = \beta\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right) \in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ ise o zaman

$$X^{[\lambda,(k)]}\left(\frac{D_x \alpha\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right)}{D_x \beta\left(x, y, y', ..., y^{(k)}\right)}\right) = 0$$

dır.

Bir ADD in mertebe indirgemesinin $C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)-$simetride nasıl olduğunu göstermek için aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.2.5 : $\lambda \in C^{\infty}\left(M^{(1)}\right)$ olmak üzere X, bir $\lambda-$simetri, ayrıca $z = z(x, y)$ ve $w = w(x, y, y')$, $X^{[\lambda,(n)]}$ nin bağımsız 1. mertebe invaryantları olsun. (2.2.1) in genel çözümü, $F_r\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) = 0$ denkleminin çözümü ve $w = w(x, y, y')$ yardımcı denklemi ile elde edilir.

Şimdi de (2.1.1) ADD için integral çarpanı ve ilk integral ile $\lambda-$simetri arasındaki ilişkileri birer teoremle ifade edelim.

Teorem 2.2.6 :

a) Şayet $I\left(x, y, y'\right)$, (2.1.1) in bir ilk integrali ise $\mu = I_{y'}$ denklemin bir integral çarpanıdır.

b) Tersine, şayet $\mu(x,y,y')$, (2.1.1) in bir integral çarpanı ise $\mu = I_{y'}$ olacak biçimde bir $I(x,y,y')$ ilk integrali mevcuttur.

Teorem 2.2.7 :

a) Şayet $I(x,y,y')$, (2.1.1) ADD in bir ilk integrali ise o zaman $X = \partial_y$ operatörü (2.1.1) in bir $\lambda-$simetrisidir. Burada $\lambda = -I_y / I_{y'}$ ve $X^{[\lambda,(1)]} I = 0$ dır.

b) Tersine, şayet uygun λ için $X = \partial_y$, (2.1.1) in bir $\lambda-$simetrisi ise $X^{[\lambda,(1)]} I = 0$ olacak biçimde (2.1.1) in bir $I(x,y,y')$ ilk integrali mevcuttur.

$w = w(x,y,y')$ fonksiyonu, aşikar olmayan bir ilk integral olsun. Teorem 2.2.7 den

$$w_y + \lambda w_{y'} = 0 \tag{2.2.3}$$

ile (2.1.1) denkleminin integral çarpanı elde edilir.

Bununla birlikte $I(x,y,y') = G(x, w(x,y,y')) = G(x,w)$ için Teorem 2.2.6 dan

$$\mu = G_w w_{y'} \tag{2.2.4}$$

ile integral çarpanı elde edilir (Muriel ve Romero 2009).
Şimdi ikinci mertebeden ADD için Prelle-Singer (P-S) metodunu verelim (Chandrasekar ve ark. 2005).

2.3. Prelle-Singer (P-S) Metodu

$$y'' = \frac{P}{Q}, \quad P, Q \in \mathbb{C}[x,y,y'] \tag{2.3.1}$$

formundaki ikinci mertebeden ADD i göz önüne alalım. P ve Q polinomları, x, y, y' ya bağlı kompleks polinomlardır. (2.3.1) ADD nin $I(x,y,y') = C$ (C çözümler üzerinde bir sabit olmak üzere) formunda bir ilk integral kabul ettiğini varsayalım. Total türevin kullanılması ile

$$DI = I_x dx + I_y dy + I_{y'} dy' = 0 \tag{2.3.2}$$

elde edilir.

(2.3.1) denklemi, $\frac{P}{Q}dx - dy' = 0$ formunda yazılıp $S(x, y, y')y'dx - S(x, y, y')dy$ *null* terimi eklendiğinde

$$\left(\frac{P}{Q} + Sy'\right)dx - Sdy - dy' = 0 \tag{2.3.3}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.3.2) ve (2.3.3) denklemleri tarafından verilen $1-$formlar orantılı olmalıdır. (2.3.3) denklemi $R(x, y, y')$ integral çarpanı ile çarpılırsa

$$DI = R(\phi + Sy')dx - RSdy - Rdy' = 0, \qquad f = \frac{P}{Q} \tag{2.3.4}$$

olur. (2.3.2) ve (2.3.4) denklemleri karşılaştırıldığında

$$I_x = R\left(f + y'S\right),$$

$$I_y = -RS\,, \tag{2.3.5}$$

$$I_{y'} = -R$$

olduğu açıktır. Bu takdirde $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xy'} = I_{y'x}$, $I_{yy'} = I_{y'y}$ uyumluluk (=compability) koşulları (2.3.5) e uygulanırsa

$$D[S] = -f_y + Sf_{y'} + S^2 \tag{2.3.6}$$

$$D[R]=-R\left(S+f_{y'}\right) \tag{2.3.7}$$

$$R_y=R_{y'}S+RS_{y'} \tag{2.3.8}$$

elde edilir.

(2.3.6)-(2.3.8) denklem sistemi şu şekilde çözülmektedir. $f(x,y,y')$, (2.3.6) denkleminde yerine yazılarak $S(x,y,y')$ çözülür. Sonra $f(x,y,y')$ ve bulunan $S(x,y,y')$ fonksiyonları, (2.3.7) denkleminde yerlerine yazılarak $R(x,y,y')$ elde edilir. Son olarak da $S(x,y,y')$ ve $R(x,y,y')$, ilave bir kısıtlama olan (2.3.8) denklemini sağlamalıdır. Bu üç denklemi sağlayan $S(x,y,y')$ ve $R(x,y,y')$ fonksiyonlarına bağlı ilk integral

$$\begin{aligned} I(x,y,y') &= \int R(f+y'S)dx-\int\left(RS+\frac{d}{dy}\int R(f+y'S)dx\right)dy \\ &\quad -\int\left\{R+\frac{d}{dy'}\left[\int R(f+y'S)dx-\int\left(RS+\frac{d}{dy}\int R(f+y'S)dx\right)dy\right]\right\}dy' \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

formülünden elde edilir ((2.3.5) denklemlerinin integralleri alınarak (2.3.9) denklemi elde edilebilmektedir).

Her bir bağımsız (S,R) ikilisi için (2.3.9) bir ilk integral tanımlamaktadır. Böylece (S_i,R_i), $i=1,2$ bağımsız ikilisi, (2.3.9) ile bağımsız ilk integral vermektedir. Bu ilk integral (2.3.1) denkleminin integrallenebilirliğini garanti eder. (2.3.6) ve (2.3.7) denklemleri çözülüp elde edilen S ve R fonksiyonlarının uyumluluğu (2.3.8) ile araştırılır. Ancak kolayca görülebilir ki, çoğu zaman (2.3.6) ve (2.3.7) den elde edilen (S,R) ikilisi (2.3.8) denklemini sağlamaz.

Şayet (S_1, R_1), (2.3.6)-(2.3.8) denklem sistemini sağlarken ve (S_2, R_2), (2.3.6)-(2.3.7) denklemlerini sağlayıp (2.3.8) denklemini sağlamıyorsa (S_2, R_2) ikilisini değiştirerek (2.3.8) i sağlayan yeni bir $(S_2, \hat{R}_2)$ ikilisi elde edilebilir. Burada

$$\hat{R}_2 = J(x, y, y')R_2 \tag{2.3.10}$$

biçiminde alınıp (2.3.7) denklemi sağlanmalıdır (Chandrasekar ve ark. 2005). Dolayısıyla (2.3.10) denklemi (2.3.7) de yerine yazılırsa

$$\left(J_x + y'J_y + fJ_{y'}\right)R_2 + JD[R_2] = -JR_2\left(S_2 + f_{y'}\right) \tag{2.3.11}$$

elde edilir. J bir ilk integral veya onun bir fonksiyonu ise bu takdirde R_2 için (2.3.7) denklemi elde edilir. Diğer bir değişle, J bir ilk integral olduğunda (2.3.10) denklemi (2.3.7) denkleminin bir J katına dönüşür. Dolayısıyla S_2 ile birlikte $\hat{R}_2$, (2.3.6)-(2.3.8) denklemlerini sağlar. Özetle, ilk olarak (2.3.6) ve (2.3.7) denklemlerinden S ve R fonksiyonları elde edilip (2.3.8) denkleminde uyumlulukları araştırılır. Uyumlu iseler (S, R) ikilisine karşılık gelen ilk integral (2.3.9) ile elde edilir. Uyumlu değil iseler $\hat{R}_2 = J(I_1)R_2$ ile R değiştirilerek (2.3.8) denkleminden $J(I_1)$ bulunur. Buradan da $(S_2, \hat{R}_2)$ ikilisi ile ikinci bir ilk integral elde edilebilir.

