İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN

İLK İNTEGRALLERİ

Yakup YILDIRIM

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLEMLERİN İLK İNTEGRALLERİ

Yakup YILDIRIM

Doç. Dr. Emrullah YAŞAR

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2015

TEZ ONAYI

Yakup Yıldırım tarafından hazırlanan " İkinci Mertebeden Adi Differensiyel Denklemlerin İlk İntegralleri" adlı tez çalışması jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Emrullah Yaşar

Başkan : Doç. Dr. Emrullah Yaşar
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç Dr. Sait San
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nisa Çelik
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

...../....../.......

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…./…../….

Yakup YILDIRIM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN İLK İNTEGRALLERİ

Yakup YILDIRIM

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danşman: Doç . Dr. Emrullah Yaşar

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Burada fiziksel anlamları haiz olan ilk integrallerin fiziksel anlamı vurgulanıp, hangi alanlarda müşahede edilebileceği kısaca açıklanmıştır. Bu tezde, ilk integrallerin fiziksel anlamlarından ziyade, onlara tanımdan hareketle, göz önüne alınan fiziksel olayı modelleyen ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlerin (ADD) bir mertebe indirgenmesi nazarıyla bakacağız.

İkinci bölümde, ikinci mertebeden ADD'lerin ilk integrallerini elde etmek için kullanılacak temel tanım, teorem ve operatörler kısaca tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, ilk integralleri oluşturmada konuyla alakalı açık literatürde bulunan metotlar ayrıntılı bir şekilde irdelenmiştir. Bunlar temel olarak üç kısma ayrılmaktadır: 1) Doğrudan metot, 2) Lagrangian veya kısmi Lagrangian formülasyonları ve 3) Karakteristik (çarpanlar) yaklaşımlardır.

Dördüncü bölümde, ısı transferi alanında oldukça önemli bir yere sahip olan Palet denkleminin ilk integralleri elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun için Lagrangian ve kısmi Lagrangian metotları uygulanmıştır.

Beşinci bölümde, Riemann sıfırlarına karşılık gelen $H = y(p + \frac{l_p^2}{p})$ Hamiltonian modeli için elde edilen ikinci mertebeden özel bir ADD'in ilk integralleri integral çarpanı, Ibragimov'un yerel olmayan korunum metodu ve karakteristik (çarpan) metotları ile ayrı ayrı elde edildi.

Altıncı bölümde, akışkanlar mekaniğinde çatlak kuvvetinin minimize edilmesinde modellenen özel bir ikinci mertebeden lineer olmayan ADD'in ilk integralleri, Lagrangian formülasyonları ile elde edilmiştir.

Yedinci bölüm sonuçlar kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Adi diferenisyel denklemler**,** Lie nokta simetrisi**,** İlk integraller, Lagrangian, Kısmi Lagrangian, İntegral çarpanı metodu, karakteristik metodu.
2015, v+57 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

FIRST INTEGRALS OF SECOND ORDER ORDINARY DIFFERANTIAL EQUATIONS

Yakup YILDIRIM

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emrullah Yaşar

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is devoted to the introduction. We emphasized the physical meanings of the first integrals. We noted also some examples from some diverse fields about first integrals (conservation laws). In this thesis, we will attempt first integral as a mathematical point of view. In this manner, we introduce first integrals as order reduction of the considered equations rather than some physical meanings such as energy, momentum and so on.

In the second chapter, we introduce some basic definitions theorems and operators related with second order ordinary differantial equations (ODEs).

In the third chapter, we described indetail some methods existing in the open literatüre. In essence, these methods devoted three parts: 1)Direct method, 2) Lagrangian or partial Lagrangian formulations, 3) Characteristic (multiplier) approaches. The fourth, fifth and sixth chapters are devoted to applications.

In the fourth chaper, we construct first integrals of the fin equation which has important placemant in the field of heat transfer area. For this aim, Lagrangian and partial Lagrangian methods are implemented to fin equation.

In the fifth chapter, we apply the integrating factor, Ibragimov's nonlocal conservation method and multiplier approaches to the one special second order ODE which is obtained from the $H = y(p + \frac{l_p^2}{p})$ Hamiltonian corresponding to the Riemann zeros, separetely.

In the sixth chapter, we implement the Lagrangian formulations to the path equation which observed in the fluid mechanics.

In the seventh chapter, concluding remarks are given.

Key Words: Ordinary differantial equations, Lie point symmetries, First integrals, Lagrangian, Partial Lagrangian, Integral factor method, Characteristic method.
2015, v+57 pages.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan ve çalışmalarımın her aşamasında ilgi ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç.Dr. Emrullah YAŞAR'a, ve çalışmalarım süresince bana anlayış gösteren aileme en içten saygı, sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Yakup YILDIRIM

__/__/____

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Naz ve ark. (2014) de belirttiği gibi, matematiksel fizikte ve uygulamalı matematikte bazı tür korunum nicelikleri önemli bir rol oynar. Örneğin doğa olaylarının büyük bir kısmı korunumlara sahiptir. Hidrodinamik, elektrodinamik, sığ su teorisi ve benzeri alanlarda bunlar müşahede edilebilir. Ayrıca klasik mekanikte enerjinin korunum yasası, özellikle bir boyutlu harmonik salınım örneğinde gözlemlenir. Son verilen örnek hakkında düşünürsek korunum niceliği, ilk integraller olarak tanımlanır. Buradaki ilk integral, adi diferansiyel denklem modelleri için korunum yasalarıdır.

Bu tezin amacı, adi diferansiyel denklemlerin ilk integrallerini bulmak için literatürde var olan tüm farklı yaklaşımları araştırmaktır. Aslında ilk integralleri bulmada kullanılan farklı yaklaşımları üç gruba ayırabiliriz: Doğrudan metot, Lagrangian veya kısmi Lagrangian formülasyonları ve Karakteristik(çarpanlar) yaklaşımlardır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde vereceğimiz temel tanım ve operatörler literatürden (Ibragimov 1996,1999) alınmıştır.

k. mertebeden aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemini

$$E_{\alpha}(x, y, y_{(1)}, y_{(2)}, , , , , , , y_{(k)}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, ...m \tag{2.1}$$

göz önüne alalım. Burada x, bağımsız değişken ve $\alpha = 1, 2, ..., m$ olmak üzere y, m tane bağımlı değişkendir. Şimdi, tezde kullanılacak olan temel operatör ve tanımları kısaca verelim.

Total Türev Operatörü:

Daha sonraki incelemelerde kullanacağımız total türev operatörü

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y_x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} + y_{xx}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_x^{\alpha}} + ... \tag{2.2}$$

biçimindedir. Burada tanımlanan türevler $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial y_x^{\alpha}} ....\} \in A$ olup A, diferansiyel fonksiyonların vektör uzayıdır.

Lie-Backlund Operatörü:

Bu operatör

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} + \sum_{s \geq 1} \zeta_s^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_s^{\alpha}} \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada uzanım formülü

$$\zeta_s^\alpha = D_x(\zeta_{s-1}^\alpha) - y_s^\alpha D_x(\varepsilon) \quad , \; s \geq 1 \; , \; \alpha = 1,2,...,m \; , \; \zeta_0^\alpha = \eta^\alpha \tag{2.4}$$

olarak verilir.

Euler Operatörü:

$$\frac{\delta}{\delta y^\alpha} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \sum_{s \geq 1} (-D_x)^s \frac{\partial}{\partial y_s^\alpha} \quad , \quad \alpha = 1,2,....,m \tag{2.5}$$

biçimindedir.

Lie-Backlund Operatörünün Karakteristik Formu:

$$X = \xi D_x + W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \sum_{s \geq 1} D_x^s (W^\alpha) \frac{\partial}{\partial y_s^\alpha} \tag{2.6}$$

olarak verilir. Burada W^α , Lie karakteristik fonksiyonudur ve

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi y_x^\alpha , \; \alpha = 1,2,...,m \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir Lie-Backlund Operatörüyle İlişkili Noether Operatörü:

$$N = \xi + W^\alpha \frac{\delta}{\delta y_x^\alpha} + \sum_{s \geq 1} D_x^s (W^\alpha) \frac{\delta}{\delta y_{s+1}^\alpha} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada

$$\frac{\delta}{\delta y_x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial y_x^\alpha} + \sum_{s\geq 1}(-D_x)^s \frac{\partial}{\partial y_{s+1}^\alpha} \quad , \quad \alpha = 1,2,\ldots,m \tag{2.9}$$

şeklinde verilir.

İlk İntegral:

(2.1) sisteminin bir ilk integrali I olsun. $I \in A$ bir diferansiyel fonksiyondur, öyle ki, (2.1) sisteminin her çözümü için

$$D_x(I) = 0 \tag{2.10}$$

dır.

3. İLK İNTEGRALLERİ BULMADA KULLANILAN YAKLAŞIMLAR

3.1 Doğrudan Metot

Tüm yerel ilk integralleri bulmak için ilk defa Laplace (1798) tarafından kullanılmıştır. Doğrudan metot için ilk integralleri bulmada kullanılan denklem

$$D_x(I)|_{E_\alpha=0} = 0 \tag{3.1}$$

dir.

3.2 Simetri ve İlk İntegral İlişkisi

Kara ve Mahomed (2000), doğrudan metoduna bir simetri koşulu eklemişlerdir. X , Lie-Backlund simetri üreteci ve I ilk integral olmak üzere, bu nicelikler aşağıdaki denklem ile birbirine asosiyedir:

$$X(I) + D_x(\xi)I = 0 \tag{3.2}$$

(3.1) ve (3.2) şartlarıyla birlikte ilk integraller bulunur.

3.3 Noether Yaklaşımı

Noether (1971) ilk integralleri bulmak için yeni bir yaklaşım geliştirdi ve hali hazırda bu yaklaşım literatürde Noether yaklaşım olarak bilinir.

3.3.1 Euler-Lagrange diferensiyel denklemleri

Şayet $L(x, y, y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}, ...) \in A$ olacak şekilde bir L fonksiyonu mevcut ve

$$\frac{\delta L}{\delta y^{\alpha}} = 0 \; ; \; \alpha = 1, 2, ..., m \tag{3.3}$$

sağlıyorsa bu takdirde L'ye (2.1) sisteminin Lagrangianı denir. (3.3) denklemi, Euler-Lagrange diferansiyel denklemlerini verir. (2.1) ve (3.3) denklemleri birbirine denktir.

3.3.2 Noether simetri üreteci

X, bir Lie-Backlund üreteci olmak üzere eğer

$$X(L) + LD_x(\xi) = D_x(B) \tag{3.4}$$

denklemini sağlayan bir B ölçü fonksiyonu varsa X'e bir Noether simetri üreteci denir. Burada X, Euler-Lagrange diferensiyel denklemlerinin bir L Lagrangian ile ilişkili üretecidir.

3.3.3 Noether ilk integrali

Euler-Lagrange diferensiyel denklemlerine karşılık gelen bir L Lagrangianı ile ilişkili her bir X Noether simetri üreteci için bir I ilk integrali karşılık gelir.

