GRAF OPERASYONLARININ ZAGREB ve ÇARPIMSAL ZAGREB İNDEKSLERİ

AYSUN YURTTAŞ

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAF OPERASYONLARININ ZAGREB ve ÇARPIMSAL ZAGREB İNDEKSLERİ

Aysun YURTTAŞ

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

Prof. Dr. Emin N. ÖZMUTLU
(İkinci Danışman)
(Uludağ Üniversitesi)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2014

TEZ ONAYI

Aysun YURTTAŞ tarafından hazırlanan “Graf Operasyonlarının Zagreb ve Çarpımsal Zagreb İndeksleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
İkinci Danışman : Prof. Dr. Emin N. ÖZMUTLU (Uludağ Üniversitesi)

Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL — İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Basri ÇELİK — İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. İlhan TAPAN — İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ — İmza
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Yrd. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ — İmza
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Aysun YURTTAŞ

ÖZET

Doktora Tezi

GRAF OPERASYONLARININ ZAGREB ve ÇARPIMSAL ZAGREB İNDEKSLERİ

Aysun YURTTAŞ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
İkinci Danışman: Prof. Dr. Emin N. ÖZMUTLU (Uludağ Üniversitesi)

Bu çalışmada graf operasyonlarının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri için bazı üst sınırlar verilmiştir. Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde konunun literatür özeti yapılmıştır. İkinci bölümde çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılmış ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde birinci ve ikinci Zagreb ve çarpımsal Zagreb indeksleriyle eşindeksleri tanıtılmış ve elde edilen teorem ve sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde grafların birleşimi, toplamı, Kartezyen çarpımı, disjunctionı, corona çarpımı gibi graf operasyonları tanıtılmış ve bu işlemlerin bazı özellikleri verilmiştir. Beşinci bölümde dördüncü bölümde tanıtılan graf işlemlerinin birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ve eşindeksleriyle ilgili teoremler verilmiştir. Altıncı ve son bölüm ise çalışmanın temeli olup grafların kartezyen çarpım, toplam, corona çarpım, disjunction, bileşim, simetrik fark gibi graf operasyonları için üst sınırlar elde edilmiş ve bazı iyi bilinen graflara uygulanmıştır. Bu bölümde verilen tüm sonuçlar bu tez çalışmasında elde edilmiş orijinal sonuçlardır.

Anahtar Kelimeler: Graf, Zagreb İndeksi, Çarpımsal Zagreb İndeksi, Graf Operasyonları
2014, viii + 60 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

ZAGREB and MULTIPLICATIVE ZAGREB INDICES of GRAPH OPERATIONS

Aysun YURTTAŞ

Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL
Second Supervisor: Prof. Dr. Emin N. OZMUTLU (Uludag University)

In this work, some upper bounds for Zagreb and multiplicative Zagreb indices of graph operations are given. This thesis consits of six chapters. First chapter is introduction, and a brief summary of related literature is given in this chapter. Second chapter is preliminaries. Some basic concepts which will be used in the forthcoming chapters are introduced and some examples are given. In the third chapter, Zagreb and multiplicative Zagreb indices and coindices of graph operations are introduced and some results and theorems for Zagreb indices are given. In the fourth chapter, graph operations are introduced and some basic mathematical properties are given. In the fifth chapter, some exact expressions and theorems for the first and second Zagreb indices of graph operations including the Cartesian product, composition, join, disjunction, corona product and symmetric difference of graphs are given. The last and sixth chapter contains the original results obtained in this thesis work. In this chapter, the upper bounds on the multiplicative Zagreb indices of the join, Cartesian product, corona product, composition and disjunction of graphs are derived and the indices are evaluated for some well-known graphs.

Key Words: Graph, Zagreb Index, Multiplicative Zagreb Index, Graph Operations
2014, viii + 60 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca ileride kendi ayakları üzerinde durabilen, donanımlı bir akademisyen olabilmem için gerek akademik bilgisini gerekse manevi desteğini ve tecrübesini hiçbir zaman benden esirgemeyen, hem mesleki hem de hayata bakışıyla her zaman örnek almaya çalıştığım çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL'e yürekten şükranlarımı sunarım. Programlamayı öğrenmemde ve çalışmalarımda çok büyük emeği olan, bilgisini ve tecrübesini benimle cömertçe paylaşan, yakın ya da uzak farketmeden desteğini her zaman arkamda hissettiğim değerli hocam Prof. Dr. Emin N. ÖZUTLU'ya, bu tez çalışmasının ortaya çıkmasına yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Kinkar C. DAS ve Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte bana destek olan sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. İlker İNAM'a ve çalışma arkadaşım Müge TOGAN'a ayrıca teşekkür ederim.

Şüphesiz ki bugünlere gelmemi sağlayan, maddi ve manevi desteklerini üzerimden hiç eksik etmeyen kıymetli anneme, babama ve sevgili kız kardeşim Ayça KÜÇÜKOĞLU'na, tezimin yazım aşamasında yardımcı olan Arş. Gör. İlker KÜÇÜKOĞLU'na çok teşekkür ederim. Ayrıca manevi desteklerini üzerimden esirgemeyen, burada isimlerini tek tek zikredemediğim tüm sevdiklerime de teşekkürlerimi sunarım.

Aysun YURTTAŞ
.. / .. / ….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$\lvert V_G \rvert$	G grafının mertebesi
$\lvert E_G \rvert$	G grafının boyutu
d_v	v köşesinin derecesi
Δ_G	G grafının maksimum derecesi
δ_G	G grafının minimum derecesi
$\bar{G}$	G grafının tümleri (complement)
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir graf
P_n	n köşeli yol graf
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
$K_{r,s}$	İki parçalı tam graf
M_1	Birinci Zagreb indeks
M_2	İkinci Zagreb indeks
$\bar{M}_1$	Birinci Zagreb eşindeks
$\bar{M}_2$	İkinci Zagreb eşindeks
Π_1	Birinci çarpımsal Zagreb indeksi
Π_2	İkinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\bar{\Pi}_1$	Birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$\bar{\Pi}_2$	İkinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$\cong$	İzomorfizm
$G_1 \cup G_2$	G_1 ve G_2 graflarının birleşimi
$G_1 \vee G_2$	G_1 ve G_2 graflarının toplamı

$G_1 \boxtimes G_2$	G_1 ve G_2 grafları üzerinde kartezyen çarpım
$G_1 \circ G_2$	G_1 ve G_2 grafları üzerinde *corona* çarpım
$G_1[G_2]$	G_1 ve G_2 grafları üzerinde *bileşim* işlemi
$G_1 \otimes G_2$	G_1 ve G_2 grafları üzerinde *disjunction* işlemi
$G_1 \oplus G_2$	G_1 ve G_2 grafları üzerinde *simetrik fark* işlemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

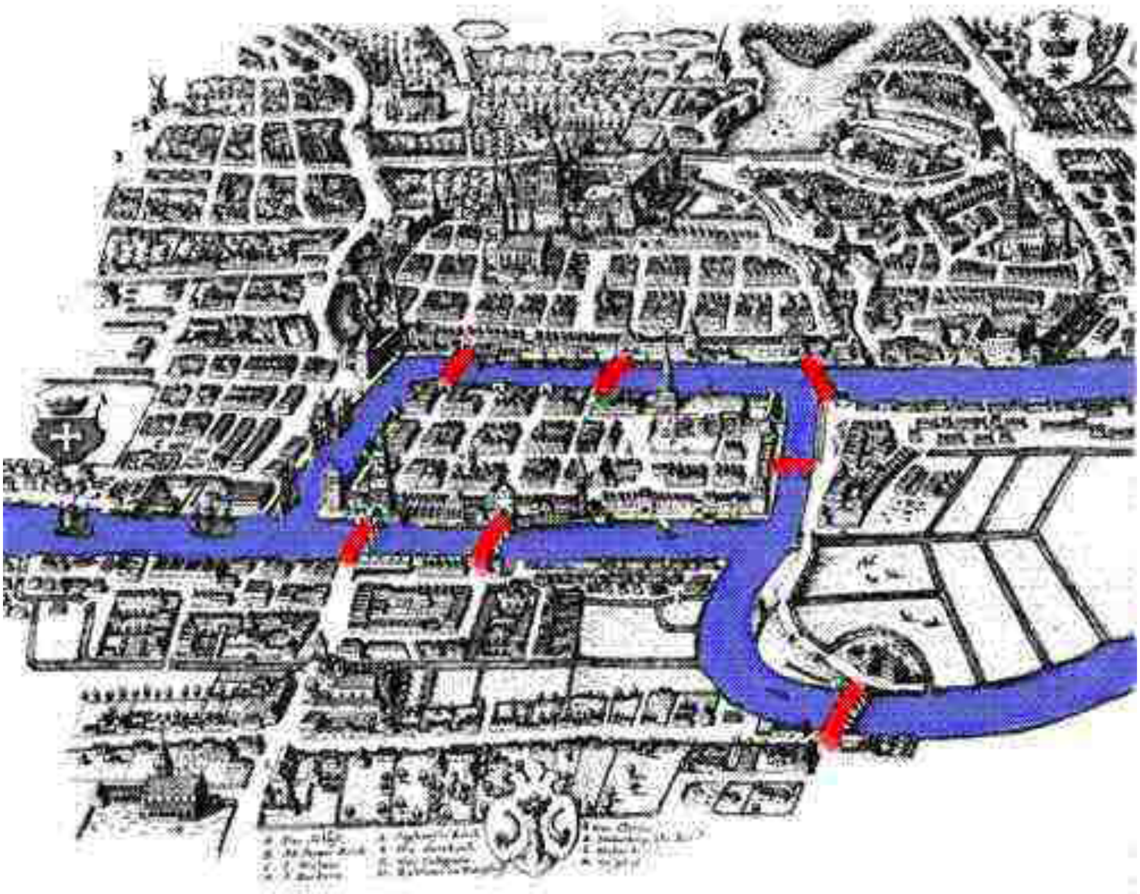
Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

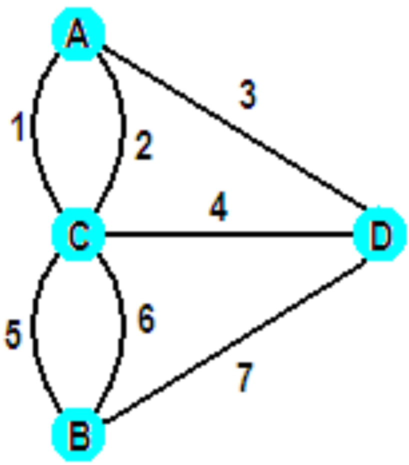
Sayfa

1. GİRİŞ

1736 yılında Leonhard Euler tarafından Königsberg'in Yedi Köprüsü üzerine yazılan ve yayımlanan makale graf teorinin tarihinde ilk makale olarak kabul edilir (Biggs ve ark. 1986). Kısaca problem; dört anakara ve bu anakaraları birbirine bağlayan yedi köprüden oluşan Königsberg şehrini, herhangi bir anakaradan başlayarak her bir köprüden tam olarak bir defa geçmek suretiyle dolaşacak bir yol bulmaya dayanır.



Şekil 1.1. Königsberg'in Yedi Köprüsü



Şekil 1.2. Königsberg Çizgesi

Euler bu problemin çözümünün olmadığını göstermiştir. Çünkü bu dört anakara parçası toplam tek sayıda köprüyle bağlantılıydı. Bunlardan ikisinin yolun başlangıç ve bitiş noktaları olduğu varsayılırsa diğerleri çift sayıda köprüyle bağlantılı olmalıydı. Euler'in Königsberg'in Yedi Köprüsü problemi çözümü graf teorinin temellerini atmış ve Eulerian graf kavramına öncülük etmiştir. Graflar fizik, biyoloji, sosyal ve bilgi sistemlerindeki işleyişleri ve ilişkileri modellemek için kullanılabilir. Bilgisayar biliminde iletişim ağlarını, bilgi organizasyonunu, hesaplama aygıtlarını, hesaplama akışını vb. temsil eder.

Graf teori ayrıca fizik ve kimyada molekülleri çalışmak için de kullanılır. Kimyasal graf teori, matematiksel kimya alanının kimyasal grafların çalışılmasıyla ilgilenen dalıdır. Kimyasal graflar, atomların grafın köşelerini ve kimyasal bağların grafın kenarlarını temsil ettiği molekül modelleridir. Kimyasal graf teorinin temel fikri; moleküllerin fiziko-kimyasal özelliklerinin karşılık gelen kimyasal graflarında şifrelenmiş bilgileri kullanarak çalışılabilmesine dayanır.

Moleküler tanımlayıcılar matematiksel kimyada özellikle QSAR/QSPR (quantitative structure-activity relationship/quantitative structure-property relationship) araştırmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Teorik kimyada topolojik indeksler olarak da adlandırılan moleküler yapı tanımlayıcıları kimyasal bileşenlerin fiziko-kimyasal, toksilojik, biyolojik ve diğer özelliklerini modellemek için kullanılır. Bugünlerde kimyada bazı uygulamaları bulunan çok sayıda topolojik indeks mevcuttur. Bunlar hesaplamada kullanılan grafların yapısal özelliklerine göre sınıflandırılabilirler. Bu nedenle belki de en çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan Wiener indeksi, ele alınan grafın köşelerinin uzaklığına bağlıdır. Hosoya indeksi bir graftaki bitişik olmayan kenarların sayılmasıyla hesaplanır. Enerji ve Estrada indeksi grafın spektrumuna dayanır. Randic bağlanırlık indeksi ve Zagreb indeksleri köşelerin dereceleri kullanılarak hesaplanır.

Zagreb indeksleri en eski ve en bilinen topolojik indekslerdir. Kimyasal ilişkileri nedeniyle birinci Zagreb indeksi kimya literatüründe çok sayıda çalışmaya konu olmuştur ve birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Bkz. Gutman ve Das 2004, Braun ve ark. 2005, Khalifeh ve ark. 2009, Nikolic ve ark. 2003, Zhou ve Gutman 2004). İkinci Zagreb indeksi ise ilk olarak 1972 yılında ele alınmıştır. O zamandan beri 2003 yılına kadar ikinci Zagreb indeksiyle ilgili hem kimya hem de matematik literatüründe neredeyse hiç sonuç bulunmamaktadır. Das ve Gutman 2003 yılında ikinci Zagreb indeksi ve komplementi için birtakım eşitsizlikler, tanımlamalar ve sonuçlar vermiştir. Zagreb indeksleri ve değişik biçimleri, moleküler karmaşıklık, asimetri, ZE-izomerizm, heterosistemler vb. konuları çalışmak için kullanılmıştır (Bkz. Gutman ve Das 2004, Nikolic ve ark. 2003, Zhou 2004, Braun ve ark. 2005, Zhou ve Gutman 2005, Trinastic ve ark. 2010).

Yakın zamanda Todeschini ve Consonni (2010) toplamsal graf değişmezlerinin çarpımsal versiyonlarını ortaya koymuştur. Bu çarpımsal versiyonların Zagreb indekslerine uygulanması, birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indekslerinin ortaya çıkmasına öncülük etmiştir. Ağaç grafları için bu çarpımsal Zagreb indekslerinin özellikleri yakın zamanda Gutman (2011) tarafından çalışılmıştır. Çarpımsal Zagreb indekslerinin matematiksel özellikleri ve uygulamaları Todeschini ve ark. (2010), Todeschini ve Consonni (2010), Eliasi ve ark. (2012), Liu ve Zhang (2012), Xu ve ark. (2012) tarafından verilmiştir. Khalifeh ve ark. (2008, 2009) grafların toplamı (join), kartezyen çarpımı, bileşimi (composition), disjunctionı ve simetrik farkının Zagreb indeksleri ve hyper-Wiener indeksi için bazı formüller hesaplamışlardır. Graf çarpımlarının daha ayrıntılı özellikleri ve uygulamaları için Imrich ve Klavzar (2000) tarafından yazılmış kitaba başvurulabilir.

Bu çalışmanın amacı toplam, corona çarpım, kartezyen çarpım, bileşim, disjunction gibi çeşitli graf operasyonlarının çarpımsal Zagreb indeksleri için bazı üst sınırlar elde etmektir.

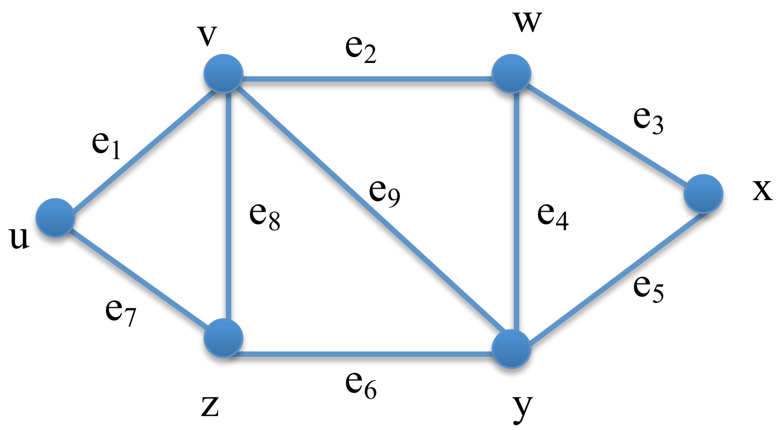
Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm ön bilgiler olup bu tez boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde grafların indekslerine giriş yapılmış, birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ve eşindeksleri, çarpımsal birinci ve ikinci Zagreb indeksleri ve eşindeksleri tanıtılmış ve bazı temel teorem ve sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde graf operasyonları tanıtılmış ve bazı sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde graf operasyonlarının birinci ve ikinci Zagreb indeksleriyle ilgili teoremler verilmiştir. Çalışmanın temelini oluşturan altıncı bölümde ise graf operasyonlarının çarpımsal Zagreb indeksleri için üst sınırlar elde edilmiş ve çalışma sona erdirilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılacak ve özellikler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için Bondy ve Murty (1976), Biggs ve ark. (1986), Foulds (1992), West (1996) ve Balakrishnan ve Ranganathan (2012) incelenebilir.