Şimdi, ikinci mertebeden ADD için eşlenik simetri metodunu verelim (Hydon 1999, Guha ve ark 2009),

2.4. Eşlenik (Adjoint) Simetri

(2.2.1) $n.$ mertebeden ADD i, ona karşılık gelen

$$Df = \left(\partial_x + y'\partial_y + \ldots + F\partial_{y^{(n-1)}}\right) f = 0 \tag{2.4.1}$$

$(n+1)$ değişkenli birinci mertebeden KDD e denktir (Bluman ve Anco 2002). Burada $y', y'', \ldots$ nicelikleri x, y gibi bağımsız değişkenler gibi düşünülebilir. (2.2.1) in ilk integralleri ile bu denkliğin sağlandığı görülebilir. Tanım gereği ilk integral $I = I\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ fonksiyonudur öyle ki (2.2.1) in çözümleri boyunca sabittir. Yani

$$DI = I_x + y'I_y + y''I_{y'} + \ldots + FI_{y^{(n-1)}} = 0\,. \tag{2.4.2}$$

dır. Bir $I = I\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = I_0$ ilk integralini belirledikten sonra denklem

$$y^{(n-1)} = F_1\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}; I_0\right)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $I_{y^{(n-1)}} \neq 0$ dır. Bu da bize bir ilk integralin varlığının diferensiyel denklemin mertebesinde indirgeme sağladığını gösterir. Ayrıca her ilk integral (2.4.1) lineer kısmi diferensiyel denklemin (KDD) bir çözümüdür.

Kabul edelim ki $\phi^{\alpha}\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$, (2.2.1)/(2.4.1) in fonksiyonel bağımsız çözümler kümesini göstersin. Her bir ϕ^{α}, bir ilk integral olduğundan

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n \text{ için } \phi^{\alpha}\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = I_0^{\alpha} \tag{2.4.3}$$

dir. Sonuç olarak (2.4.3) ten tüm türevlerin yok edilmesi ile (2.2.1) denkleminin genel çözümü

$$y = y\left(x; I_0^1, I_0^2, \ldots, I_0^n\right)$$

elde edilir.

Daha önce belirtildiği gibi tek bir ilk integralin bile belirlenmesi kolay olmayan bir durumdur. Bu yüzden prensipte yukarıdaki prosedür iyi işlemesine rağmen pratikte zorluklar mevcuttur.

Aslında ADD lerin simetrileri üzerine mevcut literatürün çoğu Lie simetrisiyle sınırlıdır. (2.2.1)/(2.4.1) ADD i,

$$\left[X, D\right] = GD$$

olduğunda

$$X^{(n)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y'} + \ldots + \eta^{(n)}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}, \quad \eta^{(i)} = \frac{d\eta^{(i-1)}}{dx} - y^{(i)}\frac{d\xi}{dx}$$

operatörlü Lie simetrisini kabul eder. Burada $G = G\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ herhangi bir fonksiyondur. (2.2.1) ADD i için sonsuz küçük simetri üreteçleri,

$$\eta^{(n)} = \xi F_x + \eta F_y + \eta^{(1)} F_{y'} + \ldots + \eta^{(n-1)} F_{y^{(n-1)}} \qquad (2.4.4)$$

lineerleştirilmiş simetri koşulundan belirlenir. $Q = \eta - y'\xi$ karakteristikleri cinsinden bu koşul aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$D^n Q - F_{y^{(n-1)}} D^{n-1} Q - \ldots - F_{y'} DQ - F_y Q = 0 \qquad (2.4.5)$$

Örneğin (2.1.1) ikinci mertebe ADD için lineerleştirilmiş simetri koşulu

$$D^2 Q - f_{y'} DQ - f_y Q = 0 \qquad (2.4.6)$$

ikinci mertebe lineer KDD dir.

Aşağıdaki denklem, lineerleştirilmiş simetri koşulu olarak bilinir ve çözümlerine de genellikle **eşlenik (adjoint) simetrileri** denir:

$$D^n\Lambda + D^{n-1}\left(F_{y^{(n-1)}}\Lambda\right) - D^{n-2}\left(F_{y^{(n-2)}}\Lambda\right) + \ldots + (-1)^{n-1}F_y\Lambda = 0 \tag{2.4.7}$$

(2.4.7) nin çözümleri ne simetriler ne de simetri üreteçleridir. Bu yüzden ko-karakteristik olarak adlandırılır. Çözümleri bulmak için bir Λ kabulü alınır. Örneğin Λ, $y^{(n-1)}$ den bağımsız olması veya daha uygun olarak rasyonel bir fonksiyon kabul edilebilir. (2.2.1) ADD ini $dx, \left(dy - y'dx\right), \ldots, \left(dy^{(n-1)} - Fdx\right)$ $1-$formları ile beraber göz önüne alalım.

$1-$formun tam olması özelliği kullanılırsa (null formların eklenip çıkarılması ile) aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} &-\left(S_0y' + S_1y'' + \ldots + S_{n-2}y^{(n-1)} + S_{n-1}F\right)dx \\ &+\left(S_0dy + S_1dy' + \ldots + S_{n-2}dy^{(n-2)} + S_{n-1}dy^{(n)}\right) = dI\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

(2.4.8) in sağ tarafındaki total türev açılırsa

$$I_x = -\left(S_0y' + S_1y'' + \ldots + S_{n-2}y^{(n-1)} + S_{n-1}F\right) \tag{2.4.9}$$

$$I_y = S_0, I_{y'} = S_1, \ldots, I_{y^{(n-1)}} = S_{n-1} \tag{2.4.10}$$

elde edilir.

Açıktır ki, I, aşağıdaki integrallenebilme koşullarını sağlarsa (2.2.1) in ilk integralidir.

$$I_{xy^{(j)}} = I_{y^{(j)}x}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2.4.11}$$

$$I_{y^{(j)}y^{(k)}} = I_{y^{(k)}y^{(j)}}, \quad 0 \le j \le k \le n-1 \tag{2.4.12}$$

(2.4.11) integrallenebilme koşulları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$-D\left[S_{n-1}\right]=\left(F_{y^{(n-1)}}S_{n-1}+S_{n-2}\right) \tag{2.4.13}$$

$$-D\left[S_{n-2}\right]=\left(F_{y^{(n-2)}}S_{n-1}+S_{n-3}\right) \tag{2.4.14}$$

……………………………………..

$$-D\left[S_{2}\right]=\left(F_{y''}S_{n-1}+S_{1}\right) \tag{2.4.15}$$

$$-D\left[S_{1}\right]=\left(F_{y'}S_{n-1}+S_{0}\right) \tag{2.4.16}$$

$$-D\left[S_{0}\right]=F_{y}S_{n-1} \tag{2.4.17}$$

Şayet

$$\frac{\partial S_{n-1}}{\partial y^{(j)}}=\frac{\partial S_{j}}{\partial y^{(n-1)}},\quad 0\leq j\leq n-2 \tag{2.4.18}$$

ise (2.4.12) integrallenebilme koşullarının tümü sağlanır. Öncelik S_{n-1} in bilinmesidir. Kalan fonksiyonlar (2.4.13)-(2.4.17) denklemlerinden belirlenebilir. D total türevi kullanılarak art arda S_i ler yok edildiğinde

$$D^{n}\left[S_{n-1}\right]+D^{n-1}\left[F_{y^{(n-1)}}S_{n-1}\right]-D^{n-2}\left[F_{y^{(n-2)}}S_{n-1}\right]+\ldots+(-1)^{n-1}F_{y}S_{n-1}=0 \tag{2.4.19}$$

ifadesi elde edilir. (2.4.19) denklemi, (2.4.7) lineerleştirilmiş simetri denklemine karşılık gelen eşlenik denklemdir (Hydon 1999).

(2.4.19) denklemi, (2.4.7) lineerleştirilmiş simetri denklemine karşılık gelen eşlenik denklemdir. Böylece (2.2.1) in integral çarpanları, (2.4.19) un çözümleridir. Sonuç olarak (2.2.1) in bir S_{n-1} integral çarpanının belirlenmesi, bu denklemin bir çözümünün bulunmasına denktir.

P-S metodundaki R ve S fonksiyonlarının, eşlenik simetri metodundaki S_0 ve S_1 fonksiyonları ile

$$S_j \to RS_{j+1}, \quad j = 0,...,n-3 \text{ ve } S_{n-1} \to R$$

irtibatının mevcut olduğu gösterilmiştir (Guha ve ark. 2009). (2.4.19) denklemini çözmek için S_{n-1} fonksiyonu üzerinde bir kabul yapılmalıdır. Örneğin S_{n-1} fonksiyonunu, $y^{(n-1)}$ in bir polinomu biçiminde kabul edilebilir.

