T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK DEVAM ve UYGULAMALARI

İsmail DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA 2006

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK DEVAM VE UYGULAMALARI

İsmail DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ………… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mümin YAMANKARADENİZ ....
(Danışman)

ÖZET

Analitik Devam ve Uygulamalarının ele alındığı bu çalışma toplam üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde daha sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulabilecek temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde bazı analitik devam yöntemleri bir araya getirilmiş ve bunlarla ilgili çeşitli uygulamalara yer verilmiştir. Son bölümde ise Topolojik Uzaylar ve Demet Teorisi başlığı altında topolojik uzaylar ve komşuluk sistemleri ve bir açık küme üzerindeki fonksiyonların çekirdeklerinin demeti incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik Devam, Topolojik Uzay, Demet Teorisi

ANALYTIC CONTINUATION and APPLICATIONS

ABSTRACT

Analytic Continuation and applications are considered In this work, consisting of three sections. In the first section fundamental definitions and teorems are introduced for the next sections. In the second section some methods of analytic continuation and applications are given. In the third section which is topolojical spaces and sheaf theory are cosisting topolojical space and neighborhood systems and the sheaf of germs of analytic functions an open set is given.

Key Words: Analytic Continuation, Topolojic Space, Sheaf Theory

İÇİNDEKİLER

ÖZET ……………………………………………………………………………….. i
ABSTRACT ……………………………………………………………………….ii
İÇİNDEKİLER …………………………………………………………………. iii
ŞEKİLLER DİZİNİ …………………………………………………………….. iv

1. GİRİŞ……………………………….……………………………………………. 1
    1.1. Temel Tanım ve Teoremler …………………………………………………1
    1.2. Dönüşüm Özellikleri ……………………………………………………...5
    1.3. Metrik Uzaylar ……………………………………………………………6

2. ANALİTİK DEVAM ……………………………………………………………7
    2.1. Doğrudan Analitik Devam …………………………………………………7
    2.2. Weierstrass Anlamında Analitik Devam ……………………………………..10
    2.3. Yol Boyunca Analitik Devam ………………………………………………..15

3. TOPOLOJİK UZAYLAR VE DEMET TEORİSİ ……..…………………………. 27
    3.1. Topolojik Uzaylar ve Komşuluk Sistemleri ………………………………… 27
    3.2. Bir Açık Küme Üzerindeki Analitik Fonksiyonların Çekirdeklerinin Demeti………..34

Kaynaklar ……………………………………………………………………... 42
Teşekkür ……………………………………………………………………….. 43
Özgeçmiş ………………………………………………………………………. 44

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1 …………………………………………………………………7
Şekil 2.2 …………………………………………………………………9
Şekil 2.3 …………………………………………………………………9
Şekil 2.4 …………………………………………………………………9
Şekil 2.5 ………………………………………………………………...10
Şekil 2.6 ………………………………………………………………...10
Şekil 2.7 ……..…………………………………………………………..12
Şekil 2.8 ……..……………………….…………………………………12
Şekil 2.9 ……………………..……..……………………………………12
Şekil 2.10 ………………………..……………………………………13
Şekil 2.11 ……………………………………………………………….13
Şekil 2.12 ………………………………………………………………16
Şekil 2.13 ……………………………………………………………….16
Şekil 2.14 ……………………………………………………………….18

1. GİRİŞ

Bu bölümde, sonraki bölümlerde sıkça kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

1.1.1. Tanım. Düzlemsel bir A kümesi ayrık açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa A kümesine *bağlantılıdır* denir.

1.1.2. Tanım. Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* denir. Eğer bir bölgenin tümleyeni açık ve bağlantılı ise bu bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir.

1.1.3. Tanım. Kompleks düzleminin kapalı ve sınırlı bir alt kümesine *kompakt küme* denir.

1.1.4. Tanım. $A \subset \mathbf{C}$ kümesini bulunduran kapalı kümelerin en küçüğüne A nın *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A nın bulundurduğu en büyük açık kümeye de A nın *içi* denir ve A^0 ile gösterilir. A kümesinin *sınırı* ise $\partial A = \overline{A} - A^0$ biçiminde tanımlanır.

1.1.5. Tanım. $a \le t \le b$ aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine **C** de bir *yay* (*eğri*) denir. Eğer yay sonlu uzunluğa sahip ise bu yaya *doğrultulabilir yay*, eğer yay kendini kesmiyorsa yaya *Jordan yayı* denir. Uç noktaları bitişik bir yaya *kapalı eğri*, sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *kapalı Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisinin içine bir *Jordan bölgesi* denir.

1.1.6 Tanım. f bir G bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in G$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f ye z_0 noktasında *diferansiyellenebilirdir* denir. Limit değerine de f nin z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir. f nin z_0 noktasındaki türevi $f'(z_0)$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir açık komşuluğundaki bütün noktalarda differansiyellenebiliyorsa f ye z_0 da *analitiktir* denir.

1.1.7. Teorem. f bir $z_0 \in \mathbf{C}$ noktasında differansiyellenebiliyorsa bu noktada her mertebeden türevlere sahiptir ve f z_0 merkezli açık bir dairede yakınsak olan

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \; ; \quad a_n = f^n(z_0)/n!$$

Taylor Serisi biçiminde tek türlü yazılabilir.

1.1.8. Teorem. f ve g bir G bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. Eğer G de yakınsak bir (z_n) dizisi için $f(z_n) = g(z_n)$ ise bu takdirde G de $f \equiv g$ dir.

Bu teoremden ‘‘f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik, $z_n \to z_0$ ve $f(z_n) = 0$ ise bu takdirde $f \equiv 0$ dır.’’ sonucu çıkarılabilir.

1.1.9. Teorem. Bir $G \subset \mathbf{C}$ bölgesinde bir analitik fonksiyonun sıfır yerleri G de $f \equiv 0$ olmamak şartıyla ayrıktırlar.

1.1.10. Teorem. (Analitik fonksiyonlar için özdeşlik teoremi). f ve g fonksiyonları bir $G \subset \mathbf{C}$ bölgesinde analitik ve en az bir yığılma noktası bulunduran bir $A \subset G$ kümesinde $f = g$ ise bu taktirde her $z \in G$ için $f(z) = g(z)$ dir.

1.1.11. Teorem. (Morera Teoremi). $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir G bölgesinde sürekli ve bu bölgede bulunan her basit kapalı γ eğrisi için

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

ise bu taktirde f G de analitiktir.

1.1.12. Teorem. (Schwartz Lemması). f, G açık birim dairesinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde G de $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.1.13. Teorem. (Argüment Prensibi). f, doğrultulabilir bir γ Jordan eğrisi ile sınırlanmış bir G bölgesinin içinde analitik, kapanışında sürekli ve γ üzerinde $f(z) \neq 0$ olsun. Bu takdirde f nin G deki sıfırlarının sayısı (katlı kökler katlılığı kadar sayılmak üzere), z γ üzerinde pozitif yönde haraket ederken, $f(z)$ nin argümentinin $1/(2\pi)$ katına eşittir.

Başka bir deyişle argüment prensibi; f nin γ içindeki sıfırlarının sayısı $f(\gamma)$ görüntü eğrisinin orijin etrafındaki sarma sayısına eşittir.

1.1.14 Tanım. G bölgesinde analitik bir f fonksiyonu aynı değeri iki kere almıyorsa, başka bir deyişle f, G yi bir bölge üzerine bire-bir olarak resmediyorsa f ye G de *ünivalenttir* (*yalınkat*) denir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir sonuç ünivalentliğin düzgün yakınsaklık altında korunmuş olmasıdır.

1.1.15 Teorem. (f_n), bir G bölgesinde analitik ve yalınkat fonksiyonların bir dizisi ve G nin her bir kompakt alt kümesinde düzgün olarak $f_n(z) \to f(z)$ olsun. Bu takdirde f de G de yalınkattır veya sabittir.

1.1.16. Tanım. Bir G bölgesinde iki $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to G$ kapalı doğrultulabilir eğri verilsin. Eğer bu iki eğri

$$\begin{cases} \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t) & (0 \le t \le 1) \\ \Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \quad \text{ve} \quad \Gamma(s,1) = \gamma_1(s) & (0 \le s \le 1) \end{cases}$$

şartını sağlayacak şekilde bir $\Gamma : [0,1]x[0,1] \to G$ sürekli fonksiyonu varsa bu taktirde γ_0 eğrisine γ_1 eğrisine *homotopiktir* denir.

1.2. Dönüşüm Özelikleri

1.2.1. Teorem (Ters Dönüşüm Teoremi). G kompleks düzlemde bir bölge ve $f: G \to \mathbf{C}$ analitik ünivalent bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f^{-1}: f(G) \to G$ ters fonksiyonu analitiktir.

Ters dönüşüm teoremi kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilebilir.

1.2.2. Teorem. f bir bölgede analitik ve bölgenin bir z_0 noktasında $f'(z_0) \neq 0$ ise bu takdirde f, z_0 ın uygun bir komşuluğunda yerel olarak ünivalenttir. Tersine f, z_0 da yerel olarak ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ dır.

Analitik dönüşümler için, $J_f \neq 0$ olması yerel ünivalentlik için gerek şart olup yeter şart değildir. Yeter şart f nin harmonik olması durumunda geçerlidir.

1.2.3. Teorem. γ doğrultulabilir bir yay ve f, γ üzerinde analitikse $\Gamma = f(\gamma)$ yayının uzunluğu

$$\int_{\gamma} |f'(z)||dz|$$

dir.

Eğer γ, $z_0 = \varphi(t_0)$ ve $f'(z_0) \neq 0$ özelliğinde $z = \varphi(t)$ parametrik ifadesi ile verilen düzgün bir eğri ise bu takdirde $\Gamma = f(\gamma)$ eğrisinin $w_0 = f(z_0)$ da ki teğet vektörü $\arg\{f'(z_0)\varphi'(t_0)\} = \arg f'(z_0) + \arg \varphi'(t_0)$ eğimine sahiptir. Başka bir deyişle f dönüşümü γ eğrisini z_0 noktasında $\arg f'(z_0)$ açısı kadar döndürür. Özellikle z_0 noktasından geçen iki yay arasındaki açı, $f'(z_0) \neq 0$ olması durumunda herhangi f analitik dönüşümü altında korunmuştur. Bu yüzden analitik ünivalent bir dönüşüm konform dönüşüm olarak bilinir.

1.2.4. Teorem (Rieamann Dönüşüm Teoremi). G, $\mathbf{C}$ nin basit bağlantılı öz alt kümesi ve $z_0 \in G$ noktası verilmiş olsun. Bu takdirde $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ özelliğinde G yi birim daire üzerine konform olarak dönüştüren bir tek f fonksiyonu vardır.

1.3. Metrik Uzaylar

1.3.1. Tanım. X boş olmayan herhangi bir kümesi ve $d : XxX \to \mathbf{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y, z \in X$ için

a) $d(x, y) > 0$

b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$

d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

aksiyomları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X de bir *metrik* ve (X, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

1.3.2 Tanım. (X, d) bir metrik uzay ve $D \subset X$ olsun. Her $x \in D$ için $B(x, \varepsilon) \subset D$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa D ye *açık küme* denir.

1.3.3. Tanım. Bir X kümesi verilsin. $P(X) = \{ A : A \subset X \}$ kümesine X in *kuvvet kümesi* denir.

1.3.4. Teorem. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde

a) X, ϕ açıktırlar.

b) $D_1, ..., D_n$ açık kümeler ise bu taktirde $\bigcap_{k=1}^{n} D_k$ kümesi de açıktır.

c) I indeks kümesi olmak üzere her $i \in I$ için D_i açık küme ise bu taktirde $\bigcup_{i \in I} D_i$ açık kümedir.

Teorem 1.3.4' e De Morgan kuralı uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

1.3.5. Teorem. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde

a) X, ϕ kapalı kümelerdir.

b) $D_1, ..., D_n$ X in kapalı alt kümeleri ise bu taktirde $\bigcap_{i=1}^{n} D_i$ kümesi de kapalıdır.

c) I indeks kümesi olmak üzere her $i \in I$ için D_i kapalı küme ise bu taktirde $\bigcap_{i \in I} D_i$ kapalı kümedir.