2.1 Tanım. V, elemanları *köşeler* olarak isimlendirilen boş olmayan sonlu bir küme ve E, V kümesinin ayrık köşelerinin sıralı olmayan ikililerinin bir kümesi olmak üzere G=(V,E) sıralı ikilisine *graf* denilir. $p, q \in V$ olmak üzere her bir $\{p, q\} \in E$ elemanına *kenar* adı verilir ve bu kenar p ve q köşelerini *birleştirir* denir. Bir G grafının V köşe kümesi aynı zamanda $V(G)$ ile kenar kümesi ise $E(G)$ ile gösterilir.

Şekil 2.1'de verilen G grafının köşe kümesi $V(G) = \{u, v, w, x, y, z\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$'dir.



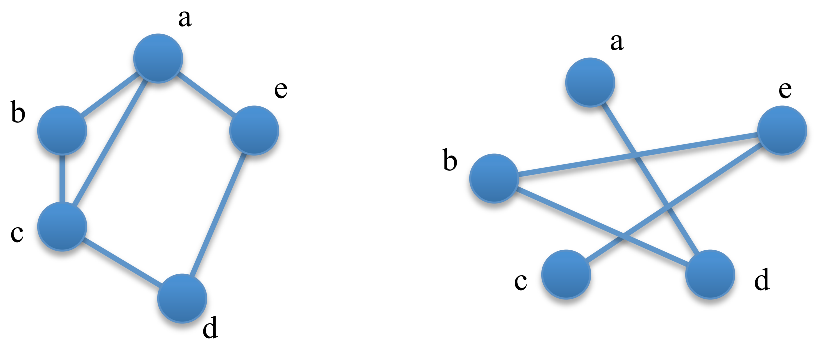
Şekil 2.1. 6 köşe ve 9 kenarlı bir graf örneği

2.2 Tanım. $V(G)$ kümesinin eleman sayısına, yani bir G grafının köşe sayısı olan $|V(G)|$'ye G grafının mertebesi, kenar sayısı olan $|E(G)|$'ye ise G grafının *boyut*u denilir.

Örneğin Şekil 2.1'de verilen grafın mertebesi 6, boyutu 9 olur.

2.3 Tanım. V köşe kümesinin farklı a ve b köşe elemanları bir kenarla birleşiyorsa bu durum ab notasyonu ile gösterilir. Eğer ab, G'nin bir kenarı ise a ile b köşeleri *komşu*dur denir ve bu $a \sim b$ ile gösterilir.

2.4 Tanım. Bir G grafının tümleyeni (complement), G grafıyla aynı köşe kümesine ve G grafında kenar oluşturmayan köşelerin birleştirilmesiyle elde edilen kenar kümesine sahip olan bir graf denir ve bu graf $\bar{G}$ ya da G^c ile gösterilir.



G $\bar{G}$

Şekil 2.2. G grafının $\bar{G}$ tümleyeni

2.5 Tanım. İki köşeyi birleştiren birden fazla kenar varsa bunlara *çoklu kenar*; bir köşeyi kendine birleştiren bir kenara da *döngü* denir. Bu iki tür kenarı olmayan graflara *basit graf* denir.

2.6 Tanım. Tek parçadan oluşan bir grafa bağlantılı graf, aksi halde bağlantısız graf denilir.

2.7 Tanım. G döngüsüz bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. v'de buluşan kenarların sayısına v'nin *derecesi* (katlılığı) denilir ve *deg(v),* d_v ya da $d_G(v)$ ile gösterilir.

Örneğin Şekil 2.1'de deg(u)=*2*, *deg*(*v*)=*4*, *deg*(*w*)=*3*'tür.

2.8 Tanım. G grafının *maksimum* ve *minimum* derecesi sırasıyla

$$\Delta(G) = max\{d_G(v) | v \in G\}$$

ve

$$\delta(G) = min\{d_G(v) | v \in G\}$$

olarak tanımlanır.

Örneğin Şekil 2.1'deki G grafında, $\Delta(G) = 4$ ve $\delta(G) = 2$'dir.

2.9 Tanım. G grafında tüm köşe dereceleri eşit ise G grafına *regüler graf* denir. Her bir köşenin derecesi r ise G'ye *r-regüler graf* adı verilir.

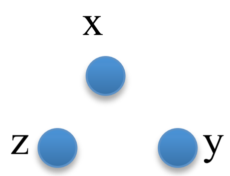
2.10 Lemma (El Sıkma Lemması). Bir G grafında köşe derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katına eşittir. Yani, $v \in V(G)$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} d_{v_i} = 2m$$

dir.

2.11 Tanım. Kenarı bulunmayan graflara *sıfır* (*null*) *graf* adı verilir ve n köşeli bir null graf N_n ile gösterilir.

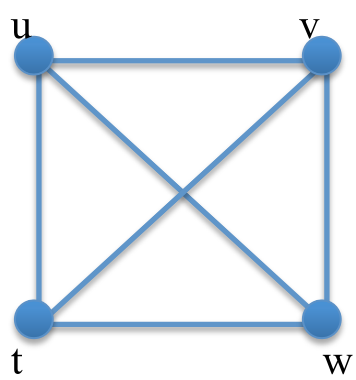
Örneğin Şekil 2.3'de verilen graf bir sıfır graftır.



Şekil 2.3. N_3 sıfır grafı

2.12 Tanım. Her köşe çiftinin tam bir kenarla birleştirildiği graflara *tam graf* denilir ve n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir.

Örneğin Şekil 2.2.4'de verilen G grafı dört köşeli K_4 tam grafıdır.

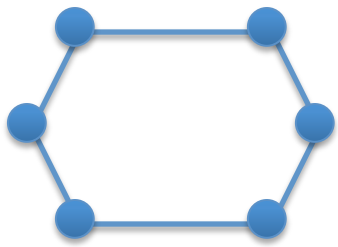


Şekil 2.4. K_4 tam grafı

2.13 Tanım. Bir G grafında G'nin kenarlarının *uv, vw, wx, …, yz* şeklindeki bir sıralanışına *patika* denir. Eğer $z = u$ ise bu patikaya *kapalı patika* adı verilir. Bir patikanın tüm kenarları farklı ise iz adı verilir. Bir *uv, vw, wx, …, yz, zu* kapalı patikasında kenarların hepsi farklı ise bu patikaya kapalı iz denir. İlaveten ilk ve son köşeleri hariç tüm köşeleri farklı olan en az üç köşeli kapalı bir ize *devir* denir.

2.14 Tanım. Tek bir devirden oluşan graflara *devir grafları* denilir ve *n* köşeli bir devir grafı C_n ile gösterilir.

Örneğin Şekil 2.5'de verilen graf C_6 devir grafıdır.



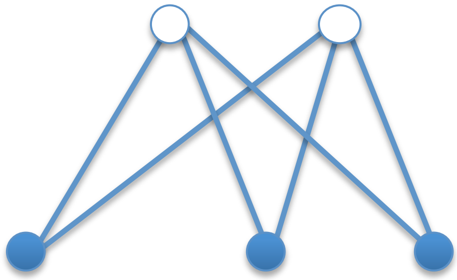
Şekil 2.5. C_6 devir grafı

2.15 Tanım. Bir tek patikadan oluşan graflara *yol (path) grafı* denir ve *n* köşeli bir yol grafı P_n ile gösterilir. P_n'in $n-1$ kenarı vardır ve C_n'den bir tek kenar çıkarılarak elde edilir.

Örneğin Şekil 2.6'da verilen graf bir P_5 grafıdır.

Şekil 2.6. P_5 yol grafı

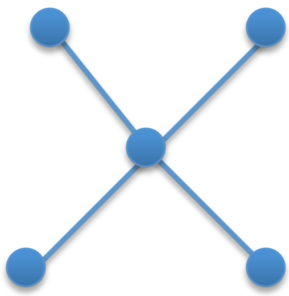
2.16 Tanım. Köşe kümesi A ve B gibi iki parçaya ayrılabilen ve her bir kenarı A'daki bir köşeyi B'deki bir köşeye birleştiren graflara *iki parçalı graf* denilir. Eğer bir iki parçalı grafta A'nın her bir köşesi B'nin her bir köşesiyle birleştirilmişse grafa *iki parçalı tam graf* denir ve A, *r* köşeye B, *s* köşeye sahipse böyle bir graf $K_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 2.7. $K_{2,3}$ iki parçalı tam grafı

Örneğin yukarıda verilen graf, bir $K_{2,3}$ grafıdır.

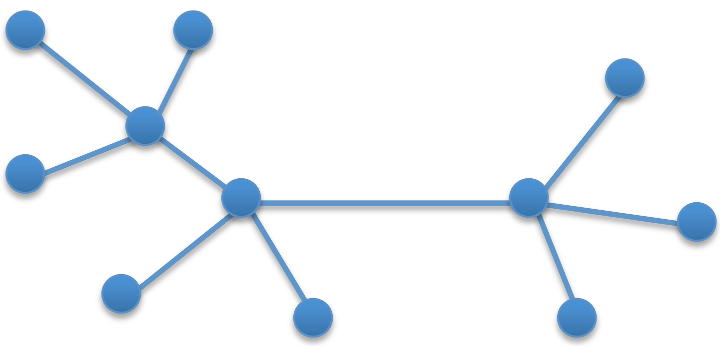
2.17 Tanım. $K_{1,s}$ şeklindeki bir grafa *yıldız (star) graf* adı verilir ve n köşeli bir yıldız graf S_n ile gösterilir.



Şekil 2.8. S_5 yıldız grafı

Örneğin yukarıdaki graf, bir S_5 yıldız grafıdır.

2.18 Tanım. Hiç bir devir bulundurmayan bağlantılı graflara *ağaç* denilir ve n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir.



Şekil 2.9. T_{11} ağaç grafı

Yukarıdaki graf, bir T_{11} ağaç graf örneğidir.

3. GRAFLARIN İNDEKSLERİ

Bu bölümde grafların indeksleriyle ilgili tanım, teorem ve bazı temel kavramlar verilecektir. Detaylı bilgi için Gutman ve Trinajstic (1972), Gutman ve ark. (1975), Balaban ve ark. (1983), Caen (1988), Gutman ve ark. (2004), Das (2004), Zhang (2005), Das ve ark. (2009), Todeschini ve ark. (2010), Todeschini ve Consonni (2010), Gutman (2011), Liu ve Zhang (2012), Xu ve ark. (2013), Das ve ark. (2013a) başta olmak üzere referanslarda belirtilen kaynaklar incelenebilir.

3.1 Birinci ve İkinci Zagreb İndeksleri

Bu kısımda QSAR/QSPR (quantitative structure-activity relationship/quantitative structure-property relationship) çalışmalarında en çok kullanılan topolojik indekslerden biri olan birinci ve ikinci Zagreb indeksleri tanımlanacak ve temel özellikleri verilecektir.

Gutman ve Trinajstic (1972), moleküler yapıda toplam π-elektron enerjisinin bağlılığını incelerken toplam π-elektron enerjisi için yaklaşım ifadelerinde iki terimin ortaya çıktığını bulmuşlardır:

$$\sum_{köşeler} (d_u)^2$$

$$\sum_{kenarlar} d_u . d_v$$

Burada d_u, moleküler grafın u köşesinin derecesidir. Bu iki sayının moleküler yapıyı yansıttığı fark edilmiştir. Bu bakış açısı Gutman ve ark. (1975) tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. En son olarak Balaban ve ark. (1983) tarafından aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir.

Bu çalışma boyunca, kenar katlılığı ve döngüleri olmayan, sonlu, basit graflar göz önüne alınacaktır. *G*, *E(G)* kenar kümesi ve *V(G)* köşe kümesine sahip olan bir graf olsun.

3.1.1 Tanım. *Birinci Zagreb indeksi* olarak adlandırılan ve M_1 ile gösterilen graf değişmezi, göz önüne alınan grafın köşelerinin derecelerinin karelerinin toplamıdır, yani

$$M_1(G) = \sum_{u \epsilon V(G)} [d_G(u)]^2$$

olur.

Burada graf değişmezi ile kastedilen grafın köşelerinin isimlendirilmesine bağlı olmayan her türlü özelliktir.

3.1.2 Tanım. *İkinci Zagreb indeksi* olarak adlandırılan ve M_2 ile gösterilen graf değişmezi, her bir kenarı oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımlarının toplamıdır, yani,

$$M_2(G) = \sum_{uv \epsilon E(G)} [d_G(u).\, d_G(v)]$$

dir.

3.1.3 Örnek. Bazı iyi bilinen grafların birinci ve ikinci Zagreb indeksleri Tablo 3.1.1'de listelenmiştir:

Çizelge 3.1.1 Bazı grafların birinci ve ikinci Zagreb indeksleri

	P_n	C_n	S_n	K_n	$K_{r,s}$
$M_1(G)$	$4n-6$	$4n$	$n(n-1)$	$n(n-1)^2$	$sr(r+s)$
$M_2(G)$	$4n-8$	$4n$	$(n-1)^2$	$\binom{n}{2}(n-1)^2$	s^2r^2

3.1.4 Önerme. *m* kenara ve *n* köşeye sahip *G* grafının köşe derecelerinin ortalama değeri $\frac{2m}{n}$ olsun. $p = \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$ olmak üzere

$$2(2p+1)m - p(p+1)n \leq M_1 \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right)$$

dir (Caen 1988, Gutman ve ark. 2004). Burada $\lfloor n \rfloor$ ile *n*'nin tamdeğeri gösterilmektedir.

3.1.5 Önerme. *G* grafı m kenarlı, n köşeli, Δ maksimum dereceli ve δ minimum dereceli bir graf olsun. Bu durumda,

$$M_1(G) \leq 2m(\Delta + \delta) - n\Delta\delta$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'deki tüm köşelerin derecelerinin ya Δ ya da δ derecelerine sahip olması durumunda geçerlidir (Das 2004).

3.1.6 Önerme. *G* grafı *m* kenarlı, *n* köşeli, Δ maksimum dereceli ve δ minimum dereceli bir graf olsun. Bu durumda,

$$M_1(G) \leq \frac{4m^2 + 2m(n-1)(\Delta - \delta)}{n + \Delta - \delta}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin regüler graf ya da $\Delta + 1$ köşeli tam graf olması durumunda geçerlidir (Das 2004).

3.1.7 Teorem. *G* grafı *m* kenarlı, *n* (n>1) köşeli, Δ maksimum dereceli, Δ_2 ikinci maksimum dereceli ve δ minimum dereceli bir graf olsun. Bu durumda,

$$M_1(G) \leq \frac{(2m - \Delta)^2}{n-1} + \Delta^2 + \frac{(n-1)}{4}(\Delta_2 - \delta)^2$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin $d_2(H_1) = d_3(H_1) = \cdots = d_n(H_1) = \delta$ olacak şekildeki bir H_1 grafına ya da $d_2(H_2) = d_3(H_2) = \cdots = d_{p+1}(H_2) = \Delta_2$ ve $d_{p+2}(H_2) = d_{p+3}(H_2) = \cdots = d_{2p+1}(H_2) = \delta, n = 2p+1$ olacak şekildeki bir H_2 grafına izomorf olması durumunda geçerlidir. Burada $d_i, i = 2, 3, \ldots, n$, *G*'nin *i*-inci köşesinin derecesini göstermektedir (Das ve ark. 2009).

3.1.8 Teorem. *G* grafı *n* köşeye sahip bir graf olmak üzere

$$M_1(G) + M_1(\bar{G}) \leq n(n-1)^2$$

dir (Zhang 2005).

3.1.9 Teorem. *G* grafı m kenarlı, *n* köşeli, Δ maksimum dereceli, Δ_2 ikinci maksimum dereceli ve δ minimum dereceli bir graf olsun. Bu durumda,

$$M_1(G) + M_1(\bar{G}) \leq \frac{(n(n-2) - 2m + \delta + 1)^2 + (2m - \Delta)^2}{n-1} + \Delta^2 + (n - 1 - \delta)^2 + \frac{(n-1)}{4}[(\Delta - \delta)^2 + (\Delta_2 - \delta)^2]$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin regüler graf ya da P_3 grafı olması durumunda geçerlidir (Das ve ark. 2009).

3.1.10 Teorem. *G* grafı *m* kenarlı, *n* köşeli, Δ_1 maksimum dereceli, Δ_2 ikinci maksimum dereceli ve δ minimum dereceli bir graf olsun. Bu durumda,

$$M_2(G) \leq 2m^2 - (n-1)m\delta + \frac{1}{2}(\delta - 1)\left[\frac{(2m-\Delta)^2}{n-1} + \Delta^2 + \frac{(n-1)}{4}(\Delta_2 - \delta)^2\right]$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin regüler graf ya da $G \cong S_{1,n-1}$ ya da $G \cong S_{p+1,p}, n = 2p + 1$ olması durumunda geçerlidir (Das ve ark. 2009) .

3.1.11 Teorem. *G* grafı *n* köşeli bir graf iken

$$M_2(G) + M_2(\bar{G}) \leq \frac{n(n-1)^3}{2}$$

dir (Zhang 2005).

3.1.12 Teorem. *G* grafı *m* kenarlı, *n* köşeli bir graf olsun. Bu durumda,

$$M_1(G) + M_1(\bar{G}) \leq \frac{n(n-1)^3}{2} + 2m^2 - 3m(n-1)^2 + \left(n - \frac{3}{2}\right)\left[\frac{(2m-\Delta)^2}{n-1} + \Delta^2 + \frac{(n-1)}{4}(\Delta_2 - \delta)^2\right]$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin $d_2(H_1) = d_3(H_1) = \cdots = d_n(H_1) = \delta$ olacak şekildeki bir H_1 grafına ya da $d_2(H_2) = d_3(H_2) = \cdots = d_{p+1}(H_2) = \Delta_2$ ve $d_{p+2}(H_2) = d_{p+3}(H_2) = \cdots = d_{2p+1}(H_2) = \delta, n = 2p+1$ olacak şekildeki bir H_2 grafına izomorfik olması durumunda geçerlidir. Burada $d_i, i = 2,3, \ldots, n$, *G*'nin *i*-inci köşesinin derecesini göstermektedir (Das ve ark. 2009).