Chandrasekhar ve ark. çalışmalarında, S_{n-1} i rasyonel bir fonksiyon almışlardır. Bunun bir sonucu olarak eşlenik denklemin çözümü yerine S_i ler için uygun kabulle birinci mertebeden (2.4.13)-(2.4.17) denklem sistemi çözülmüştür. $S_{n-1} = \Lambda^i$ konumu ile diğer S_j ler ardışık olarak hesaplanır. Daha sonra bu fonksiyonların (2.4.18) yi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Böyle bir integral çarpanı var ve integrallenebilme koşulunu sağlandığı takdirde ilk integral

$$I^i = \int S_0^i\left(dy - y'dx\right) + S_1^i\left(dy' - y''dx\right) + ... + S_{n-1}^i\left(dy^{(n-1)} - Fdx\right) \tag{2.4.20}$$

Biçimindedir (Guha ve ark. 2009)

İşte bu nedenle çözüm için, ya doğrudan eşlenik denklem çözülür ve bazı uygun kabullerle S_{n-1} elde edilir ya da S_k lar için uygun kabul alarak n tane birinci mertebeden KDD leri çözülür. Genel olarak ikinci yolda, n tane birinci mertebeden lineer KDD sistemini çözme içerirken, ilkinde ise sadece bir tane yüksek mertebeden denklemi çözme vardır. Literatürdeki çalışmalara göre ikincisini uygulamak daha kolaydır.

Aynı zamanda Guha ve ark. 2013 teki çalışmasında göstermişlerdir ki, (2.2) alt kısmında bahsedilen λ fonksiyonu ile bu alt kısmında verilen S_0 ve S_1 fonksiyon çifti arasında yakın bir ilişki mevcuttur. Bu ilişki, aşağıdaki önerme de verilmiştir.

Önerme 2.4.1 : (2.2.1) *n.* mertebeden ADD ni göz önüne alalım. $\theta_1 = \left(dy - y'dx\right)$, $\theta_2 = \left(dy' - y''dx\right)$, ... , $\theta_n = \left(dy^{(n-1)} - Fdx\right)$ kontak formları verildiğinde, şayet S_i fonksiyonları mevcutsa, öyle ki $DI = \sum_{i=0}^{n-1} S_i\theta_i$ tamdır, bu takdirde I , aşağıdaki KDD denklem çiftini sağlayan S_i ler için ADD nin bir ilk integralidir:

$$-D\left[S_k\right] = \left(F_{y^{(k)}} S_{n-1} + S_{k-1}\right),\ k = n-1, ..., 0 \tag{2.4.21}$$

ve

$$\frac{\partial S_{n-1}}{\partial y^{(j)}} = \frac{\partial S_j}{\partial y^{(n-1)}},\ 0 \le j \le n-2 \tag{2.4.22}$$

Yukarıdaki (2.4.21) denkleminde örneğin $n = 1$ alındığında $D\left[S_0\right] = -F_y S_0$ skaler KDD i ve buradan S_0 integral çarpanı elde edilebilir.

$n = 2$ için (2.1.1) formundaki ADD i göz önüne alalım. (2.4.21) den

$$D\left[S_1\right] = -\left(f_{y'} S_1 + S_0\right) \tag{2.4.23}$$

ve

$$D\left[S_0\right] = -f_y S_1 \tag{2.4.24}$$

olduğu açıktır. Ayrıca (2.4.22) den $S_{1y} = S_{0y'}$ integrallenebilme koşulu elde edilir. Açıkça görülebilir ki, şayet (2.4.23) ve (2.4.24) denklemlerinden S_0 ve S_1 bulunabilirse bu takdirde ilk integral:

$$I\left(x, y, y'\right) = \int\left[S_0 dy + S_1 dy' - \left(S_0 y' + S_1 f\right) dx\right] \tag{2.4.25}$$

ile elde edilir.

(2.4.23) te S_0 fonksiyonunu çekip (2.4.24) de yerine yazarsak

$$D^2\left[S_1\right]+D\left[f_{y'}S_1\right]-f_yS_1=0 \tag{2.4.26}$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla (2.4.26) denkleminden S_1 tespit edilip (2.4.23) dan S_0 bulunur. Son olarak (2.4.25) denkleminden (2.1.1) ADD nin ilk integrali elde edilir. Diğer taraftan şayet $\lambda := -\frac{S_0}{S_1} = -\frac{I_y}{I_{y'}}$ olarak tanımlanırsa

$$I_y+\lambda I_{y'}=0 \tag{2.4.27}$$

olduğu açıktır. Burada

$$D\left[\lambda\right]=-\frac{D\left[S_0\right]}{S_1}+\frac{D\left[S_1\right]}{S_1^{\,2}}S_0 \tag{2.4.28}$$

dır. (2.4.28) denkleminde (2.4.23) ve (2.4.24) ifadeleri yazılırsa

$$D\left[\lambda\right]+\lambda^2=f_y+f_{y'}\lambda \tag{2.4.29}$$

elde edilir (Muriel ve Romero 2008a). Yani $\lambda=-\frac{S_0}{S_1}$ in bulunması için (2.4.23)-(2.4.24) denklem çifti yerine (2.4.29) denklemi kullanılabilir.

3. UYGULAMALAR

3.1. Lie Simetri Metodu Yardımıyla İndirgeme

En az iki Lie grup üreteci kabul eden (2.1.1) formundaki bir denklemin mertebesinin nasıl düşürülebileceği ve çözüme nasıl ulaşılacağı gösterilecektir. Bunu gösterilmek için Painlevé-Gambier denklem sınıfına ait olan 33. denklemi ele alalım.

Bu denklem

$$y'' - \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 = 0 \tag{3.1.1}$$

formundaki lineer olmayan bir ADD dir. Öncelikle denklemin aşikar olmayan Lie simetrilerini bulalım. Burada $f\left(x, y, y'\right) = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2$ dir. Dolayısıyla (2.1.2) operatörü için (2.1.5) denklemini sağlamalıdır. Yani

$$\left[\eta_{xx} + \left(2\eta_{xx} - \xi_{xx}\right) y' + \left(\eta_{yy} - 2\xi_{xy} + \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left(\eta_y - 2\xi_x\right)\right) y'^2 - \left(\xi_{yy} + 3\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\xi_y\right) y'^3\right]$$
$$+\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left[-2\eta_x y' - 2\left(\eta_y - \xi_x\right) y'^2 + \left(2\xi_y\right) y'^3\right] + \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\left[\eta\right] y'^2 = 0$$

dir. Yukarıdaki denklemi y' nün kuvvetleri cinsinden yazıldığında

$$-\xi_{yy} - 3\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\xi_y + 2\xi_y\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) = 0 \tag{3.1.2a}$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} - \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\eta_y + \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\eta = 0 \tag{3.1.2b}$$

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 2\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)\eta_x = 0 \tag{3.1.2c}$$

$$\eta_{xx}=0 \tag{3.1.2d}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.1.2a) dan

$$\xi(x,y)=c_1(x)\ln\left|\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\right|+c_2(x)$$

ve (3.1.2d) denkleminden de

$$\eta(x,y)=c_3(y)x+c_4(y)$$

olduğu açıktır. Burada işlemleri kolaylaştırmak için $c_1(x)=0$ olarak alırsak

$$\xi(x,y)=c_2(x)$$

olur. Yukarıda elde edilen $\xi(x,y)$ ve $\eta(x,y)$ fonksiyonlarını (3.1.2b) ve (3.1.2c) denklemlerinde yerine yazarsak

$$c_2(x)=k_1x\,,$$

$$c_3(y)=k_2\sqrt{y}(y-1)$$

ve

$$c_4(y)=0$$

bulunur. Dolayısıyla da

$$\xi(x,y)=k_1x$$

ve

$$\eta(x,y)=k_2x\sqrt{y}\,(y-1)$$

biçimindedir. Buradan (3.1.1) denklemi için

$$k_1=0,\;\; k_2=1 \text{ için } X_1=x\sqrt{y}\,(y-1)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.1.3a}$$

$$k_1=-1,\;\; k_2=0 \text{ için } X_2=-x\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.1.3b}$$

iki farklı aşikar olmayan Lie simetrisi elde edilir (Johnpillai ve ark. 2012).

Şimdi (3.1.3a) ve (3.1.3b) simetrileri için (3.1.1) denklemine Lie metodunu uygulayalım.

