ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PICARD GRUBU

Nihal YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
1996

57409

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PICARD GRUBU

Nihal YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 02/08/1996 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Turgut BAŞKAN
(Danışman)

Prof.Dr.Mümin YAMANKARADENİZ

Prof.Dr.Ertuğrul ÖZDAMAR

ÖZET

Bu çalışmada **PSL(2, C)** grubunun bir alt grubu olan Picard grubu ve bunun bazı alt grupları ele alınmıştır. Bu grup ilk olarak Picard tarafından incelenmiştir. Daha sonra Fricke ve Klein tarafından Picard grubu olarak adlandırılmıştır. Picard grubu hem soyut grup olarak hem de otomorf fonksiyonlar teorisinde önemli bir gruptur. Çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümlerindeki incelemeler için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın esas konusu olan Picard grubu tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir. Picard grubunun önemli bir alt grubu olan modüler grup ele alınarak, özellikle Picard grubunun Fuchsian alt grupları ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Üçüncü bölümde, Picard grubunun normal Fuchsian alt grupları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Son olarak Picard grubunun temel denklik alt grupları tanımlanarak, bu alt grupların yapısını belirleyen teoremler ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Picard grubu, süreksiz grup, ayrık grup, Fuchsian grup.

ABSTRACT

In this thesis some subgroups of the Picard group which is a subgroup of **PSL(2, C)** are discussed. This group was first studied by Picard. Later on Fricke and Klein named it the Picard group after him. It is important as an abstract group and also in the theory of automorphic functions. This work consist of three chapters.

In the first chapter basic notions which are necessary in the second and third chapters are given. In the second chapter the main subject of this thesis, the Picard group is defined and its basic properties are listed. By means of the modular group which is an important subgroup of the Picard group, Fuchsian subgroups of the Picard group are discussed in detail. In the last chapter, some results concerning normal Fuchsian subgroups of the Picard group are given. Finally the principal congruence subgroup of the Picard group are defined and theorems determining the group structure of them are given.

Key Words: Picard Group, discontinuous group, discrete group, Fuchsian group.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

C	Karmaşık düzlem
$\hat{C}$	Genişletilmiş karmaşık düzlem
$\mathbf{C}^*$	$\mathbf{C} \setminus \{0\}$ Kümesi
D	Üst yarı düzlem
H	Quaternionların kümesi
$\mathbf{H}^3$	$\{z + t\mathbf{j} : z \in \mathbf{C}, t > 0\}$ Kümesi
I	Birim matris
I(t)	t dönüşümünün eşmetri çemberi
i	Birim dönüşüm
M	Modüler grup
P	Picard grubu
P(C)	C çemberine karşılık gelen Fuchsian grup
P_N(C)	P(C)'nin normal kapanışı
R	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbf{R}^*$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$ kümesi
S(x)	x'in kalımlaştırıcısı
S.İ.M.	Sürekli indirgeme metodu
Z	Tamsayılar kümesi
Z(i)	Gaussian tamsayıların halkası

1.GİRİŞ

Bu bölümde çalışmanın 2. ve 3. bölümleri için gerekli olan temel kavramlar verildi.

1. 1. Topolojik Gruplar ve Topolojik Dönüşüm Grupları

1. 1. 1. Tanım: G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer G' yi grup yapan

$f : G\times G \to G \; ; \; f(x,y) = xy$

$g : G \to G \; ; \; g(x) = x^{-1}$

işlemleri sürekli iseler G' ye bir topolojik grup denir.

Açıktır ki $G\times G$ grubu üzerinde çarpım topolojisi vardır. **(C** , +), **(R**, +), **(C***, .), **(R***, .), **(Z**, +) grupları üzerlerindeki alışılmış topolojik yapılarla birlikte birer topolojik grupturlar. $S^1 = \{z\in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ birim çemberi,grup işlemi **C**'deki çarpma işlemi olmak üzere **C**'den indirgenen topoloji ile bir kompakt topolojik gruptur.

GL(n,C), grup işlemi matris çarpımı olmak üzere bir topolojik gruptur.Bu grup üzerindeki topoloji $n\times n$ tipindeki bir (a_{ij}) matrisi C^{n^2}'de

$(a_{11},\ldots,a_{1n},a_{21},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn})$

noktası olarak gözönüne alındığında elde edilen topolojidir.

$f : \mathbf{GL(n,C)} \to C^{n^2}$

$(a_{ij}) \to f((a_{ij})) = (a_{11},\ldots,a_{1n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn})$

dönüşümü 1-1 dir. $\overline{GL}(n,C) = f(\mathbf{GL(n,C)})$ olmak üzere $\overline{GL}(n,C)$üzerinde C^{n^2}'den indirgenen rölatif topoloji vardır. Buna göre

$\tau_{GL(n,C)}=\{U\subset \mathbf{GL(n,C)} \mid U= f^{-1}(V), V\in \tau_{\overline{GL}(n,C)}\}$

ile **GL(n,C)** bir topolojik uzaydır.

1.1.2. Önerme: G bir topolojik grup ve $a \in G$ belli bir öğe olmak üzere G'den G'ye

$r_a : g \to ga$

$l_a : g \to ag$

$i : g \to g^{-1}$

$\rho_a : g \to aga^{-1}$

dönüşümleri birer topolojik eşyapı dönüşümüdürler (homeomorfizmdirler). Bunlara sırasıyla sağ kayma, sol kayma, tersinme ve öz eş yapı (iç otomorfizma) denir (Başkan, 1980).

1.1.3. Önerme: G bir topolojik grup olsun. Bir $g \in G$ için $\{g\}$ kümesi açık olsun. O zaman her bir $\{y\}$ ($y \in G$) kümesi açıktır.

İspat: Herhangi bir $y \in G$ için $g^{-1}y = a \in G$ olduğundan

$r_a : x \to xa$

dönüşümünü gözönüne alırsak r_a' nın bir topolojik eşyapı dönüşümü olduğunu biliyoruz. $\{g\}$ açık ve $r_a(\{g\}) = \{y\}$ olduğundan $\{y\}$ kümesi açıktır.

1.1.4. Önerme: Bir G topolojik grubu homojen bir uzaydır. Yani herhangi $g_1, g_2 \in G$ için $f(g_1) = g_2$ olacak şekilde bir $f : G \to G$ topolojik eşyapı dönüşümü vardır.

İspat: Herhangi $g_1, g_2 \in G$ için $g_1^{-1}g_2 = a \in G$ diyelim. $f(g) = ga$ dönüşümünü alalım. f bir topolojik eşyapı dönüşümüdür ve

$f(g_1) = g_1a = g_1g_1^{-1}g_2 = g_2$

dir.

Bir topolojik grubun homojen uzay olması şu sonucu verir: G' nin yerel özelliklerini bir tek noktada belirtmek yeter. Böylece bu özelliğin uzayın diğer tüm noktalarında geçerli olduğu homojenlik nedeniyle söylenebilir. Özellikle de herhangi bir nokta olarak G'nin birim öğesi dikkate alınabilir. Örneğin G' nin yerel kompakt olduğunu ya da bir fonksiyonun G üzerinde sürekli olduğunu söyleyebilmek için , G' nin birim öğesinde bu özelliklerin gerçeklendiğini görmek yetecektir.

1.1.5. Tanım: G bir topolojik grup, X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere [G,X] sıralı çiftini gözönüne alalım.

$G \times X \to X,\ (g,x) = g \wedge x$

olarak tanımlanan sürekli bir dönüşüm aşağıdaki iki koşulu gerçekliyorsa $[G,X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu denir:

1) $g\Lambda(h\Lambda x) = gh\Lambda x$ $(g,h \in G,\ x \in X)$

2) $1\Lambda x = x$ $(1 \in G$ birim öğe$)$

G ile X ister çakışsınlar isterse farklı kümeler olsunlar $g\Lambda x$ gösterimi yerine gx yazacağız. Eğer X uzayı biliniyorsa çok kez $[G,X]$ gösterimi yerine sadece G yazılır ve "G topolojik dönüşüm grubu " diye söylenir.

G bir topolojik grup olsun.$[G,G]$ sıralı çifti aşağıdaki her bir dönüşüme göre bir topolojik dönüşüm grubudur:

i) $(g,x) \to gx$

ii) $(g,x) \to xg^{-1}$

iii) $(g,x) \to gxg^{-1}$

1.1.6. Tanım: **(a)** $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olmak üzere X üzerinde, en az bir $g \in G$ için

$$y \sim x \Leftrightarrow y = gx$$

biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

(b) Bu denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına G-yörüngeleri denir.Bir $x \in X$ noktasını bulunduran yörünge G_x simgesi ile gösterilir. Yani

$$G_x = \{gx : g \in G\}$$

yazabiliriz.

(c) Eğer $G_x = X$ olacak biçimde bir $x \in X$ öğesi varsa $[G,X]$ topolojik dönüşüm grubuna geçişlidir denir.

1.1.7. Teorem: $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Tüm yörüngelerin oluşturduğu kümeyi X/G simgesi ile gösterelim. Bir

$$p : X \to X/G\ ,\ p(x) = G_x$$

dönüşümü tanımlayalım. τ , X üzerindeki topoloji olmak üzere X/G üzerinde

$$\tau_G = \{\, T_g \subset X/G : p^{-1}(T_g) \in \tau \,\}$$

ailesini alalım. Böylece $(X/G,\ \tau_G)$ bir topolojik uzaydır (Başkan 1980).

1.1.8. Tanım: Her bir $x \in X$ için $gx = x$ eşitliğini gerçekleyen $g \in G$ öğelerinin oluşturduğu kümeye x' in kalımlaştırıcısı (stabilizeri) denir ve $S(x)$ simgesi ile gösterilir. Yani

$$S(x) = \{g \in G : gx = x\}$$

dir. $S(x)$' in G' nin bir alt grubu olduğu açıktır. Benzer şekilde $A \subset X$ ise

$$S(A) = \{g \in G : g(A) = A\}$$

olarak tanımlanır.

1.1.9. Tanım: Eğer $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $g \in G$ ise g' nin sabit noktaları kümesi $\{x \in X : gx = x\}$ olarak tanımlanır.

1.1.10.Teorem: Eğer $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $g,h \in G$ için $gh = hg$ ise g öğesi, h' nın sabit noktaları kümesini kendi üzerine resmeder.

İspat: $A = \{x \in X : hx = x\}$ kümesini gözönüne alalım. $x \in A$ olsun. O halde $hx = x$ dir. Böylece $h(gx) = ghx = gx$ ve $gx \in A$ elde edilir.

1.1.11.Tanım: $Y \subset X$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gY = Y$ ise $Y \subset X$ alt kümesine G-invaryant ya da G altında invaryant denir.

1.1.12.Tanım: G bir grup ve S boş olmayan bir küme olsun. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir

$$G \times S \to S, \ (g,x) \to gx$$

fonksiyonu varsa G grubu S kümesi üzerinde hareket ediyor denir:

1) $\forall x \in S$ için $ex = x$' dir. (e, G nin birim elemanı)

2) $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in S$ için $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$' dir.

Bir G grubunun, verilen bir S kümesi üzerinde bir çok farklı hareketi olabilir. Bu nedenle gx gösterimi belirsizdir. Örneğin G bir grup ve H, G' nin bir alt grubu ise H grubunun G kümesi üzerindeki bir hareketi $(h,x) \to hx$' dir. Burada hx, G'deki çarpmadır. Yine $(h,x) \to hxh^{-1}$ de H' nın G kümesi üzerindeki bir başka hareketidir.

1.2. Matrisler

1.2.1. Tanım: **(a)** 2×2 lik bir kompleks matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; a,b,c,d \in C$$

biçiminde olsun. A matrisinin determinantı det(A) ile gösterilir ve det(A) = ad - bc olarak tanımlanır.

(b) " A matrisi non - singülerdir $\Leftrightarrow$ det(A) $\neq 0$ dır " olarak tanımlanır.

Eğer A matrisi non - singüler ise A nın tersi vardır ve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} kd & -kb \\ -kc & ka \end{pmatrix} \quad ; \mathrm{k} = \frac{1}{\mathrm{ad}-\mathrm{bc}}$$

dir. Bundan başka A^{-1} de non - singülerdir.

Herhangi A ve B matrisleri için

$$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{BA})$$

ve dolayısıyla

$$\det(\mathrm{BAB}^{-1}) = \det(\mathrm{AB}^{-1}\mathrm{B}) = \det(\mathrm{A})$$

dır.

2×2 lik kompleks non - singüler matrisler alışılmış matris çarpımı işlemine göre bir grup oluştururlar. Bu gruba Genel Lineer grup denir ve

$$\mathbf{GL(2,C)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in C, ad-bc \neq 0 \right\}$$

ile gösterilir. Biz daha çok GL(2,C) nin alt grubu olan ve determinantı 1 olan matrislerden oluşan Özel Lineer grup ile ilgileneceğiz ve

$$\mathbf{SL(2,C)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c.d \in C, ad-bc = 1 \right\}$$

şeklinde göstereceğiz. I ile birim matrisi göstereceğiz.

1.2.2. Tanım: A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ **SL(2, C)** olsun.

(a) A matrisinin transpozu A^t ile gösterilir ve

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

(b) A nın eşleniği $\overline{\mathrm{A}}$ ile gösterilir ve

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

(c) A matrisinin izi tr(A) ile gösterilir ve

tr(A) = a + d

olarak tanımlanır.

Buna göre A, B $\in$ **SL(2, C)** olmak üzere

1) $(\overline{A})^t = \overline{(A^t)}$

2) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ ($\lambda \in \mathbf{C}$)

3) $tr(\overline{A}) = \overline{tr(A)}$

4) $tr(A^t) = tr(A)$

5) $tr(AB) = tr(BA)$

6) $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$

bağıntıları gerçeklenir.

(d) A, B $\in$ **SL(2, C)** olmak üzere

$[A, B] = tr(A\overline{B}^t)$

eşitliği ile tanımlanan [A, B] ye karmaşık skaler çarpım denir. Buna göre aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir:

1) $[A, A] \geq 0$ dır ve " $[A, A] = 0 \Leftrightarrow A = 0$ " dır.

2) $[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B] = \lambda_1[A_1, B] + \lambda_2[A_2, B]$ dir.

3) $[B, A] = \overline{[A, B]}$ dir.

Bu skaler çarpım bir norm indirger. ||A|| normu

$||A|| = [A, A]^{1/2} = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}$

olarak tanımlanır ve aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir:

1) $|det(A)|\,||A^{-1}|| = ||A||$

2) $||AB|| \leq ||A||.||B||$

3) $2|det(A)| \leq ||A||^2$

A$\in$**SL(2, C)** ise det(A) = 1 olduğundan $2 \leq ||A||^2$ elde edilir.Böylece bu norm bir metrik indirgeyecektir. Bu metrik,

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\mathbf{d(A, B)} = ||\mathbf{A - B}|| = (|\mathbf{a - e}|^2 + |\mathbf{b - f}|^2 + |\mathbf{c - g}|^2 + |\mathbf{d - h}|^2)^{1/2}$$

şeklindedir. Diğer yandan bu metriğe göre

$$\text{“}A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_n \to a, b_n \to b, c_n \to c, d_n \to d\text{”}$$

olur. Gerçekten,

$$d(A_n, A) = \|A_n, A\| = (|a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 + |c_n - c|^2 + |d_n - d|^2)^{1/2}$$

olduğundan

$$\text{“}A_n \to A \Leftrightarrow d(A_n, A) \to 0 \Leftrightarrow a_n \to a, b_n \to b, c_n \to c, d_n \to d\text{”}$$

bulunur.

Norm, determinant ve iz fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır. **GL(2,C)** üzerindeki $A \to A^{-1}$ dönüşümü de süreklidir ve eğer $A_n \to A, B_n \to B$ ise $A_n B_n \to AB$ dir. Bütün bunlar gösteriyor ki **GL(2, C)** bu metriğe göre bir topolojik gruptur.

1.3. Doğrusal Dönüşümler

$\hat{C}$ ile göstereceğimiz genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri a, b, c, d$\in$**C** ve ad - bc $\neq$ 0 olmak üzere

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşümlerdir. Bu özellikteki w = t(z) dönüşümlerine doğrusal dönüşüm ya da Möbiüs dönüşümü denir.Bu tip dönüşümler fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup **Aut**($\hat{C}$) simgesiyle gösterilir.

Şimdi doğrusal dönüşümleri biraz inceleyelim: t dönüşümü a, b, c, d$\in$**C** katsayılarını bir tek biçimde belirlemez. Gerçekten bunu

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{kaz+kb}{kcz+kd} \quad (k \neq 0, k \in \mathbf{C})$$

şeklinde kolayca görebiliriz. Ancak a, b, c, d $\in$**C**, ad - bc $\neq$ 0 verildiğinde bu bir tek $t(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü belirler.

Tanımdaki ad - bc = Δ ifadesine t dönüşümünün determinantı denir.

Δ = ad - bc $\neq$ 0 koşulu yerine daha kullanışlı olduğundan Δ = ad - bc = 1 koşulunu da alabiliriz. Çünkü $\Delta \neq 0$ olduğundan t'nin pay ve paydası $\pm\sqrt{\Delta}$ ile bölünerek $a'b' - c'd' = 1$ bulunur.Gerçekten

$$t(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{\pm\sqrt{\Delta}}z+\frac{b}{\pm\sqrt{\Delta}}}{\frac{c}{\pm\sqrt{\Delta}}z+\frac{d}{\pm\sqrt{\Delta}}}=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

olup $a'd'-b'c'=\left(\frac{a}{\pm\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{d}{\pm\sqrt{\Delta}}\right)-\left(\frac{b}{\pm\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{c}{\pm\sqrt{\Delta}}\right)=\frac{ad-bc}{\Delta}=1$ dir.

Doğrusal dönüşümler ile matrisler arasında sıkı bir bağlantı vardır:

$t(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $u(z)=\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ doğrusal dönüşümlerini alalım. Bu dönüşümler

$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ ve $N=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}$ matrislerini belirtir.

$MN=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix}$ çarpım matrisi de $t\circ u$ dönüşümünü belirtir. Böylece

GL(2,C) kümesi ile **Aut($\hat{C}$)** arasında sıkı bir bağlantı olduğu görülür. Şimdi bu bağlantıyı inceleyelim:

ϑ : **GL(2,C)** $\rightarrow$ **Aut($\hat{C}$)** dönüşümünü

$$\vartheta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=t\ ;\ t(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\vartheta(MN)=t\circ u=\vartheta(M)\circ\vartheta(N)$ dir. Dolayısıyla ϑ bir grup homomorfizmidir. ϑ'nın çekirdeği

$$\begin{aligned}
K=\mathrm{Ker}(\vartheta) &= \{V\in GL(2,C) : \vartheta(V)=i,\ i \text{ birim dönüşüm}\}\\
&= \{V\in GL(2,C) : \frac{az+b}{cz+d}=z\ ,\forall z\in\hat{C} \text{ için}\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,C): a=d=k, b=c=0, k\in C\setminus\{0\}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k\end{pmatrix}: k\in C\setminus\{0\}\right\}\\
&= \{k\mathbf{I} : k\in \mathbf{C}\setminus\{0\},\ \mathbf{I} \text{ birim matris}\}
\end{aligned}$$

kümesidir. Böylece 1. izomorfizm teoreminden

GL(2,C) / Ker(ϑ) $\cong$ **Aut($\hat{C}$)**

elde edilir. **GL(2,C)** / K bölüm grubu için **PGL(2,C)** simgesi kullanılır ve **Projektif Genel Lineer** grup denir.