3.2 Birinci ve İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksleri

Bu kısımda, literatürde birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri olarak bilinen indeksler ve bunların temel özellikleri verilecektir.

Yakın zamanda, Todeschini ve ark. (2010), Todeschini ve Consonni (2010) Zagreb indekslerinin aşağıdaki şekilde tanımlanan çarpımsal şeklini önermişlerdir:

$$\Pi_1 = \Pi_1(G) = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)^2$$

$$\Pi_2 = \Pi_2(G) = \prod_{uv \in V(G)} d_G(u) d_G(v)$$

Bu iki graf değişmezi Gutman (2011) tarafından sırasıyla *birinci çarpımsal Zagreb indeksi ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksi* olarak adlandırılmıştır.

3.2.1 Tanım. *G* bir graf olmak üzere

$$NK = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)$$

çarpımına *Narumi-Katayama indeksi* denilir (Narumi ve Katayama 1984).

Açıkça birinci çarpımsal Zagreb indeksi Narumi-Katayama indeksinin karesidir, yani $\prod_1(G) = (NK)^2$'dir (Gutman 2011).

3.2.2 Örnek. Bazı iyi bilinen grafların birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri aşağıda listelenmiştir:

Çizelge 3.2.1 Bazı grafların birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

	P_n	C_n	S_n	K_n	$K_{r,s}$
$\Pi_1(G)$	2^{2n-4}	2^{2n}	$(n-1)^2$	$(n-1)^{2n}$	$r^{2s}s^{2r}$
$\Pi_2(G)$	2^{2n-4}	2^{2n}	$(n-1)^{n-1}$	$(n-1)^{n(n-1)}$	$(rs)^{rs}$

3.2.3 Teorem. $n \geq 5$ olmak üzere *n* köşeye sahip ağaçların kümesi $\mathcal{T}_n$ ile gösterilsin ve $T_n \in \mathcal{T}_n, T_n \ncong P_n, S_n$ olsun. Bu durumda,

$$\Pi_1(S_n) \leq \Pi_1(T_n) \leq \Pi_1(P_n)$$
$$\Pi_2(P_n) \leq \Pi_2(T_n) \leq \Pi_2(S_n)$$

İfadeleri geçerlidir (Gutman 2011).

3.2.4 Önerme. İkinci çarpımsal Zagreb indeksi

$$\Pi_2(G) = \prod_{x \in V(G)} [d_G(x)]^{d_G(x)}$$

şeklinde yazılabilir (Gutman 2011).

3.2.5 Teorem. *G, n* mertebeli ve *m* boyutlu bir graf olsun. Bu durumda,

$$\Pi_1(G) \leq \left(\frac{2m}{n}\right)^2$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir $\frac{2m}{n}$ regüler graf olması durumunda geçerlidir (Liu ve Zhang 2012).

3.2.6 Sonuç. *G*, *2n* mertebeli, bağlantılı bir iki parçalı graf olsun. Bu durumda,

$$\Pi_1(G) \leq n^{4n}$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir $K_{n,n}$ iki parçalı grafı olması durumunda geçerlidir (Liu ve Zhang 2012).

3.2.7 Teorem. *G, n* mertebeli ve *m* boyutlu basit olmayan bir graf olsun. Bu durumda,

$$\Pi_2(G) \leq \left(\frac{M_1(G)}{2m}\right)^{2m}$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir $\frac{2m}{n}$ regüler graf olması durumunda geçerlidir (Liu ve Zhang 2012).

3.2.8 Teorem. *G, n* mertebeli ve *m* boyutlu bir graf olsun. Bu durumda,

$$\Pi_2(G) \leq \left(\frac{M_2(G)}{m}\right)^{m}$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir $\frac{2m}{n}$ regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

3.3 Birinci ve İkinci Zagreb Eşindeksleri (Coindeksleri)

Bu kısımda literatürde mevcut olan ve daha sonra kullanılan birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri (coindeksleri) tanıtılıp temel özellikleri verilecektir.

3.3.1 Tanım. *G* grafının *birinci Zagreb eşindeksi (coindeksi)*

$$\overline{M}_1(G) = \sum_{uv \notin E(G)} [d(u) + d(v)]$$

olarak tanımlanır (Ashrafi ve ark. 2010, Ashrafi ve ark. 2011). Burada kenar oluşturmayan tüm köşe ikililerinin derecelerinin toplamlarının toplamı alınmaktadır.

3.3.2 Tanım. *G* grafının *ikinci Zagreb eşindeksi*

$$\overline{M}_2(G) = \sum_{uv \notin E(G)} d(u)d(v)$$

olarak tanımlanır (Ashrafi ve ark. 2010, Ashrafi ve ark. 2011). Burada kenar oluşturmayan tüm köşe ikililerinin derecelerinin çarpımlarının toplamı alınmaktadır.

3.3.3 Örnek. Bazı iyi bilinen grafların birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri Tablo 3.3.1'de listelenmiştir.

Çizelge 3.3.1 Bazı grafların birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri

	P_n	C_n	S_n	N_n	$K_{r,s}$
$\overline{M}_1(G)$	$2(n-2)^2$	$4\left[\binom{n}{2} - n\right]$	$2\binom{n-1}{2}$	$n(n-1)^2$	$rs(s+r+2)$
$\overline{M}_2(G)$	$2n^2 - 10n + 13$	$4\left[\binom{n}{2} - n\right]$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n}{2} \times (n-1)^2$	$r^2\binom{s}{2} + s^2\binom{r}{2}$

3.3.4 Önerme. *G*, *m* köşeli ve *n* kenarlı basit bir graf olsun. O halde

$$M_1(\bar{G}) = M_1(G) + 2(n-1)(\bar{m} - m)$$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

İspat.

$$\begin{aligned} M_1(\bar{G}) &= \sum_{u \in V(\bar{G})} d_{\bar{G}}(u)^2 = \sum_{u \in V(G)} [n - 1 - d_G(u)]^2 \\ &= \sum_{u \in V(G)} (n-1)^2 - 2(n-1) \sum_{u \in V(G)} d_G(u) + \sum_{u \in V(G)} d_G(u)^2 \\ &= n(n-1)^2 - 4m(n-1) + M_1(G) = M_1(G) + 2(n-1)(\bar{m} - m) \end{aligned}$$

3.3.5 Önerme. *G*, *m* köşeli ve *n* kenarlı basit bağlantılı bir graf olsun. O halde

$$\bar{M}_1(G) = 2m(n-1) - M_1(G)$$

ve

$$\bar{M}_2(G) = 2m^2 - M_2(G) - \frac{1}{2} M_1(G)$$

olur (Ashrafi ve ark. 2010).

İspat.

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(G) &= \sum_{uv \notin E(G)} [d(u) + d(v)] = \sum_{uv \notin E(G)} \left[2(n-1) - \left(d_{\bar{G}}(u) + d_{\bar{G}}(v)\right)\right] \\ &= 2(n-1)\bar{m} - M_1(\bar{G}) = 2m(n-1) - M_1(G). \end{aligned}$$

3.3.6 Önerme. *G* basit bir graf olsun. O halde $\bar{M}_1(G) = \bar{M}_1(\bar{G})$ (Ashrafi ve ark. 2010).

İspat. Önerme 3.4.2 $\bar{G}$'ye uygulanırsa $\bar{M}_1(\bar{G}) = 2\bar{m}(n-1) - M_1(\bar{G})$ elde edilir. Önerme 3.4.1'den $M_1(\bar{G})$ yerine konulursa

$$\bar{M}_1(\bar{G}) = 2\bar{m}(n-1) - M_1(G) - 2(n-1)(\bar{m} - m)$$

elde edilir ki bu Önerme 3.4.2'deki $\overline{M}_1(G)$'yi verir. Böylece bütün basit graflar için verilen önerme geçerli olur.

3.3.7 Lemma. *G*, *n* köşeli ve *m* kenarlı basit bir graf olsun. Bu durumda

$$\overline{M}_1(G) = 2m(n-1) - M_1(G)$$

olur (Ashrafi ve ark. 2010).

3.3.8 Sonuç. *G, n* mertebeli ve *m* boyutlu basit olmayan bir graf olsun. Bu durumda,

$$\Pi_2(G) \leq \left[\frac{2m(n-1) - \overline{M}_1(G)}{2m}\right]^{2m}$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir $\frac{2m}{n}$ regüler graf olması durumunda geçerlidir (Liu ve Zhang 2012).

3.4 Çarpımsal Zagreb Eşindeksleri

Bu kısımda literatürde mevcut olan ve daha sonra kullanılan birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri (coindeksleri) tanıtılıp bazı özellikleri verilecektir.

3.4.1. Tanım. *G* bir graf olmak üzere birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri sırasıyla,

$$\overline{\Pi}_1(G) = \prod_{uv \notin E(G)} (d_G(u) + d_G(v))$$

ve

$$\overline{\Pi}_2(G) = \prod_{uv \notin E(G)} d_G(u) d_G(v)$$

şeklinde tanımlanır (Xu ve ark. 2013).

3.4.2 Örnek. Bazı iyi bilinen grafların çarpımsal Zagreb eşindeksleri Tablo 3.4.1'de listelenmiştir.

Çizelge 3.4.1 Bazı grafların birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri

	P_n	C_n	S_n	N_n	$K_{r,s}$
$\overline{\Pi}_1(G)$	$2^{(n-3)(n-4)+1}$ $\times 3^{2(n-3)}$	$2^{2\left[\binom{n}{2}-n\right]}$	$2^{\binom{n-1}{2}}$	$[2(n-1)]^{\binom{n}{2}}$	$(2r)^{\binom{s}{2}}(2s)^{\binom{r}{2}}$
$\overline{\Pi}_2(G)$	$2^{(n-3)(n-2)}$	$2^{2\left[\binom{n}{2}-n\right]}$	1	$(n-1)^{n(n-1)}$	$r^{s(s-1)}s^{r(r-1)}$

3.4.3 Lemma. Bağlantılı bir *G* grafı için

$$\overline{\Pi}_2(G) = \prod_{v \in V(G)} d_G(v)^{n-1-d_G(v)}$$

olur (Xu ve ark. 2013).

3.4.4 Teorem. Bağlantılı bir *G* grafı için

$$\Pi_2(G)\overline{\Pi}_2(G) = (\Pi_1(G))^{\frac{n-1}{2}}$$

dir (Xu ve ark. 2013).

3.4.5 Teorem. *n* köşeli ve *m* kenarlı bağlantılı bir *G* grafı için

$$\overline{\Pi}_2(G) \leq \left(\frac{2(n-1)m - M_1(G)}{n(n-1) - 2m}\right)^{n(n-1)-2m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir $\frac{2m}{n}$-regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

3.4.6 Sonuç. *n* köşeli ve *m* kenarlı, bağlantılı bir *G* grafı için

$$\overline{\Pi}_2(G) \leq \left(\frac{\overline{M}_1(G)}{n(n-1)-2m}\right)^{n(n-1)-2m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir $\frac{2m}{n}$-regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

3.4.7 Sonuç. *n* köşeli ve *m* kenarlı bağlantılı bir *G* grafı için

$$\overline{\Pi}_1(G) \geq 2^{\frac{n(n-1)}{2}-m}\left(\overline{\Pi}_2(G)\right)^{\frac{1}{2}}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir (*n*-1, *a*)-biregüler ya da $\frac{2m}{n}$-regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

3.4.8 Teorem. *n* köşeli ve *m* kenarlı bağlantılı bir *G* grafı için

$$\overline{\Pi}_1(G) \leq \left(\frac{4m(n-1)-2M_1(G)}{n(n-1)-2m}\right)^{\binom{n}{2}-m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir (*n*-1, *a*)-biregüler ya da $\frac{2m}{n}$-regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

3.4.9 Sonuç. *n* köşeli ve *m* kenarlı bağlantılı bir *G* grafı için

$$\overline{\Pi}_1(G) \leq \left(\frac{2\overline{M}_1(G)}{n(n-1)-2m}\right)^{\binom{n}{2}-m}$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak *G*'nin bir (*n*-1, *a*)-biregüler ya da $\frac{2m}{n}$-regüler graf olması durumunda geçerlidir (Xu ve ark. 2013).

4. GRAF OPERASYONLARI

Bu bölümde literatürde bulunan graf operasyonları tanıtılacak ve bilinen bazı temel özellikleri verilecektir.

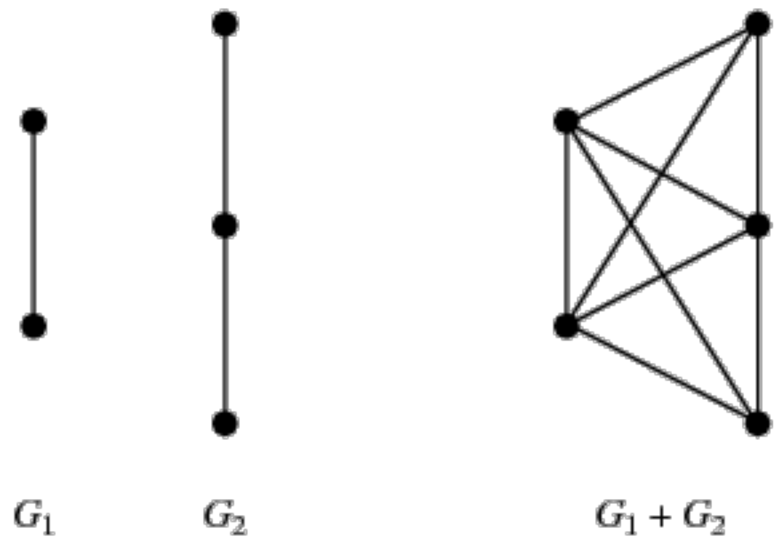
4.1 Tanım. G_1 ve G_2 graflarının $G_1 \cup G_2$ ile gösterilen *birleşimi*, $V_1 \cup V_2$ köşe kümesine ve $E_1 \cup E_2$ kenar kümesine sahip bir graftır. Burada V_1 ve V_2'nin ayrık olduğu varsayılmıştır.

İki grafın *birleşimi* en basit graf operasyonlarından birisidir.

4.2 Tanım. Ayrık V_1 ve V_2 köşe kümelerine sahip G_1 ve G_2 graflarının $G_1 + G_2$ veya $G_1 \vee G_2$ ile gösterilen *toplamı*, $V_1 \cup V_2$ köşe kümeli ve $E_1 \cup E_2 \cup \{u_1 u_2;\ u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$ kenar kümeli bir graftır.

Böylece, örneğin, $\overline{K_p} \vee \overline{K_q} = K_{pq}$, iki parçalı tam graf, olur. $|V(G_1 \vee G_2)| = n_1 + n_2$ ve $|E(G_1 \vee G_2)| = m_1 + m_2 + n_1 n_2$'dir.

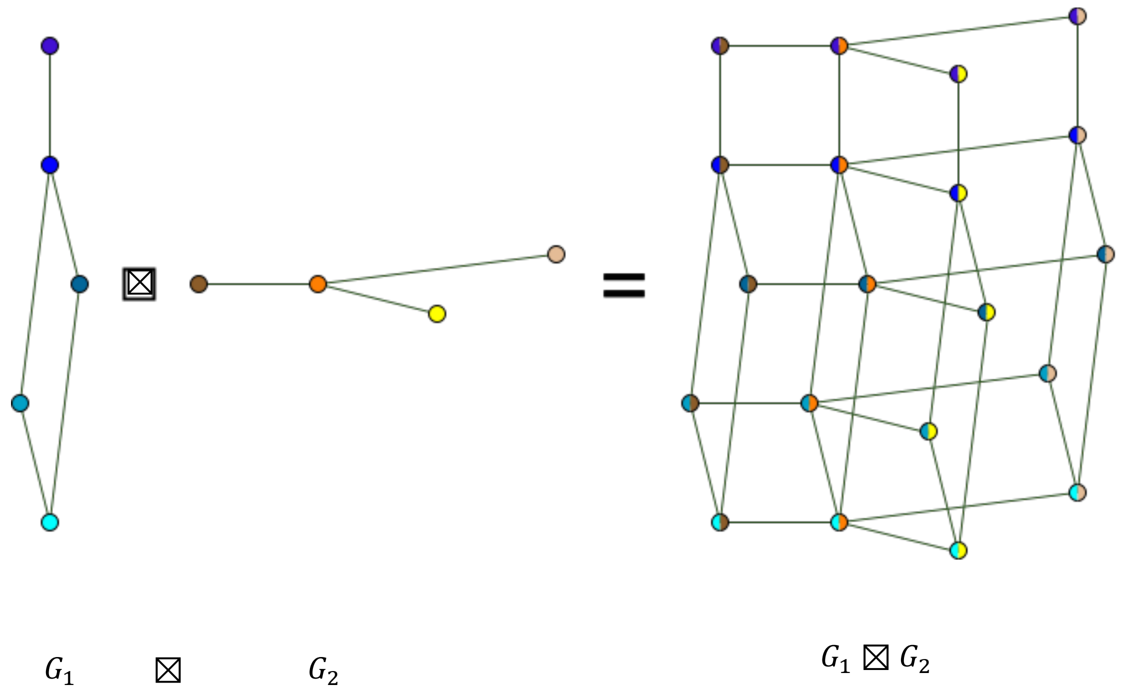
4.3 Örnek.