2. ANALİTİK DEVAM

2. 1. Doğrudan Analitik Devam

Bir analitik fonksiyonun tanım bölgesinin daha büyük bir bölgeye genişletme işlemi çoğunlukla analitik devam olarak bilinir. Kısaca analitik devam, bir fonksiyonun analitiklik bölgesinin genişletilmesi yöntemidir. Bu yöntem, G bölgesinde analitik bir f fonksiyonunun hangi şartlarda daha geniş bir bölgede analitik olan g fonksiyonuyla ifade edilebileceğini gösterir.

Örneğin; $|z|<1$ için $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ve $z \in \mathbf{C}-\{1\}$ için $g(z)=1/(1-z)$ fonksiyonları aynı analitik fonksiyonun farklı gösterimleridir. Bu ise f fonksiyonundan analitik devamla g fonksiyonuna ulaşılabileceğini gösterir.

2.1.1. Tanım. f fonksiyonu kompleks düzlemdeki bir G bölgesinde analitik ise (f,G) çiftine bir *fonksiyon elemanı* denir.

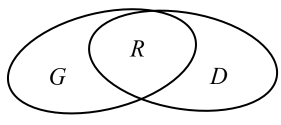
Buna göre (f,G) ve (g,D) fonksiyon elemanlarının eşit olması için gerek ve yeter şart $f=g$ ve $G=D$ olmasıdır. İki fonksiyon elemanının eşit olması durumu $(f,G)=(g,D)$ ile gösterilir.

Herhangi bir (f,G) fonksiyon elemanı verilsin. Eğer

a) $R=G\cap D\neq\phi$

b) Her $z\in R$ için veya en azından R de bir yığılma noktasına sahip R nin sonsuz elemanlı bir alt kümesi üzerinde $f(z)=g(z)$ ise (g,D) fonksiyon elemanına (f,G) in doğrudan analitik devamı denir. Bu durumda, özdeşlik prensibi gereği her $z\in R$ için $f(z)=g(z)$ dir.

Aynı şekilde f ile g nin rolleri değiştirildiğinde (f,G) nin de (g,D) nin doğrudan analitik devamı olduğu görülür. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1

$D \subset G$ ve g, f nin D ye kısıtlanması olsun. Bu taktirde (g, D) fonksiyon elemanının (f, G) nin doğrudan analitik devamı olduğu açıktır. Böyle bir analitik devama *aşikar analitik devam* denir.

2.1.2. Teorem. Eğer (g_1, D) ve (g_2, D), (f, G) nin iki doğrudan analitik devamı ise bu taktirde $g_1 = g_2$ dir.

İspat. Varsayım gereği her $z \in G \cap D$ için $f(z) = g_1(z)$ ve $f(z) = g_2(z)$ dir. Böylece her $z \in G \cap D$ için $g_1(z) = g_2(z)$ olur. Analitik fonksiyonlar için özdeşlik teoremi (Teorem 1.1.10) gereği her $z \in D$ için $g_1(z) = g_2(z)$ elde edilir.

Böylece, g_1, D de $R = G \cap D$ deki f nin değerleriyle tam olarak belirlenir. Tersine f fonksiyonu da G de g_1 in R deki değerleriyle tam olarak belirlenir. Bundan dolayıdır ki genellikle f nin ve g_1 in birbirlerinin analitik devamları oldukları söylenebilir. O halde f ve g_1 fonksiyonları, $G \cup D$ de

$$F(z) = \begin{cases} f(z) : z \in G \text{ için} \\ g(z) : z \in D \text{ için} \end{cases}$$

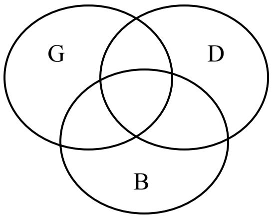
biçiminde tanımlanan bir $F(z)$ analitik fonksiyonunun kısmi veya yerel temsili olarak görülebilir. Ayrıca $F(z)$ nin, G den daha büyük bir $G \cup D$ bölgesine f nin bir analitik devamı olduğu söylenebilir. Benzer şekilde $F(z)$, G den $G \cup D$ ye g_1 in bir analitik devamı gibi düşünülebilir.

2.1.3. Teorem. (g, D), (f, G) nin ve (h, B) de (g, D) nin doğrudan analitik devamı ve $G \cap B \neq \phi$ olsun. Bu taktirde $(G \cap D) \cap B \neq \phi$ ise $G \cap B$ de $f(z) = h(z)$ dir. (Şekil 2.2)

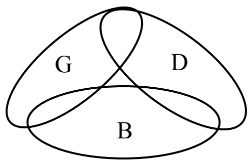
İspat: Analitik fonksiyonlar için özdeşlik teoremi gereği $(G \cap D) \cap B \subset G \cap B$ bölgesinde $f(z) = g(z) = h(z)$ dir.

Uyarı: Eğer $(G \cap D) \cap B = \phi$ ise bu teorem doğru değildir (Şekil 2.3). Çünkü $G \cap D$ de $f(z) = g(z)$ ve $D \cap B$ de $g(z) = h(z)$ olmasına rağmen $G \cap B$ de $f(z) \neq h(z)$ dir. Bu durum aşağıdaki örnekte açıkça görülecektir. Böyle bir durumda

$f(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları $G \cap B$ de en azından iki değerli olan $F(z)$ çok değerli fonksiyonunun dalları olarak göz önüne alınabilir.



Şekil 2.2



Şekil 2.3

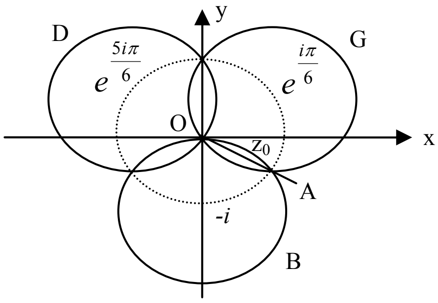
Örnek: $G = \{z: |z - e^{i\pi/6}| < 1\}$, $D = \{z: |z - e^{5i\pi/6}| < 1\}$, $B = \{z: |z + i| < 1\}$ ve bu bölgelere $\log z$ fonksiyonunun kısıtlamaları

$$f(z) = \log z\big|_G = \ln|z| + i\theta_1 \quad ; \quad -\pi < \theta_1 \le \pi$$

$$g(z) = \log z\big|_D = \ln|z| + i\theta_2 \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 \le \frac{3\pi}{2}$$

$$h(z) = \log z\big|_B = \ln|z| + i\theta_3 \quad ; \quad -\pi < \theta_3 \le \pi$$

olsun. f ve g, $G \cap D$ bölgesinde aynı değerleri aldıklarından (g, D) (f, G) nin doğrudan analitik devamıdır. Ayrıca $D \cap B$ üzerinde g ve h fonksiyonları eşit olduğundan (h, B) de (g, D) nin doğrudan analitik devamıdır. Ancak f ve h, $G \cap B$ de aynı değerleri almaz. Örneğin, [OA] doğru parçasının orta noktası olan z_0 noktasında $f(z_0) = \ln(1/2) + i\,(-\pi/6)$ olmasına rağmen $h(z_0) = \ln(1/2) + i\,(11\pi/6)$ dır.



Şekil 2.4

Temel problem şudur: Verilen bir (f, D) fonksiyon elemanı için diğer fonksiyon elemanları nasıl bulunabilir? Bunun için çok kullanılan analitik devam metotları vardır. Aşağıda bu metotlardan bazıları verilecektir.

2.2. Weierstrass Anlamında Analitik Devam

Bu anlamda analitik devam Taylor açılımının tekrarlı kullanımı esasına dayanır. $f(z)$ bir G bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $z_0 \in G$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun z_0 civarındaki seri açılımı

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad | z - z_0 | < r \tag{2.1}$$

dır. Eğer bu serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuz ise bu taktirde $f_0(z)$, $f(z)$ nin tüm sonlu kompleks düzleme analitik devamını gösterir. Eğer yakınsaklık yarıçapı sonlu ise bu taktirde C_0, (2.1) serinin yakınsaklık çemberi ve D_0, C_0 ın içi olmak üzere iki durum söz konusudur.

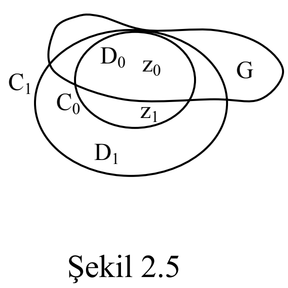
1) D_0 ın bir kısmı G nin dışına genişler yani G', G nin tümleyeni olmak üzere $D_0 \cap G' \neq \phi$ dır (Şekil 2.5).

2) $z_0 \in G$ nasıl seçilirse seçilsin $D_0 \subset G$ dir (Şekil 2.6).

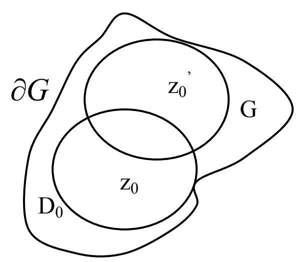
Birinci durumda (2.1) serisi $f(z)$ nin $D_0 \cap G'$ bölgesine ilk analitik devamını verir. z_0 dan farklı $z_1 \in D_0$ noktasını seçerek (2.1) yardımıyla $f_0(z_1)$, $f_0'(z_1)$, $f_0''(z_1)$, $\ldots$ değerleri hesaplanabilir. Bu değerler yardımıyla Taylor açılımı kullanılarak $z - z_1$ in kuvvet serisi olan

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n \tag{2.2}$$

ifadesi elde edilir.



Şekil 2.5



Şekil 2.6

Ayrıca b_n katsayıları aşağıdaki gibi de hesaplanabilir. $\{\zeta_m\}$, z_1 e yakınsayan D_0 daki noktaların bir dizisi olmak üzere

$$b_0 = f_0(z_1)\,, \qquad\qquad b_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{f_0(\zeta_m) - b_0}{\zeta_m - z_1}$$

dir. Genel olarak

$$b_n = \lim_{m\to\infty} \frac{f_0(\zeta_m) - b_0 - b_1(\zeta_m - z_1) - \ldots - b_{n-1}(\zeta_m - z_1)^{m-1}}{(\zeta_m - z_1)^n}$$

dir.

Bundan başka aşağıdaki gibi de hesaplanabilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1 + z_1 - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z_1 - z_0)^{n-k} (z - z_1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1 - z_0)^{n-k} \right\} (z - z_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k \ .$$

Elde edilen bu serinin yakınsaklık bölgesi $|z - z_1| + |z_1 - z_0| < r$ dir.

2.2.1. Tanım. Bir fonksiyonun analitik devamla elde edilen mümkün en geniş bölgenin sınırına fonksiyonun *doğal sınırı* denir. Böyle bir sınır üzerinde fonksiyonun singüler noktalarının kümesi yoğundur.

(2.2) serisinin yakınsaklık çemberi C_1 ve bu çemberin içi D_1 olsun. Böylece aşağıdaki durumlardan biri ortaya çıkar.

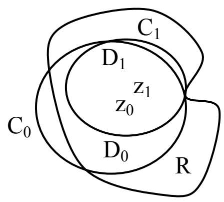
1) D_1 in bir kısmı $D_0 \cap G'$ nün dışına olduğu kadar G nin dışına da genişler. Bu taktirde $f_1(z)$ D_1 in bu kısmında $f(z)$ nin bir analitik devamıdır.

2) D_1 in bir kısmı D_1, G nin içinde kalacak şekilde D_0 ın dışına genişler (Şekil 2.7). Bu taktirde z_1 in bu özellikte seçilmesiyle analitik devam elde edilmez.

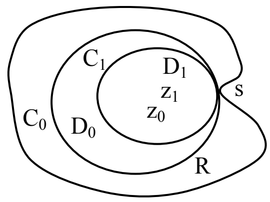
3) C_1 çemberi C_0 çemberine teğettir. Bu taktirde kesim noktası olan s f nin singüler noktası olmak zorundadır. Yani C_1 in üzerinde f nin en azından bir singülaritesi olmalıdır ve bu singüler nokta C_0 ın içinde olamayacağından s ile çakışacaktır (Şekil 2.8). Bu durumda $D_1 \subset D_0$ olur ki böyle bir analitik devam elde edilmiş olmaz.

4) C_1 çemberi C_0 çemberine $z_1 \in D_0$ ın seçimine bağlı olmaksızın teğet olabilir. Şekil 2.9 da görüldüğü gibi $G \subset D_0$ ise $f_0(z)$, $f(z)$ nin bir tek analitik devamıdır. D_0 fonksiyonun varlık bölgesi ve C_0 onun doğal sınırıdır.