Her M,N∈GL(2, C) için det(MN) = det(M)det(N) olduğundan

det : **GL(2,C)** → **C** \ {0} = **C***

dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

Ker(det) = {V∈**GL(2, C)** : det(V) = 1}

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,C) : ad - bc = 1 \right\}$$

dir. Bu grubu **SL(2, C)** simgesi ile göstereceğiz. **SL(2, C)**'ye **Özel Lineer grup** denir. 1. izomorfizm teoreminden **GL(2, C)/ SL(2,C)** ≅ **C*** olur.

Her N∈**GL(2, C)** için , λ^2 = det(N) ve M∈**SL(2, C)** olmak üzere N = λM yazılabilir. ϑ(N) = ϑ(M)'dir. Dolayısıyla her t∈**Aut**($\hat{C}$) dönüşümü

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ; a,b,c,d \in C,\ ad - bc = 1$$

biçiminde yazılabilir.Yani ϑ dönüşümü **SL(2, C)**'yi **Aut**($\hat{C}$) üzerine resmeder. O halde **SL(2, C)**'nin **GL(2, C)/ K** bölüm grubundaki resmi **PSL(2, C)** olmak üzere

PGL(2, C) = PSL(2, C)

olur. **PSL(2, C)**'ye **Projektif Özel Lineer grup** denir.

Böylece **Aut**($\hat{C}$) ≅ **PGL(2, C)** = **PSL(2, C)** elde edilir

1.3.1. Tanım: G, bir S kümesi üzerinde hareket eden bir grup olsun.

$(x_1,\ldots,x_k)\ ve\ (y_1,\ldots,y_k)$, S'nin farklı elemanlarının sıralı k-lıları olmak üzere

$g(x_i) = y_i\ (i=1,\ldots,k)$

olacak şekilde bir g∈G varsa G grubu S kümesi üzerinde k-geçişlidir denir.

G 1-geçişli demekle G'nin geçişli olduğunu ifade ederiz. G k-geçişli ise k-1 geçişlidir (k ≥ 2 için). **PGL(2, C)**, $\hat{C}$ üzerinde 3-geçişlidir.

PGL(2,C)'nin elemanları $\hat{C}$'daki çemberleri yine $\hat{C}$'daki çemberlere resmederler. Şimdi de **PGL(2, C)**'de konjugelik sınıflarını inceleyelim:

1.3.2. Tanım: G bir grup olsun. h,g∈G olmak üzere g = aha^{-1} olacak biçimde bir a∈G öğesi varsa g ve h, G'de konjugedirler (eşleniktirler) denir.

G'deki konjugelik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve G'yi denklik sınıflarına böler. Bu denklik sınıflarının her birine konjugelik sınıfı denir.

1.3.3.Tanım: Bir t∈**PGL(2, C)** dönüşümünün sabit noktaları,

t(z) = z özelliğindeki z noktalarıdır.

Bir t dönüşümünün bir sabit noktası z olsun. $v = utu^{-1}$ konjuge öğesini gözönüne alalım. u(z) noktası bu v dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Böylece t'nin kaç tane sabit noktası varsa buna konjuge olan bir öğenin de o kadar sabit noktası vardır. O halde ilk olarak **PSL(2, C)**'deki dönüşümlerin sabit noktalarını belirleyelim:

$a, b, c, d \in \mathbf{C}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere,

$t(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = z$ den $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ elde edilir. Bu denklemin kökleri (ki en fazla iki tanedir) t'nin sabit noktalarıdır. Bunların $\hat{C}$'daki yerlerini bulabilmek için denklemin determinantını gözönüne alalım:

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4$$

Bu durumda $(a + d)^2 \neq 4$ ise denklemin iki tane farklı kökü vardır. Dolayısıyla iki tane sabit nokta vardır. $(a + d)^2 = 4$ ve $t \neq i$ ise bir tek sabit nokta vardır ($t \neq i$ koşulunu ek olarak koyuyoruz. Çünkü i özdeşlik dönüşümü tüm noktaları sabit bırakır ve $(a + d)^2 = 4$'dür).

Özel Haller: $c = 0$ ise $t(z) = a^2z + ba$ şekline gelir. t dönüşümü ∞'u sabit bırakır. Ayrıca

1) $a^2 \neq 1$ ise $z = \dfrac{ab}{1-a^2}$ de bir sabit noktadır.

2) $a^2 = 1$ ise $t(z) = z \pm b$ $(b \neq 0)$ olur. Bu durumda tek sabit nokta ∞'dur.

$(a + d)^2$ fonksiyonunu **PSL(2, C)**'deki konjugelik sınıflarını belirlemek için kullanacağız. Bir $A \in$ **GL(2, C)** matrisinin izini $tr(A) = a + d$ şeklinde tanımlamıştık ve

$$tr(AB) = tr(BA) \text{ ve } tr(BAB^{-1}) = tr(A)$$

olduğunu 1.2. bölümde belirtmiştik. Dikkat edilirse bir konjugelik sınıfının bir izi vardır. Yalnız **tr : GL(2, C) → C** fonksiyonu iyi tanımlı olmadığından bunun yerine $\mathbf{tr^2(A)} = (a + d)^2$ fonksiyonunu gözönüne alacağız.

$\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $u(z) = \lambda z \in$ **PGL(2, C)** dönüşümüne **SL(2, C)**'de

$$\pm\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$ matrisini karşılık getirebiliriz.

$$tr^2(u) = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$ 'dir.

1.3.4. Teorem: Eğer $t = i$ ise bu dönüşüm tek başına bir konjugelik sınıfı oluşturur. Eğer $t \neq i$ ise $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere t,

$$u_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z & : \lambda \neq 1 \\ z+1 & : \lambda = 1 \end{cases}$$

dönüşümüne konjugedir.

İspat: t'nin konjuge sınıfını [t] simgesi ile gösterirsek, t = i olması halinde

$$[t] = [i] = \{u : u = viv^{-1},\ \exists\, v \in PSL(2, C)\}$$
$$= \{u : u = vv^{-1}\} = \{u : u = i\} = \{i\}$$

olur. **PSL(2, C)**'nin geriye kalan konjugelik sınıfları, her bir sınıftan bir temsilci seçilerek belirtilecektir.

1. Hal: t'nin bir tek z_0 sabit noktası olsun. $\exists s \in PSL(2, C)$ öyle ki $s(z_0) = \infty$ olur.O halde sts^{-1} dönüşümünün yegane sabit noktası ∞'dur. Böylece $k \in C \setminus \{0\}$ olmak üzere $sts^{-1}(z) = z + k$ şeklindedir. Şimdi $v(z) = \frac{z}{k}$ dönüşümünü alalım ve $sts^{-1} = u$ diyelim.

$$vuv^{-1}(z) = vu(kz) = v(kz + k) = z + 1 = u_1(z)$$

olur. O halde $(vs)t(vs)^{-1} = u_1$ olup t dönüşümü u_1'e konjugedir.

2. Hal: t'nin z_1 ve z_2 gibi iki sabit noktası olsun. $\exists w \in PSL(2, C)$ öyle ki

$$w(z_1) = 0\ ,\ w(z_2) = \infty$$

olur. wtw^{-1}'in sabit noktaları 0 ve ∞'dur.O halde $\lambda \in C \setminus \{0\}$ olmak üzere $wtw^{-1} = u_\lambda$'dır.

Konjugelik sınıflarının tümünü belirtmek için u_μ ve u_λ'nın ne zaman konjuge olduğunu görmemiz gerekir.

1.3.5. Teorem: u_μ ve u_λ'nın konjuge olması için gerek ve yeter şart $\mu = \lambda$ ya da $\mu = 1/\lambda$ olmasıdır (Jones ve Singerman 1987).

Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçları özetleyerek, doğrusal dönüşümleri aşağıdaki şekilde sınıflandırıyoruz:

Öğenin Tipi	*İzi*
Hiperbolik	$tr^2(t) > 4$
Eliptik	$0 \leq tr^2(t) < 4$
Parabolik	$tr^2(t) = 4$
Loksodromik	$tr^2(t) < 0$ ya da $tr^2(t) \notin R$

1.3.6. Tanım: t bir doğrusal dönüşüm olsun. $t^m = i$ olacak şekildeki en küçük $m > 0$ tam sayısına t'nin mertebesi (derecesi) denir.

1.3.7. Teorem: $t \in PSL(2, C)$ ve $t \neq i$ olsun. Eğer t sonlu mertebeli ise eliptik bir dönüşümdür. Tersi her zaman doğru değildir (Jones ve Singerman 1987).

1.4. Ayrık Gruplar

1.4.1. Tanım: G bir topolojik grup olsun. G üzerinde ayrık topoloji varsa G'ye **ayrık grup** denir.

Bir $K \subset G$ alt grubu için eğer K üzerindeki alt uzay topolojisi ayrıksa K'ya ayrık grup denir.

Bu çalışmamızda **GL(2, C)** topolojik grubu ile ilgileneceğimizden, **GL(2, C)**'nin bir G ayrık alt grubunu biraz inceleyelim:

" $G \subset$ **GL(2, C)** ayrıktır $\Leftrightarrow$ G üzerindeki alt uzay topolojisi ayrıktır "

yazabiliriz.

G ayrık ve A, A_1, A_2, ... G'nin, $(A_n) \to A$ özelliğindeki öğeleri olsun. Bu durumda yeterince büyük her n için $A_n = A$'dır. Gerçekten de $A \in G$ ve G ayrık olduğundan $\{A\}$ kümesi açık bir kümedir. Diğer yandan $(A_n) \to A$ olduğundan, A'yı bulunduran her açık küme dizinin hemen hemen tüm terimlerini bulunduracaktır. Buna göre $\{A\}$ açık kümesi de dizinin hemen hemen tüm terimlerini bulundurur. Bu ise belli bir n_0 doğal sayısı için $n \geq n_0$ olmak üzere $A_n = A$ demektir. Çünkü her $n \geq n_0$ için $A_n \in \{A\}$ olur.

Burada $A \in G$ varsaymak gerekmez. $A \in$ **GL(2, C)** varsayımı ile de bu sonucu elde edebilirdik. Gerçekten bu durumda, $A_n(A_{n+1})^{-1} \to AA^{-1} = I$ ve dolayısıyla yeterince büyük tüm n'ler için $A_n = A_{n+1}$'dir. Halbuki $(A_n) \to A$ olduğuna göre $A_n = A$'dır.

G'nin ayrık olduğunu göstermek için G'nin bir noktasının ayrılmış olduğunu göstermek yeterlidir. Örneğin

$\inf\{\|A - I\| : A \in G, A \neq I\} > 0$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Dolayısıyla $\{I\}$, G'de açık küme olacaktır ve Sonuç: 1.1.3 gereğince G'nin ayrık olduğu elde edilir.

Eğer dizilerle G'nin ayrıklığını ifade etmek gerekirse

" G ayrıktır $\Leftrightarrow$ $A_n \in G$ olmak üzere $A_n \to I$ ise yeterince büyük tüm n'ler için $A_n = I$'dır "

yazabiliriz.

SL(2, C)'nin ayrık alt grupları incelendiğinde ise

" $G \subset$ **SL(2, C)** ayrıktır $\Leftrightarrow$ Her bir $k > 0$ sayısı için

$\{A \in G : \|A\| \leq k\}$ (1)

kümesi sonludur "

olur. Eğer bu küme her bir k sayısı için sonlu ise G herhangi bir limit noktasına sahip değildir ve dolayısıyla G ayrıktır.

Diğer taraftan bu küme sonsuz ise G'nin $\|A_n\| \leq k$ olacak şekilde farklı A_n (n = 1, 2, ...) öğeleri vardır. Eğer A_n matrislerinin katsayıları a_n, b_n, c_n, d_n ise $|a_n| \leq k$'dan (a_n) dizisinin yakınsak olan bir alt diziye sahip olduğu görülür. Aynı tartışma diğer katsayılar için de yapılabilir. Dolayısıyla belli B için $A_n \to B$ diyebiliriz ve det fonksiyonu sürekli olduğundan $B \in$ **SL(2, C)**'dir. Bu ise G'nin ayrık olmadığını gösterir.

(1) kriteri **SL(2, C)**'nin ayrık bir alt grubunun sayılabilir olduğunu gösterir. Gerçekten de G_n, G'deki $\|A\| \leq n$ özelliğindeki A'ların sonlu kümesi olmak üzere

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

yazılabilir.

Bir ayrık grubun herhangi bir alt grubunun da ayrık olduğu açıktır. Son olarak G ayrık ise BGB^{-1} konjuge grubu da ayrıktır. Çünkü $X \to BXB^{-1}$ dönüşümü **GL(2, C)**'nin kendi üzerine bir homeomorfizmidir.

1.5. Süreksiz Gruplar

1.5.1. Tanım: X bir topolojik uzay ve G de X'in kendi üzerine homeomorfizmlerinin grubu olsun. Eğer X'in her kompakt K alt kümesi için, sonlu sayıdakiler hariç her $g \in G$ için $g(K) \cap K = \emptyset$ oluyorsa G grubu X üzerinde **süreksiz** hareket ediyor denir.

Uygulamada X, genelde alışılmış topoloji ile $\mathbf{R}^3$'ün bir alt kümesidir. Bununla birlikte genel durumda da tanımdan kolayca görülebilecek bir kaç önemli sonuç vardır:

Varsayalım ki G grubu X üzerinde süreksiz hareket etsin. O zaman aşağıdaki sonuçları yazabiliriz:

1) G'nin her alt grubu X üzerinde süreksiz hareket eder.

2) Eğer $\Phi : X \to Y$ bir homeomorfizm ise o zaman $\Phi G \Phi^{-1}$, Y üzerinde süreksiz hareket eder.

3) Eğer Y, X'in G-invaryant bir alt kümesi ise o zaman G, Y üzerinde süreksiz hareket eder.

4) Eğer $x \in X$ ve g_1, g_2, ... G'nin farklı elemanları ise o zaman $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... dizisi X'de herhangi bir y'ye yakınsamaz.

5) Eğer $x \in X$ ise o zaman $S(x)$ kalımlaştırıcısı sonludur.

6) Eğer $X \subset \mathbf{R}^3$ ise o zaman G sayılabilirdir.

Şimdi $\hat{C}$'nın açık alt kümeleri üzerinde süreksizlik kavramını ve ayrıklık kavramı ile arasındaki ilişkiyi inceleyelim. Süreksizlik için bir kriter bulalım.

1.5.2. Teorem: H, bir t öğesi ile doğurulmuş devirli grup olsun.

(i) t eliptik değil ise H, t'nin sabit noktası (ya da noktaları) hariç her yerde süreksizdir.

(ii) t sonlu mertebeli eliptik öğe ise H her yerde süreksizdir.

(iii) t sonsuz mertebeli eliptik öğe ise H grubunun süreksiz olduğu hiç bir yer yoktur (Lehner 1964).

Bu teorem gösteriyor ki süreksiz bir grupta sonsuz mertebeli eliptik öğe bulunmaz.

1.5.3. Teorem: Süreksiz bir grup ayrıktır (Lehner 1964).

Ancak bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Poincaré aşağıdaki teoremde, bazı kısıtlamalar ile tersinin de doğru olduğunu göstermiştir.

1.5.4. Teorem: Γ, bir B diskinin ya da yarı-düzleminin konform homeomorfizmlerinin ayrık grubu ise Γ, B'de süreksizdir (Lehner 1964).

1.5.5. Teorem: G, PSL(2, C)'nin herhangi bir alt grubu ve D, $\hat{C}$'nın açık bir alt kümesi olsun. Varsayalım ki D, G'nin parabolik ya da loksodromik bir g elemanının bir v sabit noktasını bulundursun. O zaman G, D'de süreksiz hareket etmez.

İspat: S(v) kalımlaştırıcısı g'nin farklı kuvvetlerini bulunduracaktır. Eğer g parabolik ya da loksodromik ise o zaman S(v) sonsuz olur ve bu 1.5.1'deki (5) ifadesi ile çelişki oluşturur. O halde G, D'de süreksiz hareket etmez.

Şimdi de has süreksizlik kavramının iki farklı tanımını verelim. Aşağıdaki gibi tanımlandığında bu kavram süreksizliğe denktir (Ford 1951):

1.5.6. Tanım: Her $v \in G$ (birimden farklı) için $v(\alpha) \notin O$ olacak şekilde bir α noktası ve α 'yı bulunduran bir O açık kümesi varsa G'ye has süreksizdir denir. Bu özellikteki α noktasına bir standart nokta denir.

1.5.7. Teorem: (i) G has süreksiz bir grup ise süreksizdir.

(ii) G süreksiz ise has süreksizdir (Magnus 1974).

Has süreksizliğin biraz daha farklı bir tanımı da vardır, fakat bu tanıma göre süreksizlik ile has süreksizlik denk değildir (Jones ve Singerman 1987):

1.5.8. Tanım: Eğer α noktasının, $g \in G$ için $g(V) \cap V \neq \varnothing$ ise $g(\alpha) = \alpha$ olacak biçimde bir V komşuluğu varsa G grubuna α noktasında has süreksiz hareket ediyor denir.

Bu tanıma göre her süreksiz grup has süreksiz hareket eder. Ancak has süreksiz gruplar süreksiz olmayabilir. Örneğin **C**'nin, $z \to e^{\frac{2\pi i}{n}} z$ (n = 2,3, ...) dönüşümü tarafından doğurulmuş homeomorfizmlerinin grubu has süreksiz olmasına karşılık bu grup süreksiz değildir.

1.6. Hiperbolik Geometri

Hiperbolik geometri için çeşitli gösterimler vardır. Biz burada üst yarı düzlem gösterimini benimseyeceğiz. $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ üst yarı düzlemini hiperbolik (Non-Euclidean) geometrinin düzlemi olarak alıyoruz. Hiperbolik noktalar **D**'deki noktalar ve hiperbolik doğrular ise **R** eksenine dik olan çemberlerin **D**'de kalan yay parçalarıdır. Hiperbolik açı, öklid anlamında ölçülen açıdır. Özel olarak **R** eksenine dik olan öklid doğrularının **D**'de bulunan kısımları da hiperbolik doğrulardır. Bütün bunlara H-nokta, H-doğru, H-açı, H-düzlem diyeceğiz.

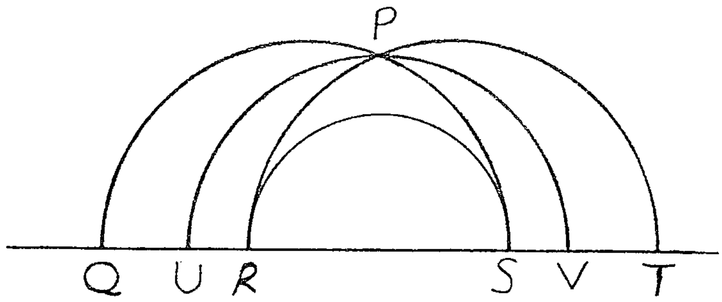
H-düzlemde iki H-doğru özdeş değillerse en fazla bir H-noktada kesişirler. Herhangi iki H-noktadan bir tek H-doğru geçer. Diğer yandan RS bir H-doğru ve P noktası bu doğru üzerinde bulunmayan bir H-nokta ise RS ile kesişmeyen ve P'den geçen QPS ve RPT gibi iki H-doğru çizilebilir. Gerçekte QPR açısı içindeki herhangi bir doğru (örneğin UV doğrusu) RS'yi kesmez (Şekil: 1).