Şekil 4.1. G_1 ve G_2 graflarının $G_1 + G_2$ birleşimi

4.4 Tanım. G_1 ve G_2 graflarının $G_1 \boxtimes G_2$ ile gösterilen *kartezyen çarpımı*, $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ köşe kümesi üzerinde $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ köşelerinin $(u_1 = v_1\ ve\ \{u_2, v_2\} \in E(G_2))$ ya da $(u_2 = v_2\ ve\ \{u_1, v_1\} \in E(G_1))$ olduğunda bir kenarla birleştirilmesiyle elde edilen bir graftır. n_i ve m_i sırasıyla G_i grafının köşelerinin ve kenarlarının sayısını belirtmek üzere $|E(G_1 \boxtimes G_2)| = n_1 m_2 + n_2 m_1$'dir. $G_1 \boxtimes G_2$'nin bir (u_1, u_2) köşesinin derecesi $d_{G_1 \boxtimes G_2}((u_1, u_2)) = d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$'dir. İki grafın kartezyen çarpımı ancak ve ancak graflar bağlantılı ise bağlantılıdır.

4.5 Örnek.

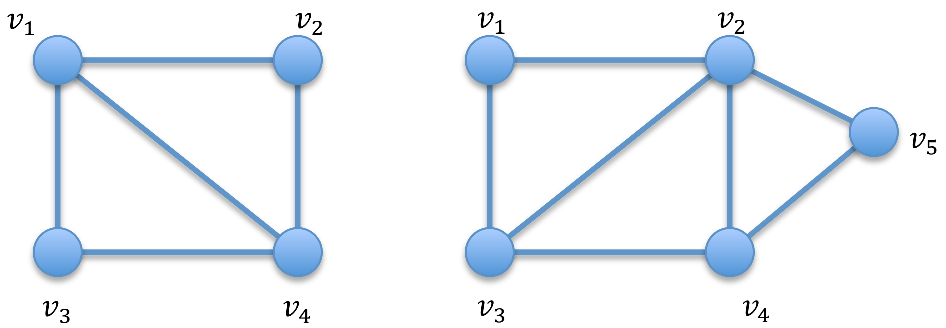


Şekil 4.2 G_1 ve G_2 graflarının $G_1 \boxtimes G_2$ kartezyen çarpımı

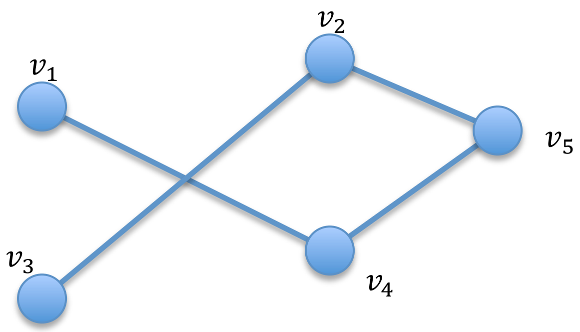
4.6 Tanım. G_1ve G_2 graflarının $G_1 \otimes G_2$ ile gösterilen *disjunction*ı $V(G_1) \times V(G_2)$ köşe kümesine sahip bir graftır. Bu köşe kümesindeki (u_1, u_2) ve (v_1, v_2) köşeleri, G_1 grafında u_1 köşesi ile v_1 köşesi komşu, yani $u_1 v_1 \in E(G_1)$, ya da G_2 grafında u_2 köşesi ile v_2 köşesi komşu, yani $u_2 v_2 \in E(G_2)$, olduğu zaman komşu olurlar. $G_1 \otimes G_2$ grafının kenar sayısı $n_1^2 m_2 + n_2^2 m_1 - 2 m_1 m_2$'ye eşittir ve bir (u_1, u_2) köşesinin derecesi $d_{G_1 \otimes G_2}((u_1, u_2)) = n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2)$ olur.

4.7 Tanım. G_1ve G_2 graflarının $G_1 \oplus G_2$ ile gösterilen *simetrik fark*ı $V(G_1) \times V(G_2)$ köşe kümesine sahip bir graftır. Bu köşe kümesindeki (u_1, u_2) ve (v_1, v_2) köşeleri G_1 grafında u_1 köşesi ile v_1 köşesi komşu ya da G_2 grafında u_2 köşesi ile v_2 köşesi komşu (her ikisi birden değil) olduğu zaman komşu olurlar. $G_1 \oplus G_2$ grafının kenar sayısı $n_1^2 m_2 + n_2^2 m_1 - 4m_1 m_2$'ye eşittir ve bir (u_1, u_2) köşesinin derecesi $d_{G_1 \oplus G_2}((u_1, u_2)) = n_2 d_{G_1}(u_1) + n_1 d_{G_2}(u_2) - 2d_{G_1}(u_1) d_{G_2}(u_2)$ olur.

4.8 Örnek.



G_1 G_2

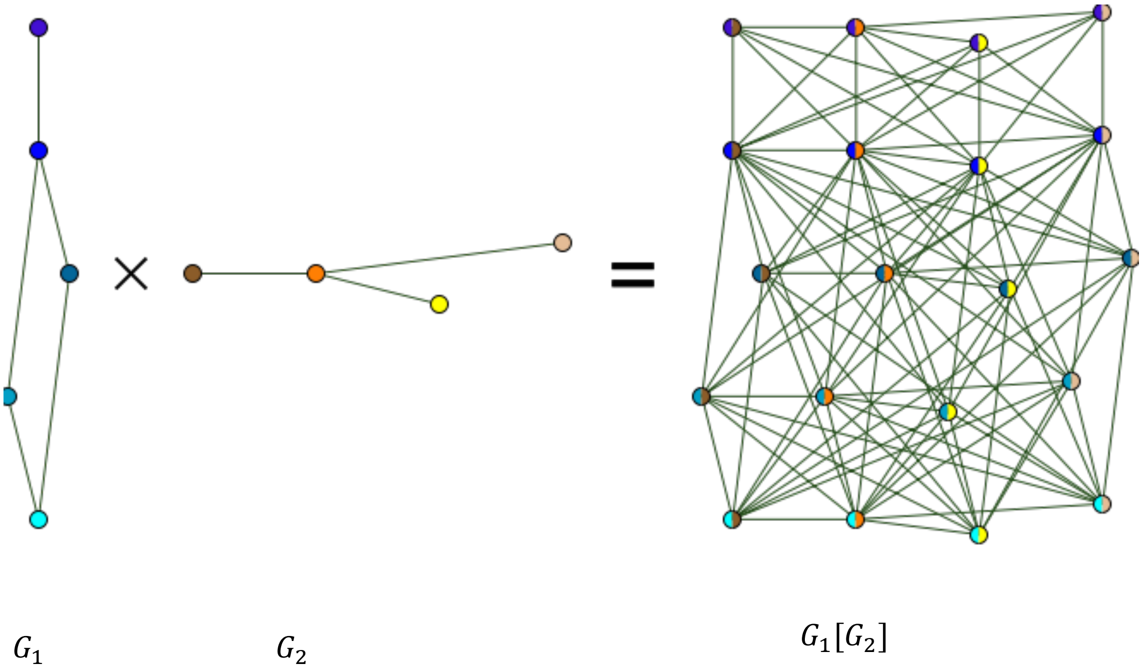


$G_1 \oplus G_2$ Simetrik farkı

Şekil 4.3 G_1 ve G_2 graflarının $G_1 \oplus G_2$ simetrik farkı

4.9 Tanım. Ayrık $V(G_1)$ ve $V(G_2)$ köşe kümelerine ve ayrık $E(G_1)$ ve $E(G_2)$ kenar kümelerine sahip G_1ve G_2 graflarının $G_1[G_2]$ ile gösterilen *bileşimi* (*composition*), $V(G_1) \times V(G_2)$ köşe kümesine sahip bir graftır. Bu köşe kümesindeki (u_1, u_2) ve (v_1, v_2) köşeleri u_1 köşesi ile v_1 köşesi komşu ya da $u_1 = v_1$ ve u_2 köşesi ile v_2 köşesi komşu olduğu zaman komşu olurlar. $G_1[G_2]$ işlemi aynı zamanda *lexicographic çarpım* *olarak* da adlandırılır (Harary 1994). Bileşim işlemi değişmeli değildir. $G_1[G_2]$ grafının kenar sayısı $n_1m_2 + m_1n_2^2$'ye eşittir. $G_1[G_2]$ grafının bir (u_1, u_2) köşesinin derecesi $d_{G_1[G_2]}((u_1, u_2)) = n_2 d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$'dir.

4.10 Örnek.



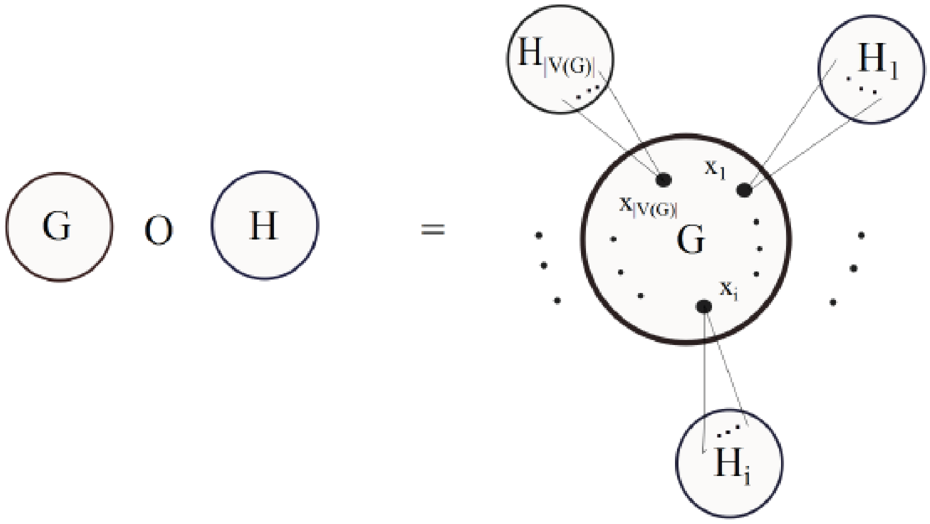
Şekil 4.4 G_1 ve G_2 graflarının $G_1[G_2]$ bileşimi

4.11 Tanım. G_1 ve G_2 graflarının $G_1 \circ G_2$ ile gösterilen *corona çarpımı* n_1 köşeye sahip G_1 grafının bir kopyası ve G_2 grafının n_1 tane kopyasını alarak ve sonra G_1'in i-inci köşesini $i = 1,2,\ldots,n_1$ olmak üzere G_2'nin i-inci kopyasındaki her bir köşeye katarak elde edilen Γ grafı olarak tanımlanır. $|V(G_1 \circ G_2)| = n_1(1 + n_2)$ ve $|E(G_1 \circ G_2)| = m_1 + n_1(n_2 + m_2)$'dir.

$G_1 = (V, E)$ ve, $G_2 = (V, E)$, $V(G_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}\}$, $|E(G_1)| = m_1$ ve $V(G_2) = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n_2}\}$, $|E(G_2)| = m_2$ olacak şekilde iki graf olsun. Corona çarpımının tanımından $G_1 \circ G_2$, $V(G_1 \circ G_2) = \{(u_i, v_j), i = 1,2, \ldots, n_1; j = 0,1,2, \ldots, n_2\}$ ve $E(G_1 \circ G_2) = \{((u_i, v_0), (u_k, v_0)), (u_i, u_k) \in E(G_1)\} \cup \left\{\left((u_i, v_j), (u_i, v_l)\right), (v_j, v_l) \in E(G_2), i = 1,2, \ldots, n_1\right\} \cup \{((u_i, v_0), (u_i, v_l)), l = 1,2, \ldots, n_2; i = 0,1,2, \ldots, n_1\}$ olmak üzere $G_1 \circ G_2$, $n_1(1 + n_2)$ tane köşeye ve $m_1 + n_1m_2 + n_1n_2$ tane kenara sahiptir. G_1

bağlantılı ise $G_1 \circ G_2$'nin de bağlantılı olduğu ve genellikle $G_1 \circ G_2$ ve $G_2 \circ G_1$'nin izomorfik olmadıkları açıktır.

4.12 Örnek.



Şekil 4.5 Grafların corona çarpımı

4.13 Lemma. G_1 ve G_2 iki graf olmak üzere,

a) $|V(G_1 \boxtimes G_2)| = |V(G_1 \otimes G_2)| = |V(G_1[G_2])| = |V(G_1 \oplus G_2)| = |V(G_1)||V(G_2)|$,
$|E(G_1 \boxtimes G_2)| = |E(G_1)||V(G_2)| + |E(G_2)||V(G_1)|$,
$|E(G_1 \vee G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + |V(G_1)||V(G_2)|$,
$|E(G_1[G_2])| = |E(G_1)||V(G_2)|^2 + |E(G_2)||V(G_1)|$,
$|E(G_1 \otimes G_2)| = |E(G_1)||V(G_2)|^2 + |E(G_2)||V(G_1)|^2 - 2|E(G_1)||E(G_2)|$,
$|E(G_1 \oplus G_2)| = |E(G_1)||V(G_2)|^2 + |E(G_2)||V(G_1)|^2 - 4|E(G_1)||E(G_2)|$

dir.

b) $G_1 \boxtimes G_2$'nin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart G_1 ve G_2'nin bağlantılı olmasıdır.

c) (a, c) ve (b, d), $G_1 \boxtimes G_2$'nin köşeleri ise

$$d_{G_1 \boxtimes G_2}\big((a, c), (b, d)\big) = d_{G_1}(a, b) + d_{G_2}(c, d)$$

dir.

d) Grafların kartezyen çarpımı, toplamı, bileşimi, disjunctionı ve simetrik farkları birleşmelidir ve bileşim dışında hepsi değişmelidir.

e) $d_{G_1 \vee G_2}(u,v) = \begin{cases} 0 & u = v \\ 1 & uv \in E(G_1)\ veya\ uv \in E(G_2)\ veya\ (u \in V(G_1) \wedge v \in V(G_2)) \\ 2 & diğer\ hallerde, \end{cases}$

f) $d_{G_1[G_2]}((a,b),(c,d)) = \begin{cases} d_{G_1}(a,c) & a \neq c \\ 0 & a = c \wedge b = d \\ 1 & a = c \wedge bd \in E(G_2) \\ 2 & a = c \wedge bd \notin E(G_2), \end{cases}$

g) $d_{G_1 \otimes G_2}\big((a,b),(c,d)\big) = \begin{cases} 0 & a = c \wedge b = d \\ 1 & ac \in E(G_1) \vee bd \in E(G_2) \\ 2 & diğer\ hallerde, \end{cases}$

h)
$d_{G_1 \oplus G_2}\big((a,b),(c,d)\big) =$
$\begin{cases} 0 & a = c \wedge b = d \\ 1 & ac \in E(G_1) \vee bd \in E(G_2)\ \ fakat\ her\ ikisi\ birden\ değil \\ 2 & diğer\ hallerde, \end{cases}$

i) $d_{G_1 \boxtimes G_2}\big((a,b)\big) = d_{G_1}(a) + d_{G_2}(b),$

j) $d_{G_1[G_2]}\big((a,b)\big) = |V(G_2)| d_{G_1}(a) + d_{G_2}(b),$

k) $d_{G_1 \vee G_2}(a) = \begin{cases} d_{G_1}(a) + |V(G_2)| & a \in V(G_1) \\ d_{G_2}(a) + |V(G_1)| & a \in V(G_2), \end{cases}$

l) $d_{G_1 \otimes G_2}\big((a,b)\big) = |V(G_2)| d_{G_1}(a) + |V(G_1)| d_{G_2}(b) - d_{G_1}(a) d_{G_2}(b),$

m) $d_{G_1 \oplus G_2}\big((a,b)\big) = |V(G_2)| d_{G_1}(a) + |V(G_1)| d_{G_2}(b) - 2 d_{G_1}(a) d_{G_2}(b)$’dir (Khalifeh ve ark. 2009).

5. GRAF OPERASYONLARININ BİRİNCİ ve İKİNCİ ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümde grafların kartezyen çarpımı (cartesian product), bileşimi (composition), corona çarpımı (corona product), toplamı, disjunction ve simetrik farkının (symmetric difference) birinci ve ikinci Zagreb indeksleri için literatürde bulunan bazı teoremler verilecektir.

5.1 Teorem. G_1 ve G_2 iki graf olsun. O halde

a) $M_1(G_1[G_2]) = |V(G_2)|^3 M_1(G_1) + |V(G_1)| M_1(G_2) + 8|V(G_2)||E(G_2)||E(G_1)|$,

b) $$\begin{aligned} M_1(G_1 \otimes G_2) = {} & (|V(G_1)||V(G_2)|^2 - 4|E(G_2)||V(G_2)|) M_1(G_1) + M_1(G_1) M_1(G_2) \\ & +(|V(G_2)||V(G_1)|^2 - 4|E(G_1)||V(G_1)|) M_1(G_2) \\ & +8|E(G_1)||E(G_2)||V(G_1)||V(G_2)|, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} M_1(G_1 \oplus G_2) = {} & (|V(G_1)||V(G_2)|^2 - 8|E(G_2)||V(G_2)|) M_1(G_1) + 4M_1(G_1) M_1(G_2) \\ & +(|V(G_2)||V(G_1)|^2 - 8|E(G_1)||V(G_1)|) M_1(G_2) \\ & +8|E(G_1)||E(G_2)||V(G_1)||V(G_2)| \end{aligned}$$

dir (Khalifeh ve ark. 2009).