1. Adım : X_1 ve X_2 üreteçlerinin kamütatörü

$$\begin{aligned}[X_1,X_2]&=X_1\left(-x\frac{\partial}{\partial x}\right)-X_2\left(x\sqrt{y}\,(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)\\&=0+x\sqrt{y}\,(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\\&=X_1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1&=0.0-(-x)\left(x\sqrt{y}\,(y-1)\right)\\&=x^2\sqrt{y}\,(y-1)\\&\neq 0\end{aligned}$$

olduğundan (3.1.1) denklemi sınıflandırmadaki 3. tipe girmektedir.

2. Adım : 3. tipe ait kanonik değişkenleri bulalım. Bunun için $X_1(t)=0$, $X_2(t)=t$ ve $X_1(u)=1$, $X_2(u)=u$ denklemlerini göz önüne alalım. Bu denklemler çözülürse, t ve u kanonik değişkenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$t=\frac{1}{x},\ u=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\right| \tag{3.1.4}$$

Burada total türevde değişken değiştirme (Ibragimov 2006) özelliği kullanılırsa

$$D_x=D_x\left(\frac{1}{x}\right)D_t$$
$$D_x=-\frac{1}{x^2}D_t$$
$$D_x=-t^2D_t$$

elde edilir. u değişkeninde t nin değeri yazılırsa u

$$u=t\ln\left|\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\right|$$

şeklinde olup, buradan y çekilirse

$$y=\left(\frac{1+e^{u/t}}{1-e^{u/t}}\right)^2$$

olarak elde edilir. Şimdi yukarıdaki ifadenin total türevlerini alarak y' ve y'' nü elde edelim. Sırasıyla,

$$y'=4\left(u-u't\right)e^{u/t}\,\frac{1+e^{u/t}}{\left(1-e^{u/t}\right)^3}$$

ve

$$y''=4\frac{e^{u/t}}{\left(e^{u/t}-1\right)^4}\begin{bmatrix} u''\left(t^3+4t^2e^{u/t}-t^3e^{2u/t}\right)+u'^2\left(t^2+t^2e^{2u/t}\right) \\ +u'\left(-8tue^{u/t}-2tue^{2u/t}-2tu\right)+u^2\left(1+4e^{u/t}+e^{2u/t}\right)\end{bmatrix}$$

elde edilir. (3.1.1) denkleminde, elde edilen y, y' ve y'' değerleri yerine yazılırsa

$$u''=0 \tag{3.1.5}$$

kanonik denklemi elde edilir. (3.1.5) çözülürse

$$u=C_1t+C_2,\quad C_1,C_2\in\mathbb{R} \tag{3.1.6}$$

elde edilir.

3. Adım: (3.1.6) da t,u kanonik değişkenleri yerine x,y orijinal değişkenleri yazılırsa

$$\frac{1}{x}\ln\left|\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\right|=C_1\frac{1}{x}+C_2$$

elde edilir. Yani,

$$\ln\left|\frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\right|=C_1+C_2x$$

ifadesi, (3.1.1) denkleminin kapalı formdaki genel çözümüdür.

3.2 Aşikar Bir Üretece Sahip Denklemin $\lambda-$Simetri Metodu ile İncelenmesi

Lie grup teorisinde bir diferensiyel denklemin Lie üretecinin olmaması veya aşikar bir üretece sahip olması karşılaşılan önemli bir zorluktur. Bu zorluğu ortadan kaldırabilmek için $\lambda-$simetri metodu kullanılabilir. Şimdi metodu ikinci mertebeden lineer olmayan salınım denklemine uygulayalım.

$$y''+\frac{kyy'^2}{1+ky^2}+\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3}=0 \tag{3.2.1}$$

ikinci mertebeden ADD için $f=-\frac{kyy'^2}{1+ky^2}-\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3}$ dır.

$$D[\lambda]+\lambda^2=f_y+\lambda f_{y'}$$

ifadesinde f yerine yazılıp

$$\begin{aligned}&\lambda_x+y'\lambda_y-\left(\frac{kyy'^2}{1+ky^2}+\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3}\right)\lambda_{y'}+\lambda^2-\left(\frac{kyy'^2}{1+ky^2}+\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3}\right)_y\\&-\lambda\left(-\frac{kyy'^2}{1+ky^2}-\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3}\right)_{y'}=0\end{aligned}$$

gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}&y'\lambda_y+\lambda_x+\lambda^2+ky'^2+k^2y^2y'^2-k^3y^4y'^2+\alpha^2-5\alpha^2ky^2+2\lambda kyy'+4k\lambda_y yy'\\&+6k^2\lambda_y y^4y'+4k^3\lambda_y y^6y'+k^4\lambda_y y^8y'-k\lambda_{y'}yy'^2-3k^2\lambda_{y'}y^3y'-3k^3\lambda_{y'}y^5y'^2\\&-k^4\lambda_{y'}y^7y'^2-\alpha^2ky^3\lambda_{y'}+6k^2\lambda y^3y'+6k^3\lambda y^5y'+2k^4\lambda y^7y'-k^4y^6y'^2\\&+4k\lambda_x y^2+6k^2\lambda_x y^4+4k^3\lambda_x y^6+k^4\lambda_x y^8-\alpha^2\lambda_{y'}y+4k\lambda^2y^2+6k^2\lambda^2y^4\\&+4k^3\lambda^2y^6+k^4\lambda^2y^4=0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde $\lambda\left(x,y,y'\right)=\frac{a(x,y)\,y'^2+b(x,y)\,y'+c(x,y)}{d(x,y)\,y'^2+e(x,y)\,y'+f(x,y)}$ kabulü alınır ve y' nün kuvvetleri cinsinden yazılırsa

$$-kd^2+k^3y^4d^2-k^2y^2d^2+k^4y^6d^2=0 \qquad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned}&2k^4y^6de-2k^2y^2de+k^4y^8ad_y-4ky^2a_yd-2k^4y^7ad-6k^2y^4a_yd-a_yd\\&+2k^3y^4de-2kde-6k^2y^3ad+6k^2y^4ad_y-4k^3y^6a_yd-k^4y^8a_yd-2kyad\\&+ad_y+4k^3y^6ad_y-6k^3y^5ad+4ky^2ad_y=0\end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned}&-a^2-a_xd+ad_x-ke^2-a_ye-b_yd+ae_y+bd_y-\alpha^2d^2-k^4y^8a^2-4ky^4a^2\\&-6k^2y^4a^2-4k^3y^6a^2-k^2y^2e^2+k^3y^4e^2+k^4y^6e^2-2kdf+4ky^2ad_x\\&-kyae-3kybd-3k^2y^3ae-9k^2y^3bd-3k^3y^5ae-9k^3y^5bd-k^4y^7ae\\&-3k^4y^7bd-k^4y^8a_ye-k^4y^8b_yd+k^4y^8ae_y+k^4y^8bd_y-4ky^2a_ye-4ky^2b_yd\\&+4ky^2ae_y+4ky^2bd_y-6k^2y^4a_ye-6k^2y^4b_yd+6k^2y^4ae_y+6k^2y^4bd_y\\&-4k^3y^6a_ye-4k^3y^6b_yd+4k^3y^6ae_y+4k^3y^6bd_y-2k^2y^2df+2k^3y^4df\\&+5\alpha^2ky^2d^2+2k^4y^6df-k^4y^8a_xd+k^4y^8ad_x-4ky^2a_xd-4k^3y^6a_xd\\&+4k^3y^6ad_x-6k^2y^4a_xd+6k^2y^4ad_x=0\end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned}&-a_xe-b_xd+ae_x+bd_x-2ab-a_yf-b_ye-c_yd+af_y+be_y+cd_y-2kef\\&-2\alpha^2de+10\alpha^2ky^2de+4ky^2ae_x-2kybe-4kycd-6k^2y^3be-12k^2y^3cd\\&-6k^3y^5be-12k^3y^5cd-2k^4y^7be-4k^4y^7cd-2k^4y^8ab-k^4y^8a_yf-k^4y^8b_ye\\&-k^4y^8c_yd+k^4y^8af_y+k^4y^8be_y+k^4y^8cd_y-8ky^2ab-12k^2y^4ab-8k^3y^6ab\\&-4ky^2a_yf-4ky^2b_ye-4ky^2c_yd+4ky^2af_y+4ky^2be_y+4ky^2cd_y-6k^2y^4a_yf\\&-6k^2y^4b_ye-6k^2y^4c_yd+6k^2y^4af_y+6k^2y^4be_y+6k^2y^4cd_y-4k^3y^6a_yf\\&-4k^3y^6b_ye-4k^3y^2c_yd+4k^3y^6af_y+4k^3y^6be_y+4k^3y^6cd_y-2k^2y^2ef\\&+2k^3y^4ef+2k^4y^6ef-k^4y^8a_xe-k^4y^8b_xd+k^4y^8ae_x+k^4y^8bd_x-4ky^2a_xe\\&-4ky^2b_xd+4ky^2bd_x-4k^3y^6a_xe-4k^3y^6b_xd+4k^3y^6ae_x+4k^3y^6bd_x\\&-6k^2y^4a_xe-6k^2y^4b_xd+6k^2y^4ae_x+6k^2y^4bd_x=0\end{aligned} \qquad (3.2.5)$$

