T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PICARD GRUBU
ve
H($\sqrt{n}$) HECKE GRUPLARININ BAZI ALT GRUPLARI

84896

NİHAL YILMAZ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
1999

Bu tez 29.11.1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. İ. Naci CANGÜL (Danışman)

Prof. Dr . Turgut BAŞKAN

Prof. Dr . Servettin BİLİR

Doç. Dr. Z Gökay KAYNAK

Yrd. Doç. Dr. Osman BİZİM

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PICARD GRUBU
ve
H ($\sqrt{n}$) HECKE GRUPLARININ BAZI ALT GRUPLARI

NİHAL YILMAZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA - 1999

ÖZET

Picard grubu PSL(2, **Z**(*i*)), PSL(2, **C**)'nin ayrık bir alt grubudur. **H**(λ) Hecke grupları ise PSL(2, **R**)'nin, $\lambda \geq 2$ sabit bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$R(z) = \frac{-1}{z} \text{ ve } T(z) = z + \lambda$$

doğrusal dönüşümleri ile üretilen ayrık alt gruplarıdır. Bu çalışmada Picard grubunun Fuchsian alt grupları ile Hecke gruplarının normal alt grupları incelenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmanın ikinci ve üçüncü bölümlerindeki incelemeler için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, Picard grubu ve en çok çalışılan Fuchsian alt grubu olan modüler grup hakkında kısaca temel bilgiler verilerek öncelikle modüler grubun Picard grubundaki normalleştiricisi incelenmiştir. Daha sonra Picard grubunun maksimal Fuchsian alt grupları ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde **H**(λ) Hecke grupları kısaca tanıtılarak özellikle **H**($\sqrt{5}$) Hecke grubu ele alınmıştır. **H**($\sqrt{5}$) Hecke grubunun grup yapısı incelenerek, normal alt grupları geniş ölçüde çalışılmıştır. Son olarak **H**($\sqrt{5}$) ve **H**($\sqrt{7}$) Hecke gruplarının temel denklik alt grupları ve denklik alt grupları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Picard grubu, modüler grup, Hecke grubu.

ABSTRACT

The Picard group PSL(2, **Z**(i)) is a discrete subgroup of PSL(2, **C**). The Hecke groups **H**(λ) are the discrete subgroups of PSL(2, **R**) generated by

$$R(z) = \frac{-1}{z} \text{ and } T(z) = z + \lambda$$

where $\lambda \geq 2$ is a fixed positive real number. In this thesis, Fuchsian subgroups of the Picard group and normal subgroups of these Hecke groups are discussed.

In the first chapter basic notions which are necessary in the second and third chapters are given. In the second chapter, fundamental concepts on the Picard group and its most popular Fuchsian subgroup, called the modular group, are given briefly, and the normaliser of the modular group in the Picard group is investigated. Some results related to maximal Fuchsian subgroups of the Picard group are given. In the third chapter, after introducing Hecke groups **H**(λ) briefly, the Hecke group **H**($\sqrt{5}$) is considered. The group structure of **H**($\sqrt{5}$) is investigated and its normal subgroups are searched. Finally, principal congruence subgroups and congruence subgroups of **H**($\sqrt{5}$) and **H**($\sqrt{7}$) are given.

Key words: Picard group, modular group, Hecke group.

İÇİNDEKİLER Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

C	Karmaşık düzlem
$\hat{\mathbf{C}}$	Genişletilmiş karmaşık düzlem
$\mathbf{C}^*$	$\mathbf{C}\setminus\{0\}$ Kümesi
U	Üst yarı düzlem
$\mathbf{H}^3$	$\{z + t\mathbf{j} : z \in \mathbf{C}, t > 0\}$ Kümesi
I	Birim matris
i	Birim dönüşüm
M	Modüler grup
N	Doğal sayılar kümesi
P	Picard grubu
R	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbf{R}^*$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$ kümesi
S(x)	x'in kalımlaştırıcısı
Z	Tamsayılar kümesi
$\mathbf{Z}(i)$	Gaussian tamsayıların halkası

GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, ayrık ve süreksiz gruplar teorisinde önemli bir yer tutan Picard grubu, modüler grup, Hecke grupları ve bunların alt gruplarının çalışılmasıdır. Süreksiz gruplar başlangıçta otomorf fonksiyonlar teorisi ve hiperbolik geometride kullanılırken daha sonra bir başka özellikleri de ortaya çıkmıştır. Bu da süreksiz ve dolayısıyla ayrık grupların Riemann yüzeyleriyle ilişkisidir. Bu ilişki şöyledir:

1) Eğer Γ Fuchsian bir grup ise $S = \mathbf{U}/\Gamma$ yörünge uzayı üzerine öyle bir analitik yapı konabilir ki S bir Riemann yüzeyi olur.
2) Tersine kompakt bir S Riemann yüzeyi verildiğinde $S = \mathbf{U}/\Gamma$ olacak şekilde bir Γ Fuchsian yüzey grubu vardır.
3) Γ_1 ve Γ_2 Fuchsian gruplar olsunlar. Eğer $\Gamma_1 = w\Gamma_2 w^{-1}$ olacak şekilde bir $w \in PSL(2, \mathbf{R})$ varsa $\mathbf{U}/\Gamma_1 \cong \mathbf{U}/\Gamma_2$ olur.

Tersi Γ_1 ve Γ_2 yüzey grupları ise gerçeklenir.

Küre, tor, düzlem ve delinmiş düzleme konform denk olmayan tüm yönlendirilebilir yüzeyler üst yarı düzlemde sabit noktasız hareket eden Fuchsian grupların bölüm uzaylarıdır.

Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" isimli çalışmasında

$$R(z) = \frac{-1}{z} \text{ ve } T(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen $\mathbf{H}(\lambda)$ gruplarını tanıtmıştır. Burada λ, sabit bir pozitif reel sayıdır. Bu gruplar, $\mathbf{H}(\lambda)$ Fuchsian bir grup iken Dirichlet serilerinin çalışılmasında önemli bir rol oynamaktadır. Erich Hecke, λ'nın hangi değerleri için $\mathbf{H}(\lambda)$ grubunun ayrık olduğu sorusuna cevap aramıştır. Hecke (1936), $\lambda \geq 2$ ve reel iken ya da $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q},\ 1 \leq \lambda < 2$$

iken

$$F_\lambda = \left\{ z \in \mathbf{U} : |\mathrm{Re}z| < \frac{\lambda}{2}, |z| > 1 \right\}$$

kümesinin **H**(λ) grubu için bir temel bölge olduğunu ve diğer tüm $\lambda > 0$ değerleri için F_λ'nın bir temel bölge olmadığını göstermiştir. Buradan, **H**(λ)'nın Fuchsian bir grup olması için gerek ve yeter şartın $\lambda = \lambda_q$ ya da $\lambda \geq 2$ reel olması gerektiği görülür. Her iki durumda da **H**(λ) grubuna bir Hecke grubu denir. Bu çalışmada özellikle $\lambda \geq 2$ reel olması haline karşılık gelen **H**(λ) Hecke grupları ile ilgileneceğiz. Bu durumda **H**(λ) Hecke grupları, PSL(2, **R**)'nin R ve T ile üretilen ayrık alt gruplarıdır. Burada T, $\lambda \geq 2$ reel olmak üzere $T(z) = z + \lambda$ dönüşümüdür.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ haline karşılık gelen **H**(λ_q) Hecke grupları geniş ölçüde ele alınmıştır. Özellikle Cangül (1993), **H**(λ_q) Hecke gruplarını ve bunların normal alt gruplarını çalışmıştır. Bu halde $q = 3$ değerine karşılık gelen **H**(λ_3) Hecke grubu modüler grup olarak bilinen PSL(2, **Z**) dir. Bu grup literatürde en çok çalışılan ayrık gruplardan birisidir. Bu durumda $\lambda_3 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ dir ve **H**(λ_3)'ün elemanlarının tüm katsayıları rasyonel tamsayılardır. Modüler grup aynı zamanda önemli bir ayrık grup olan Picard grubu PSL(2, **Z**(*i*))'nin de bir alt grubu olup Picard grubunun alt gruplarının çalışılmasında da önemli bir rol oynamaktadır. $\lambda \geq 2$ tamsayı değerlerine karşılık gelen **H**(λ) Hecke grupları öncelikle modüler grubun ve dolayısıyla da Picard grubunun alt gruplarıdır.

Picard grubu $\mathbf{P} = PSL(2, \mathbf{Z}(i))$, $G_1 \cong S_3 *_{Z_3} A_4$ ve $G_2 \cong S_3 *_{Z_2} D_2$ olmak üzere G_1 ve G_2 gruplarının modüler grup $\mathbf{M} = PSL(2, \mathbf{Z})$ ile birleştirilmiş serbest çarpımıdır. Yani $\mathbf{P} = G_1 *_{\mathbf{M}} G_2$ dir. (Burada S_3, üç sembol üzerinde simetrik grup; A_4, dört sembol üzerinde alternatif grup ve D_2, Klein'in 4-lü grubudur). Modüler grup ise $\mathbf{M} \cong C_2 * C_3$ şeklinde bir serbest çarpımdır. Burada C_2 ve C_3 sırasıyla mertebeleri 2 ve 3 olan devirli gruplardır. Genel olarak **H**(λ_q) Hecke gruplarının $C_2 * C_q$ çarpımına izomorfik olduğu Cangül (1993) tarafından bu grupların temel bölgeleri yardımıyla ispatlanmıştır.

Çalışmanın birinci bölümünde, ikinci ve üçüncü bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı tanımlar ve sonuçlar verilmiştir. Ana hatlarıyla topolojik dönüşüm grupları, ayrık ve süreksiz gruplar, projektif gruplar, cisim genişlemeleri ve sonlu cisimler, doğrusal dönüşümler, Fuchsian gruplar ile ilgili temel kavramlar, permütasyon metodu, Riemann-Hurwitz formülü, Reidemeister- Schreier metodu, serbest gruplar ve serbest çarpımlar ele alınmıştır. Özellikle de özet olarak ikinci dereceden kalanlardan bahsedilmiş, **H**($\sqrt{5}$) ve **H**($\sqrt{7}$) Hecke gruplarının denklik ve temel denklik alt gruplarının incelenmesinde kullanılacak olan iki önerme ispatlanmıştır.

İkinci bölümde kısaca Picard grubu ve modüler grup hakkında temel bilgiler verildikten sonra öncelikle modüler grubun Picard grubundaki normalleştiricisinin $N_P(M) = G_2 \cong S_3 *_{Z_2} D_2$ olduğu ispatlanarak, buna bağlı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra Picard grubunun maksimal Fuchsian alt grupları ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde $\lambda \geq 2$ değerine karşılık gelen **H**(λ) grupları incelenmiştir. $\lambda \geq 2$ iken **H**(λ) grubu, mertebeleri 2 ve sonsuz olan iki devirli grubun bir serbest çarpımıdır. Dolayısıyla $\lambda \geq 2$ için tüm **H**(λ) grupları aynı cebirsel yapıya sahiptirler. $\lambda \in \mathbf{Z}$ iken **H**(λ)'nın üreteçleri tamsayı katsayılı olacaktır. Bu nedenle **H**(λ), modüler grubun ve dolayısıyla Picard grubunun alt grubu olacaktır. Modüler grup ve alt grupları geniş ölçüde incelendiğinden bu hal pek ilginç olmayacaktır. Bu çalışmada **H**($\sqrt{5}$) Hecke grubu ve alt grupları geniş ölçüde incelenmiştir. Temel denklik alt grupları ve denklik alt grupları haricinde **H**($\sqrt{5}$) için elde edilen sonuçlar izomorfizm farkıyla diğer tüm **H**(λ) grupları için de geçerli olacaktır.

İlk olarak **H**($\sqrt{5}$) Hecke grubunun elemanları belirlenmiştir. **H**($\sqrt{5}$)'in elemanlarının

$$\textbf{(a)}\ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix};\ ad - 5bc = 1,\ a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

ve

$$\textbf{(b)}\ \begin{pmatrix} a\sqrt{5} & b \\ c & d\sqrt{5} \end{pmatrix};\ 5ad - bc = 1,\ a, b, c, d \in \mathbf{Z}$$

şeklinde iki sınıfa ayrıldığı gösterilmiştir. (a) tipinde olan elemanlara çift elemanlar, (b) tipinde olanlara tek elemanlar diyeceğiz. **H**($\sqrt{5}$)'in tüm çift elemanlarının kümesi, indeksi 2 olan bir normal alt gruptur. Bu normal alt gruba çift alt grup diyeceğiz ve $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$ ile göstereceğiz. $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$'in, iki sonsuz devirli grubun serbest çarpımı olduğu ispatlanarak simgesi (0; $\infty^{(3)}$) şeklinde elde edilmiştir.

Daha sonra Macbeath'in bir sonucu kullanılarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in, mertebeleri 2 ve sonsuz olan iki devirli grubun serbest çarpımına izomorfik olduğu ispatlanmıştır (Macbeath 1963). Ayrıca $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in parabolik nokta kümesi belirlenmiştir. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in önemli normal alt grupları olan $\mathbf{H}^m(\sqrt{5})$ kuvvet alt grupları, cinsi 0 ve 1 olan normal alt grupları ve serbest normal alt grupları incelenmiştir. Son olarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ ve $\mathbf{H}(\sqrt{7})$ Hecke gruplarının temel denklik ve denklik alt grupları incelenmiştir.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmanın 2. ve 3. bölümleri için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Çalıştığımız gruplar birer topolojik dönüşüm grubu (aynı zamanda ayrık ve süreksiz gruplar) olduklarından öncelikle topolojik dönüşüm gruplarını ele alacağız, ayrık ve süreksiz gruplar teorisinden kısaca bahsedeceğiz.

1. 1. Topolojik Dönüşüm Grupları, Ayrık ve Süreksiz Gruplar

1. 1. 1. Tanım. G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer G'yi grup yapan

$f : G \times G \to G \,;\, f(x, y) = xy$

$g : G \to G \,;\, g(x) = x^{-1}$

işlemleri sürekli iseler G' ye bir topolojik grup denir.

$G\times G$ grubu üzerinde çarpım topolojisinin olduğu açıktır. (**C**, +), (**R**, +), ($\mathbf{C}^*$, .), ($\mathbf{R}^*$, .), (**Z**, +) grupları üzerlerindeki alışılmış topolojik yapılarla birlikte birer topolojik grupturlar. $S^1 = \{z\in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ birim çemberi, grup işlemi **C**'deki çarpma işlemi olmak üzere **C**'den indirgenen topoloji ile kompakt bir topolojik gruptur.

GL(n, **C**), grup işlemi matris çarpımı olmak üzere bir topolojik gruptur. Bu grup üzerindeki topoloji $n\times n$ tipindeki bir (a_{ij}) matrisi $\mathbf{C}^{n^2}$ 'de

$$(a_{11},\ldots,a_{1n},a_{21},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn})$$

noktası olarak göz önüne alındığında elde edilen topolojidir.

1.1.2. Önerme. G bir topolojik grup ve $a \in G$ belli bir öğe olmak üzere G'den G'ye

$r_a \;:\; g \to ga$

$l_a \;:\; g \to ag$

$i \;:\; g \to g^{-1}$

$\rho_a : g \to aga^{-1}$

dönüşümleri birer topolojik eş yapı dönüşümüdürler (homeomorfizmdirler). Bunlara sırasıyla sağ kayma, sol kayma, tersinme ve öz eş yapı (iç otomorfizma) denir (Başkan 1980). □

1.1.3. Önerme. G bir topolojik grup olsun. Bir $g \in G$ için $\{g\}$ kümesi açık olsun. O zaman her bir $\{y\}$ $(y \in G)$ kümesi açıktır.

İspat. Herhangi bir $y \in G$ için $g^{-1}y = a \in G$ olduğundan

$$r_a : x \to xa$$

dönüşümünü göz önüne alırsak r_a' nın bir topolojik eş yapı dönüşümü olduğunu biliyoruz. $\{g\}$ açık ve $r_a(\{g\}) = \{y\}$ olduğundan $\{y\}$ kümesi açıktır. □

1.1.4. Önerme. Bir G topolojik grubu homojen bir uzaydır. Yani herhangi $g_1, g_2 \in G$ için $f(g_1) = g_2$ olacak şekilde bir $f : G \to G$ topolojik eş yapı dönüşümü vardır.

İspat. Herhangi $g_1, g_2 \in G$ için $g_1^{-1}g_2 = a \in G$ diyelim. $f(g) = ga$ dönüşümünü alalım. f bir topolojik eş yapı dönüşümüdür ve

$$f(g_1) = g_1a = g_1g_1^{-1}g_2 = g_2$$

dir. □

Bir topolojik grubun homojen uzay olması şu sonucu verir: G'nin yerel özelliklerini bir tek noktada belirtmek yeter. Böylece bu özelliğin uzayın diğer tüm noktalarında geçerli olduğu homojenlik nedeniyle söylenebilir. Özellikle de herhangi bir nokta olarak G'nin birim öğesi dikkate alınabilir. Yani herhangi bir $g \in G$ noktasının komşuluğu ile G'nin birim öğesi olan e'nin bir komşuluğu topolojik eş yapılıdır. G topolojik grubunun birim öğesinin komşulukları ailesi bilindiğinde G'nin topolojik yapısı da bilinmiş olur.

1.1.5. Tanım. G bir topolojik grup, X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere [G, X] sıralı çiftini göz önüne alalım.

$$G \times X \to X, (g, x) = g \Lambda x$$

olarak tanımlanan sürekli bir dönüşüm her $g, h \in G$ ve her $x \in X$ için

(i) $g \Lambda (h \Lambda x) = gh \Lambda x$

(ii) $1 \Lambda x = x$

koşullarını gerçekliyorsa [G, X] ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu denir.

G ile X ister çakışsınlar isterse farklı kümeler olsunlar g Λ x gösterimi yerine gx yazacağız. Eğer X uzayı biliniyorsa çok kez [G, X] gösterimi yerine sadece G yazılır ve "G topolojik dönüşüm grubu " diye söylenir.

G bir topolojik grup olsun. [G, G] sıralı çifti aşağıdaki her bir dönüşüme göre bir topolojik dönüşüm grubudur:

(i) $(g, x) \to gx$

(ii) $(g, x) \to xg^{-1}$

(iii) $(g, x) \to gxg^{-1}$

1.1.6. Tanım. (a) [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu olmak üzere X üzerinde, en az bir $g \in G$ için

$$y \sim x \Leftrightarrow y = gx$$

biçiminde tanımlanan ~ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

(b) Bu denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına G-yörüngeleri denir. Bir $x \in X$ noktasını bulunduran yörünge G_x simgesi ile gösterilir. Yani

$$G_x = \{gx : g \in G\}$$

yazabiliriz.

(c) Eğer $G_x = X$ olacak biçimde bir $x \in X$ öğesi varsa [G, X] topolojik dönüşüm grubuna geçişlidir denir.

1.1.7. Teorem. [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu olsun. Tüm yörüngelerin oluşturduğu kümeyi X/G simgesi ile gösterelim. Bir

$$p : X \to X/G \,,\; p(x) = G_x$$

dönüşümü tanımlayalım. τ, X üzerindeki topoloji olmak üzere X/G üzerinde

$$\tau_G = \{T_g \subset X/G : p^{-1}(T_g) \in \tau\}$$

ailesini alalım. Böylece $(X/G, \tau_G)$ bir topolojik uzaydır (Başkan 1980). □

1.1.8. Tanım: Her bir $x \in X$ için $gx = x$ eşitliğini gerçekleyen $g \in G$ öğelerinin oluşturduğu kümeye x'in kalımlaştırıcısı (stabilizeri) denir ve S(x) simgesi ile gösterilir. Yani

$$S(x) = \{g \in G : gx = x\}$$

dir. S(x)' in G' nin bir alt grubu olduğu açıktır. Benzer şekilde $A \subset X$ ise

$$S(A) = \{g \in G : g(A) = A\}$$

olarak tanımlanır.

1.1.9. Tanım. Eğer [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu ve $g \in G$ ise g'nin sabit noktaları kümesi $\{x \in X : gx = x\}$ olarak tanımlanır.

1.1.10.Teorem. Eğer [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu ve $g, h \in G$ için $gh = hg$ ise g öğesi, h' nın sabit noktaları kümesini kendi üzerine resmeder.

İspat. $A = \{x \in X : hx = x\}$ kümesini göz önüne alalım. $x \in A$ olsun. O halde $hx = x$ dir. Böylece $h(gx) = ghx = gx$ ve $gx \in A$ elde edilir. □

1.1.11.Tanım. $Y \subset X$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $gY = Y$ ise $Y \subset X$ alt kümesine G-invaryant ya da G altında invaryant denir.

1.1.12.Tanım. G bir grup ve S boş olmayan bir küme olsun. Eğer aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir

$$G \times S \to S, (g, x) \to gx$$

fonksiyonu varsa G grubu S kümesi üzerinde hareket ediyor denir:

1) $\forall x \in S$ için $ex = x$ dir (e, G nin birim elemanı).

2) $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in S$ için $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ dir.

Bir G grubunun, verilen bir S kümesi üzerinde bir çok farklı hareketi olabilir. Bu nedenle gx gösterimi belirsizdir. Örneğin G bir grup ve H, G' nin bir alt grubu ise H grubunun G kümesi üzerindeki bir hareketi $(h, x) \to hx$ dir. Burada hx, G'deki çarpmadır. Yine $(h, x) \to hxh^{-1}$ de H'nın G kümesi üzerindeki bir başka hareketidir.

G, bir S topolojik uzayının kendi üzerine topolojik dönüşümlerinin bir grubu olsun. D, S'nin açık bir alt kümesi olsun. Eğer D'nin her noktasının G altındaki resimlerinin D'de bir yığılma noktası yoksa G, D'de süreksizdir denir. PSL(2, **C**)'nin G alt grupları için bu tanımı şöyle ifade edebiliriz: S, **C**'nin açık bir alt kümesi olsun. Her $z \in S$ için $\{Tz : T \in G\}$ kümesinin S'de yığılma noktası yoksa G, S üzerinde süreksizdir. G, belli bir açık alt kümede süreksiz ise PSL(2, **C**)'nin süreksiz bir alt grubudur diyeceğiz. G'nin limit noktaları,

$$\{Tz : T \in G, z \in \mathbf{C}\} = G_z$$

kümelerinin yığılma noktalarıdır.

Süreksizliğe çok yakın bir kavram ayrıklık kavramıdır. G bir topolojik grup olmak üzere G üzerinde ayrık topoloji varsa G'ye ayrık grup denir. Bir $K \subset G$ alt grubu için eğer K üzerindeki alt uzay topolojisi ayrıksa K'ya ayrık grup denir. Bu çalışmamızda GL(2, **C**) topolojik grubu ile ilgileneceğimizden, GL(2, **C**)'nin bir G ayrık alt grubunu biraz inceleyelim:

" $G \subset GL(2, \mathbf{C})$ ayrıktır $\Leftrightarrow$ G üzerindeki alt uzay topolojisi ayrıktır "

yazabiliriz.

G ayrık ve A, A_1, A_2, ... G'nin, $(A_n) \to A$ özelliğindeki öğeleri olsun. Bu durumda yeterince büyük her n için $A_n = A$ dır. Gerçekten de $A \in G$ ve G ayrık olduğundan $\{A\}$ kümesi açık bir kümedir. Diğer yandan $(A_n) \to A$ olduğundan, A'yı bulunduran her açık küme dizinin hemen hemen tüm terimlerini bulunduracaktır. Buna göre $\{A\}$ açık kümesi de dizinin hemen hemen tüm terimlerini bulundurur. Bu ise belli bir n_0 doğal sayısı için $n \geq n_0$ olmak üzere $A_n = A$ demektir. Çünkü her $n \geq n_0$ için $A_n \in \{A\}$ olur.

Burada $A \in G$ varsaymak gerekmez. $A \in GL(2, \mathbf{C})$ varsayımı ile de bu sonucu elde edebilirdik. Gerçekten bu durumda, $A_n(A_{n+1})^{-1} \to AA^{-1} = I$ ve dolayısıyla yeterince büyük tüm n'ler için $A_n = A_{n+1}$ dir. Halbuki $(A_n) \to A$ olduğuna göre $A_n = A$ dır.

G'nin ayrık olduğunu göstermek için G'nin bir noktasının ayrılmış olduğunu göstermek yeterlidir. Örneğin

$$\inf\{\|A - I\| : A \in G, A \neq I\} > 0$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Dolayısıyla $\{ I \}$, G'de açık küme olacaktır ve Önerme 1.1.3 gereğince G'nin ayrık olduğu elde edilir.

Eğer dizilerle G'nin ayrıklığını ifade etmek gerekirse

" G ayrıktır $\Leftrightarrow$ $A_n \in G$ olmak üzere $A_n \to I$ ise yeterince büyük tüm n'ler için $A_n = I$ dır "

yazabiliriz. Bir ayrık grubun herhangi bir alt grubunun da ayrık olduğu açıktır. Son olarak G ayrık ise BGB^{-1} eşlenik grubu da ayrıktır. Çünkü $X \to BXB^{-1}$ dönüşümü GL(2, **C**)'nin kendi üzerine bir homeomorfizmidir.

Eğer A, **C**'nin ayrık olarak normlandırılmış bir alt halkası ise PSL(2, A) ayrık bir alt grup olacaktır. Bu nedenle Picard grubu PSL(2, **Z**(i)) ayrık bir gruptur. Eğer G süreksiz ise ayrık olmalıdır. Çünkü aksi halde eğer $\{T_n\} \subset G$ ve $T_n \to I$ ise o zaman her $z \in \mathbf{C}$ için $T_n z \to Iz$ olurdu. Yani **C**'deki her z noktası bir limit noktası olurdu ki G grubu bu durumda süreksiz olamaz. Bu nedenle süreksiz bir grup ayrıktır. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Poincaré aşağıdaki teoremde bazı kısıtlamalar ile tersinin de doğru olduğunu göstermiştir.

1.1.13. Teorem. Γ, bir B diskinin ya da yarı düzleminin konform homeomorfizmlerinin ayrık grubu ise Γ, B'de süreksizdir (Lehner 1964). □

Diğer yandan PSL(2, **C**)'nin bir alt grubunun ayrık olması fakat **C**'de süreksiz olmaması mümkündür. Örneğin, Picard grubu PSL(2, **Z**(*i*)) ayrık bir gruptur fakat **C**'de hiçbir yerde süreksiz değildir.

1.1.14. Teorem. Picard grubu PSL(2, **Z**(*i*)), **C**'de hiçbir yerde süreksiz değildir.

İspat. Her $z \in \mathbf{C}$ noktasının, PSL(2, **Z**(*i*))'nin bir limit noktası olduğunu gösterirsek ispat biter. $z \in \mathbf{C}$ olsun. Gaussian rasyonel sayılar **C**'de yoğun olduğundan $b_n, d_n \in \mathbf{Z}(i)$ ve $(b_n, d_n) = 1$ olmak üzere z, $\{b_n/d_n\}$ Gaussian rasyonel sayılarının bir limitidir. b_n ve d_n aralarında asal olduklarından $a_n d_n - b_n c_n = 1$ olacak şekilde $a_n, c_n \in \mathbf{Z}(i)$ sayıları mevcuttur ve bu nedenle

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$$

dönüşümleri PSL(2, **Z**(*i*))'dedir. Fakat bu durumda $T_n(0) = b_n / d_n \to z$ olup z, PSL(2, **Z**(*i*))'nin bir limit noktasıdır (Fine 1989). □

Bu sonuç reel alt gruplar için sağlanmaz. Çünkü PSL(2, **R**)'nin alt grupları için ayrıklık süreksizliğe denktir.

1.1.15. Teorem. G, PSL(2, **R**)'nin bir alt grubu olsun. O zaman G ayrıktır ancak ve ancak G, (üst yarı düzlemde) süreksizdir. □

Teorem 1.1.15'in ispatı, PSL(2, **R**)'nin ayrık bir alt grubunun limit noktalarının reel eksen üzerinde bulunması gerektiğini göstermekten ibarettir. PSL(2, C)'nin, yukarıdaki teoremi genişletecek şekilde hiperbolik 3-uzay $\mathbf{H}^3$ üzerinde hareket edebileceği gösterilebilir.

1.1.16. Teorem. $G \subset$ PSL(2, **C**) ayrıktır ancak ve ancak G, $\mathbf{H}^3$ üzerinde süreksiz hareket eder (Beardon 1983). □

1.1.17. Teorem. H, bir t öğesi ile üretilmiş devirli grup olsun.

(i) t eliptik değilse H, t'nin sabit noktası (ya da noktaları) hariç her yerde süreksizdir.

(ii) t sonlu mertebeli eliptik öğe ise H her yerde süreksizdir.

(iii) t sonsuz mertebeli eliptik öğe ise H grubunun süreksiz olduğu hiçbir yer yoktur (Lehner 1964). □

Bu teorem gösteriyor ki süreksiz bir grupta sonsuz mertebeli eliptik öğe bulunmaz.

1.2. Cisim Genişlemeleri ve Sonlu Cisimler

Bu bölümde kısaca cisim genişlemelerinden ve sonlu cisimlerden bahsedeceğiz. F bir cisim ve $p(x) \in F[x]$ olsun. p(x), F[x]'de indirgenemez ise $K = F[x]/< p(x) >$ bölüm halkası bir cisimdir. F[x]'de indirgenemeyen bu p(x) polinomunun K'da bir kökünün olduğunu göreceğiz. Önemli bir diğer konumuz tüm sonlu cisimlerin yapısını incelemektir. p asal sayı ve n pozitif tamsayı olsun. Her bir sonlu cismin mertebesi p^n şeklinde bir asal kuvvettir. Tersine p ve n yukarıdaki gibi verildiğinde mertebesi p^n olan sonlu bir cisim vardır. Bu cisim $GF(p^n)$ ile gösterilir ve p^n mertebeli Galois cismi denir.

1.2.1. Tanım. F cismi K cisminin alt cismi ise K'ya F'nin genişlemesi denir. Burada hemen belirtelim ki S ve K birer cisim ve $\Phi : S \to K$ bir halka monomorfizmi ise cebirsel olarak $S = \Phi(S)$ alınabileceğinden K, S'nin bir genişlemesi olarak alınacaktır. Hatta daha genel bir tanım olarak diyebiliriz ki böyle bir monomorfizmin olması halinde K'ya (S, Φ)'nin genişlemesi denir.

1.2.2. Örnek. (i) R, **Q**'nun ve **C** ise **R** ve **Q**'nun genişlemesidir.

(ii) F bir cisim, $p(x) \in F[x]$ indirgenemeyen bir polinom ve $der(p) = n$ olsun. Bu taktirde

$$K = F[x]/< p(x) > = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \ : a_i \in F\}$$

cismi F'nin bir genişlemesidir (Bayraktar 1988).

1.2.3. Teorem. F bir cisim ve K, F'nin bir genişlemesi ise K, F üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat. Bayraktar'a (1988) bakınız. □

K'nın F üzerinde bir vektör uzayı oluşu K'nın yapısı hakkında bize çok şey verecektir.

1.2.4. Tanım. K, F cisminin bir genişlemesi olsun. Bir vektör uzayı olarak K'nın F üzerindeki boyutuna K genişlemesinin derecesi denir ve [K : F] ile gösterilir. [K : F] sonlu ise K'ya F'nin sonlu genişlemesi denir.

1.2.5. Örnek. [**C**: **R**] = 2 dir.

C = $\{a + ib : a, b \in \mathbf{R}\}$ olduğundan 1 ve i, **R** üzerinde **C**'yi geren vektörlerdir. 1 ve i aynı zamanda lineer bağımsızdır. O halde $\{1, i\}$, **R** üzerinde **C** için bir baz ve [**C** : **R**] = 2 dir.

1.2.6. Teorem. F bir cisim, $p(x) \in F[x]$ indirgenemeyen bir polinom ve der(p) = n olsun. $K = F[x]/< p(x) >$ ise [K : F] = n dir.

İspat. Bayraktar'a (1988) bakınız. □

1.2.7. Tanım. K, F cisminin genişlemesi ve $\alpha \in K$ olsun. K'nın, F'yi ve α'yı ihtiva eden en küçük alt cismini $F(\alpha)$ ile gösterelim. $F(\alpha)$'ya, F'ye α'nın ilavesi ile elde edilmiş cisim denir (bu $F(\alpha)$ = E'ye F'nin basit genişlemesi de denir).

K'nın bütün alt cisimlerinin arakesiti bir alt cisim olacağından en küçük alt cisim mevcuttur. $F(\alpha)$ K'nın, F ve α'yı ihtiva eden tüm alt cisimlerinin arakesitidir.

1.2.8. Örnek. $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ cismi, **R**'nin $F = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$ alt cismine eşittir. $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, bütün rasyonel sayıları ve $\sqrt{2}$'yi ihtiva eder.

Bilindiği gibi, sıralı bir tamlık bölgesinin sıfırdan farklı herhangi bir elemanı x ise x^2 daima pozitiftir. Bu husus özellikle reel sayılar için de doğrudur. Bu nedenle $x^2 = -1$ denkleminin reel sayılarda çözümü yoktur. Reel sayıların bu yetersizliği kompleks sayıların ortaya çıkışını zorunlu kılmıştır.

1.2.9. Tanım. **R**'yi (bir alt cisim olarak) ve i'yi ($i^2 = -1$) ihtiva eden en küçük cisme kompleks sayılar cismi denir.

1.2.10. Teorem. $a, b \in \mathbf{R}$ olmak üzere kompleks sayılar cisminin herhangi bir elemanı, $a + bi$ olarak bir tek şekilde ifade edilebilir.

İspat. Bayraktar'a (1988) bakınız. □

1.2.11. Tanım. F bir cisim, K F'nin bir genişlemesi ve $k \in K$ olsun.

$$a_0 + a_1k + \ldots + a_nk^n = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$ elemanları varsa k'ya F üzerinde "cebirseldir" denir. Bir başka ifade ile k, F[x]'de sıfırdan farklı bir polinomun kökü ise k'ya F üzerinde cebirseldir denir.

Örneğin 5, $\sqrt{3}$, i ve $\sqrt[n]{7} + 3$ sayıları **Q** üzerinde cebirseldir. Çünkü bu sayılar sırasıyla $x - 5$, $x^2 - 3$, $x^2 + 1$ ve $(x - 3)^n - 7$ polinomlarının kökleridir.

