T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

ASİYE KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

ASİYE KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

ASİYE KAYA

Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2009

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

ASİYE KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 17/07 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK (Danışman)	Doç Dr. Sibel YALÇIN	Prof. Dr. Ahmet CENGİZ

ÖZET

Bu çalışma esas olarak, reel ve kompleks analizde önemli bir yer tutan, fen ve mühendislikte uygulama alanı olan reel ve kompleks harmonik fonksiyonlar üzerine kurulmuştur.

Çalışmamızın birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ispatsız olarak verildi. İkinci bölümde; reel harmonik fonksiyon ve özellikleri, harmonik eşleniğin bulunması, harmonik fonksiyonların ortalama değer özelliği, harmonik fonksiyonlar için maksimum ve minimum özellikleri, bir daire üzerinde tanımlı harmonik fonksiyonlar ve Dirichlet problemi, Harnack eşitsizliği, yansıma prensibi, harmonik fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın tamlığı, Schwarz, Poisson ve Green formülleri, halka bilgeler ve sonlu bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlı harmonik fonksiyonların temsili verildi.

Üçüncü bölümde, reel ve sanal kısımları harmonik olan fakat eşlenik olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik yalınkat fonksiyonlar üzerinde duruldu. Bu fonksiyonların kanonik gösterimi, birim daireyi konveks bölgeler üzerine yalınkat olarak resmeden harmonik dönüşümler ve yapısal özellikleri, bir yönde konveks harmonik dönüşümler, konveks harmonik dönüşümlerin katsayı bağıntıları ve çeşitli konveks yalınkat harmonik fonksiyon örnekleri verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Harmonik Fonksiyonlar, Yalınkat Harmonik Dönüşümler, Konveks Harmonik Dönüşümler.

ABSTRACT

This work is mainly based on real and complex harmonic functions which are taken an important place in the real and complex analysis and which have many application areas on science and engineering.

In the first section of our study, the basic definitions and theorems which will be used in the other parts were given without proof. Real harmonic functions and features, harmonic conjugate of a harmonic function, mean value property of the harmonic functions, maximum and minimum properties for harmonic functions, harmonic functions defined on a disk and Dirichlet problem, Harnack inequality, the reflection principle, harmonic functions class and completeness of this class, Schwarz, Poisson and Green formulas, defined on the finitely connected region and annulus representation of harmonic functions were given in the second section.

In the third section the complex valued harmonic univalent functions, which have harmonic real and imajinary parts but have not to be conjugate, were emphasized. The canonical representation of this functions, the harmonic transformations which are the unit disk translate on convex regions as univalent and structural properties, convex harmonic mappings in one direction, coefficient conditions of convex harmonic conversions, and various convex univalent harmonic functions examples were given

KEYWORDS: Harmonic Functions, Harmonic Univalent Mappins, Convex Harmonic Mappings.

İÇİNDEKİLER Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$n(\gamma, z_0)$	γ eğrisinin z_0 noktası etrafındaki devir sayısı
$D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık daire
$D^*(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı delinmiş açık daire
$\overline{D}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı daire
∂D	D kümesinin sınırı
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
$\Delta_\gamma \arg(z - z_0)$	Argüment değişimi
Δu	u fonksiyonunun Laplasyeni
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı
$f(D)$	D kümesinin f fonksiyonu altındaki resmi
f_z	f fonksiyonunun z ye göre kısmi türevi
$J_f(z)$	f fonksiyonunun Jakobiyeni
$\mathbb{C}^k(U)$	U da tanımlı k. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{C}^\infty(U)$	U da tanımlı her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların sınıfı
$H(A, \mathbb{R})$	A kümesi üzerinde tanımlı harmonik fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{C}(A, \mathbb{R})$	A kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların sınıfı
$\omega = \overline{f_{\overline{z}}} / f_z$	f fonksiyonunun analitik genleşmesi
$g \prec f$	g fonksiyonu f fonksiyonuna sabordinedir
$f(z) << F(z)$	$f(z)$ fonksiyonu $F(z)$ ile domine edilmiştir
$k(z) = z/(1-z)^2$	Koebe Fonksiyonu

$\ell(z) = z/(1-z)$	Temel konveks fonksiyon
$L(z) = \mathrm{Re}\{\ell(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{k(z)\}$	İmajiner eksen yönünde konveks yalınkat harmonik fonk.
K_H	Konveks yalınkat harmonik olarak dönüşümlerin sınıfı
K_H^0	Normalize edilmiş konveks harmonik dönüşümlerin sınıfı
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{H}$	Orijin merkezli tüm açık halka bölgeler
REK	Reel eksen yönünde konveks fonksiyonların sınıfı

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, gelecek bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve sonuçlar verilecektir.

1.1. Kompleks Düzlemin Topolojisi

z_0, C kompleks düzleminde sabit bir nokta ve $0 < r < \infty$ olmak üzere

$$D(z_0,r) = \{ z : | z - z_0 | < r \},\ \overline{D}(z_0,r) = \{ z : | z - z_0 | \leq r \},$$

$$D^*(z_0,r) = \{ z : 0 < | z - z_0 | < r \} \text{ ve } \partial D(z_0,r) = \{ z : | z - z_0 | = r \}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli ve r yarıçaplı *açık daire*, *kapalı daire*, *delinmiş açık daire* ve *çember* denir.

$A \subset \mathrm{C}$ ve $z \in A$ için $D(z,r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z noktasına A kümesinin bir *iç noktası*, bütün noktaları iç nokta olan bir kümeye *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümelere de *kapalı küme* denir.

Bir $A \subset \mathrm{C}$ kümesini bulunduran kapalı kümelerin en darına A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A kümesinin bulundurduğu en geniş açık kümeye, başka bir deyişle A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir.

$A \subset \mathrm{C}$ olmak üzere her bir $D(z,r)$ açık dairesi ile A ve A kümesinin tümleyeni olan A' kümesinin kesişimi boş kümeden farklı ise $z \in \mathrm{C}$ noktasına A kümesinin bir *sınır noktası* denir ve A kümesinin sınır noktalarının kümesi ∂A ile gösterilir.

(z_n) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n doğal sayıları için $z_n \in D(z_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (z_n) dizisine z_0 noktasına *yakınsaktır* denir ve bu durum $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ veya $z_n \to z_0$ ile gösterilir. Limit ile kapanış arasındaki şu sonuç önemlidir: $z_0 \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ olacak şekilde A da bir (z_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

$A \subset \mathrm{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathrm{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f[A \cap D(z_0,\delta)] \subset D(f(z_0),\varepsilon)$$

bağıntısını sağlayan bir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer her $z \in A$ noktası için

$$f[A \cap D(z,\delta)] \subset D(f(z),\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesinde *düzgün süreklidir* denir. Eğer $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ iken $\lim f(z_n) = f(z_0)$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *dizisel süreklidir* denir. C kompleks düzleminde dizisel süreklilik ile süreklilik denktirler.

$A \subset \mathrm{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \le m < \infty$ olacak şekilde $m > 0$ sayısı varsa A kümesine *sınırlıdır* denir. C de bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır.

C de bir A kümesi ayrık açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa A kümesine *bağlantılı*, açık ve bağlantılı bir kümeye de *bölge* denir. Eğer bir bölgenin tümleyeni açık ve bağlantılı ise bu bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir. Açık bir A kümesinin bağlantılı bir B alt kümesi, A kümenin başka bir bağlantılı alt kümesi tarafından kapsanmıyorsa B ye A kümesinin bir *bileşeni* denir. Kompleks düzlemde bir B bölgesinin tümleyeni tam bir sınırlı bileşene sahipse bu bölgeye *iki katlı bağlantılı bölge* denir. Daha genel olarak tümleyeni tam $k-1$ tane sınırlı bileşene sahip bölge *k katlı bağlantılı bölge* olarak adlandırılır.

$a \le t \le b$ aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine C de bir *yay* veya *eğri* denir. Her $t \in [a,b]$ için $\varphi'(t) \ne 0$ ise eğriye *düzgün eğri* denir. Eğer eğri $[a,b]$ aralığında düzgün değil fakat $[a,b]$ aralığının alt aralıklarında düzgün ise eğriye *parçalı* *düzgün eğri* denir. Eğer bir eğri sonlu uzunluğa sahip ise bu eğriye *düzeltilebilir* (*rectifiable*) *eğri*, kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri* adı verilir. Uç noktaları bitişik bir eğriye *kapalı eğri*, sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisi tarafından sınırlanan bölgeye *Jordan bölgesi* denir.

Kompleks düzlemde parçalı düzgün kapalı bir γ eğrisi ve bir $z \in \mathbb{C} - \gamma$ noktası için

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

tamsayısına γ eğrisinin z etrafındaki *dönme sayısı* (*indeks*) denir. Kompleks düzlemde kapalı parçalı düzgün eğrilerin sonlu bir dizisine bir *devir* denir. U kompleks düzlemde açık bir küme ve Γ U da bir devir olsun. Her $z \in \mathbb{C} - U$ için $n(\Gamma, z) = 0$ ise Γ devrine U da *sıfıra homologdur* denir (Palka 1991).

1.2. Diferansiyellenebilme ve Analitiklik

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 A kümesinin bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{veya} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* veya *türevlenebilir* denir. Limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirse $f'(z_0) = f_x(z_0) = -i\, f_y(z_0)$ dır.

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve A kümesinin boş olmayan açık bir alt kümesi U olsun. Eğer f fonksiyonu U kümesinin her noktasında diferansiyellenebilirse f fonksiyonuna U da *analitiktir* denir.

Kompleks değişkenli bir fonksiyonun analitikliği ile ilgili aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem 1.2.1. $A \subset \mathrm{C}$ açık kümesinde tanımlı bir $f = u + iv$ fonksiyonu A da her yerde u_x, u_y, v_x, v_y sürekli kısmi türevlere sahip olsun. f fonksiyonunun A da analitik olması için gerek ve yeter şart A da Cauchy-Riemann denklemleri denilen

$$u_x = v_y \text{ ve } u_y = -v_x$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Bu durumda A da $f'(z) = f_x(z) = -i\, f_y(z)$ dir (Başkan 1996).

Tanım 1.2.2. Bir $U \subset \mathrm{C}$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu, k doğal sayısı için k. mertebeye kadar her mertebeden kısmi türevlere sahip ve sürekli ise f ye $C^k(U)$ sınıfından bir fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu U da her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahipse f ye $C^\infty(U)$ sınıfındandır denir

Teorem 1.2.3 (Cauchy Teoremi). D kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ve f, D de analitik bir fonksiyon olsun. D de bulunan her parçalı düzgün kapalı γ eğrisi için

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

dır (Başkan 1996).

Teorem 1.2.4 (Maksimum Modül Teoremi). Sınırlı bir D bölgesinde analitik ve sınırında sürekli, sabit olmayan bir f fonksiyonu maksimum modülünü D bölgesinin sınırında alır (Başkan 1996).

Maksimum modül teoremi $1/f$ fonksiyonuna uygulanırsa, minimum modül teoremi elde edilir.

Teorem 1.2.5 (Minimum Modül Teoremi). Sınırlı bir B bölgesinde analitik ve sınırında sürekli, sabit olmayan ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olan bir f fonksiyonu minimum modülünü B bölgesinin sınırında alır (Başkan 1996).

Maksimum modül teoreminin basit fakat önemli bir sonucu, $f(z)/z$ fonksiyonuna maksimum modül teoremini uygulamakla elde edilen Schwartz lemmasıdır.

Teorem 1.2.6 (Schwarz Lemması). f fonksiyonu $D = D(0,1)$ açık birim dairesinde $f(0)=0$ ve $|f(z)|<1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde D de $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Eşitlik $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir (Başkan 1996).

Teorem 1.2.7 (Özdeşlik Teoremi). f ve g bir D bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. Eğer D de yakınsak bir (z_n) dizisi için $f(z_n)=g(z_n)$ ise bu takdirde D bölgesinin tamamında $f \equiv g$ dir (Palka 1991).

Bu teoremden ''f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik, $z_n \to z_0$ ve $f(z_n)=0$ ise bu takdirde $f \equiv 0$ dır'' sonucu çıkarılabilir.

1.3. Analitik Fonksiyonların Ayrık Singüleriteleri

Tanım 1.3.1. $A \subset \mathrm{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathrm{C}$ fonksiyonu için $f(z_0)=0$ ise z_0 sayısına f fonksiyonunun bir *sıfırı* (kökü) denir. Eğer sabit olmayan bir f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ noktası f fonksiyonunun bir sıfırı ise f fonksiyonu D bölgesinde

$$f(z)=(z-z_0)^m\, g(z)\ ; \quad g(z_0) \neq 0$$

biçiminde bir gösterime sahiptir ve bu gösterim tektir. Burada m pozitif tamsayı ve g fonksiyonu D de analitiktir. Burada ki m sayısına z_0 da f fonksiyonunun *sıfırının katlılığı* (mertebesi) denir. Bunun anlamı f fonksiyonu z_0 da sıfır değerini tam m defa alır. Başka bir deyişle z_0 noktasının uygun bir komşuluğunun f altındaki resmi orijin noktasının uygun bir komşuluğunu tam m defa örter (Palka 1991).

Teorem 1.3.2. f bir z_0 noktasında analitik olsun. f fonksiyonu z_0 noktasının açık bir komşuluğunda her mertebeden türevlere sahiptir ve bu komşulukta yakınsak olan

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\ ; \quad a_n = f^n(z_0)/n!$$

biçiminde bir Taylor serisine açılabilir ve bu açılım tek türlüdür (Palka 1991).

Tanım 1.3.3. f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik değil fakat $D^*(z_0,r)$ dairesinde analitik olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun *ayrık singüler noktası* denir. Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun ayrık singüler noktası ise f fonksiyonu $D^* = D^*(z_0,r)$ delinmiş dairesinde

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{1.1}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir. Eğer (1.1) ifadesinde bütün a_{-n} katsayıları sıfır ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *kaldırılabilir singüler noktası*, eğer sonlu sayıda a_{-n} katsayıları sıfırdan farklı diğer tüm katsayılar sıfır ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *kutup noktası*, eğer sonsuz sayıda a_{-n} katsayıları sıfırdan farklı ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *esaslı singüler noktası* denir. Eğer f fonksiyonunun bir bölgedeki singüler noktaları kutup noktalarından ibaretse f fonksiyonuna bu bölgede *meromorf fonksiyon* denir.

Tanım 1.3.4. γ kapalı bir eğri, z_0 γ üzerinde bulunmayan herhangi bir nokta olsun. z noktası γ eğrisini taradığında $\arg(z-z_0)$ meydana gelen değişimeye *argüment değişimi* denir ve $\Delta_\gamma \arg(z-z_0)$ ile gösterilir. Gerçekte bu sayı $\Delta_\gamma \arg(z-z_0) = 2\pi\ n(\gamma, z_0)$ dir (Palka 1991).

Teorem 1.3.5 (Argüment Prensibi). *f*, bir D bölgesinde meromorf bir fonksiyon ve γ, D de bulunan ve f fonksiyonunun hiçbir kutup ve sıfır yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. f fonksiyonunun γ içindeki sıfır ve kutup yerlerinin sayıları (katlılıklar katlılığı kadar sayılmak üzere) sırasıyla Z_f ve P_f ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z_f - P_f = n(f(\gamma),0)$$

dir (Palka 1991).

Tanım 1.3.6. B bölgesinde analitik bir f fonksiyonu aynı değeri iki kere almıyorsa, başka bir deyişle f, B bölgesini başka bir bölge üzerine bire-bir olarak resmediyorsa f fonksiyonuna B de *yalınkat* (ünivalent) denir. Yalınkat analitik bir fonksiyona *konform dönüşüm* denir.

Teorem 1.3.7. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer f, D bölgesinde yalınkat ise her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ dır (Palka 1991).

Teorem 1.3.8. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun yalınkat olduğu D bölgesinin z_0 noktasını bulunduran bir G alt bölgesi mevcuttur (Palka 1991).

Teorem 1.3.9 (Ters Dönüşüm Teoremi). D kompleks düzlemde bir bölge ve $f : D \rightarrow$ C ünivalent analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ ters fonksiyonu da analitiktir (Palka 1991).

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli bir sonuç yalınkatlığın düzgün yakınsaklık altında korunmuş olmasıdır.

Teorem 1.3.10. f_n bir B bölgesinde yalınkat analitik fonksiyonların bir dizisi ve B'nin her bir kompakt alt kümesinde düzgün olarak $f_n(z) \rightarrow f(z)$ olsun. Bu takdirde f, B de yalınkattır veya sabittir (Palka 1991).

1851 yılında Riemann, basit bağlantılı bir bölgenin birim daire üzerine konform olarak dönüştürülebileceğini ifade ve ispat etti.

Teorem 1.3.11 (Riemann Dönüşüm Teoremi). B, kompleks düzlemin basit bağlantılı öz alt kümesi ve $z_0 \in B$ olsun. Bu takdirde, $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$ özelliğinde B bölgesini birim daire üzerine konform olarak dönüştüren bir tek f fonksiyonu vardır (Palka 1991).

Eğer B bir Jordan bölgesi ise Riemann dönüşüm teoremi sürekli olarak B bölgesinin sınırına genişletilebilir ve genişletilmiş fonksiyon sınır eğrisini bire bir olarak birim çember üzerine dönüştürür. Caratheodary'ye ait olan bu sonucu aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 1.3.12 (Caratheodory Genişleme Teoremi). B bir γ Jordan eğrisi ile sınırlanmış bir bölge ve f, B bölgesini D birim dairesi üzerine konform olarak resmetsin. Bu takdirde f, $\overline{B}$ den $\overline{D}$ üzerine bir homomorfizme genişletilebilir (Palka 1991).

Teorem 1.3.13. B basit bağlantılı bir bölge, γ bu bölgenin sınır eğrisi, f fonksiyonu B de analitik ve γ da sürekli olsun. Eğer f, γ da yalınkat ise B bölgesinde de yalınkattır (Palka 1991).

Bu teorem basit bağlantılı bir bölgeyi basit bağlantılı bir başka bölge üzerine konform olarak resmeden fonksiyonun bulunmasında önemli rol oynar. Bunun için de bölgenin sınırını bire-bir olarak resmeden ve sınırda sürekli olan bir fonksiyon bulmak yeterlidir.

1.4. Ekstremal (Uç) Problemler

F bir B bölgesinde analitik fonksiyonların bir ailesi ve ϕ, F üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyonel olsun. Buna göre her $f \in F$ için $\phi(f)$ bir kompleks sayıdır. F üzerinde tanımlanmış bir ϕ fonksiyoneli için, F üzerinde $\mathrm{Re}\{\phi\}$'nin supremumunu bulma problemi bir ekstremal problemdir. Ekstremal problemler geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rol oynar.

$$\sup_{f \in F} \mathrm{Re}\{\phi(f)\} = M < \infty$$

ifadesi bize her $f \in F$ için $\mathrm{Re}\{\phi(f\}\} \leq M$ kesin eşitsizliğini verir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik belli bir $f \in F$ fonksiyonu için gerçeklenir. Bu fonksiyona *ekstremal fonksiyon* denir. Genel bir kural olarak ekstremal fonksiyonlar ilginç özellikleriyle F ailesinin diğer elemanlarından ayrılır (Goodman 1983).