$$
\begin{aligned}
&-b^2-a_x f-b_x e-c_x d+af_x+be_x+cd_x-2ac-kf^2-b_y f-c_y e+bf_y \\
&+ce_y-\alpha^2 e^2-k^4y^8b^2-4ky^2b^2-6k^2y^4b^2-4k^3y^6b^2-k^2y^2f^2+k^3y^4f^2 \\
&+k^4y^6f^2-2\alpha^2 df+\alpha^2ky^3ae-\alpha^2ky^3bd+10\alpha^2ky^2df-4ky^2c_xd-kybf \\
&-3kyce-3k^2y^3bf-9k^2y^3ce-3k^3y^5bf-9k^3y^5ce-k^4y^7bf-3k^4y^7ce \\
&-2k^4y^8ac-k^4y^8b_yf-k^4y^8c_ye+k^4y^8bf_y+k^4y^8ce_y-8ky^2ac-12k^2y^4ac \\
&-8k^3y^6ac-4ky^2b_yf-4ky^2c_ye+4ky^2bf_y+4ky^2ce_y-6k^2y^4b_yf \\
&-6k^2y^4c_ye+6k^2y^4bf_y+6k^2y^4ce_y-4k^3y^6b_yf-4k^3y^6c_ye+4k^3y^6bf_y \\
&+4k^3y^6ce_y+5\alpha^2ky^2e^2-k^4y^8a_xf-k^4y^8b_xe-k^4y^8c_xd+k^4y^8af_x \\
&+k^4y^8be_x+k^4y^8cd_x-4ky^2a_xf-4kyb_xe+4ky^2b_xe+4ky^2af_x+4k^3y^6be_x \\
&+4k^3y^6cd_x+\alpha^2yae-\alpha^2ybd-6k^2y^4a_xf-6k^2y^4b_xe-6k^2y^4c_xd+6k^2y^4af_x \\
&+6k^2y^4be_x+6k^2y^4cd_x=0
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&-c_yf+cf_y-b_xf-c_xe+bf_x+ce_x-2bc-2\alpha^2ef+2\alpha^2ky^3af \\
&-2\alpha^2ky^3cd+10\alpha^2ky^2ef-4ky^2b_xf-4ky^2c_xe-2kycf-6k^2y^3cf \\
&-6k^3y^5cf-2k^4y^7cf-2k^4y^8bc-k^4y^8c_yf+k^4y^8cf_y-8ky^2bc \\
&-12k^2y^4bc-8k^3y^6bc-4ky^2c_yf+4ky^2cf_y-6k^2y^4c_yf+6k^2y^4cf_y \\
&-4k^3y^6c_yf+4k^3y^6cf_y-k^4y^8b_xf-k^4y^8c_xe+k^4y^8bf_x+k^4y^8ce_x \\
&+4ky^2bf_x+4ky^2ce_x-4k^3y^6b_xf-4k^3y^6c_xe+4k^3y^6bf_x+4k^3y^6ce_x \\
&+2\alpha^2yaf-2\alpha^2ycd-6k^2y^4b_xf-6k^2y^4c_xe+6k^2y^4bf_x+6k^2y^4ce_x=0
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&+cf_x-c_xf-\alpha^2f^2-k^4y^8c^2-4ky^2c^2-6k^2y^4c^2-4k^3y^6c^2-c^2 \\
&+5\alpha^2ky^2f^2-k^4y^8c_xf+k^4y^8cf_x-4ky^2c_xf+4ky^2cf_x-6k^2y^4c_xf \\
&+6k^2y^4cf_x-4k^3y^6c_xf+4k^3y^6cf_x+\alpha^2ybf-\alpha^2yce+\alpha^2ky^3bf \\
&-\alpha^2ky^3ce=0
\end{aligned}
\tag{3.2.8}
$$

denklem sistemi elde edilir. (3.2.2) den

$$d=0 \tag{3.2.9}$$

olduğu açıkça bulunur. Buna göre diğer (3.2.3)-(3.2.8) denklemlerinde (3.2.9) yerine yazıldığında, sırasıyla

$$0=0 \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned}&-a^2-ke^2-a_ye+ae_y-k^4y^8a^2-4ky^4a^2-6k^2y^4a^2-4k^3y^6a^2-k^2y^2e^2\\&+k^3y^4e^2+k^4y^6e^2-kyae-3k^2y^3ae-3k^3y^5ae-k^4y^7ae-k^4y^8a_ye+k^4y^8ae_y\\&-4ky^2a_ye+4ky^2ae_y-6k^2y^4a_ye+6k^2y^4ae_y-4k^3y^6a_ye+4k^3y^6ae_y=0\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

$$\begin{aligned}&-a_xe+ae_x-2ab-a_yf-b_ye+af_y+be_y-2kef+4ky^2ae_x-2kybe\\&-6k^2y^3be-6k^3y^5be-2k^4y^7be-2k^4y^8ab-k^4y^8a_yf-k^4y^8b_ye\\&+k^4y^8af_y+k^4y^8be_y-8ky^2ab-12k^2y^4ab-8k^3y^6ab-4ky^2a_yf\\&-4ky^2b_ye+4ky^2af_y+4ky^2be_y-6k^2y^4a_yf-6k^2y^4b_ye+6k^2y^4af_y\\&+6k^2y^4be_y-4k^3y^6a_yf-4k^3y^6b_ye+4k^3y^6af_y+4k^3y^6be_y-2k^2y^2ef\\&+2k^3y^4ef+2k^4y^6ef-k^4y^8a_xe+k^4y^8ae_x-4ky^2a_xe-4k^3y^6a_xe\\&+4k^3y^6ae_x-6k^2y^4a_xe+6k^2y^4ae_{xx}=0\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$$\begin{aligned}&-b^2-a_xf-b_xe+af_x+be_x-2ac-kf^2-b_yf-c_ye+bf_y+ce_y-\alpha^2e^2\\&-k^4y^8b^2-4ky^2b^2-6k^2y^4b^2-4k^3y^6b^2-k^2y^2f^2+k^3y^4f^2+k^4y^6f^2\\&+\alpha^2ky^3ae-kybf-3kyce-3k^2y^3bf-9k^2y^3ce-3k^3y^5bf-9k^3y^5ce\\&-k^4y^7bf-3k^4y^7ce-2k^4y^8ac-k^4y^8b_yf-k^4y^8c_ye+k^4y^8bf_y+k^4y^8ce_y\\&-8ky^2ac-12k^2y^4ac-8k^3y^6ac-4ky^2b_yf-4ky^2c_ye+4ky^2bf_y+4ky^2ce_y\\&-6k^2y^4b_yf-6k^2y^4c_ye+6k^2y^4bf_y+6k^2y^4ce_y-4k^3y^6b_yf-4k^3y^6c_ye\\&+4k^3y^6bf_y+4k^3y^6ce_y+5\alpha^2ky^2e^2-k^4y^8a_xf-k^4y^8b_xe+k^4y^8af_x\\&+k^4y^8be_x-4ky^2a_xf-4kyb_xe+4ky^2b_xe+4ky^2af_x+4k^3y^6be_x+\alpha^2yae\\&-6k^2y^4a_xf-6k^2y^4b_xe+6k^2y^4af_x+6k^2y^4be_x=0\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

$$\begin{aligned}&-c_yf+cf_y-b_xf-c_xe+bf_x+ce_x-2bc-2\alpha^2ef+2\alpha^2ky^3af\\&+10\alpha^2ky^2ef-4ky^2b_xf-4ky^2c_xe-2kycf-6k^2y^3cf-6k^3y^5cf-2k^4y^7cf\\&-2k^4y^8bc-k^4y^8c_yf+k^4y^8cf_y-8ky^2bc-12k^2y^4bc-8k^3y^6bc-4ky^2c_yf\\&+4ky^2cf_y-6k^2y^4c_yf+6k^2y^4cf_y-4k^3y^6c_yf+4k^3y^6cf_y-k^4y^8b_xf-k^4y^8c_xe\\&+k^4y^8bf_x+k^4y^8ce_x+4ky^2bf_x+4ky^2ce_x-4k^3y^6b_xf-4k^3y^6c_xe+4k^3y^6bf_x\\&+4k^3y^6ce_x+2\alpha^2yaf-6k^2y^4b_xf-6k^2y^4c_xe+6k^2y^4bf_x+6k^2y^4ce_x=0\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