İspat. $d_{G_1[G_2]}\big((a,b)\big) = |V(G_2)| d_{G_1}(a) + d_{G_2}(b)$ olduğundan

$$\begin{aligned} M_1(G_1[G_2]) = {} & \sum_{u \in V(G_1)} \sum_{v \in V(G_2)} \big[|V(G_2)|^2 d_{G_1}(u)^2 + 2|V(G_2)| d_{G_1}(u) d_{G_2}(v) \\ & + d_{G_2}(v)^2\big] \\ & = |V(G_2)|^3 M_1(G_1) + |V(G_1)| M_1(G_2) + 8|V(G_2)||E(G_2)||E(G_1)| \end{aligned}$$

elde edilir. b ve c şıkkının ispatı ise Lemma 4.13'ün l ve m şıkları kullanılarak yapılır (Khalifeh ve ark. 2009).

5.2 Teorem. G_1 ve G_2 iki graf olsun. O halde

$$M_2(G_1 \boxtimes G_2) = |V(G_1)|M_2(G_2) + |V(G_2)|M_2(G_1) + 3|E(G_2)|M_1(G_1) + 3|E(G_1)|M_1(G_2)$$

dir (Khalifeh ve ark. 2009).

İspat. $d_{G_1 \boxtimes G_2}\big((a,b)\big) = d_{G_1}(a) + d_{G_2}(b)$ olduğundan

$$\begin{aligned} M_2(G_1 \boxtimes G_2) &= \sum_{(a,b)(c,d) \in E(G_1 \boxtimes G_2)} d_{G_1 \boxtimes G_2}(a,b)\, d_{G_1 \boxtimes G_2}(c,d) \\ &= \sum_{u \in V(G_1)} \sum_{bd \in E(G_2)} (\, d_{G_1}(u) + d_{G_2}(b)) \left(d_{G_1}(u) + d_{G_2}(d) \right) \\ &+ \sum_{v \in V(G_2)} \sum_{ac \in E(G_1)} (\, d_{G_1}(a) + d_{G_2}(v)) \left(d_{G_1}(c) + d_{G_2}(v) \right) \\ &= |V(G_1)|M_2(G_2) + |V(G_2)|M_2(G_1) + 3|E(G_2)|M_1(G_1) \\ &+ 3|E(G_1)|M_1(G_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur (Khalifeh ve ark. 2009).

5.3 Teorem. G_1 ve G_2 iki graf olsun. O halde

a) $M_2(G_1[G_2]) = |V(G_2)|^4 M_2(G_1) + |V(G_1)|M_2(G_2) + 3|V(G_2)|^2|E(G_2)|M_1(G_1)$
$+2|V(G_2)||E(G_1)|M_1(G_2) + 4|E(G_1)||E(G_2)|^2,$

b) $M_2(G_1 \otimes G_2) = ((|V(G_1)|^2 - 2|E(G_1)|)^2 - 2|V(G_1)|^2|E(G_1)|)\, M_2(G_2)$
$+((|V(G_2)|^2 - 2|E(G_2)|)^2 - 2|V(G_2)|^2|E(G_2)|)\, M_2(G_1)$
$+(2|V(G_1)|^2|V(G_2)||E(G_1)| - 4|E(G_1)|^2|V(G_2)|)M_1(G_2)$
$+(2|V(G_2)|^2|V(G_1)||E(G_2)| - 4|E(G_2)|^2|V(G_1)|)M_1(G_1)$
$-|V(G_1)||V(G_2)|)M_1(G_2)M_1(G_1) + 2|V(G_2)|M_2(G_1)M_1(G_2)$
$+2|V(G_1)|M_2(G_2)M_1(G_1) - 2M_2(G_2)M_2(G_1)$
$+4|E(G_2)||E(G_1)|(|V(G_2)|^2|E(G_1)| + |V(G_1)|^2|E(G_2)|)$

dir (Khalifeh ve ark. 2009).

5.4 Teorem. G_1 ve G_2 iki graf olsun. O halde

$$\begin{aligned} M_2(G_1 \oplus G_2) = &((|V(G_1)|^2 - 2|E(G_1)|)^2 - 4|V(G_1)|^2|E(G_1)|)\, M_2(G_2) \\ &+((|V(G_2)|^2 - 2|E(G_2)|)^2 - 4|V(G_2)|^2|E(G_2)|)\, M_2(G_1) \\ &+(2|V(G_1)|^2|V(G_2)||E(G_1)| - 8|E(G_1)|^2|V(G_2)|)M_1(G_2) \\ &+(2|V(G_2)|^2|V(G_1)||E(G_2)| - 8|E(G_2)|^2|V(G_1)|)M_1(G_1) \\ &-2|V(G_1)||V(G_2)|)M_1(G_2)M_1(G_1) + 8|V(G_2)|M_2(G_1)M_1(G_2) \\ &+8|V(G_1)|M_2(G_2)M_1(G_1) - 16M_2(G_2)M_2(G_1) \\ &+4|E(G_2)||E(G_1)|(|V(G_2)|^2|E(G_1)| + |V(G_1)|^2|E(G_2)|) \end{aligned}$$

dir (Khalifeh ve ark. 2009).

5.5 Önerme. G_1 ve G_2 basit graflar olsun. O halde,

a) $\bar{M}_1(G_1 \cup G_2) = \bar{M}_1(G_1) + \bar{M}_1(G_2) + 2(m_1 n_2 + m_2 n_1)$;
b) $\bar{M}_2(G_1 \cup G_2) = \bar{M}_2(G_1) + \bar{M}_2(G_2) + 4m_1 m_2$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

İspat. Bir *u* köşesinin $d_{G_1 \cup G_2}(u)$ derecesi *u*'nun her bir G_i grafındaki derecelerinin toplamına eşittir. Böylece $G_1 \cup G_2$ grafının birinci Zagreb eşindeksi de bileşenlerinin birinci Zagreb eşindeksleriyle bileşenler arasındaki atlanmış kenarlardan gelen katkıların toplamına eşittir. Atlanılan kenarlar K_{n_1,n_2}'nin kenar kümesini oluşturduğundan $n_1 n_2$ tanedir ve toplam katkı,

$$\sum_{u \in V(G_1)} \left[\sum_{v \in V(G_2)} (d(u) + d(v)) \right] = \sum_{u \in V(G_1)} [n_2 d(u) + 2m_2] = 2(m_1 n_2 + m_2 n_1)$$

olur. Böylelikle önermenin birinci kısmının ispatı tamamlanmış olur. Önermenin ikinci kısmı da benzer şekilde yapılır. G_1 ile G_2 arasındaki atlanmış kenarlardan gelen katkı

$$\sum_{u \in V(G_1)} \left[\sum_{v \in V(G_2)} d(u)d(v) \right] = \sum_{u \in V(G_1)} d(u) \sum_{v \in V(G_2)} d(v) = 4m_1 m_2$$

olur.

5.6 Önerme. G_1 ve G_2 basit graflar olsun. O halde,

a) $\bar{M}_1(G_1+G_2)=\bar{M}_1(G_1)+\bar{M}_1(G_2)+2(\bar{m}_1 n_2+\bar{m}_2 n_1)$;
b) $\bar{M}_2(G_1+G_2)=\bar{M}_2(G_1)+\bar{M}_2(G_2)+n_2\bar{M}_1(G_1)+n_1\bar{M}_1(G_2)+\bar{m}_1 n_2^2+\bar{m}_2 n_1^2$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

İspat. Birinci önermenin ispatı $G_1+G_2=\overline{\bar{G}_1\cup\bar{G}_2}$ kullanılarak gösterilebilir. İkinci önermenin ispatı için $\forall u\in V(G_1), v\in V(G_2)$ için $d_{G_1+G_2}(u)=d_{G_1}(u)+n_2$ ve $d_{G_1+G_2}(v)=d_{G_2}(v)+n_1$ olduğu göz önüne alınsın. G_1 ve G_2 arasında oluşabilecek bütün kenarlar G_1+G_2'de bulunduğundan atlanmış kenar bulunmamaktadır. Dolayısıyla katkıları da sıfır olur. G_1 ve G_2'deki atlanmış kenarlardan gelen katkılar,

$$\sum_{e\in E(G_1)}\left[(d_{G_1}(u)+n_2)(d_{G_1}(v)+n_2)\right]=\bar{M}_2(G_1)+n_2\bar{M}_1(G_1)+\bar{m}_1 n_2^2$$

ve G_2'deki atlanmış kenarlar üzerinden toplam da benzer olarak verilir. Bu iki katkı toplanarak ikinci önerme elde edilir.

5.7 Önerme. G_1 ve G_2 iki graf olmak üzere

a)
$$\bar{M}_1(G_1\boxtimes G_2)=2(n_1m_2+n_2m_1)^2(n_1n_2-1)-8m_1m_2-n_2M_1(G_1)-n_1M_1(G_2)$$
b)
$$\begin{aligned}\bar{M}_2(G_1\boxtimes G_2)&=2(n_1m_2+n_2m_1)^2-4m_1m_2-[n_1M_2(G_2)+n_2M_2(G_1)]\\&\quad-\left[\left(3m_2+\frac{1}{2}n_2\right)M_1(G_1)+\left(3m_1+\frac{1}{2}n_1\right)M_1(G_2)\right]\end{aligned}$$

olur (Ashrafi ve ark. 2010).

5.8 Sonuç. $\bar{M}_1(P_r\boxtimes P_s)=2[rs(2rs-r-s-10)+4(2r+2s-1)]$;

$\bar{M}_1(P_r\boxtimes C_q)=2q[2qr^2-qr-10r+8]$;
$\bar{M}_1(C_p\boxtimes C_q)=4pq[pq-5]$ (Ashrafi ve ark. 2010).

5.9 Önerme.

$$\begin{aligned}\bar{M}_1(G_1 \otimes G_2) = {} & 4m_1m_2(1-3n_1n_2) + 2(n_1n_2-1)(n_1^2m_2 + n_2^2m_1) \\ & + n_2(4m_2 - n_1n_2)M_1(G_1) + n_1(4m_1 - n_1n_2)M_1(G_2) \\ & - M_1(G_1)M_1(G_2)\end{aligned}$$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

5.10 Önerme.

$$\begin{aligned}\bar{M}_1(G_1 \oplus G_2) = {} & 2(n_1n_2-1)(n_1^2m_2 + n_2^2m_1) + 8m_1m_2(1-2n_1n_2) \\ & + n_2(8m_2 - n_1n_2)M_1(G_1) + n_1(8m_1 - n_1n_2)M_1(G_2) \\ & - 4M_1(G_1)M_1(G_2)\end{aligned}$$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

5.11 Önerme.

$$\begin{aligned}\bar{M}_1(G_1[G_2]) = {} & 2n_1n_2(n_1m_2 + m_1n_2^2) - 2m_1(n_1 + n_2^2) - 8n_2m_1m_2 - n_2^3M_1(G_1) \\ & - n_1M_1(G_2)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{M}_2(G_1[G_2]) = {} & 2m_1n_2^2(m_1n_2^2 + 2m_2n_1) + 2m_2^2n_1^2 - 4m_1m_2(n_2 + m_2) \\ & - n_2^2\left(3m_2 + \frac{1}{2}n_2\right)M_1(G_1) - \left(\frac{n_1}{2} + 2n_2m_1\right)M_1(G_2) - (n_2^4M_2(G_1) \\ & + n_1M_2(G_2))\end{aligned}$$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

5.12 Önerme.

$$\begin{aligned}\bar{M}_1(G_1 \circ G_2) = {} & \bar{M}_1(G_1) + n_1\bar{M}_1(G_2) + 2[n_1(\bar{m}_2 - m_2) + n_2(\bar{m}_1 - m_1)] + 2m_2n_1^2 \\ & + n_1n_2[2(m_2 - n_2)(n_1 - 1) + n_1 + 2m_1 - 1]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{M}_2(G_1 \circ G_2) = {} & \bar{M}_2(G_1) + n_2\bar{M}_1(G_1) + n_1[\bar{M}_1(G_2) + \bar{M}_2(G_2)] + n_2^2\bar{m}_1 + n_1\bar{m}_2 \\ & + n_1n_2\left(4n_1m_2 + \frac{3}{2}n_1n_2 - 4m_2 - \frac{3}{2}n_2\right) + (n_1 - 1)(4m_1m_2 + 2n_2m_1 \\ & + 2m_2^2n_1)\end{aligned}$$

dir (Ashrafi ve ark. 2010).

6. GRAF OPERASYONLARININ BİRİNCİ ve İKİNCİ ÇARPIMSAL ZAGREB İNDEKSLERİ

6.1 Giriş

Bu kısımda toplam, corona çarpım, kartezyen çarpım, bileşim, disjunction vb. gibi çeşitli graf işlemlerinin çarpımsal Zagreb indeksleri için bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Dahası bazı iyi bilinen graflar için hesaplamalar yapılmıştır. İlk iki lemma hariç tüm sonuçlar bu tez çalışmasında elde edilmiş orijinal sonuçlardır.

6.2 Graf Operasyonlarının Çarpımsal Zagreb İndeksleri

Bu kısıma literatürde bulunan ve iyi bilinen iki eşitsizlikle başlanılacaktır.

6.2.1 Lemma. (AO-GO Eşitsizliği) $x_1, x_2, \dots, x_n$ negatif olmayan sayılar olsun. O halde

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \tag{6.2.1}$$

dir. Eşitlik bütün x_k'ların birbirine eşit olması durumunda geçerlidir.

6.2.2 Lemma. (Ağırlıklı AO-GO eşitsizliği) $x_1, x_2, \dots, x_n$ negatif olmayan sayılar ve $w_1, w_2, \dots, w_n$ negatif olmayan ağırlıklar olsun. $w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ alalım. Eğer $w > 0$ ise eşitsizlik

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w} \geq \sqrt[n]{x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n}} \tag{6.2.2}$$

olur. Eşitlik bütün $w_k > 0$'lı x_k'ların birbirine eşit olması durumunda geçerlidir.

6.2.3 Teorem. G_1 ve G_2 iki graf olsun. O halde

$$\Pi_1(G_1 \vee G_2) \leq \left[\frac{M_1(G_1) + 4m_1n_2 + n_1n_2^2}{n_1}\right]^{n_1} \times \left[\frac{M_1(G_2) + 4n_1m_2 + n_2n_1^2}{n_2}\right]^{n_2} \qquad (6.2.3)$$

ve

$$\Pi_2(G_1 \vee G_2) \leq \left[\frac{M_2(G_1) + n_2M_1(G_1) + m_1n_2^2}{m_1}\right]^{m_1} \times \left[\frac{M_2(G_2) + n_1M_1(G_2) + m_2n_1^2}{m_2}\right]^{m_2} \times \left[\frac{4m_1m_2 + 2n_1n_2(m_1 + m_2) + (n_1n_2)^2}{n_1n_2}\right]^{n_1n_2} \qquad (6.2.4)$$

dir. Burada n_1 ve n_2 sırasıyla G_1 ve G_2'nin köşe sayıları, m_1 ve m_2 ise kenar sayılarıdır. Dahası (6.2.3) ve (6.2.4)'deki eşitlik ancak ve ancak G_1 ve G_2'nin her ikisinin de regüler graf, yani, $G_1 \vee G_2$'nin regüler graf olması halinde geçerlidir.

İspat. Şimdi

$$\begin{aligned}\Pi_1(G_1 \vee G_2) &= \prod_{(u_i,v_j)\in V(G_1 \vee G_2)} d_{G_1 \vee G_2}(u_i, v_j)^2 \\ &= \prod_{u_i\in V(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i) + n_2\right)^2 \prod_{v_j\in V(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j) + n_1\right)^2 \\ &= \prod_{u_i\in V(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)^2 + 2n_2d_{G_1}(u_i) + n_2^2\right) \\ &\times \prod_{v_j\in V(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j)^2 + 2n_1d_{G_2}(v_j) + n_1^2\right)\end{aligned}$$

ve (6.2.1)'den yukarıdaki eşitlik aslında

$$\Pi_1(G_1 \vee G_2) \leq \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)}\left(d_{G_1}(u_i)^2 + 2n_2 d_{G_1}(u_i) + n_2^2\right)}{n_1}\right]^{n_1}$$

$$\times \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)}\left(d_{G_2}(v_j)^2 + 2n_1 d_{G_2}(v_j) + n_1^2\right)}{n_2}\right]^{n_2}$$

$$= \left[\frac{M_1(G_1) + 4m_1 n_2 + n_1 n_2^2}{n_1}\right]^{n_1} \times \left[\frac{M_1(G_2) + 4n_1 m_2 + n_2 n_1^2}{n_2}\right]^{n_2}$$

dir. Dahası, yukarıdaki eşitlik ancak ve ancak Lemma 1'den,

$$d_{G_1}(u_i)^2 + 2n_2 d_{G_1}(u_i) + n_2^2 = d_{G_1}(u_k)^2 + 2n_2 d_{G_1}(u_k) + n_2^2 \qquad \left(u_i, u_k \in V(G_1)\right)$$

ve

$$d_{G_2}(v_j)^2 + 2n_1 d_{G_2}(v_j) + n_1^2 = d_{G_2}(v_l)^2 + 2n_1 d_{G_2}(v_l) + n_1^2 \qquad \left(v_j, v_l \in V(G_2)\right)$$

yani, $u_i, u_k \in V(G_1)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ için

$$\left(d_{G_1}(u_i) - d_{G_1}(u_k)\right)\left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_1}(u_k) + 2n_2\right) = 0$$

ve

$$\left(d_{G_2}(v_j) - d_{G_2}(v_l)\right)\left(d_{G_2}(v_k) + d_{G_2}(v_l) + 2n_1\right) = 0$$

ise geçerlidir. Yani $u_i, u_k \in V(G_1)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ için $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ elde ederiz. Böylece (3)'deki eşitlik G_1G$_1$ ve G_2'nin her ikisinin de regüler graf, yani, $G_1 \vee G_2$'nin regüler graf olması halinde geçerlidir.