Tanım 1.4.1. B kompleks düzlemde bir bölge olsun. Her $z \in B$ ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz \in B$ ise B ye orijine göre *yıldızıl bölge* denir. Bunun geometrik anlamı B bölgesinin bütün noktalarını orijine birleştiren doğru parçalarının yine B de kalmasıdır. Eğer D de tanımlı bir f fonksiyonu için $f(D)$ yıldızıl bir bölge ise f ye *yıldızıl fonksiyon* denir. Farklı herhangi $z, w \in B$ noktaları ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz + (1-t)w$ doğru parçası B de kalıyorsa B ye *konveks bölge* denir. $f(D)$ konveks bir bölge ise D de tanımlı analitik f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir.

Herhangi bir konveks bölge her noktasına göre yıldızıl olduğundan bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir yıldızıl fonksiyondur. Ancak tersi doğru değildir. Aşağıdaki teorem bu fonksiyonların analitik temsilini vermektedir.

Teorem 1.4.2. $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t);\ a \leq t \leq b\}$ eğrisinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki resmi Γ olsun.

(a) Γ eğrisinin orijine göre yıldızıl olması için gerek ve yeter şart,

$$\mathrm{Im}\left[\frac{f'(z)}{f(z)} z'(t)\right] \geq 0$$

olmasıdır.

(b) $f'(z) \neq 0$ olmak üzere, Γ eğrisinin konveks olması için gerek ve yeter şart,

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z''(t)}{z'(t)} + \frac{f''(z)}{f'(t)} z'(t)\right] \geq 0$$

olmasıdır (Goodman 1983).

2. HARMONİK FONKSİYONLAR

Bu bölümde, düzlemin bir alt kümesinde tanımlı reel değerli harmonik fonksiyonlar tanıtılarak bu fonksiyonların özellikleri ayrıntılı olarak incelenecek. Ayrıca bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfın topolojik ve cebirsel özellikleri üzerinde durulacaktır.

2.1. Reel Harmonik Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. D kompleks düzlemde bir bölge, $u : D \to \mathbb{R}$ iki değişkenli fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Eğer u fonksiyonu her $z \in D$ için *Laplace Denklemi* adı verilen

$$\Delta u(z) = u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0 \tag{2.1}$$

denklemini sağlıyorsa u ya D de *reel harmonik fonksiyon* veya kısaca *harmoniktir* denir. Eğer u fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasının bir komşuluğunda harmonik ise u ya z_0 noktasında harmoniktir denir.

Harmonik fonksiyonlar uygulamalı matematik ve mekaniksel fizikte önemli rol oynarlar. Özellikle yerçekimi, elektrostatik ve manyetostatik potansiyeller ve birçok fiziksel öneme sahip fonksiyonlar harmonik fonksiyonlardır.

Tanımdan hareketle harmonik fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki sonuçları çıkarmak mümkündür.

1) Eğer u ve v harmonik iki fonksiyon ise $a,b \in \mathbb{C}$ olmak üzere $w = au + bv$ fonksiyonu da harmoniktir.

2) Eğer $u(x,y)$ fonksiyonu harmonik ise $u(x+a, y+b)$ fonksiyonu harmoniktir.

Aşağıdaki teorem harmonik fonksiyonlarla analitik fonksiyonlar arasındaki önemli bir bağıntıyı ifade eder.

Teorem 2.1.2. $f(z)=u(z)+i\,v(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise $u(z)$ ve $v(z)$ reel değerli fonksiyonları D de harmoniktir

İspat. $f=u+iv$ D de analitik ise her $z\in D$ için $f'(z)=u_x+i\,v_x=v_y-i\,u_y$ dir. Her iki tarafın x'e ve y'ye göre kısmi türevleri alınıp, Cauchy-Riemann denklemleri ve $u_{xy}=u_{yx}$, $v_{xy}=v_{yx}$ eşitliği kullanılırsa $u_{xx}+u_{yy}=0$ ve $v_{xx}+v_{yy}=0$ olduğu görülür. ■

Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani u ve v harmonik fonksiyonları için $f=u+iv$ analitik olmak zorunda değildir. Ancak bazı bölgesel kısıtlamalar altında tersinin doğru olduğu görülecek.

Örnek 2.1.3. $u(z)=\mathrm{Log}|z|$ fonksiyonu $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ bölgesinde harmonik eşleniğe sahip değildir. Gerçekten, eğer v, D de u fonksiyonunun harmonik eşleniği ise $f=u+iv$ analitik fonksiyonu ve $z\in D$ için $f'(z)=z^{-1}$ olur. Ancak D de türevi z^{-1} olan hiçbir analitik fonksiyon yoktur.

Tanım 2.1.4. $u(z)$ bir D bölgesinde harmonik olsun. $f=u+iv$ fonksiyonu D de analitik ise $v(z)$ fonksiyonuna D de u fonksiyonunun *harmonik eşleniği* denir.

Aşağıdaki teorem harmonik bir fonksiyonun ne zaman bir harmonik eşleniğinin olacağını ifade eder.

Teorem 2.1.5. B kompleks düzlemde bir bölge olsun. B de bir harmonik fonksiyonun eşleniğinin olması için gerek ve yeter şart B bölgesinin basit bağlantılı olmasıdır.

İspat. B basit bağlantılı bir bölge ve u B de harmonik olsun. u fonksiyonunun B de harmonik eşleniğinin olduğunu gösterelim. $g=u_x-i\,u_y=r+is$ fonksiyonunu göz önüne alalım. u fonksiyonu B de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve u harmonik olduğundan

$$r_x=u_{xx}=-u_{yy}=s_y \quad \text{ve} \quad r_y=u_{xy}=u_{yx}=-s_x$$

olur. Bu ise g fonksiyonunun B de analitik olduğunu gösterir. B bölgesi basit bağlantılı olduğundan, g fonksiyonu B de $f=\widetilde{u}+i\,v$ biçiminde bir ilkele sahip olup f

fonksiyonu B de analitiktir. Üstelik $f(z_0)=u(z_0)$ olacak şekilde B bölgesinin belli bir z_0 noktasını alalım. Bu bize f fonksiyonunun tek olarak belirlenmesini sağlar. Böylece $\tilde{u}(z_0)=u(z_0)$ dır. B de

$$f'=\tilde{u}_x+i\,v_x=\tilde{u}_x-i\,\tilde{u}_y=g=u_x-i\,u_y$$

olduğundan, B bölgesinin tamamında

$$(\tilde{u}-u)_x=(\tilde{u}-u)_y=0$$

elde edilir. Buradan $\tilde{u}-u$ fonksiyonunun B de sabit olduğu görülür. $\tilde{u}(z_0)=u(z_0)$ olduğundan, $\tilde{u}=u$ dur. Böylece B de $f=u+i\,v$ biçimindedir. f B de analitik olduğundan v de aynı bölgede u fonksiyonunun eşleniğidir.

Tersine, B de her bir harmonik fonksiyonun eşleniği mevcut ve γ, B de parçalı düzgün kapalı bir yol olsun. Verilen herhangi bir $z_0\in \mathbb{C}\backslash B$ noktası için $n(\gamma,z_0)=0$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ da $u(z)=\operatorname{Log}|z-z_0|$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ da dolayısıyla B de harmoniktir. B de u fonksiyonunun harmonik eşleniği v olsun. Böylece $f=u+i\,v$ fonksiyonu B de analitiktir. $h(z)=(z-z_0)e^{-f(z)}$ biçiminde tanımlı $h:B\to\mathbb{C}$ fonksiyonu da B de analitiktir. O halde her $z\in B$ için

$$|h(z)|=|z-z_0|e^{-u(z)}=|z-z_0|e^{-Log|z-z_0|}=|z-z_0|/|z-z_0|=1$$

bulunur. Bu durumda h, B de sabit olmak zorundadır. Buradan

$$h'(z)=0 \quad \text{veya} \quad e^{-f(z)}-(z-z_0)\,e^{-f(z)}f'(z)=0$$

elde edilir. Böylece $f'(z)=1/(z-z_0)$ olur. Cauchy teoremi gereği

$$n(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}=0$$

olup B bölgesi basit bağlantılıdır. ■

Sonuç 2.1.6. u fonksiyonu, açık bir B kümesinde harmonik ise B de bulunan her açık dairede bir harmonik eşleniğe sahiptir. Özellikle $D(z_0,r)$ dairesinde $u=\operatorname{Re}f$ olacak şekildeki f analitik fonksiyonu, C bir kompleks sabit olmak üzere

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2},\frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+C \tag{2.2}$$

eşitliği ile verilir. Eğer orijin f fonksiyonunun analitik olduğu bölgede bulunuyorsa, (2.2) ifadesi

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + C$$

biçiminde yazılabilir (Gonzalez 1991-I).

Şimdi verilen bir u harmonik fonksiyonunun v harmonik eşleniği mevcut olduğu durumda v fonksiyonunun nasıl hesaplanabileceğini görelim.

Teorem 2.1.7. u, basit bağlantılı bir B bölgesinde harmonik bir fonksiyon olsun. γ, B bölgesinde z_0 ile z noktasını birleştiren parçalı düzgün bir yol olmak üzere, u'nun v harmonik eşleniği

$$v(z) = \int_\gamma u_x dy - u_y dx \quad \text{veya} \quad v(x,y) = \int_0^y u_x(x,t)\,dt - \int_0^x u_y(s,0)\,ds$$

eşitliği ile verilir (Gonzalez 1991-I).

Örnek 2.1.8. $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a_0, \ldots, a_n$ ve $b_0, \ldots, b_n$ reel sabitler olmak üzere $r \geq 0$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$u(re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)]$$

biçiminde verilmiş olsun. u'nun $\mathbb{C}$ de harmonik olduğunu gösterip $v(0) = 0$ şartını sağlayan v harmonik eşleniğini bulalım.

$$u(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)] = a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k [a_k \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) + b_k \operatorname{Im}(e^{ik\theta})]$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} r^k [a_k \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) + b_k \operatorname{Re}(-ie^{ik\theta})] = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}[(a_k - ib_k) r^k e^{ik\theta}]$$

$$= \operatorname{Re}[a_0 + \sum_{k=1}^{n} [(a_k - ib_k) z^k]; \quad z = re^{i\theta}$$

olur. Böylece u fonksiyonu, $\mathbb{C}$ de analitik $f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [(a_k - ib_k) z^k]$ fonksiyonun reel kısmı olduğundan, $\mathbb{C}$ de harmoniktir. O halde $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $v(z) = \operatorname{Im}[f(z)]$

fonksiyonu $\mathbb{C}$ de u fonksiyonunun harmonik eşleniğidir. $v(0)=\operatorname{Im}[f(0)]=\operatorname{Im}(a_0)=0$ olduğundan istenilen $v(z)$ fonksiyonu

$$v(z)=\operatorname{Im}\left[a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k-ib_k)z^k\right]=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im}[(a_k-ib_k)r^k e^{ik\theta}]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}r^k[a_k\operatorname{Im}(e^{ik\theta})-b_k\operatorname{Im}(ie^{ik\theta})]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}r^k[-b_k\cos(k\theta)+a_k\sin(k\theta)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}r^k[-b_k\cos(k\theta)+a_k\sin(k\theta)]$$

biçimindedir.

Aşağıdaki teorem, harmonik fonksiyonların analitik fonksiyonlara ait olan bir özelliğe sahip olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.9. $B\subset\mathbb{C}$ açık bir küme ve u, B de harmonik bir fonksiyon ise her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir. Yani $u\in C^{\infty}(B)$ dir.

İspat. $z_0=x_0+iy_0\in B$ ve $D(z_0,r)\subset B$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı vardır. Bu takdirde u harmonik fonksiyonu $D(z_0,r)$ de v harmonik eşleniğine sahiptir. Böylece $f=u+iv$ fonksiyonu, $D(z_0,r)$ de analitik olup her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir. z_0 keyfi ve B açık olduğundan $u\in C^{\infty}(B)$ dir. ■

Teorem 2.1.10 (Ortalama Değer Teoremi). B bir açık küme u, B de harmonik bir fonksiyon ve $\overline{D}(z_0,r)\subset B$ olsun. Bu takdirde

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta \tag{2.3}$$

dır.

İspat. $\overline{D}(z_0,r)\subset B$ olacak şekilde bir $D=D(z_0,r)$ dairesini alalım. Teorem 2.1.5 gereği $u=\operatorname{Re}f$ olacak şekilde D de analitik bir f fonksiyonu vardır. Cauchy İntegral Formülü gereği

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

dır. Her iki yanın reel kısmı alınırsa

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

elde edilir. ■

(2.3) ifadesi bir harmonik fonksiyonun dairenin merkezinde aldığı değerin, dairenin sınırı üzerindeki ortalama değeri yardımıyla hesaplanabileceğini ifade eder.

Tanım 2.1.11. $B \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $u: B \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer u fonksiyonu her $\overline{D}(z_0,r) \subset B$ dairesinde (2.3) bağıntısını sağlıyorsa u ya B de *ortalama değer özelliğine sahiptir* denir. Teorem 2.2.7 de ortalama değer özelliğine sahip fonksiyonların belli şartlar altında harmonik olduğu gösterilecektir.

Teorem 2.1.12. B bir bölge $u: B \to \mathbb{R}$ sürekli ve ortalama değer özelliğine sahip olsun. Eğer her $z \in B$ için $u(a) \geq u(z)$ olacak şekilde bir $a \in B$ varsa u, sabit bir fonksiyondur.

İspat. $A = \{ z \in B : u(z) = u(a) \}$ olsun. u sürekli olduğundan $A \subset B$ kapalıdır. Eğer $z_0 \in A$ ise $\overline{D}(z_0,r) \subset B$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı seçelim. $u(a) \neq u(b)$ olacak şekilde $b \in D(z_0,r)$ noktasını göz önüne alalım. Bu taktirde $u(b) < u(a)$ dır. Süreklilik gereği b'nin uygun bir komşuluğundaki tüm z ler için $u(z) < u(a) = u(z_0)$ dır. $\rho = |z_0 - b|$ ve $b = z_0 + \rho e^{i\alpha}$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, ise her $\theta \in I$ için, $\alpha \in I$ ve $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$ olacak şekilde $I \subsetneq [0,2\pi]$ aralığı vardır. Ortalama değer özelliği gereği

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta < u(z_0)$$

çelişkisine düşülmüş olur. Böylece $D(z_0,r) \subset A$ dır. $z_0 \in A$ keyfi olduğundan A aynı zamanda açıktır. B bölgesi bağlantılı olduğundan A=B yani u B de sabittir. ■

Sonuç 2.1.13. B bir bölge u B de sabit olmayan sürekli ve ortalama değer özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu takdirde u maksimum değerini bölgenin ∂B sınırında alır.

Bir harmonik fonksiyonun maksimum veya minimum özelliği, analitik fonksiyonların modülünün maksimum ve minimum özellikleri ile benzerlik gösterir.

Teorem 2.1.14. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $u : B \to \mathbb{R}$, sabit olmayan harmonik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde u fonksiyonu maksimum ve minimum değerini B bölgesinin iç noktasında almaz.

İspat. Eğer B basit bağlantılı bir bölge ise Sonuç 2.1.6 gereği, B de $u = \operatorname{Re} f$ olacak şekilde f analitik fonksiyonu vardır. $F(z) = e^{f(z)}$ olarak tanımlanırsa F fonksiyonu B de analitik ve B de $F(z) \neq 0$ olur. O halde F fonksiyonuna B bölgesinde maksimum ve minimum modül teoremi uygulanabilir. Böylece $|F(z)| = e^{u(x,y)}$ fonksiyonu en büyük ve en küçük değerini B de almaz. Üstel fonksiyon artan olduğundan u fonksiyonu için de aynı özellikler geçerlidir.

B basit bağlantılı bir bölge olmasın. u fonksiyonunun maksimum değerini B bölgesinin içinde aldığını kabul edelim. $M = \underset{(x,y)\in B}{\text{maks}}\, u(x,y)$ olsun. B de her yerde $u(x,y) = M$ olduğunu göstermek ispatı tamamlar. Aksini kabul edelim. Yani B de en az bir yerde $u(x,y) \neq M$ olsun. $S = \{(x,y) \in B : u(x,y) = M\}$ diyelim. $z_0 = (x_0, y_0) \in S$ ve $z_1 = (x_1, y_1) \in B - S$ olsun. O halde $u(x_0, y_0) = M$ ve $u(x_1, y_1) < M$ dir. Başlangıç noktası z_0 ve bitiş noktası z_1 olan B de basit yönlendirilmiş poligonal yol P olsun. $z^* = (x^*, y^*)$, $P \cap S$ kümesinin son noktası olsun. $z^* \in S$ olduğundan $u(x^*, y^*) = M$ dir. $0 < r < |z_1 - z^*|$ ve $D(z^*, r) \subset B$ olacak şekilde yeterince küçük bir r sayısı seçelim. $C(z^*, r) = \{z : |z - z^*| = r\}$ çemberi z^* ile z_1 arasındaki poligonal yolun bir kısmını bulundurur. Bu noktaları P_i ile gösterelim. Bu noktaların belli bir komşuluğunda $u < M$ dir. Öte yandan u harmonik fonksiyonu $D(z^*, r)$ dairesinde ortalama değer özelliğini sağlar. Yani

$$u(z^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z^* + \rho e^{i\theta})\, d\theta \ , \quad 0 < \rho < r$$

dir. Bu ise $u(z^*) = M$ olması ile çelişir. Çünkü sağ taraftaki integral M veya M den daha küçüktür. Bu da gösteriyor ki u fonksiyonu maksimum değerini B bölgesinin herhangi bir iç noktasında alamaz.

Minimum özelliği, $-u(x,y)$ fonksiyonuna maksimum özelliği uygulanarak elde edilir. ■

Sonuç 2.1.15. B sınırlı bir bölge, B de sabit olmayan u harmonik fonksiyonu bilgenin sınırında sürekli olsun. Bu takdirde, u fonksiyonu $\overline{B}$ de maksimum ve minimum değerini bölgenin sınırında alır.

İspat. Kompakt kümede tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar bu bölgede mutlak maksimum ve mutlak minimum değerine sahiptir. Teorem 2.1.14 gereği sabit olmayan u harmonik fonksiyonu bu değerleri B bölgesinde alamaz. O halde sınırda almak zorundadır. ■

Sonuç 2.1.16. $u(x,y)$, $|z|<R$ dairesinde sabit olmayan reel değerli harmonik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $0 \le r < R$ ve $|z|=r$ olmak üzere $A(r) = \text{maks}\, u(x,y)$ fonksiyonu kesin olarak artan bir fonksiyonudur.

İspat. $0 \le r_1 < r_2 < R$ olmak üzere $|z|=r_1$, $|z|=r_2$ çemberlerini ve $D_1(0,r_1)$, $D_2(0,r_2)$ dairelerini göz önüne alalım. $\underset{z\in\overline{D}_1}{\text{maks}}\, u(x,y) = \underset{|z|=r_1}{\text{maks}}\, u(x,y) = A(r_1)$ ve $\underset{z\in\overline{D}_2}{\text{maks}}\, u(x,y) = \underset{|z|=r_2}{\text{maks}}\, u(x,y) = A(r_2)$ denirse $r_1 < r_2$ olduğundan $A(r_1) < A(r_2)$ dir. ■

Aşağıdaki teorem, sınırlı bir bölgede harmonik bir fonksiyonun değerlerinin o bölgenin sınırı üzerindeki değerleri yardımıyla belirlenebileceğini gösterir.

Teorem 2.1.17. $u_1(x,y)$ ve $u_2(x,y)$ sınırlı bir B bölgesinde reel değerli harmonik iki fonksiyon olsun. Üstelik u_1 ve u_2 fonksiyonları bölgenin ∂B sınırında sürekli olsun. Eğer her $(x,y) \in \partial B$ için $u_1(x,y) = u_2(x,y)$ ise B bölgesinde $u_1 = u_2$ dir.