Bu,

$$I = B - N(L) \tag{3.5}$$

veya

$$I = B - \xi.L - W^{\alpha}\frac{\delta L}{\delta y_x^{\alpha}} - \sum_{s\geq 1} D_x^s (W^{\alpha})\frac{\delta L}{\delta y_{s+1}^{\alpha}} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada W^{α}, ilk integralin karakteristikleridir. Noether yaklaşımında L Lagrangianını bilmemiz gerekmektedir. Bu durumda (3.4) denklemden Noether simetrileri hesaplanır ve (3.6) denkleminden her bir Noether simetriye karşılık gelen ilk integraller bulunur.

3.3.4 Önerme

Cieslinski ve Nikiciuk (2010), Lagrangian fonksiyonunu bulmada doğrudan bir yaklaşım geliştirmişlerdir.

$$y'' + a(x,y)y'^2 + b(x,y)y' + c(x,y) = 0 \tag{3.7}$$

hareket denklemi

$$L = \frac{1}{2}P(x,y)y'^2 + Q(x,y)y' + R(x,y) \tag{3.8}$$

standart Lagrangian'ını kabul eder; ancak ve ancak

$$b_y = 2a_x \tag{3.9}$$

dır. (3.8) Lagrangianı için Euler- Lagrange denklemi aşağıdaki denkleme karşılık gelmektedir:

$$y'' + \frac{P_y}{2P}y'^2 + \frac{P_x}{P}y' + \frac{Q_x - R_y}{P} = 0. \tag{3.10}$$

Birkaç özel durum bulunmaktadır:

1) **P = P(x) ve Q = 0 hali:**

$$y'' + b(x)y' + c(x,y) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; L = \left(\frac{1}{2}y'^2 - \int^y c(x,\xi)d\xi\right)e^{\int^x b(\tau)d\tau}. \tag{3.11}$$

2) **P = P(y) ve R = 0 hali:**

$$y'' + a(y)y'^2 + c(x,y) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; L = \left(\frac{1}{2}y'^2 + y'\int^x c(\tau,x)d\tau\right). \tag{3.12}$$

3) **P = P(y) ve Q = 0 hali:**

$$y'' + a(y)y'^2 + c(x,y) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; L = \frac{1}{2}y'^2 e^{2\int^y a(\xi)d\xi} - \int^y c(x,\xi)e^{2\int^\xi a(z)dz}d\xi. \tag{3.13}$$

3.4 Kısmi Noether Yaklaşımı

Kısmi Noether yaklaşımı, ilk integralleri bulmak için Kara ve ark. (2007) tarafından geliştirilmiştir. Diferansiyel denklemin bilinen bir Lagrangian'ı yoksa veya bulması zor ise, bu yaklaşım ilk integralleri bulmak için kullanışlıdır.

3.4.1 Kısmi Lagrangian

(2.1) sistemi

$$E_\alpha = E_\alpha^0 + E_\alpha^1 = 0 \tag{3.14}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$L = L(x, y, y_{(1)}, y_{(2)},,,,,,, y_{(l)})$, $l \leq k$ olmak üzere eğer

$$\frac{\delta L}{\delta y^{\alpha}} = f_{\alpha}^{\beta}.E_{\beta}^{1}, \quad (E_{\beta}^{1} \neq 0) \tag{3.15}$$

denklemi bazı β için sağlanırsa L ye (3.14) denkleminin bir kısmi Lagrangian'ı denir. Burada (f_{α}^{β}) bir tersinir matristir.

3.4.2 Kısmi Noether operatörü

X operatörü

$$X(L) + L.D_x(\xi) = D_x(B) + (\eta^{\alpha} - \xi y_x^{\alpha})\frac{\delta L}{\delta y^{\alpha}}\ ; \quad \alpha = 1,2,...,m \tag{3.16}$$

denklemini sağlıyorsa X 'e kısmi Lagrangian'a karşılık gelen bir kısmi Noether operatörü denir. Lagrangian'a karşılık gelen kısmi Noether operatörüyle ilişkili (2.1) sisteminin ilk integralleri (3.6) denkleminden belirlenir.

3.5 Yerel Olmayan Korunum Yaklaşımı

3.5.1 Eşlenik denklemler

$v = (v^1, v^2 ..... v^m)$ yeni bir bağımlı değişken olsun. (2.1) denklem sisteminin eşlenik denklem sistemi

$$E_{\alpha}^{*}(x, y, v, y_{(1)}, v_{(1)},,,,,,, y_{(k)}, v_{(k)}) = 0, \quad \alpha = 1,2,....m \tag{3.17}$$

olarak tanımlanır. (Atherton ve Homsy 1975, Ibragimov 2007)

Burada

$$E_{\alpha}^{*}(x,u,v,y_{(1)},v_{(1)},,,,,y_{(k)},v_{(k)})=\frac{\delta(v^{\beta}E_{\beta})}{\delta y^{\alpha}}\ ;\ \alpha=1,2,...,m\ ;\ v=v(x) \tag{3.18}$$

biçiminde tanımlanır.

3.5.2 Eşlenik denklemlerin simetrileri

(2.1) sisteminin X üreteci

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \tag{3.19}$$

biçiminde olsun. (2.1) ve (3.17) denklem sistemleri için Lie-nokta üreteci

$$Y=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}+\eta_{*}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\ ;\ \eta_{*}^{\alpha}=-(\lambda_{\beta}^{\alpha}.v^{\beta}+v^{\alpha}.D_{x}(\xi)) \tag{3.20}$$

şeklinde verilir.(Ibrogimov 2007)

(3.20) operatörü (3.19) nin v^{β} değişkenine genişletilmişidir. Ayrıca

$$X(E_{\alpha})=\lambda_{\beta}^{\alpha}.E_{\beta}\quad \text{denklemi } \lambda_{\beta}^{\alpha} \text{ yı verir.} \tag{3.21}$$

3.5.3 Korunum teoremi

(2.1) denklem sisteminin her Lie-nokta, Lie-Backlund ve yerel olmayan simetrileri, (2.1) ve (3.11) sistemlerinden oluşan ikili sistem için bir ilk integral verir.

$$L = v^{\alpha}.E_{\alpha}(x, y, y_{(1)}, y_{(2)},,,,, y_{(k)}) \tag{3.22}$$

bir formal Lagrangian olsun. Bu takdirde ilk integraller

$$I = \xi.L + W^{\alpha}\frac{\delta L}{\delta y_x^{\alpha}} + \sum_{s\geq 1} D_x^s(W^{\alpha})\frac{\delta L}{\delta y_{s+1}^{\alpha}} \tag{3.23}$$

biçiminde hesaplanır. Burada ξ ve η^{α}, (3.19) üretecinin katsayı fonksiyonlarıdır. (3.23)'dan elde edilen ilk integraller, (3.18) eşlenik denkleminin keyfi v çözümlerini içerir. Bundan dolay her bir v çözümü için bir ilk integral elde edilir. Yerel olmayan v değişkeni, bir yerel olmayan ilk integral bulmamızı sağlar. Eğer verilen orijinal (2.1) sistemi lineer olmayan self- adjoint (Ibragimov 2006,2011, Ibragimov ve ark. 2011, Gandarias 2011) ise v değişkenini yok edebiliriz. Böylece orijinal sistem için bir yerel ilk integral bulabiliriz.

3.6 İntegral Çarpan Metodu

Anco ve Bluman (1998) 'ın ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için önerdikleri ilk integral bulma yöntemini ikinci mertebeden

$$y'' - g(x, y, y') = 0 \tag{3.24}$$

adi diferensiyel denklemi için verelim. (3.24) denkleminin lineerleştirilmiş denklemi

$$L[y]v = \frac{d^2v}{dx^2} - g_{y'}\frac{dv}{dx} - g_y v = 0$$

biçiminde olup, (3.24) denkleminin eşlenik denklemi

$$L^*[y]w = \frac{d^2w}{dx^2} + g_{y'}\frac{dw}{dx} + (g_{xy'} + y'g_{yy'} + gg_{y'y'} - g_y)w = 0 \tag{3.25}$$

şeklindedir.

(3.25) denkleminin $w = \Lambda(x, y, y')$ çözümleri, (3.24) denkleminin eşlenik simetrileridir. $\Lambda(x, y, y')$' yi (3.25) denklemine uygularsak

$$L^*[y]\Lambda(x,y,y') = \Lambda_{xx} + 2y'\Lambda_{xy} + 2g\Lambda_{xy'} + (y')^2\Lambda_{yy} + 2y'g\Lambda_{yy'} + g^2\Lambda_{y'y'} + g_{y'}\Lambda_x$$

$$+(g_x + y'g_y + 2gg_{y'})\Lambda_{y'} + (g + y'g_{y'})\Lambda_y + (g_{xy'} + y'g_{yy'} + gg_{y'y'} - g_y)\Lambda = 0 \qquad (3.26)$$

elde ederiz. (3.24) denkleminin bir $\Lambda(x, y, y')$ eşlenik simetrisi, bir $\Lambda(x, Y, Y')$ integral çarpanı üretir ancak ve ancak $\Lambda(x, Y, Y')$

$$L^*[Y]\Lambda(x,Y,Y') = -(Y'' - g)(\Lambda_{xY'} + Y'\Lambda_{YY'} + g\Lambda_{Y'Y'} + 2g_{Y'}\Lambda_{Y'} + 2\Lambda_Y + g_{Y'Y'}\Lambda) \qquad (3.27)$$

eşlenik değişmezlik koşulunu sağlarsa. Böylece $\Lambda(x, Y, Y')$ için eşlenik değişmezlik koşulu, (3.24) denkleminin bir integral çarpanını verir. $\Lambda(x,Y,Y')$ integral çarpanını, (3.26) ve (3.27) denklemlerine uygularsak

$$\Lambda_{xx} + 2Y'\Lambda_{xY} + 2g\Lambda_{xY'} + (Y')^2\Lambda_{YY} + 2Y'g\Lambda_{YY'} + g^2\Lambda_{Y'Y'} + (g_x + Y'g_Y + 2gg_{Y'})\Lambda_{Y'}$$

$$+ (g + Y'g_{Y'})\Lambda_Y + g_{Y'}\Lambda_x + (g_{xY'} + Y'g_{YY'} + gg_{Y'Y'} - g_Y)\Lambda = 0\,, \qquad (3.28)$$

$$\Lambda_{xY'} + Y'\Lambda_{YY'} + g\Lambda_{Y'Y'} + 2g_{Y'}\Lambda_{Y'} + 2\Lambda_Y + g_{Y'Y'}\Lambda = 0 \qquad (3.29)$$

elde ederiz. Böylece (3.24) denkleminin integral çarpanı belirleyici denklemi (3.28) ve (3.29) denklemleridir. (3.24) denkleminin ilk integrali

$$\phi[y] = \phi_1(x,y,y') + \phi_2(x) = \text{sabit}$$

biçimindedir.