Şimdi,

$$\Pi_2(G_1 \vee G_2) = \prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l) \in E(G_1 \vee G_2)} d_{G_1 \vee G_2}(u_i, v_j) d_{G_1 \vee G_2}(u_k, v_l)$$

olduğundan

$$\Pi_2(G_1 \vee G_2) = \prod_{u_iu_k \in E(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i) + n_2\right)\left(d_{G_1}(u_k) + n_2\right)$$
$$\times \prod_{v_jv_l \in E(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j) + n_1\right)\left(d_{G_2}(v_l) + n_1\right)$$
$$\times \prod_{u_i \in V(G_1), v_j \in V(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i) + n_2\right)\left(d_{G_2}(v_j) + n_1\right)$$

elde edilir ve (6.2.1)'den

$$\Pi_2(G_1 \vee G_2)$$
$$\leq \left[\frac{\sum_{u_iu_k \in E(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)d_{G_1}(u_k) + n_2\left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_1}(u_k)\right) + n_2^2\right)}{m_1}\right]^{m_1}$$
$$\times \left[\frac{\sum_{v_jv_l \in E(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j)d_{G_2}(v_l) + n_1\left(d_{G_2}(v_j) + d_{G_2}(v_l)\right) + n_1^2\right)}{m_2}\right]^{m_2}$$
$$\times \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1), v_jv_l \in E(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_j) + n_2 d_{G_2}(v_j) + n_1 d_{G_1}(u_i) + n_1n_2\right)}{n_1n_2}\right]^{n_1n_2}. \quad (6.2.5)$$

elde edilir. Bununla birlikte son eşitsizlikten

$$\Pi_2(G_1 \vee G_2)$$
$$= \left[\frac{M_2(G_1) + n_2M_1(G_1) + m_1n_2^2}{m_1}\right]^{m_1} \times \left[\frac{M_2(G_2) + n_1M_1(G_2) + m_2n_1^2}{m_2}\right]^{m_2}$$
$$\times \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)} d_i \sum_{v_j \in V(G_2)} d_j^* + n_1n_2 \sum_{v_i \in V(G_1)} d_i + n_1n_2 \sum_{v_j \in V(G_2)} d_j^* + n_1^2n_2^2}{n_1n_2}\right]^{n_1n_2}$$
$$= \left[\frac{M_2(G_1) + n_2M_1(G_1) + m_1n_2^2}{m_1}\right]^{m_1} \times \left[\frac{M_2(G_2) + n_1M_1(G_2) + m_2n_1^2}{m_2}\right]^{m_2}$$
$$\times \left[\frac{4m_1m_2 + 2n_1n_2(m_1 + m_2) + (n_1n_2)^2}{n_1n_2}\right]^{n_1n_2}$$

elde edilir. Dahası her iki bağlantılı G_1 ve G_2 grafları için (6.2.5)'deki eşitsizlik ancak ve ancak herhangi $u_iu_r, u_iu_k \in E(G_1)$ için

$$d_{G_1}(u_i)d_{G_1}(u_r) + n_2\left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_1}(u_r)\right) + n_2^2$$
$$= d_{G_1}(u_i)d_{G_1}(u_k) + n_2\left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_1}(u_k)\right) + n_2^2$$

ve $v_jv_r, v_jv_l \in E(G_2)$ için

$$d_{G_2}(v_j)d_{G_2}(v_r) + n_1\left(d_{G_2}(v_j) + d_{G_2}(v_r)\right) + n_1^2$$
$$= d_{G_2}(v_j)d_{G_2}(v_l) + n_1\left(d_{G_2}(v_j) + d_{G_2}(v_l)\right) + n_1^2$$

olduğunda geçerlidir. Burada Lemma 1'den herhangi $u_i \in V(G_1), v_j, v_l \in V(G_2)$ için

$$d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_j) + n_2 d_{G_2}(v_j) + n_1 d_{G_1}(u_i) + n_1 n_2$$
$$= d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_l) + n_2 d_{G_2}(v_l) + n_1 d_{G_1}(u_i) + n_1 n_2$$

ve herhangi $v_j \in V(G_2), u_i, u_k \in V(G_1)$ için

$$d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_j) + n_2 d_{G_2}(v_j) + n_1 d_{G_1}(u_i) + n_1 n_2$$
$$= d_{G_1}(u_k)d_{G_2}(v_j) + n_2 d_{G_2}(v_j) + n_1 d_{G_1}(u_k) + n_1 n_2$$

dir. Böylece (6.2.5)'deki eşitliğin ancak ve ancak $u_i, u_j \in V(G_1)$, ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ için $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ olduğunda geçerli olduğu kolayca görülebilir. Bu yüzden (6.2.4)'deki eşitlik ancak ve ancak G_1 ve G_2 graflarının her ikisinin de regüler yani $G_1 \vee G_2$'nin regüler graf olması durumunda geçerlidir.

6.2.4 Örnek. C_p ve C_q cycle grafları göz önüne alınsın. Böylelikle

$$\Pi_1\left(C_p \vee C_q\right) = (p+2)^{2q}(q+2)^{2p}$$

ve

$$\Pi_2\left(C_p \vee C_q\right) = (p+2)^{(p+2)q}(q+2)^{(q+2)p}$$

olur.

6.2.5 Teorem. G_1 ve G_2 iki bağlantılı graf olsun. O halde,

i)

$$\Pi_1(G_1 \boxtimes G_2) \leq \left[\frac{n_2 M_1(G_1) + n_1 M_1(G_2) + 8m_1 m_2}{n_1 n_2}\right]^{n_1 n_2} \qquad (6.2.6)$$

dir. (6.2.6)'daki eşitlik ancak ve ancak $G_1 \boxtimes G_2$'nin regüler graf olması durumunda geçerlidir.

ii)

$$\Pi_2(G_1 \boxtimes G_2) \leq \frac{1}{(2n_1 m_2)^{2n_1 m_2}} (n_1 M_1(G_2) + 4m_1 m_2)^{2n_1 m_2}$$
$$\times \frac{1}{(2n_2 m_1)^{2n_2 m_1}} (n_2 M_1(G_1) + 4m_1 m_2)^{2n_2 m_1} \qquad (6.2.7)$$

dir. Dahası (6.2.7)'deki eşitlik ancak ve ancak $G_1 \boxtimes G_2$'nin regüler graf olması durumunda geçerlidir.

İspat. Birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından

$$\Pi_1(G_1 \boxtimes G_2) = \prod_{(u_i, v_j) \in V(G_1 \boxtimes G_2)} \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)^2$$
$$= \prod_{u_i \in V(G_1)} \prod_{v_j \in V(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)^2$$

olur. Diğer taraftan (6.2.1)'den

$$\Pi_1(G_1 \boxtimes G_2)$$
$$\leq \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)} \sum_{v_j \in V(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i)^2 + d_{G_2}(v_j)^2 + 2d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j)\right)}{n_1 n_2}\right]^{n_1 n_2} \qquad (6.2.8)$$

bulunur. Fakat

$$\sum_{u_i \in V(G_1)} d_{G_1}(u_i)^2 = M_1(G_1)$$

ve

$$\sum_{v_j \in V(G_2)} d_{G_1}(u_i)^2 = M_1(G_2)$$

olduğundan (6.2.8)'deki son ifade

$$\Pi_1(G_1 \boxtimes G_2) \leq \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)^2\right) \sum_{v_j \in V(G_2)} 1 + \sum_{v_j \in V(G_2)} d_{G_2}(v_j)^2 + 2d_{G_1}(u_i) \sum_{v_j \in V(G_2)} d_{G_2}(v_j)}{n_1 n_2}\right]^{n_1 n_2}$$

olur ki bu da

$$\left[\frac{n_2 M_1(G_1) + n_1 M_1(G_2) + 8m_1 m_2}{n_1 n_2}\right]^{n_1 n_2}$$

değerine eşittir. Dahası (6.2.8)'deki eşitlik ancak ve ancak Lemma 1'den herhangi $(u_i, v_j), (u_k, v_l) \in V\,(G_1 \boxtimes G_2)$ için $d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j) = d_{G_1}(u_k) + d_{G_2}(v_l)$ olması durumunda geçerlidir. G_1 ve G_2 graflarının her ikisi de bağlantılı graflar olduğundan (8)'deki eşitliğin ancak ve ancak $u_i, u_k \in V\,(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V\,(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ olması durumunda geçerli olacağı kolayca görülebilir. Bundan dolayı (6.2.6)'daki eşitlik ancak ve ancak G_1 ve G_2'nin regüler yani $G_1 \boxtimes G_2$'nin regüler graf olması halinde geçerlidir. Böylelikle teoremin birinci kısmının ispatı tamamlanmış olur.

İkinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından

$$\Pi_2(G_1 \boxtimes G_2) = \prod_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \boxtimes G_2)} \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)\left(d_{G_1}(u_k) + d_{G_2}(v_l)\right)$$

dir. Bu aslında

$$\Pi_2(G_1 \boxtimes G_2) = \prod_{u_i \in V(G_1)} \prod_{v_j v_l \in E(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)\left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_l)\right)$$

$$\times \prod_{v_j \in V(G_2)} \prod_{u_i u_k \in E(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)\left(d_{G_1}(u_k) + d_{G_2}(v_j)\right)$$

ya da denk olarak,

$$\Pi_2(G_1 \boxtimes G_2) = \prod_{u_i \in V(G_1)} \prod_{v_j \in V(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)^{d_{G_2}(v_j)}$$

$$\times \prod_{v_j \in V(G_2)} \prod_{u_i \in V(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)^{d_{G_1}(u_i)}$$

şeklinde yazılabilir. (6.2.2)'den

$$\Pi_2(G_1 \boxtimes G_2) \leq \prod_{u_i \in V(G_1)} \left[\frac{\sum_{v_j \in V(G_2)} d_{G_2}(v_j)\left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)}{2m_2}\right]^{2m_2}$$

$$\times \prod_{u_i \in V(G_1)} \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)} d_{G_1}(u_i)\left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j)\right)}{2m_1}\right]^{2m_1} \qquad (6.2.9)$$

elde edilir. Dahası

$$\sum_{u_i \in V(G_1)} d_{G_1}(u_i) = 2m_1, \sum_{v_j \in V(G_2)} d_{G_2}(v_j) = 2m_2$$

ve

$$\sum_{u_i \in V(G_1)} d_{G_1}(u_i)^2 = M_1(G_1), \sum_{v_j \in V(G_2)} d_{G_2}(v_j)^2 = M_1(G_2)$$

dir. (6.2.9)'daki son ifade (6.2.1)'den

$\Pi_2(G_1 \boxtimes G_2)$

$$= \prod_{u_i \in V(G_1)} \left[\frac{M_1(G_2) + 2m_2 d_{G_1}(u_i)}{2m_2}\right]^{2m_2} \times \prod_{v_j \in V(G_2)} \left[\frac{M_1(G_1) + 2m_1 d_{G_2}(v_j)}{2m_1}\right]^{2m_1}$$

$$\leq \frac{1}{(2m_2)^{2n_1m_2}} \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)} \left(M_1(G_2) + 2m_2 d_{G_1}(u_i)\right)}{n_1}\right]^{2n_1m_2}$$

$$\times \frac{1}{(2m_1)^{2n_2m_1}} \left[\frac{\sum_{v_j \in V(G_2)} \left(M_1(G_1) + 2m_1 d_{G_2}(v_j)\right)}{n_2}\right]^{2n_2m_1} \qquad (6.2.10)$$

$$= \frac{1}{(2n_1m_2)^{2n_1m_2}} (n_1 M_1(G_2) + 4m_1m_2)^{2n_1m_2}$$

$$\times \frac{1}{(2n_2m_1)^{2n_2m_1}} (n_2 M_1(G_1) + 4m_1m_2)^{2n_2m_1}$$

şekline dönüşür. Böylelikle teoremin ikinci kısmının ispatı tamamlanmış olunur. (6.2.9) ve (6.2.10)'daki eşitlik ancak ve ancak Lemma 1 ve Lemma 2'den, $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ olması durumunda geçerlidir. Bundan dolayı (6.2.7)'deki eşitlik ancak ve ancak G_1 ve G_2'nin regüler yani $G_1 \boxtimes G_2$'nin regüler graf olması halinde geçerlidir. Bu da ispatı tamamlar.

6.2.6 Örnek. Bir C_p devir grafını ve K_q tam grafını göz önüne alalım.

$\prod_1(G_p \boxtimes K_q) = (q+1)^{2pq}$ ve $\prod_2(C_p \boxtimes K_q) = (q+1)^{(q+1)pq}$

dir.

6.2.7 Teorem. Corona çarpımının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri

i) $\Pi_1(G_1 \circ G_2) \leq \frac{1}{{n_1}^{n_1}{n_2}^{n_1n_2}} M_1(G_1)^{n_1}(M_1(G_2) + 4m_2 + n_2)^{n_1n_2}$ (6.2.11)

ii) $\Pi_2(G_1 \circ G_2) \leq \left[\frac{M_2(G_1) + n_2M_1(G_1) + (n_2)^2}{m_1}\right]^{m_1} \times \left[\frac{M_2(G_2) + M_1(G_2) + 1}{m_2}\right]^{m_2}$

$$\times\left[\frac{4m_1m_2+n_1{n_2}^2+2m_1n_2+2m_2n_1n_2}{n_1n_2}\right]^{n_1n_2} \qquad (6.2.12)$$

dir. Burada sırasıyla $i=1,2$ için $M_1(G_i)$ ve $M_2(G_i)$, G_i'nin sırasıyla birinci ve ikinci Zagreb indeksleridir. Dahası (6.2.11) ve (6.2.12)'deki her iki eşitlik ancak ve ancak $G_1 \circ G_2$'nin regüler graf olması durumunda geçerlidir.

İspat. Birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından

$$\Pi_1(G_1 \circ G_2) = \prod_{(u_i,v_j)\in V(G_1 \circ G_2)} d_{(G_1 \circ G_2)}(u_i,v_j)^2$$

$$= \prod_{u_i\in V(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)+n_2\right)^2 \prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_j\in V(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j)+1\right)^2$$

$$= \prod_{u_i\in V(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)^2+2n_2d_{G_1}(u_i)+n_2^2\right)$$

$$\times\left[\prod_{v_j\in V(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j)^2+2d_{G_2}(v_j)+1\right)^2\right]^{n_1}$$

$$\le \left[\frac{\sum_{u_i\in V(G_1)}\left(d_{G_1}(u_i)^2+2n_2d_{G_1}(u_i)+n_2^2\right)}{n_1}\right]^{n_1}$$

$$\times\left[\frac{\sum_{v_j\in V(G_2)}\left(d_{G_2}(v_j)^2+2d_{G_2}(v_j)+1\right)}{n_2}\right]^{n_1n_2} \qquad (6.2.13)$$

$$= \frac{1}{{n_1}^{n_1}{n_2}^{n_1n_2}}\left(M_1(G_1)+4M_1n_2m_1+n_1n_2^2\right)^{n_1}$$

$$\times\left(M_1(G_2)+4m_2+n_2\right)^{n_1n_2}$$

(6.2.13)'deki eşitlik ancak ve ancak $u_i,u_k \in V\,(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i)=d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j,v_l \in V\,(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j)=d_{G_2}(v_l)$, yani G_1 ve G_2'nin her ikisinin, yani $G_1 \circ G_2$'nin bir regüler graf olması durumunda geçerlidir.

İkinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından,

$$
\begin{aligned}
\Pi_2(G_1 \circ G_2) &= \prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1 \circ G_2)} d_{G_1 \circ G_2}(u_i,v_j)\, d_{G_1 \circ G_2}(u_k,v_l) \\
&= \prod_{u_iu_k\in E(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)+n_2\right)\left(d_{G_1}(u_k)+n_2\right) \\
&\times \prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_j\in V(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i)+n_2\right)\left(d_{G_2}(v_j)+1\right) \\
&\times \prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_jv_l\in E(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j)+1\right)\left(d_{G_2}(v_l)+1\right) \\
&= \prod_{u_iu_k\in E(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)d_{G_1}(u_k)+n_2\left(d_{G_1}(u_i)+d_{G_1}(u_k)\right)+n_2^2\right) \\
&\times \left[\prod_{u_i\in V(G_1)} \left(d_{G_1}(u_i)+n_2\right)\right]^{n_2} \left[\prod_{v_j\in V(G_2)} \left(d_{G_1}(v_j)+1\right)\right]^{n_1} \\
&\times \left[\prod_{v_jv_l\in E(G_2)} \left(d_{G_2}(v_j)d_{G_2}(v_l)+d_{G_2}(v_j)+d_{G_2}(v_l)+1\right)\right]^{n_1} \\
&\leq \left[\frac{M_2(G_1)+n_2M_1(G_1)+n_2^2m_1}{m_1}\right]^{m_1} \times \left[\frac{2m_1+n_1n_2}{n_1}\right]^{n_1n_2} \\
&\times \left[\frac{2m_2+n_2}{n_2}\right]^{n_1n_2} \times \left[\frac{M_2(G_2)+M_1(G_2)+m_2}{m_2}\right]^{n_1m_2}
\end{aligned}
$$

olur. Yukarıdaki eşitlik ancak ve ancak ancak $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ olduğunda yani G_1 ve G_2'nin her ikisinin, yani $G_1 \circ G_2$'nin bir regüler graf olması durumunda geçerlidir. Böylece ispat tamamlanır.

6.2.8 Örnek. $\prod_1(C_p \circ K_q) = q^{2pq}(q+2)^{2pq}$ ve $\prod_2(C_p \circ K_q) = q^{pq^2}(q+2)^{p(q+2)}$'dir.