H-doğrularla sınırlı olan üçgenlere H-üçgen denir. Hiperbolik geometrideki uzaklık kavramını aşağıdaki şekilde vereceğiz:

Bir yay elemanının ds ile gösterilen diferansiyeli

$ds = |dz|/y \quad ; z = x + iy$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla parçalı sürekli diferansiyellenebilir bir γ eğrisinin



Şekil: 1

hiperbolik uzunluğu, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ olmak üzere

$$h(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_\gamma |dz|/y = \int_\gamma [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{1/2}/y \, dt$$

eşitliği ile verilir.

Benzer şekilde $d\mu$ ile gösterilen hiperbolik alan diferansiyeli

$d\mu = dxdy/y^2$

olarak tanımlanır. Böylece **D**'nin ölçülebilir bir E alt kümesinin H-alan

$$\mu(E) = \iint_E dxdy/y^2$$

olur.

Gerçekte öklid geometrisinde paralellik aksiyomuna bağlı olmayan sonuçlar H-geometride de gerçeklenir. İki geometri arasındaki en önemli fark, H-geometride bir H-üçgenin iç açıları toplamının π'den küçük olmasıdır. Bu açıların toplamı sıfır da olabilir.

1.6.1. Teorem: (Gauss-Bonnet) İç açıları α, β, γ olan bir hiperbolik üçgenin H-alanı sonludur ve $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ değerine eşittir (Başkan 1980).

1.6.2. Sonuç: Açıları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olan n-kenarlı bir hiperbolik poligonun alanı

$(n - 2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ 'dir.

Üst yarı-düzlemde z, w noktalarını alalım. Bu iki nokta arasındaki H-uzaklık ρ(z,w) ile gösterilir ve ρ(z,w) = h (z'yi w'ya birleştiren H-doğru parçası) olarak tanımlanır.

Hiperbolik düzlem, hiperbolik uzaklık ile bir metrik uzaydır. Hiperbolik metriğin D'ye kondurduğu topoloji ile D'ye **C**'den indirgenen topoloji aynıdır.

1.7. Quaternionlar

1.7.1. Tanım: $q = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ biçimindeki 2X2 boyutlu bir karmaşık sayı matrisine bir **quaternion** denir.

Quaternionların kümesini **H** ile göstereceğiz. Quaternionların toplamı ve çarpımı matrislerdeki gibi tanımlanır. Buna göre

(i) H toplamaya göre değişmeli bir gruptur.

(ii) Sıfır olmayan quaternionlar çarpmaya göre değişmeli olmayan bir grup oluşturur.

(iii) H, tabanı

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & o \end{pmatrix}$$

olan dört boyutlu bir gerçel vektör uzayıdır.

q_1, q_2 iki quaternion ise

$q_1 = (a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})$ ve $q_2 = (e\mathbf{1} + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k})$

biçiminde yazılabilir. Quaternionların çarpımı **1, i, j, k** öğelerinin çarpımıyla tanımlanır. Gerçekten de

$q_1q_2 = (ae\mathbf{1}.\mathbf{1} + af\mathbf{1}.\mathbf{i} + ag\mathbf{1}.\mathbf{j} + ah\mathbf{1}.\mathbf{k} + \ldots + dh\mathbf{k}.\mathbf{k})$

olup **1, i, j, k** öğelerinin çarpımlarını bilmemiz bize quaternionların çarpımını verecektir. Kolayca görülebilir ki

$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{-1}$

$\mathbf{ij = k, jk = i, ki = j}$

$\mathbf{ji = -k, kj = -i, ik = -j}$

dir ve G = {1, i, j, k, -1, -i, -j, -k} kümesi **1, i, j, k** öğelerinin oluşturduğu çarpımsal gruptur.

$$\mathrm{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{H}$$

$$z = x + iy \to \mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(x + iy) = x\mathit{1} + y\mathit{i}$$

fonksiyonu **C**'yi **H** içine gömer. F'nin toplama ve çarpmayı koruduğu kolayca görülür.

$z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere

$$\mathrm{q} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & u+iv \\ -u+iv & x-iy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u+iv \\ -u+iv & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy & 0 \\ 0 & -iy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & iv \\ iv & o \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (x\mathbf{1} + y\mathbf{i}) + (u\mathbf{j} + v\mathbf{k})$$

$$= (x\mathit{1} + y\mathit{i}) + (u\mathit{1} + v\mathit{i})\mathit{j} \ \ ; \mathbf{k} = \mathbf{ij}$$

yazabiliriz. O halde bir q quaternionunu

$$\mathrm{q} = z + w\mathit{j}$$

biçiminde yazabiliriz.

Bir $\mathrm{q} = z + w\mathbf{j}$ quaternionunun determinantı

$$\det(\mathrm{q}) = \begin{vmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{vmatrix} = |z|^2 + |w|^2$$

dir.

Bu çalışmada Möbiüs dönüşümlerinin $\mathbf{R}^2$'deki ve bunların genişletilmişlerinin $\mathbf{R}^3$'deki hareketini inceleyeceğiz. **C** kompleks düzlemi ile $\mathbf{R}^2$'yi özdeşliyoruz. **C**'nin cebirsel yapısı, Möbiüs dönüşümlerinin hareketini cebirsel olarak ifade edebilmemizi sağlar. Aynı zamanda $(x, y, t) \in \mathbf{R}^3$noktası ile $x + y\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ quaternionunu özdeşleyeceğiz. Bu özdeşleme, bir Möbiüs dönüşümünün Poincare genişlemesini quaternion cebiri bakımından ifade edebilmemizi sağlar.

Genişletilmiş karmaşık düzlem $\hat{C}$'yı $\hat{R}^2$ ile özdeşleriz. Quaternion gösterimi ile

$$\mathbf{H}^3 = \{z + t\mathit{j} : z \in C,\ t > 0\}$$

ve $\mathbf{H}^3$'ün $\hat{R}^3$'deki sınırı $\hat{C}$ olur.

Bir $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, $ad - bc \neq 0$ Möbiüs dönüşümünün Poincare genişlemesi

$$g(z + tj) = \frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}t^2 + |ad-bc|tj}{|cz+d|^2 + |c|^2 t^2}$$

şeklinde verilir. Eğer t = 0 ise bu genişleme g(z) Möbiüs dönüşümünü verir (Beardon 1983).

1.7.2. Teorem: Her bir g∈**PSL(2, C)** için

$\|g\|^2 = 2\cosh\rho(\mathbf{j}, g\,\mathbf{j})$

olur (Beardon 1983).

1.8. Temel Bölge ve Bazı Cebirsel Kavramlar

1.8.1. Tanım: G, bir X topolojik uzayının kendi üzerine 1-1 dönüşümlerinin bir grubu olsun. X'in aşağıdaki koşulları sağlayan ve boş olmayan açık bir S alt kümesine G'nin X'e ait bir **temel bölgesi** denir:

(i) S'nin G grubuna göre denk olan farklı iki noktası yoktur.

(ii) S'nin bir sınır noktasının her komşuluğunda S'nin tümleyenine ait ve S'nin bir noktasına denk olan bir nokta vardır.

Bir grubun temel bölgesini elde etmek için pek çok yöntem vardır. Ancak biz çalışmamızda **PSL(2, C)** grubunun alt grupları ile ilgileneceğimizden Ford bölgesinden bahsedeceğiz.

1.8.2. Tanım: Bir $t(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $a, b, c, d\in$**C**, ad - bc = 1 doğrusal dönüşümünü alalım. $c \neq 0$ olmak üzere

$C = \{z\in\mathbf{C} : |cz+d| = 1\}$

kümesinin belirttiği çembere t dönüşümünün **eşmetri çemberi** denir.

c = 0 için eşmetri çemberi yoktur. t dönüşümü eşmetri çemberi üzerindeki uzaklıkları invaryant bırakır.

1.8.3. Tanım: (Ford Bölgesi) G süreksiz bir grup olsun. G grubunun ∞'u sabit bırakan dönüşümlerden oluşan alt grubu için bir temel bölge R_∞ olsun. K, G'nin tüm eşmetri çemberlerinin dışında kalan bölge olmak üzere

$R = R_\infty \cap K$

kümesi G grubu için bir temel bölgedir.

Herhangi bir G grubu için temel bölge bir tek değildir. Ancak Siegel, G grubuna karşılık gelen tüm temel bölgelerin hiperbolik alanlarının aynı olduğunu göstermiştir. Böylece temel bölgenin alanının sadece verilen G grubuna bağlı olduğu görülmüştür. Ayrıca Siegel, temel bölgenin alanı sonlu ise temel bölgenin sonlu sayıda kenarı olduğunu göstermiştir. R'nin G grubu altındaki resimleri birbirlerini kesmezler, sadece sınırda ortak olabilirler. R ve R'nin resimleri birbirine yapışarak tüm düzlemi örterler. R'nin sınırı, eşlenmiş dairesel yaylardan oluşur.

1.8.4. Teorem: R temel bölgesinin kenarlarını s_n , s_n' (n = 1, 2, ...) ile gösterelim. $t_n \in G$ öğelerini ise $t_n(s_n) = s_n'$ olacak şekilde seçelim. Bu taktirde $\{t_n\}$ kümesi G'nin üreteçleri kümesidir (Ford 1951).

1.8.5. Tanım: Bir G grubunun üreteçleri $a, b, c, \ldots$ ve bu üreteçler arasında tanımlı bağıntılar $P(a, b, c, \ldots)$, $Q(a, b, c, \ldots)$, $R(a, b, c, \ldots)$, ... olsun.

$< a, b, c, \ldots ; P(a, b, c, \ldots), Q(a, b, c, \ldots), \ldots >$

ifadesine G grubunun bir **temsili** (presentation) denir.

Eğer üreteçlerin sayısı sonlu ise bu temsile, sonlu üreteçli temsil denir.

1.8.6. Tanım: G bir grup olsun. Bir n sayısı için G'den **GL(n, C)**'ye bir ϕ homomorfizmine G grubunun bir **gösterimi** (representation) denir.

1.8.7. Tanım: Bir $\phi : G \to$ **GL(n, C)** gösterimi 1-1 ise ϕ'ye **faithful** gösterim denir.

1.8.8. Tanım: S, bir G grubu için üreteç kümesi olsun. Eğer S'nin elemanları arasında aşikar olmayan bağıntılar yoksa G, S üzerinde bir **serbest gruptur** denir.

1.8.9. Tanım: $A = < a_1, \ldots, a_n ; R_1(a_v), \ldots, R_p(a_v) >$ ve

$B = < b_1, \ldots, b_m ; S_1(b_u), \ldots, S_r(b_u) >$ gruplarını gözönüne alalım.

$A * B = < a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m ; R_1(a_v), \ldots, R_p(a_v), S_1(b_u), \ldots, S_r(b_u) >$

grubuna A ve B gruplarının **serbest çarpımı** denir. A ve B'ye de A ∗ B'nin **serbest çarpanları** denir.

Burada A ∗ B grubu, A ve B'nin özel temsilleri kullanılarak tanımlanmıştır. Bununla birlikte bu grup A ve B'nin temsillerinden bağımsızdır (Magnus ve ark. 1976).

1.8.10. Sonuç: A ∗ B'nin sonlu mertebeli bir elemanı, A veya B'deki sonlu mertebeli bir elemanın konjugesidir (Magnus ve ark. 1976).

1.8.11. Tanım: Eğer bir

$$G = < a_1, \ldots , a_n, b_1, \ldots , b_m ; R(a_\nu), \ldots , S(b_\mu), \ldots , u_1(a_\nu) = v_1(b_\mu), \ldots , u_q(a_\nu) = v_q(b_\mu) >$$

grubu için

A', G'nin $a_1, \ldots , a_n$ ile üretilen alt grubu ;

B', G'nin $b_1, \ldots , b_m$ ile üretilen alt grubu ;

H', A''nün $u_1(a_\nu), \ldots , u_q(a_\nu)$ ile üretilen alt grubu ;

K', B''nün $v_1(b_\mu), \ldots , v_q(b_\mu)$ ile üretilen alt grubu

ise G grubuna A' ve B''nün

$$u_i(a_\nu) \to v_i(b_\mu)$$

dönüşümü altında birleştirilmiş H' ve K' alt grupları ile serbest çarpımı denir.

1.8.12. Tanım: F, S kümesi üzerinde serbest değişmeli bir grup olsun. S kümesinin eleman sayısına F'nin rankı denir.

2. PICARD GRUBUNUN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Picard grubunu tanımlayacağız, Picard grubunun ve alt grubu olan modüler grubun bazı temel özelliklerini ele alacağız. Özellikle de Picard grubunun Fuchsian alt gruplarını inceleyeceğiz.

2.1. Picard Grubu

2.1.1. Önerme: $z = x + iy$; $x, y \in \mathbf{Z}$ şeklindeki Gaussian tamsayıların halkasını $\mathbf{Z}(\mathbf{i})$ ile gösterelim.

$$\mathbf{P} = \{\ s(z) = \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1,\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{Z}(\mathbf{i})\ \}$$

kümesi **PSL(2, C)**'nin bir alt grubudur.

İspat: $s,\ t \in P$ alalım.

$$s(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ ;\ ad - bc = 1 \text{ ve}$$

$$t(z) = \frac{ez+f}{gz+h}\ ;\ eh - fg = 1$$

olsun.

$$s \circ t\,(z) = \frac{a\dfrac{ez+f}{gz+h}+b}{c\dfrac{ez+f}{gz+h}+d} = \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(cf+dh)} = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

$$(a' = ae + bg,\ b' = af + bh,\ c' = ce + dg,\ d' = cf + dh)$$

elde edilir. $a', b', c', d' \in \mathbf{Z}(\mathbf{i})$ olduğu açıktır.

$$a'd' - b'c' = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) = (ad - bc)(eh - fg) = 1$$

olur. O halde $s \circ t \in \mathbf{P}$'dir.

$s \in \mathbf{P}$ için

$s^{-1}(z)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$ olup $d,\ -b,\ -c,\ a\in$Z(i) ve da - $(-b)(-c)$ = 1 olur.Böylece $s^{-1}\in$P elde edilir.

Sonuç olarak **P**, **PSL(2, C)**'nin bir alt grubudur.

2.1.2. Tanım: Önerme:2.1.1'deki **P**'ye **Picard grubu** denir.

Picard grubu bazen **PSL(2, Z(i))** ve ya **PSL$_2$(Z(i))** simgeleri ile de gösterilir.

2.1.3.Önerme: P Picard grubu ayrık bir gruptur.

İspat: Matris gösterimini kullanalım ve

$$x_n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere **P**'de bir (x_n) dizisi alalım. Varsayalım ki

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

olsun.

$$\text{“}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Leftrightarrow a_n\to a, b_n\to b, c_n\to c, d_n\to d\text{”}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde $a_n\to a$ ise, $\varepsilon\le 1$ olarak alırsak öyle bir n_1 doğal sayısı vardır ki her $n>n_1$ için $a_n\in$D$(a,\ \varepsilon)$ olur. (a_n) dizisinin her bir terimi ve a bir Gaussian tamsayı olduğundan D$(a,\ \varepsilon)$ diskinde a'dan başka Gaussian tamsayı bulunmaz.Dolayısıyla her $n>n_1$ için $a_n=a$ elde edilir. Benzer düşünce (b_n), (c_n), (d_n) dizilerine de uygulanarak öyle n_2, n_3, n_4 sayıları bulunabilir ki sırasıyla her $n>n_i$ $(i=2,3,4)$ için $b_n=b$, $c_n=c$, $d_n=d$ olduğu görülür.

$n_0=\max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ olarak alınırsa her $n>n_0$ için

$x_n=x=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olduğu görülür.

Bu ise, **P**'de farklı öğelerin yakınsak bir dizisinin olmadığını gösterir. O halde **P** ayrık gruptur.

2.1.4. Teorem: G $\subset$ **PSL(2,C)** ayrıktır $\Leftrightarrow$ G, **H^3**'de süreksiz hareket eder.

İspat: İlk olarak G'nin ayrık olduğunu varsayalım. G, **SL(2, C)**'nin ayrık (ve bu nedenle sayılabilir) bir alt grubunun homomorfik resmi olduğundan sayılabilirdir. O halde

$G = \{g_1, g_2, \dots\}$

alalım. G ayrık olduğundan $\|g\| \to \infty$ ve Teorem: 1.7.2'den dolayı $n \to \infty$ için

$$\rho(\mathbf{j}, g_n(\mathbf{j})) \to \infty \qquad \mathbf{(2)}$$

olur.

$\mathbf{H}^3$'ün kompakt bir K alt kümesi bir $B = \{x \in \mathbf{H}^3 : \rho(x, \mathbf{j}) < k\}$ hiperbolik yuvarı içinde bulunur. Eğer $g(K) \cap K \neq \emptyset$ ise o zaman $g(B) \cap B \neq \emptyset$ ve böylece

$$\rho(\mathbf{j}, g(\mathbf{j})) < 2k$$

olur. **(2)** gereğince bu, G'de sadece sonlu sayıdaki g öğeleri için gerçeklenir. Böylece G, $\mathbf{H}^3$'de süreksiz hareket eder.

Şimdi G, $\mathbf{H}^3$'de süreksiz hareket etsin. Eğer G ayrık değilse **SL(2, C)**'de farklı $A_1, A_2, \dots$ matrislerini $n \to \infty$ için $A_n \to I$ olacak şekilde bulabiliriz. Bu matrislerin G'deki izdüşümlerine $a_1, a_2, \dots$ diyelim. Her $x \in \hat{R}^3$ için $a_n(x) \to x$ olduğu açıktır. Bu ise 1.5.1'deki (4) ile çelişki oluşturur. O halde G'nin ayrık olduğunu elde ederiz.

Teoremin ispatından görülüyor ki eğer G grubu $\hat{C}$ 'nın boş olmayan açık bir alt kümesi üzerinde süreksiz hareket ediyorsa ayrıktır. Fakat tersi doğru değildir. Yani bir G grubu ayrık olmakla birlikte $\hat{C}$'nın herhangi bir açık alt kümesi üzerinde süreksiz hareket etmeyebilir.

2.1.3 ve 2.1.4'den **P** Picard grubunun $\mathbf{H}^3$'de süreksiz hareket ettiğini elde ederiz. Fakat **P**'nin $\hat{C} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ üzerinde hareketi süreksiz değildir. Bunu görelim: 1.5.5. Önerme gereğince **P**'nin parabolik sabit noktalarının $\hat{C}$'da yoğun olduğunu görmek yetecektir. $w = \dfrac{p+iq}{r}$ noktasını alalım. Burada p, q ve r tamsayıdır. Açıktır ki bu şekildeki w noktalarının oluşturduğu küme $\hat{C}$'da yoğundur. Basitçe elde edilebilir ki

$$h(z) = \frac{(1-wr^2)z + r^2w^2}{-r^2z + (1+wr^2)}$$

dönüşümü **P**'nin, sabit noktası w olan parabolik elemanıdır. Gerçekten

$$1 - wr^2,\ r^2w^2,\ -r^2,\ 1 + wr^2 \in \mathbf{Z}(\mathbf{i}) \text{ ve } (1 - wr^2)(1 + wr^2) - (-r^2)(r^2w) = 1$$

olduğundan $h \in \mathbf{P}$'dir.

$\mathrm{tr}^2(h) = 4$ olduğundan h parabolik bir dönüşümdür. Son olarak

$$h(w) = \frac{(1-wr^2)w + r^2w^2}{-r^2w + 1 + wr^2} = w$$

olduğundan *w*, *h* dönüşümünün sabit noktasıdır.

Böylece **P** Picard grubu, $\hat{C}$ üzerinde ayrıklığın süreksizliği gerektirmediğini gösteren bir örnektir. Bununla birlikte **P**'nin $\hat{C}$ üzerinde süreksiz hareket eden alt gruplarını bulabiliriz. Örneğin **P**'nin bir alt grubu olan modüler grup , üst yarı düzlem **D**'de süreksiz hareket eder.