Burada

$$\phi_1(x,y,y') = \int_0^1 (S+N)d\lambda \text{ ve } \phi_2(x) = \int k(x)dx \tag{3.30}$$

dir. $\hat{y}(x)$,herhangi bir sabit fonksiyon ve

$$r = \lambda y + (1-\lambda)\hat{y}\,, \Lambda = \Lambda(x,r,r') \tag{3.31}$$

olmak üzere

$$S + N = (y' - \hat{y}')\Lambda - (y - \hat{y})(g(x,r,r')\Lambda_{r'} + (\lambda y' + (1-\lambda)\hat{y}')\Lambda_r + \Lambda_x + g_{r'}(x,r,r')\Lambda) \tag{3.32}$$

ve

$$k(x) = [\hat{y}'' - g(x,\hat{y},\hat{y}')]\Lambda(x,\hat{y},\hat{y}') \tag{3.33}$$

şeklinde verilir.

3.7 Karakteristik Metot

Steudel (1962) ve Olver (1993) 'e göre ilk integrali karakteristik formda aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$D_x I = Q^\alpha E_\alpha \tag{3.34}$$

Burada Q^α, karakteristikler veya çarpanlardır. Bu çarpanlar bulunduktan sonra ilk integraller bulunabilir.

3.8 Varyasyonel Yaklaşım

Varyasyonel yaklaşım Olver (1993) tarafından geliştirilmiştir. (3.34) denkleminin varyasyonel türevinden, tüm çarpanları elde edebilir ve çarpanlar kullanılarak (3.34) denklemin bir yerel ilk integrali elde edilebilir. Çarpanları belirleyen belirleyici denklem

$$\frac{\delta}{\delta y^{\beta}}(Q^{\alpha}E_{\alpha}) = 0 \tag{3.35}$$

biçimindedir.

3.9 Diferansiyel Denklemin Çözüm Uzay Üzerinde Varyasyonel Yaklaşım

Bu yaklaşımda çarpan belirleme denklemi, (3.34) denkleminin çözüm uzayı üzerinde varyasyonel türev alınarak elde edilir. Yani aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{\delta}{\delta y^{\beta}}(Q^{\alpha}E_{\alpha})_{|_{E_{\alpha}=0}} = 0 \tag{3.36}$$

(3.36) denklemi, (3.35) denkleminde daha az belirleyici denklemdir. Bazen (3.36) denkleminden elde edilen karakteristikler, bir ilk integrale değil de eşlenik simetrilere karşılık gelebilir.

4. PALET DENKLEMİ

İlk önce palet denkleminin matematiksel modellemesini yapalım (Kim ve ark. 2007). Kesit alanı A_c olan bir düzgün palet düşünelim. Çevresi ve uzunluğu sırasıyla P ve L olsun. Palet materyali, sabit bir taban yüzeyinin T_b sıcaklığına ve T_a sıcaklığındaki bir akışkanın yayılmasına bağımlıdır. Ayrıca sıcaklık iletkenliği k ve ısı aktarım katsayısı h sadece sıcaklığa bağlıdır. Yani $k = k(T)$, $h = h(T)$ dır.

Bir boyutlu sabit durumlu sıcaklık denge denklemi aşağıdaki gibi boyutsal formda yazılabilir:

$$A_c \frac{d}{dX}(k(T)\frac{dT}{dX}) - Ph(T)(T - T_a) = 0, \quad 0 < X < L$$

Yukarıdaki denklem için sınır değer koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T(L) = T_b, \frac{dT}{dX}\Big|_{X=0} = 0$$

Boyutsuzluk değişkenleri

$$x = \frac{X}{L}, y = \frac{T - T_a}{T_b - T_a}, H(y) = \frac{h(T)}{h_b}, K(y) = \frac{k(T)}{k_a}, M^2 = \frac{Ph_b L^2}{k_a A_c}$$

olmak üzere enerji denklemi

$$y'' + \frac{1}{K}\frac{dK}{dy}(y')^2 = \frac{H}{K}$$

ve sınır değer koşulları

$$y(1) = 1, y'(0) = 0$$

dır. Burada $y = y(x)$ sıcaklık fonksiyonu ve x, uzaysal boyut değişkendir.

4.1 Lineer Olmayan Kendi-Eşlenik Yaklaşımın Palet Denklemine Uygulanması

$$y'' + \frac{K'(y)}{K(y)}(y')^2 - \frac{H(y)}{K(y)} = 0 \tag{4.1}$$

(4.1) numaralı Palet denkleminde $n \neq -1, n \neq 0, K(y) = ky^n$, $H(y) = cy^{n+1} + d$ alırsak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$ky^n\ y'' + kny^{n-1}(y')^2 - cy^{n+1} - d = 0 \tag{4.2}$$

(4.2) denkleminin eşlenik denklemi

$$\frac{\delta}{\delta y}[v(ky^n\ y'' + kny^{n-1}(y')^2 - cy^{n+1} - d)] = 0 \tag{4.3}$$

olup, (4.3) denklemini açarsak

$$v(kny^{n-1}y'' + kn(n-1)y^{n-2}(y')^2 - c(n+1)y^n) - 2kn(y'y^{n-1}v_x + (n-1)(y')^2 y^{n-2}v$$

$$+ y^{n-1}\ y''v) + k(y^n v_{xx} + ny'y^{n-1}v_x + y'(ny^{n-1}v_x + n(n-1)y'y^{n-2}v) + ny''y^{n-1}v)$$

$$= \lambda(y^n y'' + kny^{n-1}(y')^2 - cy^{n+1} - d) \tag{4.4}$$

elde edilir. Burada v, eşlenik değişkendir. $v = A(y)$ alırsak

$$v_x = y'A_y\ ,\ v_{xx} = y''A_y + (y')^2 A_{yy} \tag{4.5}$$

olur.

(4.5) ifadelerini (4.4) denkleminde yerine yazarsak

$$kny^{n-1}y''A + kn(n-1)y^{n-2}(y')^2A - c(n+1)y^nA - 2kny^{n-1}(y')^2A_y$$

$$-2kn(n-1)(y')^2y^{n-2}A - 2kny^{n-1}\ y''A + ky^ny''A_y + ky^n(y')^2A_{yy}$$

$$+kn(y')^2y^{n-1}A_y + kn(y')^2y^{n-1}A_y + kn(n-1)(y')^2y^{n-2}A + kny''y^{n-1}A$$

$$= \lambda(y^n\ y'' + kny^{n-1}(y')^2 - cy^{n+1} - d) \tag{4.6}$$

(4.6) denklemini y nin türevlerine göre ayırırsak

$$y'' \rightarrow ky^ny''A_y = \lambda ky^n\ y''$$

$$(y')^2 \rightarrow ky^n(y')^2A_{yy} = \lambda kny^{n-1}(y')^2$$

$$y^0 \rightarrow -c(n+1)y^nA = -\lambda(cy^{n+1} + d) \tag{4.7}$$

(4.7) denklem sistemi çözülürse

$$v = A(y) = cy^{n+1} + d \tag{4.8}$$

bulunur. (3.16) ilk integral bulma formülü ikinci mertebe denklemler için düzenlenirse kolayca

$$I = \xi L + W\frac{\delta L}{\delta y'} + D_x(W)\frac{\delta L}{\delta y''} \tag{4.9}$$

olduğu görülür.

Burada

$$L=(cy^{n+1}+d)(ky^{n}\ y''+kny^{n-1}(y')^{2}-cy^{n+1}-d) \tag{4.10}$$

formal Lagrangian ve

$$\frac{\delta L}{\delta y'}=-kcy^{2n}y'+dkny^{n-1}y',\ \frac{\delta L}{\delta y''}=k(cy^{n+1}+d)y^{n},W=\eta-y'\varepsilon \tag{4.11}$$

varyasyonel türevlerdir. Aşağıda belirtilen $X_1,..X_8$ vektör alanları (4.2) denklemi tarafından kabul edilen Lie nokta üreteçleridir. Örnek olması bakımından $X_1=\frac{\partial}{\partial x}$ için (4.2) denkleminin ilk integralini bulalım. (4.10),(4.11) denklemlerini (4.9) denkleminde yazarsak

$$I_1=kc(n+1)y^{2n}(y')^{2}-(cy^{n+1}+d)^{2}.$$

$X_2=\frac{(cy^{n+1}+d)}{y^n}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa

$$I_2=0.$$

$X_3=y^{-n}\cosh(\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x)\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_3=-kc(n+1)y^{n}y'\cosh(\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x)+\sqrt{k}\sqrt{c}\sqrt{n+1}(cy^{n+1}+d)\sinh(\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x),$$

$X_4=y^{-n}\sinh(\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x)\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_4=-kc(n+1)y^{n}y'\sinh(\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x)+\sqrt{k}\sqrt{c}\sqrt{n+1}(cy^{n+1}+d)\cosh(\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x),$$

$X_5 = (cy^{n+1} + d)e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{c}(cy^{n+2}+2dy)e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}} \frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_5 = d^2 e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} (\sqrt{k}\sqrt{c}\sqrt{n+1}y^n y' - cy^{n+1} - d),$$

$X_6 = (cy^{n+1} + d)e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sqrt{c}(cy^{n+2}+2dy)e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}} \frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_6 = -d^2 e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} (\sqrt{k}\sqrt{c}\sqrt{n+1}y^n y' + cy^{n+1} + d),$$

$X_7 = e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(dy^{-n}+cy)e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}} \frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_7 = e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} (kc(n+1)y^{2n}(y')^2 - 2\sqrt{k}\sqrt{c}\sqrt{n+1}y^n y'(cy^{n+1} + d) + (cy^{n+1} + d)^2),$$

$X_8 = e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(dy^{-n}+cy)e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}} \frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_8 = e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x} (kc(n+1)y^{2n}(y')^2 + 2\sqrt{k}\sqrt{c}\sqrt{n+1}y^n y'(cy^{n+1} + d) + (cy^{n+1} + d)^2).$$

4.2 Kısmi Noether Yaklaşımın Palet Denklemine Uygulanması

İlk önce (4.2) denklemin kısmi Noether üreteçlerini ve ölçü fonksiyonlarını bulalım. (4.2) denkleminin kısmi Noether üreteci

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \tag{4.12}$$

olsun.