İspat. $F(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ fonksiyonu B de harmonik ve ∂B de sürekli olduğundan maksimum ve minimum değerlerini ∂B de alır. ∂B de $u_1 = u_2$ olduğundan

$\underset{(x,y)\in\overline{B}}{\text{maks}} F(x,y)=0$ ve $\underset{(x,y)\in\overline{B}}{\min} F(x,y)=0$ dır. Böylece her $(x,y)\in\overline{B}$ için $F(x,y)=0$ olup $\overline{B}$ de $u_1=u_2$ elde edilir. ■

Sonuç 2.1.18. $u(x,y)$ fonksiyonu bir B bölgesinde harmonik, ∂B de sürekli ve ∂B üzerinde sıfır ise bu takdirde $\overline{B}$ da sıfırdır.

2.2. Bir Daire Üzerinde Harmonik Fonksiyonlar

B düzlemsel sınırlı bir bölge ve $h:\partial B\to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere ∂B üzerinde h fonksiyonuna eşit olan ve B de Laplace denklemini çözme problemine *Dirichlet problemi* denir. Aslında Dirichlet problemi, ∂B de h ile çakışan ve B de harmonik olan $u:\overline{B}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunu bulma problemidir. Yani her $\zeta\in\partial B$ için $\lim\limits_{z\to\zeta}u(z)=h(\zeta)$ özelliğinde $u:B\to\mathbb{R}$ harmonik fonksiyonunu bulma problemidir. Bu durumda u fonksiyonunun $\overline{B}$ de sürekli ve sınırda da $u=h$ olduğunu görmek zor değildir. Her Dirichlet probleminin bir çözümü olmak zorunda değildir. Ancak çözüm varsa tektir. Eğer bir D bölgesi her bir sürekli h sınır fonksiyonu için Dirichlet probleminin bir çözümüne sahipse, böyle bölgelere *Dirichlet problemi için düzgündür* denir. Bu kesimde açık bir dairenin veya daha genel olarak herhangi bir Jordan eğrisi tarafından sınırlanan bir bölgenin Dirichlet problemi için düzgün olduğu gösterilecek ancak çok daha genel bölgeler için Dirichlet probleminin çözümü ile ilgilenilmeyecek.

Aşağıdaki örnek, sınır fonksiyonunun iki değişkenli bir polinom olması durumunda orijin merkezli dairede Dirichlet probleminin çözümü için bir yöntem verir.

Örnek 2.2.1. $B=D(0,2)$ dairesi ve sınır şartı $h(z)=x^2+2xy^2$ olan fonksiyon için Dirichlet problemini çözelim.

$z=2e^{i\theta}=2\cos\theta+2i\sin\theta$ için

$$\begin{aligned} h(z) &= 4\cos^2\theta+16\cos\theta\sin^2\theta = 2[1+\cos(2\theta)]+8[1-\cos(2\theta)]\cos\theta \\ &= 2+2\cos(2\theta)+8\cos\theta-8\cos(2\theta)\cos\theta \\ &= 2+4\cos\theta+2\cos(2\theta)-4\cos(3\theta) \end{aligned}$$

olur. $a_1, a_2, a_3 \in \mathsf{R}$ olmak üzere Örnek 2.1.8 gereği

$$u(re^{i\theta}) = a_0 + a_1 r\cos\theta + a_2 r^2\cos(2\theta) + a_3 r^3\cos(3\theta)$$

biçiminde tanımlı $u:\mathsf{C}\to\mathsf{R}$ fonksiyonu C de harmoniktir. $r=2$ iken $u=h$ olacak şekilde a_0, a_1, a_2 ve a_3 sayılarını $a_0=2,\ a_1=2,\ a_2=1/2$ ve $a_3=-1/2$ olarak bulunur. Böylece verilen Dirichlet probleminin çözümü

$$u(z) = 2 + 2r\cos\theta + \frac{r^2\cos(2\theta)}{2} - \frac{r^3\cos(3\theta)}{2}$$

$$= \mathrm{Re}\left(2 + 2z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3xy^2}{2}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.2.2. Her $(z,\zeta)\in\mathsf{C}^2$ ve $z\neq\zeta$ için

$$P(z,\zeta) = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlı iki kompleks değişkenli P fonksiyonuna *Poisson çekirdeği* denir.

$\zeta\neq 0$ sabit olarak alındığında $P(z,\zeta)$ çekirdeği $D(0,|\zeta|)$ dairesinde z değişkeninin pozitif harmonik bir fonksiyonu olur. Üstelik $r>0$, $|z|<r$ ve $\zeta = re^{i\theta}$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\,d\theta = 1 \tag{2.5}$$

dir. Gerçekten, $\gamma = re^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$, olmak üzere $z\in D(0,r)$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = n(\gamma, z) = 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right)d\theta = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\,d\theta\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right] = 2 - 1 = 1$$

olur. $0 \le r < 1$ ve $-\infty < \theta < \infty$ için (2.4) çekirdeği

$$P_r(\theta) = P(re^{i\theta}, 1) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 2.2.3. $D = D(z_0, r)$ ve $h : \partial D \to \mathsf{R}$ sürekli fonksiyon olsun.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z - z_0, re^{i\theta})\; h(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

biçiminde tanımlanan $u : D \to \mathsf{R}$ fonksiyonuna D de h fonksiyonunun *Poisson integrali* denir.

Teorem 2.2.4 (Schwarz Teoremi). D kompleks düzlemde açık bir daire, $h : \partial D \to \mathsf{R}$ sürekli bir fonksiyon ve u fonksiyonu D de bir h fonksiyonunun Poisson integrali olsun. Bu takdirde u, D de harmoniktir ve bütün $\zeta \in \partial D$ için $\lim\limits_{z \to \zeta} u(z) = h(z)$ dir.

İspat. Önce u fonksiyonunun $D = D(0, r)$ dairesinde harmonik olduğunu gösterelim.

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{h(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

biçiminde tanımlanan $H : D \to \mathsf{C}$ fonksiyonu analitiktir. Her $z \in D$ için u fonksiyonu D de h fonksiyonunun Poisson integrali olduğundan

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})h(re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\right)h(re^{i\theta})d\theta$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\right)h(re^{i\theta})d\theta\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)h(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\right)h(\zeta)\, d\zeta\right] = \mathrm{Re}\left[2H(z) - H(0)\right]$$

olur. Böylece, $u(z)$ fonksiyonu analitik bir fonksiyonun reel kısmı olduğundan D de harmoniktir.

Geriye her bir $\zeta \in \partial D$ noktası için $z \to \zeta$ iken $u(z) \to h(\zeta)$ olduğunu göstermek kalır. Bunun için seçilen keyfi sabit bir $\zeta = re^{i\alpha}$, $0 \le \alpha \le 2\pi$ noktası, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z-\zeta| < \delta$ özelliğindeki her $z \in D$ için $|u(z)-h(\zeta)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız. (2.5) bağıntısı gereği

$$u(z)-h(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,re^{i\theta})h(re^{i\theta})d\theta - \frac{h(re^{i\alpha})}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,re^{i\theta})d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,re^{i\theta})[h(re^{i\theta})-h(re^{i\alpha})]d\theta$$

ve periyodiklik gereği

$$u(z)-h(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} P(z,re^{i\theta})[h(re^{i\theta})-h(re^{i\alpha})]d\theta$$

olur. $0 < t \le \pi$ için $M(t) = \text{maks}\{|h(re^{i\theta})-h(re^{i\alpha})| : \theta \in [\alpha - t, \alpha + t]\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bir kere $M(t)$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Gerçekten, θ değerini $|h(re^{i\theta})-h(re^{i\alpha})|$ sayısına resmeden fonksiyon reel eksen üzerinde sürekli olduğundan, onun $[\alpha - t, \alpha + t]$ aralığına kısıtlanışı da sürekli olup bu aralıkta maksimum değeri alır ve $M(t) \le M(\pi)$ dir. $\theta \to \alpha$ için $h(re^{i\theta}) \to h(re^{i\alpha})$ olduğundan, $t \to 0$ iken $M(t) \to 0$ elde edilir. $0 < t < \pi$ olduğunda herhangi bir $z \in D$ için

$$|u(z)-h(\zeta)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} P(z,re^{i\theta})[h(re^{i\theta})-h(re^{i\alpha})]d\theta \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} P(z,re^{i\theta})|h(re^{i\theta})-h(re^{i\alpha})|d\theta$$

$$\le \frac{M(t)}{2\pi}\int_{|\theta-\alpha|\le t} P(z,re^{i\theta})d\theta + \frac{M(\pi)}{2\pi}\int_{t\le|\theta-\alpha|\le\pi} P(z,re^{i\theta})d\theta$$

$$\le \frac{M(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,re^{i\theta})d\theta + \frac{M(\pi)}{2\pi}\int_{t\le|\theta-\alpha|\le\pi} P(z,re^{i\theta})d\theta$$

$$= M(t) + \frac{M(\pi)(r^2-|z|^2)}{2\pi}\int_{t\le|\theta-\alpha|\le\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta}-z|^2}$$

olur. $0 \le x \le \pi/2$ için $\sin x \ge (2x)/\pi$ olduğundan $t \le |\theta-\alpha| \le \pi$ olmak üzere

$$|e^{i\theta}-e^{i\alpha}| = |e^{i(\theta-\alpha)}-1| \ge 1-\cos(\theta-\alpha) \ge 1-\cos t = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ge \frac{2t^2}{\pi^2}$$

dir. $|z-\zeta|< rt^2/\pi^2$ özelliğindeki her $z\in D$ için

$$|re^{i\theta}-z|\geq|re^{i\theta}-\zeta|-|\zeta-z|=r|e^{i\theta}-e^{i\alpha}|-|\zeta-z|$$

$$\geq\frac{2rt^2}{\pi^2}-\frac{rt^2}{\pi^2}=\frac{rt^2}{\pi^2};\quad t\leq|\theta-\alpha|\leq\pi$$

elde edilir. Böylece

$$\int\limits_{t\leq|\theta-\alpha|\leq\pi}\frac{d\theta}{|re^{i\theta}-z|^2}\leq\frac{\pi^4}{r^2t^4}\int\limits_{t\leq|\theta-\alpha|\leq\pi}d\theta\leq\frac{\pi^4}{r^2t^4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta=\frac{2\pi^5}{r^2t^4}$$

bulunur. O halde $|z-\zeta|< rt^2/\pi^2$ özelliğindeki her $z\in D$ için

$$|u(z)-h(\zeta)|\leq M(t)+\frac{\pi^4M(t)(r^2-|z|^2)}{r^2t^4}\tag{2.6}$$

elde edilir. $0<\delta<(rt^2)/\pi^2$ seçilirse $|z-\zeta|<\delta$ için (2.6) sağlanır. $t\to 0$ iken $M(t)\to 0$ olduğundan $M(t)\to\varepsilon/2$ olacak şekilde t seçelim. Böylece $|z|\to r$ iken (2.6) ifadesi sıfıra gider. Bu durum $z\to\zeta$ için de doğrudur. $0<\delta<(rt^2)/\pi^2$ olarak seçilirse (2.6) ifadesinin son terimi $\varepsilon/2$ den daha küçük kalır. O halde $|z-\zeta|<\delta$ iken $|u(z)-h(\zeta)|<\varepsilon$ olur. Böylece $z\to\zeta$ iken $u(z)\to h(\zeta)$ elde edilir. ■

Uyarı. Teorem 2.2.4, bir $D(z_0,r)$ dairesi için Dirichlet probleminin çözümünün varlığından çok, problemin çözümü olan harmonik fonksiyonun

$$u(z)=\frac{(r^2-|z-z_0|^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(z_0+re^{i\theta})}{|re^{i\theta}-(z-z_0)|^2}d\theta$$

biçiminde bir integral temsili ile verilebileceğini gösterir. Özel olarak $D(0,1)$ birim dairesi için bu çözüm

$$u(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}h(e^{i\theta})d\theta\right]$$

$$=\frac{1-|z|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(e^{i\theta})}{|e^{i\theta}-z|^2}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(z,e^{i\theta})h(e^{i\theta})d\theta$$

biçimindedir.

Sonuç 2.2.5. $D=D(z_0,r)$ ve $h:\partial D\to\mathsf{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu takdirde $z\in\partial D$ için $w(z)=h(z)$ ve D de harmonik olan bir tek $w:\overline{D}\to\mathsf{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

İspat. $f(e^{i\theta})=h(z_0+r\,e^{i\theta})$ diyelim. f fonksiyonu $\mathsf{D}=\{z:|z|<1\}$ dairesinin sınırı üzerinde süreklidir. Eğer $u:\overline{\mathsf{D}}\to\mathsf{R}$ fonksiyonu sürekli, D de harmonik ve $u(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})$ ise bu takdirde $w(z)=u[(z-z_0)/r]$ fonksiyonu da $\overline{D}$ için aynı özelliklere sahiptir. ■

Teorem 2.2.6 (Harnack Eşitsizliği). $D=D(z_0,r)$ dairesinde negatif olmayan harmonik bir fonksiyon u olsun. Her $z\in D$ için

$$u(z_0)\frac{r-|z-z_0|}{r+|z-z_0|}\le u(z)\le u(z_0)\frac{r+|z-z_0|}{r-|z-z_0|} \tag{2.7}$$

dir.

İspat. z, D de belli bir nokta olsun. $|z-z_0|<s<r$ eşitsizliğini sağlayan s sayısı için $D_0=D(z_0,s)$ dairesini göz önüne alalım. u fonksiyonunun ∂D_0 sınırına kısıtlaması h olsun. Sınır fonksiyonu h olan D_0 dairesi için Dirichlet probleminin tek çözümü, u'nun $\overline{D}_0$ ye kısıtlanışından ibarettir. Diğer yandan Schwarz teoremi gereği, çözüm $\overline{D}_0$ de h fonksiyonunun Poisson integralidir. O halde

$$u(z)=\frac{(s^2-|z-z_0|^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(z_0+se^{i\theta})}{|se^{i\theta}-(z-z_0)|^2}d\theta$$

biçiminde yazılabilir. Herhangi bir θ reel sayısı için

$$s-|z-z_0|\le|se^{i\theta}-(z-z_0)|\le s+|z-z_0|$$

olduğundan

$$\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|}\le\frac{s^2-|z-z_0|^2}{|se^{i\theta}-(z-z_0)|^2}\le\frac{s+|z-z_0|}{s-|z-z_0|}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik pozitif $u(z_0+se^{i\theta})/2\pi$ sayısı ile çarpıp 0 dan 2π ye integrali alınırsa

$$\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+se^{i\theta})d\theta\right)\le u(z)$$

ve

$$u(z)\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+se^{i\theta})d\theta\right)\frac{s+|z-z_0|}{s-|z-z_0|}$$

bulunur. $u(z)$ fonksiyonu ortalama değer özelliğini sağladığından

$$u(z_0)\frac{s-|z-z_0|}{s+|z-z_0|}\leq u(z)\leq u(z_0)\frac{s+|z-z_0|}{s-|z-z_0|}$$

olur. Son eşitsizlikler $|z-z_0|<s<r$ özelliğindeki her s için sağlandığından $s\to r$ için istenilen (2.7) eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 2.2.7. Reel değerli $u(x,y)$ fonksiyonu açık bir A kümesinde sürekli olsun. Bu takdirde u fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart A kümesinde ortalama değer özelliğine sahip olmasıdır.

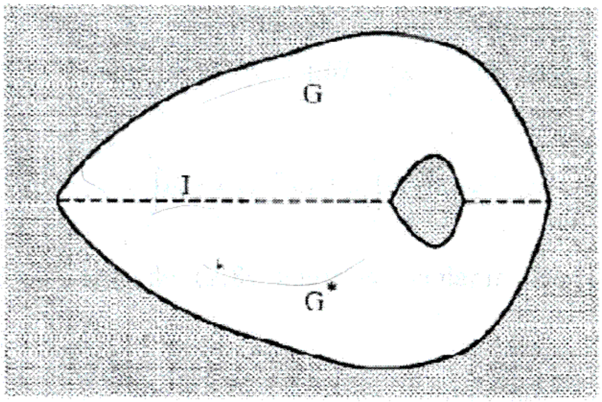
İspat. Teorem 2.1.10 da A da harmonik bir fonksiyonun ortalama değer özelliğine sahip olduğu gösterildi. Şimdi teoremin yeter şartını ispatlayalım. u fonksiyonunun A da harmonik olduğunu ispatlamak için A daki her bir noktanın u fonksiyonunun harmonik olduğu dairenin merkezi olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi sabit bir $z_0\in A$ noktasını ve $\overline{D}\subset A$ olacak şekilde $D=D(z_0,r)$ dairesini seçelim. Teorem 2.2.4 gereği D de harmonik ve ∂D de u ya eşit olan $w:\overline{D}\to \mathbb{R}$ fonksiyonunun vardır. D de $w=u$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $v(z)=u(z)-w(z)$ şeklinde tanımlı $v:\overline{D}\to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunu göz önüne alalım. w harmonik olduğundan ve u da kabulden dolayı ortalama değer özelliğine sahip iki fonksiyondur. Dolayısıyla aynı dairede v fonksiyonunun ortalama değer özelliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre $v(z)$ maksimum değerini ∂D de alır. ∂D üzerinde $v=0$ olduğundan D dairesi içinde $v\leq 0$ olur. Aynı işlem $-v$ fonksiyonu için yapıldığında, D dairesinin içinde $v\geq 0$ olduğu görülür. Böylece, D de $v=0$ yani $w=u$ elde edilir. ■

Teorem 2.2.7 nin güzel bir uygulaması "yansıma prensibi" olarak adlandırılan aşağıdaki teoremdir.

Teorem 2.2.8. B x-eksenine göre simetrik bir bölge, G ve G^*, $B\setminus\mathbb{R}$ bölgesinin bileşenleri ve $I=B\cap\mathbb{R}$ olsun (Şekil 2.1). Eğer $u:G\to\mathbb{R}$ ye harmonik fonksiyonu her $z\in I$ için $\lim\limits_{\zeta\to z}u(\zeta)=0$ özelliğini sağlıyorsa

$$w(z)=\begin{cases} u(z) & ; \quad z\in G \\ 0 & ; \quad z\in I \\ -u(\bar{z}); & \quad z\in G^* \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $w: B \to \mathsf{R}$ fonksiyonu harmoniktir.



Şekil 2.1

İspat. u fonksiyonu G de harmonik olduğundan w fonksiyonu da G de harmoniktir. G^* da $w(z)=-u(\bar{z})=-u(x,-y)$ olduğundan $w\in C^2(G^*)$ dır. Üstelik, her $z\in G^*$ için

$$w_x(z)=-u_x(\bar{z}),\quad w_{xx}(z)=-u_{xx}(\bar{z}),\ \text{ve}\ \ w_y(z)=u_y(\bar{z})\ \text{ ve }\ w_{yy}(z)=-u_{yy}(\bar{z})$$

dır. Böylece her bir $z\in G^*$ için $\Delta w=-\Delta u(\bar{z})=0$ olduğundan w fonksiyonu G^* da harmoniktir.

Esas problem $z\in I$ noktalarında ortaya çıkar. Bu noktalarda $w_y(z)$ kısmi türevin ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlerin varlığı hakkında bir şey söylenemez. Hipotez gereği w fonksiyonu en azından I da dolayısıyla B de süreklidir. Şimdi w fonksiyonunun B de ortalama değer özelliğini sağladığını göstermeliyiz. Verilen bir $z\in B$ noktası için $D(z,\rho)\subset B$ olacak şekilde yeterince küçük bir $\rho=\rho(z)>0$ sayısı seçelim. Eğer $z\in G$ ise $\rho=\rho(z)>0$ sayısını $D(z,\rho)\subset G$ olacak şekilde seçmeliyiz. Aynı durumu G^* için de düşüneceğiz. r sayısı $0<r<\rho$ özelliğinde olsun.