2.2. Modüler Grup

Modüler grup, Picard grubunun iyi bilinen bir alt grubudur. **P**'nin genel yapısı ve temel denklik alt gruplarının yapısı modüler gruba benzerdir. Bu bölümde kısaca modüler grubun bazı temel özelliklerini özetleyeceğiz.

2.2.1. Tanım: Modüler grup,

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,;\ ad-bc=1,\ a,b,c,d \in \mathbf{Z}$$

şeklindeki Möbiüs dönüşümlerinin oluşturduğu gruptur.

Modüler grubu " **M** " simgesi ile göstereceğiz. Bazen **PSL(2, Z)** ya da $\mathbf{PSL_2(Z)}$ simgeleri de kullanılır. Modüler grup ayrık bir gruptur ve üst yarı düzlem **D**'de süreksiz hareket eder (Lehner 1964).

Modüler grup,

$$u(z) = z + 1 \text{ ve } t(z) = -\frac{1}{z}$$

olmak üzere *u* ve *t* dönüşümleri ile üretilmiştir.

M için alışılmış F temel bölgesi Şekil: 2'de gösterilmiştir.

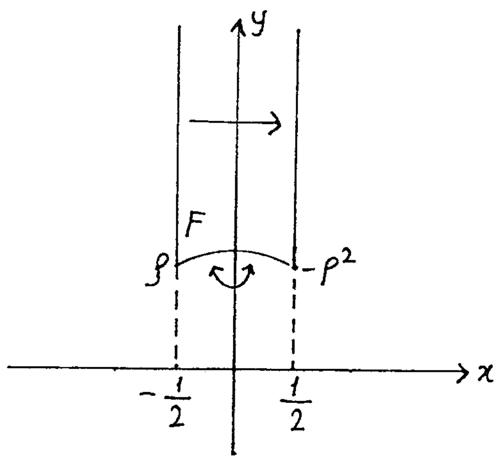
$$\mathrm{F} = \{z \in \mathrm{D} : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\ ,\ |z| \geq 1\}$$

dir ve F'nin alanı $\mu(\mathrm{F}) = \frac{\pi}{3}$'dür.

$w = tu : z \to \frac{-1}{z+1}$ dönüşümü gözönüne alınırsa, $u = tw$ olduğundan *t* ve *w* dönüşümleri de **M**'yi üretir ve bunlar

$$t^2 = w^3 = 1$$

bağıntılarını gerçekler.



Şekil: 2

Böylece **M**,

$$\mathbf{M} = < t,\ w : t^2 = w^3 = 1 >$$

biçiminde bir gösterime sahiptir (Lehner 1964).

Bu gösterir ki **M**, bir serbest çarpımdır:

$$\mathrm{G} = < t : t^2 = 1 > \cong C_2 \text{ ve } \mathrm{H} = < w : w^3 = 1 > \cong C_3$$

olarak alınırsa

$$\mathbf{M} = \mathrm{G} * \mathrm{H} \cong C_2 * C_3$$

olur.

Her bir $n \geq 2$ tamsayısı için $\mathbf{Z_n}$ ile mod(n) tamsayılarının halkasını gösterelim. O halde

$$\mathbf{SL(2, Z_n)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in Z_n\ , ad-bc = 1 \right\}$$

bir gruptur ve $N = \{\pm I\}$, $\mathbf{SL(2, Z_n)}$'in normal alt grubudur.

$$\psi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z_n}\ ,\ \psi(a) = [a]$$

doğal halka epimorfizmi

$$\phi : \mathbf{SL(2, Z)} \to \mathbf{SL(2, Z_n)}$$

grup homomorfizmini indirger. Bu homomorfizmden faydalanarak da

$$\phi_n : \mathbf{M} = \mathbf{PSL(2, Z)} = \mathbf{SL(2, Z)}/\{\pm I\} \to \mathbf{PSL(2, Z_n)} = \mathbf{SL(2, Z_n)}/\{\pm I\}$$

grup homomorfizmi elde edilir. ϕ_n homomorfizminin çekirdeği

$$\mathrm{M}(n) = \left\{ t \in M : t(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a \equiv d \equiv \pm 1 \,(\operatorname{mod} n), b \equiv c \equiv 0 \,(\operatorname{mod} n) \right\}$$

dir ve M(n)'ye **M**'nin n- seviyeli temel denklik alt grubu denir. Λ, **M**'nin bir alt grubu olsun. Eğer belli bir M(n) temel denklik alt grubu için M(n) ⊂ Λise Λ'ya denklik alt grubu ve bu özellikteki en küçük n sayısına da Λ'nın seviyesi denir.

Tanımdan hemen görülüyor ki M(n), **M**'nin bir normal alt grubudur. Üstelik

$$\mathbf{M} / \mathrm{M}(n) \cong \mathbf{PSL(2, Z_n)}$$

dir (Jones ve Singerman 1987).

Bundan başka modüler grubun önemli denklik alt grupları

$$M_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M : c \equiv 0 \bmod(n) \right\}$$

$$M^0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M : b \equiv 0 \bmod(n) \right\}$$

$$M_0^0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M : c \equiv b \equiv 0 \bmod(n) \right\}$$

gruplarıdır.

2.3. Picard Grubunun Temel Bölgesi ve Temsili

Bu bölümde Picard grubunun temel bölgesini oluşturacağız ve temsilini elde edeceğiz. **P**'nin bir serbest çarpım olarak ayrışımını vereceğiz.

2.3.1. Önerme: Picard grubunun eşmetri çemberlerinin kümesi

$$\mathrm{C} : a_1(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c_1 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$(a_1, b_1, b_2, c_1 \in \mathbf{Z},\ b_1^2 + b_2^2 - a_1c_1 = 1)$$

biçimindeki çemberlerden oluşur.

İspat: Bir $t \in \mathbf{P}$ dönüşümü alalım.

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ ;\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{Z}(\,\mathbf{i}\,),\ ad - bc = 1,\ c \neq 0$$

olsun. Bu dönüşümün eşmetri çemberi, $|cz+d| = 1$ çemberidir. $c \neq 0$ olduğundan bu çemberi $\left|z + \frac{d}{c}\right| = \frac{1}{|c|}$ biçiminde ifade edebiliriz. Bu, merkezi $\mathrm{m} = -\frac{d}{c}$ ve yarıçapı $r = \frac{1}{|c|}$ olan bir çember denklemidir.

Şimdi $z = x + iy$, $c = m + in$, $d = u + iv$; $x, y \in \mathbf{R}$, $m, n, u, v \in \mathbf{Z}$ alalım. Bu değerleri $|cz+d| = 1$ eşitliğinde yerine yazalım:

$$|(m+in)(x+iy)+(u+iv)| = 1$$

olur ve buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) + 2(um + nv)x - 2(un - mv)y + u^2 + v^2 - 1 = 0$$

olur . $a_1 = m^2 + n^2$, $b_1 = um + nv$, $b_2 = un - mv$, $c_1 = u^2 + v^2 - 1$ yazılırsa $a_1, b_1, b_2, c_1 \in \mathbf{Z}$ olduğu görülüyor. O halde $a_1(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c_1 = 0$ elde edilir. Bu son denklemi biraz düzenleyelim: $c \neq 0$ olduğundan $|c| = m_1^2 + m_2^2 = a_1 \neq 0$ 'dır ve

$$x^2 + y^2 + \frac{2b_1}{a_1}x - \frac{2b_2}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1} = 0$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\left(x + \frac{b_1}{a_1}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{a_1}\right)^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2 - c_1a_1}{a_1^2}$$

elde ederiz. Bu denklem, $\left(-\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_1}\right)$ merkezli ve $\frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - c_1a_1}}{a_1}$ yarıçaplı bir çember denklemidir. Buradan, $|c| = a_1$ olduğu gözönünde tutulursa $r = \frac{1}{|c|}$'den

$b_1^2 + b_2^2 - a_1c_1 = 1$ elde edilir.

2.3.2. Önerme: **P** Picard grubu, $a_1, b_1, b_2, c_1 \in \mathbf{Z}$ ve $b_1^2 + b_2^2 - a_1c_1 > 0$ olmak üzere

$$C : a_1(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c_1 = 0$$

çemberlerinin Ω kümesi üzerinde hareket eder.

İspat: $a_1(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c_1 = 0$ çemberini alalım. Bu çemberi

$$a_1 z\bar{z} + b_1(z + \bar{z}) + ib_2(z - \bar{z}) + c_1 = 0$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Bir $t \in \mathbf{P}$ alalım.

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d} = w = u + iv \text{ olsun.}$$

Buradan elde edilen $z=\dfrac{dw-b}{-cw+a}, \bar{z}=\dfrac{\bar{d}\,\bar{w}-\bar{b}}{-\bar{c}\bar{w}+\bar{a}}$ değerlerini çember denkleminde yerine yazıp gerekli işlemler yapılırsa, $a_1^{'}, b_1^{'}, b_2^{'}, c_1^{'} \in \mathbf{Z}$ ve $b_1^{'2}+b_2^{'2}-a_1^{'}c_1^{'}>0$ olmak üzere $a_1^{'}(u^2+v^2)+2b_1^{'}u-2b_2^{'}v+c_1^{'}=0$ şeklinde bir çember denklemi elde edilir.

2.3.3. P'nin Temel Bölgesi: Picard grubunun $\mathbf{H}^3$'de süreksiz hareket ettiğini biliyoruz. $\mathbf{H}^3$'de, Picard grubunun (3)'deki eşmetri çemberini ekvator kabul eden bir yarım küre vardır. Bu yarım küreye, (3) eşmetri çemberinin belirlediği temsilci yarım küre denir. Bu yarım kürenin denklemi

$$a_1(x^2+y^2+t^2)+2b_1x-2b_2y+c_1=0$$

dır. Eğer $a_1=0$ ise o zaman C bir doğru olur ve bunun belirlediği temsilci yarım küre de bu doğru üzerindeki dikey yarı düzlemdir.

Şimdi $\mathbf{H}^3$'de **P**'nin temel bölgesinioluşturmaya çalışalım. **P** için Ford bölgesini bulalım. **P**'de ∞'un P_∞ ile gösterilen kalımlaştırıcısı için bir temel bölge R_∞ olsun. K, **P**'nin tüm temsilci yarım kürelerinin dışında kalan bölge olmak üzere

$$R = R_\infty \cap K$$

bölgesi **P** için bir temel bölgedir.

İlk olarak P_∞ için bir temel bölge bulalım.

$$P_\infty = \{t \in \mathbf{P} : t(\infty) = \infty\}$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. $t \in P_\infty$ alalım.

$t(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ olsun. $t(\infty)=\infty$ olduğundan $c=0$ elde ederiz. Böylece

$t(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ olur ve $ad - bc = 1$'den $ad=1$ elde edilir. Buradan $a=\dfrac{1}{d}$ olur ve $t(z)=a^2z+ab$ şekline gelir. $\det(t)=1$ olduğundan $a^2=1$ bulunur. Bu durumda

$$t(z)=z+k\,(k=m+in\in \mathbf{Z}(\,\mathbf{i}\,))$$

şeklindedir. O halde

$$P_\infty = \{t : t(z) = z + k,\ k \in \mathbf{Z}(\,\mathbf{i}\,)\}$$ elde edilir.

Şimdi $z = x + iy \in \mathbf{C}$ ve $k = m + in \in \mathbf{Z}(\,\mathbf{i}\,)$ alırsak

$$t(z)=(x+iy)+m+in=(x+m)+i(y+n)$$

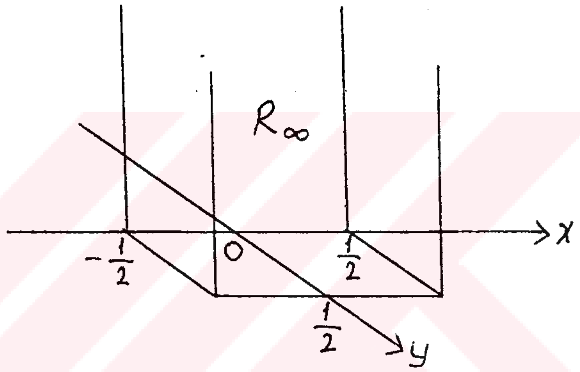
olur. Dikkat edilirse t dönüşümü z noktasını x- ekseni boyunca $|m|$ kadar, y- ekseni boyunca $|n|$ kadar kaydırmaktadır. O halde

$$R_\infty = \left\{ z \in D : -\frac{|m|}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{|m|}{2}, 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq \frac{|n|}{2} \right\}$$

olur. Şimdi de $k = 1 + i$ alalım. Bu durumda $t(z) = z + (1 + i)$ olur. P_∞'un diğer tüm dönüşümleri $t(z) = z + (1 + i)$'ye konjuge olduğundan sadece bu t'yi gözönüne almak yeterli olacaktır. O halde

$$R_\infty = \left\{ (z,t) \in H^3 : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, t > 0 \right\}$$

P_∞ için bir temel bölgedir (Şekil: 3).



Şekil: 3

Şimdi **P**'de ∞'u sabit bırakan dönüşümleri yani P_∞'un öğelerini attığımızda geriye $c \neq 0$ olmak üzere **P**'nin $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrislerine karşılık gelen dönüşümleri kalır. $c \neq 0$ olduğuna göre bu özellikteki her bir dönüşümün, merkezi **C** düzleminde bulunan bir eşmetri çemberi vardır. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen dönüşümün eşmetri çemberinin

$\left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|}$ çemberi olduğunu biliyoruz. Bu çember $\mathbf{H^3}$'de $\left(-\frac{d}{c}, 0 \right)$ merkezli ve $\frac{1}{|c|}$ yarıçaplı bir temsilci yarım küre belirler. Böylece **P**'nin $c \neq 0$ özelliğindeki her bir dönüşümü $\mathbf{H^3}$'de bir temsilci yarım küre belirler.

P'nin yukarıda belirtilen özellikteki her bir öğesinin belirlediği temsilci yarım kürelerden en büyük olanı, en büyük eşmetri çemberinin belirlediği temsilci yarım küre olacaktır. En büyük yarıçaplı eşmetri çemberi ise, $|c|=1$ özelliğindeki dönüşümün eşmetri çemberidir. c bir Gaussian tamsayı olduğundan $|c|=1$ özelliğindeki tüm Gaussian tamsayılar $c = 1, -1, i, -i$ 'dir. Her bir durumda eşmetri çemberinin merkezi olan $-\frac{d}{c}$ noktası bir Gaussian tamsayıdır. Şimdi $|c|=1$ özelliğindeki tüm dönüşümlerin belirlediği temsilci yarım küreleri düşünelim. Bunlar $\left(-\frac{d}{c},0\right)$ merkezli ve 1 yarıçaplı yarım kürelerdir. Özellikle de $|z|=1$ birim çemberinin belirlediği temsilci yarım küre olan birim yarım küreyi dikkate alalım.

Buna göre $c \neq 0$ ve $|c| \neq 1$ olmak üzere **P**'nin diğer tüm öğelerinin belirlediği temsilci yarım kürelerin yarıçapları ya $\frac{1}{\sqrt{2}}$'dir ya da $\frac{1}{\sqrt{2}}$'den daha küçüktür. Çünkü $\frac{1}{\sqrt{2}}$ değeri $c = \pm 1 + i$ noktalarına karşılık gelen değerdir ve diğer tüm $|c| \neq 1$ özelliğindeki Gaussian tamsayılar için bu değer daha küçük olacaktır. O halde $|c| \neq 1$ özelliğindeki dönüşümlerin her birinin belirlediği temsilci yarım küreler, $|c|=1$ özelliğindeki dönüşümlerin belirlediği temsilci yarım kürelerin içinde kalır. Böylece **P**'nin tüm öğelerinin belirlediği temsilci yarım kürelerin dışında kalan bölge yerine sadece yarıçapı 1 olan temsilci yarım kürelerin dışında kalan bölge alınabilir. Dikkat edilirse birim yarım küre, P_∞'un temel bölgesini keserek bir alt sınır oluşturur. R_∞'un

$$\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

köşe noktalarına birim küre üzerinde

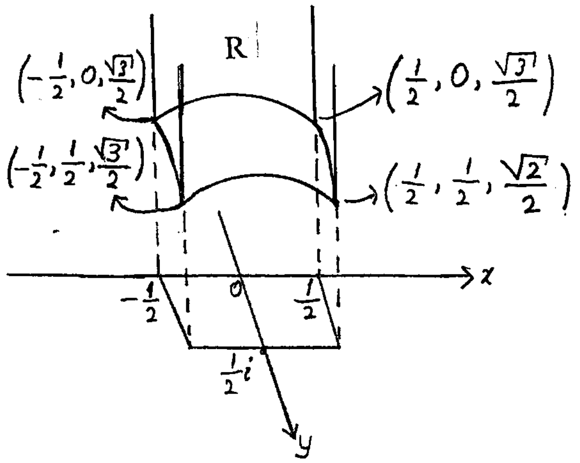
$$\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

noktaları karşılık gelir. O halde R_∞ ile tüm temsilci yarım kürelerin dışında kalan bölgenin arakesiti

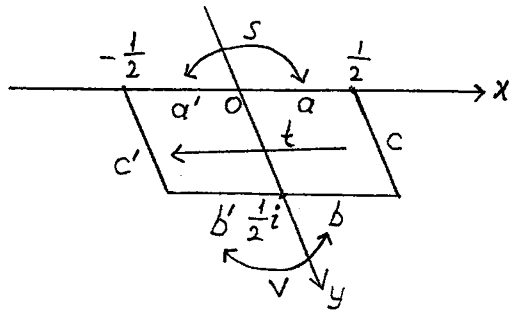
$$\mathrm{R}=\left\{u\in H^3 : u=(x,y,t), -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}, 0\le y\le\frac{1}{2}, x^2+y^2+t^2\ge 1, t>0\right\}$$

bölgesidir. R, **P**'nin temel bölgesidir (Şekil: 4).

2.3.4. P'nin Üreteçleri: Şimdi yukarıda elde ettiğimiz temel bölgenin kenarları arasındaki ilişkiyi inceleyerek **P**'nin üreteçlerini bulacağız. Önce temel bölgenin düzlem üzerindeki izdüşümünü gözönüne alalım (Şekil: 5). Dikkat edilirse $s(z) = -z$ dönüşümü 0 noktasını sabit bırakır ve 0'ın sağ yanındaki a kenarını soldaki a' kenarı üzerine resmeder. Aynı zamanda a''yü a'ya resmeder. $v(z) = -z + i$ dönüşümü $\frac{1}{2}i$ noktasını



Şekil: 4



Şekil: 5

sabit bırakır ve $\frac{1}{2}i$ noktasının her iki yanındaki b ve b' kenarlarını bir biri üzerine resmeder. $t(z) = z - 1$ dönüşümü sağdaki c kenarını soldaki c' kenarı üzerine resmeder. $u(z) = -\frac{1}{z}$ dönüşümü de 0 noktasını ∞'a ve ∞'u 0'a resmeder. Ayrıca $u(z)$ dönüşümünün eşmetri çemberi birim çemberdir.