1.2.12. Teorem. α, F üzerinde cebirsel ve p(x), F üzerinde derecesi n olan indirgenemeyen bir polinom olsun. Kabul edelim ki α, p(x)'in bir köküdür. Bu takdirde

$$F(\alpha) \cong F[x]/< p(x) >$$

olup $c_i \in F$ olmak üzere $F(\alpha)$'nın elemanları

$$c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

şeklinde bir tek olarak yazılabilir.

İspat. Bayraktar'a (1988) bakınız. □

1.2.13. Teorem. p(x), F cismi üzerinde indirgenemeyen bir polinom olsun. Bu taktirde p(x)'in K'da bir kökü olacak şekilde F'nin sonlu bir K genişlemesi vardır.

İspat. Bayraktar'a (1988) bakınız. □

1.2.14. Teorem. F sonlu bir cisim ise uygun bir p asal sayısı ve n pozitif tamı için F'nin mertebesi p^n dir.

İspat. Bayraktar'a (1988) bakınız. □

1.2.15. Tanım. p^n elemanlı sonlu bir cisme p^n mertebeli Galois cismi denir ve $GF(p^n)$ ile gösterilir.

Verilen bir p asal sayısı ve n pozitif tamı için bir $GF(p^n)$ Galois cisminin var olduğu gösterilebilir. Üstelik mertebesi p^n olan bütün cisimler izomorftur. n = 1 ise $\mathbf{Z}_p$, mertebesi p olan bir Galois cismidir (Bayraktar 1988).

1.3. Projektif Gruplar

Her $q = p^n$ asal kuvveti için, izomorfizm farkıyla, GF(q) ile gösterilen q elemanlı bir tek cisim olduğunu biliyoruz. Bu cisim q elemanlı Galois cismidir. Tüm sonlu cisimler bu formdadır.

Şimdi K, mertebesi q = p^n olan bir cisim olsun, yani K = GF(q) olsun. O zaman *genel lineer grup* GL(2, K) ,

$$\mathrm{GL}(2, \mathrm{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathrm{K}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu grubun Z(GL(2, K)) ile gösterilen merkezi, tüm 2×2 skaler matrislerden oluşur ve GL(2, K)'nın bir normal alt grubudur. Bu durumda *projektif genel liner grup* PGL(2, K)

$$\mathrm{PGL}(2, \mathrm{K}) = \mathrm{GL}(2, \mathrm{K})/\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(2, \mathrm{K}))$$

şeklinde tanımlanır.

GL(2, K)'da determinantı 1 olan matrisler bir alt grup oluştururlar. Bu alt gruba *özel lineer grup* denir ve SL(2, K) ile gösterilir. Yani

$$\mathrm{SL}(2, \mathrm{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathrm{K}) : ad - bc = 1 \right\}$$

olur. O zaman *projektif özel lineer grup* PSL(2, K),

$$\mathrm{PSL}(2, \mathrm{K}) = \mathrm{SL}(2, \mathrm{K})/\mathrm{Z}(\mathrm{SL}(2, \mathrm{K}))$$

şeklinde tanımlanır. Burada Z(SL(2, K)), $p > 2$ iken $\{\pm I\}$ ve $p = 2$ iken $\{I\}$ dır. PSL(2, K)'nın mertebesi $p > 2$ iken $q(q-1)(q+1)/2$ ve $p = 2$ iken $q(q-1)(q+1)$ dir.

SL(2, K)'dan PSL(2, K)'ya bir doğal homomorfizm vardır. Bu homomorfizm SL(2, K)'daki bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını bir tek elemana, yani PSL(2, K)'daki $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ yan cümlesine götürür. Bu nedenle PSL(2, K)'nın bir elemanını, SL(2, K)'da bu elemanı indirgeyen iki matrisle temsil edebiliriz.

Şu ana kadar sadece sonlu cisimler üzerindeki projektif gruplardan bahsettik. Fakat genel halde yukarıda tanımladığımız bu dört grup, yani GL(2, K), PGL(2, K), SL(2, K) ve PSL(2, K), K'nın sonsuz bir cisim olması halinde de tanımlanabilir. Bu durumda matrislerin ya da indirgenen kesirli lineer dönüşümlerin tüm katsayıları bu sonsuz cisimden alınır. Bu durumun en ilginç örnekleri PSL(2, **R**) ve PSL(2, **C**) dir. PSL(2, **C**)'yi, çalışmalarımıza esas teşkil ettiği için 1. 4. kesimde biraz daha ayrıntılı olarak ele alacağız.

Projektif grupları aynı zamanda özdeşlikli halkalar üzerinde de tanımlamak mümkündür. Örnek olarak PSL(2, **Z**)'yi verebiliriz.

1.4. Doğrusal Dönüşümler

Bu tezde doğrusal dönüşümlerin grupları ile ilgileneceğimizden, bu bölümde ayrıntılı olarak doğrusal dönüşümleri ele alacağız.

$\hat{C}$ ile göstereceğimiz genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri a, b, c, d $\in$ C ve ad - bc $\neq$ 0 olmak üzere

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşümlerdir. Bu özellikteki w = t(z) dönüşümlerine doğrusal dönüşüm (lineer dönüşüm) ya da Möbiüs dönüşümü denir. Bu tip dönüşümler fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup Aut($\hat{C}$) simgesiyle gösterilir.

Şimdi doğrusal dönüşümleri biraz inceleyelim: t dönüşümü a, b, c, d $\in$ C katsayılarını bir tek biçimde belirlemez. Gerçekten bunu

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{kaz+kb}{kcz+kd} \quad (k \neq 0, k \in C)$$

şeklinde kolayca görebiliriz. Ancak a, b, c, d $\in$C, ad - bc $\neq$ 0 verildiğinde bu bir tek $t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü belirler.

Tanımdaki ad - bc = Δ ifadesine t dönüşümünün determinantı denir.

Δ = ad - bc $\neq$ 0 koşulu yerine daha kullanışlı olduğundan $\Delta = ad - bc = 1$ koşulunu da alabiliriz. Çünkü $\Delta \neq 0$ olduğundan t'nin pay ve paydası $\pm\sqrt{\Delta}$ ile bölünerek $a'b' - c'd' = 1$ bulunur.

Doğrusal dönüşümler ile matrisler arasında sıkı bir bağlantı vardır:

$t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ve $u(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ doğrusal dönüşümlerini alalım. Bu dönüşümler

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$ matrislerini belirtir.

$$MN = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$ çarpım matrisi de $t \circ u$ dönüşümünü belirtir.

Böylece GL(2, **C**) kümesi ile Aut($\hat{\mathbf{C}}$) arasında sıkı bir bağlantı olduğu görülür. Şimdi bu bağlantıyı inceleyelim:

$\vartheta : GL(2, \mathbf{C}) \to Aut(\hat{\mathbf{C}})$ dönüşümünü

$$\vartheta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = t \ ; \ t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\vartheta(MN) = t \circ u = \vartheta(M) \circ \vartheta(N)$ dir. Dolayısıyla ϑ bir grup homomorfizmidir. ϑ'nın çekirdeği

$$K = Ker(\vartheta) = \{V \in GL(2, \mathbf{C}) : \vartheta(V) = i, \text{ i birim dönüşüm}\}$$

$$= \{V \in GL(2, \mathbf{C}) : \frac{az+b}{cz+d} = z, \forall z \in \hat{\mathbf{C}} \text{ için}\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C}) : a = d = k, \ b = c = 0, \ k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} : k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\right\}$$

$$= \{kI : k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}, \text{ I birim matris}\}$$

kümesidir. Böylece 1. izomorfizm teoreminden

$$GL(2, \mathbf{C}) / Ker(\vartheta) \cong Aut(\hat{\mathbf{C}})$$

elde edilir. GL(2, **C**) / K bölüm grubu için PGL(2, **C**) simgesi kullanılır ve *Projektif Genel Lineer* Grup denir.

Her M, N $\in$ GL(2, **C**) için det(MN) = det(M)det(N) olduğundan

$$\det : GL(2, \mathbf{C}) \to \mathbf{C} \setminus \{0\} = \mathbf{C}^*$$

dönüşümü bir grup homomorfizmidir.

$$Ker(\det) = \{V \in GL(2, \mathbf{C}) : \det(V) = 1\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{C}) : ad - bc = 1\right\}$$

dir. Bu grubu SL(2, **C**) simgesi ile göstereceğiz. SL(2, **C**)'ye *Özel Lineer Grup* denir. 1. izomorfizm teoreminden GL(2, **C**)/ SL(2, **C**) $\cong$ $\mathbf{C}^*$ olur.

Her N $\in$ GL(2, **C**) için , λ^2 = det(N) ve M $\in$ SL(2, **C**) olmak üzere N = λM yazılabilir. ϑ(N) = ϑ(M) dir. Dolayısıyla her t $\in$ Aut($\hat{C}$) dönüşümü

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ; a, b, c, d \in \mathbf{C},\ ad - bc = 1$$

biçiminde yazılabilir. Yani ϑ dönüşümü SL(2, **C**)'yi Aut($\hat{C}$) üzerine resmeder. O halde SL(2, **C**)'nin GL(2, **C**)/ K bölüm grubundaki resmi PSL(2, **C**) olmak üzere

$$PGL(2, \mathbf{C}) = PSL(2, \mathbf{C})$$

olur. PSL(2, **C**)'ye *Projektif Özel Lineer Grup* denir.

Böylece Aut($\hat{C}$) $\cong$ PGL(2, **C**) = PSL(2, **C**) elde edilir

PGL(2, **C**)'nin elemanları $\hat{C}$'daki çemberleri yine $\hat{C}$'daki çemberlere resmederler. Şimdi de PGL(2, **C**)'de eşleniklik sınıflarını inceleyelim:

1.4.1. Tanım. G bir grup olsun. h, g $\in$ G olmak üzere g = aha^{-1} olacak biçimde bir a $\in$ G öğesi varsa g ve h, G'de eşleniktirler (konjugedirler) denir.

G'deki eşleniklik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve G'yi denklik sınıflarına böler. Bu denklik sınıflarının her birine eşleniklik sınıfı denir.

1.4.2.Tanım. Bir t $\in$ PGL(2, **C**) dönüşümünün sabit noktaları, t(z) = z özelliğindeki z noktalarıdır.

Bir t dönüşümünün bir sabit noktası z olsun. v = utu^{-1} eşlenik öğesini göz önüne alalım. u(z) noktası bu v dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Böylece t'nin kaç tane sabit noktası varsa buna eşlenik olan bir öğenin de o kadar sabit noktası vardır. O halde ilk olarak PSL(2, **C**)'deki dönüşümlerin sabit noktalarını belirleyelim:

a, b, c, d $\in$ **C** ve ad - bc = 1 olmak üzere,

$t(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = z$ den $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ elde edilir. Bu denklemin kökleri (ki en fazla iki tanedir) t'nin sabit noktalarıdır. Bunların $\hat{C}$'daki yerlerini bulabilmek için denklemin determinantını göz önüne alalım:

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4$$

Bu durumda $(a + d)^2 \neq 4$ ise denklemin iki tane farklı kökü vardır. Dolayısıyla iki tane sabit nokta vardır. $(a + d)^2 = 4$ ve t $\neq$ i ise bir tek sabit nokta vardır ($t \neq i$ koşulunu ek olarak koyuyoruz. Çünkü i özdeşlik dönüşümü tüm noktaları sabit bırakır ve $(a + d)^2 = 4$ dür).

Özel Haller: $c = 0$ ise $t(z) = a^2z + ba$ şekline gelir. t dönüşümü ∞'u sabit bırakır. Ayrıca

1) $a^2 \neq 1$ ise $z = \dfrac{ab}{1-a^2}$ de bir sabit noktadır.

2) $a^2 = 1$ ise $t(z) = z \pm b$ ($b \neq 0$) olur. Bu durumda tek sabit nokta ∞ dur.

$(a + d)^2$ fonksiyonunu PSL(2, **C**)'deki eşleniklik sınıflarını belirlemek için kullanacağız. Bir $A \in GL(2, \mathbf{C})$ matrisinin izi $iz(A) = a + d$ şeklinde tanımlanır ve

$$iz(AB) = iz(BA) \text{ ve } iz(BAB^{-1}) = iz(A)$$

olduğu kolayca görülebilir. Dikkat edilirse bir eşleniklik sınıfının bir izi vardır. Yalnız $iz : GL(2, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ fonksiyonu iyi tanımlı olmadığından bunun yerine $iz^2(A) = (a + d)^2$ fonksiyonunu göz önüne alacağız.

$\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $u(z) = \lambda z \in PGL(2, \mathbf{C})$ dönüşümüne SL(2, **C**)'de

$\pm\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$ matrisini karşılık getirebiliriz.

$$iz^2(u) = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2$$

dir.

1.4.3. Teorem. Eğer $t = i$ ise bu dönüşüm tek başına bir eşleniklik sınıfı oluşturur. Eğer $t \neq i$ ise $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere t,

$$u_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z : \lambda \neq 1 \\ z + 1 : \lambda = 1 \end{cases}$$

dönüşümüne eşleniktir.

İspat. t'nin eşlenik sınıfını [t] simgesi ile gösterirsek, $t = i$ olması halinde

$$[t] = [i] = \{u : u = viv^{-1}, \exists\, v \in PSL(2, \mathbf{C})\}$$
$$= \{u : u = vv^{-1}\} = \{u : u = i\} = \{i\}$$

olur. PSL(2, **C**)'nin geriye kalan eşleniklik sınıfları, her bir sınıftan bir temsilci seçilerek belirtilecektir.

1. Hal. t'nin bir tek z_0 sabit noktası olsun. $\exists\, s \in PSL(2, \mathbf{C})$ öyle ki $s(z_0) = \infty$ olur. O halde sts^{-1} dönüşümünün yegane sabit noktası ∞ dur. Böylece $k \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$

olmak üzere $sts^{-1}(z) = z + k$ şeklindedir. Şimdi $v(z) = \frac{z}{k}$ dönüşümünü alalım ve $sts^{-1} = u$ diyelim.

$$vuv^{-1}(z) = vu(kz) = v(kz + k) = z + 1 = u_1(z)$$

olur. O halde $(vs)t(vs)^{-1} = u_1$ olup t dönüşümü u_1'e eşleniktir.

2. Hal. t'nin z_1 ve z_2 gibi iki sabit noktası olsun. $\exists\ w \in PSL(2, \mathbf{C})$ öyle ki $w(z_1) = 0$, $w(z_2) = \infty$ olur. wtw^{-1}'in sabit noktaları 0 ve ∞ dur. O halde $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $wtw^{-1} = u_\lambda$ dır. □

Eşleniklik sınıflarının tümünü belirtmek için u_μ ve u_λ'nın ne zaman eşlenik olduğunu görmemiz gerekir.

1.4.4. Teorem. u_μ ve u_λ'nın eşlenik olması için gerek ve yeter şart $\mu = \lambda$ ya da $\mu = 1/\lambda$ olmasıdır (Jones ve Singerman 1987). □

Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuçları özetleyerek, doğrusal dönüşümleri aşağıdaki şekilde sınıflandırıyoruz:

Hiperbolik	$iz^2(t) > 4$
Eliptik	$0 \leq iz^2(t) < 4$
Parabolik	$iz^2(t) = 4$
Loksodromik	$iz^2(t) < 0$ ya da $iz^2(t) \notin \mathbf{R}$

1.4.5. Tanım. t bir doğrusal dönüşüm olsun. $t^m = i$ olacak şekildeki en küçük $m > 0$ tam sayısına t'nin mertebesi (derecesi) denir.

1.4.6. Teorem. $t \in PSL(2, \mathbf{C})$ ve $t \neq i$ olsun. Eğer t sonlu mertebeli ise eliptik bir dönüşümdür. Tersi her zaman doğru değildir (Jones ve Singerman 1987). □

1.4.7. Teorem. Eğer C, $\hat{\mathbf{C}}$'da bir çember ve $t \in PGL(2, \mathbf{C})$ ise t(C) de $\hat{\mathbf{C}}$'nın bir çemberidir (Jones ve Singerman 1987). □

1.5. İkinci Dereceden Kalanlar

1.5.1. Tanım. m pozitif bir tamsayı olsun. k da m ile aralarında asal olan bir tamsayı olsun. Eğer

$$x^2 \equiv k \bmod m$$

olacak şekilde bir $x \in \mathbf{Z}$ varsa k'ya mod m'de ikinci dereceden kalan denir.

k'nın $\mathbf{Z}_m$'deki kalan sınıfı $\overline{k}$ olmak üzere k mod m'de ikinci dereceden kalan ise k, $\mathbf{Z}_m$'de bir tamkaredir. İkinci dereceden kalanlar

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \bmod m$$

denkleminin çözümünde kullanılırlar. Bunun dışında bir çok kullanım alanları vardır.

1.5.2. Tanım. p bir tek asal sayı ve (a, p) = 1 olsun. $\left(\frac{a}{p}\right)$ ile gösterilen Legendre sembolü

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{a, mod p de ikinci dereceden kalan ise} \\ -1 & \text{a, mod p de ikinci dereceden kalan değilse} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

1.5.3. Sonuç. 1) $x^2 \equiv a \bmod p$ kongrüansının çözüm sayısı $1 + \left(\frac{a}{p}\right)$ dir.

2) $a \equiv b \bmod p$ ise $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ dir. □

1.5.4. Teorem. $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$ dir. □

1.5.3 ve 1.5.4 gereğince herhangi bir $\left(\frac{a}{p}\right)$ sembolünün hesaplanması aşağıdaki üç özel sembolün hesaplanması problemine indirgenir: $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$ ve $\left(\frac{q}{p}\right)$ (q tek asal). Bunlar ise aşağıda verilmiştir.

1.5.5. Teorem. (i) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

(ii) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

(iii) $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

olur. □

Bunlardan (iii) en çok kullanılacak olan özelliktir ve Gauss'un ikinci dereceden indirgeme kuralı olarak bilinir. Euler tarafından da buna ilişkin bir sonuç bulunmuştur.

1.5.6. Teorem (Euler). p tek asal ve (a, p) = 1 ise

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \mod p$$

dir. □

Şu ana kadar ikinci dereceden kalanlar hakkında özet bir bilgi verdik. Ayrıntılar için Jones ve Jones'a (1999) bakınız. Şimdi çalışmamızın 3. bölümünde $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ ve $\mathbf{H}(\sqrt{7})$ Hecke gruplarının temel denklik alt gruplarını incelerken kullanacağımız iki sonucu ispatlayalım.

1.5.7. Önerme. p tek asal ve (5, p) = 1 olsun. $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $p \equiv \pm 1 \mod 10$ olmasıdır.

İspat. $\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{5}\right) = 1$

olup Euler teoremi gereğince $\left(\frac{p}{5}\right) \equiv p^{\frac{5-1}{2}} \mod 5$ yani $\left(\frac{p}{5}\right) \equiv p^2 \mod 5$ olduğundan

$$\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p^2 \equiv 1 \mod 5 \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \mod 5 \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \mod 10$$

bulunur. Yani 5'in mod p'de ikinci dereceden kalan olması için gerek ve yeter şart $p \equiv \pm 1 \mod 10$ olmasıdır. □

1.5.8. Önerme. p tek asal ve (7, p) = 1 olsun. $\left(\frac{7}{p}\right) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \mod 28$ olmasıdır.

İspat. $\left(\frac{7}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{p}\right) = \left(\frac{p}{7}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{7-1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{p}\right) = \left(\frac{p}{7}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}.3} = 1$

olup bu durumda karşımıza iki hal çıkar.

1. Hal. $\left(\frac{p}{7}\right) = 1$ ve $(-1)^{\frac{p-1}{2}.3} = 1$ olmalıdır.

$(-1)^{\frac{p-1}{2}.3} = 1$ ise $\frac{p-1}{2}.3 = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$ olmalıdır. Yani $3p = 4n + 3$ ya da $3p \equiv 3 \bmod 4$ olmalıdır. Bu ise $p \equiv 1 \bmod 4$ olmasını gerektirir. Diğer yandan $\left(\frac{p}{7}\right) = 1$ ise $\left(\frac{p}{7}\right) \equiv p^{\frac{7-1}{2}} \bmod 7$ olduğundan $p^3 \equiv 1 \bmod 7$ bulunur.

O halde $p \equiv 1 \bmod 4$ ise $p = 1 + 4n$, $n \in \mathbf{Z}$ yazabiliriz. $p^3 \equiv 1 \bmod 7$ ise $(1 + 4n)^3 \equiv 1 \bmod 7$ olur. Buradan $1 + 12n + 48n^2 + 64n^3 \equiv 1 \bmod 7$ ve $n(n^2 - n + 5) \equiv 0 \bmod 7$ bulunur. $n \equiv 0 \bmod 7$ ya da $n^2 - n - 2 \equiv 0 \bmod 7$ olmalıdır. $n^2 - n - 2 \equiv 0 \bmod 7$'den $n \equiv 2 \bmod 7$ ya da $n \equiv -1 \bmod 7$ olması gerektiği elde edilir. Sonuç olarak $n = 7k$, $k \in \mathbf{Z}$ ya da $n = 7m + 2$, $m \in \mathbf{Z}$ ya da $n = 7l - 1$, $l \in \mathbf{Z}$ olmalıdır. Bu halde

"$p \equiv 1 \bmod 4$ ve $p^3 \equiv 1 \bmod 7 \Leftrightarrow p = 1 + 28k$ ya da $p = 9 + 28m$ ya da $p = -3 + 28l \Leftrightarrow p \equiv 1 \bmod 28$ ya da $p \equiv 9 \bmod 28$ ya da $p \equiv -3 \bmod 28$"
elde edilir.

2. Hal. $\left(\frac{p}{7}\right) = -1$ ve $(-1)^{\frac{p-1}{2}.3} = -1$ olmalıdır.

Yine 1. haldekine benzer işlemler yardımıyla $p \equiv 3 \bmod 28$ ya da $p \equiv 19 \bmod 28$ ya da $p \equiv 27 \bmod 28$ olması gerektiği elde edilir.

Sonuç olarak

"$\left(\frac{7}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 1, 9, -3, 3, 19, 27 \bmod 28 \Leftrightarrow p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \bmod 28$"

bulunur. □

1.6. Fuchsian Gruplar

Γ bir Fuchsian gruptur dediğimizde PSL(2, **R**)'nin (üst yarı düzlem **U**'nun konform homeomorfizmlerinin grubu) sonlu üreteçli ayrık bir alt grubunu anlayacağız. Her Fuchsian grubun aşağıdaki şekilde bir temsili vardır:

Üreteçler: $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

$x_1, \dots, x_r$ (eliptik)

$p_1, \dots, p_t$ (parabolik)

$h_1, \dots, h_u$ (hiperbolik sınır elemanı),

Bağıntılar: $x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]\prod_{j=1}^{r}x_j\prod_{k=1}^{t}p_k\prod_{l=1}^{u}h_l = 1$.

Bu durumda

$$(g;\, m_1, \dots, m_r;\, t\,;\, u) \tag{1.1}$$

ifadesine Γ'nın simgesi diyeceğiz. Burada $m_1, \dots, m_r$ sayıları ≥ 2 tamsayılardır ve Γ'nın peryotları olarak adlandırılırlar. g, Γ'nın üzerinde ayrık olarak hareket ettiği **U**/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir.

Hemen belirtelim ki bu temsil aşağıdaki özelliklere sahiptir: Γ'nın her eliptik elemanı x_j $(1\leq j \leq r)$'lerden birinin bir kuvvetine eşleniktir, Γ'nın her parabolik elemanı p_k $(1\leq k \leq t)$'lardan birinin bir kuvvetine eşleniktir ve Γ'nın her hiperbolik sınır elemanı h_l $(1\leq l \leq u)$'lerden birinin bir kuvvetine eşleniktir. Üstelik üreteçlerden birinin bir diğer üretecin bir kuvvetine eşlenik olan, aşikar olmayan bir kuvveti yoktur (bu ifadelerin ispatı için Lehner'e (1964) bakınız).

Herhangi bir Γ Fuchsian grubu için L(Γ), Γ'nın limit noktalarının kümesi olsun. L(Γ) reel eksenin, aşağıdaki üç koşuldan birini sağlayan bir alt kümesidir:

(i) L(Γ) en çok iki noktadan oluşur.

(ii) L(Γ) = **R** dir.

(iii) L(Γ) **R**'nin, hiçbir yerde yoğun olmayan mükemmel bir kümesidir.

(ii) tipinden olan gruplara birinci türden ve (iii) tipinden olan gruplara ikinci türden Fuchsian gruplar denir.

Şimdi Riemann-Hurwitz formülünü tanımlayalım. Γ, simgesi (1.1)'deki gibi olan bir grup olsun.

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

tanımlayalım. Eğer $\mu(\Gamma) > 0$ ise simgesi (1.1)'deki gibi olan bir Fuchsian grup vardır ve eğer Γ, birinci türden ise $\mu(\Gamma) > 0$ dır. Eğer $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ sonlu indeksli bir alt grup ise

$$|\Gamma : \Gamma_1| = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

olur. Bu formüle Riemann-Hurwitz formülü denir. Eğer u = 0 ise $2\pi\mu(\Gamma)$, Γ'nın bir temel bölgesinin hiperbolik ölçümüdür ve Riemann-Hurwitz formülü bunun sonucu olarak elde edilir. Eğer u > 0 ise bu durumda $\mu(\Gamma) = \infty$ olup Riemann-Hurwitz formülü Maclachlan tarafından ispatlanmıştır (Maclachlan 1971).

Riemann-Hurwitz formülünü çalışmamız boyunca sıkça kullanacağız. Yine Singerman tarafından ispatlanan (Singerman 1970) ve permütasyon metodu olarak adlandırılan aşağıdaki önemli sonucu da sık sık kullanacağız.

1.6.1. Teorem. Γ_2, simgesi (1.1)'deki gibi olan bir Fuchsian grup olsun. O zaman Γ_2'nin, simgesi

$$(g'; n_{11}, \ldots, n_{1\rho_1}, \ldots, n_{r1}, \ldots, n_{r\rho_r}; t'; u')$$

ve indeksi μ olan bir Γ_1 alt grubu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

(a) μ nokta üzerinde geçişli sonlu bir G permütasyon grubu ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\Theta : \Gamma_2 \to G$ epimorfizmi vardır:

(i) $\Theta(x_j)$ permütasyonu, boyları m_j'den küçük ya da eşit olan tam olarak ρ_i devirden oluşur ve bu devirlerin boyları $m_j/n_{j1}, \ldots, m_j/n_{j\rho_j}$ dir.

(ii) $\Theta(\gamma)$ permütasyonundaki devirlerin sayısı $\delta(\gamma)$ olmak üzere

$$t' = \sum_{k=1}^{t} \delta(p_k),\ u' = \sum_{l=1}^{u} \delta(h_l)$$

dir.

(b) $\mu(\Gamma_1)/\mu(\Gamma_2) = \mu$ olur.

İspat. Singerman'a (1970) bakınız. □

1.6.2. Teorem. Γ, simgesi $(g; m_1, \ldots, m_r; t)$ olan bir Fuchsian grup olsun. O zaman Γ,

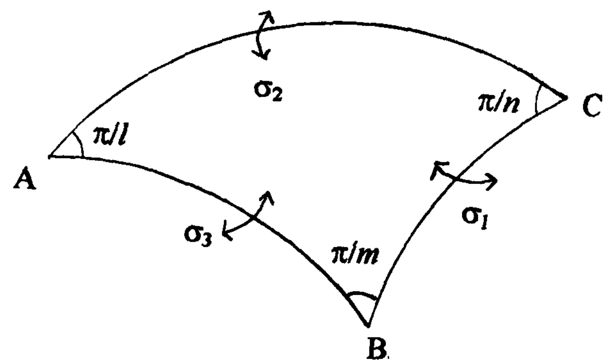
$$F_{2g+t-1} * C_{m_1} * \ldots * C_{m_r} \qquad \textbf{(1.2)}$$

soyut grubuna izomorfiktir. Yani Γ, mertebeleri $m_1, \ldots, m_r$ olan devirli grupların serbest çarpımı ile rankı 2g + t − 1 olan serbest grubun serbest çarpımıdır.

İspat. Cangül'e (Baskıda) bakınız. □

1.6.3. Sonuç. u > 0 iken (1.2)'deki serbest çarpımda bulunan serbest grubun rankı n = 2g + t + u – 1 dir. □

Şimdi üçgen gruplarını tanımlayalım. l, m, $n \geq 2$ tamsayılar olsun. Açıları π/l, π/m ve π/n olan hiperbolik üçgeni göz önüne alalım. σ_1, σ_2 ve σ_3, Şekil 1.1'de görüldüğü gibi, bu üçgenin kenarlarındaki yansımalar olsun. Γ^*, bu üç yansıma



Şekil 1.1

tarafından üretilen grup olsun:

$$\Gamma^* = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = 1 \rangle.$$

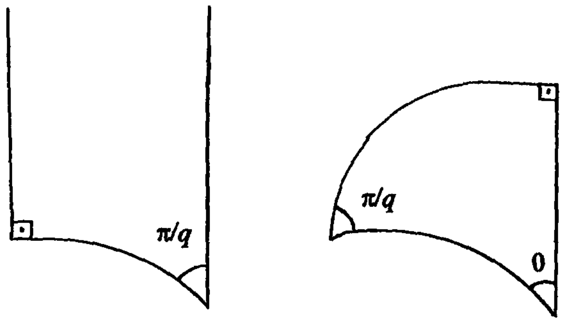
Dikkat edilirse bu grupta σ_1, σ_2 ve σ_3 yön korumayan, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1$ ve $\sigma_1\sigma_2$ ise yön koruyan elemanlardır. $x = \sigma_2\sigma_3$ ve $y = \sigma_3\sigma_1$ alalım. Bu takdirde x, A köşesi etrafında $2\pi/l$ kadarlık bir dönme ve y, B etrafında $2\pi/m$ kadarlık bir dönme olur. Bu durumda xy ise C etrafında $2\pi/n$ kadarlık bir dönmedir. Bunların hepsi yön koruyan eşmetrilerdir. Bundan dolayı Γ^*'ın, sadece yön koruyan eşmetrilerden oluşan bir Γ alt grubunu elde ederiz:

$$\Gamma = \langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = 1 \rangle.$$

Bu alt grubun bir Fuchsian grup olarak simgesi (0; l, m, n) dir ve kısaca (l, m, n) şeklinde gösterilir. Bu gruba bir üçgen grup denir. Bu alt grubun indeksi 2 dir ve bu nedenle Γ^*'ın bir normal alt grubudur.

l, m ve n'den biri ve ya hepsi ∞ olabilir. Örneğin (2, q, ∞) Hecke grubu Şekil 1.2'deki üçgenler üzerinde hareket eder.

Bir çok grubun temsili iki üreteçli olduğundan üçgen grubu ya da üçgen gruplarının bölüm grupları olarak düşünülebilir. Son olarak genelde l, m, n



Şekil 1.2

sayılarından birinin 2 olduğu durumlarla karşılaşacağımızdan (2, *m*, *n*) türü grupları inceleyelim. Burada grubun hangi yüzey üzerinde hareket ettiği *m* ve *n* sayıları yardımıyla bulunabilir: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ ise küre, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ ise tor (ya da **C** düzlemi) ve $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ ise hiperbolik düzlem (üst yarı düzlem ya da birim disk) üzerinde hareket eder.

Küre üzerindeki (2, *m*, *n*) üçgen grupları, tüm sonlu üçgen gruplarıdır. Bunlardan kısaca bahsedelim:

i) C_n Devirli Grupları. C_n'in

$$C_n \cong \langle \alpha : \alpha^n = 1 \rangle$$

şeklinde bir temsili vardır. Her n ∈ **N** için C_n, (1, n, n) şeklinde üçgen grubu olarak gösterilebilir. Bunun dışında m tek olmak üzere $C_{2m} \cong \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^m = 1, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$ olduğundan C_{2m}'in de (2, m, 2m) şeklinde üçgen grubu olarak temsili vardır. Ancak bu tür devirli gruplar cinsi g > 0 olan yüzeyler üzerinde hareket ederler.

ii) D_n Dihedral Grupları. Bunlar,

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = 1 \rangle$$

ya da

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta : \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1 \rangle$$

ya da

$$D_n \cong \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = 1 \rangle$$

şeklinde bir temsili olan iki üreteçli gruplardır. | D_n | = 2n dir. D_n'in üçgen grubu olarak gösterimi (2, n, 2) ya da (2, 2, n) ya da (n, 2, 2) şeklindedir.

(iii) Simetrik ve Alterne Gruplar. | S_n | = n! ve | A_n | = $\frac{n!}{2}$ dir.

Karşımıza sıkça çıkacak olan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2, 2, 3)$, $A_4 \cong (2, 3, 3)$, $S_4 \cong (2, 3, 4)$ ve $A_5 \cong (2, 3, 5)$ gruplarıdır.

Diğer yandan tor üzerinde hareket eden tüm (2, *m*, *n*) üçgen grupları (2, 3, 6), (2, 4, 4) ve (2, 6, 3) gruplarıdır (Coxeter ve Moser 1957).

1.7. Serbest Gruplar ve Reidemeister-Schreier Metodu

1.7.1. Tanım. X, bir F grubunun bir alt kümesi ve G bir grup olsun. Eğer her $f: X \to G$ dönüşümü bir tek $f: F \to G$ homomorfizmine genişletilebiliyorsa F grubu X üzerinde serbesttir denir. X'e F'nin serbest tabanı denir. Genelde bir serbest grup, bir serbest tabanı olan bir gruptur.

Serbest bir F grubu için bir serbest tabanın $|X|$ mertebesi bir tektir ve F' nin rankı olarak adlandırılır. Eğer $|X| < \infty$ ise F sonlu ranklıdır. Eğer F'nin rankı n ve $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ise F, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ üzerinde serbesttir diyeceğiz ve bunu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ya da F_n ile göstereceğiz.

İki serbest grup izomorftur ancak ve ancak rankları aynıdır (Lyndon ve Schupp 1977).

Rankı 0 olan bir serbest grup aşikardır ve rankı 1 olan bir serbest grup sonsuz devirli bir gruptur.