İkinci durumda tüm olasılıklar için G dışına devam yoktur (Şekil 2.6). G , f(z) nin varlık bölgesidir ve ∂G doğal sınırıdır.

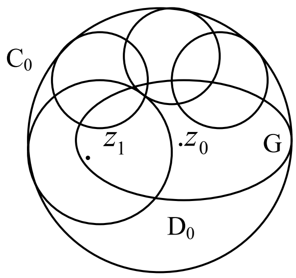


Şekil 2.7



Şekil 2.8

Örnek: $G = D_0 = \{z : |z| < 1\}$ da $f_0(z) = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$ biçiminde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım.



Şekil 2.9

(0,1) aralığında olmayan bir $z_1 \in D_0$ noktası seçelim ve z_1 civarında $f_0(z)$ fonksiyonunu $f_1(z)$ fonksiyonuna genişletelim.

$$f_0(z_1) = 1 + z_1 + ... + z_1^{\,n} + ... = \frac{1}{1 - z_1}, \quad f_0^{'}(z_1) = 1 + 2z_1 + ... + nz_1^{\,n-1} + ... = \frac{1}{(1 - z_1)^2},$$

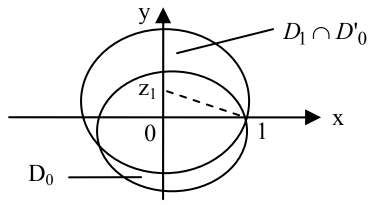
$$f_0^{''}(z_1) = 2 + 3.2z_1 + ... + n(n-1)z_1^{\,n-2} + ... = \frac{2!}{(1 - z_1)^3}, \ldots$$

olduğundan

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z_1} + \frac{1}{(1-z_1)^2}(z-z_1) + ... + \frac{1}{(1-z_1)^{n+1}}(z-z_1)^n + ... \qquad (2.3)$$

elde edilir.

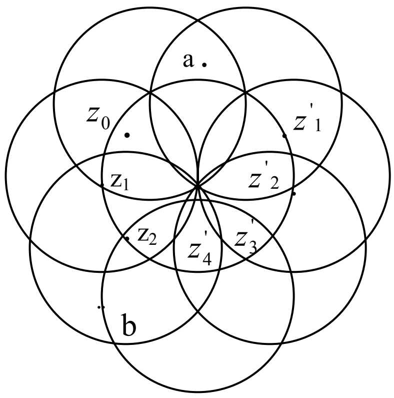
(2.3) serisi $D_1 = \{z : |z - z_1| < |1 - z_1|\}$ de yakınsak olup $f_0(z)$ nin $D_1 \cap D_0'$ bölgesine ilk analitik devamını verir (Şekil 2.10).



Şekil 2.10

Hem $f_0(z)$ hem de $f_1(z)$ fonksiyonları $C - \{1\}$ de analitik olan $F(z) = 1/(1-z)$ fonksiyonunun yerel gösterimleridir. z_1 noktası (0,1) aralığında seçilirse yakınsaklık çemberi $z = 1$ singüler noktasında ∂D_0 a teğettir ve içi D_0 ın içinde kalır. Böylece $f_0(z)$ nin uygun analitik devamı elde edilemez.

Eğer a noktasından başlayıp ardışık analitik devamlarla b noktasına ulaşırsak b de fonksiyonun aldığı değer ardışık analitik devamların seçiliş tarzından bağımsız olabilir de olmayabilir de. Örneğin; Şekil 2.11 deki durumda soldaki veya sağdaki çemberler zincirinin kullanılmasıyla b ye ulaşılabilir.



Şekil 2.11

$F(b)$ değeri devamların meydana getiriliş tarzlarından bağımsız ise $F(z)$, b de tek değerlidir aksi taktirde b de çok değerlidir.

Örnek: $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$ serisinin yakınsaklık diski $D(0,1)$ dir.

γ yakınsaklık çemberi üzerindeki f nin aykırı noktaları yoğun bir küme oluşturur. Bu nedenle de $D(0,1)$ diskinin içindeki hiçbir noktadaki Taylor açılımının yakınsaklık diski $D(0,1)$ in dışına taşmaz. f nin $z=\pm 1$ de aykırılıkları vardır. Ayrıca

$$f(z)=z^2+z^4+f(z^4),$$
$$f(z)=z^2+z^4+z^8+f(z^8)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

biçiminde yazılabileceğinden $z^2=1,\ z^4=1,\ z^8=1,\ldots$ eşitliklerinin kökleri f nin aykırılıklarıdır ve tüm bu kökler $\gamma=\{z:|z|=1\}$ de yoğun bir küme oluştururlar. Bu nedenle de $|z|=1$ üzerindeki en kısa yay üzerinde bile f nin aykırılığı vardır.

2.3. Yol Boyunca Analitik Devam

G bir bölge olmak üzere $G^* = \{z : \bar{z} \in G\}$ olsun. Eğer f, G de analitik ise $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ olarak tanımlanan $f^* : G^* \to \mathbb{C}$ fonksiyonu da analitiktir. $G = G^*$ ise G reel eksene göre simetrik bir bölgedir. Bu taktirde $g(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ fonksiyonu G de analitiktir. G bağlantılı olduğundan reel eksenin açık bir alt aralığını kapsar. Her $x \in G \cap \mathbf{R}$ için $f(x)$ reel ise bu taktirde $g(x) \equiv 0$ dır. Ancak her $z \in G$ için $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ olacak şekilde $G \cap \mathbf{R}$, G içinde bir limit noktasına sahiptir.

f nin bu eşitliği sağlaması $G \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyonun G nin tamamına genişletilmesinde kullanılır.

Eğer G simetrik bölge ise (yani; $G = G^*$) bu taktirde

$$G_+ = \{z \in G : \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

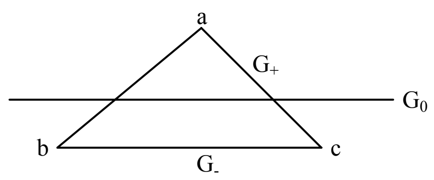
$$G_- = \{z \in G : \operatorname{Im}(z) < 0\}$$

$$G_0 = \{z \in G : \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

bölgelerini tanımlayabiliriz.

2.3.1. Teorem (Shwarz Yansıma Prensibi). G, $G = G^*$ özelliğinde bir bölge olsun. Eğer $f : G_+ \cup G_0 \to C$ sürekli fonksiyonu G_+ üzerinde analitik ve $x \in G_0$ için $f(x) \in \mathbf{R}$ ise bu taktirde $z \in G_+ \cup G_0$ için $g(z) = f(z)$ olacak şekilde $g : G \to \mathbf{C}$ analitik fonksiyonu vardır.

İspat: $z \in G_-$ için $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $z \in G_+ \cup G_0$ için $g(z) = f(z)$ olsun. $g : G \to C$ fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır. g nin analitik olduğunu gösterelim. g, $G_+ \cup G_-$ de analitiktir. O halde bir $x_0 \in G_0$ ve $R > 0$ için $B(x_0, R) \subset G$ olsun. Morera Teoremi kullanılarak g nin $B(x_0, R)$ de analitik olduğunu göstereceğiz. $T = [a, b, c, a]$, $B(x_0, R)$ de bir üçgen olsun. $\int_T g = 0$ olduğunu görmek için, P bir üçgen veya $G_+ \cup G_0$ ya da $G_- \cup G_0$ içinde kalan bir dörtgen olması durumunda $\int_P g = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.



Şekil 2.12

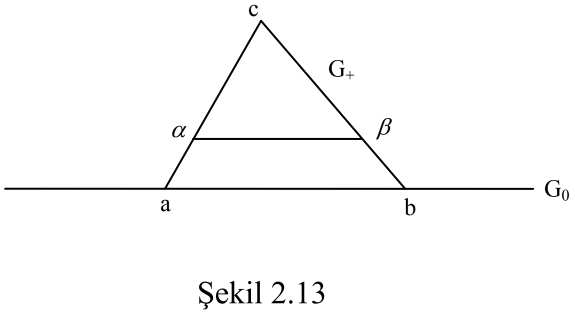
Şimdi $T \subset G_+ \cup G_0$ ve $[a,b] \subset G_0$ olması durumunu inceleyelim. Diğer durumların ispatı benzer olarak yapılabilir.

Δ, T ve T nin içini göstersin. Bu taktirde her $z \in \Delta$ için $g(z) = f(z)$ dir. Hipotez gereği f, $G_+ \cup G_0$ da sürekli olduğundan f, Δ üzerinde düzgün süreklidir. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|z - z'| < \delta$ şartını sağlayan bütün $z, z' \in \Delta$ noktaları için $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. α, β noktalarını sırasıyla $[c,a]$ ve $[b,c]$ doğru parçaları üzerinde $|\alpha - a| < \delta$ ve $|\beta - b| < \delta$ eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçelim. $T_1 = [\alpha, \beta, c, \alpha]$ ve $Q = [a, b, \beta, \alpha, a]$ diyelim. Bu taktirde

$$\int_T f = \int_{T_1} f + \int_Q f$$

olur. Ancak T_1 ve T_1 in içi, G_+ tarafından kapsanmış olup f burada analitiktir. Böylece

$$\int_T f = \int_Q f \tag{2.4}$$



Şekil 2.13

Eğer $0 \le t \le 1$ ise bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| f(t\beta + (1-t)\alpha) - f(tb + (1-t)a) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde

$$\left| \left[t\beta + (1-t)\alpha \right] - \left[tb + (1-t)a \right] \right| < \delta$$

dir.

Eğer $M = \max\{| f(z) | : z \in \Delta\}$ ve l , T nin sınırı olarak alınırsa

$$\left| \int_{[a,b]} f + \int_{[\beta,\alpha]} f \right| = \left| (b-a)\int_0^1 f(tb + (1-t)a)dt - (\beta - \alpha)\int_0^1 f(t\beta + (1-t)\alpha)dt \right| \tag{2.5}$$

$$\le \left| b-a \right| \left| \int_0^1 \left[f(tb + (1-t)a) - f(t\beta + (1-t)\alpha) \right] dt \right|$$

$$+ \left| (b-a) - (\beta - \alpha) \right| \left| \int_0^1 f(t\beta + (1-t)\alpha)dt \right|$$

$$\le \varepsilon \left| b-a \right| + M \left| (b-\beta) + (\alpha - a) \right| \quad \le \varepsilon.l + 2M\delta$$

Olur. Ayrıca

$$\left| \int_{[\alpha,a]} f \right| \le M \left| a - \alpha \right| \le M\delta \qquad \text{ve} \qquad \left| \int_{[b,\beta]} f \right| \le M\delta$$

eşitsizlikleri (2.4) ve (2.5) ile düşünülürse

$$\left| \int_T f \right| \le \varepsilon.l + 4M\delta$$

elde edilir. $\delta < \varepsilon$ olarak seçilir ve ε nun keyfi olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_T f = 0 \text{ dır.}$$

olur. Böylece Morera teoremi gereği f analitiktir.

2.3.2. Tanım. Bir (f,G) fonksiyon elemanı verilsin. $a \in D$ olmak üzere a nın bir komşuluğundaki her z için $f(z)=g(z)$ olacak şekilde bütün (g,D) fonksiyon elemanlarının oluşturduğu sınıfa f nin a daki *çekirdeği* denir ve $[f]_a$ ile gösterilir.

Dikkat edilirse $[f]_a$ bir fonksiyon elemanı olmayıp fonksiyon elemanlarının bir sınıfıdır. "$(g,D)\in[f]_a$ olması için gerek ve yeter şart $(f,G)\in[g]_a$ olmasıdır." Önermesinin doğruluğu açıktır. Ayrıca $a \neq b$ iken $[f]_a$ ve $[g]_b$ çekirdeklerinin eşitliğinden bahsetmenin bir anlamı yoktur. Örneğin; (f,G) bir fonksiyon elemanı ise bu taktirde farklı $a,b \in G$ noktaları için $[f]_a=[f]_b$ olduğunu söylemek anlamsızdır.

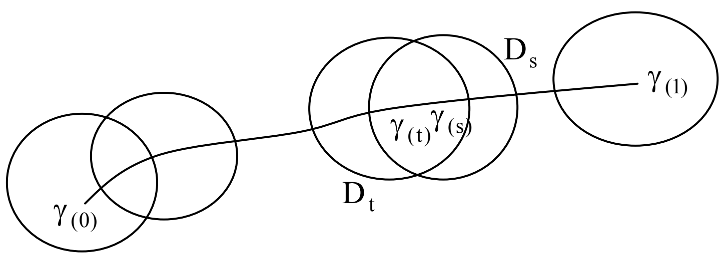
2.3.3. Tanım. $\gamma:[0,1]\to C$ yolu verilsin. Her $t\in[0,1]$ için (f_t,D_t) fonksiyon elemanı aşağıdaki şartları sağlasın.