Şimdi elde ettiğimiz bu dönüşümlerin $\mathbf{H}^3$'deki hareketine bakalım. Biliyoruz ki bir $g \in \mathbf{P}$ dönüşümü $\mathbf{H}^3$'de

$$g(z + t\mathbf{j}) = \frac{(az+b)(\overline{cz+d}) + a\bar{c}t^2 + t\mathbf{j}}{|cz+d|^2 + |c|^2 t^2}$$

şeklinde hareket eder. Buna göre

$$t(z + t\mathbf{j}) = z - 1 + t\mathbf{j}$$

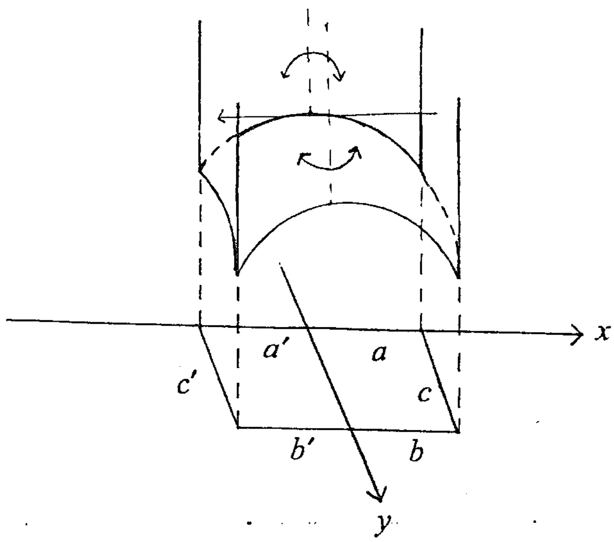
$$v(z + t\mathbf{j}) = -z + i + t\mathbf{j}$$

$$s(z + t\mathbf{j}) = -z + t\mathbf{j}$$

$$u(z + t\mathbf{j}) = \frac{-\bar{z} + t\mathbf{j}}{|z|^2 + t^2}$$

elde edilir. Böylece bu dönüşümler $\mathbf{H}^3$'de R'nin kenarları arasındaki eşlemeyi gerçekleştirirler (Şekil: 6).

Ancak biz **P**'nin $\hat{C}$'daki hareketi ile ilgileneceğimizden bu dönüşümlerin $\hat{C}$'daki



Şekil:6

izdüşümlerini **P**'nin üreteçleri olarak alacağız. Böylece **P**'nin üreteçleri

$$s(z) = -z,\ t(z) = z - 1,\ u(z) = -\frac{1}{z},\ v(z) = -z + i$$

dönüşümleridir ve bunlar aralarında aşağıdaki bağıntıları gerçeklerler:

$$(us^{-1})^2 = (vt^{-1})^2 = (st^{-1})^2 = (ut^{-1})^3 = (vu^{-1})^3 = 1$$

Buna göre **P**'nin bir temsilini

$$\mathbf{P} = < s,t,u,v\ ;\ (us^{-1})^2 = (vt^{-1})^2 = (st^{-1})^2 = (ut^{-1})^3 = (vu^{-1})^3 = 1 > \quad \mathbf{(4)}$$

olarak elde ederiz. Ayrıca **P**'nin aşağıdaki temsillerini de ileriki çalışmalarımızda kullanacağız:

$$u(z) = -\frac{1}{z}, s(z) = -z, t^{-1}(z) = z + 1, l(z) = z + i$$

olmak üzere

$$\mathbf{P} = < u,s,t^{-1},l : u^2 = s^2 = (us)^2 = (t^{-1}s)^2 = (ls)^2 = (ut^{-1})^3 = (lus)^3 = [t^{-1},l] = 1> \ \mathbf{(5)}$$

ve $x(z) = \dfrac{i}{iz+1}, u(z) = -\dfrac{1}{z}, y(z) = \dfrac{z+1}{-z}, r(z) = \dfrac{i}{iz}$ olmak üzere

$$\mathbf{P} = < x,u,y,r ; x^3 = u^2 = y^3 = r^2 = (xu)^2 = (xy)^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1> \quad \mathbf{(6)}$$

dir.

2.3.5. Teorem: **P** Picard grubu, $G_1 \cong S_3 *_{Z_3} A_4$ ve $G_2 \cong S_3 *_{Z_2} D_2$ olmak üzere G_1 ve G_2 gruplarının **M** ile birleştirilmiş serbest çarpımıdır. Yani **P** = $G_1 *_M G_2$'dir. (S_3, üç sembol üzerinde simetrik grup; A_4, dört sembol üzerinde alternatif grup ve D_2, Klein'in 4- lü grubudur.)

İspat: **P**'nin **(6)**'daki temsilinden bu sonucu elde edebiliriz.

$G_1 = < x,u,y; x^3 = u^2 = (xu)^2 = 1, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 >$ ve

$G_2 = < u,y,r; u^2 = r^2 = (ru)^2 = 1, r^2 = y^3 = (ry)^2 = 1 >$

alalım. O zaman $u = u, y = y$ özdeşlemesi ile **P** = $G_1 * G_2$ elde edilir.

G_1'de u ve y ile üretilen alt grubu düşünelim. Bu alt grup, u ve y'nin teker teker ürettikleri alt grupların serbest çarpımıdır. Buna $Z_1 * Z_2$ diyelim. Bu aynı zamanda G_2'de de doğrudur. Böylece **P**,

$Z_1 * Z_2 = < u,y; u^2 = y^3 = 1 > \cong$ **PSL₂(Z) = M**

alt grubu ile birleştirilmiş bir serbest çarpımdır. Burada

$G_1 \cong S_3 *_{Z_3} A_4$ ve $G_2 \cong S_3 *_{Z_2} D_2$

dir.

2.3.6.Picard Grubunun İki Üreteçli Temsili: Picard grubu **P**'nin **(6)** 'daki temsilini alalım:

P $= < x,u,y,r; x^3 = u^2 = y^3 = r^2 = (xu)^2 = (xy)^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1>$

Burada, matris gösterimi kullanılırsa

$$x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Şimdi **P**'nin beş relatörlü bir temsilde

$$xr = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & -1 \end{pmatrix} ve\ ury = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ile üretildiğini göstereceğiz.

Üreteçlerde ilk indirgeme $a = xr, b = ry$ ile elde edilir. $r^2 = 1$ bağıntısı gözönüne alınırsa $x = ar, y = rb$ olur. Böylece

P $= < a,u,b,r; (ar)^3 = u^2 = (rb)^3 = r^2 = (aru)^2 = (ab)^2 = b^2 = (ru)^2 = 1>$

elde edilir. $(ru)^2 = (ar)^3 = r^2 = u^2 = 1$ bağıntıları kullanılırsa

$aruaru = auraru = aua^{-1}r^{-1}a^{-1}u$

elde edilir.

Bu nedenle $(aru)^2 = 1$ bağıntısı yerine $aua^{-1}r^{-1}a^{-1}u = 1$'den elde edilen $r = a^{-1}uaua^{-1}$ bağıntısını alabiliriz.

Sonuç olarak

$$\mathbf{P} = < a,u,b;(uaua^{-1})^3 = u^2 = (a^{-1}uaua^{-1}b)^3 = (a^{-1}uaua^{-1})^2$$
$$= (ab)^2 = b^2 = (a^{-1}uaua^{-1}u)^2 = 1>$$

elde edilir.

Bununla birlikte $(a^{-1}uaua^{-1}u)^2 = 1$ bağıntısı ihmal edilebilir. Çünkü bu bağıntı

$(a^{-1}uaua^{-1})^2 = u^2 = 1$ ve $(aua^{-1}ua^{-1}u)^{-2} = 1$

bağıntılarından elde edilebilir. Gerçekten, $(uaua^{-1})^3 = 1$ ise

$$1 = uaua^{-1}uaua^{-1}uaua^{-1} = uauaua^{-1}uauaua^{-1} = (uauaua^{-1})^2 = (aua^{-1}ua^{-1}u)^{-2}$$

elde edilir. Burada $u^2 = 1$ ve $a^{-1}uaua^{-1} = aua^{-1}ua$ bağıntıları kullanılmıştır. Buna göre $(aua^{-1}ua^{-1}u)^{-2} = 1$ ise $a^{-1}uaua^{-1}u)^2 = 1$ bulunur.

İkinci indirgeme için $w = ub$ alalım. $u = wb$ olur. O zaman

$$\mathbf{P} = < a,b,w;(wbawba^{-1})^3 = (wb)^2 = (a^{-1}wbawba^{-1}b)^3$$
$$= (a^{-1}wbawba^{-1})^2 = (ab)^2 = b^2 = 1 >$$

elde edilir. Burada $b^2 = 1$ bağıntısı kullanılarak $(ab)^2 = 1$ ve $(wb)^2 = 1$ bağıntılarından $b^{-1}ab = a^{-1}$ ve $b^{-1}wb = w^{-1}$ bulunur. $(a^{-1}wbawba^{-1}b)^3 = 1$ bağıntısı $(a^{-1}wbawa)^3 = 1$ ya da $(w^2ba)^3 = 1$ ile yer değiştirebilir. Bu son bağıntıdan

$$1 = w^2baw^2baw^2ba = w^2a^{-1}w^{-2}aw^2ba$$

elde edilir. Buradan $b = aw^2a^{-1}w^{-2}aw^2$ bulunur.

Böylece $\mathbf{P}$, $a = xr$ ve $w = ury$ ile üretilmiştir. Sadeleştirme yapılırsa

$$\mathbf{P} = < a,w;b = aw^2a^{-1}w^{-2}aw^2,(awaw^{-1})^3 = (wb)^2$$
$$= (a^2waw^{-1})^2 = (ab)^2 = b^2 = 1>$$

elde edilir.

2.4. Picard Grubunun Fuchsian Alt Grupları

C, kompleks düzlemde a, b_1, b_2, $c \in \mathbf{Z}$ ve $b_1{}^2 + b_2{}^2 - ac > 0$ olmak üzere

$$a(x^2+y^2)+2b_1x-2b_2y+c=0$$

çemberi olsun. Ω, bu şekildeki C çemberlerinin oluşturduğu küme olmak üzere, 2.3.2'den biliyoruz ki **P**, Ω kümesi üzerinde hareket eder.

2.4.1. Tanım: **P**'nin bir C çemberini sabit bırakan ve içini kendi üzerine resmeden bir alt grubuna **Fuchsian**'dır denir.

Verilen bir C çemberine karşılık gelen Fuchsian alt grubu P(C) simgesi ile ve bunun normal kapanışını $P_N(C)$ ile göstereceğiz.

Her Fuchsian alt grubun, Ω 'nın bir çemberine karşılık geldiğini ve tersine Ω'nın her bir çemberine karşılık gelen bir Fuchsian alt grubun var olduğunu Fricke ve Klein (1965)'den biliyoruz.

Bu bölümde ilk olarak **P** altında bu çemberlerin denklik sınıflarını gözönüne alacağız. Sonra bunların kalımlaştırıcılarına form gruplar diyeceğiz. Bu gruplar **P'**de **P'**nin maksimal Fuchsian alt gruplarıdır. Bir çemberin form grubunun bir temel bölgesini bulmak için iki metot vereceğiz. Bu form grubun sonlu üreteçli olduğunu ispatlayacağız.

Modüler grup **M**, a, b, $c\in\mathbf{Z}$ olmak üzere $ax^2+bxy+cy^2$ ikili quadratik formları üzerinde hareket eder. İlk olarak bu ikili quadratik formları gözönüne alalım. Elde ettiğimiz sonuçları sonra **P** ve çemberlere taşıyacağız.

M ve İkili Quadratik Formlar

$ax^2+bxy+cy^2$ formu için $[a, b, c]$ gösterimini kullanacağız.

2.4.2. Tanım: $[a, b, c]$ formunun determinantı $\Delta = b^2 - 4ac$'dir.

Eğer $\Delta < 0$ ise $[a, b, c]$ formuna belirlenmiş, $\Delta > 0$ ise **belirlenmemiş** denir.

Sadece belirlenmemiş formları gözönüne alacağız.

2.4.3. Tanım: $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ ve $g(x',y')=Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2$ iki form olsunlar. Eğer bir $T\in$**SL(2, Z)** matrisi,

$$f(x,y)=g(T(x',y')')$$

olacak şekilde varsa bu iki forma denktirler denir. Burada alışılmış matris çarpımı ile

$$T(x',y')'=T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

dir. Yani

$$T=\begin{cases} x=\alpha\, x'+\beta\, y' \\ y=\gamma\, x'+\delta\, y' \end{cases} ;\alpha\,\delta-\beta\,\gamma=1$$

dönüşümü bir formu diğerine resmeder.

Eğer $z=\dfrac{x}{y}, z'=\dfrac{x'}{y'}$ yazarsak o zaman T dönüşümü

$$z=\frac{\alpha\, z'+\beta}{\gamma\, z'+\delta};\alpha\,\delta-\beta\,\gamma=1$$

şekline gelir. Böylece modüler grubun bir öğesi, formlardan birini diğerine resmedecek şekilde varsa bu iki forma denktir diyeceğiz.

Şimdi $az^2+bz+c=y^{-2}(ax^2+bxy+cy^2)$ formu ile çalışalım. Bu ikinci dereceden form, iki reel sıfıra sahiptir. Bunlar

$$w_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } w_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

dir. Eğer $t\in$**M** dönüşümü $[a, b, c]$ formunu $[a',b',c']$'ye resmediyor ise o zaman t, w_1'i w_1''ye ve w_2'yi w_2''ye resmeder.

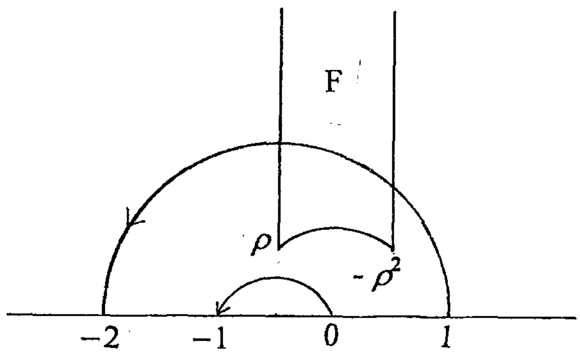
Üst yarı düzlem D'de yönlendirilmiş bir Σ yarı çember yayı ile w_1 ve w_2'yi birleştirebiliriz. Bu yönlendirme, aynı yarı çember yayı ve aynı sıfırlara sahip

$[a, b, c]$ ve $[-a, -b, -c]$ formlarını ayırır.

Eğer $a=0$ ise determinantı $\Delta=b^2$ olan $bz+c$ şeklinde bir form elde edilir. Eğer $b>0$ ise $w_1=-\dfrac{c}{b}, w_2=\infty$; $b<0$ ise $w_1=\infty, w_2=-\dfrac{c}{b}$ alırız. Bu durumda yarı çember, $-\dfrac{c}{b}$ noktasının üstündeki dikey doğrudur ve w_1'den w_2'ye yönlendirilmiştir.

2.4.4. Tanım: (a) Modüler grubun alışılmış F temel bölgesi ile kesişen bir yarı çember ile birleştirilebilen belirlenmemiş bir forma **indirgenmiş** diyeceğiz (Şekil: 7).

(b) Eğer e.b.o.b.$(a, b, c)=1$ ise $[a, b, c]$ formuna **ilkel** form denir.



Şekil:7

Uyarı: **(1)** Yalnız ilkel formları gözönüne alacağız. Eğer bir form ilkel değilse o zaman bu formun katsayılarını en büyük ortak çarpan (e.b.o.b.) ile böleriz. Sonuçta aynı yönlendirilmiş yarı çember ile ilkel bir form elde etmiş oluruz.

(2) Böylece bir ilkel form, yönlendirilmiş yarı çemberi ile tam olarak belietilebilir ve genelde yönlendirilmiş yarı çemberi ve determinantı ile belirlidir.

(3) Açıktır ki herhangi bir form, indirgenmiş bir forma denktir. Fakat bu indirgenmiş form bir tek değildir.

2.4.5. Teorem: **(1)** Denk formların determinantları aynıdır.

(2) Verilen bir determinantın sonlu sayıda indirgenmiş formu vardır ve böylece verilen bir determinantın formlarının denklik sınıfları sayısı sonludur.

İspat: Sadece **M**'nin üreteçleri altında determinantın korunduğunu görmek yeter.

$z \to z+1$ dönüşümü $az^2 + bz + c$ formunu

$a(z-1)^2 + b(z-1) + c = az^2 + (b-2a)z + (a-b+c)$ formuna resmeder. Bu formun determinantı

$\Delta' = (b-2a)^2 - 4a(a-b+c) = b^2 - 4ab + 4a^2 - 4a^2 + 4ab - 4ac = b^2 - 4ac$

dir.

Yine $z \to -\dfrac{1}{z}$ dönüşümü $az^2 + bz + c$ 'yi

$a(-\dfrac{1}{z})^2 + b(-\dfrac{1}{z}) + c = a - bz + cz^2$'ye resmeder ve $\Delta' = (-b)^2 - 4ac = b^2 - 4ac$'dir.

Bu nedenle denk formların determinantları aynıdır.

(2) $[a, b, c]$ formu indirgenmiş olsun ve bunun yarı çemberine Σ diyelim. Hemen belirtelim ki eğer ρ, - ρ^2 noktalarından en az biri Σ ile sınırlı yarı dairesel bölgenin içinde ise ya da eğer ρ veya $-\rho^2$ noktalarından birisi Σ'nın üzerinde ise $[a, b, c]$ formu indirgenmiş bir formdur.

D'de Σ'nın içindeki noktalar

$$a(a(x^2+y^2)+bx+c)<0$$

özelliğindeki $z = x+iy$ noktalarıdır. (Dıştaki a çarpanı Σ'nın üzerinde bulunmamayı sağlar.)

$$\rho=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ ve } -\rho^2=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$$

olduğundan eğer

$$a(2a\pm b+2c)<0 \quad \text{ya da } 2a-b+2c=0$$

ise $[a, b, c]$ formu indirgenmiş formdur.

Eğer $a = 0$ ise $-\frac{c}{b}$ noktasının üstündeki dikey doğru ρ, $-\rho^2$ noktalarını ayırmalıdır ya da ρ ve ya $-\rho^2$ noktalarından birisi bu doğru üzerinde olmalıdır. Bu doğru $bx + c$ doğrusudur. Böylece ya $\pm b+2c$ değerlerinin biri pozitif ve diğeri negatif ise ya da $b=\pm 2c$ ise form indirgenmiştir.

Δ verildiğinde bir indirgenmiş form için

$$4a^2 \pm 2ab + b^2 - \Delta < 0$$

v.b. olur. Buradan $3a^2+(a\pm b)^2<\Delta$ elde edilir. a, b $\in \mathbf{Z}$ olduğundan (a, b, c) çözümlerinin sayısı sınırlıdır ve böylece verilen bir determinantın sonlu sayıda indirgenmiş formu vardır. Her bir denklik sınıfı bir indirgenmiş forma sahip olduğundan verilen bir determinantın sonlu sayıda denklik sınıfı vardır.

Uyarı: (1) Şimdi bir indirgenmiş forma denk olan tüm indirgenmiş formları elde etmek için bir metot vereceğiz. $[a, b, c]$ indirgenmiş bir form ve Σ da bunun yönlendirilmiş yarı çemberi olsun. O zaman Σ, F ile kesişir.

(2) Σ yönlendirilmesi yönünde F'den ayrılır ve F'nin bir ötelemesinin içine girer. Diyelim ki $t_1 \in \mathbf{M}$ olmak üzere bu öteleme t_1(F) olsun. O zaman t_1^{-1}, Σ'yı bir diğer Σ_1 yarı çemberine resmeder.Diyelim ki bu yarı çember bir $[a_1, b_1, c_1]$ formu ile birleştirilmiş olsun. (Bu form, ilkellik ve yönlendirme ile bir tektir.)

Şimdi Σ_1, F ile kesişir. Çünkü Σ, t_1(F) ile kesişir. O halde $[a_1, b_1, c_1]$ formu indirgenmiştir.

(3) Bu yönteme, tekrar [*a*, *b*, *c*] formu elde edilinceye kadar devam edelim. Bu olmak zorundadır. Çünkü [*a*, *b*, *c*]'ye denk olan indirgenmiş formların sayısı sonludur.