Bir başka ifade ile eğer X, F için bir üreteç kümesi ise ve aşikar olmayan bağıntılar yoksa F, X üzerinde serbesttir. Özellikle de aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

1.7.2. Teorem. F bir serbest gruptur ancak ve ancak F, $F = \langle X; \, \rangle$ şeklinde bir temsile sahiptir. □

Bu teorem, serbest indirgenmiş kelime kavramına bağlıdır. Eğer F, X üzerinde serbest ise F'de, X üzerinde serbest indirgenmiş bir kelime

$$x_{v_1}^{e_1} x_{v_2}^{e_2} \ldots x_{v_n}^{e_n}$$

şeklindedir. Burada $x_{v_i} \in X$, $x_{v_i} \neq x_{v_{i+1}}$ ve $e_i \neq 0$ dır. 1 kelimesine yani her bir $e_i = 0$ özelliğindeki kelimeye boş kelime diyeceğiz ve bir indirgenmiş kelime olarak göz önüne alacağız. Teorem 1.7.2. aşağıdaki teoreme denktir (Fine 1989):

1.7.3. Teorem. F bir serbest gruptur ancak ve ancak bir X üreteç kümesi vardır ki F'nin her elemanının, X üzerinde serbest indirgenmiş bir kelime olarak bir tek gösterimi vardır. □

Bu indirgenmiş kelime, F'deki elemanlar için bir normal form verir.

Serbest grupların en önemli özelliği aşağıdaki teoremde verilmiştir (Fine 1989):

1.7.4. Teorem. Her G grubu, bir serbest grubun homomorfik resmidir. □

Serbest gruplar teorisi çok geniştir. Biz burada sadece ihtiyacımız olan bir kaç özelliği ele alacağız (Fine 1989).

1.7.5. Teorem. Bir serbest grup bükümsüzdür (torsion-free). Yani bir serbest grupta etkisiz eleman dışında sonlu mertebeli eleman yoktur. □

1.7.6. Teorem (Nielsen-Schreier). Bir serbest grubun her alt grubu da bir serbest gruptur. □

Bu sonucun farklı bir çok ispatı vardır. F, X üzerinde serbest bir grup ve $H \subset F$ bir alt grup olsun. $T = \{ t_\alpha \}$, F'nin H moduna göre yan cümle temsilcilerinin, aşağıdaki özelliği sağlayan bir tam kümesi olsun: Eğer $t_\alpha = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n} \in T$ ise o zaman 1, $x_1^{e_1}$, $x_1^{e_1} x_2^{e_2}$, v.b. parçalarının hepsi de T' dedir. Yan cümle temsilcilerinin bu özellikteki bir sistemi her zaman bulunabilir ve H için bir Schreier sistemi yada Screier transversali alarak adlandırılır.

Eğer $g \in F$ ise $\overline{g}$, g'nin T'deki yan cümle temsilcisi olsun ve $g \in F$, $t \in T$ için $S_{tg} = tg(\overline{tg})^{-1}$ tanımlayalım. Hemen belirtelim ki her t, g için S_{tg}, H'dadır. O zaman aşağıdaki teoremi elde ederiz:

1.7.7. Teorem (Nielsen-Schreier Teoreminin Açık Şekli). F, X üzerinde serbest grup ve H, F'nin bir alt grubu olsun. Eğer T, F için H moduna göre bir Schreier sistemi ise o zaman H,

$$\{ S_{tx} : t \in T, x \in X, S_{tx} \neq 1 \}$$

kümesi üzerinde serbesttir. □

1.7.8. Örnek. F, {a, b} üzerinde serbest grup ve $H = F(x^2)$ olsun. Yani H, F'deki tüm elemanların kareleri ile üretilen normal alt gruptur. O zaman $F/F(x^2) = \langle a, b;\ a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olur. Buradan F için H moduna göre bir Schreier sistemi {1, a, b, ab} olarak elde edilir ve $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b$, $\overline{ba} = ab$ dir. Böylece H,

$$x_1 = a^2,\ x_2 = bab^{-1}a^{-1},\ x_3 = b^2,\ x_4 = aba^{-1}b^{-1},\ x_5 = ab^2a^{-1}$$

üreteç kümesi üzerinde serbesttir. □

Bu teorem aynı zamanda F'nin rankı ve indeks verildiğinde H'nın rankının hesaplanmasını sağlar. Özel olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

1.7.9. Sonuç. F rankı n olan bir serbest grup ve $|F : H| = k$ olsun. O zaman H, rankı $nk - k + 1$ olan bir serbest gruptur. □

Yukarıdaki örnekte F, rankı 2 olan bir serbest gruptur ve H'nın indeksi 4 tür. Bu nedenle H, rankı 2.4 - 4 + 1 = 5 olan bir serbest gruptur.

Nielsen-Schreier teoreminin bu ikinci ifadesi, Reidemeister-Schreier metodunun temelidir. Bu metot, temsili verilen bir G grubunun alt gruplarının temsillerini bulmanın bir yöntemidir. Burada özet bir tanım vereceğiz. Ayrıntılar ve tam tanım için Magnus ve ark.' na (1976) bakınız.

G, temsili $\langle a_1, \ldots, a_n;\ R_1, \ldots, R_k \rangle$ olan bir grup olsun. H, G'nin bir alt grubu ve T, G'nin H moduna göre bir Schreier sistemi olsun. G'nin üreteçleri üzerindeki kelimeler üzerinde τ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Eğer $e_i = \mp 1$ olmak üzere $W = a_{v_1}^{e_1} a_{v_2}^{e_2} \ldots a_{v_j}^{e_j}$ ise

$$\tau(W) = S_{t_1, a_{v_1}}^{e_1} S_{t_2, a_{v_2}}^{e_2} \ldots S_{t_j a_{v_j}}^{e_j}$$

dir. Burada eğer $e_i = 1$ ise t_i, W'nın a_{v_i}'den önce gelen parçasının yan cümle temsilcisidir ve eğer $e_i = -1$ ise t_i, W'nın $a_{v_i}^{-1}$'den önce gelen parçasının $a_{v_i}^{-1}$ de dahil olmak üzere yan cümle temsilcisidir. Bu dönüşüm Reidemeister yeniden yazma yöntemi olarak adlandırılır.

O halde Reidemeister- Schreier metodunu aşağıdaki şekilde verebiliriz: G, H ve T yukarıdaki gibi olsun. O zaman H,

$$\{\, S_{ta_v} : t \in T,\ a_v \in \{a_1, \ldots, a_n\},\ S_{ta_v} \neq 1 \,\}$$

kümesi ile üretilmiştir ve tanımlama bağıntılarının bir tam kümesi $\{\tau(tR_i t^{-1})\}$ dir. Burada $t \in T$ dir ve R_i, G'deki tüm bağıntılar üzerinde değer alır.

1.7.10. Örnek. $G = A_4$, 4 sembol üzerinde alterne grup olsun. G'nin bir temsili

$$G = A_4 = \langle a, b;\ a^2 = b^3 = (ab)^3 = 1 \rangle$$

dir. $H = A_4'$ komütatör alt grubu olsun. Yukarıdaki metotla H'nın bir temsilini bulalım.

$$G/H = A_4 / A_4' = \langle a, b;\ a^2 = b^3 = (ab)^3 = [a,b] = 1 \rangle = \langle b; b^3 = 1 \rangle$$

olup $|A_4 : A_4'| = 3$ tür. O zaman bir Schreier sistemi $\{1,\ b,\ b^2\}$ dir. A_4''nün üreteçleri

$$x_1 = S_{1_a} = a,\ \ x_2 = S_{ba} = bab^{-1},\ \ x_3 = S_{b^2a} = b^2ab$$

dir ve bağıntılar

(1) $\tau(aa) = S_{1a}S_{1a} = x_1^2$

(2) $\tau(baab^{-1}) = x_2^2$

(3) $\tau(b^2aab^{-2}) = x_3^2$

(4) $\tau(bbb) = 1$

(5) $\tau(bbbbb^{-1}) = 1$

(6) $\tau(b^2bbbb^{-2}) = 1$

(7) $\tau(ababab) = S_{1a}S_{ba}S_{b^2a} = x_1x_2x_3$

(8) $\tau(babababb^{-1}) = S_{ba}S_{b^2a}S_{1a} = x_2x_3x_1$

(9) $\tau(b^2abababb^{-2}) = S_{b^2a}S_{1a}S_{ba} = x_3x_1x_2$

olarak elde edilir. Gereksiz bağıntılar yok edilirse ve $x_3 = x_1x_2$ kullanılırsa A_4' için bir temsil olarak

$$\langle\ x_1, x_2 :\ x_1^2 = x_2^2 = (x_1x_2)^2 = 1\ \rangle$$

ifadesi elde edilir. □

1.8. Serbest Çarpımlar

Şekil ve özellikleri açısından serbest gruplara en yakın kavram, grupların serbest çarpımıdır. Burada çalışmamız için gerektiği kadarıyla Fine'dan (1989) serbest çarpımların genel özelliklerini vereceğiz.

$A = \langle a_1, \dots ; R_1, \dots \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots ; S_1, \dots \rangle$ iki grup olsun.

1.8.1. Tanım. A ve B gruplarının A * B ile gösterilen serbest çarpımı, temsili

$$\langle a_1, \dots , b_1, \dots ; R_1, \dots , S_1, \dots \rangle$$

olan G grubudur. Yani G'nin üreteçleri, A ve B'nin üreteçlerinin ayrık birleşiminden oluşur ve bağıntıları da A ve B'nin bağıntılarının ayrık birleşimi olarak alınmıştır. A ve B'ye G'nin çarpanları denir.

Serbest çarpım kavramı benzer şekilde keyfi sayıdaki gruplar için de elde edilebilir.

1.8.2. Tanım. Eğer $A_\alpha = \langle \text{ür}\, A_\alpha \; ; \text{bağ}\, A_\alpha \rangle, \alpha \in \lambda$ gruplarının bir kolleksiyonu ise bunların $G = {*}A_\alpha$ serbest çarpımı, üreteçleri A_α'ların üreteçlerinin ayrık birleşimlerinden oluşan ve bağıntıları A_α'ların bağıntılarının ayrık birleşimi olan gruptur.

Serbest çarpımlar mevcuttur ve aşikar değildir.

1.8.3. Teorem. G = A * B olsun. O zaman $A \to G$ ve $B \to G$ dönüşümleri bire bir dönüşümlerdir. G'nin {A'nın üreteçleri } kümesi ile üretilen alt grubunun temsili ⟨A'nın üreteçleri; A'nın bağıntıları⟩ dır, yani A'ya izomorfiktir. Benzer ifade B için de geçerlidir. Bu nedenle A ve B, G'nin alt grupları olarak göz önüne alınabilir. Özellikle de A ve B aşikar olmayan alt gruplar ise A * B de aşikar değildir. □

Çoğunlukla bir G grubunun bir serbest çarpım olarak ayrışıp ayrıştırılamayacağını belirlemek önemlidir. Basit bir yöntem, G için verilen bir temsilde G'nin üreteçlerini, bağıntılar da parçalanacak şekilde iki alt kümeye bölmeye çalışmaktır. Yani, G = ⟨R ∪ S; {sadece R'deki üreteçleri içeren bağıntılar} ∪ { sadece S'deki üreteçleri içeren bağıntılar }⟩ şekline yazmaya çalışmaktır. O zaman G,

$$G_1 = \langle R;\ R\text{'deki üreteçleri içeren bağıntılar} \rangle$$

ve

$$G_2 = \langle S;\ S\text{'deki üreteçleri içeren bağıntılar} \rangle$$

gruplarının serbest çarpımıdır.

1.8.4. Örnek. Modüler grup **M** = PSL(2, **Z**)'nin temsili

$$\langle a, t;\ a^2 = (at)^3 = 1 \rangle$$

dir. Burada a, $z \to -\dfrac{1}{z}$ ve t, $z \to z+1$ dönüşümüdür. x = a ve y = at alıp yerine yazarsak **M** = $\langle x, y;\ x^2 = y^3 = 1 \rangle$ elde ederiz. Böylece **M**, $\langle x;\ x^2 = 1 \rangle$ ve $\langle y;\ y^3 = 1 \rangle$ gruplarının serbest çarpımıdır. □

Bir serbest çarpımın her bir elemanının bir normal formu vardır. Eğer G = A * B ise G'de bir indirgenmiş dizi $g_1 g_2 \ldots g_n$ şeklindedir. Burada $g_i \neq 1$ dir. Her bir g_i ya A'dadır ya da B'dedir ve g_i, g_{i+1}'in her ikisi de aynı çarpanda değildir. O zaman aşağıdaki teoremi elde ederiz.

1.8.5. Teorem. Her bir $g \in G = A * B$ elemanının, indirgenmiş bir dizi olarak bir tek temsili vardır. n uzunluğu bir tektir ve hece uzunluğu olarak adlandırılır (n = 0, özdeşlik elemanını belirtmek içindir). □

1.8.6. Teorem. Bir serbest çarpımda sonlu mertebeli bir eleman, çarpanlardan birindeki sonlu mertebeli bir elemanın eşleniğidir. □

1.8.7. Sonuç. Serbest çarpımların sonlu alt grupları tam olarak çarpanların eşleniklerinde bulunurlar. □

Kurosh'un aşağıdaki teoremi, Nielsen-Schreier teoremini serbest çarpımlara genişletir.

1.8.8. Teorem (Kurosh). Bir serbest çarpımın bir alt grubu da bir serbest çarpımdır. Tam olarak, eğer G = A * B ve $H \subset G$ ise o zaman

$$H = F * (\underset{\alpha}{*} A_\alpha) * (\underset{\beta}{*} B_\beta)$$

olur. Burada F bir serbest grup, $(\underset{\alpha}{*} A_\alpha)$ A'nın alt gruplarının eşleniklerinin bir serbest çarpımı ve $(\underset{\beta}{*} B_\beta)$, B'nin alt gruplarının eşleniklerinin bir serbest çarpımıdır. □

Hemen belirtelim ki F'nin rankı ve diğer çarpanların sayısı hesaplanabilir. Ayrıntılar için Magnus ve ark.'na (1976) bakınız.

1.8.9. Teorem. Eğer $G = A * B$ ve $H \subset A$, $K \subset B$ ise H ve K ile üretilen alt grup bunların serbest çarpımıdır. Yani $\langle H, K\rangle = H * K$ dır. □

Şimdi $A = \langle a_1, \dots ; R_1, \dots \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots ; S_1, \dots \rangle$ iki grup, $H \subset A$ ve $K \subset B$ has alt gruplar ve $\Phi : H \to K$ bir izomorfizm olsun. O zaman aşağıdaki tanımı verebiliriz:

1.8.10. Tanım. A ve B'nin, H'yı K'ya birleştirerek elde edilen serbest çarpımı, temsili

$$G = \langle a_1, \dots , b_1, \dots ; R_1, \dots , S_1, \dots , H = \Phi(H)\rangle$$

olan G grubudur. G'nin üreteçleri A ve B'nin üreteçlerinin birleşimidir, bağıntıları ise A ve B'ninkiler ile birlikte alt grup izomorfizmini veren bağıntıların ek bir kümesinden oluşur.

H'yı izomorfik resmi ile özdeşlediğimiz için G, A ve B gruplarının H ile birleştirilmiş serbest çarpımıdır deriz ve $G = A *_H B$ ile gösteririz. A ve B gruplarına G'nin çarpanları denir.

Bir G grubu (aşikar olmayan) birleştirilmiş bir serbest çarpımdır eğer aşikar olmayan bir H has alt grubu ve her ikisi de aşikar olmayan G_1 ve G_2 grupları için $G = G_1 *_H G_2$ ise.

$H = \{1\}$ alırsak bir serbest çarpım elde ederiz. Bu nedenle serbest çarpımlar, birleştirilmiş serbest çarpımların sadece özel halleridir. Serbest çarpımlarda olduğu gibi çarpanlar G'ye bire bir olarak resmedilir ve arakesitleri (G'nin alt grupları olarak), birleştirilmiş alt grup H dır.

1.8.11. Teorem. $G = A *_H B$ olsun. O zaman $A \to G$ ve $B \to G$ dönüşümleri bire bir dönüşümlerdir. G'nin, A'nın üreteçleri ile üretilen alt grubunun temsili ⟨Üre. A; Bağ. A⟩ şeklindedir. Benzer durum B için de geçerlidir. Bu nedenle A ve B, G'nin alt grupları olarak göz önüne alınabilir ve $A \cap B = H$ dır. □

Teoremin ispatı, birleştirilmiş serbest çarpımın elemanları için bir normal form kavramına bağlıdır. $G = A *_H B$, $\{a_i\}$ A için H moduna göre sağ yan cümle temsilcilerinin bir kümesi ve $\{b_i\}$ B için H moduna göre sağ yan cümle temsilcilerinin bir kümesi olsun. O zaman $A *_H B$ 'de bir indirgenmiş dizi ya da normal form

$$a_{i1}b_{i1} \ldots a_{ij}b_{ij}h$$

şeklinde bir dizidir. Burada $h \in H$ ve $a_{i1}b_{i1} \ldots a_{ij}b_{ij}$, $A * B$ serbest çarpımında bir indirgenmiş kelimedir.

1.8.12. Teorem. Eğer $G = A *_H B$ ise her $g \in G$ elemanının, indirgenmiş bir dizi olarak bir tek temsili vardır. □

1.8.13. Teorem. $A *_H B$ 'nin sonlu mertebeli bir elemanı, çarpanlardan birindeki sonlu mertebeli bir elemanın eşleniğidir. Bu nedenle sonlu bir alt grup ya da daha genel olarak sınırlı bir alt grup tam olarak bir çarpanın bir eşleniğinde bulunur. □

2. PICARD GRUBUNUN FUCHSIAN ALT GRUPLARI

Bu bölümde öncelikle Picard grubunu ve Picard grubunun iyi bilinen bir Fuchsian alt grubu olan modüler grubu kısaca tanıtacağız. Daha sonra modüler grubun Picard grubundaki normalleştiricisini vereceğiz. Son olarak Picard grubunun maksimal Fuchsian alt grupları ile ilgili bazı sonuçlar vereceğiz.

Picard grubu $\mathbf{P} = PSL(2, \mathbf{Z}(i))$, a, b, c, d $\in \mathbf{Z}(i)$ olmak üzere

$$t(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1$$

şeklindeki doğrusal dönüşümlerin grubudur. Burada $\mathbf{Z}(i)$'nin bir elemanı, m, n$\in\mathbf{Z}$ olmak üzere m + in şeklindedir. $\mathbf{P}$, PSL(2,C)'nin $\mathbf{H}^3 = \{z + tj \in \mathbf{R}^3 : t > 0\}$ üzerinde süreksiz hareket eden ayrık bir alt grubudur (Beardon 1983). $\mathbf{P}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ üzerinde ayrıklığın süreksizliği gerektirmediğini gösteren önemli bir örnektir. $\mathbf{P}$ için $\mathbf{H}^3$'de bir temel bölge

$$R = \left\{u \in \mathbf{H}^3 : u = (x, y, t), -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{2}, x^2 + y^2 + t^2 \ge 1, t > 0\right\}$$

dir ve Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Bu temel bölgenin kenarları arasındaki eşlemeler yardımıyla $\mathbf{P}$'nin iyi bilinen bir temsilini elde ederiz (Brunner 1992):

$$\mathbf{P} = \left\{x, u, y, r; x^3 = u^2 = y^3 = r^2 = (xu)^2 = (xy)^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1\right\}$$

Burada $x(z) = \frac{i}{iz+1}, u(z) = -\frac{1}{z}, y(z) = \frac{z+1}{-z}$ ve $r(z) = \frac{i}{iz}$ dir. Picard grubu,

$$G_1 = \left\langle x, u, y; x^3 = u^2 = (xu)^2 = 1, x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1\right\rangle \cong S_3 *_{Z_3} A_4$$

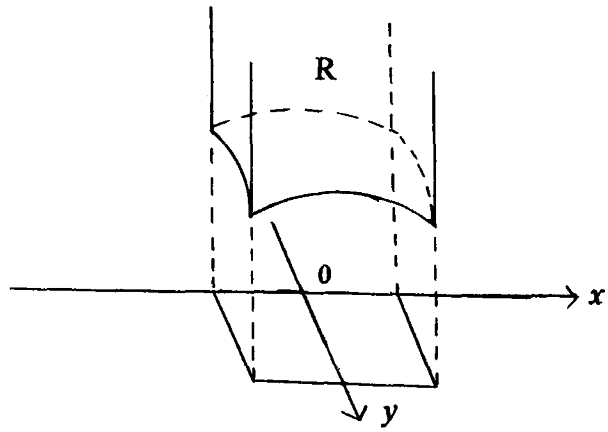
ve

$$G_2 = \left\langle u, y, r; u^2 = r^2 = (ru)^2 = 1, r^2 = y^3 = (ry)^2 = 1\right\rangle \cong S_3 *_{Z_2} D_2$$

olmak üzere G_1 ve G_2 gruplarının $\mathbf{M}$ = PSL(2, $\mathbf{Z}$) ile birleştirilmiş serbest çarpımıdır (Fine 1976), yani

$$\mathbf{P} = G_1 *_{\mathbf{M}} G_2$$

dir (S_3, üç sembol üzerinde simetrik grup; A_4, dört sembol üzerinde alternatif grup ve D_2, Klein'in 4-lü grubudur). Burada birleştirilmiş alt grup **M** = PSL(2, **Z**),



Şekil 2.1 Picard Grubunun Temel Bölgesi

modüler grup olarak bilinir ve belki de en iyi bilinen ayrık gruptur. Modüler grup, a,b,c,d ∈ **Z** olmak üzere

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1$$

şeklindeki tüm doğrusal dönüşümlerden oluşur. Rasyonel tamsayıların halkası **Z** ve Gaussian tamsayıların halkası **Z**(i) arasındaki sayı teorisi benzerlikleri nedeniyle **P** ve **M** arasında grup özellikleri açısından benzerlikler vardır. Bununla birlikte **C** kompleks düzlemi üzerindeki hareketleri farklıdır. **M**, üst yarı düzlemde süreksiz ve sabit çemberi reel eksen olan Fuchsian bir grup iken, **P** **C**'de hiçbir yerde süreksiz değildir. Modüler grup,

$$t(z) = z + 1 \text{ ve } u(z) = -\frac{1}{z}$$

olmak üzere u ve t dönüşümleri ile üretilmiştir. **M** için alışılmış F temel bölgesi

$$F = \left\{ z \in \mathbf{U} : -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, \ |z| \geq 1 \right\}$$

dir ve Şekil 2.2'de gösterilmiştir.

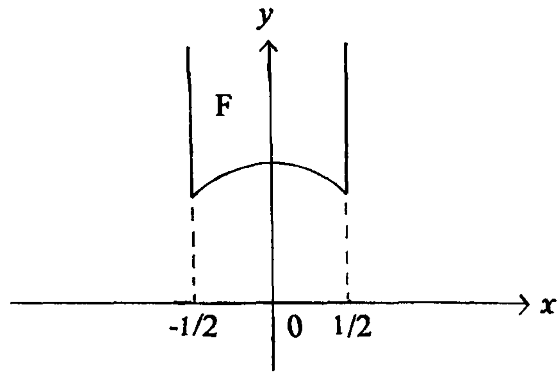
$w = ut : z \to \dfrac{-1}{z+1}$ dönüşümü göz önüne alınırsa, t = uw olduğundan u ve w dönüşümleri de **M**'yi üretir ve bunlar

$$u^2 = w^3 = 1$$

bağıntılarını gerçekler. Böylece **M**,

$$\mathbf{M} = \langle u, w; u^2 = w^3 = 1 \rangle$$

biçiminde bir gösterime sahiptir (Lehner 1964). Bu **M**'nin bir serbest çarpım



Şekil 2.2. Modüler Grubun Temel Bölgesi

olduğunu gösterir. Gerçekten,

$$G = \langle u; u^2 = 1 \rangle \cong C_2 \text{ ve } H = \langle w; w^3 = 1 \rangle \cong C_3$$

olarak alınırsa

$$\mathbf{M} = G * H \cong C_2 * C_3$$

olur. **M**'nin bir başka temsili de

$$\mathbf{M} = \langle u, y; u^2 = y^3 = 1 \rangle$$

ile verilir. Biz burada **M**'nin bu temsilini kullanacağız.

2.1. Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalleştiricisi

Modüler grup, Picard grubunun alt gruplarının incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle **M**, **P**'nin Fuchsian alt gruplarının sınıflandırılmasında kullanılmıştır (Fine 1987, 1989). Modüler grup **P**'de normal değildir. O zaman **M**'nin **P**'deki normalleştiricisinin ne olduğu sorusu karşımıza çıkar. Bu sorunun cevabına geçmeden önce aşağıdaki tanımı vermek yararlı olacaktır.

2.1.1. Tanım. G bir grup ve H, G'nin bir alt grubu olsun. Bu durumda H'nın G'deki normalleştiricisi $N_G(H)$ simgesiyle gösterilir ve

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

olarak tanımlanır. $N_G(H)$, G'nin H'yı normal alt grup olarak kapsayan maksimal alt grubudur.

Modüler grubun Picard grubundaki normalleştiricisini $N_P(\mathbf{M})$ ile gösterelim. Buna göre aşağıdaki teorem **M**'nin **P**'deki normalleştiricisinin yapısını belirtir.

2.1.2. Teorem. **M**'nin **P**'deki normalleştiricisi

$$N_P(\mathbf{M}) = G_2 \cong S_3 *_{Z_2} D_2$$

dir.

İspat. İşlem kolaylığı nedeniyle x, u, y ve r dönüşümlerinin aşağıdaki matris gösterimlerini kullanacağız:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ r = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$s\mathbf{M}s^{-1} \subset \mathbf{M}$ özelliğindeki $s \in \mathbf{P}$ dönüşümlerini arıyoruz. Çünkü bu, eşitliğin gösterilmesi için yeterli olacaktır. $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, **M**'nin herhangi bir elemanı olsun.

İlk olarak **P**'nin üreteçlerini göz önüne alalım. u ve y'nin **M**'yi ürettiğini biliyoruz. $xhx^{-1} \notin \mathbf{M}$ ve $rhr^{-1} \in \mathbf{M}$ olduğu basitçe görülür. Şimdi u, y ve r ile üretilen N kümesini göz önüne alalım. $r \equiv r$ özdeşlemesi ile

$$\begin{aligned} N &= \langle u, y, r;\ u^2 = y^3 = r^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1 \rangle \\ &= \langle u, r;\ u^2 = r^2 = (ru)^2 = 1 \rangle * \langle y, r;\ y^3 = r^2 = (ry)^2 = 1 \rangle \\ &= D_2 *_{Z_2} S_3 = G_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi $N = N_P(\mathbf{M})$ olduğunu göstereceğiz. $N \subset N_P(\mathbf{M})$ olduğu açıktır. Gerçekten de, $N = D_2 *_{Z_2} S_3$ olduğundan bir $n \in N$ elemanının

$$n = a_{i1}\, b_{i1} \ldots a_{ij}\, b_{ij}\, k$$

şeklinde bir normal formu olduğunu biliyoruz. O halde her $h \in \mathbf{M}$ için

$$\begin{aligned} nhn^{-1} &= (a_{i1}\, b_{i1} \ldots a_{ij}\, b_{ij}\, k)(h)(a_{i1}\, b_{i1} \ldots a_{ij}\, b_{ij}\, k)^{-1} \\ &= (a_{i1}\, b_{i1} \ldots a_{ij}\, b_{ij}\, k)h(k^{-1}\, b_{ij}^{-1}\, a_{ij}^{-1} \ldots b_{i1}^{-1}\, a_{i1}^{-1}) \end{aligned}$$

olup

$$nhn^{-1} = (a_{i1}\, b_{i1} \ldots a_{ij}\, b_{ij})\underbrace{(khk^{-1})}_{\in \mathbf{M}}(b_{ij}^{-1}\, a_{ij}^{-1} \ldots b_{i1}^{-1}\, a_{i1}^{-1})$$

şeklinde parantezleme yardımıyla $nhn^{-1} \in \mathbf{M}$ elde edilir. O halde $N_P(\mathbf{M}) \subset N$ olduğunu göstermek yetecektir.

$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N_P(\mathbf{M})$'nin herhangi bir elemanı olsun. Tanım gereğince $g\mathbf{M}g^{-1}=\mathbf{M}$ dir. Özellikle de u, y ve $t \in \mathbf{M}$ elemanları için $gug^{-1} \in \mathbf{M}$, $gyg^{-1} \in \mathbf{M}$ ve $gtg^{-1} \in \mathbf{M}$ dir. Burada t'nin $z \to z+1$ dönüşümü olduğunu hatırlayalım. O zaman

$$gug^{-1}=\begin{pmatrix} -ac-bd & a^2+b^2 \\ -c^2-d^2 & ac+bd \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$gyg^{-1}=\begin{pmatrix} ad-ac-bd & a^2-ab+b^2 \\ cd-c^2-d^2 & ac-bc+db \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

ve

$$gtg^{-1}=\begin{pmatrix} ad-ac-bc & a^2 \\ -c^2 & ac-bc+ad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-ac & a^2 \\ -c^2 & 1+ac \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

bulunur. gug^{-1}, gyg^{-1} ve $gtg^{-1} \in \mathbf{M}$ olduğundan (2.3)'den $a^2 \in \mathbf{Z}$, $c^2 \in \mathbf{Z}$ ve $ac \in \mathbf{Z}$ elde ederiz. (2.1)'den $a^2+b^2 \in \mathbf{Z}$ ve dolayısıyla $b^2 \in \mathbf{Z}$; $-c^2-d^2 \in \mathbf{Z}$, dolayısıyla $d^2 \in \mathbf{Z}$ ve $ac+bd \in \mathbf{Z}$, dolayısıyla $bd \in \mathbf{Z}$ elde ederiz. Benzer şekilde (2.2)'den $ad \in \mathbf{Z}$, $bc \in \mathbf{Z}$, $ab \in \mathbf{Z}$ ve $cd \in \mathbf{Z}$ elde ederiz. Eğer $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \mathbf{Z}$ ise o zaman a, b, c ve d katsayılarının hepsi ya rasyonel tamsayılardır ya da sırf sanal tamsayılardır. $ac \in \mathbf{Z}$ olduğundan a ve c aynı anda ya tamsayı ya da sırf sanal tamsayı olmalıdır. Benzer şekilde $ad \in \mathbf{Z}$ ve $bc \in \mathbf{Z}$ olduğundan a ile d ve b ile c aynı tipten olmalıdır. Sonuç olarak a, b, c, d katsayılarının hepsi ya tamsayı (ki bu durumda $g \in \mathbf{M}$ ve bu nedenle $g \in N$ olur) ya da sırf sanal tamsayı olmalıdır. Bu son halde $a', b', c', d' \in \mathbf{Z}$ olmak üzere g,

$$g=\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}; -a'd'+b'c'=1$$

şeklindedir. O zaman

$$s=\begin{pmatrix} b' & a' \\ d' & c' \end{pmatrix}; b'c'-a'd'=1$$

dönüşümü **M**'nin bir elemanıdır ve

$$g=sr=\begin{pmatrix} b' & a' \\ d' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}, -a'd'+b'c'=1$$

elde edilir. Yani g elemanı u, y ve r cinsinden yazılabilir. Bu nedenle g $\in$ N dir ve g, N_P(**M**)'nin keyfi bir elemanı olduğundan N = N_P(**M**) elde ederiz. □

N_P(**M**) **P**'nin, **M**'nin normal olduğu en geniş alt grubudur.

2.1.2. Sonuç. **M**'nin N_P(**M**)'deki indeksi 2 dir.

İspat. $N_P(\mathbf{M})/\mathbf{M} \cong \left\langle u, y, r;\ u = y = 1, u^2 = y^3 = r^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1 \right\rangle$

$$\cong \left\langle r;\ r^2 = 1 \right\rangle \cong C_2$$

olduğundan | N_P(**M**) : **M** | = 2 dir ve yan cümleler **M** ile **M**r dir. □

M'nin ve bu nedenle her alt grubunun Fuchsian olduğunu biliyoruz. N_P(**M**)'nin Fuchsian olup olmadığı sorusunun cevabını 2.2. bölümde vereceğiz.

2.2. P'nin Maksimal Fuchsian Alt grupları

Bu bölümde Harding'in (1985) elde ettiği bazı sonuçları kullanarak P'nin maksimal Fuchsian alt gruplarının 2. ve 3. mertebeden eliptik elemanlar bulundurabilmesi için gerek ve yeter koşullar elde edeceğiz. Önce Hermitian formlar ve **P**'nin maksimal Fuchsian alt grupları ile ilgili kısa bir özet vereceğiz (ayrıntılar için Harding (1985) ve Yılmaz'a (1996) bakınız).

Bir Fuchsian grup, PSL(2, **R**)'nin ayrık (ve bu nedenle süreksiz) bir alt grubudur ya da PSL(2, **R**)'nin ayrık bir alt grubunun PSL(2, **C**)'deki bir eşleniğidir. Reel eksen, verilen herhangi bir çember üzerine bir t $\in$ PSL(2, **C**) ile resmedilebildiğinden denk olarak bir Fuchsian grubu PSL(2, **C**)'nin, bir C çemberini sabit bırakan ve içini kendi üzerine resmeden süreksiz bir alt grubu olarak tanımlayabiliriz. C çemberine grubun sabit çemberi denir.

Eşleniklik altında izler korunduğundan Fuchsian bir grubun elemanlarının izlerinin reel olması gerektiği tanımdan açıktır. Bu nedenle eğer F bir Fuchsian grup ve t $\in$ F ise o zaman t hiperbolik, eliptik ya da paraboliktir. Eğer t hiperbolik ya da parabolik ise sabit noktaları C'nin üzerinde bulunacaklardır. Eğer t eliptik ise sabit noktaları C'ye göre invers olacaklardır. Üstelik t eliptik ise sonlu mertebeli olmalıdır, aksi halde F ayrık grup olmaz (Fine 1989).

C, kompleks düzlemde a, b_1, b_2, c $\in$ **Z** ve $b_1^2 + b_2^2 - ac > 0$ olmak üzere

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c = 0$$

çemberi olsun. Ω, bu şekildeki C çemberlerinin oluşturduğu küme olmak üzere **P**, Ω kümesi üzerinde hareket eder. Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz.