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z+re^{i\theta})\,d\theta \tag{2.8}$$

olduğunu iddia ediyoruz. w fonksiyonu G ve G^* da harmonik olduğundan Teorem 2.1.10 ve ρ üzerindeki kısıtlamalar, z'nin G veya G^* a ait olması durumunda, (2.8) eşitliğinin sağlandığını gösterir. $z \in I$ ise $w(z) = 0$ ve

$$\int_0^{2\pi} w(z+re^{i\theta})d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} w(z+re^{i\theta})d\theta = \int_{-\pi}^{0} w(z+re^{i\theta})d\theta + \int_0^{\pi} w(z+re^{i\theta})d\theta$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} u(z+re^{-i\theta})d\theta + \int_0^{\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta + \int_0^{\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta = 0 = w(z_0)$$

elde edilir. Yani $z \in I$ için de (2.8) bağıntısı sağlanır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. ■

Teorem 2.2.9. Bir u fonksiyonu $D^*(z_0,r)$ delinmiş dairede harmonik ve sınırlı ise $\lim_{z\to z_0} u(z)$ mevcuttur ve

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} u(z) & ; \quad z \in D^*(z_0,r) \\ \lim_{z\to z_0} u(z) & ; \quad z = z_0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\tilde{u}$ fonksiyonu $D(z_0,r)$ dairesinde harmoniktir.

İspat. $u(z)$ fonksiyonu $D^*(z_0,r)$ de sınırlı olduğundan her $z \in D^*(z_0,r)$ için $-m \le u(z) \le m$ olacak şekilde $m > 0$ sayısı vardır. $0 < d < \min\{1,r\}$ özelliğinde bir d sayısı seçelim. $D_1 = D(z_0,d)$ dairesinin sınırında $u = v$ olacak şekilde D_1 dairesinde Dirichlet probleminin çözümü v olsun. Gerçekte v, u fonksiyonunun ∂D_1 sınırına kısıtlanışının Poisson integralidir. Her $z \in \partial D_1$ için $-m \le u(z) \le m$ olduğundan (2.5) bağıntısı yardımıyla bütün $z \in \overline{D_1}$ için $-m \le v(z) \le m$ olduğu görülür. $D_1^* = D_1^*(z_0,d)$ bölgesinde u=v olduğu gösterilirse teoremin ispatı tamamlanmış olacaktır. Çünkü bu durumda $\lim_{z\to z_0} u(z) = \lim_{z\to z_0} v(z) = v(z_0)$ mevcut ve $D^*(z_0,r)$ de harmonik olduğu bilinen $\tilde{u}$ fonksiyonu daha küçük D_1 dairesinde v fonksiyonuna eşit olacaktır. Bu durum onu da D_1 de harmonik yapacak ve böylece $\tilde{u}$, $D(z_0,r)$ de harmonik olacaktır.

$w = u - v$ fonksiyonunu göz önüne alalım. D_1^* da her yerde $w = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunun için sadece D_1^* da $w \leq 0$ olduğunu göstermek yetecektir. Aynı tartışma $-w$ ya uygulandığında D_1^* da $w \geq 0$ elde edilir. Böylece D_1^* da özdeş olarak $w = 0$ elde edilmiş olur. Dikkat edilirse w fonksiyonu D_1^* da harmonik, $A = \{ z : 0 < | z - z_0 | \leq d \}$ kümesinde sürekli ve A da her yerde $-2m \leq w \leq 2m$ eşitsizliğini sağlar. Üstelik $| z - z_0 | = d$ çemberinde $u(z) = v(z)$ olduğundan $w(z) = 0$ dır. D_1^* dairesinde w ya Sonuç 2.1.15 uygulayabilmeyi çok arzu ederdik ancak ∂D_1^* da z_0 noktasının olması bunu imkansız kılmaktadır. Her bir $t > 0$ ve $z \in D_1^*$ için

$$w_t(z) = w(z) + t \operatorname{Log} | z - z_0 |$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her $t > 0$ ve her $z \in D_1^*$ için $w_t \leq 0$ olduğunu göstereceğiz. Bu durum $t \to 0$ iken de doğru olacağından her $z \in D_1^*$ için $w(z) \leq 0$ sonucuna ulaşacağız. Bu da ispatı tamamlamış olacak. D_1^* dairesinde $w_t \leq 0$ olduğunu göstermekle tam ispatı yapmış olacağız.

Sabit bir $t > 0$ sayısı ve $z \in D_1^*$ noktasını göz önüne alalım. $2m + t \operatorname{Log} c \leq 0$ olacak şekilde bir $c \in (0, | z - z_0 |)$ sayısı seçebiliriz. w_t fonksiyonu $G = \{ \zeta : c < | \zeta - z_0 | < d \}$ halka bölgesinde harmoniktir ve $\overline{G}$ üzerinde süreklidir. $| \zeta - z_0 | = d$ iken $w(\zeta) = 0$ ve $0 < d < 1$ olduğundan

$$w_t(\zeta) = w(\zeta) + t \operatorname{Log} d = t \operatorname{Log} d < 0$$

olur. c cayısının seçimi gereği $| \zeta - z_0 | = c$ iken

$$w_t(\zeta) = w(\zeta) + t \operatorname{Log} c \leq 2m + t \operatorname{Log} c \leq 0$$

dır. Sonuç 2.1.11 gereği G de her yerde $w_t \leq 0$ dır. $t > 0$ ve $z \in D_1^*$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur. ∎

Aşağıdaki örnek sınırlı bir bölgenin Dirichlet problemi için düzgün olmadığını göstermektedir.

Örnek 2.2.10. $D=\{z: 0<|z|<1\}$ ve $h:\partial D \to \mathrm{R}$ fonksiyonu $h(z)=1-|z|$ biçiminde tanımlanmış olsun. D bölgesinin Dirichlet problemi için düzgün olmadığını gösterelim.

Bunun için ∂D de $h(z)$ fonksiyonuna eşit ve D de harmonik bir fonksiyonun olmadığını göstermeliyiz. Aksini kabul edelim. Yani $u:\overline{D} \to \mathrm{R}$ sürekli, D de harmonik ve ∂D de $u=h$ olan u fonksiyonu mevcut olsun. Teorem 2.2.9 gereği u fonksiyonu $D(0,1)$ de harmonik olur. Üstelik u fonksiyonu Sonuç 2.1.15 gereği maksimum değerini $\partial D(0,1)$ sınırında alır. Bu değer $u(e^{i\theta})=h(e^{i\theta})=1-|e^{i\theta}|=0$ dır. Halbuki $u(0)=1>0$ olup bu bir çelişkidir.

$A \subset \mathrm{C}$ açık bir küme olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı bütün harmonik fonksiyonların sınıfı $H(A,\mathrm{R})$ ile gösterilir. $H(A,\mathrm{R})$ sınıfı A üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların $C(A,\mathrm{R})$ sınıfının bir alt sınıfı olup, toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturur. Üstelik $H(A,\mathrm{R})$ üzerindeki metrik $C(A,\mathrm{R})$ den indirgenen metriktir.

Teorem 2.2.11. B kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere $H(B,\mathrm{R})$ sınıfı tamdır. Üstelik $\{u_n\}$, $H(B,\mathrm{R})$ de $u_1 \le u_2 \le \dots$ özelliğinde bir dizi ise $\{u_n\}$ dizisi, ya B bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün olarak $u_n(z) \to \infty$ dur veya $H(B,\mathrm{R})$ de bir harmonik fonksiyona yakınsar.

İspat. $C(B,\mathrm{R})$ tam olduğundan $H(B,\mathrm{R})$ sınıfının tam olduğunu göstermek için kapalı olduğunu yani, herhangi $\{u_n\} \subset H(B,\mathrm{R})$ dizisi için $u_n \to u$ iken $u \in H(B,\mathrm{R})$ olduğunu göstermek yeterlidir. $u_n \to u$ iken $u \in C(B,\mathrm{R})$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z+re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta=u(z)$$

olup, $u(z)$ ortalama değer özelliğini sağlar. O halde $u(z)$ de harmoniktir.

$u_1 \geq 0$ olduğunu kabul edelim. (Aksi takdirde $u_n - u_1$ göz önüne alınır). $u(z) = \sup\limits_{z \in B} \{u_n(z)\}$ diyelim. Bu durumda her $z \in B$ için iki durum söz konusudur. Ya $u(z) = \infty$ ya da $u_n(z) \to u(z)$ ve $u(z) \in \mathrm{R}$ dir. $U = \{z \in B \,:\, u(z) = \infty\}$ ve $V = \{z \in B \,:\, u(z) < \infty\}$ kümelerini tanımlayalım. Bu takdirde $U \cup V = B$ ve $U \cap V = \phi$ dir. Şimdi U ve V kümelerinin açık olduğunu göstermeliyiz. $a \in B$ için $\overline{D}(a,r) \subset B$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı seçelim. Harnack eşitsizliği gereği $z \in D(a,r)$ ve her $n \geq 1$ için

$$\frac{r - |z-a|}{r + |z-a|} u_n(a) \leq u_n(z) \leq \frac{r + |z-a|}{r - |z-a|} u_n(a) \tag{2.9}$$

yazılabilir. Eğer $a \in U$ ise $u_n(a) \to \infty$ olduğundan her $z \in D(a,r)$ için $u_n(z) \to \infty$ dır. Yani $D(a,r) \subset U$ ve U açıktır. Benzer şekilde $a \in V$ ise (2.9) ifadesinin sağ tarafı $|z-a| < r$ için $u(z) < \infty$ olup, V açıktır. B bağlantılı olduğundan ya U=B ya da V=B dir. U=B olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $u = \infty$ dur. Tekrar $\overline{D}(a,r) \subset B$ ve $0 < \rho < r$ ise $M = (r-p)/(r+p) > 0$ ve (2.8) bağıntısı gereği $M\, u_n(a) \leq u_n(z)$ ve $|z-a| \leq \rho$ olur. Böylece $z \in \overline{D}(a,\rho)$ için düzgün olarak $u_n(z) \to \infty$ dır. Böylece, herhangi $a \in B$ ve $|z-a| \leq \rho$ özelliğindeki tüm z noktaları için $u_n(z) \to \infty$ olacak şekilde bir $\rho > 0$ sayısının varlığı gösterildi. O halde B bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde düzgün olarak $u_n(z) \to \infty$ dır.

Şimdi $V = B$ yani her $z \in V$ için $u(z) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\rho < r$ ise $m \leq n$ olmak üzere Harnack eşitsizliği, $u_n - u_m$ pozitif harmonik fonksiyonuna uygulanırsa $|z-a| \leq \rho$ için

$$0 \leq u_n(z) - u_m(z) \leq \mathrm{C}\,[u_n(a) - u_m(a)]$$

olacak şekilde sadece ρ ve r ye bağlı bir C sabitinin varlığını gerektirir. Böylece $\{u_n(z)\}$, $\overline{D}(a,\rho)$ üzerinde düzgün bir Cauchy dizisidir. $\{u_n\}$, $H(B,\mathrm{R})$ üzerinde bir Cauchy dizisidir. $H(B,\mathrm{R})$ tam olduğundan $\{u_n\}$ dizisi bir harmonik fonksiyona yakınsamak zorundadır. ■

2.3. Schwarz ve Poisson Formülleri

Cauchy integral formülünün, basit bağlantılı bir bölgede analitik fonksiyonun bölge içinde bir noktadaki değerinin o bölgenin sınırı üzerindeki fonksiyon değerleri yardımıyla belirlenebildiği biliniyor. Bu durum analitik fonksiyonların reel veya imajiner kısımları için de geçerlidir. Bu kesimde bölgenin bir daire olması durumunda bu fonksiyonlar belirlenecek.

Teorem 2.3.1. f fonksiyonu $D=\{z : |z| \leq R\}$ dairesini bulunduran bir bölgede analitik ve $C : \zeta = Re^{i\psi}$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ olsun. Eğer $u = \operatorname{Re} f = u(R,\psi)$ değerleri biliniyorsa $v(0,\theta) = v(0)$ olmak üzere herhangi bir $z = re^{i\theta}$ $0 \leq r < R$ için

$$f(z) = i\,v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\psi \tag{2.10}$$

dir.

İspat. $\zeta = Re^{i\psi}$ için $d\zeta = i\zeta\,d\psi$ olduğundan Cauchy İntegral Formülü gereği

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta - z}d\psi \tag{2.11}$$

dir. Özel olarak $z=0$ için $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)d\psi$ olur. z^*, $|z^*| > R$ özelliğinde herhangi bir nokta olmak üzere;

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z^*} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta - z^*}d\psi$$

dır. z^* noktası C çemberine göre z noktasının simetriği yani, $\bar{z}\,z^* = R^2 = \zeta\,\bar{\zeta}$ olarak seçilirse $z^* = \zeta\,\bar{\zeta}\,/\,\bar{z}$ olup bu son integral

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}d\psi \tag{2.12}$$

olur. (2.11) den (2.12) bağıntısı çıkartılır ve $\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} = \frac{\zeta\bar{\zeta} - z\bar{z}}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{|\zeta - z|^2}$ eşitliği dikkate alınırsa,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right]d\psi=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{d\psi}{|\zeta-z|^2} \tag{2.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.11) ve (2.12) bağıntıları toplanır ve

$$\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\zeta}}=1+\frac{z}{\zeta-z}-\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}=1+\frac{Rre^{i(\theta-\psi)}-Rre^{-i(\theta-\psi)}}{|\zeta-z|^2}$$

$$=1+\frac{2iRr\sin(\theta-\psi)}{|\zeta-z|^2}$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\zeta}}\right]d\psi$$

$$=f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{2iRr\sin(\theta-\psi)}{|\zeta-z|^2}d\psi \tag{2.14}$$

olur. $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ ve $f(\zeta)=u(R,\psi)+iv(R,\psi)$ konumu yapılırsa (2.13) ifadesinin reel kısmından

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)\frac{d\psi}{|\zeta-z|^2}$$

ve (2.14) ifadesinin imajiner kısmından

$$iv(r,\theta)=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)\frac{2iRr\sin(\theta-\psi)}{|\zeta-z|^2}d\psi$$

elde edilir. Elde edilen son iki eşitlik taraf tarafa toplanır,

$$(\zeta+z)(\bar{\zeta}-\bar{z})=R^2-r^2+\ 2iRr\sin(\theta-\psi) \ \text{ ve } \ (\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})=|\zeta-z|^2$$

konumu yapılırsa *Schwarz Formülü* olarak bilinen

$$f(z)=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)\frac{R^2-r^2+2iRr\sin(\theta-\psi)}{|\zeta-z|^2}d\psi$$

$$=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\psi$$

ifadesi elde edilir. ■

Tanım 2.3.2. Teorem 2.3.1'in ispatında geçen

$$u(r,\theta)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)\frac{d\psi}{|\zeta-z|^2}$$

ve

$$v(r,\theta) = v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)\frac{2Rr\sin(\theta-\psi)}{|\zeta - z|^2}d\psi$$

eşitliklerine *Poisson Formülleri* denir. Bu fonksiyonlar çember üzerinde u fonksiyonunun değerleri yardımıyla C eğrisinin içinde kalan bir noktadaki değerleri olup, bir bakıma Dirichlet Probleminin özel bir çözümüdür. $r = 0$ için birinci Poisson Formülü

$$u(0,\theta) = u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\psi)d\psi$$

biçiminde olur.

2.4. Green Fonksiyonu ve Green Formülü

B basit bağlantılı bir bölge, $\partial B = C$ ve $C : \zeta = \zeta(t)$, $a \le t \le b$, eğrisi pozitif olarak yönlendirilmiş olsun. Ayrıca, $w = f(z)$ analitik yalınkat fonksiyonu B bölgesini D $= \{w : |w| < 1\}$ birim dairesi üzerine konform olarak resmetsin ve $z_0 \in B$ noktası için $f(z_0) = 0$ olsun. f fonksiyonu z_0 noktasında basit bir sıfıra sahip ve $\overline{B}$ da başka hiçbir sıfıra sahip olmadığından $f_1(z)$, B de analitik olmak üzere

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} + f_1(z) \tag{2.15}$$

biçiminde yazılabilir. $F(z)$, B de analitik ve $\overline{B}$ da sürekli bir fonksiyon olsun. Cauchy integral formülü gereği

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} \tag{2.16}$$

biçiminde yazılabilir. (2.15), (2.16) ve Cauchy teoremi gereği

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\zeta)f_1(\zeta)d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta \tag{2.17}$$

elde edilir. Eğer

$$\operatorname{Log} f(z) = -[g(x,y) + i\,h(x,y)] \tag{2.18}$$

olarak alınırsa buradaki $g(x,y)$ fonksiyonuna B bölgesinde $z=(x,y)$ noktasındaki *Green fonksiyonu* denir. Logaritmanın tanımı gereği $g(x,y) = -\ln|f(z)|$ olduğundan, g fonksiyonu $z_0 = (x_0, y_0)$ noktası hariç B de harmoniktir. $|f(z)|$ fonksiyonu B de sürekli ve $z \in \partial B$ için $|f(z)|=1$ olduğundan g fonksiyonu da z_0 noktası hariç B de sürekli ve ∂B üzerinde $g(x,y)=0$ dır.

(2.18) bağıntısında z yerine ζ yazarak, C eğrisi üzerinde artan yönde $\operatorname{Log} f(z)$ fonksiyonunun $\theta = \operatorname{Arg}\zeta'(t)$ ve $\zeta'(t) = |\zeta(t)|e^{i\theta}$ açısı yönündeki yönlü türevi

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = -e^{-i\theta}[D_\theta g + iD_\theta h]$$

dir (Gonzalez 1991-II). $\operatorname{Log} f(\zeta)$ fonksiyonu C eğrisi üzerinde analitik olduğundan eşitliğin sol tarafı onun türevi olarak yazılabilir. $ds = |\zeta'(t)|\,dt = e^{-i\theta}\zeta'(t)dt = e^{-i\theta}d\zeta$ ile verilen yay uzunluğu diferansiyelini göz önüne alalım. $D_\theta g$ ve $D_\theta h$ yerlerine sırasıyla $\partial g/\partial s$ ve $\partial h/\partial s$ alınırsa

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = -\left(\frac{\partial g}{\partial s} + i\frac{\partial h}{\partial s}\right)e^{-i\theta}\partial\zeta = -\left(\frac{\partial g}{\partial s} + i\frac{\partial h}{\partial s}\right)ds$$

olur.

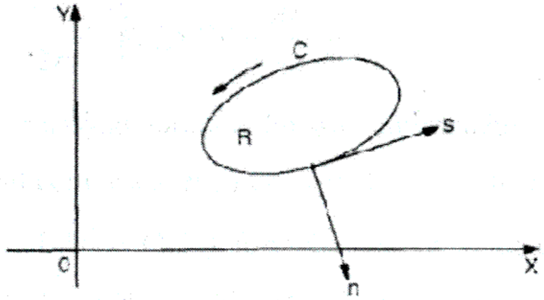
Sınır boyunca $g(x,y)=0$ olduğundan $\partial g/\partial s = 0$ ve $\partial h/\partial s = \partial g/\partial n$ dir. Burada $\partial g/\partial n$ ifadesi g fonksiyonunun sınır boyunca dış normali yönündeki türevidir ve g fonksiyonunun *normal türevi* diye adlandırılır. n ve s 'nin pozitif yönleri (n,s) çifti ile gösterilir (Şekil 2.2). Böylece

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = -i\frac{\partial g}{\partial n}ds \tag{2.19}$$

olduğu görülür. (2.17) ve (2.19) yardımıyla

$$F(z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_C F(\zeta)\frac{\partial g}{\partial n}ds \tag{2.20}$$

elde edilir.