(a) $\gamma(t)\in D_t$

(b) Her $t\in[0,1]$ için $|s-t|<\delta$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa $\gamma(s)\in D_t$ ve

$$[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)} \tag{2.6}$$

dır. Bu taktirde (f_1,D_1)'e γ eğrisi boyunca (f_0,D_0) ın bir *analitik devamı* denir. Başka bir deyişle (f_1,D_1) γ boyunca analitik devamla (f_0,D_0) fonksiyon elemanından elde edilir.



Şekil 2.14

Dikkat edilirse tanımdaki D_t kümeleri devamı bozmayacak şekilde genişletilebilir veya daraltılabilir. Bu durum aşağıdaki ispatlarda kullanışlı olacaktır.

Bu tanımın (b) kısmının anlamı γ sürekli bir fonksiyon olduğundan ve $\gamma(t)$, D_t açık kümesinin içinde kaldığından $|s-t|<\delta$ için $\gamma(s)\in D_t$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısının var olmasıdır. (b) nin önemli bir özelliği de $|s-t|<\delta$ olduğu her durumda (2.6) eşitliğinin sağlanmasıdır. Yani $|s-t|<\delta$ özelliğindeki her s ve t için ve $\gamma(s)$ yi bulunduran $D_s \cap D_t$ kümesindeki her z için $f_s(z)=f_t(z)$ dir.

Bir eğri ve bir fonksiyon elemanı verildiğinde eğri boyunca analitik devamın var olup olmadığı sorusu zor bir soru olabilir. Bunun için henüz bir genelleme yapılamamıştır. Verilen bir eğri ve verilen bir fonksiyon elemanı için eğri boyunca analitik devamın olup olmadığı sorusuna cevap vermek zordur. Aşağıda sorunun cevapları aranacaktır. Monodromy Teoremi bunlardan biridir. Bu teorem bize ne zaman iki noktayı birleştiren farklı eğriler boyunca analitik, aynı fonksiyon elemanını verdiğini ifade edecektir.

Aşağıdaki önerme aynı fonksiyon elemanından başlayarak verilen bir eğri boyunca iki analitik devamın sonunda aynı fonksiyon elemanını verdiğini ifade eder. Böylece "Bir eğri boyunca bir çekirdeğin devamı" kavramını tanımlamak mümkün müdür, sorusuna bir cevap verilmiş olacaktır.

2.3.4. Teorem. a dan b ye bir $\gamma:[0,1]\to C$ yolu verilsin. $\{(f_t,D_t):0\le t\le 1\}$ ve $\{(g_t,B_t):0\le t\le 1\}$, $[f_0]_a=[g_0]_a$ olacak şekilde γ boyunca analitik devamlar olsun. Bu taktirde $[f_1]_a=[g_1]_a$ dir.

İspat: Teoremi ispat etmek için

$$T=\{t\in[0,1]:[f_t]_{\gamma(t)}=[g_t]_{\gamma(t)}\}$$

kümesinin $[0,1]$ da hem açık hem kapalı olduğunu göstermeliyiz. $T\neq\phi$ olduğundan ($0\in T$) $T=[0,1]$ özellikle $1\in T$ dir.

Önce T nin açık olduğunu gösterelim. $t \neq 0$ veya 1 olmak üzere belli $t \in T$ alalım. (t =1 ise $T = [0,1]$ olup ispat tamamlanmış olur. t = 0 ise verilen hakkındaki tartışma aynı zamanda bazı $\delta > 0$ için $[a, a+\delta) \subset T$ olacağını gösterecektir.) Analitik devamın tanımından $|s-t| < \delta$ için $\gamma(s) \in D_t \cap B_t$ ve

$$\begin{cases} [f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)} \\ [g_s]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)} \end{cases} \tag{2.7}$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. H, $\gamma(s)$ ve $\gamma(t)$ yi bulunduran $D_t \cap B_t$ kümesinin bağlantılı bir alt kümesi olsun. Ancak $t \in T$ olduğundan her $z \in H$ için $f_t(z) = g_t(z)$. Böylece her $\gamma(s) \in D_t \cap B_t$ için $[f_t]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}$ dir. (2.7) gereği $|s-t| < \delta$ özeliğindeki her s ve t için $[f_s]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}$ olduğu görülür. Yani $(t-\delta, t+\delta) \subset T$ olup T açıktır.

T nin kapalı olduğunu görmek için t yi T nin bir limit noktası olarak alalım. $\delta > 0$ sayısını $\gamma(s) \in D_t \cap B_t$ ve $|s-t| < \delta$ özeliğindeki her s ve t için (2.7) bağıntısı sağlanacak şekilde yeniden seçelim. t, T nin limit noktası olduğundan $|s-t| < \delta$ özelliğinde bir $s \in T$ noktası vardır. G, $\gamma((t-s, t+s)) \subseteq G \subseteq D_t \cap B_t$ özelliğinde bir bölge ve $\gamma(s) \in G$ olsun. T nin tanımı gereği her $z \in G$ için $f_s(z) = g_s(z)$ dir. Ancak her $z \in G$ için (2.7) den $f_s(z) = f_t(z)$ ve $g_s(z) = g_t(z)$ dir. Böylece her $z \in G$ için $f_t(z) = g_t(z)$ ve G $D_t \cap B_t$ de bir limit noktasına sahip olduğundan $[f_t]_{\gamma(t)} = [g_t]_{\gamma(t)}$ dır. Yani $t \in T$ dir. Böylece T kapalıdır.

2.3.5. Tanım. $\gamma : [0,1] \to C$ a dan b ye bir yol ve $\{(f_t, D_t) : 0 \leq t \leq 1\}$, γ boyunca bir analitik devam ise bu taktirde $[f_1]_b$ çekirdeğine $[f_0]_a$ nın γ boyunca analitik devamıdır denir.

Teorem 2.3.4, Tanım 2.3.5 ün anlamlı olmasını gerektirir. Tanım 2.3.5 in $\{(f_t, D_t)\}$ devamının seçimine bağlı olduğu görülür. Bununla birlikte Teorem 2.3.4 $\{(g_t, B_t)\}$ $[f_0]_a = [g_0]_a$ özelliğinde γ boyunca bir başka analitik devam ise $[f_1]_b = [g_1]_b$ olduğunu ifade eder. Bu yüzden tanım devamın seçimine bağlı değildir.

2.3.6. Tanım. $[g]_b$, $\gamma:[0,1]\to C$ boyunca $[f]_a$ nın analitik devamı olacak şekilde G de bir a noktası ve a dan b ye bir $\gamma:[0,1]\to C$ yolu olsun. Eğer (f,G) bir fonksiyon elemanı ise bu taktirde (f,G) den elde edilen tam analitik fonksiyona tüm $[g]_b$ çekirdeklerinin bir *ailesidir* denir.

Eğer $\Im$ (f,G) den elde edilen tam analitik fonksiyon olacak şekilde bir (f,G) fonksiyon elemanı varsa çekirdeklerin $\Im$ sınıfına bir tam analitik fonksiyon denir.

Dikkat edilirse tanımda geçen a noktası keyfidir. G, **C** nin basit bağlantılı alt kümesi olduğundan a G de herhangi bir nokta olarak seçilebilir. Üstelik $\Im$, (f,G) ile oluşturulan tam analitik fonksiyon ise bu taktirde her $z\in G$ için $[f]_z\in\Im$ dir.

Tam analitik fonksiyonun tanımında herhangi bir belirsizlik olmamasına rağmen bir eksiklik vardır. Bu bir fonksiyon mudur? Fonksiyon olmayan bir nesneyi fonksiyon olarak isimlendirmekten sakınmalıyız. Ancak $\Im$ bir fonksiyondur. Şimdi bunu gösterelim: Önce $\Im$ için bir tanım kümesi belirleyelim. Bu küme

$$\Re=\{(z,[f]_z):[f]_z\in\Im\}$$

olsun. $\Im:\Re\to C$ ve $\Im(z,[f]_z)=f(z)$ biçiminde tanımlansın. Böylece $\Im$, $\Im$ deki bir çekirdeğe ait olan her bir fonksiyon elemanının davranışını gösterir.

a,b iki kompleks sayı olmak üzere γ ve σ, a dan b ye iki yol olsun. $\{(f_t,D_t)\}$ ve $\{(g_t,B_t)\}$ sırasıyla γ ve σ boyunca analitik devamlar olduklarını ve $[f_0]_a=[g_0]_a$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $[f_1]_b=[g_1]_b$ midir? Eğer γ ve σ aynı yollar ise bu taktirde Teorem 2.3.4 bunun doğru olduğunu gösterir. Bununla birlikte γ ve σ farklı iki yol ise cevap hayır olabilir. Cevabın olumlu olması durumunu bize Monodromy Teoremi söyleyecektir. Monodromy Teoreminin ispatı için ilk adım bir eğri boyunca bir analitik devamın yakınsaklık yarıçapının davranışlarını araştırmaktır.

2.3.7. Yardımcı Teorem. $\gamma:[0,1]\to C$ bir yol ve $\{(f_t,D_t):0\le t\le 1\}$, γ boyunca bir analitik devam olsun. $0\le t\le 1$ için $R(t)$, f_t nin $z=\gamma(t)$ civarındaki seri açılımının yakınsaklık yarıçapı olsun. Bu taktirde ya $R(t)\equiv\infty$ yada $R:[0,1]\to(0,\infty)$ süreklidir.

İspat: Bazı t değerleri için $R(t)=\infty$ ise bu taktirde f_t yi bir tam fonksiyona genişletmek mümkündür. Buradan her $s\in[0,1]$ için $R(s)=\infty$ olacak şekilde bütün $z\in D_s$ ler için $f_s(z)=f_t(z)$ yani $R(s)\equiv\infty$ olduğu görülür. Her $t\in[0,1]$ için $R(t)<\infty$ olduğunu kabul edelim. Belli $t\in[0,1]$ ve $\tau=\gamma(t)$ olsun. Üstelik

$$f_t(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n(z-\tau)^n$$

f_t nin τ civarındaki seri açılımı olsun. $|s-t|<\delta_1$ özelliğindeki tüm s ve t ler için $\gamma(s)\in D_t\cap B(\tau,R(t))$ ve $[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)}$ olacak şekilde $\delta_1>0$ sayısını seçelim. $|s-t|<\delta_1$ özelliğinde belli s için $\sigma=\gamma(s)$ olsun. Bu durumda f_t, $B(\tau,R(t))$ üzerinde bir analitik fonksiyona genişletilebilir. f_s, σ nın bir komşuluğunda f_t ile aynı özelliklere sahip olduğundan f_s, $B(\tau,R(t))\cup D_s$ üzerinde de analitik olacak şekilde genişletilebilir. Eğer f_s, $z=\sigma$ civarında

$$f_s=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(z-\sigma)^n$$

biçiminde bir kuvvet serisi açılımına sahip ise bu taktirde $R(s)$ yakınsaklık yarıçapı en azından σ nın $|z-\tau|=R(t)$ çemberine uzaklığı kadar büyük olmalıdır yani

$$R(s)\geq R(t)-|\tau-\sigma|=d(\sigma,\{z:|z-\tau|=R(t)\})$$

dir. Ancak bu

$$R(t)-R(s)\leq|\gamma(t)-\gamma(s)|$$

olduğunu gösterir. Benzer bir tartışma ile

$$R(s)-R(t)\leq|\gamma(t)-\gamma(s)|$$

olduğu görülür. Böylece $|s-t|<\delta_1$ için

$$|R(s)-R(t)|\leq|\gamma(t)-\gamma(s)|$$

dir. $\gamma:[0,1]\to C$ sürekli olduğundan R, t de sürekli olmalıdır.

2.3.8. Yardımcı Teorem. $\sigma:[0,1]\to C$ a dan b ye herhangi bir yol olsun. Her $t\in[0,1]$ için $|\gamma(t)-\sigma(t)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı var ve $\{(g_t,B_t):0\le t\le 1\}$ $[g_0]_a=[f_0]_a$ özelliğinde γ boyunca bir analitik devam ise bu taktirde $[g_1]_b=[f_1]_b$ dir.