[*a*, *b*, *c*]'ye denk olan tüm indirgenmiş formları, bu yöntemi kullanarak bulacağız. Bu yönteme " sürekli indirgeme metodu " (S.İ.M.) denir.

P ve Belirlenmemiş Hermitian Formlar

2.4.6. Tanım: (1) Bir Hermitian form, $az\bar{z}+bz+\overline{bz}+c$ quadratik formudur. Burada a, $c\in\mathbf{Z}$ ve $b\in\mathbf{Z}(\,i\,)$'dir. $z=x+iy, b=b_1+ib_2$ yazarsak

$$a(x^2+y^2)+2b_1x-2b_2y+c$$

elde ederiz ve bu formu (a, b_1, b_2, c) şeklinde kısaltabiliriz.

(2) Bir (a, b_1, b_2, c) Hermitian formunun determinantı

$$\mathrm{D}=b_1{}^2+b_2{}^2-ac$$

dir. Eğer D > 0 ise (a, b_1, b_2, c) formuna **belirlenmemiş** denir; eğer D < 0 ise belirlenmiş denir.

Uyarı: (1) Burada belirlenmemiş Hermitian formları gözönüne alacağız. Böyle bir form, eğer $a\neq 0$ ise (bu form sıfıra eşitlenerek) C'de $\dfrac{-b_1+ib_2}{a}$ merkezli ve $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ yarıçaplı bir çember temsil eder. Eğer a = 0 ise böyle bir form bir düz doğru ($\hat{C}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$'da çember) temsil eder.

(2) Bu çemberi, saat yönünün tersi olan yönü pozitif yön olarak alıp yönlendirebiliriz. Bu yönlendirme (a, b_1, b_2, c) ve $(-a, -b_1, -b_2, -c)$ formlarını ayırır.

$(-a, -b_1, -b_2, -c)$'ye (a, b_1, b_2, c) formunun tersi denir.

Böylece bir yönlendirilmiş çember ve D determinantı bir form tayin eder.

2.4.7. Tanım: (1) Eğer **P** grubunun bir dönüşümü, bir formu diğerine resmedecek şekilde varsa bu iki forma **denktirler** denir.

(2) Eğer e.b.o.b.$(a, b_1, b_2, c) = 1$ ise (a, b_1, b_2, c) formuna **ilkel** form denir.

(3) Eğer bir formun çemberinin H^3'de belirlediği temsilci yarım küre, **P**'nin alışılmış R temel bölgesi ile kesişiyor ise bu forma **indirgenmiş** form denir.

Uyarı: Her form, bir indirgenmiş forma denktir. Çünkü bir formun yarım-küresini, indirgenmiş bir formun yarım küresine resmeden bir $g \in \mathbf{P}$ bulabiliriz.

2.4.8. Teorem: **(i)** Denk formların determinantı aynıdır.

(ii) Verilen bir determinantın sonlu sayıda indirgenmiş formu vardır. Böylece verilen bir determinantın sonlu sayıda denklik sınıfı vardır.

İspat: **(i)** Sadece P'nin üreteçleri altında determinantın korunduğunu görmek yeter. Örneğin $t(z) = z - 1$ dönüşümü $az\bar{z} + bz + \overline{bz} + c$'yi

$$a(z+1)(\bar{z}+1) + b(z+1) + \bar{b}(\bar{z}+1) + c = az\bar{z} + (a+b)z + (a+\bar{b})\bar{z} + (a+b+\bar{b}+c)$$
$$= (a, a+b_1, b_2, a+2b_1+c)$$

formuna resmeder. Benzer şekilde (a, b_1, b_2, c) formu

s ile $(a, -b_1, -b_2, c)$'ye

t^{-1} ile $(a, -a+b_1, b_2, a-2b_1+c)$'ye

u ile $(c, -b_1, b_2, a)$'ya

v ile $(a, -b_1, a-b_2, a-2b_2+c)$'ye

resmedilir. Hepsinin determinantı $b_1^2 + b_2^2 - ac$'dir.

(ii) Bir (a, b_1, b_2, c) formu indirgenmiş olsun.

(a) Eğer $a \neq 0$ ise bu formun çemberinin belirlediği temsilci yarım küre H, R'nin $\overline{R}$ kapanışının parabolik olmayan dört köşesinden en az birini kuşatır. Bu köşeler, birim küre üzerinde

$$(-\frac{1}{2}, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

noktalarının üstündedirler. Bu köşelerde yarım kürenin formu $a \pm b_1 + c, a \pm b_1 - b_2 + c$ değerlerini alır. Böylece eğer (a, b_1, b_2, c) formu indirgenmiş ise $a^2 \pm ab_1 + ac$ ve $a^2 \pm ab_1 + -ab_2 + ac$'den en az biri negatiftir. (Dıştaki a çarpanı H'ya dahil olmamayı sağlar.)

O halde D verildiğinde $a \neq 0$ için

$a^2 \pm ab_1 + b_1^2 + b_2^2 < D$ ya da

$a^2 \pm ab_1 - ab_2 + b_1^2 + b_2^2 < D$

olur. Buradan

$(2a \pm b_1)^2 + 3b_1^2 + 4b_2^2 < 4D$ ya da

$$(2a-b_2\pm b_1)^2+(b_1\pm b_2)^2+2b_1^{\,2}+2b_2^{\,2}<4D$$

yazabiliriz. a, b_1, $b_2 \in \mathbf{Z}$ olduğundan yine sonlu sayıda çözüm elde ederiz.

(b) Eğer a = 0 ise o zaman doğru üzerindeki düşey düzlem, $\overline{R}$'nin parabolik olmayan dört köşesini ayırır. Bu köşelerde bu doğrunun formu $\pm b_1+c, \pm b_1-b_2+c$ değerlerini alır. Böylece $\pm b_1+c$ ve $\pm b_1-b_2+c$ 'den en az biri pozitif ve en az biri negatif olmalıdır. Benzer şekilde yine sonlu sayıda çözüm elde edilir.

(c) R'nin, $(-\frac{1}{2},0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ve ya $(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ noktaları üzerindeki köşelerinden en az biri H'nın üzerinde olabilir. O zaman eğer a = 0 ise $\pm b_1+c=0$ ya da $\pm b_1-b_2+c=0$ olur. Eğer $a\neq 0$ ise $a^2\pm ab_1+ac=0$ ya da $a^2\pm ab_1-ab_2+ac=0$ olur. Bu durumda da verilen determinant için sonlu sayıda çözüm vardır.

Böylece verilen bir determinantın indirgenmiş formlarının sayısı sonludur ve bu nedenle verilen bir determinantın denklik sınıflarının sayısı sonludur.

2.4.9. Tanım: (1, 0, 0, -D) formuna, D > 0 determinantının **temel** formu denir.

Her temel form indirgenmiştir ve 0 merkezli $\sqrt{D}$ yarıçaplı bir çemberdir.

2.4.10. Tanım: Bir C = (a, b_1, b_2, c) formunun $\phi(a, b_1, b_2, c)$ **form grubu** (ya da sadece grubu), **P**'de C'yi sabit bırakan tüm dönüşümlerin oluşturduğu alt gruptur.

Burada C çemberi sabit bırakılmıştır ve içi kendi üzerine resmedilmiştir. Böylece bir formun grubu, **P**'nin bir maksimal Fuchsian alt grubudur. **P**'nin maksimal Fuchsian alt gruplarının denklik sınıfları, ilkel formların denklik sınıfları ile 1-1, örten eşlenmiştir.

2.4.11. Teorem: ϕ(C), bir C formunun grubu olsun. $g_i \in \mathbf{P}$; i = 1, ... ,n olmak üzere, C'ye denk olan tüm indirgenmiş formlar $C_i = g_i(C)$'ler olsun. C_i'nin belirlediği temsilci yarım küreye H_i diyelim.

O zaman ϕ(C) için F_ϕ temel bölgesi,

$S=\bigcup g_i^{-1}(H_i\cap R)$'nin

düzlem üzerine stereografik izdüşümüdür.(Genelliği bozmaksızın C'yi bir çember varsayabiliriz.).Yani F_ϕ = Proj(S)'dir.

İspat: İlk olarak belirtelim ki farklı yarım kürelerin her biri için, bununla birleştirilmiş iki indirgenmiş form vardır: Biri formun kendisi ve diğeri de tersidir.

(i) Bir $\tilde{x} \in \text{int(C)}$ noktası alalım. C'nin belirlediği temsilci yarım kürede buna karşılık gelen nokta $x \in H_C$ olsun. O zaman $\exists g \in \mathbf{P}$ öyle ki $\bar{x} = g(x) \in$ R'dir. Oluşturuluşu nedeniyle, H_C'nin R ile kesişen tüm resimleri H_i'lerdir. Böylece bir i için $\bar{x} \in H_i$'dir.

O halde $g_i^{-1}(\bar{x}) = g_i^{-1}g(x) \in S$ ve $g_i^{-1}g(H_C) = H_C$'dir. Bunu sağlayacak şekilde iki tane g_i dönüşümü vardır fakat yalnızca bir tanesi C'nin yönünü ve böylece C'nin içini de korur. Yani $g_i^{-1}g \in \phi(C)$'dir.

H_C'nin böyle her noktası $\phi(C)$ ile S'nin bir noktasına denktir. Bu nedenle de int(C)'nin her noktası S'nin izdüşümünün bir noktasına denktir.

(ii) $\tilde{x}, \tilde{y} \in \text{int(C)}$ noktalarını, bu noktalara karşılık gelen $x, y \in H_C$ noktaları S'de bulunacak şekilde seçelim. $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ böylece $x \neq y$ olsun. x, y noktaları **P** altında R'deki $\bar{x} = g_i(x), \bar{y} = g_j(y)$ noktalarına denk olsunlar.

Eğer $\bar{x} \neq \bar{y}$ ise x, y noktaları **P**'de denk değildir. Çünkü $g(x) = y$ olacak şekilde bir $g \in \mathbf{P}$ dönüşümü mevcut olsa idi $x = g^{-1}(y)$ ve $\bar{x} = g_i g^{-1}(y) = g_i g^{-1} g_j^{-1}(\bar{y})$ olurdu. Bu ise, $g_i g^{-1} g_j^{-1} \in \mathbf{P}$ olduğundan $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ noktalarının **P** altında denk olması demektir. $\bar{x}, \bar{y} \in$ R olduğundan bu mümkün değildir. Böylece $g_i \neq g_j$ olmak üzere $\bar{x} = \bar{y}$ olduğu görülmüş olur.

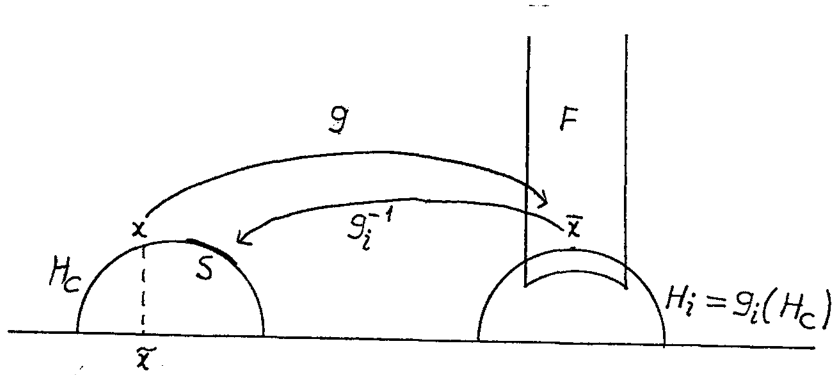
Varsayalım ki bir $\phi \in \phi(C)$ için $\phi(x) = y$ olsun. O zaman $g_i(x) = g_j \phi(x)$ ve $\phi(x) = g_j^{-1} g_i(x)$ olur. g_i(C) ve g_j(C) farklı indirgenmiş formlardır. $g_j^{-1} g_i$ (C) $\neq$ C ve böylece ϕ (C) $\neq$ C olur. Bu da $\phi \in \phi(C)$ oluşu ile çelişkidir.

O halde S'nin $\phi(C)$ altında denk iki noktası yoktur.

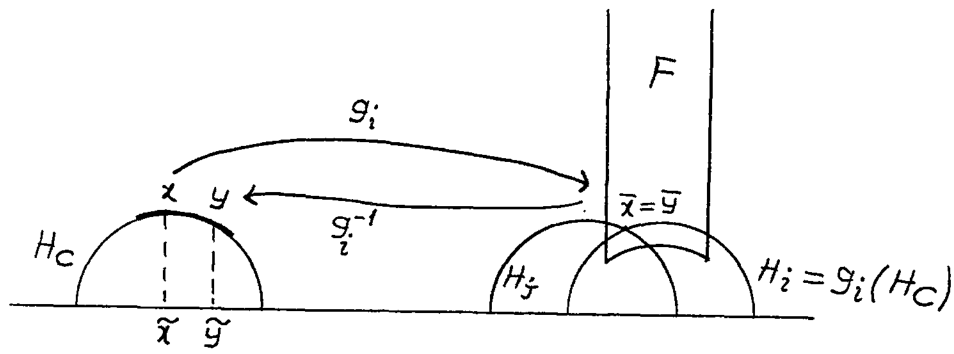
(i) ve (ii)'den F_ϕ = Proj(S) elde edilir.

Uyarı: (1) Modüler grup için aynı durum aşağıdaki şekillerde görülmektedir:

(i)



(ii)



(2) **(ii)**'de H_i, H_j'ye eşit olabilir fakat o zaman bunlar ters yönlendirilmiş aynı çember üzerinde bulunacaklardır. Bu durumda $g_j^{-1}g_i$, int(C)'yi ext(C)'ye resmedecektir ve $g_j^{-1}g_i \notin \phi(C)$'dir.

Yukarıdaki bu yapı S.İ.M.'dir ve R'yi ayırmanın açık bir yolu olmadığından R'yi H_i ile kesişen kenarlar boyunca ayırırız.

(3) Eğer bir H_i, R'ye sadece bir köşesinde değiyorsa o zaman bu, S'ye sadece bir nokta katacaktır. O halde bu yarım küreler ve bunların formlarını çalışmak çok önemsizdir ve gözönüne almayabiliriz.

2.4.12. Teorem: $\phi(C)$ sonlu üreteçlidir.

İspat: 2.4.11 gereğince F_ϕ , sonlu kenarlı poligonların sonlu bir birleşimidir. Böylece F_ϕ sonlu kenarlıdır. Aynı zamanda eğer g_i S.İ.M ile seçilmiş ise F_ϕ bağlantılı ve konvekstir. O halde $\phi(C)$ sonlu üreteçlidir.

Uyarı: Uygulamada, Teorem: 2.4.11'deki metotla $\phi(C)$'nin temel bölgesini bulmak oldukça zordur. Şimdi $\phi(C)$'nin temel bölgesini bulmak için çok daha basit bir yöntem vereceğiz. Bu metotla Ford bölgesini bulacağız (Hutchinson 1907).

Şimdi C: $\alpha z\bar{z}+\gamma z+\bar{\gamma}\bar{z}+\beta$ formunu gözönüne alalım. Yani

C = $(\alpha, \mathrm{Re}\gamma, \mathrm{Im}\gamma, \beta)$ formu, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ve $\gamma \in \mathbb{Z}(i)$ olmak üzere

$\delta = \gamma\bar{\gamma} - \alpha\beta > 0$ determinantı ile verilmiş olsun.

$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \phi(C)$ alalım. Bu dönüşümün C formunu kendi üzerine resmetmesi için gerekli olan koşullar

$$\left.\begin{aligned} \alpha\,(d\bar{d}-1)-\gamma\, d\bar{c}-\bar{\gamma}\,\bar{d}c+\beta\, c\bar{c}=0 \\ -\alpha\, d\bar{b}+\gamma\, d\bar{a}+\bar{\gamma}\, c\bar{b}-\beta\, c\bar{a}=\gamma \\ \alpha\, b\bar{b}-\gamma\, b\bar{a}-\bar{\gamma}a\bar{b}+\beta\,(a\bar{a}-1)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

dir. C formu aynı zamanda h^{-1} dönüşümü ile de kendi üzerine resmedilmiş olduğundan

$$\left.\begin{aligned} \alpha\,(a\bar{a}-1)+\gamma\, a\bar{c}+\bar{\gamma}\,\overline{ac}+\beta\, c\bar{c}=0 \\ \alpha\, a\bar{b}+\gamma\, a\bar{d}+\bar{\gamma}\, c\bar{b}+\beta\, c\bar{d}=\gamma \\ \alpha\, b\bar{b}+\gamma\, b\bar{d}+\bar{\gamma}\,\overline{bd}+\beta\,(d\bar{d}-1)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

koşulları da gereklidir. O halde (7) ve (8)'den a, b, d katsayıları λ ve c'ye göre

$$a=\frac{\lambda+\bar{\gamma}\, c}{-\alpha},\ d=\frac{\bar{\gamma}\ c-\bar{\lambda}}{\alpha},\ b=\frac{\bar{\gamma}\,(\bar{\lambda}-\bar{\gamma}\ c)+\delta\ \bar{c}-\lambda\bar{\gamma}}{\alpha^{2}}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\lambda=\gamma\ \bar{c}-\alpha\ \bar{d}$ değeri $\lambda\,\bar{\lambda}=\alpha^{2}+\delta\ c\bar{c}$ eşitliğini sağlar. Bu eşitlik $ad - bc = 1$ koşuludur. Eşmetri çemberleri C çemberine diktirler.

İlk olarak ∞'un kalımlaştırıcısı olan $\phi_\infty(C)$ alt grubu için bir temel bölge alalım. Bu alt grubun tüm elemanları için $c = 0$'dır. Sonra en büyük eşmetri çemberlerini belirlemeye başlayalım yani $|c|$ en küçük olsun ve bir kenarı reel eksen olan kapalı bir bölge elde edinceye kadar devam edelim. (Grup sonlu üreteçli olduğundan bölge kapanacaktır.)

Örnek: C = (1, 0, 0, - 5) formunu gözönüne alalım. $\phi(C)$'nin elemanları

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 5\bar{c} \\ c & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

şeklinde dönüşümlerdir. Eşmetri çemberleri, $\frac{1}{|c|}$ yarıçaplı ve $\frac{\bar{\lambda}}{c}$ merkezli çemberlerdir.

$h\in\phi(C)$ dönüşümü I(h) eşmetri çemberini, h^{-1}'in eşmetri çemberi $I(h^{-1})$'e resmeder. $I(h^{-1})$, $-\frac{\lambda}{c}$ merkezli ve $\frac{1}{|c|}$ yarıçaplı bir çemberdir.

$c = 0$ için, $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}$; $\lambda\bar{\lambda}=1$ şeklinde dönüşümler elde edilir. $\lambda\bar{\lambda}=1$ ise $\lambda=\pm 1$ ya da $\lambda=\pm i$'dir. Böylece $\phi_\infty(C)$ alt grubunun dönüşümleri $i(z)=z$ ve $s(z)=-z$ dönüşümleridir. s dönüşümü orijin etrafında π açısı kadarlık bir dönmedir. Böylece

$\phi_\infty(C) = < i, s >$ elde edilir. Bu da mertebesi iki olan devirli bir grup olduğundan $\phi_\infty(C)$ için bir temel bölge üst yarı düzlemdir.

Şimdi en büyük eşmetri çemberlerini belirlemeye çalışalım. $|c| > 0$ için $\lambda\bar{\lambda}$'in minimum değerini bulmaya çalışalım.