Şekil 2.2

Eğer $z_0 = x_0 + iy_0$, $\zeta = \xi + i\eta$, $F = U + iV$ denirse, (2.20) ifadesinin reel kısmı alınarak

$$U(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_C U(\xi, \eta) \frac{\partial g}{\partial n} ds \tag{2.21}$$

elde edilir. Buna *Green formülü* denir. Bu formül, B de harmonik $\overline{B}$ da sürekli olan $U(x, y)$ fonksiyonunun onun sınır değeri ve B ye ilişkin Green fonksiyonunun $\partial g / \partial n$ normal türevi yardımıyla $z_0 = (x_0, y_0) \in B$ noktasındaki değerini verir.

Poisson formülü (2.21) bağıntısının özel bir halidir. Gerçekten $D_\rho = \{z : |z| < \rho\}$, $z_0 \in D_\rho$ ve $z_0 \neq 0$ olmak üzere $f(z)$, $\overline{D_\rho}$ bölgesini $\overline{D_1}$ üzerine $f(z_0) = 0$ olacak şekilde resmeden lineer dönüşüm

$$f(z) = \frac{\rho(z - z_0)}{\rho^2 - \bar{z}_0 z}$$

dir. $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $\zeta\overline{\zeta} = \rho^2$, $d\zeta = \zeta i d\theta$ ve $z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$ alınırsa

$$-i \frac{\partial g}{\partial n} ds = \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\varsigma = \frac{\rho^2 - r_0^2}{(\zeta - z_0)(\zeta\overline{\zeta} - \bar{z}_0\zeta)} \zeta i \, d\theta = \frac{\rho^2 - r_0^2}{|\zeta - z_0|^2} i \, d\theta$$

veya

$$\frac{\partial g}{\partial n} ds = -\frac{\rho^2 - r_0^2}{|\zeta - z_0|^2} d\theta$$

olur. Böylece, eğer $F(z) = F(re^{i\alpha}) = U(r, \alpha) + iV(r, \alpha)$ fonksiyonu D_ρ da analitik $\overline{D_\rho}$ da sürekli ise (2.21) gereği

$$U(r_0,\alpha_0)=\frac{\rho^2-r_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\rho,\theta)\frac{d\theta}{|\zeta-z_0|^2} \tag{2.22}$$

elde edilir. Bu eşitlik notasyon farkıyla Poisson formülüdür. (2.22) formülünü elde etmek için $z_0 \neq 0$ kabul edilmesine rağmen, formülün $z_0 = 0$ iken de geçerli olduğunu göstermek zor değildir. Elbette (2.22) formülü Poisson integralinden daha genel bir sonuçtur. Üstelik burada F, D_ρ da analitik $\overline{D}_\rho$ da sürekli kabul edildi. Orada ise F, $\overline{D}_\rho$ da analitik kabul edilmişti.

2.5. Katlı Bağlantılı Bölgelerde Harmonik Fonksiyonlar

Bu kesimde adına Logaritmik eşlenik teoremi denilen katlı bağlantılı bölgelerde reel harmonik bir fonksiyonun elde edilişi ve bu teoremin sonuçları verilecek.

Teorem 2.5.1. D sonlu bağlantılı bir bölge ve D bölgesinin tümleyeninin sınırlı bileşenleri $A_1, A_2, \ldots, A_m$ olsun. $k=1,2,\ldots,m$ için a_k, A_k bileşeninin bir iç noktası olmak üzere D de reel değerli u harmonik fonksiyonu verilsin. Bu takdirde her $z \in D$ için

$$u(z)=\operatorname{Re} f(z)+\sum_{k=1}^{m} c_k \log|z-a_k|$$

olacak şekilde D bölgesinde analitik bir f fonksiyonu ve

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}(u_x-iu_y)\,dw$$

reel sayıları vardır (Axler 1986).

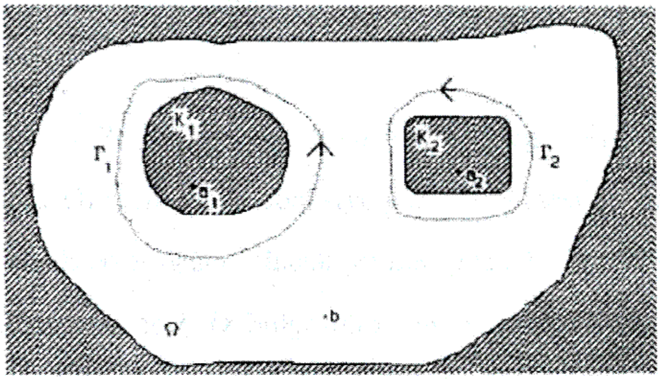
İspat. D üzerinde $h(z)=u_x(z)-iu_y(z)$ biçiminde bir $h(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım. u fonksiyonu harmonik olduğundan, $h(z)$ fonksiyonunun reel ve sanal kısımları sürekli kısmi türevlere sahip ve $u_{xx}=-u_{yy}$ ve $u_{xy}=-(-u_{yx})$ olup Cauchy Riemann denklemlerini sağlar. O halde $h(z)$ fonksiyonu D de analitiktir. Her bir k, $1\le k\le m$, için Γ_k, A_k çıkarılmış bölgesini çevreleyen D içinde bir eğri olsun (Şekil 2.3). c_k sayılarını

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} h(w)\,dw$$

olarak tanımlayalım. Önce c_k sayılarının reel olduğunu gösterelim.

$$\operatorname{Im} c_k = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_k} h(z)dz = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_k} (u_x - iu_y)(dx + idy) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} u_x dx + u_y dy$$

bulunur. Son integral, kapalı eğri üzerinden bir tam diferansiyel olduğundan sıfırdır.



Şekil 2.3

D de sabit bir b noktası ve D üzerinde bir $f(z)$ fonksiyonunu

$$f(z) = \int_b^z \left(h(w) - \frac{c_1}{w - a_1} - \ldots - \frac{c_m}{w - a_m} \right) dw$$

biçiminde tanımlayalım. Burada integral, b ile z noktalarını birleştiren ve D de bulunan yol üzerindendir. $f(z)$ fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu göstermek için yukarıdaki integralin b noktasını z ye birleştiren yoldan bağımsız olduğunu göstermeliyiz. b noktasından z ye alınan iki yoldan biri ters olarak yönlendirilirse D de kapalı bir γ yolu elde edilir. Böylece, D bölgesindeki herhangi kapalı γ yolu için

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(h(w) - \frac{c_1}{w - a_1} - \ldots - \frac{c_m}{w - a_m} \right) dw \tag{2.23}$$

olduğunu göstermeliyiz. Eğer n_k, γ eğrisinin A_k etrafındaki sarma sayısı olarak tanımlanırsa Cauchy integral teoremi gereği

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(w)dw = n_1 c_1 + \ldots + n_m c_m$$

dir. Sarma sayısının tanımı gereği

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{c_1}{w-a_1}+\ldots+\frac{c_m}{w-a_m}\right)dw=n_1c_1+\ldots+n_mc_m$$

olduğundan bu son iki eşitlikten (2.23) bağıntısının sağlandığı görülür. Dolayısıyla integral yoldan bağımsız ve $f(z)$ fonksiyonu iyi tanımlıdır.

$f(z)$ fonksiyonu D de analitik ve

$$f'(z)=h(z)-\frac{c_1}{z-a_1}-\ldots-\frac{c_m}{z-a_m}$$

olduğu açıktır.

$$q(z)=\operatorname{Re}f(z)+c_1\log|z-a_1|+\ldots+c_m\log|z-a_m|$$

fonksiyonunu tanımlayalım. u ve q fonksiyonları, D bölgesinin belli bir noktasında diyelim ki b noktasında aynı değeri alacak şekilde $f(z)$ ye bir sabit ekleyelim. D de $u=q$ olduğunu göstermek için D bölgesinin tüm z noktalarında $u_x(z)=q_x(z)$ ve $u_y(z)=q_y(z)$ olduğunu göstermek yetecektir. O halde

$$\begin{aligned}q_x(z)&=\left[\operatorname{Re}f(z)+c_1\log|z-a_1|+\ldots+c_m\log|z-a_m|\right]_x\\&=\left[\operatorname{Re}\{f(z)+c_1\log(z-a_1)+\ldots+c_m\log(z-a_m)\}\right]_x\\&=\operatorname{Re}\left[\{f(z)+c_1\log(z-a_1)+\ldots+c_m\log(z-a_m)\}_x\right]\end{aligned}$$

dir. Analitik fonksiyonlar için $f'(z)=f_z(z)=f_x(z)$ olduğundan

$$q_x(z)=\operatorname{Re}\left[f'(z)+\frac{c_1}{z-a_1}+\ldots+\frac{c_m}{z-a_m}\right]=\operatorname{Re}h(z)$$

elde edilir. h fonksiyonunun tanımından $u_x(z)=q_x(z)$ olduğu görülür. Aynı işlemler q_y için yapılırsa $q_y(z)=\operatorname{Re}(ih(z))$ elde edilir. Tekrar h fonksiyonunun tanımından $q_y(z)=u_y(z)$ olduğunu görülür. Böylece teoreminin ispatı tamamlanmış olur. ■

Özel olarak, $\mathrm{D}=\{z:|z|<1\}$ açık birim dairesi ve $\mathrm{D}^*=\mathrm{D}\setminus\{0\}$ delinmiş dairesi için D^* bölgesinin tümleyeni sadece bir sınırlı bileşene sahiptir. f fonksiyonu D^* bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $c\in\mathrm{R}$ sabit olmak üzere, Teorem 2.5.1 gereği D^* bölgesinde reel harmonik fonksiyon

$$u(z)=\operatorname{Re}f(z)+c\log|z| \tag{2.24}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda $z_0 = 0$ noktası f fonksiyonunun *ayrık singüler noktasıdır*.

Harmonik fonksiyonların ayrık nokta civarındaki davranışlarını incelemek için $\mathsf{D}^* = \mathsf{D}\setminus\{0\}$ açık delinmiş dairesini göz önüne almak yeterlidir. Analitik fonksiyonların ayrık singüler (aykırı) noktalarının kaldırılabilir, kutup ve esaslı singüleriteler gibi sınıflandırılması kullanılarak harmonik fonksiyonların da ayrık nokta civarında davranışlarını inceleyebiliriz. Aşağıdaki teorem bununla ilgilidir.

Teorem 2.5.2. Ayrık singüler nokta civarında bir harmonik fonksiyon sınırlı ise singülerite kaldırılabilirdir.

İspat. D^* bölgesinde harmonik u fonksiyonu (2.24) biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte $c > 0$ olduğunu kabul edelim. u sınırlı ve $\operatorname{Re} f(z) = u(z) - c\log|z|$ olduğundan $z \to 0$ iken $\operatorname{Re} f(z) \to \infty$ olur. Bu durumda f fonksiyonu orijinde kaldırılabilir bir singüleriteye sahip değildir. Ayrıca, f fonksiyonunun orijinde bir kutbu da yoktur. Çünkü eğer öyle olsaydı $f(\mathsf{D}^*)$ belli bir dairenin tümleyenini ve özellikle de reel kısmı $-\infty$ a giden bir diziyi bulundurmak zorunda kalacaktı. Son olarak, f orijinde esaslı singüleriteye de sahip değildir. Çünkü sıfıra giden bir dizi üzerinde f dolayısıyla $\operatorname{Re} f$ sınırlı kalır. Başka ihtimal kalmadığından c sayısının pozitif olamayacağına hükmederiz. Benzer şekilde c negatif de olamaz. O halde $c = 0$ ve $u = \operatorname{Re} f$ ve $\operatorname{Re} f$ sınırlıdır. Bu ise f fonksiyonunun 0 da esaslı singüler ve kutup noktasına sahip olamaz demektir. Böylece, f fonksiyonu 0 noktasında kaldırılabilir singüleriteye sahiptir. ∎

Halka bölgeler üzerine harmonik fonksiyonlar bazı ilginç özelliklere sahiptir. Bu özelliklerden bir kaçı aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.5.3. $\mathcal{H}$ orijin merkezli tüm açık halka bölgeleri göstersin. Eğer u $\mathcal{H}$ üzerinde tanımlı harmonik bir fonksiyon ise

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta$$

integrali $\log r$ nin bir lineer fonksiyonudur (Axler 1986).

İspat. Teorem 2.5.1 gereği her $z \in \mathcal{H}$ için

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \log |z|$$

olacak şekilde $\mathcal{H}$ üzerinde tanımlı bir f analitik fonksiyonu ve bir c reel sayısı vardır. r $\mathcal{H}$ da belli bir pozitif reel sayı olsun. Yukarıdaki eşitlikten;

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = c\log r + \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta\right]$$

$$= c\log r + \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z}\right]$$

elde edilir. Cauchy İntegral Teoremi gereği bu eşitlikteki son terim r den bağımsızdır. Gerçekten son terim f fonksiyonunun Laurent serisindeki sabit terimin reel kısmıdır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. ■

Sonuç 2.5.4. u fonksiyonu $D = \{z : a < |z - z_0| < b,\ 0 \le a < b \le \infty\}$ halka bölgesinde harmonik olsun. Her bir $r \in (a,b)$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta = c\log r + d$$

olacak şekilde c ve d sabitleri vardır.

Teorem 2.5.5. u, $\mathcal{H}$ halka bölgesinde reel değerli harmonik bir fonksiyon ise

$$u(re^{i\theta}) = c\ \log\ r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n r^n + \overline{a}_{-n} r^{-n}) e^{in\theta}$$

dır.

İspat. u $\mathcal{H}$ da reel değerli harmonik bir fonksiyon olsun. Teorem 2.5.1 den faydalanarak u fonksiyonunun seri temsilini bulalım. f $\mathcal{H}$ da analitik olduğundan Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2a_n z^n$$

biçiminde yazılabilir. O halde

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c\log|z| = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2} + c\log|z|$$

olur. $z = re^{i\theta}$, $f(z)$ yerine onun Laurent açılımı, $\overline{f(z)}$ yerine de bu açılımın eşleniği ve toplamda n yerine $-n$ alınırsa

$$u(re^{i\theta}) = c\log r + \sum_{n=-\infty}^{\infty}(a^n r^n + \overline{a}_{-n} r^{-n})e^{in\theta}$$

elde edilir. Bu sonsuz toplam her $re^{i\theta} \in \mathcal{H}$ için mutlak yakınsak ve $\mathcal{H}$ bölgesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır. ■

Analitik ve bire bir (yalınkat) olan fonksiyonlara *konform dönüşüm* denir. Bu fonksiyonlar eğriler arasındaki açıları korur. Gerçekten açı koruma özelliği birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve Jakobiyeni sıfır olmayan tüm fonksiyonlar arasında, Cauchy-Riemann denklem sistemini sağlayan analitik fonksiyonları karakterize eder. Teoremi 2.5.1 in uygulama alanlarından biri de iki katlı bağlantılı bir bölgeyi D^* bölgesi üzerine konform olarak resmeden bir dönüşümün varlığının kolaylıkla gösterilmesidir.

Teorem 2.5.6. *D* iki katlı bağlantılı bir bölge olsun. Bu takdirde *D* bölgesini $\mathcal{H}$ halka bölgesi üzerine bire-bir ve analitik (konform) olarak dönüştüren analitik bir *g* fonksiyonu vardır (Axler 1986).

İspat. *K*, $\mathsf{C} - D$ sınırlı bileşeni olsun. $0 \in K$ almak genelliği bozmayacaktır. ∂K, *D* bölgesinin iç sınırını, $\partial(D \cup K)$ da *D* bölgesinin dış sınırını göstersin (Şekil 2.4). *u*, $\overline{D}$ da reel değerli sürekli bir fonksiyon, $z \in \partial K$ için $u(z) = 0$ ve $z \in \partial(D \cup K)$ için $u(z) = 1$ ve *D* üzerinde harmonik olsun. Teoremi 2.5.1 gereği *f* fonksiyonu *D* de analitik ve $c \in \mathsf{R}$ olmak üzere $u(z) = c\log|z| + \operatorname{Re} f(z)$ biçiminde yazılabilir. *g* fonksiyonunu $g(z) = z\,e^{f(z)/c}$ biçiminde tanımlayalım. *g* fonksiyonu *D* de analitik olup *D* bölgesini bir halka bölge üzerine bire bir olarak dönüştürdüğünü gösterelim. $c > 0$ kabul edelim.

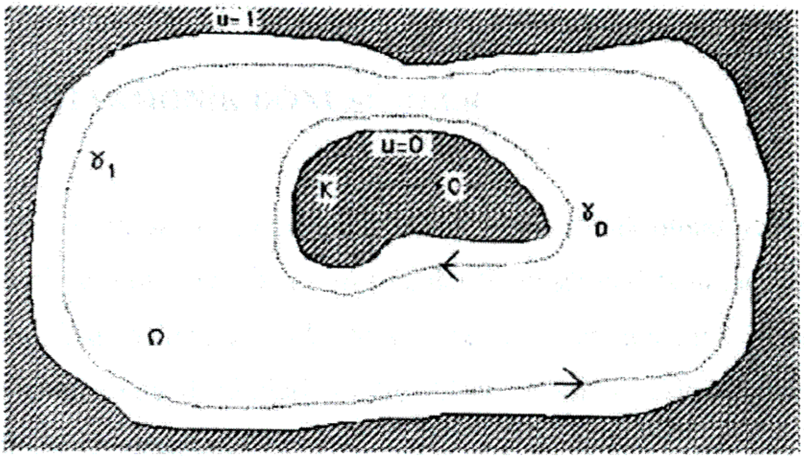
$$\log|g(z)| = \log|z| + \frac{1}{c}\operatorname{Re} f(z) = \frac{u(z)}{c}$$

ve $0 < u(z) < 1$ olduğundan $1 < |g(z)| < e^{1/c}$ dir. Başka bir deyişle *g* fonksiyonu *D* bölgesini $\mathcal{H} = \{w : 1 < |w| < e^{1/c}\}$ ile tanımlanan halka bölge içine dönüştürür.