İspat: $0\le t\le 1$ için f_t nin $z=\gamma(t)$ civarındaki kuvvet serisi açılımının yakınsaklık yarıçapı $R(t)$ olsun. Eğer $R(t)\equiv\infty$ ise herhangi bir ε değeri bulunabileceği gösterilebilir. Her $t\in[0,1]$ için $R(t)<\infty$ olsun. Yardımcı Teorem 2.3.7 den R sürekli fonksiyon ve her $t\in[0,1]$ için $R(t)>0$ olduğundan R bir pozitif en küçük değere sahiptir.

$$0<\varepsilon<\frac{1}{2}\min\{R(t):0\le t\le 1\} \tag{2.8}$$

seçelim. σ ve $\{(g_t,B_t)\}$ nın teoremin hipotezini sağladığını kabul edelim. Üstelik D_t nin $\gamma(t)$ civarında $R(t)$ yarıçaplı disk olduğunu kabul etmemiz ispatı tamamlamamızı kolaylaştıracaktır. Aynı nedenden her B_t yi bir disk kabul edelim. $|\sigma(t)-\gamma(t)|<\varepsilon<R(t)$ olduğundan her $t\in[0,1]$ için $\sigma(t)\in B_t\cap D_t$ dir. Bu aklımıza her $z\in B_t\cap D_t$ için $g_t(z)=f_t(z)$ olup olmadığı sorusunu getirir. Aslında ispatın tamamlanması için eşitliğin $t=1$ için sağlandığını göstermemiz yeterlidir. $T=\{t\in[0,1]:f_t(z)=g_t(z),z\in B_t\cap D_t\}$ kümesi tanımlansın. $1\in T$ olduğunu gösterelim. Bunun için $T\ne\phi$, $T\subset[0,1]$ kümesinin hem açık hem kapalı olduğunu görmek yeterlidir.

Hipotezden $0\in T$ olup $T\ne\phi$ dır. T nin açık olduğunu gösterelim. Belli bir $t\in T$ ve her $|s-t|<\delta$ özelliğindeki $\delta>0$ sayısını

$$\begin{cases} |\gamma(s)-\gamma(t)|<\varepsilon & [f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)} \\ |\sigma(s)-\sigma(t)|<\varepsilon & [g_s]_{\sigma(s)}=[g_t]_{\sigma(s)} \\ \sigma(s)\in B_t & \end{cases} \tag{2.9}$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $|s-t|<\delta$ için $B_s \cap B_t \cap D_s \cap D_t \neq \phi$ olduğunu ve $\sigma(s)$ nin bu kesişimde yer aldığını gösterelim. Eğer $|s-t|<\delta$ ise bu taktirde $\sigma(s) \in D_s$ iken $|\sigma(s)-\gamma(s)|<\varepsilon<R(s)$ dir. Üstelik (2.8) gereği

$$|\sigma(s)-\gamma(t)| \leq |\sigma(s)-\gamma(s)|+|\gamma(s)-\gamma(t)|<2\varepsilon<R(t)$$

olup böylece $\sigma(s) \in D_t$ dir. (2.9) gereği $\sigma(s) \in B_s \cap B_t$ olduğundan $\sigma(s) \in B_s \cap B_t \cap D_s \cap D_t = G$ dir. $t \in T$ olduğundan her $z \in G$ için $f_s(z)=f_t(z)$ ve $g_s(z)=g_t(z)$ dir. Böylece $z \in G$ için $f_s(z)=g_s(z)$ olur. Ancak G, $B_s \cap D_s$ de bir limit noktasına sahip olduğundan $s \in T$ olmalıdır. Yani $(t-\delta, t+\delta) \in T$ ve T açıktır. T nin kapalı olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

2.3.9. Tanım. (f,D) fonksiyon elemanı ve G, D yi içeren bir bölge olsun. Eğer başlangıç noktası D de olan herhangi bir $\gamma \subset G$ yolu boyunca, (f,D) analitik devamı varsa (f,D) ye G bölgesinde *kısıtsız analitik devam* denir.

Eğer $D=\{z:|z-1|<1\}$ ve f, $\sqrt{z}$ veya $\log z$ nin esas dalı ise (f,D) delinmiş düzlemde kısıtsız devam olarak kabul edilir, tüm düzlemde değil.

2.3.10. Teorem (Monodromy Teoremi). (f,D) fonksiyon elemanını ve G (f,D) nin kısıtlamasız devam edebileceği D yi kapsayan bir bölge olsun. Ayrıca $a \in D$ ve $b \in G$ olmak üzere γ_0 ve γ_1 G de a dan b ye iki yol olsun. $\{(f_t,D_t):0 \leq t \leq 1\}$ ve $\{(g_t,B_t):0 \leq t \leq 1\}$ sırasıyla γ_0 ve γ_1 yolları boyunca (f,D) nin analitik devamları olsun. γ_0 ve γ_1 G de aynı bitim noktalı homotopik iki eğri ise bu taktirde

$$[f_1]_b=[g_1]_b$$

dir.

İspat: γ_0 ve γ_1 G de aynı bitim noktalı homotopik iki yol olduklarından bir her $t,u \in [0,1]$ için

$$\Gamma(t,0)=\gamma_o(t) \qquad \Gamma(t,1)=\gamma_1(t)$$

$$\Gamma(0,u)=a \qquad \Gamma(1,u)=b$$

özelliklerini sağlayan $\Gamma:[0,1]\times[0,1]\to G$ sürekli fonksiyonu vardır. Belli $u\in[0,1]$ için γ_u yolunu a dan b ye $\gamma_u(t)=\Gamma(t,u)$ biçiminde tanımlayalım. Hipotez gereği γ_u boyunca (f,D) nin bir

$$\{(h_{t,u},D_{t,u}):0\le t\le 1\}$$

analitik devamı vardır. Buradan Teorem 2.3.8 gereği $[g_1]_b=[h_{1,1}]_b$ ve $[f_1]_b=[h_{1,0}]_b$ elde edilir. O halde teoremi ispat etmek için

$$[h_{1,0}]_b=[h_{1,1}]_b$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$U=\{u\in[0,1]:[h_{1,u}]_b=[h_{1,0}]_b\}$$

kümesini göz önüne alalım. U nun $[0,1]$ in boş olmayan kapalı ve açık bir alt kümesi olduğunu gösterelim. $0\in U$ olduğundan $U\neq\phi$ dır. U nun hem açık hem kapalı olduğunu göstermek için aşağıdaki iddianın doğru olduğunu göstereceğiz.

"$u\in[0,1]$ için $|u-v|<\delta$ iken $[h_{1,u}]_b=[h_{1,v}]_b$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır."

Gerçekten, belli bir $u\in[0,1]$ için Teorem 2.3.8 den faydalanarak σ, her $t\in[0,1]$ için $|\gamma_u(t)-\sigma_u(t)|<\varepsilon$ özelliğinde a dan b ye bir yol ve $\{(k_t,E_t)\}$, σ yolu boyunca (f,D) nin herhangi bir analitik devamı ise

$$[h_{1,u}]_b=[k_1]_b \tag{2.10}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı bulunabilir. Γ düzgün sürekli bir fonksiyon olduğundan her $t\in[0,1]$ için $|u-v|<\delta$ özelliğinde $|\gamma_u(t)-\gamma_v(t)|=|\Gamma(t,u)-\Gamma(t,v)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. (2.10) eşitliği ile iddianın doğruluğu görülür.

$u\in U$ ve $\delta>0$ sayısı iddiada geçen sayı olsun. U nun tanımı gereği $(u-\delta,u+\delta)\subset U$ olup U açıktır. Eğer $u\in\overline{U}$ ve δ, iddiadaki gibi seçilmişse $|u-v|<\delta$ olacak şekilde bir $v\in U$ vardır. Ancak iddia gereği $[h_{1,u}]_b=[h_{1,v}]_b$ ve $v\in U$ olduğundan $[h_{1,v}]_b=[h_{1,0}]_b$ dir. Bu yüzden $u\in U$ olacak şekilde $[h_{1,u}]_b=[h_{1,0}]_b$ dir. Yani U kapalıdır.

2.3.11. Sonuç. (f, D) basit bağlantılı G bölgesinde kısıtlamasız devam eden fonksiyon elemanı olsun. Bu taktirde her $z \in D$ için $F(z) = f(z)$ olacak şekilde $F : G \to C$ analitik fonksiyon vardır.

İspat: $a \in D$ sabit bir nokta ve $z \in G$ herhangi bir nokta olsun. Eğer γ, G bölgesinde a dan b ye bir yol ve $\{(f_t, D_t) : 0 \leq t \leq 1\}$, γ boyunca (f, D) nin analitik devamı ise bu taktirde $F(z,\gamma) = f_1(z)$ dir. G basit bağlantılı olduğundan G deki herhangi iki γ ve σ a dan b ye yolları için $F(z,\gamma) = F(z,\sigma)$ dir. Böylece $F(z) = F(z,\gamma)$ eşitliği $F : G \to C$ ye iyi tanımlı fonksiyonunu verir. F nin analitik olduğunu göstermek için $z \in G$ ve γ ve $\{(f_t, D_t)\}$ yukarıda verildiği gibi olsun. Kolayca z nin bir komşuluğundaki w için $F(w) = f(w)$ olduğu görülür. Böylece F analitik olmak zorundadır.

3. TOPOLOJİK UZAYLAR VE DEMET TEORİSİ

3.1 Topolojik Uzaylar ve Komşuluk Sistemleri

Bu bölümde topolojik uzaylar ve komşuluk sistemleri ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilecektir. Bir topolojik uzay fikri metrik uzaylar teorisinin en önemli kavramlarından biri olan "açık küme" ile ortaya çıkar. Bir topolojik uzayda bize açık küme denilen bir X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi verilir. Ancak ortada bir metrik olmayabilir.

3.1.1. Tanım. X boş olmayan bir küme ve $P(X)=\{A : A \in X\}$ olmak üzere $\tau \subset P(X)$ olsun. Eğer

a) $\phi, X \in \tau$

b) Eğer $U_1, U_2, ..., U_n \in \tau$ ise $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau$

c) Eğer $\{U_i : i \in I\}$ kümesi τ da ki kümelerin herhangi bir koleksiyonu iken $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. aksiyomlarını sağlıyorsa bu taktirde (X,τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir.

τ kümeler ailesine X üzerinde bir *topolojidir* ve τ nun her bir elemanına bir *açık küme* denilir.

Dikkat edilirse tanımın a), b), c) aksiyomları bir metrik uzayın açık alt kümelerinin özellikleridir. Dolayısıyla eğer (X,d) bir metrik uzay ve τ, X in tüm açık alt kümelerinin ailesi ise bu taktirde (X,τ) bir topolojik uzaydır.

3.1.2. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $F \subset X$ olmak üzere $F^t = X - F \in \tau$ ise bu taktirde F kümesine (X,τ) topolojik uzayında *kapalı küme* denir. Bir $a \in X$ noktası verilsin. Eğer a yı bulunduran her $a \in U$ açık kümesi için $x \neq a$ olacak şekilde bir $x \in A \cap U$ noktası varsa a noktasına A nın bir *limit noktası* denir.

Bu kesimde verilen bazı önermelerin ispatı kolay olduğundan verilmeyecektir.

3.1.3. Teorem. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde

a) ϕ ve X kapalı kümelerdir.

b) $F_1, F_2, ..., F_n$ kapalı kümeler ise $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ kümesi de kapalıdır.

c) $\{F_i : i \in I\}$ kapalı kümelerinin bir ailesi ise $\bigcap_{i\in I} F_i$ kapalı bir kümedir.

3.1.4. Teorem. Bir topolojik uzayın bir alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart tüm limit noktalarını bulundurmasıdır.

Her metrik uzay topolojik uzay olmasına rağmen tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $X = [0,1] = \{t : 0 \le t \le 1\}$ olsun. τ ailesi

1) $0 \in U$ ise $X - U$ ya boştur ya da X deki noktaların bir dizisidir.

2) $0 \notin U$ ise U herhangi bir küme olabilir.

özelliklere uygun tüm U kümelerinden meydana gelsin.

(X,τ) bir topolojik uzaydır. Bu topolojideki bazı açık küme örnekleri şunlardır: X deki tüm irrasyonel sayıların kümesi, sıfırla birlikte tüm irrasyonel sayıların kümesidir. Açık kümelerin τ ailesini veren hiç bir metrik yoktur.