2.2.1. Tanım. **P**'nin bir C çemberini sabit bırakan ve içini kendi üzerine resmeden bir alt grubuna Fuchsian'dır denir.

Her Fuchsian alt grubun, Ω'nın bir çemberine karşılık geldiğini ve tersine Ω'nın her bir çemberine karşılık gelen bir Fuchsian alt grubun var olduğunu Fricke ve Klein'den (1965) biliyoruz.

2.2.2. Tanım. **(1)** Bir Hermitian form, $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c$ ikinci dereceden formudur. Burada a, c $\in$ **Z** ve b $\in$ **Z**(i) dir.

Eğer $z = x + iy$, $b = b_1 + ib_2$ yazarsak

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c$$

elde ederiz. Bu formu kısaca (a, b_1, b_2, c) şeklinde göstereceğiz.

(2) Bir (a, b_1, b_2, c) Hermitian formunun determinantı $D = b_1^2 + b_2^2 - ac$ dir.

Eğer $D > 0$ ise $a \neq 0$ olmak üzere (a, b_1, b_2, c) formu (bu form sıfıra eşitlenirse) **C**'de $\frac{-b_1 + ib_2}{a}$ merkezli ve $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ yarıçaplı bir çember temsil eder.

Eğer $a = 0$ ise böyle bir form bir düz doğru ($\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$'da çember) temsil eder.

2.2.3. Tanım. **(1)** Eğer **P** grubunun bir dönüşümü, bir formu diğerine resmedecek şekilde varsa bu iki forma denktirler denir.

(2) Eğer e.b.o.b.$(a, b_1, b_2, c) = 1$ ise (a, b_1, b_2, c) formuna ilkel form denir.

Denk formların determinantı aynıdır. Verilen bir D determinantı için ilkel formların (en çok) dört denklik sınıfı vardır. Bunlar aşağıdaki tiplerdir:

I) (tek ya da çift, tek ya da çift, tek ya da çift, tek ya da çift)
Bu halde a ile c aynı anda çift olamaz.

II) (çift, tek, tek, çift)

III) (çift, tek, çift, çift)

IV) (çift, çift, tek, çift).

2.2.4. Tanım. (1, 0, 0, -D) formuna, $D > 0$ determinantının temel formu denir. Bir temel form orijin merkezli ve $\sqrt{D}$ yarıçaplı bir çemberdir.

2.2.5. Tanım. Bir $C = (a, b_1, b_2, c)$ formunun $\Phi(C)$ form grubu (ya da sadece grubu), **P**'de C'yi sabit bırakan tüm dönüşümlerin oluşturduğu alt gruptur.

Burada C çemberi sabit bırakılmıştır ve içi kendi üzerine resmedilmiştir. Böylece bir formun grubu, **P**'nin bir maksimal Fuchsian alt grubudur. **P**'nin maksimal Fuchsian alt gruplarının eşleniklik sınıfları, ilkel formların denklik sınıfları ile 1-1, örten eşlenmiştir.

2.2.6. Teorem. Bir D determinantı verilsin.

Eğer $D \equiv 0 \mod 4$ ise o zaman ilkel formların sadece bir denklik sınıfı vardır ve I. tiptendir.

Eğer $D \equiv 1 \mod 4$ ise I., III. ve IV. tipten üç sınıf vardır.

Eğer $D \equiv 2 \mod 4$ ise I., ve II. tipten iki sınıf vardır.

Eğer $D \equiv 3 \mod 4$ ise I. tipten sadece bir sınıf vardır.

İspat. İspat metodunu hatırlatmak açısından ispatı kısaca özetleyeceğiz. Tüm D determinantları için bir temel form var olduğundan I. tipten bir sınıf daima mevcuttur. O halde a ve c'nin her ikisinin de çift olduğunu varsayalım ve $D \equiv b_1^2 + b_2^2 \mod 4$ determinantını göz önüne alalım.

Eğer $D \equiv 0 \mod 4$ ise $b_1^2 + b_2^2 \equiv 0 \mod 4$ olur. O halde b_1 ve b_2'nin her ikisi de çift olmalıdır ki bu durumda form ilkel olamaz. Yani bu halde sadece I. tipten bir sınıf vardır.

Eğer $D \equiv 1 \mod 4$ ise $b_1^2 + b_2^2 \equiv 1 \mod 4$ olup b_1 tek, b_2 çift ya da b_1 çift, b_2 tek olmalıdır. Bu nedenle I., III. ve IV. tipten üç sınıf vardır.

Diğerleri benzer şekilde görülür (Harding 1985). □

Şimdi çalışmalarımıza esas olacak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

2.2.7. Teorem. C bir ilkel form olsun. Bunun form grubu $\Phi(C)$, aşağıdaki elemanları bulundurur:

(a) Eğer C,

(i) $(a, 0, 0, c)$

(ii) $(a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$ a çift

(iii) $(a, 0, \frac{1}{2}a, c)$ a çift

(iv) $(a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, c)$ a çift

formlarından herhangi birine denk ise 2. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur.

(b) Eğer C,

(i) $(a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$ a çift

(ii) $(a, b_1, -\frac{1}{2}a, a)$ a çift

formlarının herhangi birine denk ise 3. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur.

(c) Eğer C'nin determinantı $D = dD_0^2$ şeklinde ise parabolik elemanlar bulundurur. Burada d, kare olmayan bir sayıdır ve $p \equiv 3 \bmod 4$ asal çarpanı yoktur (Harding 1985). □

Şimdi $t \in \mathbf{P}$ eliptik bir eleman olsun. $|\lambda| = 1$ olmak üzere t'nin PSL(2, C)'de $z \to \lambda z$ dönüşümüne eşlenik olduğunu biliyoruz. Fakat Picard grubu ile ilgili çalışmalarda (özellikle Fuchsian alt grupların incelenmesinde) eliptik elemanların **P**'deki eşleniklik sınıflarının bilinmesi önem taşımaktadır. Fine (1976), **P**'nin genelleştirilmiş serbest çarpım olduğunu göstererek bunu Fuchsian alt grupları karakterize etmek için kullanmıştır. Bunun için de eliptik elemanların **P**'deki eşleniklik sınıflarını bulmuştur. Fine (1976), 2. mertebeden eliptik elemanların 5 ve 3. mertebeden eliptik elemanların 2 eşleniklik sınıfını bulmuştur. Harding (1985), 2. mertebeden eliptik elemanların eşleniklik sınıflarının 4'e indirgenebileceğini belirterek bu sonuçları **P**'nin maksimal Fuchsian alt gruplarının incelenmesinde kullanmıştır.

Burada önce 3. mertebeden eliptik elemanların eşleniklik sınıflarının sayısının 1'e indirgenebileceğini belirterek Harding'in (1985) elde etmiş olduğu sonuçlara bağlı olarak yeni sonuçlar elde edeceğiz. Eşleniklik sınıflarının azalması nedeniyle hem Fine'da (1976) hem de Harding'de (1985) elde edilen sonuçlar daha sade bir hale geldiği gibi aynı zamanda işlem kısalığı da sağlanmaktadır.

Picard grubunun modüler grup ile birleştirilmiş serbest çarpım yapısı nedeniyle sonlu mertebeli bir eliptik eleman ya 2. mertebeden ya da 3. mertebeden olacaktır. Aynı zamanda **P** süreksiz bir grup olduğundan sonsuz mertebeli eliptik eleman bulundurmayacaktır (Lehner 1964). Bu ifadeler basit işlemler yardımıyla da kolayca görülebilir. Fine (1976), 2. mertebeden eliptik elemanların eşleniklik sınıflarının temsilcilerini

$$z \to -z, z \to \frac{1}{z}, z \to -z+1, z \to -z+i, z \to -z+1+i$$

olarak bulmuştur. Harding (1985), ispatsız olarak bunların

$$z \to -z, z \to -z+1, z \to -z+i, z \to -z+1+i$$

ye indirgenebileceğini belirtmiştir. Gerçekten $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen dönüşüm yardımıyla $z \to \frac{1}{z}$ ve $z \to -z+1$ temsilcileri eşlenik olmaktadır. Böylece 2. mertebeden eliptik elemanların **P**'de tam olarak 4 eşleniklik sınıfı vardır.

Diğer yandan Fine (1976), 3. mertebeden eliptik elemanların eşleniklik sınıflarının temsilcilerini

$$z \to -\frac{1}{z+1} \text{ ve } z \to \frac{1}{z+i}$$

olarak bulmuştur. Fakat $\begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 1-i \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen dönüşüm yardımıyla $z \to -\frac{1}{z+1}$ ve $z \to \frac{1}{z+i}$ temsilcileri eşlenik olmaktadırlar. O halde 3. mertebeden eliptik elemanların **P**'de tam olarak 1 eşleniklik sınıfı vardır. Böylece Fine'daki (1976) Teorem 2'yi aşağıdaki şekilde yeniden ifade edebiliriz:

2.2.8. Teorem. **P**'de eliptik elemanların, 2. mertebeden dört ve 3. mertebeden bir olmak üzere sadece beş eşleniklik sınıfı vardır. Özellikle 2. mertebeden herhangi bir eliptik eleman

$$z \to -z,\ z \to -z+1,\ z \to -z+i,\ z \to -z+1+i$$

dönüşümlerinden birine eşleniktir. 3. mertebeden herhangi bir eliptik eleman $z \to -\frac{1}{z+1}$ dönüşümüne eşleniktir. □

İlk olarak 3. mertebeden eliptik elemanların eşleniklik sınıflarının sayısı 1'e indiği için Teorem 2.2.7'nin (b) kısmını aşağıdaki gibi yeniden ifade edeceğiz ve Teorem 2.2.7'yi çift yönlü olarak yeniden ispatlayacağız.

2.2.9. Teorem. C bir ilkel form olsun.

(a) $\Phi(C)$ form grubu sırasıyla $u_1 : z \rightarrow -z$, $u_2 : z \rightarrow -z+1$, $u_3 : z \rightarrow -z+i$ ve $u_4 : z \rightarrow -z+1+i$'ye eşlenik olan 2. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur ancak ve ancak C, sırasıyla aşağıdaki formlardan birine denktir:

(v) $(a, 0, 0, c)$

(vi) $(a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$ a çift

(vii) $(a, 0, \frac{1}{2}a, c)$ a çift

(viii) $(a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, c)$ a çift.

(b) $\Phi(C)$ 3. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur ancak ve ancak C, $(a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$ (a çift) şeklinde bir forma denktir.

(c) $\Phi(C)$ parabolik elemanlar bulundurur ancak ve ancak C'nin determinantı $D = dD_0^2$ şeklinde ise. Burada d, kare olmayan bir sayıdır ve $p \equiv 3 \bmod 4$ asal çarpanı yoktur.

İspat. (a) P'de 2. mertebeden herhangi bir eliptik elemanın aşağıdaki dönüşümlerden birine eşlenik olduğunu biliyoruz:

$u_1 : z \rightarrow -z$, $u_2 : z \rightarrow -z+1$, $u_3 : z \rightarrow -z+i$ ve $u_4 : z \rightarrow -z+1+i$.

C', $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c$ formu olsun. $u_1 : z \rightarrow -z$ dönüşümü C''yü

$$a(-z)(-\bar{z}) + b(-z) + \bar{b}(-\bar{z}) + c = az\bar{z} - bz - \bar{b}\bar{z} + c$$

formuna resmeder. Eğer $b = -b$ ise bu resim formu C''nün kendisidir. Böylece bir a, c için $C' = (a, 0, 0, c)$'ye denk olan bir formun grubunda en az bir tane $u_1 : z \rightarrow -z$'ye eşlenik olan 2. mertebeden eleman bulunacaktır. Gerçekten, eğer C ilkel formu C''ye denk ise tanım gereğince $g(C) = C'$ olacak şekilde bir $g \in \mathbf{P}$ vardır. Şimdi $g^{-1}u_1g$ elemanını göz önüne alalım. $g^{-1}u_1g(C) = C$ olduğundan $g^{-1}u_1g \in \Phi(C)$ elde ederiz. $g^{-1}u_1g$ elemanının 2. mertebeden olduğu açıktır. Bu nedenle $\Phi(C)$, $u_1 : z \rightarrow -z$'ye eşlenik olan 2. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur.

$u_2 : z \rightarrow -z+1$ dönüşümü C''yü

$$a(-z+1)(-\bar{z}+1) + b(-z+1) + \bar{b}(-\bar{z}+1) + c$$
$$= az\bar{z} + (-a-b)z + (-a-\bar{b})\bar{z} + a + b + \bar{b} + c$$

formuna resmeder. Eğer $b = -a - \bar{b}$ ve $a + b + \bar{b} + c = c$ ise bu resim formu C''nün kendisidir. Buradan, $b = b_1 + ib_2$ olmak üzere $2b_1 = -a$ ve $b_2 = 0$ elde ederiz. Böylece bir a (çift) ve bir c için $C' = (a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$'ye denk olan bir formun grubunda en az bir tane $u_2 : z \to -z + 1$'e eşlenik olan 2. mertebeden eleman bulunacaktır. Bu form, c'nin tek ya da çift oluşuna göre I. ya da III. tipten olacaktır.

Benzer şekilde, bir a (çift) ve bir c için $C' = (a, 0, \frac{1}{2}a, c)$'ye denk olan bir formun grubunda en az bir tane $u_3 : z \to -z + i$'ye eşlenik olan 2. mertebeden eleman bulunacaktır. Bu form, c'nin tek ya da çift oluşuna göre I. ya da IV. tipten olacaktır.

Benzer şekilde, bir a (çift) ve bir c için $C' = (a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a, c)$'ye denk olan bir formun grubunda en az bir tane $u_4 : z \to -z + 1 + i$'ye eşlenik olan 2. mertebeden eleman bulunacaktır. Bu form, c'nin tek ya da çift oluşuna göre I. ya da II. tipten olacaktır.

Tersine, $\Phi(C)$'nin $u_2 : z \to -z + 1$'e eşlenik olan 2. mertebeden bir eliptik eleman (buna a diyelim) bulundurduğunu varsayalım. a, **P**'de u_2'ye eşlenik olduğundan tanım gereğince $bab^{-1} = u_2$ olacak şekilde bir $b \in$ **P** vardır. Şimdi $C' = b(C)$ çemberini göz önüne alalım. $u_2(C') = bab^{-1}(C') = C'$ olduğundan $u_2 \in \Phi(C')$ elde ederiz. Bu nedenle, az önce gördük ki eğer $u_2 \in \Phi(C')$ ise C', $(a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$ (a çift) şeklindedir. $b(C) = C'$ olduğundan tanım gereğince C, $C' = (a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$'ye denktir.

Diğerleri benzer şekilde görülür.

(b) C', $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c$ formu olsun. **P**'de 3. mertebeden herhangi bir eliptik elemanın $v : z \to \frac{-1}{z+1}$ dönüşümüne eşlenik olduğunu söylemiştik. $z \to \frac{-1}{z+1}$ dönüşümü C''yü

$$a\left(\frac{-1-z}{z}\right)\left(\frac{-1-\bar{z}}{\bar{z}}\right)+b\frac{-1-z}{z}+\bar{b}\frac{-1-\bar{z}}{\bar{z}}+c$$

$$= a(1+z)(1+\bar{z})-b(1+z)\bar{z}-\bar{b}(1+\bar{z})z+cz\bar{z}$$

$$= (a-b-\bar{b}+c)z\bar{z}+(a-\bar{b})z+(a-b)\bar{z}+a$$

formuna resmeder. Bu resim formunun C' 'nün kendisine eşit olabilmesi için a = c ve $b = -a-\bar{b}$ olmalıdır. Buradan, $b = b_1 + ib_2$ olmak üzere a = c ve $2b_1$ = a elde edilir. Böylece $v \in \Phi(C')$ olabilmesi için C', bir a (çift) ve bir b için $C' = (a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$ şeklinde olmalıdır. Bu form, a, $\frac{1}{2}a$ ve b_2'nin tek ya da çift oluşuna göre II., III. ya da IV. tipten olacaktır. O halde bir a (çift) ve bir b için $C' = (a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$'ya denk olan bir formun grubunda en az bir tane $v : z \to \frac{-1}{z+1}$'e eşlenik olan 3. mertebeden eleman bulunacaktır. Gerçekten, eğer C ilkel formu C' 'ye denk ise tanım gereğince $g(C) = C'$ olacak şekilde bir $g \in \mathbf{P}$ vardır. Şimdi $g^{-1}vg$ elemanını göz önüne alalım. $g^{-1}vg(C) = C$ olduğundan $g^{-1}vg \in \Phi(C)$ dir. $g^{-1}vg$ elemanının 3. mertebeden olduğu açıktır. Bu nedenle $\Phi(C)$, 3. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur.

Tersine, $\Phi(C)$'nin 3. mertebeden bir eliptik eleman (buna a diyelim) bulundurduğunu varsayalım. **P**'de 3. mertebeden herhangi bir eliptik eleman $v : z \to \frac{-1}{z+1}$'e eşlenik olduğundan a v'ye eşleniktir. Bu durumda tanım gereğince $bab^{-1} = v$ olacak şekilde bir $b \in \mathbf{P}$ vardır. Şimdi $C' = b(C)$ çemberini göz önüne alalım. $v(C') = bab^{-1}(C') = C'$ olduğundan $v \in \Phi(C')$ elde ederiz. Bu nedenle, az önce gördük ki eğer $v \in \Phi(C')$ ise C', $(a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$ (a çift) şeklindedir. $b(C) = C'$ olduğundan tanım gereğince C, $C' = (a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$'ya (a çift) denktir.

(c) Benzer şekilde görülür. □

O zaman Harding'de de (1985) belirtildiği gibi aşağıdaki sonucu elde ederiz:

2.2.10. Sonuç. (i) I. tipten herhangi bir ilkel formun grubunda 3. mertebeden eliptik elemanlar bulunmaz.

(ii) Herhangi bir ilkel formun grubu 2. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur.

İspat. Bir D determinantı verilmiş olsun.

(i) I. tipten determinantı D olan ilkel formlar için bir temsilci olarak

$$C_1 = (1, 0, 0, -D)$$

temel formunu alabiliriz. Bu nedenle Teorem 2.2.9(b) gereğince böyle bir formun grubu 3. mertebeden eliptik elemanlar bulunduramaz.

(ii) Her D için I. tipten bir sınıf daima vardır ve bu sınıfın temsilcisi olarak $C_1 = (1, 0, 0, -D)$'yi alabiliriz. Bu nedenle Teorem 2.2.9(a)(i) gereğince tüm I. tipten formların grupları 2. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur.

$D \equiv 0, 3 \bmod 4$ için sadece I. tipten bir sınıf vardır.

$D \equiv 1 \bmod 4$ iken III. tipten determinantı D olan formlar için

$$C_3\text{: } 2z\bar{z} - z + -\bar{z} - \left(\frac{D-1}{2}\right) = 0$$

temsilcisini ve IV. tipten determinantı D olan formlar için

$$C_4\text{: } 2z\bar{z} + iz - i\bar{z} - \left(\frac{D-1}{2}\right) = 0$$

temsilcisini alabiliriz. Bu nedenle Teorem 2.2.9(a)(ii) ve (iii) gereğince tüm III. ve IV. tipten formların grupları 2. mertebeden eliptik elemanlar bulundurur.

$D \equiv 2 \bmod 4$ iken II. tipten determinantı D olan formlar için

$$C_2\text{: } 2z\bar{z} + (-1+i)z + (-1-i)\bar{z} - \left(\frac{D-2}{2}\right) = 0$$

temsilcisini alabiliriz. Bu durumda da Teorem 2.2.9(a)(iv) gereğince tüm ikinci tipten formların grupları 2. mertebeden eliptik elemanlar bulunduracaktır. □

Teorem 2.2.7(b)'deki bu kısaltmanın bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz:

2.2.11. Sonuç.

(i) $(a, -\frac{1}{2}a, 0, c)$ ve $(a, \frac{1}{2}a, b_2, a)$ (a çift)'ya denk olan III. tipten bir formun grubunda $z \to -z+1$'e eşlenik olan en az bir tane 2. mertebeden eliptik eleman ve 3. mertebeden en az bir eliptik eleman bulunacaktır.

(ii) (a, 0, $\frac{1}{2}$a, c) ve (a, $\frac{1}{2}$a, b_2, a) (a çift)'ya denk olan IV. tipten bir formun grubunda $z \to -z+i$'ye eşlenik olan en az bir tane 2. mertebeden eliptik eleman ve en az bir tane 3. mertebeden eliptik eleman bulunacaktır.

(iii) (a, $-\frac{1}{2}$a, $\frac{1}{2}$a, c) ve (a, $\frac{1}{2}$a, b_2, a) (a çift)'ya denk olan II. tipten bir formun grubunda $z \to -z+1+i$'ye eşlenik olan en az bir tane 2. mertebeden eliptik eleman ve en az bir tane 3. mertebeden eliptik eleman bulunacaktır. □

Sonuç olarak, I. tipten bir formun grubu 3. mertebeden eliptik elemanlar bulundurmayacaktır. O halde hangi D'ler için II., III. ve IV. tipten formların gruplarında 3. mertebeden eliptik eleman bulunacağı sorusu karşımıza çıkar. Aşağıdaki teoremlerle bu sorunun cevabını vermeye çalışacağız.

2.2.12. Teorem. Sabit bir D determinantı verilmiş olsun. Determinantı D olan II., III. ya da IV. tipten ilkel bir formun grubu 3. mertebeden eliptik elemanlar bulunduruyorsa D + $3n^2$ tam kare olacak şekilde bir n ∈ **Z** vardır.

İspat. C, II., III. ya da IV. tipten determinantı D olan herhangi bir ilkel form olsun. Φ(C) 3. mertebeden eliptik elemanlar bulunduruyorsa C, (a, $\frac{1}{2}$a, b_2, a) (a çift) şeklinde bir forma denktir. Denk formların determinantları aynı olduğundan $D = \frac{a^2}{4} + b_2^2 - a^2$ yazabiliriz ve buradan $b_2^2 = D + 3\frac{a^2}{4}$ buluruz. a çift olduğundan a = 2n, n ∈ **Z** yazabiliriz. O halde $b_2^2 = D + 3n^2$ ve $b_2 = \sqrt{D+3n^2}$ bulunur. $b_2 \in$ **Z** olduğundan D + $3n^2$ tam kare olmalıdır. □

Eğer D + $3n^2$ = x^2 ise (2n, n, x, 2n) formu, n ve x'in tek ya da çift olmasına bağlı olarak II., III. ya da IV. tipten determinantı D olan bir formdur. Eğer (n, x) = 1 ise (2n, n, x, 2n) formu ilkel olacaktır.

Bu teoremin tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin D = 9 için 9 + $3.(3)^2$ = 36 olup buna karşılık elde edilen (6, 3, 6, 6) formu ilkel değildir. Ancak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

2.2.13. Teorem. Determinantı D olan ilkel bir C formu verilmiş olsun.

(1) D ≡ 1 mod 4 olsun.

(i) C, III. tipten olsun. D + 3 bir tam kare ise Φ(C), hem $z \to -z+1$'e eşlenik olan 2. mertebeden eliptik bir eleman hem de 3. mertebeden bir eliptik eleman bulundurur.

(ii) C, IV. tipten olsun. D + 3 bir tam kare ise Φ(C), hem $z \to -z+i$'ye eşlenik olan 2. mertebeden eliptik bir eleman hem de 3. mertebeden bir eliptik eleman bulundurur.

(2) D ≡ 2 mod 4 olsun.

C, II. tipten olsun. D + 3 bir tam kare ise Φ(C) hem $z \to -z+1+i$'ye eşlenik olan 2. mertebeden bir eliptik eleman hem de 3. mertebeden bir eliptik eleman bulundurur.

İspat. (1) D ≡ 1 mod 4 olsun.

(i) C, III. tipten ve D + 3 tam kare olsun. III. tipten determinantı D olan formlar için C_3 : $2z\bar{z}-z-\bar{z}-(\frac{D-1}{2})=0$ temsilcisini alabileceğimizi ve Φ(C)'nin 2. mertebeden $z \to -z+1$'e eşlenik olan bir eleman bulundurduğunu biliyoruz. Şimdi

$$C_3' : 2z\bar{z}+\left(1+\sqrt{D+3}i\right)z+\left(1-\sqrt{D+3}i\right)\bar{z}+2=0$$

formunu göz önüne alalım. D ≡ 1 mod 4 olduğundan D + 3 ≡ 0 mod 4 olup D + 3 ve dolayısıyla $\sqrt{D+3}$ çifttir. O halde C_3', III. tipten determinantı 1 + D + 3 – 4 = D olan bir başka ilkel formdur. $h: z \to z-1+\frac{\sqrt{D+3}}{2}i$ dönüşümü C_3'ü C_3''ne resmeder. $\sqrt{D+3}$ çift olduğundan $\frac{\sqrt{D+3}}{2} \in \mathbf{Z}$ dir ve dolayısıyla $h \in \mathbf{P}$ dir. Böylece C_3 ve C_3' **P**'de denk olurlar. O zaman Teorem 2.2.9(b) gereğince Φ(C_3) 3. mertebeden bir eliptik eleman bulunduracaktır.

Sonuç olarak C, hem C_3'e hem de C_3''ne denk olacağından Φ(C) hem $z \to -z+1$'e eşlenik olan 2. mertebeden bir eliptik eleman hem de 3. mertebeden bir eliptik eleman bulunduracaktır.

(ii) C, IV. tipten ve D + 3 tam kare olsun. Yine IV. tipten determinantı D olan formlar için C_4: $2z\bar{z}+iz-i\bar{z}-(\frac{D-1}{2})=0$ temsilcisini alabileceğimizi ve

Φ(C)'nin 2. mertebeden $z \to -z+i$'ye eşlenik olan bir eleman bulundurduğunu biliyoruz. Şimdi

$$C_4': \left(4-2\sqrt{D+3}, 2-\sqrt{D+3}, 2\sqrt{D+3}-3, 4-2\sqrt{D+3}\right)$$

formunu göz önüne alalım. Yine D ≡ 1 mod 4 olduğundan D + 3 ≡ 0 mod 4 ve dolayısıyla $\sqrt{D+3}$ çift olur. Yani C_4', IV. tipten determinantı D olan bir başka ilkel formdur. $\begin{pmatrix} 1-i & -i-\frac{(1-i)\sqrt{D+3}}{2} \\ i & 1+i-\frac{\sqrt{D+3}}{2}i \end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen h dönüşümü C_4'ü C_4''ne resmeder. Yine $h \in \mathbf{P}$ olduğu açıktır. Böylece C_4 ve C_4' **P**'de denktirler. Teorem 2.2.9(b) gereğince $\Phi(C_4)$ 3. mertebeden bir eliptik eleman bulunduracaktır.

Sonuç olarak C, hem C_4'e hem de C_4''ne denk olacağından Φ(C) hem $z \to -z+i$'ye eşlenik olan 2. mertebeden bir eliptik eleman hem de 3. mertebeden bir eliptik eleman bulunduracaktır.

(2) D ≡ 2 mod 4 olsun.

C, II. tipten ve D + 3 tam kare olsun. II. tipten determinantı D olan formlar için C_2 : $2z\bar{z}+(-1+i)z+(-1-i)\bar{z}-(\frac{D-2}{2})=0$ temsilcisini alabiliriz. Yine

$$C_2': 2z\bar{z}+\left(1+\sqrt{D+3}i\right)z+\left(1-\sqrt{D+3}i\right)\bar{z}+2=0$$

formunu göz önüne alırsak D ≡ 2 mod 4 olduğundan D + 3 ≡ 1 mod 4 olup D + 3 tektir. Dolayısıyla $\sqrt{D+3}$ de tek olup C_2', II. tipten determinantı D olan bir başka ilkel formdur. $h: z \to z-1+\frac{(\sqrt{D+3}-1)}{2}i$ dönüşümü C_2'yi C_2''ne resmeder. $\sqrt{D+3}$ tek olduğundan $\sqrt{D+3}$ -1 çift ve $\frac{\sqrt{D+3}-1}{2} \in \mathbf{Z}$ dir. Yani $h \in \mathbf{P}$ ve C_2 ile C_2' **P**'de denktirler. Yine Teorem 2.2.9(b) gereğince $\Phi(C_2)$ 3. mertebeden bir eliptik eleman bulunduracaktır.

Sonuç olarak C, hem C_2'ye hem de C_2''ne denk olacağından $\Phi(C)$ hem $z \to -z+1+i$'ye eşlenik olan 2. mertebeden bir eliptik eleman hem de 3. mertebeden bir eliptik eleman bulunduracaktır. □

Şimdi D + 3 tam kare olacak şekildeki D'leri belirlemeye çalışalım.

(1) $D \equiv 1 \bmod 4$ ve $D + 3 = x^2$ olsun. $D = 4k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$ şeklinde yazılabilir.

$$x^2 = D + 3 = 4k + 1 + 3 = 4k + 4$$

olup x^2 çift sayı ve dolayısıyla x çift sayıdır. Şimdi $x = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$ olsun.

$$x^2 = 4n^2 = 4n^2 - 3 + 3$$

olup $D = 4n^2 - 3$ alabiliriz. $D = 4(n^2 - 1) + 1 \equiv 1 \bmod 4$ olduğuna dikkat ediniz. Böylece, $D > 0$ olduğundan $D + 3 = x^2$ özelliğindeki $D \equiv 1 \bmod 4$ sayıları

$$D = 4n^2 - 3;\ n \geq 1$$

şeklindedir. Aşağıda Tablo 2.1'de bu özellikteki bazı D sayıları ve karşılık gelen III. ve IV. tipten temsilci formlar verilmiştir.

$D \equiv 1 \bmod 4$	III. Tipten Temsilci Form	IV. Tipten Temsilci Form
1	(2, 1, 2, 2)	(2, 2, -1, 2)
13	(2, 1, 4, 2)	(2, 4, -1, 2)
33	(2, 1, 6, 2)	(2, 6, -1, 2)
61	(2, 1, 8, 2)	(2, 8, -1, 2)
97	(2, 1, 10, 2)	(2, 10, -1, 2)
141	(2, 1, 12, 2)	(2, 12, -1, 2)
193	(2, 1, 14, 2)	(2, 14, -1, 2)
253	(2, 1, 16, 2)	(2, 16, -1, 2)
321	(2, 1, 18, 2)	(2, 18, -1, 2)

Tablo 2.1

(2) $D \equiv 2 \bmod 4$ ve $D + 3 = x^2$ olsun. $D = 4k + 2$, $k \in \mathbf{Z}$ şeklinde yazılabilir.

$$x^2 = D + 3 = 4k + 2 + 3 = 4k + 5 = 4(k + 1) + 1$$

olup x^2 tek sayı ve dolayısıyla x tek sayıdır. Şimdi $x = 2n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$ alalım.

$$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n^2 + 4n - 2 + 3$$

olup $D = 4n^2 + 4n - 2$ alabiliriz. Yine $D = 4(n^2 + n - 1) + 2 \equiv 2 \bmod 4$ olduğuna dikkat ediniz. Böylece $D > 0$ olduğundan $D + 3 = x^2$ özelliğindeki $D \equiv 2 \bmod 4$ sayıları

$$D = 4n^2 + 4n - 2;\ n \geq 1$$

şeklindedir. Aşağıda Tablo 2.2'de bu özellikteki bazı D sayıları ve karşılık gelen II. tipten temsilci formlar verilmiştir.

$D \equiv 2 \bmod 4$	II. Tipten Temsilci Form
6	(2, 1, 3, 2)
22	(2, 1, 5, 2)
46	(2, 1, 7, 2)
78	(2, 1, 9, 2)
118	(2, 1, 11, 2)
166	(2, 1, 13, 2)
222	(2, 1, 15, 2)
286	(2, 1, 17, 2)
358	(2, 1, 19, 2)

Tablo 2.2

Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk:

2.2.12. Teorem. (i) $D + 3 = x^2$ özelliğindeki $D \equiv 1 \bmod 4$ sayıları

$$D = 4n^2 - 3;\ n \geq 1$$

şeklindedir.

(ii) $D + 3 = x^2$ özelliğindeki $D \equiv 2 \bmod 4$ sayıları

$$D = 4n^2 + 4n - 2;\ n \geq 1$$

şeklindedir. □

Son olarak $N_P(M)$'nin Fuchsian olup olmadığı sorusunun cevabını veren aşağıdaki teoremle bu bölümü bitirelim:

2.2.13. Teorem. $N_P(M)$, P'nin Fuchsian bir alt grubu değildir.

İspat. $N_P(M)$'nin Fuchsian olduğunu varsayalım ve sabit çemberi C olsun. $a, c \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}(i)$ ve $b\overline{b} - ac > 0$ olmak üzere C,

$$az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$$

çemberi olsun. $v = uyr = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \in N_P(M)$ elemanını göz önüne alalım. v dönüşümü C'yi

$$a\frac{-iz+i}{iz}.\frac{i\overline{z}-i}{-i\overline{z}} + b\frac{-iz+i}{iz} + \overline{b}\frac{i\overline{z}-i}{-i\overline{z}} + c = 0$$

çemberine resmeder. Buradan v(C)'yi

$$\left(a - b - \overline{b} + c\right)z\overline{z} + \left(-a + \overline{b}\right)z + \left(-a + b\right)\overline{z} + a = 0$$

buluruz. $v(C) = C$ olduğundan, $a - b - \overline{b} + c = a, - a + \overline{b} = b, a = c$ elde ederiz. Bu nedenle $b = 0$, $a = c = 0$ olur. Bu da v'nin sabit çemberinin olmadığını gösterir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $N_P(M)$ Fuchsian değildir. □

Bu sonucu aynı zamanda v'nin loksodromik bir eleman olması nedeniyle de elde edebilirdik. Çünkü Fuchsian bir grupta loksodromik elemanların bulunmadığını biliyoruz.