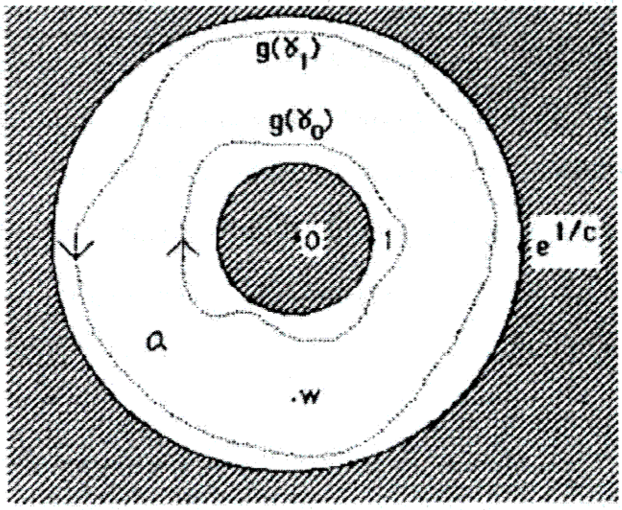
g nin $\mathcal{H}$ nın tüm noktalarını bir defa aldığını göstermek için keyfi sabit bir $w \in \mathcal{H}$ noktası seçelim. γ_0 ve γ_1 kapalı eğrileri Şekil 2.4 de verildiği gibi yani, her $a \in K$ için $n(\gamma_0, a) = -1$ ve $n(\gamma_1, a) = 1$ olsun. γ_0 eğrisi için $g(\gamma_0)$ eğrisinin her bir noktası $|w|$ dan daha küçük olacak şekilde D bölgesinin iç sınırını çevrelesin. Benzer şekilde $g(\gamma_1)$ eğrisinin her bir noktasının mutlak değeri $|w|$ dan büyük olacak şekilde D bölgesinin dış sınırını çevrelemiş olsun (Şekil 2.5). γ_1 ve γ_2 arasındaki bölge $\gamma_0 \cup \gamma_1$ eğrisinin devir sayısının 1 olduğu bölgedir. Argüment prensibi gereği g fonksiyonunun γ_0 ile γ_1 eğrileri arasında kalan bölgede w değerini alma sayısı, yani $g(z) = u$ denkleminin γ_0 ile γ_1 arasındaki bölgedeki köklerinin sayısı, $g(\gamma_0) \cup g(\gamma_1)$ eğrilerinin w etrafındaki devir sayısına eşittir. γ_0 eğrisinin seçimi gereği $g(\gamma_0)$ eğrisi w noktasından geçmez ve $n((g(\gamma_0), w) = 0$ dır. γ_1 eğrisinin seçimi gereği orijin merkezli ve $|w|$ yarıçaplı daire $g(\gamma_1)$ eğrisinin içinde kalır. Bu yüzden; $n(g(\gamma_0), w) = n(g(\gamma_1), 0)$ dır. Bilindiği gibi, $g(\gamma_1)$ eğrisinin 0 etrafındaki devir sayısı, z noktası γ_1 eğrisi üzerinde bir kere döndüğünde $(1/2\pi)\log g(z)$ deki değişime eşittir. Başka bir ifadeyle $n(g \circ \gamma_1, 0) = (1/2\pi)\Delta_{\gamma_1} \log g(z)$ dir. g fonksiyonunun tanımı gereği

$$\frac{1}{2\pi}\log g(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{f(z)}{c} + \frac{1}{2\pi}\log z$$

dir. f fonksiyonu D de analitik olduğundan $(1/2\pi) f/c$ fonksiyonunun γ_1 etrafındaki değişimi sıfırdır. $(1/2\pi)\log z$ fonksiyonunun γ_1 etrafındaki değişimi, γ_1 eğrisinin 0 etrafındaki sarma sayısına eşit olup 1 dir. Böylece g fonksiyonu w değerini γ_0 ile γ_1 arasındaki bölgede tam bir kere alır. γ_0 ile γ_1 eğrileri D bölgesinin keyfi iç ve dış kapalı sınırları olarak seçilebileceğinden, g fonksiyonu her bir w değerini D bölgesinde tam bir kere alınır. Dolayısıyla g, D den $\mathcal{H}$ üzerine birebir bir dönüşümdür. Eğer c negatif ise $e^{1/c}$ ile 1 sayılarının rolleri değiştirilip ($e^{1/c}$ iç yarıçap, 1 de dış yarıçap olur) yukarıdaki ispat metodu aynen uygulanır. Eğer $c = 0$ ise g fonksiyonunun tanımı $g(z) = e^{f(z)}$ biçiminde yapılırsa aynı ispat tarzıyla D bölgesinin $\{w : 1 < |w| < e\}$ halka bölgesi üzerine bire-bir olarak dönüştüğü görülür. ■



Şekil 2.4



Şekil 2.5

3. KOMPLEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde reel ve sanal kısımları harmonik fakat eşlenik olmak zorunda olmayan kompleks değerli harmonik yalınkat fonksiyonlar (dönüşümler) tanıtılacak. Özellikle bu dönüşümlerden birim daireyi konveks bölge üzerine resmeden fonksiyonların katsayı bağıntıları ve distorsiyon özellikleri verilip, birim dairenin çeşitli konveks dönüşüm örnekleri üzerinde durulacaktır.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı kompleks değerli sürekli bir $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonu için, u ve v fonksiyonları D bölgesinde reel harmonik fonksiyonlar ise f ye D bölgesinde *harmonik fonksiyon* veya *harmonik dönüşüm* denir. Bu durumda $f(z) = u(z) + iv(z)$ harmonik fonksiyonu xy-düzleminde bir D bölgesini, uv-düzleminde G bölgesi üzerine harmonik olarak dönüştürür. Eğer $f(z) = u(z) + iv(z)$ harmonik fonksiyonu D bölgesini G bölgesi üzerine bire-bir olarak dönüştürüyorsa f ye *harmonik yalınkat dönüşüm* denir.

Çalışmamızda harmonik yalınkat fonksiyon denildiğinde, reel ve sanal kısımları reel harmonik olan, fakat birbirinin eşleniği olması gerekmeyen, kompleks değerli bire-bir (yalınkat) harmonik bir fonksiyon anlaşılacaktır. Bu fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından, bazı zorluklarla karşılaşmak kaçınılmazdır. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. f harmonik, φ analitik fonksiyonu için $f \circ \varphi$ harmonik olmasına rağmen, $\varphi \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların ailesi bir cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların ailesi oluşturmaz. En azından iki harmonik fonksiyonun toplamı harmonik olmak zorunda değildir. Hatta harmonik fonksiyonların karesi veya çarpmaya göre tersi harmonik olmak zorunda değildir. Ayrıca harmonik yalınkat bir dönüşümün tersi de harmonik olmak zorunda değildir.

Tanım 3.1.2. $f = u + iv$ fonksiyonunu kompleks düzlemde bir B bölgesinde diferansiyellenebilir olsun.

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x(z) & v_x(z) \\ u_y(z) & v_y(z) \end{vmatrix} = u_x(z)v_y(z) - u_y(z)v_x(z)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun *Jakobiyeni* denir.

$z = x + iy$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

diferansiyel operatörleri yardımıyla $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonu için

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}[(u_x + v_y) - i\ (u_y - v_x)],$$

ve

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + i\ (u_y + v_x)]$$

olup, f fonksiyonunun Jakobiyeni

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu analitikse $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ olacağından $J_f(z) = |f'(z)|^2$ olur. Kompleks değerli bir $f(z)$ fonksiyonu için $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ eşitliği Cauchy–Riemann denklemlerinin bir başka biçimde ifadesinden ibarettir. Gerekli hesaplamalar sonunda f fonksiyonunun *Lablasyeni* adı verilen $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ ifadesinin

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4f_{z\bar{z}}$$

olduğu görülür. Buna göre, "ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir f fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart $f_{z\bar{z}} = 0$ veya $\partial f / \partial z$ fonksiyonunun analitik olmasıdır" sonucu çıkarılabilir.

Analitik bir f fonksiyonunun bir z noktasında yerel olarak yalınkat olması için gerek ve yeter şart $J_f(z) \neq 0$ olması bilinen bir sonuçtur. Lewy 1936, bu sonucun harmonik dönüşümler için de geçerli olduğunu gösterdi

Teorem 3.1.3 (Lewy Teoremi). Kompleks değerli harmonik bir f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel olarak yalınkat ise her $z \in D$ için $J_f(z)$ sıfırdan farklıdır (Lewy 1936).

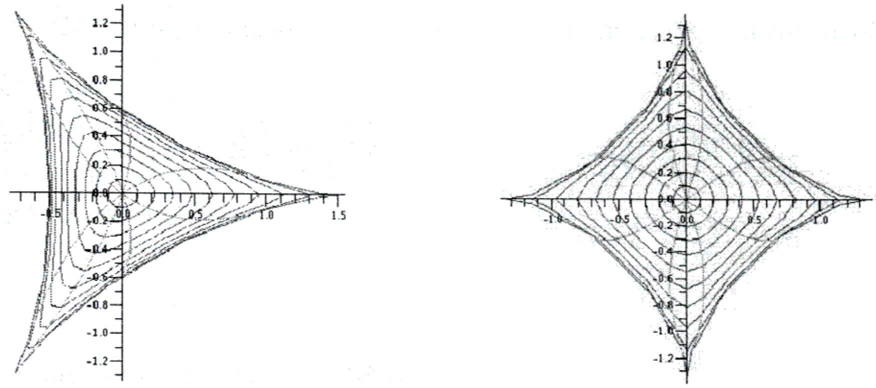
Lewy 1936'nin bu sonucuna göre bir D bölgesinde yalınkat harmonik dönüşümler ya $J_f(z) > 0$ veya $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$ olup yön koruyandır yada $J_f(z) < 0$ veya $|f_z(z)| < |f_{\bar{z}}(z)|$ olup yönü ters çevirendir. Eğer f yön koruyan ise $\bar{f}$ yönü ters çevirendir. Sonuç olarak $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$ ise f yerel olarak yalınkat ve yön koruyan, $|f_z(z)| < |f_{\bar{z}}(z)|$ ise f yönü ters çeviren bir fonksiyondur. $J_f(z) > 0$ olduğu yerlerde $f(z) \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz.

En basit yalınkat harmonik dönüşüm örneği $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$, $|\alpha| \neq |\beta|$ biçiminde konform olması gerekmeyen afin dönüşümledir. Eğer bu dönüşümde $\gamma = 0$ ise afin dönüşüm lineer olur. Bir afin dönüşüm ile bir yalınkat harmonik dönüşümün bileşkesi yine bir harmonik dönüşüm olması önemli bir sonuçtur. Yani f yalınkat harmonik dönüşüm ise $\alpha f + \gamma + \beta \bar{f}$ de yalınkat harmonik dönüşümdür.

Diğer bir önemli örnek $\mathbb{D}$ açık birim dairesini $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi ile çevrelenmiş üç uçlu bir eğrisel üçgen (hypocycloid) içine resmeden $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonudur (Şekil 3.1.a). Şimdi bu fonksiyonun yalınkat olduğunu gösterelim; $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ için

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 + \tfrac{1}{2}\bar{z}_1^2 = z_2 + \tfrac{1}{2}\bar{z}_2^2 \Rightarrow 2(z_1 - z_2) = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(\bar{z}_2 + \bar{z}_1)$$

olur. $|z_1 + z_2| < 2$ olduğundan son eşitlik ancak $z_1 = z_2$ olması durumunda geçerli olur. Benzer düşünce ile her $n \geq 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{n}\bar{z}^n$ fonksiyonunun da yalınkat olduğu söylenebilir. Bu dönüşüm altında birim dairenin görüntüsü Matematica programı kullanılarak şekil 3.1.b de gösterilmiştir. Genelde bu dönüşüm altında $\mathbb{D}$ dairesinin resmi $|w| = (n+1)/n$ çemberi içinde kalan $n+1$ köşeli eğrisel üçgen (hypocycloid) tarafından sınırlandırılmıştır (Duren 1984).



a) $n=2$ b) $n=3$

Şekil 3.1

Düzlemde basit bağlantılı bölgelerde harmonik dönüşümleri çalışmak yerine tanım bölgesi olarak birim daireyi almak genelliği bozmaz. Çünkü basit bağlantılı bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinden G bölgesi üzerine harmonik bir dönüşüm f ve $\mathbb{D}$ dairesini D üzerine konform olarak resmeden bir φ analitik dönüşümü için $F=f\circ\varphi$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesini G üzerine resmeden bir yalınkat harmonik dönüşüm olur. Bu durumda esas dönüşüm ise $f=F\circ\varphi^{-1}$ biçimindedir.

Şimdi harmonik fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli bir yere sahip olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.4 (Kanonik Gösterim). h ve g fonksiyonları basit bağlantılı bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. D de kompleks değerli harmonik bir f fonksiyonu $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ biçiminde bir gösterimine sahiptir. Bu gösterim sabit farkıyla tektir (Duren 1984).

İspat. u ve v basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik fonksiyonlar olduğundan

$$u=\operatorname{Re}F=\frac{F+\overline{F}}{2} \quad \text{ve} \quad v=\operatorname{Im}G=\frac{G-\overline{G}}{2i}$$

olacak şekilde D de analitik F ve G fonksiyonları vardır. Böylece

$$f=u+iv\ u=\operatorname{Re}F+i\operatorname{Im}G=\left(\frac{F+G}{2}\right)+\overline{\left(\frac{F-G}{2}\right)}=h+\overline{g}$$

elde edilir. $f=h+\overline{g}$ temsiline f fonksiyonunun *kanonik temsili* denilir. ■

Sonuç 3.1.5. D birim dairesinde $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun yön koruyan olması için gerek ve yeter şart

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle

$$\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Clunie 1984).

Teorem 3.1.6. f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel olarak yalınkat ve yön koruyan olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun D de analitik olmasıdır.

İspat. f fonksiyonunun D de yerel olarak yalınkat ve $J_f(z) > 0$ olduğunu kabul edelim. $\overline{f_{\bar{z}}} = \omega f_z$ eşitliğinin $\bar{z}$ ye göre türevi alınıp, $(\bar{f})_{\bar{z}} = \overline{f_z}$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\,\omega + f_z\,\omega_{\bar{z}} \tag{3.1}$$

elde edilir. f harmonik olduğundan

$$f_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta f = 0$$

olup (3.1) bağıntısı gereği D de $\omega_{\bar{z}} = 0$ elde edilir. Bu da ω fonksiyonunun D de analitik olduğunu gösterir.

Tersine eğer ω, D de analitik ise $\omega_{\bar{z}} = 0$ olup (3.1) eşitliğinden $\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\,\omega$ olur. f fonksiyonu D de yerel olarak yalınkat ve $J_f(z) > 0$ olduğundan, her $z \in D$ için $|\omega(z)| < 1$ dir. O halde, $\overline{f_{\bar{z}z}} = f_{z\bar{z}}\,\omega$ eşitliği ancak $f_{z\bar{z}} = 0$ olması durumunda sağlanır. Bu ise f fonksiyonunun harmonik olduğu gösterir. ■

Bu teorem bize özellikle yön koruyan yalınkat harmonik bir f dönüşümünün *ikinci kompleks genleşmesi* olan $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonunun daima analitik bir fonksiyon ve modülünün 1 den daha küçük olduğunu gösterir. Bu yüzden $\omega = \overline{f_{\bar{z}}} / f_z$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *analitik genleşmesi* veya kısaca *genleşmesi* de denilir. Ayrıca, "

$\omega \equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun analitik olmasıdır" sonucunun doğruluğuna dikkat ediniz.

3.2. Konveks Bölgeler Üzerine Yalınkat Harmonik Dönüşümler

Bir bölgenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen o bölgede kalıyorsa bölgeye *konveks bölge* denir. Bu kesimde birim daireyi konveks bölgeler üzerine yalınkat olarak resmeden harmonik dönüşümler incelenerek bu dönüşümlerin iki önemli yapısal özelliği üzerinde durulacaktır. Birincisi; Rado-Kreser-Choquet teoremi olarak adlandırılan herhangi sınırlı konveks bölge üzerine birim dairenin yalınkat harmonik dönüşümünün, tanımlanmış sınır bağıntısı yardımıyla oluşturulması. İkincisi; bir yönde konveks bir bölge üzerine belli bir genişleme (dilatation) ile bir harmonik dönüşümün kesme oluşumudur (shear construction). Bu dönüşümlerden en basiti, birim dairenin kendisi üzerine olanıdır. Bunlar ilerleyen kesimlerde detaylı bir şekilde incelenecektir.

Birinci bölümde birim çemberin Γ üzerine her bir homeomorfizmi yardımıyla Poisson integral formülü yegane bir harmonik genişlemeye sahip olduğu görülmüştü. Eğer B konveks ise bu harmonik genişleme daima daireyi yalınkat harmonik olarak B üzerine dönüştürür.

Tanım 3.2.1. Eğer u fonksiyonunun bir bölgede verilen bir değeri iki kere alıyorsa u fonksiyonuna *iki değerli* denir. Eğer bir konveks bölgenin sınırı doğru parçaları bulundurmuyorsa bölgeye *kesin konveks* bölge denir.

Teorem 3.2.2. u, $\mathbb{D}$ de reel değerli sürekli harmonik bir fonksiyon olsun. Eğer u, $\partial\mathbb{D}$ de en çok iki değerli (bivalent) ise bu takdirde u, $\mathbb{D}$ de kritik noktaya sahip değildir (Duren 1984).

İspat. $\mathbb{D}$ de

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \neq 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $u_z(0) \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü bu durumu her bir $z_0 \in \mathsf{D}$ için $u_z(z_0) \neq 0$ olmasını gerektirir. Gerçekten, g, D den D ye $g(0) = z_0$ özelliğinde bir konform dönüşüm olsun. $\varphi = u(g(\varsigma))$ bileşke fonksiyonunu D de harmonik, $\overline{\mathsf{D}}$ de sürekli ve $\partial\mathsf{D}$ de en çok iki değerli olduğu açıktır. $g_{\bar{\varsigma}}(\varsigma) = 0$ olduğundan $\varphi_\varsigma(\zeta) = u_z(g(\zeta))g'(\zeta)$ ve $\varphi_\varsigma(0) = u_z(z_0)\, g'(0)$ olup. $\varphi_\varsigma(0) \neq 0$ olması $u_z(z_0) \neq 0$ olmasını gerektirir. $u_z(0) \neq 0$ olduğunu göstermek için

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right) u(e^{it})\, dt$$

Poisson temsilini kullanırız. Buradan

$$u_z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^2}\, u(e^{it})\; dt$$

bulunur. Bu ifadeden

$$u_z(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-it}\, u(e^{it})\, dt$$

elde edilir.

Diğer yandan, iki değerlilik hipotezi $u(e^{it})$ fonksiyonunun çember üzerinde sadece bir lokal maksimuma ve bir lokal minimuma sahip olabileceğini ve $u(e^{it})$ fonksiyonunun bu notaları birleştiren yayların her birinde monoton olduğunu gösterir. Koordinatların rotasyonundan sonra, yine iki değerlilik hipotezinden $u(e^{it})$ fonksiyonu belli bir $e^{-i\alpha}$ noktasında bir minimumdan $e^{i\alpha}$ de bir maksimuma artacağı sonucunu çıkarabiliriz. Bu durumda $|u_z(0)|$ değerini değiştirmez. Böylece u fonksiyonu $e^{-i\alpha}$ noktasından $e^{i\alpha}$ noktasına her iki yönde hareket ettikçe kesin olarak artar ve $0 < t < \pi$ için $u(e^{it}) - u(e^{-it}) > 0$ olur. Sonuç olarak

$$-2\pi\ \mathrm{Im}[u_z(0)] = \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \sin t dt = \int_0^{2\pi} [u(e^{it}) - u(e^{-it})] \sin t\, dt > 0$$

bulunur. Bu durum $u_z(0) \neq 0$ olduğunu gösterir. ■

Aşağıda bir konveks bölgeden birim daire üzerine yalınkat harmonik bir fonksiyonun temsilini veren ve adına Rado-Kneser-Choquet Teoremi denilen teorem verilecektir. Ayrıntılı ispat için Duren 1984'e bakılabilir.

Teorem 3.2.3 (Rado-Kneser-Choquet). $B \subset \mathbb{C}$, Γ Jordon eğrisi tarafından sınırlanmış konveks bir bölge ve φ de $\partial\mathbb{D}$ den Γ üzerine bir homeomorfizm olsun. Bu taktirde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} \varphi(e^{it})\, dt$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ den B üzerine yalınkat harmonik bir dönüşümdür.

İspat. f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de yerel olarak yalınkat olmasını göstermek yeterlidir. Choquet, $f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiyeninin belli bir $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasında sıfır olmasının belli bir $au + bv$ lineer birleşiminin z_0 da bir kritik noktaya sahip olması gerektiğini iddia eder. Daha sonra da çelişki oluşturmak için Teorem 3.2.2 den faydalanır. ■

Teorem 3.2.2 u fonksiyonunun $\partial\mathbb{D}$ üzerinde iki değerli olmasından çok daha zayıf hipotezler altında da geçerli kalır. Bu yüzden Rado-Kneser-Choquet Teoremininin genel bir versiyonunu elde etmek mümkündür.