$$\begin{aligned}&+cf_x-c_xf-\alpha^2f^2-k^4y^8c^2-4ky^2c^2-6k^2y^4c^2-4k^3y^6c^2-c^2+5\alpha^2ky^2f^2\\&-k^4y^8c_xf+k^4y^8cf_x-4ky^2c_xf+4ky^2cf_x-6k^2y^4c_xf+6k^2y^4cf_x-4k^3y^6c_xf\\&+4k^3y^6cf_x+\alpha^2ybf-\alpha^2yce+\alpha^2ky^3bf-\alpha^2ky^3ce=0\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

denklemleri elde edilir. Burada (3.2.11) denklemi düzenlenirse

$$\left(a_y e - a e_y\right)\left(1+ky^2\right)^2 + a^2\left(1+ky^2\right)^2 + kyae\left(1+ky^2\right) - ke^2\left(ky^2-1\right) = 0$$

olur ki buradan da

$$e(x,y) = -\left(\frac{1+ky^2}{ky}\right) a(x,y) \tag{3.2.16}$$

elde edilir. Diğer (3.2.12)-(3.2.15) denklemlerinde (3.2.16) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &ky^2\left(1+ky^2\right)\left(a_y f - a f_y\right) - y\left(1+ky^2\right)^2\left(b_y a - b a_y\right) \\ &+a\left(ky^2-1\right)\left(\left(1+ky^2\right)b - 2kyf\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

$$\begin{aligned} &k^2y^2\left[\left(af_x - a_x f\right) + \left(bf_x - bf_x\right)\right] + k^2y^3\left[\left(ab_x - a_x b\right) + \left(ac_x - a_x c\right)\right] \\ &+ky\left[\left(ab_x - a_x b\right) + \left(ac_y - a_y c\right)\right] - k^3y^3bf\left(k^2y^4 + 2ky^2 + 1\right) \\ &+kac\left(3k^4y^8 + 9k^3y^6 + 9k^2y^4 + 1\right) - \alpha^2a^2\left(2ky^2 + k^2y^3 + 1\right) - k^2y^2b^2 + k^5y^6f^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

$$\begin{aligned} &ky\left(1+ky^2\right)^3\left[\left(c_y f - c f_y\right) + \left(b_x f - b f_x\right) + 2bc\right] + \left(1+kx^2\right)^4\left(a_x c - a c_x\right) \\ &+2k^2y^2\left(1+ky^2\right)^2 cf + 2\alpha^2\left(4k-1\right)af = 0 \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

$$\begin{aligned} &k\left(1+ky^2\right)^4\left[\left(c_x f - c f_x\right) + c^2\right] - \alpha^2\left(1+ky^2\right)^2 ac - \alpha^2 ky\left(1+ky^2\right)bf \\ &-\alpha^2k\left(5ky^2-1\right)f^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

denklemleri elde edilir. Şimdi $f(x,y)=0$ kabulünü alalım. (3.2.17)-(3.2.20) denklemleri bu kabule göre tekrar yazılırsa

$$y\left(1+ky^2\right)\left(a_y b - a b_y\right) + \left(ky^2-1\right)ab = 0 \tag{3.2.21}$$

$$ky\left(ky^2+ky+1\right)\left[\left(ab_x-a_xb\right)+\left(ac_x-a_xc\right)\right]-k^2y^2b^2$$
$$+kac\left(3k^4y^8+9k^3y^6+9k^2y^4+1\right)-\alpha^2a^2\left(k^2y^3+2ky^2+1\right)=0 \tag{3.2.22}$$

$$2kybc+\left(1+kx^2\right)\left(a_xc-ac_x\right)=0 \tag{3.2.23}$$

$$k\left(1+ky^2\right)^2c-\alpha^2a=0 \tag{3.2.24}$$

elde edilir. (3.2.24) denklemi çözüldüğünde

$$c\left(x,y\right)=\frac{\alpha^2}{k\left(1+ky^2\right)^2}a\left(x,y\right) \tag{3.2.25}$$

elde edilir. (3.2.23) denkleminde (3.2.25) yerine yazılıp düzenlenirse

$$\frac{2\alpha^2yab}{\left(1+ky^2\right)^2}=0$$

elde edilir. Burada $a\left(x,y\right)=0$ olursa $\lambda\left(x,y,y'\right)$ tanımsız olur. Ancak $a\left(x,y\right)\neq 0$ olursa $b\left(x,y\right)=0$ elde edilir ve (3.2.22) denklemi buna bağlı olarak yazılırsa

$$a\left(x,y\right)=-ky\left(1+ky^2\right)^2$$

olur.

Dolayısıyla λ fonksiyonunun katsayı fonksiyonları

$$
\begin{aligned}
&a(x,y) = -ky\left(1+ky^2\right)^2 \\
&b(x,y) = 0 \\
&c(x,y) = -\alpha^2 y \\
&d(x,y) = 0 \\
&e(x,y) = \left(1+ky^2\right)^3 \\
&f(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir ve buradan da

$$\lambda(x,y,y') = -\frac{ky\left(1+ky^2\right)^2 y'^2 - \alpha^2 y}{y'\left(1+ky^2\right)^3}$$

yani

$$\lambda(x,y,y') = -\frac{kyy'}{1+ky^2} - \frac{\alpha^2 y}{y'\left(1+ky^2\right)^3} \tag{3.2.26}$$

dir. Şimdi

$$w_y + \lambda w_{y'} = 0$$

indirgeme denklemi ile (3.2.1) denkleminin ilk integralini ve integral çarpanını bulalım (Muriel ve Romero 2008b, 2009). (3.2.26) yerine yazılırsa

$$w_y - \left(\frac{kyy'}{1+ky^2} + \frac{\alpha^2 y}{y'\left(1+ky^2\right)^3}\right) w_{y'} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{dy}{1}+\frac{dy'}{\left(\frac{kyy'}{1+ky^2}+\frac{\alpha^2 y}{y'\left(1+ky^2\right)^3}\right)}=0$$

ve

$$z=x$$

yani

$$w(x,y,y')=\left(1+ky^2\right)y'^2-\frac{\alpha^2}{k\left(1+ky^2\right)} \tag{3.2.27}$$
$$z=x$$

invaryantları elde edilir.

$w(x,y,y')=w(y,y')$ olduğundan $\frac{\partial G}{\partial x}=0$ olur. Bu da

$$G\left(x,w\left(y,y'\right)\right)=G\left(w\left(y,y'\right)\right)$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$\mu=G_w w_{y'}$$

$$\mu=w_{y'}$$

olur. Buradan da

$$\mu\left(x,y,y'\right)=2y'\left(1+ky^2\right) \tag{3.2.28}$$

integral çarpanı elde edilir.

Ayrıca $w_z = w_x = 0$ olduğundan (3.2.1) salınım denkleminin genel çözümü (3.2.27) denkleminin çözümüyle aynıdır. Yani,

$$\left(1+ky^2\right)y'^2 - \frac{\alpha^2}{k\left(1+ky^2\right)} = C_2$$

$$y'^2 = \frac{\alpha^2}{k\left(1+ky^2\right)^2} + \frac{C_2}{\left(1+ky^2\right)}$$

Denkleminin çözümü, salınım denkleminin genel çözümüdür. Yani

$$\begin{aligned} & x - \frac{1}{2}\frac{k\ln\left(\frac{C_2k^3y(x)}{\sqrt{C_2k^3}} + \sqrt{C_2k^3y(x)^2 + k\left(\alpha^2 + C_2k\right)}\right)}{\sqrt{C_2k^3}} \\ & -\frac{1}{2}\frac{y(x)\sqrt{C_2k^3y(x)^2 + k\left(\alpha^2 + C_2k\right)}}{\sqrt{C_2k^3}} \\ & +\frac{1}{2}\frac{\alpha^2\ln\left(\frac{C_2k^3y(x)}{\sqrt{C_2k^3}} + \sqrt{C_2k^3y(x)^2 + k\left(\alpha^2 + C_2k\right)}\right)}{C_2\sqrt{C_2k^3}} = C_1 \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

elde edilir.