6.2.9 Teorem. G_1 ve G_2 graflarının $G = G_1[G_2]$ bileşiminin birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri aşağıdaki gibi sınırlıdır:

i)

$$\Pi_1(G_1[G_2]) \leq \frac{1}{(n_1n_2)^{n_1n_2}} \left[n_2^3M_1(G_1)+8n_2m_1m_2+n_1M_1(G_2)\right]^{n_1n_2}, \quad (6.2.14)$$

ii)

$$\Pi_2(G_1[G_2]) \leq \frac{1}{(n_1m_2)^{n_1m_2}}[m_2n_2^2M_1(G_1) + 2n_2m_1M_1(G_2) + n_1M_2(G_2)]^{n_1m_2}\times$$

$$\frac{1}{(n_2m_1)^{m_1n_2^2}}[n_2^3M_2(G_1) + m_1M_1(G_2) + 2m_2n_2M_1(G_1)]^{n_2^2m_1} \tag{6.2.15}$$

dir. Burada *i=1, 2* olmak üzere $M_1(G_i)$ ve $M_2(G_i)$, G_i'nin birinci ve ikinci Zagreb indeksleridir. Dahası (6.2.14) ve (6.2.15)'deki eşitlikler ancak ve ancak $G_1[G_2]$'nin bir regüler graf olması durumunda geçerlidir.

İspat. Birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından,

$$\Pi_1(G_1[G_2]) = \prod_{(u_i,v_j)\in V(G_1[G_2])} d_{G_1[G_2]}\left(u_i, v_j\right)^2$$

$$= \prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_j\in V(G_2)} \left(d_{G_1}(u_i)n_2 + d_{G_2}(v_j)\right)^2$$

$$\leq \left[\frac{\sum_{u_i\in V(G_1)} \sum_{v_j\in V(G_2)} \left(n_2^2\left(d_{G_1}(u_i)\right)^2 + 2n_2d_{G_1}(u_i)d_{G_2}\left(v_j\right) + d_{G_2}\left(v_j\right)^2\right)}{n_1n_2}\right]^{n_1n_2} \tag{6.2.16}$$

$$= \frac{1}{(n_1n_2)^{n_1n_2}}[n_2^3M_1(G_1) + 8n_2m_1m_2 + n_1M_1(G_2)]^{n_1n_2}$$

olur. (6.2.16)'daki eşitlik ancak ve ancak $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}\left(v_j\right) = d_{G_2}(v_l)$ (Lemma 1'den), yani G_1 ve G_2 graflarının regüler graf olması durumunda geçerlidir. Bu da $G_1[G_2]$'nin bir regüler graf olması demektir.

İkinci Zagreb indeksinin tanımından,

$$\Pi_2(G_1[G_2]) = \prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1[G_2])} d_{G_1[G_2]}(u_i,v_j)d_{G_1[G_2]}(u_k,v_l)$$

$$= \prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_jv_l\in E(G_2)} (n_2 d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j))(n_2 d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_l))$$

$$\times \prod_{u_iu_k\in E(G_1)} \prod_{v_j\in V(G_2)} \left[(n_2 d_{G_1}(u_i) + d_{G_2}(v_j))(n_2 d_{G_1}(u_k) + d_{G_2}(v_j))\right]^{n_2}$$

$$\leq \prod_{u_i\in V(G_1)} \left[\frac{m_2 n_2^2 d_{G_1}(u_i)^2 + n_2 d_{G_1}(u_i) M_1(G_2) + M_2(G_2)}{m_2}\right]^{m_2}$$

$$\times \prod_{u_iu_k\in E(G_1)} \left[\frac{n_2^3 d_{G_1}(u_i) d_{G_1}(u_k) + M_1(G_2) + 2n_2 m_2 \left(d_{G_1}(u_i) + d_{G_1}(u_k)\right)}{n_2}\right]^{n_2^2} \quad (6.2.17)$$

$$\leq \frac{1}{m_2{}^{n_1 m_2}} \left[\frac{m_2 n_2^2 M_1(G_1) + 2n_2 m_1 M_1(G_2) + n_1 M_2(G_2)}{n_1}\right]^{n_1 m_2}$$

$$\times \frac{1}{(n_2)^{m_1 n_2^2}} \left[\frac{n_2^3 M_2(G_1) + m_1 M_1(G_2) + 2m_2 n_2 M_1(G_1)}{m_1}\right]^{n_2^2 m_1} \quad (6.2.18)$$

olur ki (6.2.15)'deki istenen sonucu verir.

(6.2.17) ve (6.2.18)'deki eşitlikler Lemma 1'den ancak ve ancak $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ iken, yani G_1 ve G_2 graflarının regüler graf olması durumunda geçerlidir. Bu da $G_1[G_2]$'nin bir regüler graf olması demektir.

6.2.10 Örnek.

$\prod_1(C_p[C_q]) = 2^{2pq}(q+1)^{2pq}$ ve $\prod_2(C_p[C_q]) = 2^{2pq(q+1)}(q+1)^{2pq(q+1)}$'dir.

6.2.11 Teorem. Disjunction işleminin birinci ve ikinci Zagreb indeksleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

i)

$$\begin{aligned}\Pi_1(G_1 \otimes G_2) \leq \frac{1}{(n_1 n_2)^{n_1 n_2}} [&n_2^3 M_1(G_1) + n_1^3 M_1(G_2) + M_1(G_1) M_1(G_2) + 8n_1 n_2 m_1 m_2 \\ &- 4n_1 m_1 M_1(G_2) \\ &- 4n_2 m_2 M_1(G_1)]^{n_1 n_2} \qquad (6.2.19)\end{aligned}$$

ii)

$$\Pi_2(G_1 \otimes G_2) \leq \left[\frac{M_1(G_1)(n_2^3 + M_1(G_2) - 4n_2m_2) + M_1(G_2)(n_1^2 - 4n_1m_1) + 8n_1n_2m_1m_2}{Q}\right]^Q \quad (6.2.20)$$

dir. Burada $Q = \sum_{u_i \in V(G_1)} \sum_{v_j \in V(G_2)} P = 2(n_2^2 m_1 + n_1^2 m_2 - 2m_1m_2)$ ve *i=1, 2* olmak üzere $M_1(G_i)$, G_i graflarının birinci Zagreb indeksleridir. Dahası (6.2.19) ve (6.2.20)'deki eşitlikler ancak ve ancak $G_1 \otimes G_2$'nin bir regüler graf olması durumunda geçerlidir.

İspat. $d_{G_1 \otimes G_2}(u_i, v_j) = n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j)$ dir. Birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından,

$$\Pi_1(G_1 \otimes G_2) = \prod_{(u_i, v_j) \in V(G_1 \otimes G_2)} d_{G_1 \otimes G_2}(u_i, v_j)^2$$

$$= \prod_{u_i \in V(G_1)} \prod_{v_j \in V(G_2)} \left(n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j)\right)^2$$

$$\leq \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)} \sum_{v_j \in V(G_2)} \left(n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j)\right)^2}{n_1 n_2}\right]^{n_1 n_2} \quad (6.2.21)$$

$$= \frac{1}{(n_1 n_2)^{n_1 n_2}} [n_2^3 M_1(G_1) + n_1^3 M_1(G_2) + M_1(G_1) M_1(G_2) + 8n_1n_2m_1m_2$$
$$- 4n_1m_1M_1(G_2) - 4n_2m_2M_1(G_1)]^{n_1 n_2}$$

olur. (6.2.21)'deki eşitlik Lemma 1'den ancak ve ancak $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ iken, yani G_1 ve G_2 graflarının regüler graf olması durumunda geçerlidir. Bu da $G_1 \otimes G_2$'nin bir regüler graf olması demektir.

İkinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından,

$$\Pi_2(G_1 \otimes G_2) = \prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1\otimes G_2)} d_{G_1\otimes G_2}(u_i,v_j)\, d_{G_1\otimes G_2}(u_k,v_l)$$
$$= \prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_jv_l\in E(G_2)} P^P$$

dir. Burada $P = n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j)$ dir.

(6.2.2)'de ağırlıklı aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanarak

$$\Pi_2(G_1 \otimes G_2)$$
$$\leq \left[\frac{\sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)}\left(n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j)\right)^2}{\sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)} P}\right]^{\sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)} P} \tag{6.2.22}$$
$$= \left[\frac{M_1(G_1)(n_2^3 + M_1(G_2) - 4n_2m_2) + M_1(G_2)(n_1^2 - 4n_1m_1) + 8n_1n_2m_1m_2}{Q}\right]^Q$$

bulunur. Burada $Q = \sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)} P = 2(n_2^2 m_1 + n_1^2 m_2 - 2m_1m_2)$ dir. Böylece ispatın birinci kısmı biter.

(6.2.22)'deki eşitlik Lemma 1'den ancak ve ancak $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ iken, yani G_1 ve G_2 graflarının regüler graf olması durumunda geçerlidir. Bu da $G_1 \otimes G_2$'nin bir regüler graf olması demektir.

6.2.12 Örnek.

$\prod_1(K_p \otimes C_q) = (pq - q + 2)^{2pq}$ ve $\prod_2(K_p \otimes C_q) = (pq - q + 2)^{pq(pq-q+2)}$'dir.

6.2.13 Teorem. G_1 ve G_2 graflarının $G_1 \oplus G_2$ simetrik farkının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri aşağıdaki gibi sınırlandırılır:

i)

$$\Pi_1(G_1 \oplus G_2) \leq \frac{1}{(n_1n_2)^{n_1n_2}}[n_2^3 M_1(G_1) + n_1^3 M_1(G_2) + 4M_1(G_1)M_1(G_2) + 8n_1n_2m_1m_2 - 8n_1m_1M_1(G_2) - 8n_2m_2M_1(G_1)]^{n_1n_2} \tag{6.2.23}$$

ii)

$$\Pi_2(G_1 \oplus G_2)$$
$$\leq \left[\frac{M_1(G_1)(n_2^3 + 4M_1(G_2) - 8n_2m_2) + M_1(G_2)(n_1^3 - 8n_1m_1) + 8n_1n_2m_1m_2}{Q}\right]^Q \quad (6.2.24)$$

dir. Burada $Q = \sum_{u_i \in V(G_1)} \sum_{v_j \in V(G_2)} P = 2(n_2^2 m_1 + n_1^2 m_2 - 4m_1m_2)$ ve $i=1, 2$ olmak üzere $M_1(G_i)$, G_i graflarının birinci Zagreb indeksleridir. Dahası (6.2.23) ve (6.2.24)'deki eşitlikler ancak ve ancak $G_1 \oplus G_2$'nin bir regüler graf olması durumunda geçerlidir.

İspat. $d_{G_1 \oplus G_2}(u_i, v_j) = n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - 2d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j)$dir. Birinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından,

$$\Pi_1(G_1 \oplus G_2) = \prod_{(u_i, v_j) \in V(G_1 \oplus G_2)} d_{G_1 \oplus G_2}(u_i, v_j)^2$$
$$= \prod_{u_i \in V(G_1)} \prod_{v_j \in V(G_2)} (n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - 2d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j))^2$$
$$\leq \left[\frac{\sum_{u_i \in V(G_1)} \sum_{v_j \in V(G_2)} (n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - 2d_{G_1}(u_i) d_{G_2}(v_j))^2}{n_1 n_2}\right]^{n_1 n_2} \quad (6.2.25)$$
$$= \frac{1}{(n_1n_2)^{n_1n_2}} [n_2^3 M_1(G_1) + n_1^3 M_1(G_2) + 4M_1(G_1)M_1(G_2) + 8n_1n_2m_1m_2$$
$$- 8n_1m_1M_1(G_2) - 8n_2m_2M_1(G_1)]^{n_1n_2}$$

bulunur. (6.2.25)'deki eşitlik Lemma 1'den ancak ve ancak $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ iken, yani G_1 ve G_2 graflarının regüler graf olması durumunda geçerlidir. Bu da $G_1 \oplus G_2$'nin bir regüler graf olması demektir.

İkinci çarpımsal Zagreb indeksinin tanımından,

$$\Pi_2(G_1 \oplus G_2) = \prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G_1\oplus G_2)} d_{G_1\oplus G_2}(u_i,v_j)\, d_{G_1\oplus G_2}(u_k,v_l)$$
$$= \prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_jv_l\in E(G_2)} P^P$$

dir. Burada $P = n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - 2d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_j)$ dir.

(2)'de ağırlıklı aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini kullanarak,

$$\prod_{u_i\in V(G_1)} \prod_{v_jv_l\in E(G_2)} P^P$$
$$\leq \left[\frac{\sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)}\left(n_2 d_{G_1}(u_i) + n_1 d_{G_2}(v_j) - 2d_{G_1}(u_i)d_{G_2}(v_j)\right)^2}{\sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)} P}\right]^{\sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)} P} \qquad (6.2.26)$$
$$= \left[\frac{M_1(G_1)(n_2^3 + 4M_1(G_2) - 8n_2m_2) + M_1(G_2)(n_1^3 - 8n_1m_1) + 8n_1n_2m_1m_2}{Q}\right]^Q$$

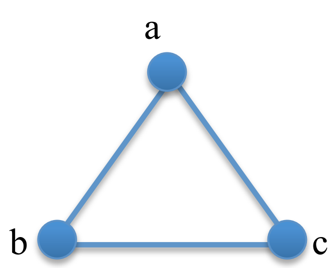
dir. Burada $Q = \sum_{u_i\in V(G_1)}\sum_{v_j\in V(G_2)} P = 2(n_2^2m_1 + n_1^2m_2 - 4m_1m_2)$ dir. Böylece ispatın birinci kısmı biter.

(6.2.26)'deki eşitlik Lemma 1'den ancak ve ancak $u_i, u_k \in V(G_1)$ olmak üzere $d_{G_1}(u_i) = d_{G_1}(u_k)$ ve $v_j, v_l \in V(G_2)$ olmak üzere $d_{G_2}(v_j) = d_{G_2}(v_l)$ iken, yani G_1 ve G_2 graflarının regüler graf olması durumunda geçerlidir. Bu da $G_1 \oplus G_2$'nin bir regüler graf olması demektir.

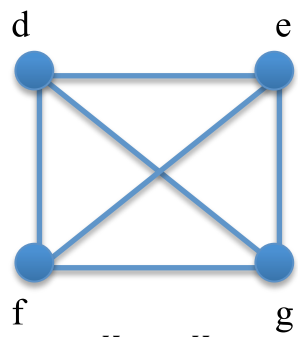
6.2.14 Örnek.

$\prod_1(K_p \oplus C_q) = (pq - q + 2)^{2pq}$ ve $\prod_2(K_p \oplus C_q) = (pq - q + 2)^{pq(pq-q+2)}$'dir.

6.2.15 Örnek.



$K_{n_1} \cong K_3$



$K_{n_2} \cong K_4$

K_{n_1} ve K_{n_2} graflarının $G = K_{n_1}[K_{n_2}]$ bileşim grafının V köşe kümesi,

$V = \{(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),(c,d),(c,e),(c,f),(c,g)\}$

olur. Kenar oluşturan köşeler ise birinci bileşenler aynı ikinci bileşenler komşu olan

$$(a,d)\sim(a,e),(a,d)\sim(a,f),(a,d)\sim(a,g)$$
$$(a,e)\sim(a,f),(a,e)\sim(a,g)$$
$$(a,f)\sim(a,g)$$
$$(b,d)\sim(b,e),(b,d)\sim(b,f),(b,d)\sim(b,g)$$
$$(b,e)\sim(b,f),(b,e)\sim(b,g)$$
$$(b,f)\sim(b,g)$$
$$(c,d)\sim(c,e),(c,d)\sim(c,f),(c,d)\sim(c,g)$$
$$(c,e)\sim(c,f),(c,e)\sim(c,g)$$
$$(c,f)\sim(c,g)$$

köşeleridir ya da birinci bileşenler komşu olan

$$(a,d)\sim(b,d),(a,d)\sim(b,e),(a,d)\sim(b,f),(\mathrm{a},\mathrm{d})\sim(\mathrm{b},\mathrm{g})$$
$$(a,e)\sim(b,d),(a,e)\sim(b,e),(a,e)\sim(b,f),(\mathrm{a},\mathrm{e})\sim(\mathrm{b},\mathrm{g})$$
$$(a,f)\sim(b,d),(a,f)\sim(b,e),(a,f)\sim(b,f),(\mathrm{a},\mathrm{f})\sim(\mathrm{b},\mathrm{g})$$
$$(a,g)\sim(b,d),(a,g)\sim(b,e),(a,g)\sim(b,f),(\mathrm{a},\mathrm{g})\sim(\mathrm{b},\mathrm{g})$$
$$(a,d)\sim(c,d),(a,d)\sim(c,e),(a,d)\sim(c,f),(\mathrm{a},\mathrm{d})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$
$$(a,e)\sim(c,d),(a,e)\sim(c,e),(a,e)\sim(c,f),(\mathrm{a},\mathrm{e})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$
$$(a,f)\sim(c,d),(a,f)\sim(c,e),(a,f)\sim(c,f),(\mathrm{a},\mathrm{f})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$
$$(a,g)\sim(c,d),(a,g)\sim(c,e),(a,g)\sim(c,f),(\mathrm{a},\mathrm{g})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$
$$(b,d)\sim(c,d),(b,d)\sim(c,e),(b,d)\sim(c,f),(\mathrm{b},\mathrm{d})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$
$$(b,e)\sim(c,d),(b,e)\sim(c,e),(b,e)\sim(c,f),(\mathrm{b},\mathrm{e})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$
$$(b,f)\sim(c,d),(b,f)\sim(c,e),(b,f)\sim(c,f),(\mathrm{b},\mathrm{f})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$
$$(b,g)\sim(c,d),(b,g)\sim(c,e),(b,g)\sim(c,f),(\mathrm{b},\mathrm{g})\sim(\mathrm{c},\mathrm{g})$$

köşelerdir. Burada derecesi 3 olan köşelerin sayısı $\binom{n_2}{2} \cdot n_1 = m_2 \cdot n_1$ ve derecesi 8 olan köşelerin sayısı $\binom{n_1}{2} \cdot n_2^2 = m_1 \cdot n_2^2$'dir. Bu durumda

$$\Pi_1(G) = \prod_{(u_i,v_j)\in V(G)} d^2_{(u_i,v_j)} = [(n_1-1).n_2 + (n_2-1)]^{2n_1n_2} = (n_1n_2)^{2n_1n_2}$$

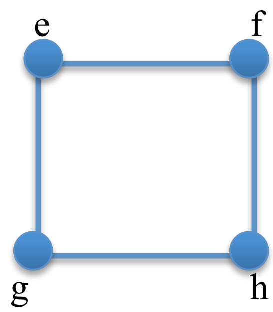
$$\Pi_2(G) = \prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G)} d_G(u_i,v_j).d_G(u_k,v_l)$$

$$= [(n_1-1).n_2 + (n_2-1)]^{2\left[\binom{n_2}{2}\cdot n_1 + \binom{n_1}{2}\cdot n_2^2\right]}$$

olur.