Teorem 3.2.4. $B \subset \mathbb{C}$, Γ Jordon eğrisi tarafından sınırlanmış konveks bir bölge ve φ de $\partial\mathbb{D}$ den Γ üzerine sürekli bir fonksiyon olsun. e^{it} monoton olarak $\partial\mathbb{D}$ sınırında değiştikçe $\varphi(e^{it})$ de Γ etrafında bir defa dönsün. Bu taktirde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} \varphi(e^{it})\, dt$$

harmonik genişlemesi $\mathbb{D}$ den B üzerine yalınkat harmonik bir dönüşümdür (Duren 1984).

3.3. Kesme (Shear) Oluşumu

Rado-Kneser-Choquet teoremi, birim daireden herhangi bir sınırlı konveks bölge üzerine harmonik dönüşümlerin elde edilmesinde kullanışlı bir metoddur. Bununla birlikte, belli şartlar altında harmonik dönüşümlerin oluşturulmasında başka bir metod daha vardır. Bu metod, ilk olarak Clunie ve Sheil-Small 1984 tarafından verilmiş olup “kesme oluşumu” (share constraction) olarak da bilinir. Esasında bu metod paralel doğrular boyunca verilen bir konform dönüşüm “keserek” bir yönde konveks bir bölge üzerine bir harmonik dönüşümün bulunmasını sağlar. Aşağıda bununla ilgili özellikler verilecektir.

Tanım 3.3.1. Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin reel eksene paralel doğrularla arakesiti bağlantılı (veya boş) ise B bölgesine *reel eksen yönünde konvekstir* (REK) denir. Bu durumda reel eksene paralel her bir doğru ile B bölgesinin kesişimi tam bir doğru parçası, bir ışın veya bir doğrudur.

Clunie ve Sheil-Small 1984’e ait temel teoremi ispatlamak için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 3.3.2. $B \subset \mathbb{C}$ reel eksen yönünde konveks bir bölge ve p de B üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $w \to w + p(w)$ dönüşümünün B bölgesinde yalınkat olması için gerek ve yeter şart yerel olarak yalınkat olmasıdır. Eğer dönüşüm yalınkat ise görüntü bölgesi reel eksen yönünde konvekstir.

İspat. Teoremin birinci yönü açıktır. İkinci yönünü göstermek için dönüşümün yalınkat olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $w_1 + p(w_1) = w_2 + p(w_2)$ olacak şekilde farklı $w_1, w_2 \in B$ noktaları vardır. $w_1 = u_1 + iv_1$ ve $w_2 = u_2 + iv_2$ denirse, $v_1 = v_2$ olduğu açıktır. $v_1 = v_2 = c$ diyelim $u \to u + p(u + ic)$ dönüşümü kesin olarak monoton değildir dolayısıyla yerel olarak yalınkat değildir. Özellikle $w \to w + p(w)$ dönüşümü B de yalınkat olmadıkça yerel olarak yalınkat olamaz. Geometrik olarak dönüşüm yatay eksen yönünde bir makasla kesiyor gibi hareket eder. Bu yüzden onun görüntü bölgesi REK tir. ■

Teorem 3.3.3. $f = h + \overline{g}$ birim dairede harmonik ve yerel olarak yalınkat olsun. Bu takdirde f nin yalınkat ve görüntü bölgesinin reel eksen yönünde konveks olması için gerek ve yeter şart $h - g$ analitik fonksiyonunun aynı özelliklere sahip olmasıdır.

İspat. Önce $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun yalınkat ve $B = f(\mathbb{D})$ bölgesinin REK olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, p reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere B de

$$h(z) - g(z) = h(f^{-1}(w)) - g(f^{-1}(w)) = w - 2\operatorname{Re}\{g(f^{-1}(w))\} = w + p(w)$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Teorem 3.1.3 gereği $\mathbb{D}$ de $h'(z) \neq g'(z)$ dir. O halde $h - g$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yerel olarak yalınkattır. Teorem 3.3.2 gereği $w \to w + p(w)$ fonksiyonu B de yerel olarak yalınkattır ve böylece yalınkattır ve görüntü bölgesi REK dir. Sonuç olarak $h - g$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat ve görüntü bölgesi REK dir .

Tersine $F = h - g$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de yalınkat ve $B = F(\mathbb{D})$ reel eksen yönünde konveks olsun. O zaman

$$f(F^{-1}(w)) = w + 2\operatorname{Re}\{g(F^{-1}(w))\} = w + g(w)$$

fonksiyonu B de yerel olarak yalınkat ve böylece de Teorem 3.3.2 gereği B de yalınkattır ve görüntü kümesi REK dir. Böylece f $\mathbb{D}$ de yalınkat ve $f(\mathbb{D})$ de REK olur. ■

Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin konveks olması için gerek ve yeter şart onun her yönde konveks olmasıdır. Böylece $f = h + \overline{g}$ harmonik dönüşümünün görüntü bölgesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere her bir $e^{i\alpha} f$ rotasyonunun görüntü bölgesinin REK olmasıdır. Teorem 3.3.3 göz önüne alındığında, bu durum her α için $e^{i\alpha} h - e^{-i\alpha} g$ analitik fonksiyonunun REK olmasıdır. Böylece aşağıdaki sonucu ifade ve ispat edebiliriz.

Sonuç 3.3.4. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu birim dairede harmonik ve yerel yalınkat olsun. f nin yalınkat ve α $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ yönünde konveks olması için gerek ve yeter şart $h - e^{2i\alpha} g$ analitik fonksiyonunun yalınkat ve α yönünde konveks olmasıdır.

İspat. f fonksiyonu α yönünde yalınkat ve konveks olsun. Bu taktirde $e^{-i\alpha} f$ yalınkat fonksiyonu REK dir. $e^{-i\alpha} f = e^{-i\alpha} h + \overline{e^{i\alpha} g} = H + \overline{G}$ denirse Teorem 3.3.3 gereği $H - G$ yalınkat ve REK tir. $H - G = e^{-i\alpha}(h - e^{2i\alpha} g)$ olduğundan $h - e^{2i\alpha} g$ yalınkat ve α yönünde konvekstir. ■

Teorem 3.3.5. $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu birim dairede harmonik ve yerel olarak yalınkat olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun yalınkat ve $f(\mathbb{D})$ görüntü bölgesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her α $(0 \le \alpha < 2\pi)$ için $e^{i\alpha}h - e^{-i\alpha}g$ analitik fonksiyonunun yalınkat ve görüntü kümesinin REK olmasıdır (Clunie 1984).

Sonuç 3.3.6. $f = h + \overline{g}$ konveks yalınkat harmonik bir dönüşüm olsun. Bu takdirde her bir β, $0 \le \beta < 2\pi$, için $h + e^{i\beta}g$ fonksiyonu yalınkattır.

Teorem 3.3.3, belli bir genleşmeli harmonik dönüşümlerin oluşturulmasında önemli rol oynar. Eğer genleşme $|w(z)| < 1$ özelliğinde bir fonksiyon olarak belirlenirse verilen analitik yalınkat fonksiyondan elde edilen f harmonik fonksiyonunun yerel yalınkatlığını garanti eder. Gerçekten $h - g$ fonksiyonunun yalınkat olması $(1 - w(z))h'(z) = h'(z) - g'(z) \neq 0$ olmasını gerektirdiğinden f fonksiyonunun Jakobiyeni

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 = |h'(z)|^2 \left(1 - \frac{|g'(z)|^2}{|h'(z)|^2}\right) = (1 - |w(z)|^2)\,|h'(z)|^2 > 0$$

dır.

Örnek 3.3.7. $(h - g)(z) = z$ özdeşlik dönüşümünü ve $\omega(z) = z$ genleşmesini göz önüne alalım.

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = z$$

olduğundan

$$h'(z) \; - g'(z) = 1 \quad \text{ve} \quad zh'(z) - g'(z) = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin yegane çözümü

$$h'(z) = \frac{1}{1 - z} \quad \text{ve} \quad g'(z) = \frac{z}{1 - z}$$

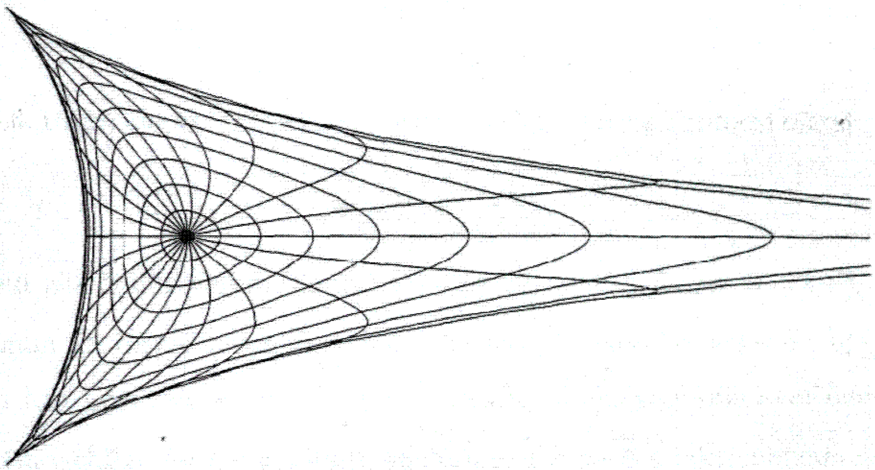
olup $h(0) = g(0) = 0$ normalizasyonu altında

$$h(z) = \log\left(\frac{1}{1 - z}\right) \quad \text{ve} \quad g(z) = -z + \log\left(\frac{1}{1 - z}\right)$$

olarak bulunur. Böylece Teorem 3.3.3 gereği $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonu

$$f(z) = -\bar{z} + \overline{\log\left(\frac{1}{1-z}\right)} + \log\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\bar{z} + 2\operatorname{Re}\ \log\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\bar{z} - 2\log|1-z|$$

olarak bulunur. Bu fonksiyon birim daireyi reel eksen yönünde konveks bir bölgeye dönüştürür. Gerçekte Teorem 3.3.3'ün ispatı f fonksiyonunun görüntü kümesinin $|\operatorname{Im}\{f(z)\}| < 1$ yatay şeridi içinde kaldığını gösterir. f nin gerçek görüntü kümesi Şekil 3.2 de gösterilmiştir. Şekildeki çizgiler merkezi çemberler ve radyal doğruların resimlerinden ibarettir.



Şekil 3.2

Eğer $\omega(z) = z$ yerine $\omega(z) = z^2$ genleşmesi alınırsa, önceki örnekte olduğu gibi lineer denklem sistemi

$$h'(z) - g'(z) = 1 \quad \text{ve} \quad z^2 h'(z) - g'(z) = 0$$

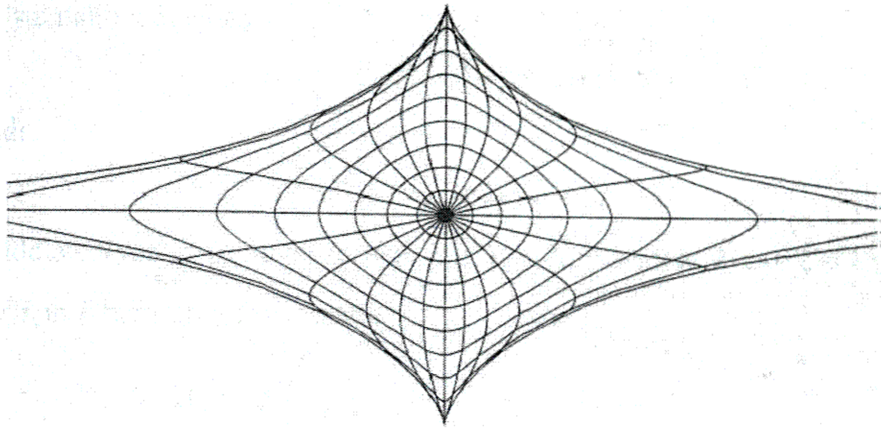
olur. Buradan

$$s(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

olmak üzere $h(z) = s(z)$ ve $g(z) = -z + s(z)$ elde edilir..Böylece

$$f = h + \bar{g} = -\bar{z} + 2\operatorname{Re}\{s(z)\} = -\bar{z} + \log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|$$

harmonik dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm altında birim dairenin resmi Şekil 3.3 de verilmiştir (Duren 1984).



Şekil 3.3

Örnek 3.3.8. Birim dairesi $\mathrm{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine konform olarak resmeden

$$w = \ell(z) = \frac{z}{1-z}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Sonuç 3.3.4 gereği yerel yalınkat $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonunun $\mathbb{D}$ birim dairesini imajiner eksen yönünde konveks bir bölge üzerine resmetmesi için gerek ve yeter şart $h + g$ analitik fonksiyonunun aynı özelliğe sahip olmasıdır. Bu yüzden $\ell = h + g$ alınıp, genleşme $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun yerel olarak yalınkat olmasını garanti etmesi için $\omega(z) = -z$ olarak seçilirse elde edilecek lineer sistem

$$h'(z) + g'(z) = \ell'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$z\,h'(z) + g'(z) = 0$$

olur. Buradan

$$h'(z) = \frac{1}{(1-z)^3} \quad \text{ve} \quad g'(z) = -\frac{z}{(1-z)^3}$$

bulunur. $k(z) = z/(1-z)^2$ Koebe fonksiyonu olmak üzere integral alınarak

$$h(z) = \frac{1}{2}[\ell(z) + k(z)] \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{1}{2}[\ell(z) - k(z)]$$

elde edilir. Böylece $L = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonu $\mathbb{D}$ yi yalınkat olarak imajiner eksen yönünde konveks bir bölgeye resmeder. Aynı zamanda $L = h + \overline{g}$ fonksiyonu

$$L(z) = \mathrm{Re}\,(h+g) + i\,\mathrm{Im}\,(h-g)$$

biçiminde yazılabileceğinden

$$L(z) = \mathrm{Re}\{\ell(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{k(z)\}$$

olur. Şimdi

$$f(\mathbb{D}) = \{w : \mathrm{Re}\{w\} > -\tfrac{1}{2}\}$$

olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $\zeta = \ell(z)$ denirse $k(z) = \zeta(1+\zeta)$ olur. $\zeta = \gamma + i\eta$ için L harmonik fonksiyonu

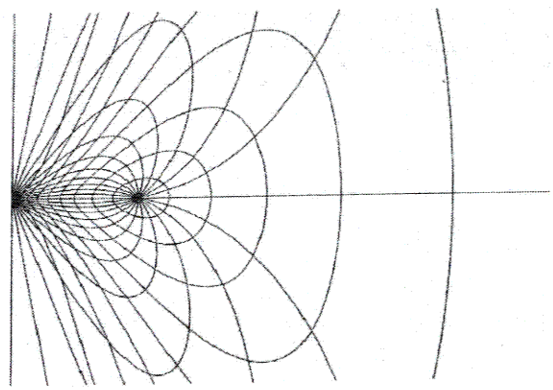
$$L(z) = \gamma + i(1+2\gamma)\eta\,, \qquad z = \ell^{-1}(\zeta) = \frac{\zeta}{1+\zeta}$$

olur. Bu durum $L \circ \ell^{-1}$ fonksiyonunun her bir

$$\zeta = \gamma_0 + i\eta\,, \qquad \gamma_0 > -\frac{1}{2}, \qquad -\infty < \eta < \infty\,,$$

dikey doğrusunu monoton olarak kendi üzerine resmeder. Bu doğrular $z = 1$ noktasında $\partial\mathbb{D}$ birim çemberine içten teğet olan çemberlerle ilgilidir. Özellikle, $w = L(z)$, $\mathbb{D}$ dairesini $\mathrm{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemine dönüştürür.

$L(z) = \mathrm{Re}\{\ell(z)\} + i\,\mathrm{Im}\{k(z)\}$ harmonik dönüşümü altında $\partial\mathbb{D}$ sınırının durumu oldukça ilginçtir. Gerçekt+en, $k(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesini $\mathbb{C} - (-\infty, -\frac{1}{4}]$ üzerine, $\ell(z)$ fonksiyonu da $\mathbb{D}$ yi $\mathrm{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ üzerine konform olarak dönüştürdüğünden, her $z \in \partial\mathbb{D}$ ve $z \neq 1$ için $\mathrm{Re}\{\ell(z)\} = -\frac{1}{2}$ ve $\mathrm{Im}\{k(z)\} = 0$ olur. Sonuç olarak, her $z \in \partial\mathbb{D}$ ve $z \neq 1$ için $L(z) = -\frac{1}{2}$ olması radyal doğru parçalarının ve merkezi çemberlerin L dönüşümü altındaki resimleri alışık olmadık bir davranış sergiler (Şekil 3.4). Bir anlamda bu örnek, harmonik dönüşümlerin sınır davranışlarının konform dönüşümlerinkinden farklı olduğunu gösterir (Duren 1984).



Şekil 3.4

Örnek 3.3.9. $w = s(z) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}$ dönüşümünü göz önüne alalım. $s(z)$ fonksiyonu D yi $|\operatorname{Im}\{w\}| < \frac{\pi}{4}$ yatay şeridi üzerine konform olarak resmeder. Genleşmeyi önce $\omega(z) = z$ olarak seçelim. Buna göre

$$h(z) - g(z) = s(z) \quad \text{ve} \quad z\,h'(z) - g'(z) = 0$$

denklem sisteminden

$$h(z) = \frac{1}{2}[\ell(z) + s(z)] \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{1}{2}[\ell(z) - s(z]$$

normalize edilmiş çözümü elde edilir. Böylece, $f = h + \overline{g}$ harmonik dönüşümü

$$f(z) = \operatorname{Re}[\ell(z)] + i\operatorname{Im}[s(z)]$$

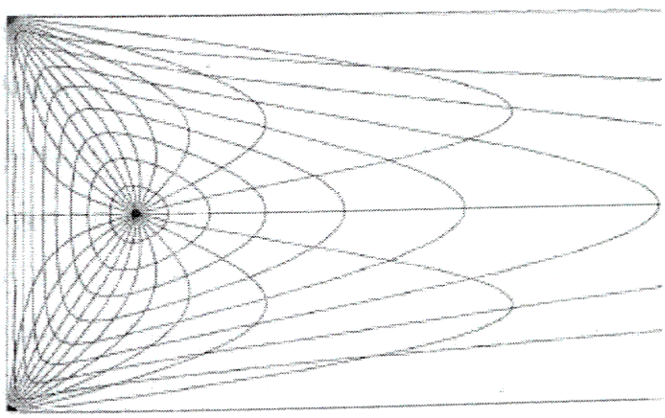
olur. Buradan

$$f(e^{i\theta}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\pi}{4} & ; \quad 0 < \theta < \pi \\ -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\pi}{4} & ; \quad \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

olduğu görülür. Özellikle, f fonksiyonu alt ve üst çember yaylarını tek bir noktaya dönüştürür. Gerçekte birim dairenin f fonksiyonu altındaki resmi tam olarak

$$\left\{ w : \operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}, \quad |\operatorname{Im}\{w\}| < \frac{\pi}{4} \right\}$$

yarı şerididir (Şekil 3.5). Şekilde görüldüğü gibi f fonksiyonu birim dairenin üst yarısındaki radyal doğrularının resimlerini yarı şeridin üst köşesinde son bulan yaylara, alt yarısındaki radyal doğruları da alt köşede son bulan yaylara dönüştürür.