$|\lambda|^2 = 1+5|c|^2$ olduğundan $|c|^2 = 1,\ 2,\ 3$ ve 4 için $|\lambda|^2$ iki karenin toplamı değildir. $|c|^2 = 5$ için $|\lambda|^2 = 26$ olur. Böylece

$c = \pm 1 \pm 2i$ ya da $c = \pm 2 \pm i$ ve

$\lambda = \pm 1 \pm 5i$ ya da $\lambda = \pm 5 \pm i$ olur.

c, - c ile özdeşlenmiş olduğundan (**PSL(2, Z(i)**'de çalışıyoruz) sadece $c = 1 \pm 2i$ ya da $c = 2 \pm i$'yi gözönüne almak yeter.

$c = 1+2i, \lambda = 1-5i$ alalım. O zaman bu dönüşümün eşmetri çemberi

$$\frac{\bar{\lambda}}{c} = \frac{1+5i}{1+2i} = \frac{1}{5}(1+5i)(1-2i) = \frac{1}{5}(11+3i) \in \mathbf{D}$$

merkezli ve $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ yarıçaplı çemberdir. Bu eşmetri çemberi, ters dönüşümün eşmetri çemberi ile eşlenmiştir. Bu çember

$$t_1 = \begin{pmatrix} -1+5i & 5-10i \\ 1+2i & -1-5i \end{pmatrix}$$

dönüşümünün eşmetri çemberidir. I(t_1^{-1}) eşmetri çemberi ise

$$-\frac{\lambda}{c} = -\frac{1-5i}{1+2i} = -\frac{(1-5i)(1-2i)}{5} = \frac{1}{5}(9+7i) \in \mathbf{D}$$

merkezli ve $r = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ yarıçaplı çemberdir.

Böylece her iki eşmetri çemberi de **D**'dedir. Bunlar temel bölgenin sınırının bir parçasını oluştururlar. c ve λ 'nın diğer olasılıklarını gözönüne alalım ve bu şekilde elde ettiğimiz çemberleri **1** ile numaralandıralım. Elde ettiğimiz bölge kapalı değildir. O halde $|c|^2, |\lambda|^2$ çiftinin daha sonraki olasılığını gözönüne alalım. Yani $|c|^2 = 8$ ve $|\lambda|^2 = 41$'dir. Buradan $c = 2 \pm 2i$ ve $\lambda = \pm 4 \pm 5i$ ya da $\lambda = \pm 5 \pm 4i$ elde edilir. Buradan elde ettiğimiz çemberleri de **2** ile numaralandıralım. Şimdi bölge reel eksen üzerinde kapalı olur. Üst yarı düzlemdeki diğer tüm eşmetri çemberleri, burada belirlediğimiz çemberlerin içinde bulunur.

$\phi_\infty(C)$'un temel bölgesi ile eşmetri çemberlerinin dışında kalan bölgenin arakesiti iki bölgeden oluşur. Birinci parça C çemberinin içinde kalan kısımdır ve diğer parça dıştaki kısımdır. Bu iki parçanın birleşimine N diyelim. N, $\phi(C)$ için bir temel bölgedir. Yansımalarla genişletilmiş grup için sadece N'nin, C'nin içinde kalan kısmını almak yeterlidir. Çünkü, dıştaki kısım iç kısmın C'ye göre yansımasıdır (Şekil: 8).

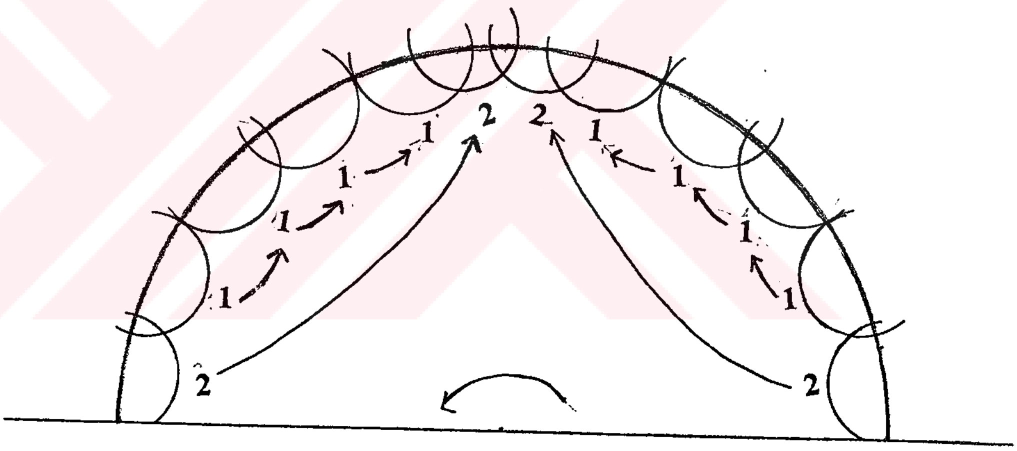
Temel bölgenin kenarlarını eşleyen dönüşümler

$$t_1=\begin{pmatrix}-1+5i & 5-10i\\ 1+2i & -1-5i\end{pmatrix}, t_2=\begin{pmatrix}-1+5i & 5+10i\\ 1-2i & -1-5i\end{pmatrix}, t_3=\begin{pmatrix}-1+5i & 10-5i\\ 2+i & -1-5i\end{pmatrix}$$

$$t_4=\begin{pmatrix}-1+5i & 10+5i\\ 2-i & -1-5i\end{pmatrix}, t_5=\begin{pmatrix}-4+5i & 10-10i\\ 2+2i & -1-5i\end{pmatrix}, t_6=\begin{pmatrix}-4+5i & 10+10i\\ 2-2i & -4-5i\end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$s=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} \text{dönüşümleridir.}$$

Bu dönüşümler $\phi(C)$ grubunu üretirler.



Şekil: 8

Konjugelik Sınıfları

Teorem:2.4.8' in ispatında, (a, b_1, b_2, c) formunun

s dönüşümü ile $(a,-b_1,-b_2,c)$'ye

t dönüşümü ile $(a,a+b_1,b_2,a+2b_1+c)$

t^{-1} dönüşümü ile $(a,-a+b_1,b_2,a-2b_1+c)$'ye

u dönüşümü ile $(c,-b_1,b_2,a)$'ya

v dönüşümü ile $(a,-b_1,a-b_2,a-2b_2+c)$'ye

resmedildiğini gördük. Böylece eğer bir g∈P dönüşümü için

$$g(a, b_1, b_2, c) = (a', b_1', b_2', c')$$

ise şu durum ortaya çıkar:

(i) Eğer a ile c'nin en az biri tek ise bu durumda a' ve c''den en az biri tektir.

(ii) Eğer a ile c'nin her ikisi de çift ise o zaman

$$a' \equiv c' \equiv 0 \pmod 2$$
$$b_1' \equiv b_1 \pmod 2$$
$$b_2' \equiv b_2 \pmod 2$$

dir.

Buna göre eğer (a,b_1,b_2,c) ve (a',b_1',b_2',c') formlarının ikisi de ilkel ve determinantları aynı ise ve **(i)** ya da **(ii)** koşulunu sağlıyorlarsa o zaman bu formlar denktirler. Böylece verilen bir D determinantı için ilkel formların (en çok) dört denklik sınıfı vardır. Bunlar aşağıdaki tiplerdir:

I: (tek ya da çift, tek ya da çift, tek ya da çift, tek ya da çift)

Bu halde a ile c aynı anda çift olamaz.

II: (çift, tek, tek, çift)

III: (çift, tek, çift, çift)

IV: (çift, çift, tek, çift)

Tüm D determinantları için **I.** tipten bir sınıf daima mevcuttur. Çünkü, herhangi bir determinantın (1, 0, 0, - D) temel formu **I.** tipten bir formdur. ($a = 1$ olup tek sayıdır.)

2.4.13. Teorem: Bir D determinantı verilsin.

Eğer $D \equiv 0 \pmod 4$ ise o zaman ilkel formların sadece bir denklik sınıfı vardır ve **I.** tiptendir.

Eğer $D \equiv 1 \pmod 4$ ise **I.**, **III.** ve **IV.** tipten üç sınıf vardır.

Eğer $D \equiv 2 \pmod 4$ ise **I.** ve **II.** tipten iki sınıf vardır.

Eğer $D \equiv 3 \pmod 4$ ise **I.** tipten sadece bir sınıf vardır.

İspat: Tüm D determinantları için bir temel form var olduğundan **I.** tipten bir sınıf daima mevcuttur. O halde a ve c'nin her ikisinin de çift olduğunu varsayalım ve $D \equiv b_1^2 + b_2^2 \pmod 4$ determinantını gözönüne alalım.

$D \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 \equiv 0 \pmod 4$

$\Rightarrow b_1$ ve b_2'nin her ikisi de çift

$\Rightarrow$ Form ilkel değildir.

$\Rightarrow$ Sadece **I**. tipten bir sınıf vardır.

$D \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow b_1$ tek iken b_2 çift ya da tersi

$\Rightarrow$ **III**. ve **IV**. tipler mevcuttur.

Bu durumda **I**. , **III**. ve **IV**. tipten üç sınıf vardır.

$D \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow b_1$ ve b_2'nin ikisi de tek

$\Rightarrow$ **II**. tip mevcuttur.

Bu durumda da **I**. ve **II**. tipten iki sınıf vardır.

$D \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 \equiv 3 \pmod 4$ için bir çözüm yoktur. Sadece **I**. tipten bir sınıf vardır.

Şimdi $\phi(a,b_1,b_2,c)$'nin, derecesi 2, 3 ve ∞ olan elemanlara (yani 2. ve 3. dereceden eliptik ve parabolik) sahip olabilmesi için gerekli olan koşulları bulalım. Önce bir düzeltme ile Fine (1976)'dan aşağıdaki teoremi elde ederiz. Fine 2. dereceden eliptik elemanların beş sınıfını bulmuştur, halbuki bunlar dört sınıfa indirgenebilir.

2.4.14. Teorem: **P**'de eliptik elemanların, 2. dereceden dört ve 3. dereceden iki olmak üzere sadece altı denklik sınıfı vardır. Özellikle 2. dereceden herhangi bir eliptik dönüşüm $z \to -z$, $z \to -z+i$, $z \to -z+1$, $z \to -z+(1+i)$ dönüşümlerinden birine konjugedir. 3. dereceden herhangi bir eliptik dönüşüm $z \to -\frac{1}{z+1}$ ya da $z \to \frac{1}{z+i}$ dönüşümlerinden birine konjugedir.

Aynı zamanda **P**'nin bir parabolik elemanı, bir

$z \to z+t,\ t \in \mathbf{Z}(\mathrm{i}) \backslash \{0\}$

ötelemesine konjugedir.

İspat: Teorem: 2.3.4'de **P** = $G_1 *_M G_2$ olduğunu görmüştük. **P**'nin **(6)**'daki temsilini dikkate alalım.

$G_1 \cong \{x,u,y;\ x^3 = u^2 = (xu)^2 = 1, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1\}$ ve

$G_2 \cong \{u,y,r;\ u^2 = r^2 = (ru)^2 = 1, u^2 = y^3 = (ry)^2 = 1\}$'dir.

Şimdi, genelleştirilmiş bir $*(G_1, G_2; H)$ serbest çarpımında sonlu dereceli herhangi bir eleman, çarpanların birinde bulunan sonlu dereceli bir elemana konjugedir (Magnus ve ark. 1976). Bu nedenle P'de eliptik elemanların konjugelik sınıflarını bulmak için G_1 ve G_2'de sonlu dereceli elemanların konjugelik sınıflarını bulmalıyız. Şimdi $x = x$ birleştirme işlemi ile

$$G_1 \cong \{x,u,y;\, x^3 = u^2 = (xu)^2 = 1, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1\}$$

$$\cong \{x,u;\, x^3 = u^2 = (xu)^2 = 1\} * \{x,y;\, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1\}$$

olur. Benzer düşünce ile G_1'de konjugelik sınıflarını bulmak için G_1'in çarpanlarında konjugelik sınıflarını bulmalıyız. $\{x,u;\, x^3 = u^2 = (xu)^2 = 1\} \cong \Sigma_3$ çarpanında 2. dereceden elemanların iki konjugelik sınıfı vardır ve temsilcileri u ile xu'dur. 3. dereceden elemanların bir sınıfı vardır ve temsilcisi x'dir.

$\{x,y;\, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1\} \cong A_4$'de 2. dereceden elemanların xy temsilcisi ile bir konjugelik sınıfı ve 3. dereceden elemanların x, y temsilcileri ile iki konjugelik sınıfı vardır. Bu nedenle G_1'de 2. dereceden elemanların u, xu, xy temsilcileri ile üç konjugelik sınıfı vardır ve 3. dereceden elemanların x, y temsilcileri ile iki konjugelik sınıfı vardır.

Benzer bir inceleme ile G_2'de 2. dereceden elemanların u, r, ru, ry temsilcileri ile dört konjugelik sınıfı ve 3. dereceden elemanların y temsilcisi ile bir konjugelik sınıfı vardır.

Böylece P'de eliptik dönüşümler için tam olarak aşağıdaki temsilcileri elde ettik: 2. dereceden olanlar u, xu, xy, r, ru, ry ve 3. dereceden olanlar x, y'dir.

3. dereceden olan x ve y dönüşümleri $x(z) = \dfrac{i}{iz+1}$ ve $y(z) = \dfrac{z+1}{-z}$ olup bunlar yerine işlem kolaylığı için konjugeleri olan $z \to -\dfrac{1}{z+1}$ ve $z \to \dfrac{1}{z+i}$ dönüşümlerini alıyoruz.

2. dereceden olanlar için

$$u(z) = \frac{-1}{z}, r(z) = \frac{i}{iz}, ru(z) = -z, ry(z) = \frac{-z}{z+1}, xu(z) = \frac{iz}{z-i}, xy(z) = \frac{-i}{(i-1)z+i}$$

dir. xu ve ry dönüşümleri $z \to -z+1$ dönüşümüne konjugedirler. u, $z \to -z+i$'ye konjugedir. r, ru'ya konjugedir. Son olarak xy, $z \to -z+(1+i)$ dönüşümüne konjugedir.

Böylece tam olarak P'de 2. dereceden eliptik elemanların dört konjugelik sınıfı vardır ve temsilcileri $z \to -z, z \to -z+i, z \to -z+1, z \to -z+(1+i)$ dönüşümleridir.

Son olarak $h \in \mathbf{P}$ herhangi bir parabolik dönüşüm olsun. Bunun sabit noktasına z_0 diyelim. Bir $k \in \mathbf{P}$ dönüşümünü $k(z_0) = \infty$ olacak şekilde bulabiliriz. O halde $khk^{-1}(\infty) = \infty$ olur. Buna göre bir $t \in \mathbf{Z}(\,i\,)\backslash\{0\}$ için $khk^{-1}(z) = z+t$ 'dir.

2.4.15. Teorem: C bir ilkel form olsun. Bunun form grubu $\phi(C)$, aşağıdaki elemanları bulundurur:

(a) Eğer C,

(i) $(a, 0, 0, c) \sim$ temel form

(ii) $(a, 0, \frac{1}{2}a, c)$ a çift

(iii) $(a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$ a çift

(iv) $(a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, c)$ a çift

formlarının herhangi birine denk ise 2. dereceden eliptik elemanlar bulundurur.

(b) Eğer C,

(i) $(a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$ a çift

(ii) $(a, b_1, -\frac{1}{2}a, a)$ a çift

formlarının herhangi birine denk ise 3. dereceden eliptik elemanlar bulundurur.

(c) Eğer C'nin determinantı D = dD_0^2 şeklinde ise parabolik elemanlar bulundurur. Burada d, kare olmayan bir sayıdır ve $p \equiv 3 \pmod 4$ asal çarpanına sahip değildir.

İspat: $z \to -z$ dönüşümü C'yi

$$a(-z)(-\bar{z}) + b(-z) + \bar{b}(-\bar{z}) + c = az\bar{z} - bz - \overline{bz} + c$$

formuna resmeder. Eğer b = -b yani b = 0 ise bu resim formu C'nin kendisidir. Böylece C, **I.** tiptendir.

$z \to -z+i$ dönüşümü C'yi

$$a(-z+i)(-\bar{z}-i) + b(-z+i) + \bar{b}(-\bar{z}-i) + c = az\bar{z} + (ia-b)z + (-ia-\bar{b})\bar{z} + (a+ib-i\bar{b}+c)$$

formuna resmeder. Bu durumda $b = ia - b$ ve buradan $2b_2 = a$, $b_1 = 0$ elde edilir. Böylece bir a (çift), c için $(a, 0, \frac{1}{2}a, c)$'ye denk bir formun grubu en az bir tane $z \to -z+i$'ye konjuge olan 2. dereceden eleman bulunduracaktır. Bu form, c'nin tek ya da çift olmasına göre **I.** ya da **IV.** tipten olacaktır.

Benzer şekilde, bir a (çift), c için $(a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$'ye denk bir formun grubu , $z \to -z+1$'e konjuge olan en az bir eleman bulunduracaktır. Bu form, **I.** ya da **III.** tipten olacaktır.

Yine bir a (çift), c için $(a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, c)$'ye denk olan bir formun grubu, $z \to -z+(1+i)$'ye konjuge olan en az bir eleman bulunduracaktır. Bu form **I.** ya da **II.** tipten olacaktır.

$z \to \frac{-1}{z+1}$ dönüşümü C'yi

$$a\left(\frac{-1-z}{z}\right)\left(\frac{-1-\bar{z}}{\bar{z}}\right)+b\left(\frac{-1-z}{z}\right)+\bar{b}\left(\frac{-1-\bar{z}}{\bar{z}}\right)+c = a(1+z)(1+\bar{z})-b(1+z)\bar{z}-\bar{b}(1+\bar{z})z+cz\bar{z}$$

$$= (a-b-\bar{b}+c)z\bar{z}+(a-\bar{b})z+(a-b)\bar{z}+a$$

formuna resmeder. Bu resim formunun C'nin kendisine eşit olabilmesi için $a = c$ ve $b = a\text{-}\bar{b}$ olmalıdır. Buradan $a = c$ ve $2b_1 = a$ elde edilir. Böylece bir a (çift), b için $(a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$'ya denk bir formun grubu, $z \to \frac{-1}{z+1}$'e konjuge olan 3. dereceden en az bir eleman bulunduracaktır.

Benzer şekilde bir a (çift), b için $(a, b_1, -\frac{1}{2}a, a)$'ya denk bir formun grubu, $z \to \frac{1}{z+i}$'ye konjuge olan 3. dereceden en az bir eleman bulunduracaktır.

Eğer C'nin denklemi, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{t_2}{t_1}$ olmak üzere $2b_1x - 2b_2y + c = 0$ şeklinde ise, $z \to z+t$, $t \in \mathbb{Z}(\,i\,)\backslash\{0\}$ dönüşümü C'nin grubunda bulunacaktır. Burada $t = t_1 + it_2$ ($t_j \in \mathbb{Z}$) ve eğer $t_1 = 0$ ise $b_2 = 0$'dır. Bu şekildeki bir C formu için bir t daima bulunabilir. Çünkü bu C formu için D = $b_1^2 + b_2^2$'dir ve $t = b_2 + ib_1$ alınır. D = $b_1^2 + b_2^2$'den b_1 ve

b_2'yi bulabilmek için, eğer D'nin kare olmayan kısmı p ≡ 3 (mod 4) çarpanına sahip değilse bir çözüm elde ederiz. Yani eğer $D = dD_0^2$, d kare değil ise d'nin p ≡ 3 (mod 4) şeklinde bir p asal çarpanı yoktur (Lehner 1964).

Eğer D bir çözüme sahip ise D determinantının her ilkel sınıfı bir düz doğruya sahiptir ve böylece bu şekildeki her sınıfın bir formunun grubu parabolik elemanlar bulundurur.