3. H(λ) HECKE GRUPLARI

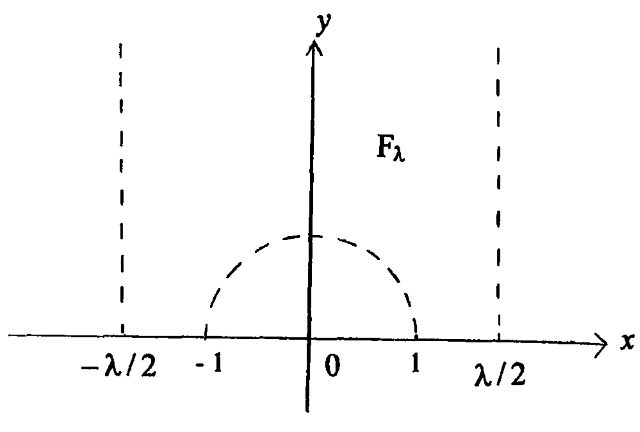
Bu bölümde $\lambda \geq 2$ değerlerine karşılık gelen **H(λ)** gruplarını inceleyeceğiz. **H(λ)** gruplarının

$$R(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } T(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen sonlu üreteçli Fuchs grupları olduğunu biliyoruz. Erich Hecke,

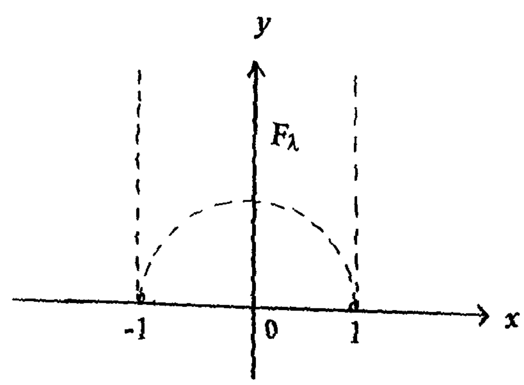
$$F_\lambda = \left\{ z \in \mathbf{U} : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\lambda}{2},\ |z| > 1 \right\}$$

kümesinin bu gruplar için bir temel bölge olduğunu ispatlamıştır (Hecke 1936). $\lambda > 2$ iken standart temel bölgenin alanı sonsuzdur ve sınırı üzerinde iki reel aralık vardır (Şekil 3.1). Bölüm uzayı, $z \to z + \lambda$ kayması kullanılarak iki düşey kenarın özdeşlenmesiyle ve $z \to -\frac{1}{z}$ eliptik elemanı kullanılarak yarı dairesel kenarın iki yarısının özdeşlenmesiyle elde edilir. Sonuçta bir nokta (sonsuz) ve bir disk çıkarılmış ve *i* eliptik sabit noktasında mertebesi 2 olan bir koni noktası olan bir küre elde edilir. $\lambda = 2$ iken bu temel bölgenin alanı sonludur, iki reel aralık



Şekil 3.1. H(λ), $\lambda > 2$ Gruplarının Temel Bölgesi

tek noktalara (-1 ve 1) büzülmüşlerdir ve çıkartılmış disk bir noktaya büzülmüştür



Şekil 3.2. *H(2)'nin* Temel Bölgesi

(Şekil 3.2). $\lambda \geq 2$ iken $\mathbf{H}(\lambda)$, mertebeleri 2 ve sonsuz olan iki devirli grubun bir serbest çarpımıdır. Bu nedenle $\lambda \geq 2$ için tüm $\mathbf{H}(\lambda)$ grupları aynı cebirsel yapıya sahiptirler. $\lambda \in \mathbf{Z}$ iken $\mathbf{H}(\lambda)$'nın üreteçleri tamsayı katsayılı olacaktır. Dolayısıyla $\mathbf{H}(\lambda)$'nın her elemanı tamsayı katsayılı olacaktır. Bu nedenle $\mathbf{H}(\lambda)$, modüler grubun ve böylece Picard grubunun alt grubu olacaktır. Modüler grup ve alt grupları geniş ölçüde incelendiğinden bu hal pek ilginç olmayacaktır. Biz bu bölümde $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ grubunu ve alt gruplarını geniş ölçüde inceleyeceğiz. Temel denklik alt grupları ve denklik alt grupları haricinde $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ için elde edilen sonuçlar izomorfizm farkıyla diğer tüm $\mathbf{H}(\lambda)$ grupları için de geçerli olacaktır. Daha sonra $\mathbf{H}(\sqrt{7})$ grubunun temel denklik alt gruplarını ve denklik alt gruplarını da inceleyeceğiz.

3.1. H($\sqrt{5}$) Hecke Grubu

$\mathbf{H}(\sqrt{5})$ Hecke grubu,

$$R(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } T(z) = z + \sqrt{5}$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruptur. Bu bölümde $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ grubunun elemanlarını belirleyeceğiz ve temel bölgesi yardımıyla $\mathbf{H}(\sqrt{5}) \cong C_2 * \mathbf{Z}$ olduğunu ispatlayacağız. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ grubu, simgesi $(0;\ 2, \infty, \infty)$ olan bir üçgen grubudur. **H**($\sqrt{5}$)'in elemanlarını, bir matris ve negatifi aynı dönüşümü göstermek üzere matrisler yardımıyla da belirtebiliriz. Buna göre **H**($\sqrt{5}$)'in elemanları aşağıdaki iki sınıfa ayrılırlar:

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix}; \ ad-5bc=1, a,b,c,d \in \mathbf{Z}$$

ve

$$\textbf{(b)} \begin{pmatrix} a\sqrt{5} & b \\ c & d\sqrt{5} \end{pmatrix}; \ 5ad-bc=1, a,b,c,d \in \mathbf{Z}.$$

(a) tipinde olan elemanlara çift elemanlar, (b) tipinde olanlara tek elemanlar diyeceğiz.

Şimdi **H**($\sqrt{5}$)'in tüm elemanlarının tek ya da çift elemanlar olduğunu ispatlayalım. Dikkat edilirse **H**($\sqrt{5}$)'in üreteçleri olan

$$R=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } S=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

nin her ikisi de tek elemanlardır. Tek elemanların kümesi kapalı değildir. Çünkü iki tek elemanın çarpımı daima çifttir. Gerçekten

$$\begin{pmatrix} a_1\sqrt{5} & b_1 \\ c_1 & d_1\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} a_2\sqrt{5} & b_2 \\ c_2 & d_2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

gibi herhangi iki tek elemanın çarpımı

$$\begin{pmatrix} 5a_1a_2+b_1c_2 & (a_1b_2+b_1d_2)\sqrt{5} \\ (c_1a_2+d_1c_2)\sqrt{5} & b_2c_1+5d_1d_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup bir çift elemandır. Benzer şekilde

$$\text{tek.çift} = \text{tek}$$
$$\text{çift.tek} = \text{tek}$$
$$\text{çift.çift} = \text{çift}$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece **H**($\sqrt{5}$)'in elemanlarının bir parçalanışını elde ettik. **H**($\sqrt{5}$)'in her bir V elemanı, üreteçlerin bir çarpımı olduğundan V'nin ya tek ya da çift olduğu sonucunu elde ederiz.

$\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in tüm çift elemanlarının kümesinin, indeksi 2 olan bir normal alt grup oluşturduğu kolayca görülebilir. Bu normal alt gruba çift alt grup diyeceğiz ve $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$ ile göstereceğiz. Yani

$$\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix} : M \in \mathbf{H}(\sqrt{5}) \right\}$$

olur. $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in önemli bir normal alt grubu olup, öncelikle bu grubun grup yapısını inceleyelim.

3.1.1. Teorem. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in

$$\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix} : M \in \mathbf{H}(\sqrt{5}) \right\}$$

şeklinde tanımlanan çift alt grubu $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in indeksi 2 olan bir normal alt grubudur. Aynı zamanda

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) \cup R\,\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}),$$

$$\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) \cong \langle T \rangle * \langle U \rangle$$

dir ve bu nedenle $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$, T ve U ile üretilen iki sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır.

İspat. $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$'in indeksi 2 olduğundan $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in bir normal alt grubudur. $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$ için bir Schreier sistemi olarak $\{I, R\}$'yi seçelim. O zaman Reidemeister-Schreier yöntemi uygulanırsa aşağıdaki çarpımlar elde edilir:

$IRR^{-1} = I$,

$ISR^{-1} = SR$,

$RRI = I$,

$RSI = RS$.

Böylece $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$'in üreteçleri olarak $T = RS$ ve $U = SR$ bulunur. $R \notin \mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$ olduğundan

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) \cup R\,\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$$

olduğu açıktır. R ve S'nin her ikisi de tek elemanlar olduğundan R ve S

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) \to \mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) \cong C_2$$

homomorfizmi altında 2-devirlere resmedilirler, yani

$R \rightarrow (1\,2)$

$S \rightarrow (1\,2)$

$T \rightarrow (1)(2)$

olup permütasyon metodu ile $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$'in simgesi (g; $\infty^{(3)}$) olur. Riemann-Hurwitz formülü ile g = 0 bulunur. O halde $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$'in simgesi (0; $\infty^{(3)}$) olup, Teorem 1.6.2 gereğince $F_2 = \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$'ye izomorftur. □

$\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in normal alt grupları arasında önemli bir yere sahiptir. Bu grubu daha sonra temel denklik alt grupları v.b. normal alt grupların grup yapılarının belirlenmesinde ve sınıflandırılmasında kullanacağız.

Şimdi Macbeath'in bir sonucunu kullanarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in, mertebeleri 2 ve sonsuz olan iki devirli grubun serbest çarpımına izomorfik olduğunu ispatlayacağız. Önce temel bölge tanımını hatırlayalım.

3.1.2. Tanım. F üst yarı düzlem **U**'nun açık bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa F, G grubu için bir temel bölgedir:

(i) Her bir $z \in \mathbf{U}$ için G(z) yörüngesi F'nin kapanışı olan $\overline{F}$ ile en az bir noktada kesişir.

(ii) Her bir $z \in \mathbf{U}$ için G(z) yörüngesi F ile en çok bir noktada kesişir.

(i) ve (ii)'den

$$\mathbf{U} = \bigcup_{g \in G} g(\overline{F})$$

ve

$$g(F) \cap F = \varnothing;\ I \neq g \in G$$

olduğu açıktır.

$H(\sqrt{5})$ için bir temel bölgenin

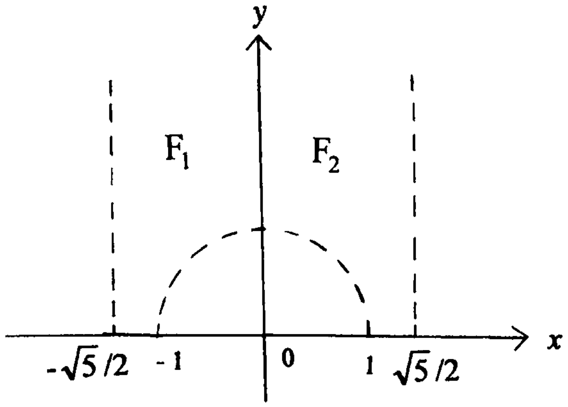
$$F_{\sqrt{5}} = \left\{ z \in \mathbf{U} : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\sqrt{5}}{2}, |z| > 1 \right\}$$

olduğunu hatırlayalım. Yine bir grup için temel bölgenin bir tek olmadığını da biliyoruz. Şekil 3.3'de görülen $F_{\sqrt{5}} = F_1 \cup F_2$'nin $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ için bir temel bölge olduğunu belirtmiştik. Bununla birlikte uygunluk açısından

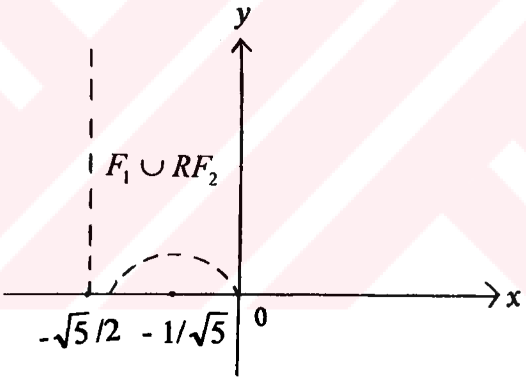
$$F_{\sqrt{5}}' = \left\{ z \in U : -\frac{\sqrt{5}}{2} < \operatorname{Re} z < 0, \left| z + \frac{1}{\sqrt{5}} \right| > \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} = F_1 \cup RF_2$$

yi temel bölge olarak alacağız (Şekil 3.4).

3.1.2. Tanım. [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu ve $P \subseteq X$ olsun. Eğer



Şekil 3.3. H($\sqrt{5}$) İçin Bir Temel Bölge



Şekil 3.4. $F_{\sqrt{5}}'$ **Bölgesi**

$g_1, g_2 \in G$, $g_1 \neq g_2$ için $g_1P \cap g_2P = \varnothing$ ise o zaman P'ye bir G-paketleme denir.

Denk olarak, eğer $1 \neq g \in G$ için $gP \cap P = \varnothing$ ise o zaman P bir G-paketlemedir. Eğer P bir G-paketleme ise her bir yörüngeden en fazla bir eleman bulundurur (Başkan 1980).

3.1.3. Yardımcı Teorem. H ve K, bir [G, X] topolojik dönüşüm grubunun iki alt grubu olsun. Eğer P bir H-paketleme, Q bir K-paketleme, $A = \langle H, K \rangle$ (H ve K'nın üreteçleri ile üretilen grup), $P \cup Q = X$, $P \cap Q \neq \varnothing$ ise o zaman

$$A = H * K$$

dır. Aynı zamanda $P \cap Q$ bir A-paketlemedir.

İspat. Macbeath'e (1963) bakınız. □

Cangül'de (1993) bu yardımcı teorem kullanılarak $\mathbf{H}(\lambda_q)$ Hecke grubunun yapısı $C_2 * C_q$ olarak elde edilmiştir. Şimdi yine bu yardımcı teoremi kullanarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ Hecke grubunun yapısını $C_2 * \mathbf{Z}$ olarak bulacağız.

3.1.4. Teorem. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ Hecke grubu, mertebesi 2 olan bir devirli grup ile rankı 1 olan bir serbest grubun serbest çarpımına izomorfiktir, yani

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) \cong C_2 * \mathbf{Z}$$

dir.

İspat. $H = \langle R \rangle \cong C_2$ ve $K = \langle S \rangle \cong \mathbf{Z}$ alalım. H ve K, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in alt gruplarıdır. Şimdi Yardımcı Teorem 3.1.3'ün koşulları sağlanacak şekilde H ve K için sırasıyla P ve Q paketlemelerini bulmaya çalışalım.

$$R(z) = -\frac{1}{z} = \frac{-x + iy}{x^2 + y^2}$$

olduğundan

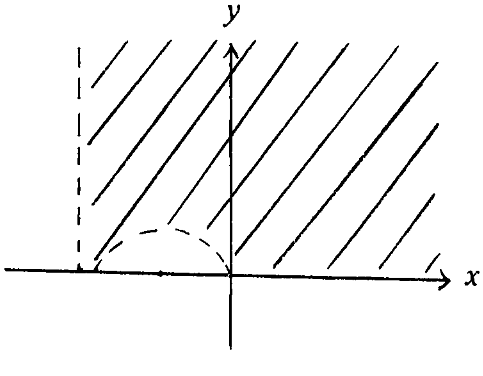
$$\text{İşaret}(\operatorname{Re}R(z)) \;=\; -\,\text{İşaret}(\operatorname{Re}z)$$

olduğu ve

$$P = \{z \in U : \operatorname{Re} z < 0\}$$

kümesinin bir H-paketleme olduğu açıktır.

$$Q = \left\{ z \in U : \operatorname{Re} z > -\frac{\sqrt{5}}{2},\ \left| z + \frac{1}{\sqrt{5}} \right| > \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$$



Şekil 3.5. Q Bölgesi

kümesini göz önüne alalım (Şekil 3.5). $S(z) = -\dfrac{1}{z+\sqrt{5}}$ dönüşümünü

(i) $T_1(z) = \dfrac{z}{|z|^2} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ (birim çemberde yansıma)

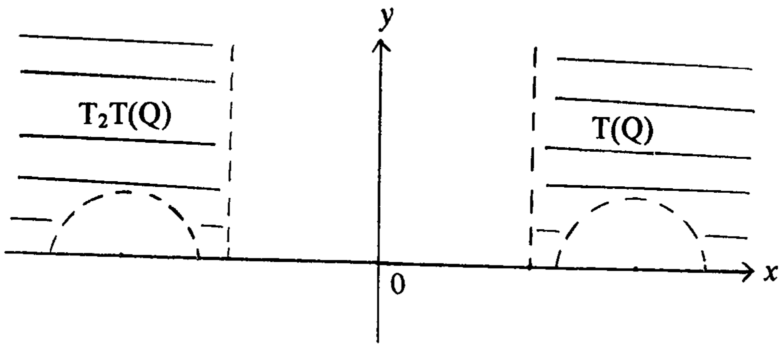
(ii) $T_2(z) = -\bar{z}$ (Rez = 0 doğrusunda yansıma)

(iii) $T(z) = z+\sqrt{5}$ ($\sqrt{5}$ birim kayma)

dönüşümlerinin birleşimi olarak yazabiliriz. Gerçekten

$$S(z) = T_1T_2T(z) = T_1T_2(z+\sqrt{5}) = T_1(-\bar{z}-\sqrt{5}) = \frac{1}{-z-\sqrt{5}} = -\frac{1}{z+\sqrt{5}}$$

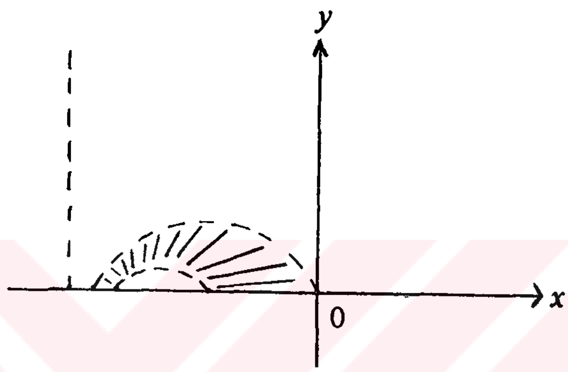
olur. Q'nun köşeleri $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, 0 ve ∞ dur. T'yi Q'ya uygularsak Q'nun, köşeleri $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{5}$ ve ∞ olan bir kaymasını elde ederiz (Şekil 3.6). T_2'yi T(Q)'ya uygularsak T(Q)'nun, köşeleri $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $-\sqrt{5}$ ve ∞ olan bir yansımasını elde ederiz (Şekil 3.6). Son olarak T_1'i $T_2T(Q)$'ya uygularsak $T_2T(Q)$'nun bir yansımasını elde ederiz. Yani sonuçta $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ve 0 köşeleri ile Q'nun bir dönmüş hali olan S(Q)'yu elde ederiz (Şekil 3.7). S'yi tekrar S(Q)'ya uygularsak $S^2(Q)$'nun köşelerini $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$, $-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ ve $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ olarak



Şekil 3.6. T(Q) ve $T_2T(Q)$ Bölgeleri

elde ederiz. $S^3(Q)$'nun köşeleri $-\frac{3\sqrt{5}}{10}, -\frac{2\sqrt{5}}{7}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}$ ve $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ olur. Dikkat edilirse her defasında S^{n+1} altında $S^n(Q)$'nun dıştaki çemberini belirleyen köşeleri, içteki çemberi belirleyen köşelere resmedilmektedir. İçteki çemberi belirleyen köşeleri ise bu çemberin içinde bir başka çember belirlemektedirler. Yani bu şekilde devam edilirse birbiriyle çakışmayan sonsuz tane $S(Q)$, $S^2(Q)$, ..., $S^n(Q)$, ... bölgeleri elde edilir. Bunu ispatlamak için önce tümevarımla

$$S^n = \begin{pmatrix} b_{n-1} & -d_{n-1} \\ d_{n-1} & \sqrt{5}d_{n-1} + b_{n-1} \end{pmatrix}$$



Şekil 3.7. S(Q) Bölgesi

olduğunu görelim.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -d_1 \\ d_1 & \sqrt{5}d_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

olup n = 2 için önerme doğrudur. Şimdi

$$S^n = \begin{pmatrix} b_{n-1} & -d_{n-1} \\ d_{n-1} & \sqrt{5}d_{n-1} + b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $S^{n+1} = \begin{pmatrix} b_n & -d_n \\ d_n & \sqrt{5}d_n + b_n \end{pmatrix}$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten

$$S^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} & -d_{n-1} \\ d_{n-1} & \sqrt{5}d_{n-1} + b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -d_{n-1} & -\sqrt{5}d_{n-1} - b_{n-1} \\ b_{n-1} + \sqrt{5}d_{n-1} & 4d_{n-1} + \sqrt{5}b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & -d_n \\ d_n & \sqrt{5}d_n + b_n \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi bu sonuç yardımıyla

$$S^n(0) = S^{n+1}(\infty) \text{ ve } S^n\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = S^{n+1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

olduğu kolayca görülür. O halde aşağıdaki yardımcı teoremi elde ederiz.

3.1.5. Yardımcı Teorem. $S^n(Q)$'nun köşeleri

$$S^n\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\ S^{n+1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right),\ S^{n+1}(\infty),\ S^n(\infty)$$

dur. □

$S^{n+1}(\infty) = S^n(0)$ ve $S^{n+1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = S^n\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ olduğu da göz önüne alınırsa, Yardımcı Teorem 3.1.5 gereğince $S^n(Q)$ resimleri üst üste çakışmaz. O halde Q bir K-paketlemedir. Burada $[-\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0] \subset \mathbf{R}$ alt kümesinin kompaktlığı göz önüne alınmalıdır.

Böylece Yardımcı Teorem 3.1.3'ün koşullarını sağlayan bir H-paketleme ve bir K-paketleme elde ettik. Şimdi Yardımcı Teorem 3.1.3'ü uygulayabiliriz. O zaman $\mathbf{H}(\sqrt{5}) = \langle H, K\rangle$ grubu, H ve K alt gruplarının serbest çarpımına izomorfiktir. Yani

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) \cong C_2 * \mathbf{Z}$$

dir. Aynı zamanda

$$P \cap Q = \left\{ z \in \mathbf{U} : -\frac{\sqrt{5}}{2} < \operatorname{Re} z < 0, \left| z + \frac{1}{\sqrt{5}} \right| > \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} = F_{\sqrt{5}}'$$

kümesi bir $\mathbf{H}(\sqrt{5})$-paketlemedir. □

Böylece $H(\sqrt{5})$'in grup yapısını elde etmiş olduk. Şimdi $H(\sqrt{5})$'in bazı alt gruplarını incelemeye başlamadan önce son olarak $H(\sqrt{5})$'in parabolik nokta kümesini belirleyerek bu bölümü bitirelim. Parabolik noktalar, basitçe grubun elemanları altında sonsuzun resimlerdir. T'nin sabit noktası olduğundan ∞ bir parabolik noktadır. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in parabolik nokta kümesi ∞'un $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ üzerindeki yörüngesidir ve

$$S_{\sqrt{5}} = \left\{ \frac{a}{c} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{H}(\sqrt{5}) \right\} \cup \{\infty\}$$

şeklindedir. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in elemanlarının ya

(a) $\begin{pmatrix} a\sqrt{5} & b \\ c & d\sqrt{5} \end{pmatrix}$; $5ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ şeklinde tek elemanlar

ya da

(b) $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix}$; $ad - 5bc = 1, a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ şeklinde çift elemanlar

olduğunu biliyoruz. t, (a) tipinde bir tek eleman ise

$$t(\infty) = \frac{a\sqrt{5}}{c} \in \mathbf{Q}(\sqrt{5})$$

olur. t, (b) tipinde bir çift eleman ise

$$t(\infty) = \frac{a}{c\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5c} \in \mathbf{Q}(\sqrt{5})$$

olur. Böylece

$$S_{\sqrt{5}} = \left\{ \frac{m\sqrt{5}}{n} : m, n \in \mathbf{Z} \right\} \cup \{\infty\}$$

olup $S_{\sqrt{5}} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ olduğunu göstermiş olduk.

3.2. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in $\mathbf{H}^m(\sqrt{5})$ Kuvvet Alt Grupları

m bir pozitif tamsayı olsun. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in tüm elemanlarının *m*. kuvvetleri ile üretilen alt gruba $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in *m*. kuvvet alt grubu denir ve $\mathbf{H}^m(\sqrt{5})$ ile gösterilir. Bunlar tam invaryant alt gruplar olduklarından $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'de normaldirler. Tanımdan

$$\mathbf{H}^m(\sqrt{5}) > \mathbf{H}^{mn}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.1)}$$

ve

$$(\mathbf{H}^{m}(\sqrt{5}))^{n} > \mathbf{H}^{mn}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.2)}$$

olduğu kolayca elde edilir. Buradan

$$\mathbf{H}^{m}(\sqrt{5})\,\mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}^{(m,\,n)}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.3)}$$

elde edilir. (m, n) ile m ve n'nin en büyük ortak bölenini gösteriyoruz. Bu son eşitliği görelim. Hemen belirtelim ki kuvvet alt grupları normal alt gruplar olduğundan bu çarpım iyi tanımlıdır. (3.1)'den

$$\mathbf{H}^{(m,\,n)}(\sqrt{5}) \geq \mathbf{H}^{m}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.4)}$$

ve

$$\mathbf{H}^{(m,\,n)}(\sqrt{5}) \geq \mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.5)}$$

ve buradan

$$\mathbf{H}^{(m,\,n)}(\sqrt{5}) \geq \mathbf{H}^{m}(\sqrt{5})\,\mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.6)}$$

elde edilir.

Şimdi z, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in herhangi bir elemanı olsun. m_1 ve n_1 tamsayılarını $m_1 m + n_1 n = (m, n)$ olacak şekilde seçelim. O zaman

$$z^{m_1 m} \in \mathbf{H}^{m}(\sqrt{5}),\ z^{n_1 n} \in \mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.7)}$$

ve buradan

$$z^{m_1 m + n_1 n} \in \mathbf{H}^{m}(\sqrt{5})\,\mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.8)}$$

elde edilir. Yani

$$z^{(m,n)} \in \mathbf{H}^{m}(\sqrt{5})\,\mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.9)}$$

dir ve bu nedenle

$$\mathbf{H}^{(m,\,n)}(\sqrt{5}) \leq \mathbf{H}^{m}(\sqrt{5})\,\mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.10)}$$

olur. Böylece

$$\mathbf{H}^{(m,\,n)}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}^{m}(\sqrt{5})\,\mathbf{H}^{n}(\sqrt{5}) \qquad \textbf{(3.11)}$$

elde ederiz. Özellikle tek s'ler için

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}^{2}(\sqrt{5})\mathbf{H}^{s}(\sqrt{5})$$

olur. Özel olarak modüler gruba benzer olarak

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}^{2}(\sqrt{5})\mathbf{H}^{5}(\sqrt{5})$$

yazabiliriz.

Şimdi $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in kuvvet alt gruplarının grup yapılarını inceleyelim.

3.2.1. Teorem. $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$ normal alt grubu $\mathbf{Z} * \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ serbest çarpımına izomorfiktir. Aynı zamanda

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) / \mathbf{H}^2(\sqrt{5}) \cong C_2 \times C_2,$$

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}^2(\sqrt{5}) \cup R\,\mathbf{H}^2(\sqrt{5}) \cup S\,\mathbf{H}^2(\sqrt{5}) \cup RS\,\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$$

ve

$$\mathbf{H}^2(\sqrt{5}) = \langle S^2 \rangle * \langle RS^2R \rangle * \langle RSRS^{-1} \rangle.$$

olur. $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in elemanları R ve S'nin her ikisinin de ayrı ayrı üsleri toplamının çift olmasıyla belirlenebilir.

İspat. $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in temsilini bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanacağız. Öncelikle $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in temsiline her $X \in \mathbf{H}(\sqrt{5})$ için $X^2 = 1$ bağıntısını ekleyelim. Bu bize $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in bir temsilini verir ki bu grubun mertebesi de indeksi verecektir.

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) / \mathbf{H}^2(\sqrt{5}) = \langle R, S;\, R^2 = X^2 = 1 \rangle$$

$$= \langle R, S;\, R^2 = S^2 = (RS)^2 = 1 \rangle \cong C_2 \times C_2$$

olup $|\mathbf{H}(\sqrt{5}) : \mathbf{H}^2(\sqrt{5})| = 4$ dür. Şimdi $\{I, R, S, RS\}$ Schreier sistemini seçelim. O zaman mümkün olan tüm çarpımlar

$$S_{IR} = IRR^{-1} = I$$
$$S_{IS} = ISS^{-1} = I$$
$$S_{R^2} = RRI = I$$
$$S_{RS} = RS(RS)^{-1} = I$$
$$S_{SR} = SR(RS)^{-1} = SRS^{-1}R$$
$$S_{S^2} = SSI = S^2$$
$$S_{RSR} = RSR(S^{-1}) = RSRS^{-1}$$
$$S_{RS^2} = RS^2R$$

dir. $(RSRS^{-1}) = SRS^{-1}R$ olduğundan $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in üreteçleri olarak $x_1 = S^2$, $x_2 = RS^2R$ ve $x_3 = RSRS^{-1}$ bulunur. Dikkat edilirse $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in elemanlarının teoremdeki koşulu sağladığı açıktır. Yani her bir eleman için R ve S'nin üsleri toplamının her ikisi de çifttir. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak

$\tau(IRRI) = \tau(RR) = S_{IR}.S_{R^2} = I$

$\tau(RRRR) = S_{IR}.S_{R^2}.S_{IR}.S_{R^2} = I$

$\tau(SRRS^{-1}) = S_{IS}.S_{SR}.S_{RSR}.S_{IS}^{-1} = ISRS^{-1}RRSRS^{-1} = I$

$\tau(RSRRS^{-1}R) = S_{IR}.S_{RS}.S_{RSR}.S_{SR}.S_{RS}^{-1}.S_{R^2} = IIRSRS^{-1}SRS^{-1}RII = I$

bağıntıları elde edilir. Buradan $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntıların olmadığı görülür. O halde $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$, x_1, x_2 ve x_3 tarafindan üretilen üç sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır.

R, S ve T'nin her biri mertebesi 2 olan elemanlara resmedildiğinden aşağıdaki permütasyon gösterimine sahiptirler:

$R \to (1\,2)(3\,4)$

$S \to (1\,3)(2\,4)$

$T \to (1\,4)(2\,3)$.

Bu nedenle $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in simgesi permütasyon metodu ile $(g; \infty, \infty, \infty, \infty) = (g; \infty^{(4)})$ bulunur. Riemann-Hurwitz formülü ile g = 0 elde ederiz. Böylece $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$'in simgesi $(0; \infty^{(4)})$ olur. Bu nedenle Teorem 1.6.2 gereğince $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$, $\mathbf{Z} * \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ çarpımına izomorftur. □

3.2.2. Teorem. $\mathbf{H}^3(\sqrt{5})$ normal alt grubu, mertebesi 2 olan üç devirli grup ve bir sonsuz devirli grubun serbest çarpımıdır. Aynı zamanda

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}^3(\sqrt{5}) \cong C_3,$$

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}^3(\sqrt{5}) \cup S\ \mathbf{H}^3(\sqrt{5}) \cup S^2\ \mathbf{H}^3(\sqrt{5})$$

ve

$$\mathbf{H}^3(\sqrt{5}) = \langle R\rangle * \langle S^3\rangle * \langle SRS^{-1}\rangle * \langle S^2RS^{-2}\rangle$$

dir.

İspat. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in temsiline her $X \in \mathbf{H}(\sqrt{5})$ için $X^3 = 1$ bağıntısını ekleyelim.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}^3(\sqrt{5}) &= \langle R,S; R^2 = 1, X^3 = 1\rangle \\ &= \langle R,S; R^2 = R^3 = S^3 = (RS)^3 = 1\rangle \\ &= \langle S; S^3 = 1\rangle \cong C_3\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $|\,\mathbf{H}(\sqrt{5}) : \mathbf{H}^3(\sqrt{5})\,| = 3$ bulunur. $\mathbf{H}^3(\sqrt{5})$ için bir Schreier sistemi olarak $\{I, S, S^2\}$ alalım. O zaman mümkün olan tüm çarpımlar

$$S_{IR} = IRI = R$$
$$S_{IS} = ISS^{-1} = I$$
$$S_{SR} = SRS^{-1}$$
$$S_{S^2} = SSS^{-2} = I$$
$$S_{S^2R} = S^2RS^{-2}$$
$$S_{S^3} = S^3I = S^3$$

olur. Bu nedenle $\mathbf{H}^3(\sqrt{5})$, $x_1 = R, x_2 = S^3, x_3 = SRS^{-1}$ ve $x_4 = S^2RS^{-2}$ ile üretilmiştir. Reidemeister yeniden yazma yöntemi kullanılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\tau(IRRI) = \tau(RR) = S_{IR}.S_{IR} = R^2 = I$$
$$\tau(SRRS^{-1}) = S_{IS}.S_{SR}.S_{SR}.S_{IS}{}^{-1} = ISRS^{-1}SRS^{-1}I = I$$
$$\tau(SSRRS^{-1}S^{-1}) = S_{IS}.S_{S^2}.S_{S^2R}.S_{S^2R}.S_{S^2}{}^{-1}.S_{IS}{}^{-1} = IIS^2RS^{-2}S^2RS^{-2}II = I.$$

Bu nedenle $\mathbf{H}^3(\sqrt{5})$'in üreteçleri arasında aşikar olmayan bağıntılar yoktur ve $\mathbf{H}^3(\sqrt{5})$, x_1, x_2, x_3 ve x_4 ile üretilen devirli grupların serbest çarpımıdır. R, S ve T'nin permütasyon gösterimleri

$$\mathbf{H}(\sqrt{5}) \rightarrow \mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}^3(\sqrt{5}) \cong C_3$$

homomorfizmi altında

$$R \rightarrow (1)(2)(3)$$
$$S \rightarrow (1\,2\,3)$$
$$T \rightarrow (1\,2\,3)$$

olup permütasyon metodu ile $\mathbf{H}^3(\sqrt{5})$'in simgesi $(g; 2^{(3)}, \infty^{(2)})$ şeklinde elde edilir. Riemann-Hurwitz formülü ile $g = 0$ bulunur. Bu nedenle Teorem 1.6.2 gereğince $\mathbf{H}^3(\sqrt{5})$, $F_{2g+t-1} * C_2 * C_2 * C_2$ çarpımına yani $\mathbf{Z} * C_2 * C_2 * C_2$ çarpımına izomorftur. □

3.2.3. Teorem. *m* pozitif bir tek tamsayı olsun. O zaman

$$\mathbf{H}^m(\sqrt{5}) \cong \mathbf{Z} * \underbrace{C_2 * \ldots C_2}_{m \text{ tane}}$$

olur.