3.3. Salınım Denkleminin P-S Metodu ile İncelenmesi

(3.2.1) salınım denklemi için öncelikle

$$D[S] + f_y - Sf_{y'} - S^2 = 0$$

(2.3.6) denkleminden $S(x, y, y')$ fonksiyonunu elde etmeye çalışalım.

Denklemde $S(x,y,y')=\dfrac{a(x,y)y'^2+b(x,y)y'+c(x,y)}{d(x,y)y'+e(x,y)}$ kabulünü alıp y' nün kuvvetleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}&4k^3y^6a'd-a^2-4ky^2ad'+3k^3y^6ad+6k^2y^4a'd-k^2y^2d^2-6k^2y^4ad'\\&+3k^2y^3ad+4ky^2a'd+k^4y^7ad+a'd+k^4y^8a'd-ad'-4ky^2a^2-6k^2y^4a^2\\&-4k^3y^6a^2-k^4y^8a^2-k^4y^8ad'+k^3y^4d^2+k^4y^6d^2-kd^2=0\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}&-2kde+4ky^2a'e+6k^2y^4a'e+4k^3y^6a'e+k^4y^8a'e+4ky^2b'd+6k^2y^4b'd\\&+4k^3y^6b'd+k^4y^8b'd-4ky^2ae'-6k^2y^4ae'-4k^3y^6ae'-k^4y^8ae'-4ky^2bd'\\&-6k^2y^4bd'-4k^3y^6bd'-k^4y^8bd'-2k^2y^2de+2k^3y^4de+2k^4y^6de+2kybd\\&+6k^2y^3bd+6k^3y^5bd+2k^4y^7bd-8ky^2ab-12k^2y^4ab-8k^3y^6ab-2k^4y^8ab\\&-2ab-bd'-ae'+b'd+a'e=0\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}&-b^2-k^4y^8b^2-k^2y^2e^2-4ky^2b^2+k^4y^6e^2-4k^3y^6b^2-6k^2y^4b^2+k^3y^4e^2\\&+\left(4ky^2+6k^2y^4+4k^3y^6+k^4y^8+1\right)b'e+\left(4ky^2+6k^2y^4+4k^3y^6+k^4y^8+1\right)c'd\\&-\left(4ky^2+6k^2y^4+4k^3y^6+k^4y^8+1\right)be'-\left(4ky^2+6k^2y^4+4k^3y^6+k^4y^8+1\right)cd'\\&+3k^2y^3be+9k^2y^3cd+3k^3y^5be+9k^3y^5cd+k^4y^7be+3k^4y^7cd+kybe+3kycd\\&-\alpha^2yad+5\alpha^2ky^2d^2-8ky^2ac-12k^2y^4ac-8k^3y^6ac-2k^4y^8ac-ke^2-\alpha^2d^2\\&-2ac-\alpha^2ky^3ad=0\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned}&-2\alpha^2ky^3ae+4kx^2c'e-2\alpha^2de-ce'+10\alpha^2ky^2de+c'e-6k^2y^4ce'+4k^3y^6c'e\\&+k^4y^8c'e+6k^2y^4c'e-2bc-4k^3y^6ce'-k^4y^8ce'+6k^2y^3ce+6k^3y^5ce\\&-8ky^2bc+2kyce-12k^2y^4bc-8k^3y^6bc-2\alpha^2yae+2k^4y^7ce-4ky^2ce'-2k^4y^8bc=0\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

$$\begin{aligned}&-4ky^2c^2-6k^2y^4c^2-c^2+\alpha^2ky^3cd-\alpha^2e^2+\alpha^2ycd+5\alpha^2ky^2e^2-k^4y^8c^2\\&-\alpha^2ky^3be-4k^3y^6c^2-\alpha^2ybe=0\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.3.1) denklemi düzenlenirse

$$\left(1+ky^2\right)^2\left[\left(a'd-ad'\right)-a^2\right]+ky\left(1+ky^2\right)ad-k\left(1-ky^2\right)d^2=0\tag{3.3.6}$$

olur. Buradan da

$$d\left(x,y\right)=\frac{1+ky^2}{ky}a\left(x,y\right)$$

bulunur. Diğer (3.3.2)-(3.3.5) denklemlerinde $d\left(x,y\right)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&ky^2\left(1+ky^2\right)\left(a'e-ae'\right)+y\left(1+ky^2\right)^2\left(ab'-a'b\right)-2ky\left(1-ky^2\right)ae\\&+\left(1-ky^2\right)\left(1+ky^2\right)ab=0\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

$$\begin{aligned}&ky\left(1+ky^2\right)^3\left[\left(a'c-ac'\right)+ky\left(be'-b'e\right)\right]+\alpha^2\left(1-4ky^2\right)a^2+k^3y^2\left(1-ky^2\right)e^2\\&+k^2y^2\left(1+ky^2\right)^2b^2-k\left(1+ky^2\right)^2ac-k^3y^2\left(1+ky^2\right)be=0\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

$$ky\left(1+ky^2\right)^3\left[\left(c'e-ce'\right)-2bc\right]+2k^2y^2\left(1+ky^2\right)^2ce-2\alpha^2\left(1-4ky^2\right)ae=0\tag{3.3.9}$$

$$-\alpha^2k\left(1-5ky^2\right)e^2+\alpha^2\left(1+ky^2\right)^2ac-k\left(1+ky^2\right)^4c^2-\alpha^2ky\left(1+ky^2\right)be=0\tag{3.3.10}$$

elde edilir.

Şimdi (3.3.7)-(3.3.10) denklemleri için $e\left(x,y\right)=0$ kabulünü alalım. Yani,

$$y\left(1+ky^2\right)\left(a'b-ab'\right)-\left(1-ky^2\right)ab=0\tag{3.3.11}$$

$$ky\left(1+ky^2\right)^3\left(a'c-ac'\right)+\alpha^2\left(1-4ky^2\right)a^2+k^2y^2\left(1+ky^2\right)^2b^2-k\left(1+ky^2\right)^2ac=0\tag{3.3.12}$$

$$-2ky\left(1+ky^2\right)^3bc=0\tag{3.3.13}$$

$$\alpha^2a-k\left(1+ky^2\right)^2c=0\tag{3.3.14}$$

dir. (3.3.14) denkleminden

$$c(x,y)=\frac{\alpha^2}{k\left(1+ky^2\right)^2}a(x,y)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla da (3.3.13) denkleminden de

$$b(x,y)=0$$

elde edilir. Yani

$$S(x,y,y')=\frac{a(x,y)y'^2+\left(\dfrac{\alpha^2}{k\left(1+ky^2\right)^2}a(x,y)\right)}{\left(\dfrac{\left(1+ky^2\right)}{ky}a(x,y)\right)y'}$$

dir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$S(x,y,y')=\frac{ky}{\left(1+ky^2\right)}y'+\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3 y'} \tag{3.3.15}$$

elde edilir.

Şimdi de (2.3.7) eşitliğinden $R(x,y,y')$ fonksiyonunu bulalım.

$$D[R]=-R\left(S+f_{y'}\right)$$

yani

$$R_x+y'R_y+fR_{y'}+R\left(S+f_{y'}\right)=0$$

ifadesinde $R(x,y,y') = R(y,y') = m(y)y' + n(y)$ kabulünü göz önüne alalım ve y' nün kuvvetleri cinsinden yazalım:

$$yR_y + fR_{y'} + R\left(S + f_{y'}\right) = 0$$

yani,

$$\left(1+ky^2\right)^3 m' - 2ky\left(1+ky^2\right)^2 m = 0 \tag{3.3.16}$$

$$\left(1+ky^2\right)^3 n' - ky\left(1+ky^2\right)^2 n = 0 \tag{3.3.17}$$

$$\alpha^2 yn = 0 \tag{3.3.18}$$

dir. (3.3.17) denkleminden

$$n(y) = 0$$

olduğu açıktır. Haliyle (3.3.17) denklemi de $n(y) = 0$ için sağlanmaktadır. (3.3.16) denklemi çözülürse

$$m(y) = c\left(1+ky^2\right)$$

dir. Buradan da

$$R(x,y,y') = c\left(1+ky^2\right)y' \tag{3.3.19}$$

elde edilir.