Örnek: D = 18 için $b_1 = b_2 = 3$ şeklinde bir çözüm vardır fakat D = 12 için bir çözüm yoktur.

2.4.16. Sonuç: Herhangi bir ilkel formun grubu 2. dereceden eliptik elemanlar bulundurur.

İspat: Her D için **I.** tipten bir sınıf vardır. Bu nedenle yukarıdaki teoremin **(a)(i)** kısmı gereğince **I.** tipten formların bütün grupları 2. dereceden eliptik elemanlar bulundurur.

D ≡ 0, 3 (mod 4) için sadece **I.** tipten bir sınıfın mevcut olduğunu biliyoruz. D ≡ 1 (mod 4) için eğer form **III.** ya da **IV.** tipten ise **(a)(ii)** ya da **(iii)**'de $a = 2, c = \frac{1-D}{2}$ alınır. D ≡ 2, (mod 4) için eğer form **II.** tipten ise **(a)(iv)**'de $a = 2, c = 1 - \frac{D}{2}$ alınır.

2.4.17. Sonuç: Bir temel formun grubu 3. dereceden eliptik elemanlar bulundurmaz.

İspat: 2.4.15' in **(b)** kısmı gereğince eğer grup 3. dereceden eliptik elemanlar bulunduruyor ise bu form I. tipten olamaz.

Örnek: $\phi(2, 0, 1, -6)$ grubunu gözönüne alalım.

D = 13'dür ve $13 = 13(1)^2$ yazabiliriz. 13 ≡ 1 (mod 4) olduğundan bu grup parabolik elemanlar bulunduracaktır. Teorem: 2.4.15**(a)(ii)** gereğince bu grup **P**'de $z \to -z + i$'ye konjuge olan 2. dereceden eliptik elemanlar bulunduracaktır.

(2, 4, - 1, 2) formu **IV**.tiptendir ve D = 13'tür. Bu form, (2, 0, 1, - 6) formu ile aynı tiptendir. Böylece (2, 0, 1, - 6) ~ (2, 4, - 1, 2) 'dir. Teorem: 2.4.15**(b)(ii)** gereğince bu grup **P**'de $z \to \frac{1}{z+i}$'ye konjuge olan 3. dereceden eliptik elemanlar bulundurur.

3. PICARD GRUBUNUN NORMAL FUCHSIAN ALT GRUPLARI ve TEMEL DENKLİK ALT GRUPLARI

Bu bölümde önce Picard grubunun normal Fuchsian alt gruplarını belirlemek için bazı sonuçlar ve ardından bu alt grupları karakterize eden bir teorem verilmiştir.Picard grubunun temel denklik alt grupları tanımlanarak , bu alt grupların yapısını belirleyen teoremler ifade edilmiştir. Temel denklik alt grupları ile **HNN** gruplar arasında sıkı bir bağıntı mevcuttur ve bu konu geniş olarak ele alındığında bir başka tez oluşturacak kadar kapsamlıdır. Bu nedenle burada sadece tanımlar verilerek, teoremler ispatsız olarak alınmıştır.

3.1. Picard Grubunun Normal Fuchsian Alt Grupları

Bu bölümde **P** nin (5)' deki temsilini kullanacağız. **P**, **C** 'de hiç bir yerde süreksiz olmadığından sonlu indeksli normal Fuchsian alt grupları yoktur (Lehner 1964). Waldinger (1965), $|\mathbf{P}: P_N(C_i)|$ sonlu olacak şekildeki C_i çemberlerinin altı sınıfının varlığını göstermiştir. Fine (1976) **P**'de eliptik ve parabolik elemanların konjugelik sınıflarını kullanarak bu sonuçları genişletmiştir. Yalnız Fine, 2.4. kesimde belirttiğimiz gibi **P**'deki eliptik elemanların konjugelik sınıflarını bir fazlasıyla bulmuştur. Biz bu bölümde Teorem: 2.4.14'ü gözönüne alarak Fine (1976)'daki sonuçları inceleyeceğiz.

3.1.1. Teorem: G, **P**'nin normal bir alt grubu olsun. Eğer G, bir eliptik eleman bulunduruyorsa $|\mathbf{P}: G|$ indeksi sonludur.

İspat: $k \in G$ ve k eliptik bir eleman olsun. G, **P**'de normal olduğundan $G \supseteq \Delta(k)$ ve $|\mathbf{P}: G| \leq |\mathbf{P}: \Delta(k)|$'dır. (Burada $\Delta(k)$, k ile üretilen alt grubun normal kapanışıdır.) Şimdi tüm eliptik k dönüşümleri için $|\mathbf{P}: \Delta(k)| < \infty$ olduğunu göreceğiz.

k'nın tüm k_* konjugeleri için $|\mathbf{P}: \Delta(k)| = |\mathbf{P}: \Delta(k_*)|$'dır. Bu nedenle sadece konjugelik sınıflarının temsilcileri için $\Delta(k_*)$'ın sonlu indeksli olduğunu görmek yeter. Bunun için bölüm gruplarının sonlu mertebeli olduğunu görmeliyiz. Bölüm gruplarının temsilini elde etmek için, konjugelik sınflarının **P**'nin temsilindeki temsilcilerini 1'e eşit olarak alacağız.

$$\mathbf{P} = < u, s, t^{-1}, l : u^2 = s^2 = (us)^2 = (t^{-1}s)^2 = (ls)^2 = (ut^{-1})^3 = (lus)^3 = [t^1, l] = 1 >$$

temsilini gözönüne alalım. Teorem: 2.4.14 gereğince herhangi bir eliptik dönüşüm $s, t^{-1}s, ls, lt^{-1}s, ut^{-1}$ ya da lus dönüşümlerinden birine konjugedir. Böylece

(1) $\mathrm{P}/\Delta(s) \cong \{u, t^{-1}, l : u^2 = (t^{-1})^2 = l^2 = (t^{-1}l)^2 = (ut^{-1})^3 = (lu)^3 = 1\}$

olup mertebesi 24'dür (Waldinger 1965).

(2) $\mathrm{P}/\Delta(t^{-1}s) \cong \{s : s^2 = 1\} \cong \mathbf{Z}_2$ olup mertebesi 2'dir.

(3) $\mathrm{P}/\Delta(ls) \cong \{u, t^{-1}, s : u^2 = s^2 = (us)^2 = u^3 = (ut^{-1})^3 = (t^{-1}s)^2 = 1, t^{-1}s = st^{-1}\}$

$\cong \{s : s^2 = 1\} \cong \mathbf{Z}_2$

olup mertebesi 2'dir.

(4) $\mathrm{P}/\Delta(lt^{-1}s) \cong \{u, t^{-1}, l : u^2 = (t^{-1})^2 = l^2 = (ut^{-1}l)^2 = (t^{-1}l)^2 = (ut^{-1})^3 = 1\}$

$\cong \{u, t^{-1}, l : u^2 = (t^{-1})^2 = (ut^{-1})^3 = 1, l^2 = 1, [u, t^{-1}l] = 1, [t^{-1}, l] = 1\}$

$\cong \mathbf{Z}_2 \times \Sigma_3$

olup mertebesi 12'dir.

(5) $\mathrm{P}/\Delta(ut^{-1}) \cong \{u, s : u^2 = s^2 = (us)^2 = 1\} \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$

olup mertebesi 4'dür.

(6) $\mathrm{P}/\Delta(lus) \cong \{u, s : u^2 = s^2 = (us)^2 = 1\} \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$

olup mertebesi 4'dür.

3.1.2. Sonuç: G, **P**'nin normal bir alt grubu olsun. G bir eliptik eleman bulunduruyorsa |**P**: G|, 24'ü böler (eliptik dönüşüme bağlı olarak 2, 4, 12 ya da 24'ü böler).

Bu sonucu P(C) Fuchsian gruplarına uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

3.1.3. Sonuç: Eğer bir C çemberi ve C'nin içi **P**'de herhangi bir eliptik dönüşüm tarafından sabit bırakılmış ise $|\mathbf{P}: \mathrm{P_N(C)}| < \infty$ 'dur. Özellikle $|\mathbf{P}: \mathrm{P_N(C)}|$, 2, 4, 12 ya da 24'ü böler.

L(C), C çemberinin **P**'deki genel kalımlaştırıcısı olsun. Δ(L(C)) bunun normal kapanışı ise aşağıdaki teoremi elde ederiz:

3.1.4. Teorem: Eğer C çemberi **P**'de ya eliptik ya da parabolik bir dönüşüm altında sabitse $|\mathbf{P}: \Delta(\mathrm{L(C)})| < \infty$ 'dur. (Özellikle de |**P**: Δ(L(C))|, 24'ü böler.)

İspat: Eğer C çemberi eliptik bir dönüşüm altında sabitse, sonuç 3.1.1'den görülür. İkinci olarak C, bir h parabolik dönüşümü altında sabit bırakılmış olsun. **P**'de parabolik bir dönüşümün bir ötelemeye konjuge olduğunu 2.4.14'den biliyoruz.

$v^{-1}hv = h^{*}$ dönüşümü $z \to z+\alpha$ ötelemesi olsun. O zaman v^{-1}(C) (ki bu, α ve orijinden geçen bir L doğrusudur), h^{*}'ın sabit çemberidir. Fakat orijinden geçen herhangi bir doğru $s(z) = -z$ dönüşümü altında sabit kalır. Fuchsian anlamda olmasa da vsv^{-1}, C'yi sabit bırakır. Böylece L(C) bir eliptik dönüşüm bulundurur. O zaman 3.1.1 gereğince |**P**: Δ(L(C)| < ∞'dur ve özellikle de 24'ü böler.

3.1.5. Teorem: **P**'nin sonlu üreteçli normal Fuchsian bir F alt grubu ya bir serbest gruptur ya da cinsi ≥ 2 olan bir Riemann yüzeyinin bir temel grubunun bir faithful gösterimini verir.

Bu teorem, F normal değil fakat **P**'de F'nin normal kapanışı sonsuz indeksli ise yine doğrudur.

İspat: F, **P**'de normal ve sonlu üreteçli bir Fuchsian alt grup olsun. F, **C**'de süreksiz olduğundan |**P**: F| = ∞ 'dur (Lehner 1964). Bu nedenle F, herhangi bir eliptik dönüşüm bulundurmaz (eğer bulundurmuş olsa sonlu indeksli olurdu). Sonlu üreteçli Fuchsian bir F grubu, bir

$$\mathrm{F} \cong < a_i, b_i, c_j, d_k ; i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,s, k = 1,\ldots,t;$$
$$c_j^{l_j} = 1 (l_j \geq 2), d_1 \ldots d_t \, c_1 \ldots c_s \, [a_1, b_1]\ldots[a_n, b_n] = 1>$$

temsiline sahiptir. F eliptik dönüşüm bulundurmadığından j = 0'dır ve

$$\mathrm{F} \cong < a_i, b_i, d_k ; i = 1,\ldots,n, k = 1,\ldots,t; d_1 \ldots d_t \, [a_1, b_1]\ldots[a_n, b_n] = 1>$$

elde ederiz.

Eğer $t \neq 0$ ise F, torsiyonsuz devirli grupların bir serbest çarpımıdır (Karras ve Solitar 1972) ve bu nedenle bir serbest gruptur.

Eğer $t = 0$ ise

$$\mathrm{F} \cong < a_i, b_i ; i = 1,\ldots n; [a_1, b_1]\ldots[a_n, b_n] >$$

elde edilir ki bu temsil, cinsi n olan Riemann yüzeyinin temel grubu için bir temsildir. Eğer n = 1 ise F, rankı 2 olan serbest değişmeli gruptur ve Fuchsian olamaz (Lehner 1964). Böylece n > 1'dir ve F, cinsi ≥ 2 olan bir Riemann yüzeyinin temel grubunun bir faithful gösterimini verir.

Eğer F normal değil fakat |**P**: Δ(F)| = ∞ ise F eliptik dönüşüm bulundurmaz ve yukarıdaki koşulların hepsini sağlar.

3.2. Picard Grubunun Temel Denklik Alt Grupları

3.2.1. Tanım: K bir grup ve $\{\varphi_i\}$, $\{L_i\}$ alt gruplarının K üzerine izomorfizmlerinin bir ailesi olsun.

G = < $t_1, t_2, \ldots$,K ; K'daki bağıntılar, $t_1 L_1 t_1^{-1} = \varphi_1(L_1)$, $t_2 L_2 t_2^{-1} = \varphi_2(L_2)$, ...> grubuna, tabanı K ve birleştirilmiş alt grupları $\{L_i, \varphi_i(L_i)\}$ olan **HNN** grup denir.

$t_1, t_2, \ldots$ ile üretilen gruba G'nin serbest parçası denir.

HNN gruplarla ilgili ayrıntılı bilgi için Karras ve Solitar (1970 ve 1971)'a bakınız.

3.2.2. Tanım: (α), **Z(i)**'de bir ideal olsun (principal olması gerekir).

Mod(α)'ya göre özdeşlik dönüşümüne kongrüent olan dönüşümlerden oluşan P(α) grubuna temel denklik alt grubu denir, yani

$$P(\alpha) = \left\{ h(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in P : a \equiv d \equiv 1 \bmod(\alpha) \; ve \, b \equiv c \equiv 0 \bmod(\alpha) \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

3.2.3. Lemma: Her $\alpha \in$Z(i) için P(α), P'de normaldir ve sonlu indekslidir. Eğer $(\alpha) \neq (1+i)$ ya da $(\alpha) \neq (2)$ ise P(α) torsiyonsuzdur (Fine 1980).

3.2.4. Teorem: Eğer $(\alpha) \neq (1+i)$ ya da $(\alpha) \neq (2)$ ise P(α), sonlu üreteçli F serbest parçası ve K tabanı üzerinde bir **HNN** gruptur. K, her biri sonlu ranklı olan sonlu sayıda serbest grubun birleştirilmesi ile elde edilen bir serbest çarpımdır. Bundan başka K'da ve P(α)'da birleştirilmiş alt gruplar, modüler grubun alt gruplarının konjugeleridir (Fine 1980).

3.2.5. Teorem: P$(1+i)$'nin **P**'de indeksi 6'dır ve birleştirilmiş alt grup ile iki grubun serbest çarpımı olarak

P$(1+i) = < H_1 * H_2 \,;\, U >$

şeklinde ayrıştırılabilir.Burada birleştirilmiş alt grup olan U, $Z * Z_2$ grubudur. Özellikle

$H_1 \cong D_2 *_{Z_2} \left((Z_2 * Z_2) *_Z (Z_2 * Z_2) \right)$ ve $H_2 \cong Z_2 * D_2$ 'dir.

P(2)'nin indeksi 24'dür ve P$(1+i)$'nin, indeksi 4 olan bir alt grubudur. **P(2)**, yukarıdakine benzer fakat daha karışık genelleştirilmiş serbest çarpım ayrışımına sahiptir: **P(2)** $\cong < K_1 * K_2 \,;\, V >$'dir.

Burada $K_1 \cong (Z_2 * Z_2) *_Z (Z_2 * Z_2)$ ve

$$K_2 \cong \left((Z_2 * Z_2) *_Z (Z_2 * Z)\right) *_{V_1} \left[\left((Z_2 * Z_2) *_Z (Z_2)\right) *_{(Z_2 * Z_2)} \left((Z_2 * Z_2) *_Z (Z_2 * Z_2)\right)\right]$$

dir. K_2'deki birleştirilmiş alt grup V_1, $Z_2 * Z_2$'dir. P(2)'deki birleştirilmiş alt grup $V \cong Z_2 * Z_2 * Z * Z$'dir (Fine 1980).

3.2.6. Teorem: $(\alpha) \neq (1 + i)$ ya da $(\alpha) \neq (2)$ olmak üzere sonlu üretilmiş bir $F \subset$ **P**(α) Fuchsian alt grubu, modüler grubun tüm konjugeleri ile aşikar ya da devirli olmayan arakesite sahipse serbesttir (Fine 1980).

Son olarak eğer $(\alpha) \neq (1 + i)$ ya da $(\alpha) \neq (2)$ ve $F \subseteq$ **P**(α), F Fuchsian ise F torsiyonsuzdur ve böylece ya serbesttir ya da bir Riemann yüzey grubudur (Lehner 1964). Eğer F'de parabolik elemanlar varsa F serbesttir. Aynı zamanda eğer F modüler grupta bulunuyorsa serbesttir. Fine (1980)'da bunlara bağlı olarak aşağıdaki tahminler verilmiştir:

1. Tahmin: $(\alpha) \neq (1 + i)$ ya da $(\alpha) \neq (2)$ olmak üzere tamamen bir P(α) temel denklik alt grubunda bulunan bir Fuchsian grup serbesttir.

2. Tahmin: Tamamen P(α)'da bulunan Fuchsian bir alt grup $((\alpha) \neq (1 + i)$ ya da $(\alpha) \neq (2))$, modüler grubun bir alt grubuna konjuge olmalıdır.

KAYNAKLAR

BAŞKAN, T. 1980. Ayrık Gruplar. H. Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe.

BEARDON, A. F. 1983. The Geometry of Discrete Groups. Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, New York.

BRUNNER, A. M. 1992. A Two-Generator Presentation For The Picard Group. Proc. Amer. Mat. Soc., 115,45-46.

FINE, B. 1976. Fuchsian Subgroups of The Picard Group. Canad. J. Math., 28, 481-485.

FINE, B. 1980. Congruence Subgroups of The Picard Group. Canad. J. Math., 6, 1474-1481.

FRICKE, R. ve **KLEIN, F.** 1965. Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Funktionen. Vol. I, Teubner Reprint, Leipzig.

FORD, L. R. 1951. Automorphic Functions (2nd edition). Chelsea, New York.

HARDING, S. J. 1986. Some Arithmetic and Geometric Problems Concerning Discrete Groups. Phd. Thesis., Southampton University.

HUTCHINSON, J. I. 1907. A Method for Constructing The Fundamental Region of a Discontinuous Group of Linear Transformations. Trans. Amer. Math. Soc., 8, 261-269.

JONES, G. A. ve **SINGERMANN, D.** 1987. Complex Functions. Cambridge University Press., Cambridge.

KARRASS, A. ve **SOLITAR, D.** 1970. The Subgroups of a Free Product of Two Groups with an Amalgamated Subgroup. Trans. Amer. Math. Soc., 150, 227-255.

KARRASS, A. ve **SOLITAR, D.** 1971. Subgroups of HNN Groups and Groups with One Defining Relation. Canad. J. Math., Vol. XXIII., 4, 627-643.

LEHNER, J. 1964. Discontinuous Groups and Automorphic Functions. Math. Surveys 8, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

MAGNUS, W. 1974. Noneuclidean Tesselations and Their Groups. Academic Press, New York.

MAGNUS, W. , KARRASS, A. ve **SOLITAR D.** 1976. Combinatorial Group Theory. Dover Publications, Inc., New York.

WALDINGER, H. V. 1965. On The Subgroups of The Picard Group. Canad. J. Math., 6, 1373-1378.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten değerli hocam Prof. Dr. Turgut Başkan'a ve çalışmanın gerçekleşmesinde sıkça görüşlerinden ve yardımlarından faydalandığım Dr. Osman Bizim ve Yar. Doç. Dr. İ. Naci Cangül'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmanın hazırlanması için gerekli olan çalışma ortamının sağlanması konusunda yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mümin Yamankaradeniz'e de teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Bolu'da doğan Nihal YILMAZ; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladıktan sonra, 1989 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğrenime başladı. 1993 yılında bu fakülteden mezun oldu. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine ve araştırma görevliliğine başladı.