(4.12) denklemi aşağıdaki denklemi sağlamalıdır:

$$X(L)+LD_x(\xi)=D_x(B)+(\eta-y'\xi)\frac{\delta L}{\delta y} \tag{4.13}$$

$L=\frac{k(y')^2}{2}$ denklemin bir kısmi Lagrangian'dır. Gerçekten,

$$L=\frac{k(y')^2}{2},\ \ \frac{\delta L}{\delta y}=-ky''=\frac{kn(y')^2}{y}-cy-\frac{d}{y^n},\ \frac{\delta L}{\delta y'}=ky', \tag{4.14}$$

olduğu görülebilir. L Lagrangianı 1.mertebeden olduğundan X üreteci 1 defa uzatılmalıdır:

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+(D_x(\eta)-y'D_x(\xi))\frac{\partial}{\partial y'} \tag{4.15}$$

(4.14) ve (4.15) i , (4.13) denkleminde yerine yazarsak

$$(\eta_x+y'\eta_y-y'(\xi_x+y'\xi_y))ky'+\frac{k(y')^2}{2}(\xi_x+y'\xi_y)=B_x+y'B_y$$

$$+(\eta-y'\xi)(\frac{kn(y')^2}{y}-cy-\frac{d}{y^n}) \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.16) denklemini y nin türevlerine göre ayırırsak

$$(y')^3\rightarrow\xi_y-\frac{2n}{y}\xi=0\,,\xi=a(x)y^{2n}, \tag{4.17}$$

$$(y')^2\rightarrow\eta_y-\frac{n}{y}\eta=\frac{\xi_x}{2},\eta=\frac{a'(x)y^{2n+1}}{2(n+1)}+b(x)y^n, \tag{4.18}$$

$$y' \to k\eta_x = B_y + cy\xi + \frac{d}{y^n}\xi$$

den

$$B = \frac{ka''(x)y^{2n+2}}{4(n+1)^2} + \frac{kb'(x)y^{n+1}}{n+1} - \frac{c.a(x)y^{2n+2}}{2(n+1)} - \frac{d.a(x)y^{n+1}}{n+1} + c(x) \tag{4.19}$$

olarak elde edilir. Sabit terim olan

$$y^0 \to B_x - cy\eta - \frac{d}{y^n}\eta = 0$$

den

$$\frac{k.a'''(x)y^{2n+2}}{4(n+1)^2} + \frac{kb''(x)y^{n+1}}{n+1} - \frac{c.a'(x)y^{2n+2}}{2(n+1)} - \frac{d.a'(x)y^{n+1}}{n+1} + c'(x)$$

$$-\frac{c.a'(x)y^{2n+2}}{2(n+1)} - c.b(x)y^{n+1} - \frac{d.a'(x)y^{n+1}}{2(n+1)} - d.b(x) = 0 \tag{4.20}$$

elde edilir. Buradan $a(x)$, $b(x)$ ve $c(x)$ fonksiyonları

$$a(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x} + c_3 e^{\frac{-2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x} \tag{4.21}$$

$$b(x) = c_4 e^{\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x} + c_5 e^{\frac{-\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x} + \frac{d.c_2 e^{\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}\sqrt{k}} - \frac{d.c_3 e^{\frac{-2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}\sqrt{k}} \tag{4.22}$$

$$c(x) = d\left(\frac{c_4\sqrt{k}e^{\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}} - \frac{c_5\sqrt{k}e^{\frac{-\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}} + \frac{d.c_2 e^{\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}}{2c(n+1)} + \frac{d.c_3 e^{\frac{-2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}}{2c(n+1)}\right) \tag{4.23}$$

olarak hesaplanır.

Dolayısıyla örneğin, $c_1 = 1$ için (4.2) denkleminin kısmi Noether üreteci ve ölçü fonksiyonu

$$X_1 = y^{2n}\frac{\partial}{\partial x},\; B_1 = \frac{-c.y^{2n+2}}{2(n+1)} - \frac{d.y^{n+1}}{n+1} \tag{4.24}$$

şeklinde olur. $c_2 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_2 = y^{2n}e^{\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\sqrt{c}\,y^{2n+1}}{\sqrt{n+1}\sqrt{k}} + \frac{d.y^n}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}\sqrt{k}}\right)e^{\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$B_2 = \left(\frac{c.y^{2n+2}}{2(n+1)} + \frac{d.y^{n+1}}{n+1} + \frac{d^2}{2c(n+1)}\right)e^{\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}, \tag{4.25}$$

$c_3 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_3 = y^{2n}e^{\frac{-2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\sqrt{c}\,y^{2n+1}}{\sqrt{n+1}\sqrt{k}} + \frac{d.y^n}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}\sqrt{k}}\right)e^{\frac{-2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$B_3 = \left(\frac{c.y^{2n+2}}{2(n+1)} + \frac{d.y^{n+1}}{n+1} + \frac{d^2}{2c(n+1)}\right)e^{\frac{-2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}, \tag{4.26}$$

$c_4 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_4 = y^n e^{\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y},\; B_4 = \left(\frac{\sqrt{k}\sqrt{c}\,y^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}\right)e^{\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}, \tag{4.27}$$

$c_5 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_5 = y^n e^{\frac{-\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y},\; B_5 = -\left(\frac{\sqrt{k}\sqrt{c}\,y^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}\right)e^{\frac{-\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x} \tag{4.28}$$

elde edilir.

(4.2) denkleminin ilk integrallerini bulma denklemi

$$I = B - \xi L - W\frac{\delta L}{\delta y'} - D_x(W)\frac{\delta L}{\delta y''} \tag{4.29}$$

olup, hesaplamaları örneğin X_1 üreteci için verelim. (4.14) ve (4.24)ü, (4.29) denkleminde yerine yazarsak

$$I_1 = \frac{-cy^{2n+2}}{2(n+1)} - \frac{dy^{n+1}}{n+1} + \frac{ky^{2n}(y')^2}{2}$$

elde edilir. Benzer işlemler diğer üreteçler için yapılırsa sırasıyla aşağıdaki ilk integraller elde edilir:

$$I_2 = e^{\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\left(\frac{cy^{2n+2}}{2(n+1)} + \frac{dy^{n+1}}{n+1} + \frac{d^2}{2c(n+1)} + \frac{ky^{2n}(y')^2}{2} - \frac{\sqrt{k}\sqrt{c}\,y^{2n+1}y'}{\sqrt{n+1}} - \frac{d\sqrt{k}\,y^n y'}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}\right),$$

$$I_3 = e^{\frac{-2\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\left(\frac{cy^{2n+2}}{2(n+1)} + \frac{dy^{n+1}}{n+1} + \frac{d^2}{2c(n+1)} + \frac{ky^{2n}(y')^2}{2} + \frac{\sqrt{k}\sqrt{c}\,y^{2n+1}y'}{\sqrt{n+1}} + \frac{d\sqrt{k}\,y^n y'}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}\right),$$

$$I_4 = e^{\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\left(\frac{\sqrt{k}\sqrt{c}\,y^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}} - ky'y^n\right),$$

$$I_5 = -e^{\frac{-\sqrt{n+1}\sqrt{c}}{\sqrt{k}}x}\left(\frac{\sqrt{k}\sqrt{c}\,y^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{d\sqrt{k}}{\sqrt{n+1}\sqrt{c}} + ky'y^n\right).$$

4.3 Noether Yaklaşımın Palet Denklemine Uygulanması

İlk önce (4.2) denkleminin Noether üreteçlerini ve ölçü fonksiyonlarını hesaplayalım. (4.2) denkleminin üreteci

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.30}$$

biçiminde olsun. (4.30) üreteci aşağıdaki denklemi sağlamalıdır:

$$X(L)+LD_x(\xi)=D_x(B) \tag{4.31}$$

(3.13) denkleminden (4.2) denklemin bir standart Lagrangianı

$$L=\frac{(y')^2\,y^{2n}}{2}+\frac{cy^{2n+2}}{2k(n+1)}+\frac{dy^{n+1}}{k(n+1)} \tag{4.32}$$

biçimindedir. Ayrıca bu Lagrangian'ın varyasyonel türeve göre 1. ve 2. türevleri

$$\frac{\delta L}{\delta y'}=y'y^{2n} \quad , \quad \frac{\delta L}{\delta y''}=0 \tag{4.33}$$

biçimindedir. Lagrangian 1. mertebeden olduğundan X üreteci 1 defa uzatılırsa

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+(D_x(\eta)-y'D_x(\xi))\frac{\partial}{\partial y'} \tag{4.34}$$

dir.

(4.32) ve (4.34) ü, (4.31) denkleminde yerine yazarsak

$$\eta(ny^{2n-1}(y')^2+\frac{cy^{2n+1}}{k}+\frac{dy^n}{k})+(\eta_x+y'\eta_y-y'(\xi_x+y'\xi_y))y'y^{2n}$$

$$+(\frac{(y')^2y^{2n}}{2}+\frac{cy^{2n+2}}{2k(n+1)}+\frac{dy^{n+1}}{k(n+1)})(\xi_x+y'\xi_y)=B_x+y'B_y \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35) denklemini y' nün türevlerine göre ayırırsak

$$(y')^3\rightarrow-\frac{y^{2n}\xi_y}{2}=0\,,\xi=a(x) \tag{4.36}$$

$$(y')^2\rightarrow\eta_y+\frac{n}{y}\eta=\frac{\xi_x}{2}\,,\eta=\frac{a'(x)y}{2(n+1)}+b(x)y^{-n} \tag{4.37}$$

$$y'\rightarrow y^{2n}\eta_x+\frac{cy^{2n+2}\xi_y}{2k(n+1)}+\frac{dy^{n+1}\xi_y}{k(n+1)}=B_y$$

bulunur. Buradan ölçü fonksiyonu

$$B=\frac{a''(x)y^{2n+2}}{4(n+1)^2}+\frac{b'(x)y^{n+1}}{n+1}+c(x) \tag{4.38}$$

olarak elde edilir. Bu değerler sabit terimde yerine yazılırsa,

$$y^0\rightarrow B_x=\frac{cy^{2n+1}\eta}{k}+\frac{dy^n\eta}{k}+\frac{cy^{2n+2}\xi_x}{2k(n+1)}+\frac{dy^{n+1}\xi_x}{k(n+1)}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemde gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{a'''(x)y^{2n+2}}{4(n+1)^2}+\frac{b''(x)y^{n+1}}{n+1}+c'(x)-\frac{c.a'(x)y^{2n+2}}{2k(n+1)}-\frac{c.b(x)y^{n+1}}{k}$$

$$-\frac{d.a'(x)y^{n+1}}{2k(n+1)}-\frac{d.b(x)}{k}-\frac{c.a'(x)y^{2n+2}}{2k(n+1)}-\frac{d.a'(x)y^{n+1}}{k(n+1)}=0$$

bulunur. Buradan $a(x)$, $b(x)$ ve $c(x)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$a(x)=c_1+c_2e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}+c_3e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}, \tag{4.39}$$

$$b(x)=c_4e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}+c_5e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}+\frac{c_2de^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}}-\frac{c_3de^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}}, \tag{4.40}$$

$$c(x)=\frac{d}{k}\left(\frac{c_4\sqrt{k}e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}-\frac{c_5\sqrt{k}e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}+\frac{c_2de^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{2c(n+1)}+\frac{c_3de^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}}{2c(n+1)}\right). \tag{4.41}$$