İspat. $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\ \mathbf{H}^m(\sqrt{5})=\langle S; S^m = I\rangle \cong C_m$ olup R, S ve T'nin permütasyon gösterimleri

$$R \to (\,1\,)(\,2\,)(\,3\,)\dots(\,m\,)$$
$$S \to (\,1\;2\dots m\,)$$
$$T \to (\,1\;2\dots m\,)$$

dir. Permütasyon metodu ile $\mathbf{H}^m(\sqrt{5})$'in simgesini (g; $2^{(m)},\infty^{(2)}$) olarak buluruz ve Riemann - Hurwitz formülü ile g = 0 elde ederiz. Yani $\mathbf{H}^m(\sqrt{5})$ 'in simgesi (g; $2^{(m)},\infty^{(2)}$) olur. Böylece $\mathbf{H}^m(\sqrt{5})$, 2. mertebeden *m* tane devirli grup ile bir sonsuz devirli grubun serbest çarpımına izomorfiktir. □

Şimdi *m* pozitif bir çift tamsayı olsun. O zaman

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}^m(\sqrt{5})=\langle R,S; R^2 = R^m = S^m = (RS)^m = I\rangle$$
$$=\langle R,S; R^2 = S^m = (RS)^m = I\rangle$$

elde edilir. Yani bölüm grubu, simgesi (2, *m*, *m*) şeklinde olan bir gruptur. Eğer *m* = 2 ise $\mathbf{H}^2(\sqrt{5}) \cong \mathbf{Z} * \mathbf{Z} * \mathbf{Z}$ olduğunu gördük ki bu, cinsi 0 olan bir normal alt gruptur. O zaman $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$, kürenin otomorfizmlerinin bir grubudur. Eğer *m* = 4 ise tor üzerinde hareket eden bir normal alt grup elde ederiz. Çünkü bu durumda (2, 4, 4) bölüm grubu sonsuz mertebeli bir gruptur ve $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ dir. $m \geq 6$ ise (2, *m*, *m*) bölüm grubu sonsuz mertebelidir ve $\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m}<\frac{1}{2}$ dir. Bu durumda da hiperbolik 2-uzay (yani üst yarı düzlem) üzerinde hareket eden sonsuz indeksli bir normal alt grup elde ederiz.

3.3. H($\sqrt{5}$)'in Cinsi 0 Olan Normal Alt Grupları

Eğer N, cinsi 0 olan bir normal alt grup ise o zaman **H(**$\sqrt{5}$**)**/N kürenin otomorfizmlerinin bir grubudur. **H(**$\sqrt{5}$**)**/N, SO(3)'ün sonlu bir alt grubuna izomorfik olup bu nedenle de sonlu üçgen gruplarından birine izomorfiktir. Her $n \in \mathbf{N}$ için **H(**$\sqrt{5}$**)**'in D_n dihedral grubu ve C_n devirli grubu üzerine bir homomorfizmi daima bulunabileceğinden $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in sonsuz çoklukta cinsi 0 olan normal alt grubu vardır.

Eğer $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'i $C_n \cong (1, n, n)$ devirli grubu üzerine resmedersek bir $N \cong (0; 2^{(n)}, \infty^{(2)})$ normal alt grubu elde ederiz. Bu normal alt grubu $N_n(\sqrt{5})$ ile gösterirsek

$$N_n(\sqrt{5}) \cong \mathbf{Z} * \underbrace{C_2 * \ldots * C_2}_{\text{n tane}}$$

olur.

İkinci olarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'i $D_n \cong (2, 2, n)$ dihedral grubu üzerine resmedersek $N \cong (0; \infty^{(n+2)})$ şeklinde bir normal alt grup elde ederiz. Bu durumda elde ettiğimiz normal alt grubu $Y_n(\sqrt{5})$ ile gösterirsek

$$Y_n(\sqrt{5}) \cong \underbrace{\mathbf{Z} * \ldots * \mathbf{Z}}_{(n+1)\text{ tane}}$$

olur. Benzer şekilde $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'i $(2, n, 2)$ grubu üzerine resmedersek yine simgesi $(0; \infty^{(n+2)})$ olan bir normal alt grup elde ederiz.

$\mathbf{H}(\sqrt{5})$'i $A_4 \cong (2, 3, 3)$ üzerine resmedersek simgesi $(0; \infty^{(8)})$ olan bir normal alt grup elde ederiz.

$\mathbf{H}(\sqrt{5})$'i $S_4 \cong (2, 4, 3)$ üzerine resmedersek simgesi $(0; \infty^{(14)})$ ve benzer şekilde $(2, 3, 4)$ üzerine resmedersek yine simgesi $(0; \infty^{(14)})$ olan bir normal alt grup elde ederiz.

Son olarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'i $A_5 \cong (2, 3, 5)$ ve $(2, 5, 3)$ üzerine resmedersek simgesi $(0; \infty^{(27)})$ olan bir normal alt grup elde ederiz.

Böylece aşağıdaki teoremi elde etmiş olduk:

3.3.1. Teorem. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in cinsi 0 olan normal alt grupları, $N_n(\sqrt{5}) \cong (0; 2^{(n)}, \infty^{(2)})$, $Y_n(\sqrt{5}) \cong (0; \infty^{(n+2)})$, $(0; \infty^{(8)})$, $(0; \infty^{(14)})$ ve $(0; \infty^{(27)})$ gruplarından birine izomorftur. □

3.3.2. Sonuç. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in sonsuz çoklukta cinsi 0 olan normal alt grubu vardır. □

3.3.2. Uyarı. (i) $n = 6$ için $(0; \infty^{(n+2)})$ ve $(0; \infty^{(8)})$, $n = 12$ için $(0; \infty^{(n+2)})$ ve $(0; \infty^{(14)})$, $n = 25$ için $(0; \infty^{(n+2)})$ ve $(0; \infty^{(27)})$ gruplarının çakıştığı açıktır.

(ii) Hemen belirtelim ki $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$, $\mathbf{H}^2(\sqrt{5})$ ve m pozitif tek tamsayı iken $\mathbf{H}^m(\sqrt{5})$ alt grupları otomatik olarak Teorem 3.3.1'deki grupların listesinde yer alırlar. Çünkü, $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) = Y_1(\sqrt{5})$, $\mathbf{H}^2(\sqrt{5}) = Y_2(\sqrt{5})$ ve m pozitif tek tamsayı iken $\mathbf{H}^m(\sqrt{5}) = N_m(\sqrt{5})$ dir.

3.4. H($\sqrt{5}$)'in Serbest Normal Alt Grupları

$\mathbf{H}(\sqrt{5})$, 2. mertebeden sonlu bir devirli grup ve bir sonsuz devirli grubun serbest çarpımı olduğundan Kurosh alt grup teoremi gereğince iki çeşit normal alt grubu vardır: Serbest olanlar ve mertebesi 2 olan bazı devirli gruplar ile bazı sonsuz devirli grupların serbest çarpımı olanlar. Bu nedenle serbest normal alt grupların çalışılması önemlidir.

3.4.1. Yardımcı Teorem. N, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in aşikar olmayan bir normal alt grubu olsun. O zaman N serbesttir ancak ve ancak N, sonlu mertebeli eleman bulundurmaz.

İspat. Varsayalım ki N sonlu mertebeli eleman bulundurmasın. Kurosh alt grup teoremi gereğince

$$N \cong F * \prod_{*} B_\beta$$

olur. Burada F ya serbesttir ya da $\{I\}$ dır ve her bir B_β, $\{R\}$'ye eşleniktir. N sonlu mertebeli eleman bulundurmadığından $\prod_{*} B_\beta$ çarpımı yoktur ve N aşikar olmadığından serbest olmalıdır.

Tersine N serbest ise sonlu mertebeli eleman bulundurmaz. □

3.4.2. Yardımcı Teorem. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in sonlu mertebeli eleman bulunduran normal alt grupları $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ ve $m \in \mathbf{N}$ için $N_m(\sqrt{5}) = (0;\ 2^{(m)}, \infty^{(2)})$ şeklindeki gruplardır.

İspat. N, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in sonlu mertebeli bir eleman bulunduran bir normal alt grubu olsun. O zaman N, mertebesi 2 olan bir eleman bulunduracaktır. İkinci mertebeden bir eleman R'ye eşlenik olduğundan ve N normal olduğundan N, R'yi bulunduracaktır. Bu durumda karşımıza iki hal çıkar:

(i) Eğer N, S'yi de bulunduruyorsa N = **H**($\sqrt{5}$) olduğu açıktır.

(ii) Eğer N, S'yi bulundurmuyorsa, **H**($\sqrt{5}$)'den **H**($\sqrt{5}$)/N'ye olan homomorfizm altında R özdeşlik dönüşümüne resmedilirken, S de herhangi bir $m \in \mathbf{N}$ için, $m | \mu$ olmak üzere m-devirlere resmedilebilir. Bu durumda T de m-devirlere resmedilecektir.

$R \to (1)(2)\ldots(\mu)$

$S \to (1\ 2 \ldots m)\ldots(\mu\text{-}m\text{+}1 \ldots \mu)$, μ/m tane m-devir

$T \to (1\ 2 \ldots m)\ldots(\mu\text{-}m\text{+}1 \ldots \mu)$, μ/m tane m-devir.

Permütasyon metodu ile N'nin simgesini $(g;\ 2^{(\mu)},\ \infty^{(2\mu/m)})$ şeklinde elde ederiz. Riemann-Hurwitz formülü ile $g = 1 - \mu/m$ bulunur. $\mu = m$ iken $g = 0$ bulunur ki bu durumda **H**($\sqrt{5}$)/N bölüm grubu C_m'e izomorftur ve $N \cong (0;\ 2^{(m)},\ \infty^{(2)})$ olur. $g \geq 0$ olduğundan başka bir hal söz konusu değildir. □

Dikkat edilirse **H**($\sqrt{5}$)'in, sonlu mertebeli eleman bulunduran sonsuz çoklukta normal alt grubu vardır.

3.4.3. Sonuç. N, **H**($\sqrt{5}$)'in cinsi $g > 0$ olan bir normal alt grubu olsun. O zaman N bükümsüzdür (torsion-free). □

Bu sonucun tersi doğru değildir. Örneğin 3.3'de elde ettiğimiz $Y_n(\sqrt{5})$ alt grupları bükümsüzdürler ve bu alt gruplar için $g = 0$ dır.

Şimdi **H**($\sqrt{5}$)'in bir normal alt grubunun serbest olup olmadığını belirleyebiliriz:

3.4.4. Teorem. N, **H**($\sqrt{5}$)'in, $N_m(\sqrt{5})$'den ($m \in \mathbf{N}$) farklı aşikar olmayan bir normal alt grubu olsun. O zaman N serbesttir.

İspat. 3.4.1 ve 3.4.2 Yardımcı teoremlerinden görülür. □

3.4.5. Teorem. G, **H**($\sqrt{5}$)'in sonlu μ indeksli bir serbest normal alt grubu olsun. O zaman G'nin simgesi

$$\left(1 + \frac{\mu}{4} - \frac{t}{2};\ \infty^{(t)}\right)$$

şeklindedir.

İspat. G serbest olduğundan simgesi $(g; \infty^{(t)})$ şeklinde olacaktır. Riemann-Hurwitz formülü ile $g = 1 + \frac{\mu}{4} - \frac{t}{2}$ bulunur. □

Şimdi $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in hangi normal alt gruplarının serbest olduğunu biliyoruz. Bu alt grupların rankını ve indeksini bilmek de önemlidir. Eğer N, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in cinsi g olan bir serbest alt grubu ise N'nin rankı

$$r = 2g + t - 1$$

dir. Hemen belirtelim ki $g = 0$ iken $r = t - 1$ ve $g = 1$ iken $r = t + 1$ dir.

N, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in indeksi μ olan bir serbest normal alt grubu olsun. Teorem 3.4.5'de N'nin cinsini $g = 1 + \frac{\mu}{4} - \frac{t}{2}$ bulmuştuk. Dikkat edilirse $g = 0$ için $\frac{\mu}{4} = \frac{t}{2} - 1$ elde ederiz ki sonsuz çoklukta serbest normal alt grup bulmak mümkündür (gerçekten, $\mu = 2m$ için $t = m + 2$ bulunur). $g = 1$ için $\frac{\mu}{4} = \frac{t}{2}$ ve buradan $\mu = 2t$ bulunur. Yine bu denklemin sonsuz çoklukta çözümü olduğundan $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in cinsi 1 olan sonsuz çoklukta serbest normal alt grubu vardır.

3.5. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in Cinsi 1 Olan Normal Alt Grupları

Hatırlanacağı gibi {m, n} tipindeki bir düzgün figürün n_0 köşesi, n_1 kenarı ve n_2 yüzü varsa ve bu figür cinsi g olan yönlendirilebilir, kenarsız, kompakt ve bağlantılı bir yüzey üzerinde ise {m, n}'nin Euler karakteristiği

$$\chi = n_0 - n_1 + n_2 = 2 - 2g$$

eşitliği ile verilir ve ek olarak

$$nn_0 = 2n_1 = mn_2$$

bağıntısı sağlanır. Bu iki eşitliğin ortak çözümünden

$$\chi = \frac{n_1}{mn}(4 - (m-2)(n-2))$$

elde edilir.

Bu bölümde cinsi 1 olan yani tor üzerinde hareket eden normal alt grupları ve dolayısıyla tor üzerindeki düzgün figürleri bulmak istiyoruz. Bunun için $g = 1$ yazılarak $\chi = 0$ elde edilir ve böylece

$$(m - 2)(n - 2) = 4$$

bağıntısı bulunur. Bu eşitliğin doğal sayı çözümleri ise

$$\{3, 6\}, \{4, 4\} \text{ ve } \{6, 3\}$$

şeklindedir. Bunlar ise kompleks düzlemin tüm düzgün örtüleridir. Torun evrensel örtüsü, kompleks düzleme konform olarak denktir. Tor üzerindeki bu üç tip düzgün figür Jones ve Singerman (1987) ve Coxeter ve Moser'de (1957)

$$\{3, 6\}_{b,c}, \{4, 4\}_{b,c} \text{ ve } \{6, 3\}_{b,c}$$

olarak sınıflandırılmışlardır. Burada b, c negatif olmayan tamsayılardır ve her ikisi de aynı anda sıfır olamaz. Jones ve Singerman (1987) düzgün figürler ile bazı üçgen gruplarının normal alt grupları arasında 1-1 bir dönüşüm olduğunu ispatlamışlardır. $\mathbf{H}(\sqrt{5}) \cong (2, \infty, \infty)$'dan $(2, m, n)$ $(m, n \in \mathbf{N})$ üçgen grubunun sonlu bir bölümü üzerine bir θ homomorfizmi vardır. 2. mertebeden olan R üreteci $(2, m, n)$'de 2. mertebeden r üretecine, mertebesi ∞ olan S üreteci mertebesi m olan s üretecine ve $T = RS$ çarpımı da rs'ye resmedilmiştir. Bu homomorfizm $(2, m, n)$'nin bir normal alt grubunu verir. N, $(2, m, n)$'nin bu şekilde elde edilen indeksi μ olan bir normal alt grubu olsun. O zaman $\theta^{-1}(N)$, $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in indeksi μ olan bir normal alt grubudur. $(2, m, n)$'nin her bir normal alt grubuna karşılık gelen $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür vardır. μ sayısının aynı zamanda $\{m, n\}$'nin otomorfizm grubunun mertebesi olduğu bilinir. Benzer şekilde $\{m, n\}$ tipinde her düzgün figür için $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in bir normal alt grubu mevcuttur.

$\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in cinsi 1 olan normal alt gruplarını, bu karşılık gelmeyi kullanarak inceleyeceğiz. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'den $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ ve $(2, 6, 3)$ sonsuz üçgen grupları üzerine homomorfizmler mevcut olduğundan $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in $\{4, 4\}$, $\{3, 6\}$ ve $\{6, 3\}$ tipindeki düzgün figürlere karşılık gelen sonsuz sayıda cinsi 1 olan normal alt grubu vardır. Aynı zamanda $\{4, 4\}_{b,c}$ figürünün otomorfizm grubunun mertebesi $4(b^2 + c^2)$ ve $\{3, 6\}_{b,c}$ ya da duali olan $\{6, 3\}_{b,c}$ figürünün otomorfizm grubunun mertebesi $6(b^2 + bc + c^2)$ dir.

Şimdi $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in tor üzerinde hareket eden normal alt gruplarını bulalım. Cinsi 1 olan bir normal alt grup bulabilmek için $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'i (2, 4, 4), (2, 3, 6) ve ya (2, 6, 3) üzerine bir homomorfizm (epimorfizm) ile resmetmek gerekir. Önce (2, 6, 3) üzerine resmedelim. (2, 6, 3) sonlu bir grup olmadığından (2, 6, 3)'ün sonlu bir bölüm grubu üzerine resmedeceğiz. Bu bölüm grubunu da tamamen b ve c sayılarına bağlı olarak belirleyeceğiz.

G, (2, 6, 3)'ün bu özellikteki bir bölüm grubu olsun. O halde G = (2, 6, 3)/M şeklinde düşünülebilir. G'yi aynı zamanda $\mathbf{H}(\sqrt{5})/[6,3]_{b,c}$ şeklinde ele alırsak bu bölüm grubunun indeksi yukarıda verildiği gibi $6(b^2 + bc + c^2)$ olacaktır. $[6,3]_{b,c}$ ile belli bir (b, c) çiftine karşılık gelen (yukarıdaki şartları sağlayan) normal alt grubu, yani

$$\theta : \mathbf{H}(\sqrt{5}) \to G \cong \mathbf{H}(\sqrt{5})/[6,3]_{b,c}$$

epimorfizminin çekirdeğini göstereceğiz. Her (b, c) çifti için $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in indeksi $\mu = 6(b^2 + bc + c^2)$ olan bir $[6,3]_{b,c}$ normal alt grubunu elde ederiz. Buradaki epimorfizm şu şekilde verilebilir:

$R \to (\,1\;2\,)(\,3\;4\,)\ldots(\,\mu\text{-}1\;\;\mu\,)$

$S \to (\,2\;3\;6\;1\;4\;5\,)(\,8\;9\;12\;7\;10\;11\,)\ldots(\,\mu-4\;\;\mu-3\;\;\mu\;\;\mu-5\;\;\mu-2\;\;\mu-1\,)$

$T \to (1\;3\;5)(2\;4\;6)\ldots(\,\mu-5\;\;\mu-3\;\;\mu-1\,)(\,\mu-4\;\;\mu-2\;\;\mu\,)$.

Böylece permütasyon metodu ile $[6,3]_{b,c}$'nin simgesini $(1;\ \infty^{(3(b^2+bc+c^2))})$ şeklinde buluruz. Bu da serbest bir grup olup rankı

$$r = 2.1 + 3(b^2 + bc + c^2) - 1 = \frac{\mu}{2} + 1$$

dir.

Benzer şekilde $\theta : \mathbf{H}(\sqrt{5}) \to (2,\ 4,\ 4)/M \cong G \cong \mathbf{H}(\sqrt{5})/[4,4]_{b,c}$ epimorfizmini göz önüne alalım. $\mu = 4(b^2 + c^2)$ olduğunu hatırlayalım.

$R \to (\,1\;3\,)(\,2\;4\,)\ldots(\,\mu-3\;\;\mu-1\,)(\,\mu-2\;\;\mu\,)$

$S \to (\,1\;2\;3\;4\,)\ldots(\,\mu-3\;\;\mu-2\;\;\mu-1\;\;\mu\,)$

$T \to (\,1\;4\;3\;2\,)\ldots(\,\mu-3\;\;\mu\;\;\mu-1\;\;\mu-2)$

olup permütasyon metodu ile $[4, 4]_{b,c}$ 'nin simgesini $(1;\ \infty^{(2(b^2+c^2))})$ buluruz bu alt grubun rankı da

$$r = 1 + 2(b^2 + c^2) = \frac{\mu}{2} + 1$$

dir.

(2, 3, 6), (2, 6, 3)'ün duali olduğundan benzer işlemler yapılırsa her (b, c) çifti için $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in indeksi $\mu = 6(b^2 + bc + c^2)$ ve simgesi $(1;\ \infty^{(3(b^2+bc+c^2))})$ olan bir $[3, 6]_{b,c}$ normal alt grubunu elde ederiz.

3.6. H($\sqrt{5}$) ve H($\sqrt{7}$)'nin Temel Denklik Alt grupları

Bu bölümde $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ ve $\mathbf{H}(\sqrt{7})$ gruplarının önemli normal alt grupları olan temel denklik alt grupları incelenecektir. Bu bölüm boyunca $\mathbf{H}(\sqrt{m})$ ile $m = 5{,}7$ olmak üzere $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ ve $\mathbf{H}(\sqrt{7})$'yi göstereceğiz. Her bir durumda $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'nin temel denklik alt grupları ile bölümleri bulunacak ve sonra bu normal alt grupların grup yapıları belirlenecektir. Bunun için özellikle Macbeath'in (1969) elde ettiği sonuçları kullanacağız. Önce Macbeath'in bu çalışmasından bazı sonuçlar hatırlatılacak ve bu sonuçlar, bölüm gruplarının belirlenmesinde kullanılacaktır.

p asal olmak üzere $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'in *seviyesi p olan temel denklik alt grubu*

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) = \{\ M \in \mathbf{H}(\sqrt{m}) : M \equiv \pm I \ (\text{mod } p)\ \}$$

şeklinde tanımlanır. Bu,

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) = \left\{ T(z) = \frac{az + b\sqrt{m}}{c\sqrt{m}z + d} : a \equiv d \equiv \pm 1,\ b \equiv c \equiv 0 \ (\text{mod}\, p),\ ad - mbc = 1 \right\}$$

tanımına denktir. $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$, $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'in bir normal alt grubudur. Tanım gereğince $\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) \lhd \mathbf{H}_ç(\sqrt{m})$ olduğu açıktır. $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'in bir $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$ temel denklik alt grubu bulunduran bir alt grubuna, *seviyesi p olan bir denklik alt grubu* denir. Genel olarak tüm denklik alt grupları $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'de normal olmak zorunda değildir.

$\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$'i elde etmenin bir diğer yöntemi, p asal olmak üzere p modülüne göre "*indirgeme homomorfizmi*" ni göz önüne almaktır.

$\wp$, $\mathbf{Z}(\sqrt{m}\,)$'nin bir ideali olsun. O zaman

$$\Theta_{\wp} : \mathbf{Z}(\sqrt{m}\,) \to \mathbf{Z}(\sqrt{m}\,)/\wp$$

doğal dönüşümü bir

$$\mathbf{H}(\sqrt{m}\,) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z}(\sqrt{m}\,)/\wp)$$

dönüşümü indirger ki bu dönüşümün çekirdeği seviyesi $\wp$ olan temel denklik alt grubu olarak adlandırılacaktır.

Şimdi s, $P_m^*(\sqrt{m}\,) = x^2 - m$ polinomunun GF(p^s)'de çözümü olacak şekilde bir tamsayı olsun. Böyle bir s'nin mevcut olduğunu ve $1 \le s \le d = \text{der}\, P_m^*(\sqrt{m}\,) = 2$ olduğunu biliyoruz. u, $P_m^*(\sqrt{m}\,)$'nin GF(p^s)'de bir çözümü olsun. $\mathbf{Z}(\sqrt{m}\,)$'de u ile üretilen ideali $\wp$ olarak alalım. Yukarıdaki gibi, $\sqrt{m} \to$ u ile indirgenmiş homomorfizm olarak

$$\Theta_{p,u,m} : \mathbf{H}(\sqrt{m}\,) \to \mathrm{PSL}(2, p^s)$$

tanımlayabiliriz.

$$K_{p,u}(\sqrt{m}\,) = \text{Çek}(\Theta_{p,u,m})$$

olsun. $K_{p,u}(\sqrt{m}\,)$, $\mathbf{H}(\sqrt{m}\,)$'in bir homomorfizminin çekirdeği olduğundan $\mathbf{H}(\sqrt{m}\,)$'de normaldir.

p verildiğinde, $K_{p,u}(\sqrt{m}\,)$ p ve u'ya bağlı olduğundan her bir u kökü için farklı bir çekirdek elde etme şansımız vardır. Bununla birlikte bazen bunlar çakışırlar:

3.6.1. Yardımcı Teorem. Eğer u ve v GF(p^s) üzerinde $P_m^*(\sqrt{m}\,)$'in aynı indirgenemeyen f çarpanına karşılık geliyorlarsa o zaman

$$K_{p,u}(\sqrt{m}\,) = K_{p,v}(\sqrt{m}\,)$$

dir.

İspat. Hemen belirtelim ki $A \in K_{p,u}(\sqrt{m}\,)$ olması için gerek ve yeter şart GF(p^s)'de $g(u) = h(u) = k(u) = l(u) = 0$ olmak üzere

$$A = \pm\begin{pmatrix} 1+g(\sqrt{m}) & h(\sqrt{m}) \\ k(\sqrt{m}) & 1+l(\sqrt{m}) \end{pmatrix}$$

olmasıdır. Bu nedenle, f indirgenemez olduğundan $(g, f) = 1$ ya da f dir. Çünkü polinomlar halkası Euclid halkasıdır. Eğer $(g, f) = 1$ ise o zaman $ag + bf = 1$

olacak şekilde a ve b polinomları vardır. Fakat $f(u) = g(u) = 0$ dır. Bundan dolayı $(g, f) = f$ ve g, f'nin bir katıdır. Benzer şekilde g, k ve l'nin hepsi f'nin katlarıdır. v, $P_m^*(\sqrt{m})$'in aynı çarpanının bir diğer kökü olduğundan $GF(p^s)$'de $g(v) = h(v) = k(v) = l(v) = 0$ dır, yani $A \in K_{p,v}(\sqrt{m})$ dir. □

u ve v $P_m^*(\sqrt{m})$'in farklı çarpanlarını verdikleri zaman da $K_{p,u}(\sqrt{m}) = K_{p,v}(\sqrt{m})$ elde edebiliriz. Bu duruma bir örnek verelim. Örnek 3.6.7'de sırasıyla $P_5^*(\sqrt{5})$'in mod 11'deki iki kökü için $K_{11,4}(\sqrt{5}) - \mathbf{H}_{11}(\sqrt{5})$ ve $K_{11,7}(\sqrt{5}) - \mathbf{H}_{11}(\sqrt{5})$'de $A = \begin{pmatrix} 113\sqrt{5} & 11 \\ 154 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 118\sqrt{5} & 11 \\ 429 & 8\sqrt{5} \end{pmatrix}$ tek elemanlarını bulacağız. Fakat

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 113\sqrt{5} & 11 \\ 154 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\sqrt{5} & -11 \\ -429 & 118\sqrt{5} \end{pmatrix} \equiv -I \bmod 11$$

dir yani

$$A.\mathbf{H}_{11}(\sqrt{5}) = B.\mathbf{H}_{11}(\sqrt{5})$$

öyle ki

$$K_{11,4}(\sqrt{5}) = K_{11,7}(\sqrt{5})$$

dir.

3.6.2. Teorem. $K_{p,u}(\sqrt{m})$, $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'in seviyesi p olan bir normal denklik alt grubudur, yani

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) \trianglelefteq K_{p,u}(\sqrt{m})$$

dir. Bu nedenle

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) \leq \bigcap_{\text{tüm u'lar}} K_{p,u}(\sqrt{m})$$

dir.

İspat. İspata başlamadan önce, halka homomorfizmlerinden grup homomorfizmlerini elde etmenin bir yolunu hatırlayalım.

R ve S, özdeşlikli iki halka olsunlar.

$$\psi : R \to S$$

bir halka homomorfizmi olsun. O zaman ψ bir

$$\overline{\psi} : SL(2, R) \to SL(2, S)$$

grup homomorfizmi indirger. PSL(2, R), SL(2, R)'den merkezi $\{\pm I\}$'ya bölünerek elde edildiğinden benzer şekilde aynı ψ, bir diğer

$$\underline{\psi} : PSL(2, R) \rightarrow PSL(2, S)$$

grup homomorfizmi indirger.

Halka homomorfizmlerinden grup homomorfizmlerini elde etmenin bu genel yöntemi aşağıdaki şekilde $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'e uygulanabilir: Tamsayıların halkasının $\sqrt{m}$ ile bir genişlemesi olan $\mathbf{Z}(\sqrt{m})$'i göz önüne alalım. Eğer asal bir p sayısı için bu halkadaki tüm elemanları p modülüne göre indirgersek bir

$$\varphi_p : \mathbf{Z}(\sqrt{m}) \rightarrow \mathbf{Z}_p(\sqrt{m})$$

halka homomorfizmi elde ederiz ki bu homomorfizm, $\mathbf{Z}(\sqrt{m})$'in elemanlarını p modülüne göre indirger. Şimdi, eğer varsa $P_m^*(\sqrt{m})$'in her bir $u \in GF(p)$ kökü için $\sqrt{m}$'i $u \in GF(p)$'ye götüren bir

$$\chi_u : \mathbf{Z}_p(\sqrt{m}) \rightarrow \mathbf{Z}_p = GF(p)$$

halka homomorfizmi vardır. Bu iki halka homomorfizmi, iki grup homomorfizmi indirger:

$$\underline{\varphi_p} : \mathbf{H}(\sqrt{m}) < PSL(2, \mathbf{Z}(\sqrt{m})) \rightarrow \Gamma_p(\sqrt{m}) < PSL(2, \mathbf{Z}p(\sqrt{m}))$$

ve

$$\underline{\chi_u} : \Gamma_p(\sqrt{m}) < PSL(2, \mathbf{Z}p(\sqrt{m})) \rightarrow PSL(2, p).$$

Burada $\Gamma_p(\sqrt{m})$, $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'in p modülüne göre $\mathbf{R}_p$ ve $\mathbf{S}_p$ ile üretilen resmini gösterir.

$P_m^*(\sqrt{m})$'in her bir $u \in GF(p)$ kökü için $K_{p,u}(\sqrt{m})$,

$$\underline{\chi_u} \circ \underline{\varphi_p} : \mathbf{H}(\sqrt{m}) \rightarrow PSL(2, p)$$

bileşke homomorfizminin çekirdeğidir.

Eğer bir u kökü GF(p)'de değilse o zaman bir $GF(p^s)$ cisim genişlemesindedir. Bu durumda yukarıdaki düşünce $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'den $PSL(2, p^s)$'ye olan homomorfizme uygulanabilir ve bu homomorfizmin çekirdeği bize $K_{p,u}(\sqrt{m})$'i verir.

$\mathbf{H}(\sqrt{m})$'in bir T elemanı

$$T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.12)}$$

şeklindedir. Burada d = 2, $P_m^*(\sqrt{m})$ polinomunun derecesi olmak üzere her bir p_i $\sqrt{m}$'nin derecesi d - 1 = 1'den büyük olmayan bir polinomdur. $\underline{\varphi_p}$ altında T, $\underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{p_1} & \underline{p_2} \\ \underline{p_3} & \underline{p_4} \end{pmatrix}$'ye resmedilir. Burada $\underline{p_i}$, $\sqrt{m}$'nin katsayıları GF(p)'de olan polinomunu gösterir. Son olarak $\underline{\chi_u}$ ile T, PSL(2, p)'de $\underline{T_u} = \begin{pmatrix} \underline{p_1(u)} & \underline{p_2(u)} \\ \underline{p_3(u)} & \underline{p_4(u)} \end{pmatrix}$'ye resmedilir. Burada $\underline{p_i(u)}$, $\underline{p_i}$'nin $u \in GF(p)$'deki değerini göstermektedir.

Şimdi Teorem 3.6.2'yi ispatlayabiliriz. $T \in \mathbf{H}_p(\sqrt{m})$, (3.12)'deki gibi olsun. O zaman $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$'in tanımı gereğince

$$p_1 \equiv p_4 \equiv \pm 1 \bmod p, \; p_2 \equiv p_3 \equiv 0 \bmod p$$

dir. Bu nedenle T, yukarıda tanımlanan $K_{p,u}(\sqrt{m})$ çekirdeğinin bir elemanıdır. Bu nedenle

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) \leq K_{p,u}(\sqrt{m})$$

elde edilir. Üstelik $K_{p,u}(\sqrt{m})$ ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$, $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'de normal olduklarından

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) \trianglelefteq K_{p,u}(\sqrt{m})$$

elde edilir. □

Teorem 3.6.2 gereğince $K_{p,u}(\sqrt{m})$, $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'nin bir denklik alt grubudur. $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$'nin $K_{p,u}(\sqrt{m})$'deki indeksinin, birkaç durum hariç 1 ya da 2 olduğunu göreceğiz.

$\sqrt{m}$'nin minimal polinomu olan $x^2 - m$ polinomunun derecesi 2 olduğundan bu tezde sedece GF(p) ve ya GF(p^2)'de kalan u'lar için $K_{p,u}(\sqrt{m})$ çekirdeğini bulmaya çalışacağız.

$\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$'nin $K_{p,u}(\sqrt{m})$'deki indeksi 1 değilken yani bunlar farklı iken, $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$'yi bulmak için $K_{p,u}(\sqrt{m})$'yi kullanacağız. Gerçekte tüm haller için ilk olarak $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'nin $K_{p,u}(\sqrt{m})$ ile bölümünü belirleyeceğiz ve sonra bunu kullanarak $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'nin $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$ ile bölümünü belirleyeceğiz. Bunun için de

Macbeath'in bazı sonuçlarını kullanacağız (Macbeath'e (1969) bakınız). Şimdi bu sonuçları çalışmalarımız için gerektiği kadarıyla kısaca özetleyelim.

p asal sayı ve $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere $\mathbf{k} = GF(p^n)$, p^n elemanlı cisim ve $\mathbf{k_1}$ bunun bir tek olan ikinci dereceden genişlemesi olsun. $G \cong G_0/\{\pm I\}$ olmak üzere $G_0 = SL(2, \mathbf{k})$ ve $G = PSL(2, \mathbf{k})$ olsun. Aynı zamanda $SL(2, \mathbf{k_1})$'in, $a, b \in \mathbf{k_1}$ ve $a^{q+1}-b^{q+1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^q & a^q \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrislerinden oluşan G_1 alt grubunu göz önüne alacağız. Macbeath G_0'ın elemanlarının (A, B, C), $C = (AB)^{-1}$ G_0-üçlülerini, bunların ürettiği alt grupların hangi tipten olduğunu bulmak için sınıflandırmıştır. (A, B, C) G_0-üçlüsünün elemanlarının izlerinin sıralı üçlüsü bir (α, β, γ) $\mathbf{k}$-üçlüsü olacaktır. Aynı zamanda l, m ve n G'de A, B ve C' nin mertebeleri olmak üzere her bir (A, B, C) G_0-üçlüsüne bir (l, m, n) **N**-üçlüsü karşılık gelir.