X üzerinde d metriğini "$U \in \tau \Leftrightarrow$ her $x \in U$ için $B(x,\varepsilon) = \{y : d(x,y) < \varepsilon\} \subset U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır." Biçiminde tanımlayalım. $A = (0,1)$ verilsin. Eğer $U \in \tau$ ve $0 \in U$ ise bu taktirde bir $a \in U \cap A$ $(a \ne 0)$ noktası vardır. (Aslında bu noktalardan sonsuz tane vardır). Böylece 0, A nın bir limit noktasıdır sonucu ortaya çıkar. O halde A da $d(t_n, 0) \to 0$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır. Ancak eğer $U = \{x \in X : x \ne t_n$, herhangi bir n için$\}$ = X - $\{t_1, t_2, ...\}$ ise bu taktirde $0 \in U$ ve U açıktır. Böylece yeterince büyük n için $t_n \in U$ olmalıdır. Bu açık bir çelişkidir. Dolayısıyla böyle bir metrik bulunamaz.

Bu örnek, metrik uzaylar için var olan bununla birlikte biraz da genel topolojik uzaylar için kullanılan "dizilerin yakınsaklığı" tekniğiyle ilgili bir örnektir. Bir topolojik uzayda "yakınsak dizi" tanımlamak mümkündür ama bu kavram bir topolojik uzayın yapısıyla bir metrik uzayınki kadar sıkı bağlı değildir. Örneğin, yukarıda gösterildiği gibi bir nokta bir A kümesinin bir limit noktası olabilir ancak A kümesinde bu noktaya yakınsayan bir dizi yoktur.

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde bir d metriği $\tau = \tau_d$ olacak şekilde bulunabilirse (X,τ) ya *metriklenebilir uzay* denir. Bir çok metriklenemeyen uzay vardır. Yukarıda olduğu gibi metriklenemeyen topolojilerin elde edilmesi için topolojik uzayların keyfi kartezyen çarpımı tanımlanabilir. Bu durumda çarpım uzayı yalnız sayılabilir çoklukta koordinatların mevcut olmasına ve her koordinat uzayının metriklenebilir olmasına rağmen metriklenemez.

Bir diğer bir örnek; $I = [0,1]$ aralığını dikkate alalım. I nın bir kopyasını diğerine ekleyelim. Hala I ya benzeyen bir topolojik uzaya sahibiz. Örneğin $[1,2]$ I nın bir kopyasıdır ve bunu I ya eklersek $[0,2]$ aralığını elde ederiz. Sonlu sayıda kapalı aralık birbirine eklenirse yeni bir kapalı aralık elde edilir. Sayılabilir çoklukta kapalı aralık bir araya getirilirse $[0,\infty)$ aralığı elde edilir. (Aralıklar her iki taraftan eklenirse $(-\infty,\infty)$ elde edilir.) Bu işlem sayılamaz çoklukta aralıkla yapılırsa "Uzun Eksen " adı verilen bir uzay elde edilir. Uzun eksen reel eksene benzemesine rağmen metriklenemez. Genel olarak eskilerinden yeni uzaylar elde etmek için kullanılan bir yöntem sayılamaz defa uygulanıyorsa metriklenemeyen bir uzay elde edilir.

Bir diğer metriklenemeyen uzay örneği olarak şu verilebilir: $X = \{a,b,c\}$ kümesi verilsin. $\tau = \{\phi, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ olarak alındığında (X,τ) bir topolojik uzay olur. (X,τ) nun metriklenebilir olmadığını görmek için c yi bulunduran açık kümenin yalnız X in kendisi olduğunu göz önünde bulunduralım. Burada U ve V ayrık açık kümeleri $a \in U$ ve $c \in V$ olacak şekilde yoktur. Öte yandan X üzerinde bir d metriği, τ bu metriğe bağlı açık kümelerin ailesi olacak şekilde var olsaydı bu taktirde Böyle açık kümeler bulmak mümkün olacaktı. (Örneğin; $\varepsilon < d(a,c)$ olmak üzere $U = B(a;\varepsilon)$ ve $V = B(c;\varepsilon)$) Diğer bir ifadeyle τ, noktaları ayırmak için yeterli açık kümeye sahip olmadığından (X,τ) nun metriklenebilir olması mümkün değildir. Şimdi vereceğimiz tanım bu zorluğu aşmak için yeterli açık kümeyi ortaya koyar.

3.1.5. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $a \neq b$ olmak üzere her $a,b \in X$ için $a \in U$ ve $b \in V$ olacak şekilde ayrık açık U ve V kümeleri varsa (X,τ) uzayına bir *Hausdorff Uzay* denir.

Her metrik uzay bir Hausdorff uzaydır. Daha önce görüldüğü gibi Hausdorff uzay olmayan topolojik uzay örnekleri vardır.

3.1.6. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in boştan farklı hem açık hem kapalı alt kümesi yalnız kendisi ise (X,τ) ya *bağlantılıdır* denir.

3.1.7. Teorem. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu taktirde her C_i X in bir (maksimal bağlantılı alt kümesi) bileşeni olmak üzere $X = \cup\{C_i : i \in I\}$ dir. Üstelik X in farklı bileşenleri ayrıktır ve her bileşeni kapalıdır.

3.1.8. Tanım. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olsun. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için $\Delta \in \sigma$ iken $f^{-1}(\Delta) \in \tau$ ise f ye *süreklidir* denir.

3.1.9. Teorem. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

a) f süreklidir.

b) Eğer $A \subset Y$ kapalı ise $f^{-1}(A) \subset X$ kapalıdır.

c) Eğer $a \in X$ ve eğer $f(a) \in \Delta \in \sigma$ ise bu taktirde $a \in U$ ve $f(U) \subset \Delta$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ kümesi vardır.

3.1.10. Teorem. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olsun. X in bağlantılı olduğunu varsayalım. Eğer $f : X \to Y$, $f(X) = Y$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ise bu taktirde Y bağlantılıdır.

3.1.11. Tanım. $K \subset X$ kümesi verilsin. Eğer τ nun $K \subset \cup\{U : U \in \partial\}$ özelliğindeki her ∂ alt koleksiyonu için sonlu sayıda $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \partial$ kümesi $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ olacak şekilde varsa K *kompakttır*.

3.1.12. Teorem. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve K X in kompakt bir alt kümesi olsun. Eğer $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon ise bu taktirde $f(K)$, Y de kompakttır.

(X,d) bir metrik uzay ve $Y \subset X$ iken (Y,d) de bir metrik uzaydır. Buna göre bir topolojik uzayın alt kümesinden bir topolojik uzay elde etmenin bir yolu var mıdır? Şüphesiz, eğer (X,τ) bir topolojik uzay ve $Y \subset X$ ise bu taktirde

$$\tau_y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

biçiminde tanımlanırsa τ_Y de Y üzerinde bir topolojidir.

3.1.13. Tanım. Eğer Y, (X,τ) topolojik uzayının bir alt kümesi ise bu taktirde τ_Y ye Y üzerinde *rölatif* (*göreli*) *topoloji* denir. $W \in \tau_Y$ ise $W \subset Y$ ye Y de *rölatif olarak açıktır* denir. Eğer Y-$W \in \tau_Y$ ise W, Y de *rölatif olarak kapalıdır* denir.

Bir topolojik uzayın alt kümesinden topolojik uzay olarak bahsedildiğinde aksi belirtilmedikçe onun rölatif topoloji olduğu anlaşılacaktır.

3.1.14. Teorem: (X,τ) topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun.

a) X kompakt ve Y, X in kapalı bir alt kümesi ise (Y,τ_Y) kompakttır.

b) $Y \subset X$ kompakt olması için gerek ve yeter şart (Y,τ_Y) nin bir kompakt topolojik uzay olmasıdır.

c) (X,τ) bir Hausdorff uzay ise (Y,τ_Y) da bir Hausdorff uzaydır.

d) (X,τ) bir Hausdorff uzay ve (Y,τ_Y) kompakt ise $Y \subset X$ kapalıdır.

İspat: İlk üçünün ispatı kolaydır. Bir fikir vermesi açısından sadece d) yi ispat edelim. Bunun için her $a \in X - Y$ için $a \in U$ ve $U \cap Y = \phi$ olacak şekilde bir U açık kümesinin var olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece belirli bir $a \in X - Y$ ve her $y \in Y$ için X de $a \in U_y$, $y \in V_y$ ve $U_y \cap V_y = \phi$ olacak şekilde U_y ve V_y açık kümeleri de mevcuttur. (Çünkü (X,τ) Hausdorff uzaydır)

Bu taktirde $\{V_Y \cap Y : y \in Y\}$ kümesi τ_Y deki kümelerin Y yi örten koleksiyonudur. Böylece $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n}(V_{y_i} \cap Y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} = V$ olacak şekilde $y_1, y_2, ..., y_n \in Y$ noktaları vardır. Her a için $a \in U_{y_i}$ olduğundan $a \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ ve böylece $U \in \tau$ dır. Buradan $U \cap V = \bigcup_{i=1}^{n}(U \cap V_{y_i}) = \phi$ olduğu görülür. Buradan da $U \cap Y = \phi$ elde edilir.

3.1.15. Sonuç. (X,τ) Hausdorff Uzay ve Y, X in kompakt bir alt kümesi olsun. Bu taktirde her $a \in X - Y$ için $a \in U$, $Y \subset V$ ve $U \cap V = \phi$ olacak şekilde X de U ve V açık kümeleri vardır.

Eğer metrik uzayları yeniden göz önüne alırsak bir topoloji tanımlamak için yeni bir yol keşfedebiliriz. Şöyle ki: Önce metrik verilir, ardından açık yuvarlar tanımlanır, daha sonra her noktanın civarında bir yuvar bulunduran açık kümeler tanımlanır. İşlem bir küme üzerinde bir komşuluk sisteminin tanımlanmasıyla son bulur.

3.1.16. Tanım. X bir küme olsun. Her $x \in X$ için X kümesinin alt kümelerinin bir N_x ailesinin aşağıdaki özellikleri sağladığını kabul edelim.

a) Her $U \in N_x$ için $x \in U$ dır.

b) $U,V \in N_x$ ise bu taktirde $W \subset U \cap V$ olacak şekilde bir $W \in N_x$ vardır.

c) $U \in N_x$ ve $V \in N_y$ ise bu taktirde her $z \in U \cap V$ için $W \subset U \cap V$ olacak şekilde bir $W \in N_z$ vardır.

Bu özelliklere sahip $\{N_x : x \in X\}$ ailesine X üzerinde bir *komşuluk sistemi* denir. Eğer (X,d) bir metrik uzay ve $x \in X$ ise bu taktirde $N_x = \{B(x;\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ ailesi bir komşuluk sistemi olan $\{N_x : x \in X\}$ ailesini verir. Aslında bu yukarıdaki tanımların ilk örneğidir.

Dikkat edilirse c) şartı farklı noktaların komşuluk sistemleri ile ilgilidir. Eğer sadece a) ve b) şartları sağlansaydı, verilen topolojideki bu komşulukların açık kümeler olduğu sonucuna ulaşılamayacaktı. Örneğin; Eğer X bir metrik uzay ve N_x, x civarındaki kapalı yuvarların ailesi ise bu taktirde $\{N_x : x \in X\}$ a) ve b) şartını sağlar ancak c) şartını sağlamaz. Üstelik $x = y = z$ alınmasıyla b) şartı c) den elde edilebileceği kolaylıkla gösterilebilir.

3.1.17. Teorem. a) Eğer (X,τ) bir topolojik uzay ve $N_x = \{U \in \tau : x \in U\}$ ise bu taktirde $\{N_x : x \in X\}$ ailesi X üzerinde bir komşuluk sistemidir.

b) $\{N_x : x \in X\}$ X üzerinde bir komşuluk sistemi ve $\tau = \{U : x \in U$ olması $V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in N_x$ olmasını gerektirir$\}$ ise bu taktirde τ, X üzerinde bir topolojidir ve her x için $N_x \subset \tau$ dur.

c) Eğer (X,τ) bir topolojik uzay ve $\{N_x : x \in X\}$ a) da ki gibi tanımlı ise bu taktirde b) deki gibi elde edilen topoloji yine τ dur.

d) Bir $\{N_x : x \in X\}$ komşuluk sistemi verilir ve τ topolojisi b) deki gibi tanımlanırsa bu taktirde τ dan elde edilen komşuluk sistemi $\{N_x : x \in X\}$ kümesini bulundurur. Yani, V, τ dan elde edilen x in komşuluklarından biri ise $U \subset V$ olacak şekilde bir $U \in N_x$ vardır.