$c_1=1$ için (4.2) denkleminin Noether üreteci ve ölçü fonksiyonu

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}\quad, B_1=0. \tag{4.42}$$

Benzer şekilde Noether üreteçleri ve ölçü fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$X_2=e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{\sqrt{c}\,y}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}}+\frac{dy^{-n}}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}}\right)e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$B_2=\left(\frac{cy^{2n+2}}{k(n+1)}+\frac{2dy^{n+1}}{k(n+1)}+\frac{d^2}{2kc(n+1)}\right)e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}, \tag{4.43}$$

$$X_3 = e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial x} - (\frac{\sqrt{c}\,y}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}} + \frac{dy^{-n}}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}})e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$B_3 = (\frac{cy^{2n+2}}{k(n+1)} + \frac{2dy^{n+1}}{k(n+1)} + \frac{d^2}{2kc(n+1)})e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}, \qquad (4.44)$$

$$X_4 = y^{-n}e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y}\quad , B_4 = (\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}}\,y^{n+1} + \frac{d}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}})e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}, \qquad (4.45)$$

$$X_5 = y^{-n}e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}\frac{\partial}{\partial y}\quad , B_5 = (\frac{-\sqrt{c}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}}\,y^{n+1} - \frac{d}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}})e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}. \qquad (4.46)$$

Şimdi ilk integraller elde edilecektir. (4.32),(4.33),(4.42) denklemlerini (4.29) denkleminde yazarsak

$$I_1 = \frac{(y')^2 y^{2n}}{2} - \frac{cy^{2n+2}}{2k(n+1)} - \frac{dy^{n+1}}{k(n+1)}$$

ilk integrali elde edilir. Benzer şekilde diğer Noether üreteçleri için sırasıyla aşağıdaki ilk integraller elde edilir:

$$I_2 = e^{\frac{2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}(\frac{cy^{2n+2}}{2k(n+1)} + \frac{dy^{n+1}}{k(n+1)} + \frac{d^2}{2kc(n+1)} + \frac{(y')^2 y^{2n}}{2} - \frac{\sqrt{c}\,y'y^{2n+1}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}} - \frac{dy'y^n}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}}),$$

$$I_3 = e^{\frac{-2\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}(\frac{cy^{2n+2}}{2k(n+1)} + \frac{dy^{n+1}}{k(n+1)} + \frac{d^2}{2kc(n+1)} + \frac{(y')^2 y^{2n}}{2} + \frac{\sqrt{c}\,y'y^{2n+1}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}} + \frac{dy'y^n}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}}),$$

$$I_4 = e^{\frac{\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}(-y'y^n + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}}\,y^{n+1} + \frac{d}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}}),$$

$$I_5 = e^{\frac{-\sqrt{c}\sqrt{n+1}}{\sqrt{k}}x}(-y'y^n - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{k}\sqrt{n+1}}\,y^{n+1} - \frac{d}{\sqrt{c}\sqrt{k}\sqrt{n+1}}).$$

5. RIEMANN SIFIRLARINA KARŞILIK GELEN $H = y(p + \frac{l_p^2}{p})$ MODELİ

Nucci (2014) de belirtildiği gibi Polya ve Hilbert, rieman hipotezini ispatlamak için kendi eşlenik bir operatör bulmak gerektiğini önermişlerdir. Bu operatörün sipektrumu aşikar olmayan rieman sıfırlarının sanal kısımlarını içerir. Berry (2008) de kuantum versiyonu Polya-Hilbert konjektürünü gerçekleyen klasik bir Hamiltonianın varlığını önerdi. Berry tarafından önerilen ilk klasik Hamiltonian $H_{cl} = yp$ idi. Fakat daha sonra Berry ve Keating (1999) bu Hamiltonian asal sayılarla ilişkili ayrık periyodik yörüngeler ve kaotik olması gereksinimlerini sağlamadiğini gösterdiler. Sierra ve ark. (2011) ile Berry ve Keating (2011), Hamiltonionun sınırlı klasik yörüngeler ve ayrık kuantum spektrumuna sahip olması için yp Hamiltonianın farklı bir modifikasyonunu önerdiler. Bu tarzdaki ilk Hamiltonian

$$H = y(p + \frac{l_p^2}{p})$$

biçimindedir.(Sierra ve ark. 2011) Burada l_p, momentum boyutlarının eşleme sabitidir. Yukarıdaki Hamiltoniana karşılık gelen Lagrangian

$$L = -2l_p\sqrt{y(y - y')}$$

ile verilir. Bu takdirde yukarıdaki Lagrangian'a karşılık gelen Euler- Lagrangian denklemi

$$y'' + \frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y = 0$$

biçimindedir. Yukarıdaki denklemin lineer olmamasından ötürü tam çözümlerini bulmak kolay değildir. Bununla birlikte Nucci (2014), Jakobi son çarpan metodu kullanılarak problem ele alınmıştır. Denklemin Lie nokta simetrileri ve Lagrangianları elde edilmiştir.

Bu kısımda Ibragimov (2006)'un lineer olmayan kendi eşleniklik tanımıyla beraber yerel olmayan korunum metodu ile Steudel (1962) ve Olver (1993) ın karakteristik metodu uygulandı. Daha sonra Anco ve Bluman (1998) nın integral çarpanı yaklaşımıyla ilk integralleri elde edildi.

5.1 Lineer Olmayan Kendi Eşlenik Yaklaşımı

Modelleme sonucunda elde edilen

$$y'' + \frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y = 0 \tag{5.1}$$

denklemini göz önüne alalım. (5.1) denkleminin eşlenik denklemi

$$E^* = \frac{\delta}{\delta y}[v(y'' + \frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y)] = v(-\frac{(y')^2}{y^2} + 4) - D_x[v(\frac{2y'}{y} - 6)] + D_x^2(v)$$

$$= v(-\frac{(y')^2}{y^2} + 4) - [v_x(\frac{2y'}{y} - 6) + y'v(-\frac{2y'}{y^2}) + y''\frac{2v}{y}] + v_{xx} \tag{5.2}$$

biçimindedir. $v = A(x, y)$ aIırsak

$$v_x = A_x + y'A_y \ , v_{xx} = A_{xx} + 2y'A_{xy} + y''A_y + (y')^2 A_{yy} \tag{5.3}$$

elde edilir.

(5.3) denklemini (5.2) denklemine yazarsak ve $E^* = \lambda E$ lineer olmayan eşleniklik tanımını kullanarak

$$A(-\frac{(y')^2}{y^2}+4)-[(A_x+y'A_y)(\frac{2y'}{y}-6)-\frac{2(y')^2A}{y^2}+\frac{2y''A}{y}]+A_{xx}+2y'A_{xy}+y''A_y+(y')^2A_{yy}$$

$$=\lambda(y''+\frac{(y')^2}{y}-6y'+4y) \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.4) denklemini y bilinmeyenin türevlerine göre ayırırsak

$$y'' \rightarrow \frac{-2A}{y}+A_y=\lambda\,,$$

$$(y')^2 \rightarrow \frac{A}{y^2}-\frac{2A_y}{y}+A_{yy}=\frac{\lambda}{y}\,,$$

$$y' \rightarrow -\frac{2A_x}{y}+6A_y+2A_{xy}=-6\lambda\,,$$

$$y^0 \rightarrow 4A+6A_x+A_{xx}+4y\lambda$$

bulunur. Yukarıdaki denklem sistemi çözülürse

$$v=A(x,y)=y(c_1y^2e^{-6x}+c_2y^2e^{-\frac{8x}{3}}+c_3e^{-2x}+c_4e^{-4x}) \tag{5.5}$$

elde edilir. Örneğin $c_3=1$ ve $c_1=c_2=c_4=0$ iken $v=A(x,y)=ye^{-2x}$ alınabilir.

(5.1) denkleminin ilk integral bulma formülü (3.23) den

$$I = \xi L + W\frac{\delta L}{\delta y'} + D_x(W)\frac{\delta L}{\delta y''} \tag{5.6}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$L = ye^{-2x}(y'' + \frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y),\ \frac{\delta L}{\delta y'} = e^{-2x}(y' - 4y),\ \frac{\delta L}{\delta y''} = ye^{-2x} \tag{5.7}$$

olup $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ üreteci için (Nucci 2014), (5.1) denkleminin ilk integral bulalım. Bunun için (5.7) denklemini (5.6) denklemine yazarsak

$$I_1 = e^{-2x}(-2yy' + 4y^2)$$

elde edilir. $X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_2 = e^{-2x}(2yy' - 4y^2),$$

$X_3 = \frac{e^{4x}}{y}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_3 = 0,$$

$X_4 = \frac{e^{2x}}{y}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_4 = -2,$$

$X_5 = e^{2x}\frac{\partial}{\partial x} + 2ye^{2x}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_5 = 0,$$

$X_6 = e^{-2x}\frac{\partial}{\partial x} + ye^{-2x}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_6 = e^{-4x}(2yy' - 2y^2),$$

$X_7 = y^2 e^{-2x}\frac{\partial}{\partial x} + 2y^3 e^{-2x}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_7 = e^{-4x}(-2y^2(y')^2 + 8y^3 y' - 8y^4),$$

$X_8 = y^2 e^{-4x}\frac{\partial}{\partial x} + y^3 e^{-4x}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_8 = e^{-6x}(-2y^2(y')^2 + 6y^3 y' - 4y^4)$$

elde edilir.

5.2 Karakteristik Metotun (5.1) Denklemine Uygulanması

(5.1) denkleminin karakteristikleri $Q(x, y, y')$ ve ilk integralleri $I(x, y, y')$ formunda olmak üzere (5.1) denkleminin ilk integrali bulma denklemi

$$D_x I = QE \tag{5.8}$$

biçimindedir. (5.8) denklemini açarsak

$$I_x + y' I_y + y'' I_{y'} = Q(y'' + \frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y) \tag{5.9}$$

elde edilir.