Şekil 3.5

3.4. Konveks Dönüşümlerin Yapısı ve Katsayı Bağıntıları

Teorem 1.4.2 gereği birim daireyi konveks bir bölge üzerine dönüştüren konform dönüşümler

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{z f''(z)}{f'(z)}\right\}>0\,; \qquad |z|<1$$

eşitsizliği ile belirlendiği biliniyor. Bunun dayandığı temel düşünce, konveks bölgenin sınırının teğet vektörlerinin monoton artan olmasıdır. Eğer analitik bir fonksiyon birim daireyi yalınkat olarak konveks bir bölge üzerine resmediyorsa, onun her bir merkezi alt daireleri de konveks bir bölge üzerine resmeder.

Konform dönüşümlerin konveks bölgelerle ilgili bilinen sonuçlarının yalınkat harmonik dönüşümler için geçerli olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Teorem 3.3.5 de "$f=h+\overline{g}$ fonksiyonunun yalınkat ve konveks olması gerek ve yeter şart her $\alpha\in \mathbb{R}$ için $e^{i\alpha}h-e^{-i\alpha}g$ analitik fonksiyonunun yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olmasıdır" biçiminde ifade edildi. Böylece konveks harmonik fonksiyonlarla ilgili soru bir yönde konveks olan analitik fonksiyonlar hakkındaki benzer soruya indirgenmiş olur. Özel olarak, eğer bir analitik fonksiyon birim dairede yalınkat ve görüntü kümesi reel eksen yönünde konveks ise onun her bir merkezi alt dairelerde de aynı özelliğe sahip olmasını gerektirir mi? Cevabımız hayırdır. Hengartner ve Schober 1973 bir yönde konveksliğin konform dönüşümler altında korunmadığını gösterdiler. Daha sonra Goodman ve Saff 1979, $\sqrt{2}-1<r<1$ özelliğindeki r sayıları için $|z|<r$ dairesine kısıtlanışının imajiner eksen yönünde konveks olmadığına dair imajiner eksen yönünde konveks fonksiyona bir örnek verdiler. Başka bir deyişle, onlar belli bir yönde herhangi bir konveks konform dönüşümün $r\leq\sqrt{2}-1$ iken $|z|<r$ dairesini aynı yönde konveks bir bölgeye resmettiğini tahmin ettiler ve $\sqrt{2}-1$ yarı çapının mümkün olan en iyi sonuç olduğunu söylediler. Ruscheweyh ve Salinas 1989 bu tahmini ispat ettiler. Böylece Clunie ve Sheil-Small 1984'e ait teorem yardımıyla bir konveks harmonik dönüşüm de aynı özelliğe sahiptir. Daha kesin bir ifadeyle, eğer bir f fonksiyonu birim dairesini harmonik olarak konveks bir bölge üzerine resmederse bu taktirde her bir $r\leq\sqrt{2}-1$

yarıçapı için f, $|z|<r$ dairesini tekrar konveks bir bölge üzerine resmeder. Ancak $\sqrt{2}-1<r<1$ için aynı özelliğe sahip olmak zorunda değildir.

Şimdi

$$L(z)=\operatorname{Re}\{\ell(z)\}+i\operatorname{Im}\{k(z)\}$$

yarı düzlem yalınkat harmonik dönüşümünün $r\leq\sqrt{2}-1$ için $|z|<r$ alt dairelerini bir konveks bölge üzerine resmettiğini, fakat $\sqrt{2}-1<r<1$ için konveks olmayan bir bölge üzerine resmettiğini göstereceğiz. $w(z)=-z$ genleşmesi ve $\ell(z)=z/(1-z)$ reel eksen yönünde konveks olan konform dönüşümü yardımıyla kesim 3.4 de oluşturulan $L(z)$ dönüşümünü göz önüne alalım. $\ell(z)$ dönüşümü birim dairesi $\operatorname{Re}w>-\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine konform olarak resmeder ve bu dönüşüm konveks konform dönüşümlerin sınıfında ekstremal fonksiyon rolünü oynar. Tıpkı $k(z)=z/(1-z^2)$ Koebe fonksiyonunun yıldızıl fonksiyonlar sınıfında hatta genel yalınkat fonksiyonların sınıfında oynadığı rol gibi. Gerçekte $k(z)=z\,l'(z)$ dir. Böylece birim daireyi $\operatorname{Re}w>-\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine resmeden $L(z)$ harmonik dönüşümünün de konveks harmonik dönüşümler sınıfında da aynı ekstremal rolü oynaması beklenebilir.

Şimdi L dönüşümünün $|z|<r$ alt dairelerini $r\leq\sqrt{2}-1$ için kesin olarak konveks bölgeler üzerine dönüştürdüğünü ve $\sqrt{2}-1<r<1$ için konveks bölgeler üzerine dönüştürmediğini hesaplayalım. Bunun için, $z=re^{i\theta}$ noktasının $|z|=r$ çemberi etrafında hareket ettikçe görüntü eğrisinin

$$\psi_r(\theta)=\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}L(re^{i\theta})\right\}$$

teğet yönünün değişimini çalışmak gerekli olacaktır. İlk önce

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(z)=\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(z)\right\}+i\operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}k(z)\right\}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(z)=i\,z\,\ell'(z)=\frac{i\,z}{(1-z)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}k(z)=i\,z\,k'(z)=\frac{i\,z(1+z)}{(1-z)^3}$$

olduğu göz önüne alınırsa gerekli hesaplamalardan sonra

$$|1-z|^4\,A(\mathrm{r},\theta)=r(r^2-1)\sin\theta$$

ve

$$|1-z|^6\;B(r,\theta)=r(1-r^4)\cos\theta-2r^2(1-r^2)(1+\sin^2\theta)$$

için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(z)=A(r,\theta)+i\,B(r,\theta)$$

olduğu görülür. Böylece problem teğet vektörün argümentinin veya denk bir ifade ile $\tan\psi_r(\theta)$'nın $0<\theta<\pi$ için θ'nın azalmayan bir fonksiyonu olduğunu göstermeye indirgenir. Bunun için $w=L(re^{i\theta})$ eğrisi reel eksene göre simetrik olduğundan $0<\theta<\pi$ aralığını incelemek yeterlidir.

$$\tan\psi_r(\theta)=\frac{B(r,\theta)}{A(r,\theta)}=\frac{2r(\csc\theta+\sin\theta)-(1+r^2)\cot\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

olup $u=\cos\theta$ ve

$$p(r,u)=1-6r^2+r^4+12r^2u^2-4r(1+r^2)u^3$$

denirse hesaplamalar neticesinde

$$(1-u^2)\,|1-z|^4\,\frac{\partial}{\partial\theta}\tan\psi_r(\theta)=p(r,u)$$

elde edilir. Böylece problem $-1\le u\le 1$ için $p(r,u)$ polinomunun negatif olmadığı r değerlerini bulmaya dönüşmüş olur. Bir kere

$$p(r,-1)=(1+r)^4>0 \quad \text{ve} \quad p(r,1)=(1-r)^4>0$$

dir. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial u}p(r,u)=12ru\{2r-(1+r^2)u\}$$

olduğundan $p(r,u)$ fonksiyonunun $u=0$ da yerel minimuma, $u=2r/(1+r^3)$ de yerel maksimuma sahip olduğu görülür. $-1\le u\le 1$ için $p(r,u)\ge 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$p(r,0)=1-6r^2+r^4\ge 0$$

olmasıdır. Bunun için de $r^2 \leq 3-2\sqrt{2}$ veya $r \leq \sqrt{2}-1$ olmalıdır. Bu ise $\psi_r(\theta)$ teğet açısının $r < \sqrt{2}-1$ iken θ'nın monoton artan bir fonksiyonu, $\sqrt{2}-1 < r < 1$ iken de monoton azalan bir fonksiyonu olduğunu gösterir. Böylece L harmonik dönüşümü her $|z| < r \leq \sqrt{2}-1$ dairesini konveks bir bölge üzerine, $\sqrt{2}-1 < r < 1$ iken konveks olmayan bir bölge üzerine resmeder.

Konuyla ilgili sonuçlara geçmeden önce yapılan bazı kabulleri verelim. $h(0) = g(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ normalizasyonlarına sahip birim daireyi konveks bölgeler üzerine yön koruyan yalınkat harmonik olarak dönüştüren bütün $f = h + \overline{g}$ dönüşümlerin sınıfı K_H ile gösterilsin. Yön koruyanlık gereği $|g'(0)| < |h'(0)| = 1$ dir. Konveksliği ve yönü koruyan

$$\varphi(w) = \frac{w - \overline{b_1}\overline{w}}{1-|b_1|^2}, \quad b_1 = g'(0)$$

afin dönüşümü ile $f = h + \overline{g} \in K_H$ fonksiyonunun bileşkesi olan $\varphi \circ f$ fonksiyonu da konveks olup bu fonksiyonların sınıfını K_H^0 ile gösterilir. Böylece,

$$h(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{ve} \quad g(z) = b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$$

olmak üzere, $f = h + \overline{g} \in K_H^0$ fonksiyonu birim daireyi konveks bir bölge üzerine bire bir olarak dönüştürür. Buna göre $f \in K_H$ ise

$$f_0 = \varphi \circ f = \frac{f - \overline{b_1}\overline{f}}{1-|b_1|^2} \in K_H^0$$

ve $f_0 \in K_H^0$ ise $f = f_0 + \overline{b_1}\,\overline{f_0} \in K_H$ olur.

K_H^0 sınıfına ait bir fonksiyon örneği vermek gerekirse, daha önce bahsi geçen

$$L(z) = \operatorname{Re}\{\ell(z)\} + i\operatorname{Im}\{k(z)\} = \frac{1}{2}[\ell(z) + k(z)] + \frac{1}{2}\overline{[\ell(z) - k(z)]}$$

biçiminde tanımlı L fonksiyonudur. Bu fonksiyonun birim daireyi $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemin tamamı üzerine yalınkat harmonik olarak dönüştürdüğünü biliyoruz. Fonksiyonların orijin civarında seriye açılımından $n = 1, 2, 3, \ldots$ için L fonksiyonunun katsayılarının

$$a_n = \frac{n+1}{2} \quad \text{ve} \quad b_n = \frac{n-1}{2},$$

olduğu görülür.

Şimdi konveks yalınkat harmonik fonksiyonlarla ilgili Clunie ve Sheil-Small 1984'e ait olan bazı sonuçlar verelim.

Teorem 3.4.1. Her bir $f \in K_H^0$ fonksiyonunun $f(\mathrm{D})$ görüntü kümesi $|w| < \frac{1}{2}$ dairesini bulundurur.

İspat. $w \notin f(\mathrm{D})$ olsun. $|z| < 1$ için $f(z) - w$ tamamen bir yarı düzlem içinde kalır. Uygun bir $\mu \in \mathrm{R}$ sayısı için $\mathrm{Re}(e^{i\mu}(f(z) - w)) > 0$ bırakılabilir. $f = h + \overline{g}$ için

$$\mathrm{Re}\{\, e^{i\mu}(h(z) - w) + \overline{e^{-i\mu} g(z)}\} > 0$$

veya

$$\mathrm{Re}\{\, e^{i\mu}(h(z) - w) + e^{-i\mu} g(z)\} > 0$$

olur.

$$\varphi(z) = e^{i\mu}(h(z) - w) + e^{-i\mu} g(z)$$

denirse $c > 0$ olmak üzere $\varphi(0) = -we^{i\mu} = c + id$ ve

$$p(z) = \frac{\varphi(z) - id}{c} = 1 + \frac{e^{i\mu}}{c} z + \cdots = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$$

olur. Böylece $p(z)$ fonksiyonu reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların P sınıfına ait olur (Goodman 1983). P sınıfındaki fonksiyonların seri açılımının p_n katsayıları için $|p_n| \leq 2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ olduğundan

$$|e^{i\mu}| \leq 2|c| = 2|\mathrm{Re}(-e^{i\mu} w)| \leq 2|we^{i\mu}| \quad \text{ve} \quad |w| \geq \tfrac{1}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla, $\{w : |w| < \frac{1}{2}\} \subset f(\mathrm{D})$ elde edilir. ■

Teorem 3.4.2. $f = h + \overline{g} \in K_H$ ise bu taktirde her $z \in \mathrm{D}$ için

$$\mathrm{Re}\{(e^{i\alpha} h'(z) + e^{-i\alpha} g'(z))(e^{i\beta} - e^{-i\beta} z^2)\} > 0$$

olacak şekilde α ve β açıları vardır (Clunie 1984).

Tanım 3.4.3. f ve g, D de analitik iki fonksiyon olsun. Eğer $g(z) = f(\omega(z))$ olacak şekilde D de $|\omega(z)| \leq |z|$ özelliğinde $\omega(z)$ analitik fonksiyonu varsa, g fonksiyonuna f

fonksiyonuna *sabordine* denir ve bu durum $g \prec f$ biçiminde yazılır. Eğer f yalınkat ve $g(\mathrm{D}) \subset f(\mathrm{D})$, $f(0) = g(0)$ ise Schwarz lemması gereği $g \prec f$ dir.

Teorem 3.4.4. Eğer $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyonu D de analitik, $f(\mathrm{D})$ konveks bir bölge ve $g \prec f$ ise bu taktirde $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $|b_n| \leq 1$ dir (Goodman 1983).

Tanım 3.4.5. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ serileri, $D_r = \{\, z : |z| < r \,\}$ dairesinde yakınsak olsunlar. Bu takdirde her $n \geq 0$ tamsayısı için $|a_n| \leq A_n$ ise $f(z)$ ye $F(z)$ ile domine edilmiştir (üstten sıkıştırılmıştır) denir ve bu durum $f(z) << F(z)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.4.6. $f \in K_H^0$ ise f fonksiyonunun katsayıları $n = 2, 3, \ldots$ için

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2}, \quad |b_n| \leq \frac{n-1}{2} \quad \text{ve} \quad \big||a_n| - |b_n|\big| \leq 1$$

bağıntılarını sağlar. Eşitlik L fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. Teorem 3.4.2, reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların temsili ve domine edilmiş serilerin tekniği gereği

$$\varphi'(z) = e^{i\alpha} h'(z) + e^{-i\alpha} g'(z)$$

fonksiyonunun Taylor katsayılarının modülü

$$\frac{1+z}{1-z}\,\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

fonksiyonunun katsayıları tarafından üstten sınırlanmıştır. İntegral alınarak $\varphi(z) = e^{i\alpha} h(z) + e^{-i\alpha} g(z)$ fonksiyonu $z/(1-z) = z + z^2 + z^3 + \cdots$ tarafından üstten sınırlanmıştır. Böylece

$$\big||a_n| - |b_n|\big| \leq |e^{i\alpha} a_n + e^{-i\alpha} b_n| \leq 1$$

elde edilir.

Diğer tahminleri elde etmek için $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ genleşmesinden faydalanılacak. $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ analitik fonksiyonu $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ şartlarını sağladığından Schwarz lemması gereği $|\omega(z)| \leq |z|$ dir.

$$F(z)=(\,e^{i\alpha}h'(z)+e^{-i\alpha}g'(z)\,)(e^{i\beta}-e^{-i\beta}z^2)$$

denirse. Teorem 3.4.2 gereği $\mathrm{Re}\{F(z)\}>0$ ve $|F(0)|=1$ olur. Buradan

$$g'(z)=\frac{\omega(z)}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\omega(z)}\,\frac{1}{e^{i\beta}-e^{-i\beta}z^2}F(z)$$

olup, Teorem 3.4.3 gereği $g'(z)$ fonksiyonunun katsayıları

$$\frac{z}{1-z}\,\frac{1}{1-z^2}\,\frac{1+z}{1-z}=\frac{z}{(1-z)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}z^n$$

fonksiyonunun katsayıları tarafından üstten sınırlanmıştır. Başka deyişle n = 1, 2,… için

$$(n+1)\,|\,b_{n+1}\,|\le\frac{n(n+1)}{2}\quad\text{veya}\quad|\,b_n\,|\le\frac{n-1}{2}$$

olur. Böylece

$$|\,a_n\,|\le\|\,a_n\,|-|\,b_n\,\|+|\,b_n\,|\le 1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.4.7. Her bir $f\in K_H$ fonksiyonunun katsayıları n = 2, 3,… için $|\,a_n\,|<n$ ve $|\,b_n\,|<n$ eşitsizliklerini sağlar ve bu eşitsizlikler kesindir.

İspat. Her bir $f=h+\overline{g}\in K_H$ fonksiyonunun belli bir $f_0\in K_H^0$ fonksiyonu için, $b_1=g'(0)$ ve $|\,b_1\,|<1$ olmak şartıyla $f=f_0+\overline{b_1}\,\overline{f_0}$ şeklinde yazılabileceğini biliniyor. Teorem 3.4.6 gereği n = 2, 3, … için

$$|\,a_n\,|\le\frac{n+1}{2}+|\,b_1\,|\frac{n-1}{2}<n$$

ve

$$|\,b_n\,|\le\frac{n-1}{2}+|\,b_1\,|\frac{n+1}{2}<n$$

elde edilir. Burada sınırlar kesindir. Gerçekten, L birim dairesi $\mathrm{Re}\{w\}>-\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine resmeden bilinen harmonik dönüşüm olmak üzere

$$f(z)=L(z)-b\,\overline{L(z)},\qquad 0<b<1$$

biçimindeki fonksiyonları göz önüne almak yetecektir. ■

KAYNAKLAR

AXLER, S. 1986. Harmonic Functions From a Complex Analysis Viewpoint. The American Mathematical Monthly. 93(4): 246-258.

BAŞKAN, T. 1996. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi Basımevi, No:17. Bursa. 359 s.

BOAS, H. P., R. P. BOAS. 1988. Short Proofs of Three Theorems on Harmonic Functions. Proc. Amer. Math. Soc. 102(4): 906-908 p.

CLUNIE, J., T. SHEIL SMALL. 1984. Harmonic Univalent Functions. Annales Acad. Sci. Fennicae 9:3-25.

DUREN, P. 2004. Harmonic Mappings in the Plane. Cambridge University Press. p.1-54.

GOODMAN, A. W. 1983. Univalent Fonksiyonlar I. Mariner Publishing Company, Inc. 246p.

GOODMAN, A. W., E. B. SAAF. 1979. On Univalent Functions Convex in One Direction. Proc. Amer. Math. Soc. 73: 183-187.

GONZALEZ, M. O. 1991. Classical Complex Analysis I. p.308-400.

GONZALEZ, M. O. 1991. Classical Complex Analysis II. p.77-122.

HENGARTNER, W., G. SCHOBER. 1973. A Remark on Level Curves for Domains Convex in One Direction. Appl. Analysis. 3: 101-106.

LEWY, H. 1936. On The Non-Vanishing of The Jacobian In Certain One-to-One Mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 42: 689-692.

MINDA, D. 1990. The Dirichlet Problem for a Disk. The American Mathematical Monthly. 97(3): 220-223.

NEHARI, Z. 1952. Conformal Mapping. Mc Grow–Hill. New York. p.1-42.

PALKA, B. P. 1991. An ıntroduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag. New York. 560p.

RUSCHEWYH St., L. SALINAS. 1989. On the Preservation of the Direction-Convexity and the Goodman-Saff Conjecture. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.1. 14: 63-73.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince desteğini esirgemeyen ve bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında büyük emeği geçen, danışman hocam Doç. Dr. Metin ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca matematik öğrenimime katkısı olan tüm hocalarıma ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim. Kendisine ayırmam gereken zamandan fedakarlık eden oğlum Asilhan'a ayrıca teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Denizli'de doğan Asiye KAYA; ilk, orta ve lise öğrenimini Denizli'de; lisans öğrenimini ise 1994 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde tamamladı. Halen Yıldırım Beyazıt İMKB Anadolu Teknik ve Endüstri Meslek Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.