Son olarak (2.3.8) eşitliğinden elde ettiğimiz (S,R) ikilisinin uyumluluğunu araştıralım.

$$R_y = R_{y'}S + RS_{y'}$$

$$2kcyy' = c\left(1+ky^2\right)\left(\frac{kyy'}{1+ky^2}+\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3 y'}\right)+c\left(1+ky^2\right)y'\left(\frac{kyy'}{1+ky^2}-\frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^3 y'}\right)$$

$$0=0$$

eşitlik sağlandığından elde edilen (S,R) ikilisi uyumludur. Yani, (3.2.1) salınım denklemi için elde edilen (S,R) ikilisi ile bir ilk integral vardır. (2.3.9) formülü ile

$$I\left(x,y,y'\right)=\left(1+ky^2\right)y'^2-\frac{\alpha^2}{k\left(1+ky^2\right)} \tag{3.3.20}$$

(3.2.1) ADD in ilk integrali elde edilir.

3.4. Salınım Denkleminin Eşlenik Simetri ile İncelenmesi

İkinci mertebeden ADD için

$$D^2S_1 + D\left(f_{y'}S_1\right) - f_yS_1 = 0$$

(2.4.25) eşlenik denkleminde f i yerine yazıp total türev alalım. Sonra da

$$S_1\left(x,y,y'\right)=p\left(y\right)y'+q\left(y\right) \tag{3.4.1}$$

kabulünü alıp y' nün kuvvetleri cinsinden yazarsak

$$\left(1+ky^2\right)^4 p''-5ky\left(1+ky^2\right)^3 p'-2k\left(1-4ky^2\right)\left(1+ky^2\right)^2 p=0 \tag{3.4.2}$$

$$\left(1+ky^2\right)^4 q''-3ky\left(1+ky^2\right)^3 q'-k\left(1-3ky^2\right)\left(1+ky^2\right)^2 q=0 \tag{3.4.3}$$

$$-3\alpha^2 y\left(1+ky^2\right)p' + 6\alpha^2 ky^2 p = 0 \tag{3.4.4}$$

$$\alpha^2\left(1-3ky^2\right)q - \alpha^2 y\left(1+ky^2\right)q' = 0 \tag{3.4.5}$$

denklem sistemi elde edilir. (3.4.4) ve (3.4.5) denklemleri sırasıyla çözülürse

$$p(y) = C\left(1+ky^2\right)$$

ve

$$q(y) = 0$$

elde edilir. (3.4.1) den

$$S_1(x,y,y') = C\left(1+ky^2\right)y' \tag{3.4.6}$$

dir. Şimdi de (2.4.22) eşlenik denkleminden $S_0(x,y,y')$ fonksiyonunu bulalım.

$$D\left[S_1\right] + f_{y'}S_1 + S_0 = 0$$

eşitliğinde $S_1(x,y,y')$ yerine yazılırsa

$$S_0(x,y,y') = C\left(kyy'^2 + \frac{\alpha^2 y}{\left(1+ky^2\right)^2}\right) \tag{3.4.7}$$

elde edilir. Ayrıca elde edilen $\left(S_1, S_0\right)$ ikilisi,

$$S_{1y} = S_{0y'}$$

(2.4.21) integrallenebilme koşulunu sağladığından uyumludur. (2.4.24) formülünden

$$I(x,y,y') = C\frac{\left(1+2ky^2\right)}{2}y'^2 - C\frac{\alpha^2}{2k\left(1+ky^2\right)}$$

elde edilir.

Bu da bize $\lambda -$simetri metodu ile elde edilen ilk integralden farklı olarak yeni bir ilk integral elde edildiğini gösterir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, ikinci mertebeden lineer olmayan ADD lerin simetri indirgemeleri ve çözümlerini inceledik. Bunun için Lie grup teorisini kullandık. En az iki Lie üretecine sahip olan (3.1.1) 33. Painlevé-Gambier denkleminin kanonik indirgemesini yaparak (3.1.7) kapalı formdaki çözümünü elde ettik.

Literatürde karşılaşılan zorluklardan biri, denklemin Lie üretecinin olmaması ve metodun çalışmamasıdır. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için teorinin genelleştirilmiş olan $\lambda-$simetri metodunu göz önüne aldık. Bu metodu kullanarak lineer olmayan (3.2.1) salınım denkleminin (3.2.26) $\lambda-$simetrisini elde ettik. Bu simetriyi kullanarak denklemin (3.2.27) indirgemesini, (3.2.28) integral çarpanını ve (3.2.29) çözümünü elde ettik. Bununla birlikte bulduğumuz sonuçları ve metodun etkinliğini karşılaştırmak için Prelle-Singer ve eşlenik simetri metotlarını kullanarak denklemin sırayla (3.3.20) ve (3.4.8) ilk integrallerini bulduk. Açıkça gördük ki $\lambda-$simetri metodu, P-S metodu ve eşlenik simetri metodu arasındaki ilişki (3.2.26), (3.2.28), (3.3.15), (3.3.19), (3.4.6) ve (3.4.7) ifadelerinden (uygun C_1 sabitiyle)

$$\lambda = -S = -\frac{S_0}{S_1}$$
$$\mu = -R = -S_1$$

dir.

Göz önüne aldığımız -fiziksel olarak önemli olayları modelleyen- bu iki denklemin de ortak noktası otonom yani bağımsız değişken içermemesiydi. En genel halde yani bağımsız, bağımlı değişken ve türevlerini içeren (2.1.1) denkleminin indirgemesi ya da lineerleştirilmesi ancak bazı özel durumlarda mümkündür. Bunun için yerel olmayan dönüşümler tanımlanmıştır ve denklem basit forma indirgemeye çalışılmıştır (Yaşar ve ark. 2012). Farklı bakış açılarıyla (Lagrangian ya da Hamiltonian sistemlerde) bazı ilerlemeler kaydedilse de problemin kesin çözümüne henüz ulaşılamamıştır. Bu bağlamda bundan sonraki çalışmalarda söz konusu problemin çözümüne dönük çalışmaların tarafımızdan yapılması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

BLUMAN, G. W., ANCO, S. C. 2002. Symmetry and integration methods for differential equations**.** Springer**,** New York**,** 405pp**.**

CHANDRASEKAR, V. K., SENTHİLVELAN, M., LAKSHMANAN, M. 2005. On the complete integrability and linearization of certain second-order nonlinear ordinary differential equations**.** *Proceedings the Royal Society A***,** 461**:** 2451-2477**.**

GUHA, P., CHOUDHURY, A. G., KHANRA, B. 2009. On adjoint symmetry equations, integrating factors and solutions of nonlineer ODEs**.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical***,** 42**:** 115206 (13pp)**.**

GUHA, P., CHOUDHURY, A. G., KHANRA, B. 2013. $\lambda -$symmetry, isochronicty, and integrating factors of nonlinear ordinary differential equations**.** *Journal of Engineering Mathematics***,** DOI 10.1007/s10665-012-9614-5 (15pp)**.**

HYDON, P.E. 1999. Symmetry Methods for Differential Equations**.** Cambridge University Press**,** Nwe York**,** America**,** 213pp**.**

IBRAGİMOV, N. H. 2006. A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling**.** Blekinge Institute of Technology**,** Karlskrona**,** Sweden**,** 370pp**.**

JOHNPILLAI, A. G., KHALIQUE, C. M., MAHOMED, F. M. 2012. Lie point symmetries, partial Noether operators and first integrals of the Painlevé-Gambier equations**.** *Nonlinear Analysis***,** 75**:** 30-36**.**

MURİEL, C., ROMERO, J. L. 2001. New methods of reduction for ordinary differential equations**.** *IMA Fournal of Applied Mathematics***,** 66**:** 111-125**.**

MURİEL, C., ROMERO, J. L. 2008a. Integrating Factors and $\lambda -$Symmetries**.** *Journal of Nonlinear Mathematical Physics***,** 15**:** 300-309**.**

MURİEL, C., ROMERO, J. L. 2008b. Conserved Forms derived from $\lambda -$Symmetries**.** *Proc. Appl. Math. Mech. Math.***,** 8**:** 10747-10748**.**

MURİEL, C., ROMERO, J. L. 2009. First integrals, integrating factors and $\lambda -$symmetries of second-order differential equations**.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical***,** 42**:** 365207 (17pp)**.**

YASAR, E., GİRESUNLU, İ. B., SAN, S. 2012. Application of $\lambda -$symmetry method for some second-order ordinary differential equations**.** International Congress in Honour of Hari M. Srivastava**,** 23-26 Ağustos 2012**,** Uludağ Üniversitesi**,** Bursa**,** Türkiye**.**

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: İlker Burak GİRESUNLU
Doğum Yeri ve Tarihi	: Amasya, 22/08/1985
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Amasya Anadolu Lisesi, 1999 – 2003
Lisans	: Ankara Üniversitesi, 2004 – 2008
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	: Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi 2010 – 2011
	: Uludağ Üniversitesi 2011 – …
İletişim (e–posta)	: ilkerbg@uludag.edu.tr