Macbeath ilk olarak G_0-üçlülerini göz önüne almış ve $\Phi : G_0 \to G$ doğal homomorfizmini kullanarak aşağıdaki şekilde G-üçlülerine geçmiştir: Eğer H, G'nin $\Phi(A)$, $\Phi(B)$ ve $\Phi(C)$ ile üretilen alt grubu ise H, (A, B, C) G_0-üçlüsü ile üretilen alt gruptur diyeceğiz.

Hecke grupları için $A = r_p$, $B = s_p$ ve $C = t_p$ dir. Burada r_p (sırasıyla s_p ve t_p) R'nin (sırasıyla S ve T'nin), $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'nin tüm elemanlarını p modülüne göre indirgeyen $\underline{\varphi_p}$ homomorfizmi altındaki resmini göstermektedir. Bu nedenle karşılık gelen $\mathbf{k}$-üçlü (0, u, 2) dir. Burada u, $P_m^*(\sqrt{m})$ polinomunun p modülüne göre GF(p)'deki ya da uygun bir cisim genişlemesindeki bir köküdür. Aynı zamanda karşılık gelen N-üçlü (2, l, p) dir. Burada l değeri p'ye bağlı olarak değişmektedir.

Macbeath G'nin üç çeşit alt grubunu elde etmiştir: Afin, özel ve projektif gruplar. Şimdi bunların Hecke grupları ile ilişkilerini ele alalım.

$p > 2$ olsun. Eğer

$$Q_{\alpha,\beta,\gamma}(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \alpha\eta\zeta + \beta\xi\zeta + \gamma\xi\eta$$

ikinci dereceden formu singülerse, yani

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma/2 & \beta/2 \\ \gamma/2 & 1 & \alpha/2 \\ \beta/2 & \alpha/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ise (α, β, γ) **k**-üçlüsüne singüler denir. Şimdi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrislerin kümesini göz önüne alalım. Bunlar G_0'ın bir alt grubunu oluştururlar. Φ doğal homomorfizmi ile bunu G'ye resmederek G'nin bir A_1 alt grubunu elde ederiz. Şimdi $\mathbf{k}_1$, k'nın bir tek olan ikinci dereceden genişlemesi olmak üzere G_1'de

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^q \end{pmatrix}, \; t \in \mathbf{k}_1, \; t^{q+1} = 1$$

matrislerinin kümesini göz önüne alalım. Bu küme SL(2, $\mathbf{k}_1$)'in bir alt grubuna eşleniktir. İlk olarak G_1'den G_0'a bir izomorfizm ile ve sonra G_0'dan G'ye Φ doğal homomorfizmi ile G'nin bir A_2 alt grubuna resmedilmiştir. G'de A_1 ya da A_2'ye eşlenik olan bir grubun herhangi bir alt grubu, G'nin bir afin alt grubu olarak adlandırılacaktır.

Bir G_0-üçlüsüne karşılık gelen (α, β, γ) **k**-üçlüsü singüler ise bu G_0-üçlüsüne singüler denir. Bir singüler G_0-üçlüsüne karşılık gelen herhangi bir grup bir afin gruptur (Macbeath 1969).

Bundan sonra p asal olmak üzere **k** = GF(p) durumu ile ilgileneceğiz.

Üreteçleri $R(z) = -\frac{1}{z}$ ve $T(z) = z + \sqrt{m}$ olan $\mathbf{H}(\sqrt{m})$ grubu için yukarıdaki determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{m}/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{m}/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{m}{4}$$

olup bu nedenle sadece $m \equiv 0$ mod p iken yok olur Yani p = m iken singüler üçlüler elde ederiz.

Sonlu üçgen gruplarına karşılık gelen **N** - üçlüleri olan $(2, 2, n)$, $n \in \mathbf{N}$, (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5) ve (2, 5, 5) ((2, 3, 5), (2, 5, 5)'in bir homomorfik resmidir) üçlüleri özel üçlüler olarak adlandırılır. Özel gruplar, sonlu üçgen gruplarının izomorfik resimleri olan bu gruplardır.

G'nin alt gruplarının son sınıfı, projektif alt grupların sınıfıdır. Genel lineer grup GL(2, **k**), katsayıları **k**'da olan tüm 2×2 singüler olmayan matrislerin grubudur. PGL(2, **k**) grubu, GL(2, **k**)'nın skaler matrislere bölünmesiyle elde edilir. PGL(2, **k**) ve PSL(2, **k**) grupları $p = 2$ iken çakışırlar fakat diğer durumlarda ilki, ikincisini indeksi 2 olan bir alt grup olarak kapsar. $\mathbf{k_1}$, **k**'nın ikinci dereceden genişlemesi olsun. O zaman **k**'nın her elemanı $\mathbf{k_1}$'de bir karedir ve bu nedenle PGL(2, **k**), PSL(2, $\mathbf{k_1}$)'de bulunur, yani aşağıdaki kapsamaları elde ederiz:

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbf{k}) \prec \mathrm{PGL}(2, \mathbf{k}) \prec \mathrm{PSL}(2, \mathbf{k_1}).$$

Eğer $\mathbf{k_s}$, **k**'nın bir alt cismi ise o zaman PSL(2, $\mathbf{k_s}$) $\prec$ PSL(2, **k**) olduğu açıktır. Eğer aynı zamanda k_{s_1} ikinci dereceden genişlemesi **k**'nın bir alt cismi ise o zaman PGL(2, $\mathbf{k_s}$) $\prec$ PSL(2, **k**) dır. Kısaca **k**'nın tüm cisimleri için PSL(2, $\mathbf{k_s}$) grupları ve mümkün olduğu zaman PGL(2, $\mathbf{k_s}$) grupları, PGL(2, **k**)'daki eşlenikleri ile birlikte G'nin projektif alt grupları olarak adlandırılacaktır.

Dickson (1901), G'nin her alt grubunun ya afin, ya özel ya da projektif olduğunu ispatlamıştır. Alt grupların bu aileleri ayrık değildir. Örneğin projektif grupların aşağıdaki örnekleri tanıma göre özeldirler:

$$\mathrm{PSL}(2, 5) \cong \mathrm{PSL}(2, 2^2) \cong A_5$$

$$\mathrm{PSL}(2, 2) \cong (2, 2, 3), \mathrm{PSL}(2, 3) \cong A_4.$$

Problem, (r_p, s_p, t_p) G_0-üçlüsü ile alt grupların bu üç çeşidinden hangisinin üretildiğini belirlemektir. Bunun için Macbeath tarafından ispatlanan aşağıdaki sonuçları kullanacağız (Macbeath 1969):

2.6.3. Teorem. Singüler ya da özel olmayan bir G_0-üçlüsü, G'nin bir projektif alt grubunu üretir. □

2.6.4. Teorem. Eğer bir G_0-üçlüsü G'nin bir projektif alt grubunu üretiyorsa o zaman ya PSL(2, κ)'ya izomorfik bir alt grup ya da PGL(2, κ_0)'a izomorfik bir alt grup üretir. Burada κ, **k**'nın α, β ve γ'yı bulunduran en küçük alt cismidir ve eğer varsa κ_0, κ'nın ikinci dereceden genişlemesi olduğu bir alt cisimdir. □

Singüler ya da özel olmayan **k**-üçlüler vardır. Bunlar irregüler olarak adlandırılır. Yani bir **k**-üçlüsü irregüler olarak adlandırılır eğer bunun elemanları ile üretilen alt cisim (buna κ diyelim), bir diğer κ_0 alt cisminin bir ikinci dereceden genişlemesi ise ve eğer bu üçlünün elemanlarından biri κ_0'da bulunurken diğerleri κ_0'da kare olmayan bir sayının κ'daki karekökleri ise ya da sıfırsa. O zaman aşağıdaki teoremi verebiliriz:

3.6.5. Teorem. Özel, singüler ya da irregüler olmayan bir G_0-üçlü G'de PSL(2, κ)'ya izomorfik bir projektif grup üretir. Burada κ, bu üçlünün matrislerinin izleri ile üretilen alt cisimdir. □

Şimdi $\mathbf{H}(\sqrt{m})$, m = 5, 7 gruplarının $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$ ve $K_{p,u}(\sqrt{m})$ grupları ile bölümlerini ve sonra bunların grup yapılarını bulalım. Önce $\mathbf{H}(\sqrt{m})$'in $K_{p,u}(\sqrt{m})$ ile bölümünü bulacağız. Bu durumda $\mathbf{H}(\sqrt{m})/\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$'i belirlemek kolay olacaktır. Bunun için de yukarıda özetlediğimiz sonuçları kullanacağız. İlk olarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ grubunun temel denklik alt grupları ile bölümlerini bulalım.

3.6.6. Teorem. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ Hecke grubunun, $K_{p,u}(\sqrt{5})$ denklik alt grupları ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{5})$ temel denklik alt grupları ile bölüm grupları aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/K_{p,u}(\sqrt{5}) \cong \begin{cases} \mathrm{PSL}(2,p) & p \equiv \pm 1 \bmod 10 \text{ ise} \\ \mathrm{PGL}(2,p) & p \equiv \pm 3 \bmod 10,\ p \neq 3 \text{ ise} \\ C_2 & p = 5 \text{ ise} \\ S_4 & p = 3 \text{ ise} \\ D_3 & p = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_p(\sqrt{5}) \cong \begin{cases} C_2 \times \mathrm{PSL}(2,p) & p \equiv \pm 1 \bmod 10 \text{ ise} \\ \mathrm{PGL}(2,p) & p \equiv \pm 3 \bmod 10,\ p \neq 3 \text{ ise} \\ C_{10} & p = 5 \text{ ise} \\ S_4 & p = 3 \text{ ise} \\ D_6 & p = 2 \text{ ise.} \end{cases}$$

İspat. 1. Hal. $p \neq 5$ ve 5, p modülüne göre bir kare olsun. Yani $p \equiv \pm 1 \bmod 10$ olsun. Bu durumda $u^2 = 5$ olacak şekilde GF(p)'nin bir elemanı vardır. Bu nedenle

$u = \sqrt{5}$, GF(p)'nin bir elemanı olarak göz önüne alınabilir. Şimdi $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in, tüm elemanları p modülüne göre indirgeyen homomorfizmini hatırlayalım. R, S ve T'nin bu homomorfizm altındaki resimlerini sırasıyla r_p, s_p ve t_p ile göstermiştik. O zaman r_p, s_p ve t_p'nin PSL(2, p)'de bulunduğu açıktır. Şimdi

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{5} & b \\ c & d\sqrt{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} au & b \\ c & du \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & bu \\ cu & d \end{pmatrix}$$

ile indirgenen bir

$$\vartheta : \mathbf{H}(\sqrt{5}) \rightarrow PSL(2, p)$$

homomorfizmi vardır. Burada karışıklık olmaması için SL(2, p)'de a, b, c, d'nin $\mathbf{Z}_p$'deki $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ sınıfları yerine a, b, c, d yazdık. Problemimiz, G = PSL(2, p)'nin r_p, s_p ve t_p ile üretilen alt grubunu bulmaktır.

k = GF(p) olsun. O zaman **k**'nın, $\alpha = iz(r_p) = 0$, $\beta = iz(s_p) = u$ ve $\gamma = iz(t_p) = 2$'yi bulunduran en küçük alt cismi olan κ, GF(p)'nin kendisidir. Çünkü $\sqrt{5} \in$ GF(p) dir. Bu durumda tüm p'ler için (r_p, s_p, t_p) Γ_p-üçlüsü singüler değildir. Çünkü bu üçlüye karşılık gelen ikinci dereceden formun determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & u/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ u/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{4} \neq 0$$

olup $p \equiv \pm 1 \bmod 10$ olduğundan modül p'de sıfırdan farklıdır. Ayrıca bu üçlüye karşılık gelen **N**-üçlüsü (2, *l*, p) olup $p \equiv \pm 1 \bmod 10$ olduğundan özel değildir. Burada *l* değeri p'ye bağlı olarak değişecektir. Örneğin aşağıda Tablo 3.1'de bazı p değerlerine karşılık gelen *l* değerleri verilmiştir. p = 29 haricinde $l = \frac{p-1}{2}$ olduğu görülmektedir ancak genel bir ispat verilememiştir (S'nin ilk 45 kuvveti için Ek-1'e bakınız). O zaman Teorem 3.6.5 gereğince (r_p, s_p, t_p), G'nin bir projektif alt grubunu üretir ve Teorem 3.6.6 gereğince, κ = GF(p) herhangi bir diğer cismin ikinci dereceden bir genişlemesi olmadığından elde ettiğimiz alt grup PSL(2, p)'nin tamamıdır, yani

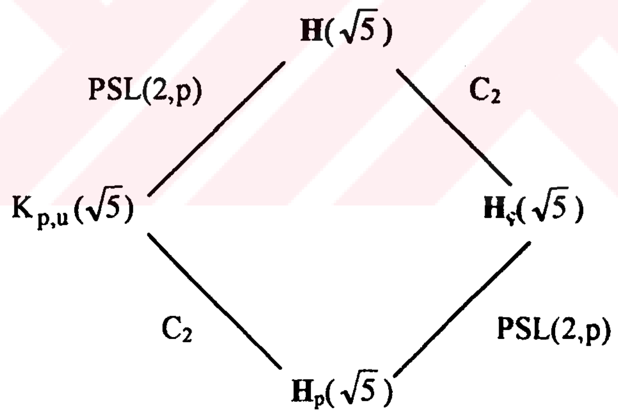
$$H(\sqrt{5})/K_{p,u}(\sqrt{5}) \cong PSL(2, p)$$

dir. Şimdi bu hal için **H($\sqrt{5}$)**'in **H$_p$($\sqrt{5}$)** temel denklik alt grubu ile bölümünü bulalım. **H$_p$($\sqrt{5}$)**'in tanımı göz önüne alınırsa tüm elemanları çifttir ve **H$_ç$($\sqrt{5}$)**'in

p	l
11	5
19	9
29	7
31	15
41	20
59	29
61	30
71	35

Tablo 3.1

bir alt grubudur. Bu nedenle **H$_p$($\sqrt{5}$)**'de tek eleman yoktur. Böylece aşağıdaki alt grup diyagramını elde ederiz:



Şekil 3.8. H($\sqrt{5}$)'in Denklik Alt Grupları

Şimdi $K_{p,u}(\sqrt{5})$/**H$_p$($\sqrt{5}$)** bölüm grubunu bulmak istiyoruz. Bölüm grubunun aşikar olmadığını göstermek için $K_{p,u}(\sqrt{5})$'in bir tek eleman bulundurduğunu göstereceğiz. Çünkü **H$_p$($\sqrt{5}$)** < **H$_ç$($\sqrt{5}$)** dir. Eğer A böyle bir tek eleman ise o zaman

$$A = \begin{pmatrix} x\sqrt{5} & y \\ z & t\sqrt{5} \end{pmatrix}; \Delta = 5xt - yz = 1,\ x, y, z, t \in \mathbf{Z}$$

olup $K_{p,u}(\sqrt{5}) - \mathbf{H}_p(\sqrt{5})$'in bir elemanıdır. Şimdi

$$A^2 = \begin{pmatrix} x\sqrt{5} & y \\ z & t\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\sqrt{5} & y \\ z & t\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x^2 + yz & \sqrt{5}(xy + yt) \\ \sqrt{5}(xz + tz) & yz + 5t^2 \end{pmatrix}$$

dir ve $xu \equiv tu \equiv 1$ ve $y \equiv z \equiv 0$ mod p olduğundan

$$x^2u^2 = 5x^2 \equiv 1 \bmod p$$

ve benzer şekilde

$$t^2u^2 = 5t^2 \equiv 1 \bmod p$$

elde ederiz. Bu nedenle $A^2 \equiv I$ mod p dir. O halde $| K_{p,u}(\sqrt{5}) : \mathbf{H}_p(\sqrt{5}) | = 2$ olup, $A \notin \mathbf{H}_p(\sqrt{5})$ olduğundan

$$K_{p,u}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}_p(\sqrt{5}) \cup A.\mathbf{H}_p(\sqrt{5})$$

yazabiliriz. Böylece bölüm grubu C_2 dir.

Şimdi $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})/\mathbf{H}_p(\sqrt{5})$'in herhangi bir $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix}$ elemanının mod p'de A ile değişmeli olduğunu göstermek istiyoruz. Gerçekten

$$\begin{pmatrix} x\sqrt{5} & y \\ z & t\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}(ax + cy) & 5bx + yd \\ az + 5ct & \sqrt{5}(bz + dt) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ c\sqrt{5} & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\sqrt{5} & y \\ z & t\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}(ax + bz) & ay + 5bt \\ 5xc + dz & \sqrt{5}(cy + dt) \end{pmatrix}$$

ve $y \equiv z \equiv 0$, $x \equiv t$ mod p olması diyagramın değişmeliliğini sağlar. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_p(\sqrt{5}) &\cong K_{p,u}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_p(\sqrt{5}) \times \mathbf{H}_ç(\sqrt{5})/\mathbf{H}_p(\sqrt{5}) \\ &\cong C_2 \times PSL(2, p) \end{aligned}$$

olur.

Yukarıda bahsedilen bu tek elemanı bulmak için bir Diophantine denklemini çözmeye ihtiyacımız vardır. Önce bunu bir örnekle görelim:

3.6.7. Örnek. (i) $p = 11$ alalım. O zaman $u = \sqrt{5} \equiv \pm 4$ mod 11 olur. $u \equiv 4$ mod 11 seçebiliriz. $K_{11,4}(\sqrt{5})$'in, $\mathbf{H}_{11}(\sqrt{5})$'de bulunmayan bir

$$A = \begin{pmatrix} x\sqrt{5} & y \\ z & t\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

tek elemanını arıyoruz. Böyle bir eleman aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

$$\Delta = 5xt - yz = 1$$

ve

$$xu \equiv tu \equiv 1,\ y \equiv z \equiv 0 \bmod 11.$$

$u \equiv 4 \bmod 11$ olduğundan

$$x \equiv t \equiv 3 \bmod 11$$

dir. O zaman a, b, c, d negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$5(3 + 11a)(3 + 11b) - 11c.11d = 1$$

elde ederiz. Buradan

$$4 + 15(a + b) + 55ab = 11cd \qquad \textbf{(3.13)}$$

bulunur. Bu denklem, $4 + 15(a + b)$ ifadesi 11'in bir tamsayı katı iken bir çözüme sahiptir. (3.13) Diophantine denkleminin özel bir çözümü

$$a = 10,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 14$$

olup

$$A = \begin{pmatrix} 113\sqrt{5} & 11 \\ 154 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Hemen belirtelim ki $u \equiv 4 \bmod 11$ seçmiştik. Eğer $u \in GF(11)$'in diğer değeri olan 7'yi seçersek bu defa $K_{11,7}(\sqrt{5}) - \mathbf{H}_{11}(\sqrt{5})$'de bir

$$B = \begin{pmatrix} 118\sqrt{5} & 11 \\ 429 & 8\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

tek elemanını elde ederiz. Gerçekte, bu özel durumda olduğu gibi (4, 7'nin negatifidir) u'nun bu iki değerine karşılık gelen iki temel denklik alt grubundan birinin üreteçleri sadece diğerinin üreteçlerinin tersleridir. Bu nedenle de bu iki alt grup $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'de eşittirler.

(ii) İkinci olarak $p = 19$ olsun. $u = \sqrt{5} \equiv \pm\mathbf{9} \bmod 19$ olur. Yine $u \equiv 9 \bmod 19$ seçersek benzer şekilde

$$76 + 85(a + b) + 95ab = 19cd$$

diophantine denklemini elde ederiz. Bu denklemin özel bir çözümü

$$a = b = 0,\ c = 1,\ d = 4$$

olup

$$A = \begin{pmatrix} 17\sqrt{5} & 76 \\ 19 & 17\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

bulunur. □

Genel halde $p \equiv \pm 1 \bmod 10$ olsun. $A = \begin{pmatrix} x\sqrt{5} & y \\ z & t\sqrt{5} \end{pmatrix}$ matrisi yukarıdaki gibi olsun. $u \equiv \sqrt{5} \bmod p$ olmak üzere

$$\Delta = 5xt - yz = 1, \tag{3.14}$$

$$xu \equiv tu \equiv 1,\ y \equiv z \equiv 0 \bmod p \tag{3.15}$$

koşulları sağlanmalıdır. $v \in GF(p)$ elemanı $uv \equiv 1 \bmod p$ özelliğinde olsun. O zaman a, b, c, d negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$x = v + pa,\ t = v + pb,\ y = pc,\ z = pd \tag{3.16}$$

olur. Bu nedenle (3.14)'den

$$\Delta = 5(v + pa)(v + pb) - p^2dc = 1 \tag{3.17}$$

ve buradan

$$5v^2 - 1 + 5vp(a + b) + 5p^2ab = p^2dc \tag{3.18}$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$p \mid (5v^2 - 1) \tag{3.19}$$

olur. $5v^2 - 1 = kp$, $k \in \mathbf{N}$ olsun. O zaman (3.18)'den

$$k + 5v(a + b) + 5pab = pdc \tag{3.20}$$

elde ederiz. Bu denklem,

$$p \mid (k + 5v(a + b)) \tag{3.21}$$

iken çözülebilir. k ve v bilindiğinden, negatif olmayan a ve b tamsayılarını (3.21) sağlanacak şekilde seçebiliriz. Her ne kadar (3.20) denkleminin sonsuz sayıda çözümü olsa da $b = 0$, $c = 1$ seçerek özel bir çözüm elde edebiliriz:

$$A = \begin{pmatrix} (v + pa)\sqrt{5} & p \\ pd & v\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Burada a ve d bir tek şekilde seçilmiştir. Yani, $p \equiv \pm 1 \bmod 10$ iken $K_{p,u}(\sqrt{5})$'in $H_p(\sqrt{5})$'de bulunmayan bir tek elemanını daima bulmak mümkündür.

2. Hal. Şimdi p'yi, 5 p modülüne göre bir kare olmayacak şekilde seçelim ve $p \neq 5$ olsun. Yani $p \equiv \pm 3 \bmod 10$ olsun. Bu durumda $\sqrt{5}$, GF(p)'nin bir elemanı olarak göz önüne alınamaz. Bu nedenle bu cismi, $GF(p^2)$ ikinci dereceden genişlemesine genişleteceğiz. O zaman $u = \sqrt{5}$, $GF(p^2)$'de göz önüne alınabilir ve 1. haldekine benzer şekilde indirgenen bir

$$\vartheta : \mathbf{H}(\sqrt{5}) \to PSL(2, p^2)$$

homomorfizmi vardır.

$\mathbf{k} = GF(p^2)$ olsun. O zaman **k**'nın, r_p, s_p, t_p'nin α, β, γ izlerini bulunduran en küçük alt cismi olan κ da $GF(p^2)$ dir. $p \neq 3$ iken (r_p, s_p, t_p) G_0-üçlüsü özel değildir. Çünkü bu üçlüye karşılık gelen **N**-üçlü (2, p + 1, p) dir. Yine bu ifadenin de genel bir ispatı verilememiştir (S'nin ilk 45 kuvveti için Ek-1'e bakınız). Eğer p = 3 ise karşılık gelen **N**-üçlü (2, 4, 3) dür ve bu nedenle üretilen alt grup S_4 simetrik grubuna izomorfiktir.

$p > 3$ olsun. (r_p, s_p, t_p) singüler değildir. κ, $\kappa_0 = GF(p)$'nin ikinci dereceden genişlemesi olduğundan ve $\gamma = 2$ κ_0'da iken $\alpha = 0$ ve $\beta = \sqrt{5}$, κ_0'da kare olmayan 5'in κ'daki karekökleri olduğundan Teorem 3.6.6 gereğince (r_p, s_p, t_p) PGL(2, p)'yi üretir. Yani

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/K_{p,u}(\sqrt{5}) \cong PGL(2, p)$$

dir.

5, p modülüne bir kare olmadığından $K_{p,u}(\sqrt{5})$'de tek elemanlar yoktur. Bu nedenle

$$K_{p,u}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}_p(\sqrt{5})$$

ve bundan dolayı

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_p(\sqrt{5}) \cong PGL(2, p)$$

olur (Şekil 3.9).

Eğer p = 3 ise yine bu iki alt grup çakışacaktır ve

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_3(\sqrt{5}) \cong \mathbf{H}(\sqrt{5})/K_{3,u}(\sqrt{5}) \cong S_4 \cong PGL(2, 3)$$

olacaktır.

3. Hal. $p = 5$ olsun. $GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$'i göz önüne alalım. $\sqrt{5} = 0$, $GF(5)$'in bir elemanı olarak düşünülebilir. Bu durumda $t_5 \equiv I \bmod 5$ olur. $r_5^2 = 1$

$$\begin{array}{c}
\mathbf{H}(\sqrt{5}) \\
\Big|\, 2 \\
\mathbf{H}_{ç}(\sqrt{5}) \\
\Bigg|\, \dfrac{p(p-1)(p+1)}{2} \\
\mathbf{H}_{p}(\sqrt{5}) = \mathbf{K}_{p,u}(\sqrt{5})
\end{array}$$

Şekil 3.9

olduğundan r_5, s_5, t_5 ile üretilen $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{K}_{5,0}(\sqrt{5})$ grubu, mertebesi 2 olan devirli gruba izomorfiktir, yani

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{K}_{5,0}(\sqrt{5}) \cong C_2$$

olur.

Şimdi $(\sqrt{5})^2 = 5 \equiv 0$ olduğundan $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_5(\sqrt{5})$ bölüm grubunda

$$r_5^2 = t_5^5 = s_5^{10} = I,\ s_5 = r_5 t_5$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu durumda da

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_5(\sqrt{5}) \cong C_{10}$$

elde ederiz (Şekil 10'a bakınız).

4. Hal. $p = 2$ olsun. (r_2, s_2, t_2), $(2, 3, 2)$ özel **N**-üçlüsünü verir ve bu nedenle mertebesi 6 olan D_3 dihedral grubuna izomorfik bir grup üretir. Şimdi $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_2(\sqrt{5})$ bölüm grubunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$r^2 = s^6 = t^2 = I$$

bağıntılarını elde ederiz. Burada r, s ve t, $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_2(\sqrt{5})$ bölümündeki denklik sınıflarını göstermektedir. $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_2(\sqrt{5})$ bölüm grubu, mertebesi 12 olan D_6

dihedral grubuna izomorfiktir. Şekil 3.10'da $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ için alt grup diyagramları verilmiştir. $\square$

1.5. kesimde

"7, mod p'de ikinci dereceden kalandır $\Leftrightarrow p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \bmod 28$"

olduğunu ispatlamıştık. Dolayısıyla $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ ve $\mathbf{H}(\sqrt{7})$ Hecke gruplarının temel denklik ve denklik alt grupları arasında farklılıklar olacaktır. Şimdi $\mathbf{H}(\sqrt{7})$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}(\sqrt{5}) \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) = K_{5,0}(\sqrt{5}) \arrow[d, dash, "5"] \\
\mathbf{H}_5(\sqrt{5})
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{H}(\sqrt{5}) \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbf{H}_ç(\sqrt{5}) \arrow[d, dash, "3"] \\
K_{2,u}(\sqrt{5}) \arrow[d, dash, "2"] \\
\mathbf{H}_2(\sqrt{5})
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.10. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ İçin Alt Grup Diyagramları

grubunun, denklik alt grupları ile bölüm gruplarını bulalım. Tüm işlemler $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ için yaptıklarımızın benzeri olacaktır.

3.6.8. Teorem. $\mathbf{H}(\sqrt{7})$ Hecke grubunun, $K_{p,u}(\sqrt{7})$ ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{7})$ denklik alt grupları ile bölüm grupları aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{H}(\sqrt{7})/K_{p,u}(\sqrt{7}) \cong \begin{cases} PSL(2,p) & p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \bmod 28 \text{ ise} \\ PGL(2,p) & p \equiv \pm 5, \pm 11, \pm 13 \bmod 28 \text{ ise} \\ C_2 & p = 7 \text{ ise} \\ D_3 & p = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_p(\sqrt{7}) \cong \begin{cases} C_2 \times PSL(2,p) & p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \bmod 28 \text{ ise} \\ PGL(2,p) & p \equiv \pm 5, \pm 11, \pm 13 \bmod 28 \text{ ise} \\ C_{14} & p = 7 \text{ ise} \\ D_6 & p = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat. 1. Hal. $p \neq 7$ ve 7, p modülüne göre bir kare olsun. Yani $p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \bmod 28$ olsun. Bu durumda $u^2 = 7$ olacak şekilde GF(p)'de bir u elemanı vardır. Bu nedenle $u = \sqrt{7}$, GF(p)'nin bir elemanı olarak göz önüne alınabilir. O zaman bir

$$\vartheta' : \mathbf{H}(\sqrt{7}) \to PSL(2, p)$$

homomorfizmi elde ederiz.

$k = GF(p)$ olsun. $\sqrt{7}$, GF(p)'nin bir elemanı olarak düşünülebildiğinden κ da GF(p)'dir. (r_p, s_p, t_p) singüler değildir. Çünkü

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & u/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ u/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{7}{4} \neq 0$$

dır. (r_p, s_p, t_p)'ye karşılık gelen **N**-üçlüsü $(2, l, p)$ olup $p = 3$ haricinde özel değildir. Burada l değeri p'ye bağlı olarak değişmektedir. Örneğin $p = 19$ için $\sqrt{7} \equiv \pm 8 \bmod 19$ olup $l = 10$; $p = 29$ için $\sqrt{7} \equiv \pm 6 \bmod 29$ olup $l = 5$; $p = 31$ için $\sqrt{7} \equiv \pm 10 \bmod 31$ olup $l = 16$; $p = 37$ için $\sqrt{7} \equiv \pm 9 \bmod 37$ olup $l = 9$ dur. Yine bu durumda da genel bir ispat verilememiştir (S'nin ilk 30 kuvveti için Ek-2'ye bakınız). O zaman Teorem 3.3.6 ve Teorem 3.6.7 gereğince (r_p, s_p, t_p), PSL(2, p)'yi üretir, yani

$$\mathbf{H}(\sqrt{7})/K_{p,u}(\sqrt{7}) \cong PSL(2, p)$$

olur. $p = 3$ için $(2, 3, 3)$ özel **N**-üçlüsü elde edilir. Bu durumda (r_3, s_3, t_3), mertebesi 12 olan A_4 grubuna izomorfik bir grup üretir.

Şimdi diğer $\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_p(\sqrt{7})$ bölümünü bulalım. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ durumunda olduğu gibi, $K_{p,u}(\sqrt{7}) - \mathbf{H}_p(\sqrt{7})$'de bir

$$A = \begin{pmatrix} x\sqrt{7} & y \\ z & t\sqrt{7} \end{pmatrix};\ \Delta = 7xt - yz = 1,\ x, y, z, t \in \mathbf{Z}$$

tek elemanını bulabiliriz. Mod $\mathbf{H}_p(\sqrt{7})$'de A'nın mertebesi 2 dir ve bu nedenle

$$K_{p,u}(\sqrt{7}) = \mathbf{H}_p(\sqrt{7}) \cup A.\mathbf{H}_p(\sqrt{7})$$

olur. Aynı zamanda A, mod p'de $\mathbf{H_ç}(\sqrt{7})/\mathbf{H_p}(\sqrt{7})$'nin her $\begin{pmatrix} a & b\sqrt{7} \\ c\sqrt{7} & d \end{pmatrix}$ elemanı ile değişmeli olduğundan aşağıdaki değişmeli diyagramı elde ederiz (Şekil 3.11'e bakınız) ve bu nedenle

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H_p}(\sqrt{7}) &\cong K_{p,u}(\sqrt{7})/\mathbf{H_p}(\sqrt{7}) \times \mathbf{H_ç}(\sqrt{7})/\mathbf{H_p}(\sqrt{7}) \\ &\cong C_2 \times PSL(2, p) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{H}(\sqrt{7}) \arrow[dl, dash, "PSL(2, p)"'] \arrow[dr, dash, "C_2"] & \\ K_{p,u}(\sqrt{7}) \arrow[dr, dash, "C_2"'] & & \mathbf{H_ç}(\sqrt{7}) \arrow[dl, dash, "PSL(2, p)"] \\ & \mathbf{H_p}(\sqrt{7}) & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.11. H($\sqrt{7}$)'nin Denklik Alt Grupları

3.6.9. Örnek. (i) p = 3 olsun. O zaman $u = \sqrt{7} \equiv \pm 1 \mod 3$ olur. u = 1 alalım. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ için yaptığımıza benzer hesaplamalardan sonra $K_{3,1}(\sqrt{7})$'nin, $\mathbf{H_3}(\sqrt{7})$'de bulunmayan bir

$$A = \begin{pmatrix} 4\sqrt{7} & 3 \\ 9 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

tek matrisini buluruz.

(ii) p = 19 için $u = \sqrt{7} \equiv \pm 8 \mod 19$ olur. Yine $u \equiv 8 \mod 19$ alınırsa $K_{19,8}(\sqrt{7})$ - $\mathbf{H_{19}}(\sqrt{7})$'de bir

$$A = \begin{pmatrix} 202\sqrt{7} & 19 \\ 893 & 12\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

tek elemanı buluruz.