(5.9) denklemini y'' ne göre ayırırsak

$$I_{y'} = Q,$$

$$I_x + y'I_y = Q(\frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y) \tag{5.10}$$

bulunur. (5.10) denklem sistemini düzenlersek

$$I_x + y'I_y - (\frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y)I_{y'} = 0 \tag{5.11}$$

elde edilir. $I(x, y, y')$ ilk integrali için aşağıdaki gibi bir varsayım yapalım:

$$I = a(x, y)\frac{(y')^2}{2} + b(x, y)y' + c(x, y) \tag{5.12}$$

(5.12) denklemini (5.11) denkleminde yazarsak

$$\frac{a_x(y')^2}{2} + y'b_x + c_x + y'(\frac{a_y(y')^2}{2} + y'b_y + c_y) - (\frac{(y')^2}{y} - 6y' + 4y)(ay' + b) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi y nin türevlerine göre ayırırsak

$$(y')^3 \to \frac{a_y}{2} - \frac{a}{y} = 0, a = y^2H(x),$$

$$(y')^2 \to \frac{a_x}{2} + b_y - \frac{b}{y} + 6a = 0, b = \frac{-y^3H_x}{4} - 3y^3H + yK(x),$$

$$y' \to b_x + c_y + 6b - 4ya = 0$$

$$c=\frac{y^4H_{xx}}{16}+\frac{9y^4H_x}{8}+\frac{22y^4H}{4}-\frac{y^2K_x}{2}-3y^2K+G(x),$$

$$y^0\rightarrow c_x-4yb=0$$

bulunur. $b(x,y)$ ve $c(x,y)$ değerleri yukarıdaki en son denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{y^4H_{xxx}}{16}+\frac{9y^4H_{xx}}{8}+\frac{22y^4H_x}{4}-\frac{y^2K_{xx}}{2}-3y^2K_x+G_x+y^4H_x+12y^4H-4y^2K=0$$

elde edilir. Bu denklemden $H(x)$, $K(x)$, $G(x)$

$$H(x)=c_1e^{-4x}+c_2e^{-6x}+c_3e^{-8x}$$

$$K(x)=c_4e^{-2x}+c_5e^{-4x}$$

$$G(x)=c_6 \tag{5.13}$$

olarak hesaplanır. (5.13) denkleminde $c_1=1$'e karşılık gelen ilk integral

$$I_1=e^{-4x}(\frac{y^2(y')^2}{2}-2y^3y'+2y^4),$$

$c_2=1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_2=e^{-6x}(\frac{y^2(y')^2}{2}-\frac{3y^3y'}{2}+y^4),$$

$c_3=1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_3=e^{-8x}(\frac{y^2(y')^2}{2}-y^3y'+\frac{y^4}{2}),$$

$c_4 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_4 = e^{-2x}(yy' - 2y^2),$$

$c_5 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_5 = e^{-4x}(yy' - y^2),$$

$c_6 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_6 = 1$$

elde edilir.

5.3 İntegral Çarpanı Metotun (5.1) Denklemine Uygulanması

(5.1) denklemi için (3.28) ve (3.29) denklemlerine karşılık gelen denklemler

$$\Lambda_{xx} + 2y'\Lambda_{xy} + 2\left(-\frac{(y')^2}{y} + 6y' - 4y\right)\Lambda_{xy'} + (y')^2\Lambda_{yy} + 2y'\left(-\frac{(y')^2}{y} + 6y' - 4y\right)\Lambda_{yy'}$$

$$+\left(-\frac{(y')^2}{y} + 6y' - 4y\right)^2\Lambda_{y'y'} + \left(\frac{5(y')^3}{y^2} - \frac{36(y')^2}{y} + 84y' - 48y\right)\Lambda_{y'} + \left(-\frac{3(y')^2}{y} + 12y' - 4y\right)\Lambda_y + \left(-\frac{2y'}{y} + 6\right)\Lambda_x$$

$$+\left(\frac{3(y')^2}{y^2} - \frac{12y'}{y} + 12\right)\Lambda = 0 \tag{5.14}$$

ve

$$\Lambda_{xy'} + y'\Lambda_{yy'} + \left(-\frac{(y')^2}{y} + 6y' - 4y\right)\Lambda_{y'y'} + 2\left(-\frac{2y'}{y} + 6\right)\Lambda_{y'} + 2\Lambda_y - \frac{2}{y}\Lambda = 0 \tag{5.15}$$

biçimindedir.

(5.14) ve (5.15) denklemlerini ortak çözersek

$$\Lambda(x,y,y') = -\frac{3y}{2}[(\frac{4}{3}y^2c_3 - \frac{2}{3}c_5 - \frac{2}{3}yy'c_3)e^{-4x} + \frac{2}{3}y(y-y')e^{-8x}c_2 + y(y-\frac{2}{3}y')e^{-6x}c_1 - \frac{2}{3}e^{-2x}c_4]$$

elde edilir. $c_1 = 1$ için

$$\Lambda(x,y,y') = (-\frac{3y^3}{2} + y^2y')e^{-6x}$$

olarak bulunur. (3.31) den

$$g(x,r,r') = -\frac{(r')^2}{r} + 6r' - 4r$$

$$\hat{y}(x) = 0, r = \lambda y + (1-\lambda).0 = \lambda y$$

elde edilir. (3.32) den

$$S + N = (y'-0)(-\frac{3r^3}{2} + r^2r')e^{-6x} - (y-0)[(-\frac{(r')^2}{r} + 6r' - 4r)r^2e^{-6x}$$

$$+(\lambda y' + (1-\lambda)0)(-\frac{9r^2}{2} + 2rr')e^{-6x} - 6(-\frac{3r^3}{2} + r^2r')e^{-6x} + (-\frac{2r'}{r} + 6)(-\frac{3r^3}{2} + r^2r')e^{-6x}]$$

,

$$= \lambda^3e^{-6x}(-6y^3y' + 2y^2(y')^2 + 4y^4),$$

ve (3.33) den

$$k(x) = 0$$

bulunur.

(3.30) dan

$$\phi_1(x,y,y') = \int_0^1 (S+N)d\lambda = \int_0^1 \lambda^3 e^{-6x}(-6y^3y' + 2y^2(y')^2 + 4y^4)d\lambda$$

$$= e^{-6x}(-\frac{3y^3y'}{2} + \frac{y^2(y')^2}{2} + y^4), \quad (5.16)$$

$$\phi_2(x) = \int k(x)dx = 0 \quad (5.17)$$

elde edilir. İlk integral bulma formülü olan

$$\phi_1(x,y,y') + \phi_2(x) = \text{sabit} \quad (5.18)$$

de (5.16) ve (5.17) değerlerini yazarsak

$$I_1 = e^{-6x}(-\frac{3y^3y'}{2} + \frac{y^2(y')^2}{2} + y^4)$$

elde edilir. $c_2 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_2 = e^{-8x}(-y^3y' + \frac{y^2(y')^2}{2} + \frac{y^4}{2}),$$

$c_3 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_3 = e^{-4x}(-2y^3y' + \frac{y^2(y')^2}{2} + 2y^4),$$

$c_4 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_4 = e^{-2x}(-2y^2 + yy'),$$

$c_5 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_5 = e^{-4x}(yy' - y^2),$$

elde edilir.

6. YÖRÜNGE DENKLEMİ

Akışkanlar mekaniğinde oldukça önemli bir yere sahip olan minimum çatlak kuvvetini tasvir eden yol denklemini göz önüne alınacağız. Söz konusu denklem için gerekli olan modelleme yöntemi ve teorik bilgiler için Pakdemirli ve Aksoy (2010)'e bakılabilir. Göz önüne alacağımız ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklem

$$y'' - \frac{f'(y)}{f(y)}(1+(y')^2) = 0 \tag{6.1}$$

biçimindedir. Burada $y = y(x)$ ve $f(y) = \rho(y)C_d(y)A(y)U(y)^2$ dir. ρ yoğunluğu, C_d çatlak katsayısını, A kesit alanını, U cismin hızını göstermekte olup bu değişkenler y koornatı yani irtifaya bağlı birer fonksiyondurlar. Bu kısımda $f(y)$ fonksiyonunun 4 özel durumunu göz önüne alacağız.

6.1 Lineer Olmayan Kendi Eşlenik Yaklaşımın Yörünge Denklemine Uygulanması

$f(y) = ke^{\alpha y}$ **hali:**

(6.1) denkleminde $f(y) = ke^{\alpha y}$ alırsak

$$y'' - \alpha(1+(y')^2) = 0 \tag{6.2}$$

elde edilir. (6.2) denkleminin eşlenik denklemi

$$\frac{\delta}{\delta y}[v(y'' - \alpha(1+(y')^2))] = -D_x[v(-2\alpha y')] + D_x^2(v) = 2\alpha(y'v_x + y''v) + v_{xx} \tag{6.3}$$

biçimindedir.

Yerel olmayan kendi eşlenikliği araştırılırsa, $v = A(y)$ alırsak

$$v_x = y' A_y, v_{xx} = y'' A_y + (y')^2 A_{yy} \tag{6.4}$$

olup, (6.4) denklemini (6.3) denkleminde yazarsak

$$2\alpha((y')^2 A_y + y'' A) + y'' A_y + (y')^2 A_{yy} = \lambda(y'' - \alpha(1 + (y')^2)) \tag{6.5}$$

bulunur. (6.5) denklemini y nin türevlerine göre ayırırsak

$$y'' \to 2\alpha A + A_y = \lambda$$

$$(y')^2 \to 2\alpha A_y + A_{yy} = -\alpha\lambda$$

$$y^0 \to -\alpha\lambda = 0 \tag{6.6}$$

elde edilir. (6.6) denklem sistemi çözülürse $v = A(y) = c_1 e^{-2\alpha y}$ bulunur. Özel olarak $c_1 = 1$ alınırsa, $v = e^{-2\alpha y}$ elde edilir. Daha önce belirtildiği gibi, (6.1) denkleminin ilk integral bulma denklemi

$$I = \xi L + W \frac{\delta L}{\delta y'} + D_x(W) \frac{\delta L}{\delta y''} \tag{6.7}$$

biçimindedir. Burada (6.7) için gerekli olan hesaplamalar

$$L = e^{-2\alpha y}(y'' - \alpha(1 + (y')^2)), \ \frac{\delta L}{\delta y'} = 0, \ \frac{\delta L}{\delta y''} = e^{-2\alpha y}, \ W = \eta - y'\xi \tag{6.8}$$

olarak elde edilir. Pakdemirli ve Aksoy (2010) çalışmasında (6.1) denkleminin Lie nokta üreteçleri üç farklı durum için elde edilmiştir ($f(y) = y^n$ hariç). Bu üreteçler yardımıyla özel hallere karşılık gelen ilk integraller teşkil edilecektir.

$X_1 = \cos(\alpha x)e^{-\alpha y}\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\alpha x)e^{-\alpha y}\frac{\partial}{\partial y}$ üreteci için (6.6) denkleminin ilk integralini bulalım. (6.8) denklemini (6.7) denkleminde yazarsak

$$I_1 = 0$$

elde edilir. $X_2 = \sin(\alpha x)e^{-\alpha y}\frac{\partial}{\partial x} - \cos(\alpha x)e^{-\alpha y}\frac{\partial}{\partial y}$ nokta üreteci için için benzer işlemler yapılırsa yine

$$I_2 = 0$$

sıfır ilk integrali elde edilir. $X_3 = \cos(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_3 = \alpha e^{-2\alpha y}(\cos(2\alpha x) + 2y'\sin(2\alpha x) - (y')^2\cos(2\alpha x)),$$

$X_4 = \sin(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial x} - \cos(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_4 = \alpha e^{-2\alpha y}(\sin(2\alpha x) - 2y'\cos(2\alpha x) - (y')^2\sin(2\alpha x)),$$

$X_5 = \frac{\partial}{\partial x}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_5 = -\alpha e^{-2\alpha y}(1 + (y')^2),$$

$X_6 = \frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_6 = 0,$$

$X_7 = \cos(\alpha x)e^{\alpha y}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_7 = \alpha e^{-\alpha y}(-\sin(\alpha x) + y'\cos(\alpha x)),$$

$X_8 = \sin(\alpha x)e^{\alpha y}\frac{\partial}{\partial y}$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$I_8 = \alpha e^{-\alpha y}(\cos(\alpha x) + y'\sin(\alpha x)),$$

elde edilir. Diğer özel haller için Ibragimov (2006)'un metodunu kullanarak elde ettiğimiz sonuçları aşağıda her bir Lie nokta üreteci ve ona karşılık gelen ilk integraller olarak vermekteyiz.