6.2.16 Örnek.

$P_{n_1} \cong P_4$



$C_{n_2} \cong C_4$

P_{n_1} ve C_{n_2} graflarının $G = P_{n_1}[C_{n_2}]$ bileşim grafının köşe kümesi,

$$V = \begin{Bmatrix} (a,e),(a,f),(a,g),(a,h),(b,e),(b,f),(b,g),(b,h), \\ (c,e),(c,f),(c,g),(c,h),(d,e),(d,f),(d,g),(d,h) \end{Bmatrix}$$

dir. Kenar oluşturan köşeler ise birinci bileşenler aynı ikinci bileşenler komşu olan

$$(a,e)\sim(a,f),(a,e)\sim(a,g)$$
$$(a,f)\sim(a,h)$$
$$(a,g)\sim(a,h)$$

$(b,e) \sim (b,f), (b,e) \sim (b,g)$
$(b,f) \sim (b,h)$
$(b,g) \sim (b,h)$
$(c,e) \sim (c,f), (c,e) \sim (c,g)$
$(c,f) \sim (c,h)$
$(c,g) \sim (c,h)$

ya da birinci bileşenler komşu olan

$(a,e) \sim (b,e), (a,e) \sim (b,f), (\mathrm{a,e}) \sim (\mathrm{b,g}), (a,e) \sim (b,h)$
$(a,f) \sim (b,e), (a,f) \sim (b,f), (\mathrm{a,f}) \sim (\mathrm{b,g}), (a,f) \sim (b,h)$
$(a,g) \sim (b,e), (a,g) \sim (b,f), (\mathrm{a,g}) \sim (\mathrm{b,g}), (a,g) \sim (b,h)$
$(a,h) \sim (b,e), (a,h) \sim (b,f), (\mathrm{a,h}) \sim (\mathrm{b,g}), (a,h) \sim (b,h)$
$(b,e) \sim (c,e), (b,e) \sim (c,f), (\mathrm{b,e}) \sim (\mathrm{c,g}), (b,e) \sim (c,h)$
$(b,f) \sim (c,e), (b,f) \sim (c,f), (\mathrm{b,f}) \sim (\mathrm{c,g}), (b,f) \sim (c,h)$
$(b,g) \sim (c,e), (b,g) \sim (c,f), (\mathrm{b,g}) \sim (\mathrm{c,g}), (b,g) \sim (c,h)$
$(b,h) \sim (c,e), (b,h) \sim (c,f), (\mathrm{b,h}) \sim (\mathrm{c,g}), (b,h) \sim (c,h)$
$(c,e) \sim (d,e), (c,e) \sim (d,f), (\mathrm{c,e}) \sim (\mathrm{d,g}), (c,e) \sim (d,h)$
$(c,f) \sim (d,e), (c,f) \sim (d,f), (\mathrm{c,f}) \sim (\mathrm{d,g}), (c,f) \sim (d,h)$
$(c,g) \sim (d,e), (c,g) \sim (d,f), (\mathrm{c,g}) \sim (\mathrm{d,g}), (c,g) \sim (d,h)$
$(c,h) \sim (d,e), (c,h) \sim (d,f), (\mathrm{c,h}) \sim (\mathrm{d,g}), (c,h) \sim (d,h)$

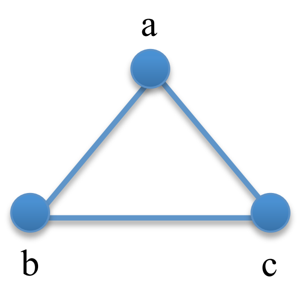
köşeleridir. Burada derecesi $n_2 + 2$ olan $2.n_2$ tane köşe vardır. Bu köşeler yol grafının iki uç noktasından gelir. Derecesi $2n_2 + 2$ olan $(n_1 - 2).n_2$ tane köşe vardır. Bu köşeler ise yol grafının iç köşelerinden gelir. Dolayısıyla

$$\Pi_1(G) = \prod_{(u_i,v_j)\in V(G)} d^2_{(u_i,v_j)} = [(n_2+2)^2]^{2n_2}.[(2n_2+2)^2]^{(n_1-2)n_2}$$
$$= (n_2+2)^{4n_2}.(2n_2+2)^{2(n_1-2)n_2}$$

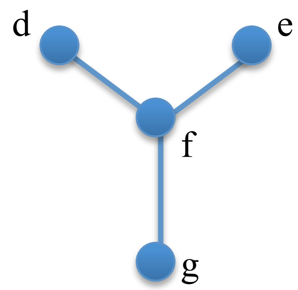
$$\Pi_2(G) = \prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G)} d_G(u_i,v_j).d_G(u_k,v_l)$$
$$= [(n_2+2).(n_2+2)]^{2n_2}.[(2n_2+2).(2n_2+2)]^{(n_2+n_2^2)(n_1-2)}.[(n_2+2).(2n_2+2)]^{2n_2^2}$$
$$= (n_2+2)^{2n_2(n_2+2)}.(2n_2+2)^{2n_2(2n_2+1)(n_1-2)}$$

olur.

6.2.17 Örnek.



$K_{n_1} \cong K_3$



$S_{n_2} \cong S_4$

K_{n_1} ve S_{n_2} graflarının $G = K_{n_1} \boxtimes S_{n_2}$ kartezyen çarpım grafının köşe kümesi,

$$V = \left\{\begin{matrix}(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),\\(c,d),(c,e),(c,f),(c,g)\end{matrix}\right\}$$

dir. Kenar oluşturan köşeler ise birinci bileşenler aynı ikinci bileşenler komşu olan

$$(a,d)\sim(a,f),(a,e)\sim(a,f),(a,g)\sim(a,f)$$
$$(b,d)\sim(b,f),(b,e)\sim(b,f),(b,g)\sim(b,f)$$
$$(c,d)\sim(c,f),(c,e)\sim(c,f),(c,g)\sim(c,f)$$

ya da birinci bileşenler komşu ikinci bileşenler aynı olan

$$(a,d)\sim(b,d),(a,d)\sim(c,d),(\mathrm{b,d})\sim(\mathrm{c,d})$$
$$(a,e)\sim(b,e),(a,e)\sim(c,e),(\mathrm{b,e})\sim(\mathrm{c,e})$$

$$(a,f)\sim(b,f),(a,f)\sim(c,f),(\mathrm{b,f})\sim(\mathrm{c,f})$$
$$(a,g)\sim(b,g),(a,g)\sim(c,g),(\mathrm{b,g})\sim(\mathrm{c,g})$$

köşeleridir. (a,d) şeklindeki köşelerin derecesi n_1 ve (a,f) şeklindeki köşenin derecesi $(n_1-1)+(n_2-1)$'dir. Bu durumda

$$\Pi_1(G)=\prod_{(u_i,v_j)\in V(G)} d^2_{(u_i,v_j)}=[(n_1-1)+(n_2-1)]^{2n_1}.{n_1}^{2(n_2-1)n_1}$$
$$={n_1}^{2(n_2-1)n_1}.(n_1+n_2-2)^{2n_1}$$

ve

$$\Pi_2(G)=\prod_{(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G)} d_G(u_i,v_j).d_G(u_k,v_l)$$
$$=\left(n_2\binom{n_1}{2}-n_1\right).n_1.(n_1+n_2-2).n_1^3.(n_2-1).n_1.(n_1+n_2-2)^2$$
$$=n_1^5.(n_1+n_2-2)^3.(n_2-1).\left(n_2\binom{n_1}{2}-n_1\right)$$

olur.

KAYNAKLAR

Ashrafi, A.R., Doslic, T., Hamzeh, A. 2010. The Zagreb coindices of graph operations. *Discr. Appl. Math.*, 158: 1571–1578.

Ashrafi, A.R., Doslic, T., Hamzeh, A. 2011. Extremal graphs with respect to the Zagreb coindices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 65**:** 85–92.

Bondy, J.A., Murty, U.S.R. 1976. Graph Theory with Applications. Macmillan Co., London.

Balaban, A.T., Motoc, I., Bonchev, D., Mekenyan, O. 1983. Topological indices for structure-activity correlations. *Topics Curr. Chem.*, 114: 21-55.

Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J. 1986. Graph Theory 1736-1936. Oxford University Press, London.

Braun, J., Kerber, A., Meringer, C., Rucker, C. 2005. Similarity of molecular descriptors: the equivalence of Zagreb indices and walk counts. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 54: 163-176.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. 2012. A Textbook of Graph Theory (Second Edition). Springer, New York.

Caen, D. 1988. An upper bound on the sum of squares of degrees in a graph. *Discr. Math.*, 185: 245-248.

Das, K.C. 2004. Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph. *Discr. Math.*, 285: 57-66

Das, K.C., Gutman, I. 2004. Some properties of the second Zagreb index. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 52: 103-112.

Das, K.C., Gutman, I., Zhou, B. 2009. New upper bounds on Zagreb indices. *J. Math. Chem.*, 46: 514–521.

Das, K.C., Trinajstic, N. 2011. Relationship between the eccentric connectivity index and Zagreb indices. *Comput. Math. Appl.*, 62: 1758–1764.

Das, K.C., Lee, D., Graovac, A. 2013a. Some properties of the Zagreb eccentricity indices. *Ars Mathematica Contemporanea*, 6: 117-125.

Das, K.C., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A.S., Cangul, I.N. 2013b. The multiplicative Zagreb indices of graph operations. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013:90.

Eliasi, M., Iranmanesh, A., Gutman, I. 2012. Multiplicative versions of first Zagreb index. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68: 217-230.

Foulds, L.R. 1992. Graph Theory Applications. Springer, New York.

Fath-Tabar, G.H. 2011. Old and new Zagreb indices of graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 65: 79-84.

Gutman, I., Trinajstic, N. 1972. Graph theory and molecular orbitals. Total π-electron energy of alternant hydrocarbons. *Chem. Phys. Lett.*, 17: 535-538.

Gutman, I., Ruscic, B., Trinajstic, N., Wilcox, C.F. 1975. Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes. *J. Chem. Phys.*, 62: 3399-3405.

Gutman, I., Das, K.C. 2004. The first Zagreb index 30 years after. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 50: 83-92.

Gutman, I. 2011. Multiplicative Zagreb indices of trees. *Bull. Soc. Math. Banja Luka*, 18:17-23

Gutman, I. Ghorbani, M. 2012. Some properties of the Narumi–Katayama index. *Appl. Math. Lett.*, 25: 1435-1438.

Ghorbani, M., Hosseinzadeh, M.A. 2012. A new version of Zagreb indices. *Filomat*, 26: 93-100.

Harary, F. 1994. Graph Theory. Addison-Wesley, US, 22 pp.

Hansen, P., Vukicevic, D. 2007. Comparing Zagreb indices. *Croat. Chem. Acta*, 80: 165-168.

Horoldagva, B., Lee, S.G. 2010. Comparing Zagreb indices for connected graphs. *Discrete Appl. Math.*, 158: 1073-1078.

Hosseinzadeh, S., Hamzeh, A., Ashrafi, A.R. 2010. Extremal Properties of Zagreb coindices and degree distance of graphs. *Miskolc Mathematical Notes*, 11: 129-137.

Horoldagva, B., Das, K.C. 2012. On comparing Zagreb indices of graphs. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41: 223-230.

Imrich, W., Klavžar, S. 2000. Product Graphs: Structure and Recognition. Wiley, New York.

Ilic, A. 2008. On comparing Zagreb indices. http://arxiv.org/pdf/1104.4262.pdf.

Khalifeh, M.H., Azari, H.Y., Ashrafi, A.R. 2008. The hyper-Wiener index of graph operations. *Comput. Math. Appl.*, 56: 1402-1407.

Khalifeh, M.H., Azari, H.Y., Ashrafi, A.R. 2009. The first and second Zagreb indices of some graph operations. *Discrete Appl. Math.*, 157: 804-811.

Liu, B., Gutman, I. 2006. Upper bounds for Zagreb indices of connected graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 55: 439-446.

Liu, J., Zhang, Q. 2012. Sharp upper bounds on multiplicative Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68:231-240.

Nikolic, S., Kovacevic, G., Milicevic, A., Trinajstic, N. 2003. The Zagreb indices 30 years after. *Croat. Chem. Acta*, 76: 113-124.

Ranjini, P.S., Lokesha, V., Bindusree, M., Phani Raju, M. 2013. New bounds on Zagreb indices and the Zagreb co-indices. *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 31: 51-55.

Sun, L., Chen, T. 2009. Comparing the Zagreb indices for graphs with small difference between the maximum and minimum degrees. *Discrete Appl. Math.*, 157: 1650-1654.

Sun, L., Wei, S. 2009. Comparing the Zagreb indices for connected bicyclic graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 62: 699-714.

Trinajstic, N. 1992. Chemical Graph Theory. CRC Press, Boca Raton, FL.

Trinajstic, N., Nikolic, S., Milicevic, A., Gutman, I. 2010. On Zagreb indices. *Kem. Ind.*, 59: 577-589.

Todeschini, R., Ballabio, D., Consonni, V. 2010. Novel molecular descriptors based on functions of new vertex degrees. In: Ed.: Gutman, I., Furtula, B., Novel Molecular Structure Descriptors - Theory and Applications I, Univ. Kragujevac, Kragujevac, pp: 73-100.

Todeschini, R., Consonni, V. 2010. New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 64: 359-372

Vukicevic, D. 2007. Comparing variable Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 57: 633-641.

Vukicevic, D., Gutman, I., Furtula, B., Andova, V., Dimitrov, D. 2011. Some observations on comparing Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 66: 627-645.

West, D.B. 1996. Introduction to Graph Theory. Upper Saadle River: Prentice Hall.

Xu, K., Hua, H. 2012. A unified approach to extremal multiplicative Zagreb indices for trees, unicyclic and bicyclic graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68: 241-256.

Xu, K., Das, K.C. 2012. Trees, unicyclic and bicyclic graphs extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.,* 68(1): 257-272.

Xu, K., Das, K.C., Tang, K. 2013. On the multiplicative coindex of graphs. *Opuscula Math.*, 33: 191-204.

Zhou, B. 2004. Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 52:113-118.

Zhou, B., Gutman, I. 2004. Relations between Wiener, hyper-Wiener and Zagreb indices. *Chem. Phys. Lett.*, 394: 93-95.

Zhou, B., Gutman, I. 2005. Further properties of Zagreb indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 54: 233-239.

Zhou, B., Stevanovic, D. 2006. A note on Zagreb indices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 56: 571–578.

Zhou, B. 2007. Remarks on Zagren indices. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 57: 591-596.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Aysun YURTTAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bahçecik/İzmit, 01/01/1982
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Bursa Çelebi Mehmet Lisesi, 1995-1999
Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2000-2004
Yüksek Lisans	: Kocaeli Kocaeli Üniversitesi, 2004-2006
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2005-2008
Çalıştığı Kurum ve Yıl	: Uludağ Üniversitesi 2006 – …
İletişim (e–posta)	: ayurttas@uludag.edu.tr

Yayınları: :

Inam, I., Yurttas, A., Bizim, O., Cangul, I. N. 2009. Bernoulli-Frey Elliptic Curves. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*.

Yurttas, A., Demirci, M., Ozbay, H., Capkin, M., Cangul, I. N. 2009. Construction of cycloidal free subgroups of Hecke groups of finite index. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*,.

Cangul, I. N., Demirci, M., Yurttas, A., Guzel Karpuz, E., Ates, F. 2010. Determination of Genus of Normal Subgroups of Discrete Groups**.** *Numerical Analysis and Applied Mathematics***,** 1281: 1148-1151.

Demirci, M., Yurttas, A., Cangul, I. N. 2011. Upper bounds for the level of normal subgroups of Hecke groups**.** *Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Conf. Proc.*, 1389: 337-340 .

Yurttas, A., Demirci, M., Cangul, I. N. 2011. Classification of normal subgroups of Hecke group H6 in terms of parabolic class number**.** *Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Conf. Proc.*, 1389: 315-316.

Ozgur, B., Demirci, M., Yurttas, A., Cangul, I. N. 2011. Some properties of the minimal polynomials of 2cos(\pi/q) for odd q. *Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Conf. Proc.*, 1389: 353-356.

Yurttas, A., Ozgur, B., Cangul, I. N. 2012. Calculation of the minimal polynomial of 2cos(\pi/q) over Q with Maple, *ICNAAM 2012*.

Ozgur, B., Yurttas, A., Cangul, I. N. 2012. Determining the minimal polynomial of cos(2\pi/n) over Q with Maple. *ICNAAM 2012*.

Cangul, I. N., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A. S. 2012. Some Formulae for the Zagreb Indices of Graphs, *ICNAAM 2012*

Das, K. Ch., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., Cevik, A. S. 2013, The Multiplicative Zagreb Indices of Graph Operations. *Journal of Inequalities and Applications*, 90, doi:10.1186/1029-242X-2013-90, 2013

Das, Kinkar Ch., Yurttas, A., Maden, D., Cevik, A. S., Cangul, I. N., Bounds on Multiplicative Zagreb Indices, *Journal of Inequalities and Applications* (submitted).