İspat: a), c) ve d) nin ispatı nispeten daha kolay olduğundan sadece b) yi ispatlayalım. İspata başlarken önce X, $\phi \in \tau$ olduğunu hatırlayarak başlayalım. $U_1, U_2, ..., U_n \in \tau$ olsun ve $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$ olarak seçelim. Eğer $x \in U$ ise bu taktirde her j için $V_j \subset U_j$ V olacak şekilde bir $V_j \in N_x$ vardır. Tanım 3.1.16 b) deki tümevarımdan $V \subset \bigcap_{j=1}^{n} V_j$ olacak şekilde bir $V \in N_x$ vardır. Buradan $V \subset U$ ve U, τ ya ait olmalıdır. τ daki kümelerin bir koleksiyonunun birleşimi τ ya ait olduğundan τ bir topolojidir. Son olarak belli $x \in U$ ve $U \in N_x$ alalım. Eğer $y \in U$ ise Tanım 6.16 c) den $V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in N_x$ vardır. Böylece $U \in \tau$.

3.1.18. Tanım. $\{N_x : x \in X\}$, X üzerinde bir komşuluk sistemi ve τ, Teorem 3.1.17 nin b) kısmındaki gibi tanımlı topoloji ise bu taktirde τ ya bu komşuluk sisteminden *indirgenmiş topoloji* denir.

3.1.19. Sonuç. $\{N_x : x \in X\}$**,** X üzerinde bir komşuluk sistemi ve τ indirgenmiş topoloji olsun. Bu taktirde (X,τ) nun Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart farklı herhangi iki $x, y \in X$ noktası için $U \cap V = \phi$ olacak şekilde bir $U \in N_x$ ve bir $V \in N_y$ kümesinin mevcut olmasıdır.

3.2 Bir Açık Küme Üzerindeki Analitik Fonksiyonların Çekirdeklerinin Demeti

Bu bölümde kompleks analizde önemli bir role sahip olan bir topolojik uzay tanımlanacaktır. Eğer (f,D) bir fonksiyon elemanı ise bu taktirde $z = a \in D$ olmak üzere a nın bir komşuluğundaki her z için $f(z) = g(z)$ olacak şekilde bütün (g,D) fonksiyon elemanlarının oluşturduğu ailenin f nin a daki çekirdeği olduğunu ve bu çekirdeğin $[f]_a$ ile gösterildiğini hatırlayalım.

3.2.1 Tanım. Bir $G \subset C$ açık kümesi için

$$\varphi(G) = \{(z, f(z)) : z \in G;\ f,\ z \,\text{de analitik}\}$$

olsun. Bir $\rho : \varphi(G) \to C$ dönüşümünü $\rho(z,[f]_z) = z$ olarak tanımlayalım. Bu taktirde $(\varphi(G),\rho)$ çiftine G üzerindeki analitik fonksiyonların *çekirdeklerin demeti* ve ρ dönüşümüne de *izdüşüm dönüşümü* denir. Her $z \in G$ için $\rho^{-1}(z) = \rho^{-1}(\{z\})$, z üzerinde *sap* veya *lif* ve G kümesi ise *demetin temel uzayı* olarak adlandırılır.

Bir $(z,[f]_z) \in \varphi(G)$ noktası için, f nin G nin tamamında tanımlı olması gerekmez. f yalnızca z nin bir komşuluğunda analitik olmalıdır.

Bu demeti nasıl açıklarız. Demet kavramını açıklamanın yöntemlerinden biri tanımda kullanılan tarımsal terminolojiyi takip etmektir. Her sapın uç kısmında çekirdeklerin bir koleksiyonu bulunur. Saplar bir demetle birbirine bağlanır. $\varphi(G)$, kendisine ait noktalar notasyonunun gözden geçirilmesiyle elde edilebilir. Bir $(z,[f]_z) \in \varphi(G)$ noktasını göz önüne aldığımız da $[f]_z$ çekirdeğindeki bir (f,D) fonksiyon elemanını bu çekirdeğin yerine düşünürüz. Her $w \in D$ için bir $(z,[f]_z) \in \varphi(G)$ noktası böylece $(z,[f]_z)$ civarında bir $\{(w,[f]_w) : w \in D\}$ tabakası veya yüzeyi vardır. Gerçekten $\varphi(G)$ tam olarak böyle tabakalardan yapılmıştır ve bunlar çeşitli yollarla üst üste gelirler. Ayrıca $\varphi(G)$ yi grafiklerin birleşimi olarak düşünülebiliriz; her $(z,[f]_z) \in \varphi(G)$ noktası (f,D) nin grafiğindeki $(z,[f]_z)$ noktasına karşılık gelir. ((f,D) nin grafiği $\mathbf{C}^2$ ve $\mathbf{R}^4$ ün bir alt kümesidir) Eğer iki fonksiyon elemanının grafikleri bir z noktası civarında çakışık ise bu taktirde bu z noktası civarında denktirler.

Bir topoloji bir komşuluk sisteminin tanımı yardımıyla $\varphi(G)$ üzerinde tanımlanacaktır. Bir $D \subset G$ açık kümesi ve D üzerinde analitik bir $f : D \to C$ fonksiyonu

$$N(f,D) = \{(z,[f]_z) : z \in D\} \tag{3.1}$$

tanımlar. Yani $N(f,D)$ her (f,D) fonksiyon elemanı için tanımlanır. Eğer $\varphi(G)$ yi çekirdekler tarafından indislenen G üzerindeki tabakaların koleksiyonu olarak düşünürsek, bu taktirde $N(f,D)$, D üzerinde yer alan ve f tarafından indislenen bu tabakanın bir parçasıdır.

3.2.2. Teorem. Her $(a,[f]_a) \in \varphi(G)$ noktası için

$$\aleph_{(a,[f]_a)} = \{ N(g,B) : a \in B \text{ ve } [g]_a = [f]_a \}$$

verilsin. Bu taktirde $\{\aleph_{(a,[f]_a)} : (a,[f]_a) \in \varphi(G)\}$ $\varphi(G)$ de bir komşuluk sistemidir ve indirgenen topoloji Hausdorfftur. Üstelik indirgenen topoloji $\rho : \varphi(G) \to G$ dönüşümünü sürekli yapar.

İspat: Belli bir $(a,[f]_a) \in \varphi(G)$ için; Tanım 6.16 nın a) kısmı sağlandığından c) kısmı da sağlanır. $N(g_1,B_1)$, $N(g_2,B_2) \in \aleph_{(a,[f]_a)}$ ve

$$(b,[h]_b) \in N(g_1,B_1) \cap N(g_2,B_2) \tag{3.2}$$

olsun. $N(k,W) \in \aleph_{(b,[h]_b)}$ ve $N(k,W) \subset N(g_1,B_1) \cap N(g_2,B_2)$ olacak şekilde bir (k,W) fonksiyon elemanı bulmalıyız. (3.2) gereği $b \in B_1 \cap B_2$ ve $[h]_b = [g_1]_b = [g_2]_b$ dir. Eğer $b \in W \subset B_1 \cap B_2$ ise ve h, W üzerinde tanımlanırsa $N(h,W) \subset N(g_1,B_1) \cap N(g_2,B_2)$ olur.

İndirgenmiş topolojinin Hausdorff olduğunu göstermek için Sonuç 3.1.19 u kullanalım. $(a,[f]_a)$ ve $(b,[g]_b)$, $\varphi(G)$ nin farklı iki noktası olsun. $N(f,A) \cap N(g,B) = \phi$ olacak şekilde $(a,[f]_a)$ nın bir $N(f,A)$ ve $(b,[g]_b)$ nin de bir

$N(g,B)$ komşuluğunu bulmalıyız. $(a,[f]_a) \neq (b,[g]_b)$ hangi durumda olabilir. İki ihtimal vardır. Ya $a \neq b$ veya $a = b$ ve $[f]_a \neq [g]_a$ dır. Eğer $a \neq b$ ise bu taktirde A ve B sırasıyla a ve b civarında ayrık diskler olsun. Bu durumda $N(f,A) \cap N(g,B) = \phi$ dir. Eğer $a = b$ ancak $[f]_a \neq [g]_a$ ise bu taktirde $[f]_a \neq [g]_a$ olduğundan f ve g, $D = B(a;r)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere ve $0 < |z-a| < r$ için $f(z) \neq g(z)$ olacak şekilde D diski vardır. ($f(a) = g(a)$ olabilir ancak bu istenilen sonuç değildir). Şimdi iddia ediyoruz ki "$N(f,D) \cap N(g,D) = \phi$" dir.

Gerçekten eğer $(z,[h]_z) \in N(f,D) \cap N(g,D)$ ise bu taktirde $z \in D$, $[h]_z = [f]_z$ ve $[h]_z = [g]_z$ dir. Bu ise f ve g nin z nin bir komşuluğunda çakışık olduğunu gösterir. Böylece çelişkiye düşülmüş olur. O halde indirgenmiş Topoloji Hausdorfftur.

U, G nin bir açık alt kümesi olsun. İspata $\rho : \varphi(G) \to G$ nin sürekli olduğunu $\rho^{-1}(U)$ yu hesaplayarak başlayalım. $\rho(z,[f]_z) = z$ olduğundan

$$\rho^{-1}(U) = \{(z,[f]_z) : z \in U\}$$

dir. Böylece eğer $(z,[f]_z) \in \rho^{-1}(U)$ ve D, z civarında, üzerinde f nin tanımlı olduğu $D \subset U$ olacak şekilde bir disk ise bu taktirde $N(f,D) \subset \rho^{-1}(U)$ dir. Bu ise ρ nin sürekli olduğunu gösterir.

İndirgenmiş topolojinin Hausdorff olduğunu göstermekle yapmış olduğumuza bir göz atalım. Eğer $a \neq b$ ise $(a,[f]_a)$ ve $(b,[g]_b)$ farklı $\rho^{-1}(a)$ ve $\rho^{-1}(b)$ sapları üzerindeydi. Böylece farklı saplar ayrıştırıldı. Gerçekten eğer $a \in A$, $b \in B$ ve $A \cap B = \phi$ ise o zaman $\rho^{-1}(a) \cap \rho^{-1}(b) = \phi$ dir. Eğer $a = b$ ise $(a,[f]_a)$ ve $(a,[g]_a)$ aynı $\rho^{-1}(a)$ sapı üzerindedir. $[f]_a \neq [g]_a$ olduğundan sapı bölebiliyorduk yani bir çekirdek diğerinden daha yüksektedir.

3.2.3. Tanım. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $x_0, x_1 \in X$ ise bu taktirde $\gamma(0) = x_0$ ve $\gamma(1) = x_1$ olacak şekilde bir $\gamma : [0,1] \to X$ sürekli fonksiyonu varsa γ ya X de x_0 ile x_1 i birleştiren *yay* (veya *yol*) denir. Bu durumda x_0 a γ nın *başlangıç* x_1 e ise *bitim noktası* denir. $\{\gamma\} = \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ kümesine de γ nın *izi* denir.

Boş olmayan bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer herhangi iki $x_0, x_1 \in A$ noktaları için izi A da bulunan x_0 dan x_1 e bir yol varsa A kümesi *yol veya yay bağlantılıdır* denir. Eğer her $x \in X$ için ve x i bulunduran her U açık kümesi için $x \in V$ ve $V \subset U$ olacak şekilde bir yol bağlantılı açık V kümesi varsa bu taktirde (X, τ) topolojik uzayı *yerel yol ve yay bağlantılıdır* denir.

Her $x \in X$ için $\aleph_x$, X in x i bulunduran tüm açık yay bağlantılı alt kümelerinin ailesi olsun. Bu taktirde X in yerel yay bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $\{\aleph_x : x \in X\}$ nin X üzerindeki orijinal topolojiden indirgenen bir komşuluk sistemi olmasıdır.

3.2.4. Teorem. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

a) Eğer A, X in yay bağlantılı bir alt kümesi ise bu taktirde A bağlantılıdır.

b) Eğer X yerel yay bağlantılı ise bu taktirde X in her bileşeni bir açık kümedir.

Yukarıdaki teoreminin a) kısmının tersi doğru değildir. Örneğin;

$$X = \{t + i\sin(1/t) : t > 0\} \cup \{si : -1 \le s \le 1\}$$

olsun. X bağlantılı bir kümenin kapanışı olduğundan bağlantılıdır. Bununla birlikte X de $1/\pi$ den i ye uzanan bir yay yoktur. X aynı zamanda bağlantılı fakat yerel yay bağlantılı olmayan bir topolojik uzay örneğidir.