$f(y) = k$ **hali:**

$$y'' = 0$$

Üreteçler	**İlk integraller**
$X_1 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$	$I_1 = 0$
$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x}$	$I_2 = 0$
$X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$	$I_3 = x^2(y')^2 - 2xyy' + y^2$
$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x}$	$I_4 = x(y')^2 - yy'$
$X_5 = \frac{\partial}{\partial x}$	$I_5 = (y')^2$
$X_6 = y\frac{\partial}{\partial y}$	$I_6 = 0$
$X_7 = x\frac{\partial}{\partial y}$	$I_7 = -xy' + y$
$X_8 = \frac{\partial}{\partial y}$	$I_8 = -y'$

$f(y) = \frac{1}{k_1 y + k_2}$ **hali:**

$$y'' + \frac{k_1}{k_1 y + k_2}(1 + (y')^2) = 0$$

$$X_1 = (x(\tfrac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y) + \tfrac{1}{2}k_1 x^3)\tfrac{\partial}{\partial x} + (\tfrac{\frac{1}{4}k_1^2 y^4 + k_1 k_2 y^3 + k_2^2 y^2 - \frac{1}{4}k_1^2 x^4}{k_1 y + k_2})\tfrac{\partial}{\partial y}$$

$$I_1 = \frac{-k_1^2 x^3}{2} - y'(k_1 y + k_2)(-\frac{1}{2}k_1 y^2 + \frac{3}{2}k_1 x^2 - k_2 y) - (y')^2 x(k_1 y + k_2)^2 + k_1 x(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y)$$

$$X_2 = (\tfrac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y)\tfrac{\partial}{\partial x} + (\tfrac{-\frac{3}{2}k_1 x(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y) - \frac{1}{4}k_1^2 x^3}{k_1 y + k_2})\tfrac{\partial}{\partial y}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}k_1(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y) - \frac{3}{4}k_1^2 x^2 - \frac{3}{2}k_1 x y'(k_1 y + k_2) - (y')^2 (k_1 y + k_2)^2$$

$$X_3 = \tfrac{x^2}{2}\tfrac{\partial}{\partial x} + (\tfrac{\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y) - \frac{1}{4}k_1 x^3}{k_1 y + k_2})\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad I_3 = \frac{y}{2}(\frac{1}{2}k_1 y + k_2) - \frac{1}{4}k_1 x^2 - \frac{xy'}{2}(k_1 y + k_2)$$

$$X_4 = x\tfrac{\partial}{\partial x} + (\tfrac{k_1 y^2 + 2k_2 y}{k_1 y + k_2})\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad I_4 = k_1 x + (k_1 y + k_2)y'$$

$$X_5 = \tfrac{\partial}{\partial x}, \quad I_5 = k_1$$

$$X_6 = (\tfrac{\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y + \frac{1}{2}k_1 x^2}{k_1 y + k_2})\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad I_6 = k_1 x + (k_1 y + k_2)y'$$

$$X_7 = (\tfrac{x}{k_1 y + k_2})\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad I_7 = 1$$

$$X_8 = (\tfrac{1}{k_1 y + k_2})\tfrac{\partial}{\partial y}, \qquad I_8 = 0$$

$f(y)=y^n$ **hali:**

$$y''-\frac{n\left(1+(y')^2\right)}{y}=0$$

$$X_1=\tfrac{\partial}{\partial x}, \qquad I_1=0$$

$$X_2=x\tfrac{\partial}{\partial x}+y\tfrac{\partial}{\partial y}\ , \qquad I_2=-\frac{ny}{(1+(y')^2)^{\frac{1}{2n}}}$$

Keyfi $f(y)$ **hali:**

Bu durumda (6.1) genel denklemi göz önüne alınıp denklemin üreteci

$$X=\tfrac{\partial}{\partial x},$$

ve ilk integrali

$$I=-2(y')^2\frac{(f'(y))^2}{f(y)^4}+(y')^2\frac{f''(y)}{f(y)^3}-\frac{(f'(y))^2}{f(y)^4}.$$

Burada $f(y)$ fonksiyonu

$$\frac{f'''(y)}{f(y)^3}-\frac{5f'(y)f''(y)}{f(y)^4}+\frac{4(f'(y))^3}{f(y)^5}=0$$

koşulunu sağlamalıdır.

6.2 Noether Yaklaşımın Yörünge Denklemine Uygulanması

Bu yöntemin uygulanmasını öncelikle $f(y) = ke^{\alpha y}$ hali için göz önüne alalım. Diğer durumlar için elde edilen sonuçları tablo biçiminde vereceğiz. İlk önce (6.2) denklemin Noether üreteçlerini ve ölçü fonksiyonlarını bulalım. Bu denkleminin üreteci

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \tag{6.9}$$

biçiminde olsun. (6.9) denklemi aşağıdaki denklemini sağlamalıdır.

$$X(L) + LD_x(\xi) = D_x(B) \tag{6.10}$$

(3.13) denkleminden (6.2) denkleminin bir standart Lagrangianı

$$L = \frac{e^{-2\alpha y}}{k^2}\left(\frac{(y')^2}{2} - \alpha x y'\right), \quad \frac{\delta L}{\delta y'} = \frac{e^{-2\alpha y}}{k^2}(y' - \alpha x) \quad , \frac{\delta L}{\delta y''} = 0 \tag{6.11}$$

biçimindedir. Lagrangian 1.mertebeden olduğundan X üreteci 1 defa uzatılmalıdır:

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + (D_x(\eta) - y' D_x(\xi)) \frac{\partial}{\partial y'} \tag{6.12}$$

(6.11),(6.12) denklemlerini (6.10) denkleminde yazarsak

$$\xi \frac{e^{-2\alpha y}}{k^2}(-\alpha y') + \eta \frac{(-2\alpha) e^{-2\alpha y}}{k^2}\left(\frac{(y')^2}{2} - \alpha x y'\right) + (\eta_x + y'\eta_y - y'(\xi_x + y'\xi_y)) \frac{e^{-2\alpha y}}{k^2}(y' - \alpha x)$$

$$+ \frac{e^{-2\alpha y}}{k^2}\left(\frac{(y')^2}{2} - \alpha x y'\right)(\xi_x + y'\xi_y) = B_x + y' B_y \tag{6.13}$$

elde edilir.

(6.13) denklemini y nin türevlerine göre ayırırsak

$$(y')^3 \rightarrow \xi_y = 0, \xi = a(x)$$

$$(y')^2 \rightarrow \eta_y - \alpha\eta = \frac{\xi_x}{2}, \eta = -\frac{a'(x)}{2\alpha} + b(x)e^{\alpha y}$$

$$y' \rightarrow -\alpha\xi + 2\alpha^2 x\eta + \eta_x - \alpha x\eta_y = k^2 e^{2\alpha y} B_y$$

$$B = -\frac{1}{2\alpha k^2}(-\frac{a''(x)}{2\alpha} - \alpha x a'(x) - \alpha a(x))e^{-2\alpha y} - \frac{1}{\alpha k^2}(b'(x) + \alpha^2 x b(x))e^{-\alpha y} + c(x)$$

$$y^0 \rightarrow -\alpha x\eta_x = k^2 e^{2\alpha y} B_x$$

bulunur. ξ , η ve B değerleri yukarıdaki son denklemde yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a(x) = c_1 + c_2 \cos(2\alpha x) + c_3 \sin(2\alpha x)$$

$$b(x) = c_4 \cos(\alpha x) + c_5 \sin(\alpha x) , \; c(x) = c_6$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerde $c_1 = 1$ alırsak

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, B_1 = \frac{e^{-2\alpha y}}{2k^2} \tag{6.14}$$

bulunur.

$c_2 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_2 = \cos(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial y}, B_2 = -\frac{e^{-2\alpha y}}{2k^2}(\cos(2\alpha x) + 2\alpha x \sin(2\alpha x)), \tag{6.15}$$

$c_3 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_3 = \sin(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial x} - \cos(2\alpha x)\frac{\partial}{\partial y}, B_3 = -\frac{e^{-2\alpha y}}{2k^2}(\sin(2\alpha x) - 2\alpha x \cos(2\alpha x)), \tag{6.16}$$

$c_4 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_4 = \cos(\alpha x)e^{\alpha y}\frac{\partial}{\partial y}, B_4 = -\frac{e^{-\alpha y}}{k^2}(-\sin(\alpha x) + \alpha x \cos(\alpha x)), \tag{6.17}$$

$c_5 = 1$ için benzer işlemler yapılırsa,

$$X_5 = \sin(\alpha x)e^{\alpha y}\frac{\partial}{\partial y}, B_5 = -\frac{e^{-\alpha y}}{k^2}(\cos(\alpha x) + \alpha x \sin(\alpha x)) \tag{6.18}$$

bulunur. (6.6) denkleminin ilk integral bulma denklemi olan

$$I = B - \xi L - W\frac{\delta L}{\delta y'} - D_x(W)\frac{\delta L}{\delta y''} \tag{6.19}$$

ifadesini kullanacağız. (6.11),(6.14) denklemini (6.19) denkleminde yazarsak

$$I_1 = \frac{e^{-2\alpha y}}{2k^2}(1 + (y')^2)$$

elde edilir.

Benzer şekilde diğer Noether üreteçleri için sırasıyla aşağıdaki ilk integraller elde edilir:

$$I_2 = \frac{e^{-2\alpha y}}{k^2}\left(-\frac{\cos(2\alpha x)}{2} - y'\sin(2\alpha x) + \frac{(y')^2\cos(2\alpha x)}{2}\right),$$

$$I_3 = \frac{e^{-2\alpha y}}{k^2}\left(-\frac{\sin(2\alpha x)}{2} + y'\cos(2\alpha x) + \frac{(y')^2\sin(2\alpha x)}{2}\right),$$

$$I_4 = \frac{e^{-\alpha y}}{k^2}(\sin(\alpha x) - y'\cos(\alpha x)),$$

$$I_5 = \frac{e^{-\alpha y}}{k^2}(-\cos(\alpha x) - y'\sin(\alpha x))$$

elde edilir. Aşağıda dört durum için Lagrangian, Noether üreteçleri, ölçü fonksiyonları ve ilk integraller tablo halinde verilmiştir.