(iii) $p = 29$ için $u = \sqrt{7} \equiv \pm 6 \mod 29$ olup $u = 6$ alınırsa $K_{29,6}(\sqrt{7})$ - $\mathbf{H}_{29}(\sqrt{7})$'de bir

$$A = \begin{pmatrix} 817\sqrt{7} & 29 \\ 986 & 5\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

tek elemanı bulunur. □

2. Hal. Şimdi $p \neq 7$ olsun ve 7, mod p'de bir kare olmasın, yani $\left(\frac{7}{p}\right) = -1$ olsun. $p \equiv \pm 5, \pm 11, \pm 13 \mod 28$ olduğunu biliyoruz. O zaman $\sqrt{7}$, GF(p)'nin bir elemanı olarak göz önüne alınamaz. Eğer GF(p)'yi, ikinci dereceden genişlemesi olan $GF(p^2)$'ye genişletirsek o zaman $u = \sqrt{7}$, $GF(p^2)$'de göz önüne alınabilir ve 1. haldekine benzer şekilde indirgenen bir

$$\vartheta' : \mathbf{H}(\sqrt{5}) \rightarrow PSL(2, p^2)$$

homomorfizmi vardır.

$\mathbf{k} = GF(p^2)$ olsun. O zaman $\mathbf{k}$'nın, r_p, s_p, t_p'nin α, β, γ izlerini bulunduran en küçük alt cismi olan κ da $GF(p^2)$ dir. (r_p, s_p, t_p) G_0-üçlüsü özel değildir. Çünkü bu durumda karşılık gelen N-üçlü (2, p-1, p) ya da (2, p+1, p) olmaktadır. Bu durumda da genel bir ispat verilememiştir (S'nin ilk 30 kuvveti için Ek-2'ye bakınız). 1. halde olduğu gibi (r_p, s_p, t_p) bir singüler üçlü değildir. κ, κ_0 = GF(p)'nin ikinci dereceden genişlemesi olduğundan ve $\gamma = 2$ κ_0'da iken $\alpha = 0$ ve $\beta = \sqrt{7}$, κ_0'da kare olmayan 7'nin κ'daki karekökleri olduğundan Teorem 3.6.5 gereğince (r_p, s_p, t_p) PGL(2, p)'yi üretir. Yani

$$\mathbf{H}(\sqrt{7})/K_{p,u}(\sqrt{7}) \cong PGL(2, p)$$

olur.

7, p modülüne bir kare olmadığından $K_{p,u}(\sqrt{7})$ çekirdeğinde tek elemanlar yoktur. Bu nedenle

$$K_{p,u}(\sqrt{7}) = \mathbf{H}_p(\sqrt{7})$$

ve

$$\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_p(\sqrt{7}) \cong PGL(2, p)$$

olur (Şekil 3.12'ye bakınız).

$$
\begin{tikzcd}
H(\sqrt{7}) \arrow[d, dash, "2"] \\
H_ç(\sqrt{7}) \arrow[d, dash, "\frac{p(p-1)(p+1)}{2}"] \\
H_p(\sqrt{7}) = K_{p,u}(\sqrt{7})
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.12

3. Hal. p = 2 olsun. (r_2, s_2, t_2) G_0-üçlüsüne karşılık gelen N-üçlü (2, 3, 2) olup bu nedenle üretilen alt grup, mertebesi 6 olan D_3 dihedral grubuna izomorfiktir. Yani

$$H(\sqrt{7})/K_{2,u}(\sqrt{7}) \cong D_3$$

olur.

Şimdi $H(\sqrt{7})/H_2(\sqrt{7})$ bölüm grubunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$r^2 = s^6 = t^2 = I$$

bağıntılarını elde ederiz. Burada r, s ve t, R, S ve T'nin $H(\sqrt{7})/H_2(\sqrt{7})$ bölümündeki denklik sınıflarını göstermektedir. Böylece $H(\sqrt{7})/H_2(\sqrt{7})$ bölüm grubu, mertebesi 12 olan D_6 dihedral grubuna izomorfiktir (Şekil 3.13'e bakınız).

4. Hal. p = 7 olsun. $\sqrt{7}$, GF(7)'nin 0 elemanı olarak düşünülebileceğinden $t_7 \equiv I \bmod 7$ olur. Üstelik $r_7^2 = 1$ olduğundan

$$H(\sqrt{7})/K_{7,0}(\sqrt{7}) \cong C_2$$

olur. $H(\sqrt{7})/H_7(\sqrt{7})$ bölüm grubunda $7 \equiv 0 \bmod 7$ olduğundan

$$r_7^2 = t_7^7 = s_7^{14} = I, \; s_7 = r_7 t_7$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu durumda da

$$H(\sqrt{7})/H_7(\sqrt{7}) \cong C_{14}$$

elde ederiz (Şekil 3.13'e bakınız). □

$$\begin{array}{l}
\mathbf{H}(\sqrt{7}) \\
\big|\; 2 \\
\mathbf{H}_{ç}(\sqrt{7}) = K_{7,0}(\sqrt{7}) \\
\big|\; 7 \\
\mathbf{H}_{7}(\sqrt{7})
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
\mathbf{H}(\sqrt{7}) \\
\big|\; 2 \\
\mathbf{H}_{ç}(\sqrt{7}) \\
\big|\; 3 \\
K_{2,u}(\sqrt{7}) \\
\big|\; 2 \\
\mathbf{H}_{2}(\sqrt{7})
\end{array}$$

Şekil 3.13. H($\sqrt{7}$) İçin Alt Grup Diyagramları

Böylece m = 5 ya da 7 olmak üzere **H**($\sqrt{m}$)'nin, tüm p asal sayıları için **H**$_p$($\sqrt{m}$) temel denklik alt grupları ve $K_{p,u}$($\sqrt{m}$) denklik alt grupları ile tüm bölümlerini bulmuş olduk. Bunlar yardımıyla bu denklik alt grupları için indeks formüllerini verebiliriz.

3.6.10. Sonuç. (i) H($\sqrt{5}$)'de $K_{p,u}$($\sqrt{5}$) ve **H**$_p$($\sqrt{5}$) denklik alt gruplarının indeksleri

$$\left|\mathbf{H}(\sqrt{5})/K_{p,u}(\sqrt{5})\right| = \begin{cases} p(p-1)(p+1)/2 & 5 \bmod p\text{'de bir kare ise ve } p \neq 5 \text{ ise} \\ p(p-1)(p+1) & 5 \bmod p\text{'de bir kare değilse ve } p \neq 3 \text{ ise} \\ 2 & p = 5 \text{ ise} \\ 24 & p = 3 \text{ ise} \\ 6 & p = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\left|\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_p(\sqrt{5})\right| = \begin{cases} p(p-1)(p+1) & \text{eğer } p \neq 2, 3, 5 \text{ ise} \\ 10 & \text{eğer } p = 5 \text{ ise} \\ 24 & \text{eğer } p = 3 \text{ ise} \\ 12 & \text{eğer } p = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

(ii) $K_{p,u}$($\sqrt{7}$) ve **H**$_p$($\sqrt{7}$) denklik alt gruplarının indeksleri

$$\left|\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathrm{K}_{p,u}(\sqrt{7})\right| = \begin{cases} p(p-1)(p+1)/2 & 7 \bmod p\text{'de bir kare ise} \\ p(p-1)(p+1) & 7 \bmod p\text{'de bir kare değilse ve } p \neq 2,\ p \neq 7 \text{ ise} \\ 2 & p = 7 \text{ ise} \\ 6 & p = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\left|\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_p(\sqrt{7})\right| = \begin{cases} p(p-1)(p+1) & \text{eğer } p \neq 2, 7 \text{ ise} \\ 14 & \text{eğer } p = 7 \text{ ise} \\ 12 & \text{eğer } p = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. □

Şimdi $K_{p,u}(\sqrt{m})$ ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$, m = 5, 7 gruplarının grup yapılarını belirleyebiliriz.

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) \trianglelefteq K_{p,u}(\sqrt{m})$$

ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{m})$'nin tanımı gereğince

$$\mathbf{H}_p(\sqrt{m}) \trianglelefteq \mathbf{H}_ç(\sqrt{m})$$

olduğunu biliyoruz. İlk olarak $\mathbf{H}(\sqrt{5})$ durumunu ele alalım.

i) p = 5 olsun. Bu durumda $\mathbf{H}(\sqrt{5})/K_{5,0}(\sqrt{5}) \cong C_2$ dir. $K_{5,0}(\sqrt{5})$'in tek elemanlar bulundurmadığını görmek kolaydır. Gerçekten eğer $K_{5,0}(\sqrt{5})$, $\begin{pmatrix} a\sqrt{5} & b \\ c & d\sqrt{5} \end{pmatrix}$ gibi bir tek eleman bulundurmuş olsa bu eleman mod 5'de özdeşlik elemanına resmedilemez. $K_{5,0}(\sqrt{5})$ ve $\mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$ normal alt gruplarının her ikisinin de $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'deki indeksleri 2 olduğundan bunlar izomorf ik olmalıdırlar, yani

$$K_{5,0}(\sqrt{5}) \cong \mathbf{H}_ç(\sqrt{5})$$

olur.

Şimdi $\mathbf{H}_5(\sqrt{5})$'i göz önüne alalım.

$$\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_5(\sqrt{5}) \cong C_{10} \cong \langle\, \alpha, \beta, \gamma : \alpha^2 = \beta^5 = \gamma^{10} = I \,\rangle$$

olduğunu görmüştük. Burada $R \to \alpha$, $S \to \beta$ ve bu nedenle $RS \to \alpha\beta$ olur, yani

$R \to (\,1\ 2\,)(\,3\ 4\,)(\,5\ 6\,)(\,7\ 8\,)(\,9\ 10\,)$

$S \to (\,1\ 3\ 5\ 7\ 9\,)(\,2\ 4\ 6\ 8\ 10\,)$

ve bu nedenle

$T \to (\,1\;4\;5\;8\;9\;2\;3\;6\;7\;10\,)$

olur. Permütasyon metodu ve Riemann-Hurwitz formülü ile $\mathbf{H}_5(\sqrt{5})$'in simgesini $(2;\, \infty^{(3)})$ olarak buluruz.

ii) $p \equiv \pm 1 \bmod 10$ olsun. Bu hal için bölüm gruplarının sırasıyla PSL(2, p) ve $C_2 \times$ PSL(2, p) olduğunu ispatlamıştık. Şimdi r_p ve s_p sırasıyla R ve S'nin PSL(2, p)'deki resimleri, r_p' ve s_p' ise $C_2 \times$ PSL(2, p)'deki resimleri olsun. $r_p^2 = s_p^l = I$ ve $(r_p')^2 = (s_p')^m = 1$ bağıntıları sağlanır. Burada l'nin p'ye bağlı olarak değiştiğini söylemiştik. S'nin tek kuvvetleri tek, çift kuvvetleri çift elemanlar olduğundan l tek iken $m = 2l$ ve l çift iken $m = l$ olur. Bu durumda $K_{p,u}(\sqrt{5})$ ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{5})$ gruplarının her ikisi de serbest gruplardır. r_ps_p ve $r_p's_p'$ parabolik elemanlarının mertebeleri p dir. O zaman T, her iki bölüm grubunda da mertebesi p olan bir elemana resmedilecektir. μ, $K_{p,u}(\sqrt{5})$ denklik alt grubunun $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'deki indeksi olsun. O zaman bu alt grubun simgesi $(g;\, \infty^{(\mu/l\ +\ \mu/p)})$ olur. Riemann-Hurwitz formülü ile

$$g = 1 + \frac{\mu}{4pl}(pl - 2p - 2l)$$

bulunur. Yine μ, $\mathbf{H}_p(\sqrt{5})$ temel denklik alt grubunun $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'deki indeksi olmak üzere bu alt grubun simgesi $(g;\, \infty^{(\mu/m\ +\ \mu/p)})$ bulunur. Riemann- Hurwitz formülü ile

$$g = 1 + \frac{\mu}{4pm}(pm - 2p - 2m)$$

bulunur. Bunu bir örnekle görelim.

3.6.11. Örnek. $p = 11$ olsun. $l = 5$ ve $m = 10$ dur. O zaman bu iki bölüm grubu sırasıyla PSL(2, 11) ve $C_2 \times$ PSL(2, 11) dir. Bu nedenle $K_{11,4}(\sqrt{5}) = K_{11,7}(\sqrt{5})$'in simgesi $(70;\, \infty^{(192)})$ ve $\mathbf{H}_{11}(\sqrt{5})$'in simgesi $(205;\, \infty^{(252)})$ bulunur. □

iii) $p \equiv \pm 3 \bmod 10$ olsun. Bölüm gruplarının her ikisinin de PGL(2, p)'ye izomorfik olduğunu ispatlamıştık. $r_p^2 = s_p^{p+1} = I$ bağıntıları sağlanır. Yine ii) durumunda olduğu gibi $K_{p,u}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}_p(\sqrt{5})$'in simgesi

$$\left(1 + \frac{\mu}{4(p+1)p}(p^2 - 3p - 2);\, \infty^{\left(\frac{\mu}{p+1} + \frac{\mu}{p}\right)}\right)$$

bulunur (burada p + 1 çift olduğundan $l = m$ olduğuna dikkat ediniz).

3.6.12. Örnek. p = 3 olsun. O zaman $\mathbf{H}(\sqrt{5})/K_{3,u}(\sqrt{5}) \cong \mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_3(\sqrt{5})$ $\cong$ PGL(2, 3) $\cong S_4$ ve bu nedenle

$$K_{3,u}(\sqrt{5}) = \mathbf{H}_3(\sqrt{5}) \cong (0;\ \infty^{(14)})$$

olur. □

iv) p = 2 olsun. Bu durumda $\mathbf{H}(\sqrt{5})/K_{2,u}(\sqrt{5}) \cong D_3$ dür. $\mathbf{H}(\sqrt{5})$'in D_n üzerine olan homomorfizminin çekirdeğini $Y_d(\sqrt{5})$ ile göstermiştik ve simgesini $(0;\ \infty^{(d+2)})$ olarak bulmuştuk. O halde $K_{2,u}(\sqrt{5})$, $Y_3(\sqrt{5})$ dir ve simgesi $(0;\ \infty^{(5)})$ olup, rankı 4 olan serbest bir gruptur. Yani

$$K_{2,u}(\sqrt{5}) \cong F_4$$

olur. Yine $\mathbf{H}(\sqrt{5})/\mathbf{H}_2(\sqrt{5}) \cong D_6$ bulmuştuk. Bu durumda da $\mathbf{H}_2(\sqrt{5})$, $Y_6(\sqrt{5})$ dir ve simgesi $(0;\ \infty^{(8)})$ olup, rankı 7 olan serbest bir gruptur. Yani

$$\mathbf{H}_2(\sqrt{5}) \cong F_7$$

dir.

Şimdi benzer hesaplamaları $\mathbf{H}(\sqrt{7})$'nin denklik alt grupları için yapalım.

i) p = 2 olsun. $\mathbf{H}(\sqrt{7})/K_{2,u}(\sqrt{7}) \cong D_3$ ve $\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_2(\sqrt{7}) \cong D_6$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $K_{2,u}(\sqrt{7})$'nin simgesi $(0;\ \infty^{(5)})$ ve $\mathbf{H}_2(\sqrt{7})$'nin simgesi $(0;\ \infty^{(8)})$ olur.

ii) p = 7 olsun. $\mathbf{H}(\sqrt{7})/K_{7,0}(\sqrt{7}) \cong C_2$ elde etmiştik. R ve S'nin her ikisi, C_2'nin üretecine resmedildiğinden

$$K_{7,0}(\sqrt{7}) = \mathbf{H}_ç(\sqrt{7})$$

buluruz. $\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_7(\sqrt{7}) \cong C_{14} \cong \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha^2 = \beta^7 = \gamma^{14} = I \rangle$ bulmuştuk. Yine $\mathbf{H}_7(\sqrt{7})$'in simgesi $(3;\ \infty^{(3)})$ olarak bulunur.

iii) $p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 9 \bmod 28$ olsun. $\mathbf{H}(\sqrt{7})/K_{p,u}(\sqrt{7}) \cong$ PSL(2, p) ve $\mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_p(\sqrt{7}) \cong C_2 \times$ PSL(2, p) olduğunu göstermiştik. Benzer şekilde yine r_p ve s_p sırasıyla R ve S'nin PSL(2, p)'deki resimleri ise $r_p^{\,2} = s_p^{\,l} = t_p^{\,p} = I$ bağıntıları, r_p' ve s_p' sırasıyla R ve S'nin $C_2 \times$ PSL(2, p)'deki resimleri ise $(r_p')^2 = (s_p')^m = (t_p')^p = I$ bağıntıları sağlanır. Burada da l, p'ye bağlı olarak değişir ve S'nin tek kuvvetleri tek, çift kuvvetleri çift elemanlar olduğundan l tek iken $m = 2l$ ve l çift iken $m = l$ olur. Bu durumda $K_{p,u}(\sqrt{7})$ ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{7})$ gruplarının her ikisi de serbest gruplardır. μ, $K_{p,u}(\sqrt{7})$ denklik alt grubunun $\mathbf{H}(\sqrt{7})$'deki indeksi olmak üzere bu alt grubun simgesi

$$\left(1 + \frac{\mu}{4pl}(pl - 2p - 2l);\ \infty^{(\mu/l + \mu/p)}\right)$$

bulunur. Yine μ, $\mathbf{H}_p(\sqrt{7})$ temel denklik alt grubunun $\mathbf{H}(\sqrt{7})$'deki indeksi olmak üzere bu alt grubun simgesi

$$\left(1 + \frac{\mu}{4pm}(pm - 2p - 2m);\ \infty^{(\mu/m + \mu/p)}\right)$$

bulunur.

3.6.13. Örnek. p = 3 olsun. $l = 3$ ve $m = 6$ dır. O zaman bu iki bölüm grubu sırasıyla PSL(2, 3) ve $C_2 \times$ PSL(2, 3) dür. Bu nedenle $K_{3,1}(\sqrt{7}) = K_{3,2}(\sqrt{7})$'nin simgesi $(0;\ \infty^{(8)})$ ve $\mathbf{H}_3(\sqrt{7})$'nin simgesi $(1;\ \infty^{(12)})$ bulunur.

Yine p = 19 için $l = m = 10$ olur. $K_{19,8}(\sqrt{7}) = K_{19,11}(\sqrt{7})$'nin simgesi $(595;\ \infty^{(522)})$ ve $\mathbf{H}_{19}(\sqrt{7})$'nin simgesi $(1189;\ \infty^{(1044)})$ bulunur. □

iv) $p \equiv \pm 5, \pm 11, 13 \bmod 28$ olsun. Her iki durumda da bölüm grubu PGL(2, p) dir ve p'ye bağlı olarak $r_p^2 = s_p^{p-1} = I$ ya da $r_p^2 = s_p^{p+1} = I$ bağıntılarının sağlandığını söylemiştik. Birinci durumda $K_{p,u}(\sqrt{7})$ ve $\mathbf{H}_p(\sqrt{7})$ aynı

$$\left(1 + \frac{\mu}{4(p-1)p}(p^2 - 5p + 2);\ \infty^{\left(\frac{\mu}{p-1} + \frac{\mu}{p}\right)}\right)$$

simgesine ve ikinci durumda da aynı

$$\left(1 + \frac{\mu}{4(p+1)p}(p^2 - 3p - 2);\ \infty^{\left(\frac{\mu}{p+1} + \frac{\mu}{p}\right)}\right)$$

simgesine sahiptirler (bu durumda da p – 1 ve p + 1 çift olduğundan $m = l$ olduğuna dikkat ediniz).

3.6.14. Örnek. p = 5 olsun. Bun durumda $m = l = p - 1 = 4$ olup

$$\mathbf{H}(\sqrt{7})/K_{5,u}(\sqrt{7}) \cong \mathbf{H}(\sqrt{7})/\mathbf{H}_5(\sqrt{7}) \cong \mathrm{PGL}(2, 5)$$

dir ve

$$K_{5,u}(\sqrt{7}) = \mathbf{H}_5(\sqrt{7}) \cong (4; \infty^{(54)})$$

elde edilir.

p = 11 olsun. Bu durumda da $m = l = p + 1 = 12$ olup

$$K_{11,u}(\sqrt{7}) = \mathbf{H}_{11}(\sqrt{7}) \cong (216; \infty^{(230)})$$

bulunur. □

EK-1

$$S(z) = \frac{-1}{z+\sqrt{5}} \in H(\sqrt{5})$$ **Dönüşümünün Bazı Kuvvetleri**

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$	$S^{12} = \begin{pmatrix} -199 & -144\sqrt{5} \\ 144\sqrt{5} & 521 \end{pmatrix}$
$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix}$	$S^{13} = \begin{pmatrix} -144\sqrt{5} & -521 \\ 521 & 377\sqrt{5} \end{pmatrix}$
$S^3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -4 \\ 4 & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$	$S^{14} = \begin{pmatrix} -521 & -377\sqrt{5} \\ 377\sqrt{5} & 1364 \end{pmatrix}$
$S^4 = \begin{pmatrix} -4 & -3\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} & 11 \end{pmatrix}$	$S^{15} = \begin{pmatrix} -377\sqrt{5} & -1364 \\ 1364 & 987\sqrt{5} \end{pmatrix}$
$S^5 = \begin{pmatrix} -3\sqrt{5} & -11 \\ 11 & 8\sqrt{5} \end{pmatrix}$	$S^{16} = \begin{pmatrix} -1364 & -987\sqrt{5} \\ 987\sqrt{5} & 3571 \end{pmatrix}$
$S^6 = \begin{pmatrix} -11 & -8\sqrt{5} \\ 8\sqrt{5} & 29 \end{pmatrix}$	$S^{17} = \begin{pmatrix} -987\sqrt{5} & -3571 \\ 3571 & 2584\sqrt{5} \end{pmatrix}$
$S^7 = \begin{pmatrix} -8\sqrt{5} & -29 \\ 29 & 21\sqrt{5} \end{pmatrix}$	$S^{18} = \begin{pmatrix} -3571 & -2584\sqrt{5} \\ 2584\sqrt{5} & 9349 \end{pmatrix}$
$S^8 = \begin{pmatrix} -29 & -21\sqrt{5} \\ 21\sqrt{5} & 76 \end{pmatrix}$	$S^{19} = \begin{pmatrix} -2584\sqrt{5} & -9349 \\ 9349 & 6765\sqrt{5} \end{pmatrix}$
$S^9 = \begin{pmatrix} -21\sqrt{5} & -76 \\ 76 & 55\sqrt{5} \end{pmatrix}$	$S^{20} = \begin{pmatrix} -9349 & -6765\sqrt{5} \\ 6765\sqrt{5} & 24476 \end{pmatrix}$
$S^{10} = \begin{pmatrix} -76 & -55\sqrt{5} \\ 55\sqrt{5} & 199 \end{pmatrix}$	$S^{21} = \begin{pmatrix} -6765\sqrt{5} & -24476 \\ 24476 & 17711\sqrt{5} \end{pmatrix}$
$S^{11} = \begin{pmatrix} -55\sqrt{5} & -199 \\ 199 & 144\sqrt{5} \end{pmatrix}$	$S^{22} = \begin{pmatrix} -24476 & -17711\sqrt{5} \\ 17711\sqrt{5} & 64079 \end{pmatrix}$

$$S^{23} = \begin{pmatrix} -17711\sqrt{5} & -64079 \\ 64079 & 46368\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{24} = \begin{pmatrix} -64079 & -46368\sqrt{5} \\ 46368\sqrt{5} & 167761 \end{pmatrix}$$

$$S^{25} = \begin{pmatrix} -46368\sqrt{5} & -167761 \\ 167761 & 121393\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{26} = \begin{pmatrix} -167761 & -121393\sqrt{5} \\ 121393\sqrt{5} & 439204 \end{pmatrix}$$

$$S^{27} = \begin{pmatrix} -121393\sqrt{5} & -439204 \\ 439204 & 317811\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{28} = \begin{pmatrix} -439204 & -317811\sqrt{5} \\ 317811\sqrt{5} & 1149851 \end{pmatrix}$$

$$S^{29} = \begin{pmatrix} -317811\sqrt{5} & -1149851 \\ 1149851 & 832040\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{30} = \begin{pmatrix} -1149851 & -832040\sqrt{5} \\ 832040\sqrt{5} & 3010349 \end{pmatrix}$$

$$S^{31} = \begin{pmatrix} -832040\sqrt{5} & -3010349 \\ 3010349 & 2178309\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{32} = \begin{pmatrix} -3010349 & -2178309\sqrt{5} \\ 2178309\sqrt{5} & 7881196 \end{pmatrix}$$

$$S^{33} = \begin{pmatrix} -2178309\sqrt{5} & -7881196 \\ 7881196 & 5702887\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{34} = \begin{pmatrix} -7881196 & -5702887\sqrt{5} \\ 5702887\sqrt{5} & 20633239 \end{pmatrix}$$

$$S^{35} = \begin{pmatrix} -5702887\sqrt{5} & -20633239 \\ 20633239 & 14930352\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{36} = \begin{pmatrix} -20633239 & -14930352\sqrt{5} \\ 14930352\sqrt{5} & 54018521 \end{pmatrix}$$

$$S^{37} = \begin{pmatrix} -14930352\sqrt{5} & -54018521 \\ 54018521 & 39088169\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{38} = \begin{pmatrix} -54018521 & -39088169\sqrt{5} \\ 39088169\sqrt{5} & 141422324 \end{pmatrix}$$

$$S^{39} = \begin{pmatrix} -39088169\sqrt{5} & -141422324 \\ 141422324 & 102334155\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{40} = \begin{pmatrix} -141422324 & -102334155\sqrt{5} \\ 102334155\sqrt{5} & 370248451 \end{pmatrix}$$

$$S^{41} = \begin{pmatrix} -102334155\sqrt{5} & -370248451 \\ 370248451 & 267914296\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{42} = \begin{pmatrix} -370248451 & -267914296\sqrt{5} \\ 267914296\sqrt{5} & 969323029 \end{pmatrix}$$

$$S^{43} = \begin{pmatrix} -267914296\sqrt{5} & -969323029 \\ 969323029 & 701408733\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{44} = \begin{pmatrix} -969323029 & -701408733\sqrt{5} \\ 701408733\sqrt{5} & 2537720636 \end{pmatrix}$$

$$S^{45} = \begin{pmatrix} -701408733\sqrt{5} & -2537720636 \\ 2537720636 & 1836311903\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

EK-2

$$S(z) = \frac{-1}{z+\sqrt{7}} \in H(\sqrt{7})$$ **Dönüşümünün Bazı Kuvvetleri**

$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$	$S^{12} = \begin{pmatrix} -3191 & -2640\sqrt{7} \\ 2640\sqrt{7} & 15289 \end{pmatrix}$
$S^2 = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 6 \end{pmatrix}$	$S^{13} = \begin{pmatrix} -2640\sqrt{7} & -15289 \\ 15289 & 12649\sqrt{7} \end{pmatrix}$
$S^3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} & -6 \\ 6 & 5\sqrt{7} \end{pmatrix}$	$S^{14} = \begin{pmatrix} -15289 & -12649\sqrt{7} \\ 12649\sqrt{7} & 73254 \end{pmatrix}$
$S^4 = \begin{pmatrix} -6 & -5\sqrt{7} \\ 5\sqrt{7} & 29 \end{pmatrix}$	$S^{15} = \begin{pmatrix} -12649\sqrt{7} & -73254 \\ 73254 & 60605\sqrt{7} \end{pmatrix}$
$S^5 = \begin{pmatrix} -5\sqrt{7} & -29 \\ 29 & 24\sqrt{7} \end{pmatrix}$	$S^{16} = \begin{pmatrix} -73254 & -60605\sqrt{7} \\ 60605\sqrt{7} & 350981 \end{pmatrix}$
$S^6 = \begin{pmatrix} -29 & -24\sqrt{7} \\ 24\sqrt{7} & 139 \end{pmatrix}$	$S^{17} = \begin{pmatrix} -60605\sqrt{7} & -350981 \\ 350981 & 290376\sqrt{7} \end{pmatrix}$
$S^7 = \begin{pmatrix} -24\sqrt{7} & -139 \\ 139 & 115\sqrt{7} \end{pmatrix}$	$S^{18} = \begin{pmatrix} -350981 & -290376\sqrt{7} \\ 290376\sqrt{7} & 1681651 \end{pmatrix}$
$S^8 = \begin{pmatrix} -139 & -115\sqrt{7} \\ 115\sqrt{7} & 666 \end{pmatrix}$	$S^{19} = \begin{pmatrix} -290376\sqrt{7} & -1681651 \\ 1681651 & 1391275\sqrt{7} \end{pmatrix}$
$S^9 = \begin{pmatrix} -115\sqrt{7} & -666 \\ 666 & 551\sqrt{7} \end{pmatrix}$	$S^{20} = \begin{pmatrix} -1681651 & -1391275\sqrt{7} \\ 1391275\sqrt{7} & 8057274 \end{pmatrix}$
$S^{10} = \begin{pmatrix} -666 & -551\sqrt{7} \\ 551\sqrt{7} & 3191 \end{pmatrix}$	$S^{21} = \begin{pmatrix} -1391275\sqrt{7} & -8057274 \\ 8057274 & 6665999\sqrt{7} \end{pmatrix}$
$S^{11} = \begin{pmatrix} -551\sqrt{7} & -3191 \\ 3191 & 2640\sqrt{7} \end{pmatrix}$	$S^{22} = \begin{pmatrix} -8057274 & -6665999\sqrt{7} \\ 6665999\sqrt{7} & 38604719 \end{pmatrix}$

$$S^{23} = \begin{pmatrix} -6665999\sqrt{7} & -38604719 \\ 38604719 & 31938720\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$S^{24} = \begin{pmatrix} -38604719 & -31938720\sqrt{7} \\ 31938720\sqrt{7} & 184966321 \end{pmatrix}$$

$$S^{25} = \begin{pmatrix} -31938720\sqrt{7} & -184966321 \\ 184966321 & 153027601\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$S^{26} = \begin{pmatrix} -184966321 & -153027601\sqrt{7} \\ 153027601\sqrt{7} & 886226886 \end{pmatrix}$$

$$S^{27} = \begin{pmatrix} -153027601\sqrt{7} & -886226886 \\ 886226886 & 733199285\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$S^{28} = \begin{pmatrix} -886226886 & -733199285\sqrt{7} \\ 733199285\sqrt{7} & 4246168109 \end{pmatrix}$$

$$S^{29} = \begin{pmatrix} -733199285\sqrt{7} & -4246168109 \\ 4246168109 & 3512968824\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$S^{30} = \begin{pmatrix} -4246168109 & -3512968824\sqrt{7} \\ 3512968824\sqrt{7} & 20344613659 \end{pmatrix}$$

KAYNAKLAR

BAŞKAN, T. 1980. Ayrık Gruplar. H. Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Beytepe. 214s.

BAYRAKTAR, M. 1988. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Atatürk Üniversitesi Yayınları, Erzurum. s. 256-266.

BEARDON, A. F. 1983. The Geometry of Discrete Groups. Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, New York. 337p.

BRUNNER, A. M. 1992. A Two-Generator Presentation For The Picard Group. Proc. Amer. Mat. Soc., 115, 45-46.

CANGÜL, İ. N. 1993. Normal Subgroups of Hecke Groups. Ph. D. Thesis (unpublished), Southampton University, 228p.

CANGÜL, İ. N. Determining Isomorphism Class of a Fuchsian Group From Its Signature (Baskıda).

COXETER, H. S. M. ve W. O. J. Moser. 1957. Generators and Relations for Discrete Groups. Springer, Berlin. 161p.

FINE, B. 1976. Fuchsian Subgroups of The Picard Group. Canad. J. Math., 28, 481-485.

FINE, B. 1987. Fuchsian Embeddings in The Bianchi Groups. Canad. J. Math., XXXIX, 6, 1474-1481.

FINE, B. 1989. Algebraic Theory of Bianchi Groups. Marcel Dekker, New York. 249p.

FRICKE, R. ve **F. KLEIN.** 1965. Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Funktionen. Vol. I, Teubner Reprint, Leipzig. 634p.

HARDING, S. J. 1985. Some Arithmetic and Geometric Problems Concerning Discrete Groups. Ph. D. Thesis (unpublished), Southampton University, p. 68-97.

HECKE, E. 1936. Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen. Math. Ann., 112, 664-699.

JONES, G. A. ve **D. SINGERMAN.** 1978. Theory of Maps on Orientable Surfaces. Proc. L. M. S., 3, 37, 273-307.

JONES, G. A. ve D. SINGERMAN. 1987. Complex Functions. Cambridge University Press, Cambridge. 342p.

JONES, G. A. ve J. M. JONES. 1999. Elementary Number Theory. Springer-Verlag, New York. 301p.

LEHNER, J. 1964. Discontinuous Groups and Automorphic Functions. Math. Surveys 8, Amer. Math. Soc., Providence. R. I. . 425p.

LYNDON, R. C. ve P. E. SCHUPP. 1977. Combinatorial Group Theory. Springer-Verlag, New York, 339p.

MACBEATH, A. M. 1963. Packings, Free Products and Residually Finite Groups. Proc. Camb. Phil. Soc., 59, 555-558.

MACBEATH, A. M. 1969. Generators of the Linear Fractional Groups. Proc. Symp. Pure. Math. A. M. S., 12, 14-32.

MACLACHLAN, C. 1971. Maximal Normal Fuchsian Groups. Illionis J. Math., 15, 104-113.

MAGNUS, W. , A. KARRASS ve D. SOLITAR. 1976. Combinatorial Group Theory. Dover Publications, Inc., New York. 444p.

SINGERMAN, D. 1970. Subgroups of Fuchsian Groups and Finite Permutation Groups. Bull. L. M. S., 2, 319-323.

YILMAZ, N. 1996. Picard Grubu. Yüksek Lisans Tezi (yayınlanmamış), Uludağ Üniversitesi, 62s.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve her türlü yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Bolu'da doğan Nihal YILMAZ; ilk, orta ve lise öğrenimini aynı şehirde tamamladıktan sonra 1989 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 1993 yılında bu fakülteden mezun oldu. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine ve araştırma görevlisi kadrosunda çalışmaya başladı. 1996 yılında yüksek lisansını bitiren Nihal YILMAZ, aynı yıl ve aynı enstitüde doktora öğrenimine başladı.