X in bağlantılı ve yerel yay bağlantılı olduğunu varsayalım. Bu taktirde X yay bağlantılı olacak mıdır? Cevabımız evet olacaktır. Aslında bu düzlemin açık alt kümeleri için ispatlanan bir teoremin değişik bir şeklidir. Düzlemdeki diskler bağlantılı olduklarından **C** nin açık alt kümeleri lokal yay bağlantılıdır. Şimdi **C** de geçerli olan şu sonucu verelim.

3.2.5. Teorem. Bir $G \subset \mathbf{C}$ açık kümesi bağlantılı olması için gerek ve yeter şart herhangi iki $a, b \in G$ noktasını birleştiren bir poligonun G de bulunmasıdır.

Bu teoremin kısmi genelleştirilmesi, ispatı hemen hemen Teorem 3.2.5 in ispatı ile aynı olan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.2.6. Teorem. Eğer X yerel yay bağlantılı ise bu taktirde X in açık bağlantılı bir alt kümesi de yay bağlantılıdır.

Şimdi bir G açık kümesi üzerindeki analitik fonksiyonların çekirdeklerinin demetine yeniden dönelim.

3.2.7. Teorem. G düzlemin açık bir alt kümesi, U ise üzerinde tanımlı bir f analitik fonksiyonu olacak şekilde G nin açık bağlantılı bir alt kümesi olsun. Bu taktirde $N(f,U)$, $\varphi(G)$ de yay bağlantılıdır.

İspat: $(a,[f]_a),(b,[g]_b) \in N(f,U)$ herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde $a,b \in U$ dur. U bölge olduğundan a dan b ye bir $\gamma:[0,1] \to U$ yolu vardır. Bu yol $\sigma:[0,1] \to N(f,U)$, $\sigma(t)=(\gamma(t),[f]_{\gamma(t)})$ biçiminde tanımlansın. $\sigma(0)=(a,[f]_a)$ ve $\sigma(1)=(b,[f]_b)$ olduğu açıktır. Eğer σ nın sürekli olduğu gösterilebilirse o zaman σ istenilen yaydır.

Belli bir $t \in [0,1]$ verilsin ve $N(g,V)$, $\sigma(t)$ nin bir komşuluğu olsun. Bu taktirde $\gamma(t) \in V$ ve $[f]_{\gamma(t)}=[g]_{\gamma(t)}$ dir. Böylece $B(\gamma(t);r) \subset U \cap V$ ve $|z-\gamma(t)|<r$ için $f(z)=g(z)$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı vardır. Üstelik γ sürekli olduğundan $|s-t|<\delta$ olduğunda $|\gamma(s)-\gamma(t)|<r$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Son iki özellik birleştirilirse

$$(t-\delta,t+\delta) \subset \sigma^{-1}(N(g,V))$$

elde edilir. Bu ise σ nın sürekli olduğunu gösterir.

3.2.8. Sonuç. $\varphi(G)$ yerel yay bağlantılıdır ve $\varphi(G)$ nin bileşenleri açık yay bağlantılı kümelerdir.

İspat: Bu sonucun ilk kısmı önceki teoremin bir sonucu olduğundan doğrudan görülür. İkinci kısım Teorem 3.2.4 b) ve Teorem 3.2.6 den elde edilir.

3.2.9. Teorem. $\varphi(G)$ de $(a,[f]_a)$ dan $(b,[g]_b)$ ye bir yay olması için gerek ve yeter şart G de $[g]_b$, $[f]_a$ nın γ boyunca analitik devamı olacak şekilde a dan b ye bir γ yolunun olmasıdır.

İspat: $\sigma:[0,1]\to\varphi(G)$, $\sigma(0)=(a,[f]_a)$ ve $\sigma(1)=(b,[f]_b)$ özelliğinde bir yol olsun. Bu taktirde $\gamma=\rho\circ\sigma$ G de a dan b ye bir yoldur. Her t için $\sigma(t)\in\varphi(G)$ olduğundan

$$\sigma(t)=(\gamma(t),[f_t]_{\gamma(t)})$$

olacak şekilde bir $[f_t]_{\gamma(t)}$ çekirdeği vardır. İddia ediyoruz ki $\{[f_t]_{\gamma(t)}:0\le t\le 1\}$, $[f]_a$ nın γ boyunca analitik devamıdır. Bunun için $[f]_a=[f_0]_a$ ve $[g]_b=[f_1]_b$ olduğundan yalnızca $\{[f_t]_{\gamma(t)}\}$ nin bir devam olduğunu göstermek gereklidir. D_t, her t için $z=\gamma(t)$ civarında $D_t\subset G$ olacak şekilde bir disk olsun. f_t, D_t üzerinde tanımlansın. Belli bir $t\in[0,1]$ için $N(f_t,D_t)$, $\sigma(t)$ nin bir komşuluğu ve σ sürekli olduğundan

$$(t-\delta,t+\delta)\subset\sigma^{-1}(N(f_t,D_t))$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Yani eğer $|s-t|<\delta$ ise $(\gamma(s),[f_s]_{\gamma(s)})=\sigma(s)\in N(f_t,D_t)$ dir. Ancak tanımdan $\gamma(s)\in D_t$ ve $[f_s]_{\gamma(s)}=[f_t]_{\gamma(s)}$ elde edilir. Bu, $\{(f_t,D_t):0\le t\le 1\}$ nın γ boyunca bir analitik devam olmasını gerektirir.

Şimdi γ nın G de a dan b ye bir eğri ve $\{[f_t]_{\gamma(t)}:0\le t\le 1\}$ kümesinin $[f_0]_a$ $=[f]_a$ ve $[g]_b=[f_1]_b$ olacak şekilde γ boyunca bir devam olduğunu kabul edilir. $\sigma:[0,1]\to\varphi(G)$, $\sigma(t)=(\gamma(t),[f_t]_{\gamma(t)})$ biçiminde tanımlansın. σ nın $(a,[f]_a)$dan $(b,[g]_b)$ ye bir yol olduğu iddia edilmektedir. σ nın başlangıç ve bitim noktaları doğru seçildiğinden yalnızca sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise birinci kısımdaki adımların tekrar edilmesiyle elde edilir.

3.2.10. Teorem. $\mu\subset\varphi(G)$ ve $(a,[f]_a)\in\mu$ olsun. Bu taktirde μ nün $\varphi(G)$ nin bir bileşeni olması için gerek ve yeter şart $\mu=\{(b,[g]_b):[g]_b$, G deki bazı eğriler boyunca $[f]_a$ nın devamıdır$\}$ olmasıdır.

İspat: μ nün $\varphi(G)$ nin bir bileşeni olduğunu kabul edelim. Sonuç 3.2.8 den μ, $\varphi(G)$ nin yay bağlantılı açık bir alt kümesidir. Önceki teoremden dolayı her $(b,[g]_b)\in\mu$ noktası için $[g]_b$, G deki bazı eğriler boyunca $[f]_a$ nın devamıdır.

Tersine eğer $[g]_b$ G deki bazı eğriler boyunca $[f]_a$ nın devamı ise bu taktirde $(b,[g]_b)$, $(a,[f]_a)$ yı bulunduran $\varphi(G)$ nin bir bileşenine aittir. Yani $(b,[g]_b) \in \mu$ dür.

Şimdi μ nün $[g]_b$, $[f]_a$ nın bir devamı olacak şekilde $(b,[g]_b)$ nin tüm noktalarından meydana geldiğini farz edelim. Bu taktirde μ yay bağlantılı ve böylece bağlantılıdır. Eğer μ_1, $\varphi(G)$ nin μ yü içeren bileşeni ise bu taktirde bu ispatın ilk kısmından $\mu = \mu_1$ sonucu çıkar.

Belli bir (f,D) fonksiyon elemanı ve (f,D) ile elde edilen F tam analitik fonksiyonu herhangi bir $a \in D$ için $[f]_a$ nın analitik devamları olan tüm $[g]_z$ çekirdeklerinin ailesidir.

$$G = \{z : \text{bir } [g]_z \in F \text{ çekirdeği vardır }\} \tag{3.3}$$

verilsin. Burada G açıktır. Gerçekten eğer $z \in G$ ise bu taktirde bir $[g]_z \in F$ çekirdeği vardır ve z civarında üzerinde g nin tanımlı olduğu bir B diski vardır. Açıkçası $B \subset G$ dolayısıyla G açıktır. Teorem 3.2.10 dan yararlanarak

$$R = \{(z,[g]_z) : [g]_z \in F\} \tag{3.4}$$

$\varphi(C)$ nin bir bileşenidir ve $\rho(R) = G$ dir.

3.2.11. Tanım. F bir tam analitik fonksiyon olsun. Eğer R (3.4) te tanımlı küme ve ρ, $\varphi(C)$ demetinin izdüşüm dönüşümü ise bu taktirde (R,ρ) çiftine F nin *Riemann Yüzeyi* denir. (3.3) de tanımlı G açık kümesi F nin *temel uzayı* olarak adlandırılır.

3.2.12. Teorem. F, G temel uzayı ile bir tam analitik fonksiyon ve (R,ρ), F nin Riemann Yüzeyi olsun. Bu taktirde $\rho : R \to G$ bir açık sürekli dönüşümdür. Üstelik eğer bir $(a,[f]_a) \in R$ ise bu taktirde ρ, $N(f,D)$ yi düzlemdeki bir açık disk üzerine homeomorfik olarak dönüştürecek şekilde $(a,[f]_a)$ nın bir $N(f,D)$ komşuluğu vardır.

İspat: R yi $\varphi(C)$ nin bir bileşeni olarak göz önüne alalım. $\rho:\varphi(C)\to C$ sürekli olduğundan $\rho:R\to G$ de süreklidir. ρ nun açık olduğunun gösterilmesi için her (f,U) için $\rho(N(f,U))$ nun açık olduğunun gösterilmesi yeterlidir. O halde $\rho(N(f,U))=U$ ve U açıktır. Eğer $(a,[f]_a)\in R$ ise D, $(f,D)\in[f]_a$ olacak şekilde bir disk ise bu taktirde $\rho:N(f,D)\to D$ açık, sürekli ve örten dönüşümdür. ρ nun homeomorfizm olduğunu göstermek için geriye ρ nun $N(f,D)$ nin üzerinde 1:1 olduğunun gösterilmesi kalır. Eğer $(b,[f]_b),(c,[f]_c)\in N(f,D)$ nin ayrık noktaları ise bu taktirde $b\neq c$ dir ve buradan da ρ, 1:1 elde edilir.

KAYNAKLAR

CONWAY, J. B. 1995. Functions of One Compleks Variable I. Springer- Verlag. New York Inc.

CONWAY, J. B. 1995. Functions of One Compleks Variable II. Springer- Verlag. New York Inc.

BAŞKAN, T. 1998. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Vipaş A.Ş. No: 14. Bursa.

BAŞKAN, T. ve BİZİM, O. ve CANGÜL, İ. N. 2000. Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş. Vipaş A. Ş. No: 35. Bursa.

GONZALEZ, M. O. 1992. Classical Complex Analiysis. Marcel Dekker, Inc. 270 Madison Avenue, New York P. 167-170

BRUCE, P. P. 1991. An Introduction to Complex Function Theory. Springer- Verlag. New York

LARS, V. A. 1979. Complex Analiysis. 1966 by Mc Graw-Hill Inc.

MARSDEN, J. E. 1973. Basic Complex Analiysis. San Francisco. W. H. Freeman end Company

RUDIN, W. 1969. Real and Complex Analiysis. New York. Mc Graw-Hill Inc

TEŞEKKÜR

Aileme, eşime, matematik bölümünün tüm öğretim görevlilerine, çalışanlarına ve özellikle çalışmalarıma danışmanlık eden ve yardımlarını esirgemeyen sayın Prf. Dr. Mümin YAMANKARADENİZ'e ve Yrd. Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

08/04/1976 tarihinde Mersin'in Tarsus ilçesinde doğdu. İlkokulu Kerim Çeliktaş İlkokulunda, orta okulu Barbaros Ortaokulunda, liseyi Tarsus Anadolu Teknik Lisesi Kimya bölümünde tamamladı. 1997 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimine başladı ve 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl matematik öğretmenliğine ve 2002 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansına başladı. Halen matematik öğretmenliğine devam etmektedir.