$f(y) = k$ **hali:**

$$y'' = 0$$

Lagrangian: $L = \frac{(y')^2}{2k^2}$

Simetri	**Ölçü fonksiyonları**	**İlk integraller**
$X_1 = \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{xy}{2}\frac{\partial}{\partial y},$	$B_1 = \frac{y^2}{4k^2}$	$I_1 = \frac{y^2}{4k^2} - \frac{xyy'}{2k^2} + \frac{x^2(y')^2}{4k^2}$
$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y},$	$B_2 = 0$	$I_2 = -\frac{yy'}{2k^2} + \frac{x(y')^2}{2k^2}$

$$X_3=\frac{\partial}{\partial x},\qquad B_3=0\qquad I_3=\frac{(y')^2}{2k^2}$$

$$X_4=x\frac{\partial}{\partial y},\qquad B_4=\frac{y}{k^2}\qquad I_4=\frac{y-xy'}{k^2}$$

$$X_5=\frac{\partial}{\partial y},\qquad B_5=0\qquad I_5=-\frac{y'}{k^2}$$

$f(y)=\frac{1}{k_1y+k_2}$ **hali:**

$$y''+\frac{k_1}{k_1y+k_2}(1+(y')^2)=0$$

Lagrangian: $L=\dfrac{(y')^2(k_1y+k_2)^2}{2}+k_1xy'(k_1y+k_2)$

$$X_1=\frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{x}{2(k_1y+k_2)}(\frac{k_1y^2}{2}+k_2y-\frac{k_1x^2}{2})\frac{\partial}{\partial y}$$

$$B_1=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}k_1y^2+k_2y)^2+\frac{k_1x^2}{4}(\frac{1}{2}k_1y^2+k_2y)-\frac{3k_1^2x^4}{16}$$

$$I_1=\frac{x^2(y')^2(k_1y+k_2)^2}{4}-\frac{xy'}{2}(k_1y+k_2)(\frac{1}{2}k_1y^2+k_2y-\frac{1}{2}k_1x^2)+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}k_1y^2+k_2y)^2$$

$$-\frac{k_1x^2}{4}(\frac{1}{2}k_1y^2+k_2y)+\frac{k_1^2x^4}{16},$$

$$X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2(k_1 y + k_2)}\left(\frac{k_1 y^2}{2} + k_2 y - \frac{3k_1 x^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}, B_2 = -\frac{k_1^2 x^3}{2}$$

$$I_2 = -\frac{k_1^2 x y^2}{4} - \frac{1}{2}k_1 k_2 x y + \frac{k_1^2 x^3}{4} - \frac{y'}{2}(k_1 y + k_2)\left(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y - \frac{3}{2}k_1 x^2\right) + \frac{x(y')^2 (k_1 y + k_2)^2}{2}$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x}, B_3 = k_1\left(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y\right),\ I_3 = k_1\left(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y\right) + \frac{(y')^2 (k_1 y + k_2)^2}{2}$$

$$X_4 = \frac{-3k_1 x}{2(k_1 y + k_2)}\frac{\partial}{\partial y}, B_4 = \frac{-3k_1}{2}\left(\frac{1}{2}k_1 y^2 + k_2 y\right) - \frac{3k_1^2 x^2}{4}$$

$$I_4 = \frac{3k_1}{2}\left(-\frac{1}{2}k_1 y^2 - k_2 y + \frac{1}{2}k_1 x^2 + x y'(k_1 y + k_2)\right)$$

$$X_5 = \frac{-3k_1}{2(k_1 y + k_2)}\frac{\partial}{\partial y}, B_5 = 0, I_5 = \frac{3k_1}{2}(k_1 x + y'(k_1 y + k_2))$$

$f(y) = y^n$ **hali:**

$$y'' - \frac{n\left(1 + (y')^2\right)}{y} = 0$$

Lagrangian: $L = \frac{(y')^2}{2y^{2n}} - \frac{nxy'}{y^{2n+1}}$

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, B = \frac{1}{2y^{2n}}, I = \frac{1 + (y')^2}{2y^{2n}}$$

Keyfi $f(y)$ hali:

$$y'' - \frac{f'(y)}{f(y)}(1+(y')^2) = 0$$

Lagrangian: $L = \frac{(y')^2}{2f^2(y)} - \frac{xy'f'(y)}{f^3(y)}$

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, B = \frac{1}{2f^2(y)}, I = \frac{1+(y')^2}{2f^2(y)}$$

7. SONUÇLAR

Bu tezde, adi diferensiyel denklemlerin ilk integrallerini hesaplamada kullanılan farklı yaklaşımlar sunulmuştur. Tezin ilk üç bölümünde gerekli operatör, tanım ve metotlar açıklanmıştır. Tezin dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerinde ise yöntemlerin uygulamaları yapılmıştır. Burada belirtilen ilk integraller, verilen denklemin mertebesi indirgenmiş formlarıdır.

Noether yaklaşımı bir standart Lagrangian'a bağlıdır. Denklem bir standart Lagrangian'a sahipse uygulanabilir. Daha sonra denklemin Noether simetrileri ve bu simetrilere karşılık gelen ilk integralleri bulunur.

Ele aldığımız denklemin bir standart Lagrangian'ı yoksa ya da bulunması zor ise kısmi Noether yaklaşımı kullanışlıdır. Bununla beraber kısmi Noether yaklaşımı, denklemin bir standart Lagrangian'ı olsa da olmasa da uygulanabilir. Ayrıca bu yaklaşım için izlenen yol, Noether yaklaşımda izlenen yol ile aynıdır.

Tezde karakteristik metot, integral çarpanı metodu ve Ibragimov'un lineer olmayan eşlenik yaklaşımı uygulamalarına da yer verilmiştir. Bahsedilen bu yaklaşımlar için bir standart Lagrangian'a ihtiyaç yoktur.

Tezin dördüncü bölümünde, palet denklemine lineer olmayan kendi eşlenik yaklaşım, Noether yaklaşımı ve kısmi Noether yaklaşımı uygulanarak denklemin ilk integralleri bulunmuştur. Noether ve kısmi Noether yaklaşımda beş tane ilk integral bulunurken, lineer olmayan kendi eşlenik yaklaşımda sekiz tane ilk integral elde edilmiştir. Elde edilen ilk integraller karşılaştırıldığında aynı veya belli bir katı olan ilk integraller olmakla beraber, farklı ilk integrallerde elde edilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, Hamiltonian'a karşılık gelen Euler-Lagrangian denklemi ele alınmıştır. Euler-Lagrangian denklemine Ibragimov'un, Steudel ve Olver'ın ile Anco ve Bluman'ın metodları uygulanmıştır. Ibragimov'un metodu yardımıyla sekiz tane ilk integral bulunup, Steudel ve Olver'ın yaklaşımıyla altı tane ilk integral elde edildi. Son olarak Anco ve Bluman'ın metoduyla beş tane ilk integral bulunmuştur. Bulduğumuz ilk integralleri kıyasladığımızda birbirleri arasındaki benzerlikler ve farklılıklar kolay bir şekilde görülebilir.

Tezin altıncı bölümünde, yörünge denkleminin dört özel hali ele alınmıştır. Yörünge denklemine Ibragimov'un lineer olmayan eşlenik yaklaşımı ile Noether yaklaşımı uygulanmıştır. Ibragimov'un yaklaşımıyla sekiz tane ilk integral bulmakla beraber, Noether yaklaşımıyla beş tane ilk integral elde edilmiştir. Benze şekilde, elde edilen ilk integraller arasında kıyaslama yapılabilir.

KAYNAKLAR

Atherton R. W., Homsy, G. M. 1975. On the existence and formulation of variational principles for nonlinear differential equations, *Studies in Applied Math*, 54(1):31-60.

Anco, S. C., Bluman, G. 1998. Integrating factors and first integrals for ordinary differential equations, *European Journal of Applied Mathematics*, 9(3):245-259.

Berry, M.V., Keating J.P. 1999. H=xp and the Riemann zeros, in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder* ed J P Keating and I V Lerner, Plenum, New York, pp 355-367.

Berry, M.V. 2008. Three quantum obsessions *Nonlinearity* 21 T19-T26.

Berry, M.V., Keating J.P. 2011. A compact hamiltonian with the same asymptotic mean spectral density as the Riemann zeros, *J. Phys. A: Math. Theor.* 44 285203.

Cieslinski, J.L., Nikiciuk, T. 2010. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangians for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients, *Journal of Physics A. Mathematical and Theoretical*.

Gandarias, M. L. 2011. Weak self-adjoint differential equations, *Journal of Physics A. Mathematical and Theoretical*.

Ibragimov, N. H. 1996. Ed., *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, vol. 1–3, Chemical Rubber Company,Boca Raton, Fla, USA.

Ibragimov, N. H. 1999. *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, vol. 4, John Wiley & Sons, Chichester, UK.

Ibragimov, N. H. 2006. Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 318(2):742-757.

Ibragimov, N. H. 2007. A new conservation theorem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 333(1):311-328.

Ibragimov, N. H. 2011. Nonlinear self-adjointness and conservation laws, *Journal of Physics A. Mathematical and Theoretical*.

Ibragimov, N. H., Torrisi, M., Tracin`a, R. 2011. Self-adjointness and conservation Laws of a generalized Burgers equation, *Journal of Physics A. Mathematical and Theoretical*, 44(14).

Kara, A.H., Mahomed, F.M. 2000. Relationship between symmetries and conservation laws. *International Journal of Theoretical Physics,* 39(1):23-40.

Kara, A.H., Mahomed, F.M., Naeem, I., WafoSoh, C. 2007. Partial Noether operators and first integrals via partial Lagrangians, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30(16):2079-2089.

Kim, S., Moon J-H., Huang, C-H. 2007. An approximate solution of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient, *J. Phys. D: Appl. Phys.* ***40*** *4382–4389.*

Laplace, P.S. 1798. English translation. Celestrial Mechanics, New York, NY, USA.

Noether, **E. 1971.** Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3):186-207.

Naz, R., Freire, I.L., Naeem, I. 2014. Comparison of Diffrerent Aprroaches to Construct First Integrals for Ordinary Differential Equations. *Abstract and Applied Analysis*.

Nucci, M.C. 2014. Spectral realization of the Riemann zeros by quantizing $H = w(x)\left(p+\frac{l_p^2}{p}\right)$: the Lie-Noether symmetry approach, Journal of Physics, 482.

Olver, P. J. 1993. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, New York, NY, USA, 107 pp.

Pakdemirli, M., Aksoy Y. 2010. Group classification for path equation describing minimum drag work and symmetry reductions, *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.* 31(7), 911-916.

Steudel, H. 1962. Uber die zuordnung zwischen invarianzeigenschaften und erhaltungss atzen, *Zeitschrift f ̈ur Naturforschung*, 17:129-132.

Sierre, G., Rodriguez-Laguna, J. 2011. The H=xp model revisited and the Riemann zeros *Phys. Rev.Lett.* 106 200201.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yakup YILDIRIM

Doğum Yeri : ŞANLIURFA

Doğum Tarihi : 01.01.1990

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bursa Cumhuriyet Lisesi (2007)

Lisans : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2011)

Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2012-Mayıs 2015)

İletişim : yyildirim@windowslive.com

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl