T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Aslı BAŞARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2008

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Aslı BAŞARI

Prof.Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2008

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNDE
BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Aslı BAŞARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../...../200... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Cengizhan MURATHAN ....
Danışman

....

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılıp, bunlara ilişkin bazı sonuçlar hatırlatılmıştır. İkinci bölümde ise değme manifoldlar ve Kenmotsu manifoldlar ile ilgili genel bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Kenmotsu manifoldları üzerinde bazı eğrilik şartları araştırılmıştır. Son bölümde, genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldlar ve genelleştirilmiş concircular $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldlar tanımlanmış ve bu manifoldlar ile ilgili orjinal sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kenmotsu manifold, Riemannian eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü, Weyl konformal eğrilik tensör alanı, concircular eğrilik tensörü, Einstein manifold, genelleştirilmiş recurrent manifold, genelleştirilmiş $\phi-$recurrent manifold.

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some basic concepts used in subsequent parts have been introduced and some results concerning these concepts have been considered. In the second chapter, fundamental information about contact manifolds and Kenmotsu manifolds have been given. In the third chapter, some curvature conditions on Kenmotsu manifolds have been researched. In the last chapter, generalized $\phi-$recurrent Kenmotsu manifols and generalized concircular $\phi-$recurrent Kenmotsu manifolds have been defined and some orijinal results have been obtained.

Key Words: Kenmotsu manifold, Riemannian curvature tensor, Ricci curvature tensor, Weyl conformal curvature tensor space, concircular curvature tensor, Einstein manifold, generalized recurrent manifold, generalized $\phi-$recurrent manifold.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

R - Reel sayılar cümlesi

M - Manifold

g - Metrik tensör

C^{∞} - Diferansiyellenebilme

$[,]$ - Lie Parantez operatörü

$T_p(M)$ - p noktasındaki teğet uzay

$\chi(M)$ - M nin teğet vektör alanlarının uzayı

∇ - M üzerinde afin koneksiyon

K - Kesitsel eğrilik

r - Skaler eğrilik

R - Riemann eğrilik tensörü

S - Ricci eğrilik tensörü

Q - Ricci operatörü

$\overline{C}$ - Concircular eğrilik tensörü

W - Weyl conformal eğrilik tensör alanı

$\tilde{\wedge}$ - Kulkarni-Nomizu çarpımı

GİRİŞ

Değme geometri bundan iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jacobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarında doğmuştur ve Sophus Lie, Elie Carton, ve Darboux gibi pek çok önemli matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır. Değme geometrinin köklerine, 1872 de Lie'nin, değme transformasyonu diferansiyel denklem sistemlerinin çalışılmasında geometrik bir araç olarak tanımlamasıyla rastlanır. Değme geometri , pür matematiğin diğer alanlarıyla bağlantılar içerir ve mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisinin uygulama alanlarında önemli bir yere sahiptir.

1970 lerin başlarında, değme geometride, topolojik metotlar önemli bir rol almaya başladı. Fakat, global topolojik sonuçların alınması 1980 lerin ortalarını buldu. Bundan sonra, 3-boyutlu değme geometri ve topoloji çalışmalarının engin ve yararlı faaliyetler olduğu görüldü ve daha yüksek boyutlu değme topolojiyi anlamak için önemli adımlar atılmaya başlandı.

1972 yılında Kenmotsu, günümüzde "Kenmotsu Manifoldlar" olarak adlandırılan, hemen hemen değme metrik Riemannian manifoldların bir sınıfını tanımladı. M, hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(n = 2m+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu olarak verildiğinde, $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X, \phi Y)\xi - \eta(Y)\phi(X),$$

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi$$

bağıntılarını sağlıyorsa, (ϕ, ξ, η, g) yapısı normal fakat ξ bir Killing vektör alanı olmadığı için quasi-Sasakian, dolayısıyla Sasakian değildir. Bu özellikleri sağlayan Kenmotsu manifoldlar, aynı zamanda $div\xi = n-1$ olduğundan kompakt da değildir.

Kenmotsu manifoldlar konusunda Binh, Tamassy, Tarafdar, De, Pathak, Kirichenko, Pitiş ve Özgür gibi pek çok matematikçi araştırmalar yapmıştır. Hemen hemen değme metrik Riemannian manifoldların bu sınıfına ait yapılan incelemeler ve ulaşılan sonuçlar dikkat çekicidir.

Tezin birinci bölümünde, Riemann manifoldu, Afin Koneksiyon, Levi-Civita Koneksiyonu, Riemann eğrilik tensorü, Ricci eğrilik tensörü, Weyl konformal eğrilik tensör alanı ve concircular eğrilik tensörü gibi temel kavramlar tanıtılıp, bunlara ilişkin bilinen bazı sonuçlar hatırlatılmıştır.

Tezin ikinci bölümde ise değme manifoldlar ve Kenmotsu manifoldlar ile ilgili genel bilgilere yer verilmiştir.

Jun, Chand ve Pathak'ın 2005 yılında Kenmotsu Manifoldları üzerine, Hong, Özgür ve Tripathi'nin 2006 yılında Kenmotsu manifoldların bazı özel sınıfları hakkında, De ve Guha'nın 1991 yılında genelleştirilmiş recurrent manifoldlar hakkında, Özgür'ün 2007 yılında genelleştirilmiş recurrent Kenmotsu manifoldlar ve Takahashi'nin 1977 yılında Sasakian ϕ-simetrik yüzeyler hakkında yaptıkları araştırmalar, tezin ana fikrinin oluşmasında önemli bir rol oynamıştır. Bu çalışmalar doğrultusunda, tezin üçüncü ve son bölümü Kenmotsu manifoldları üzerinde bazı eğrilik şartlarının incelenmesine ayrılmıştır. Tezin son bölümünde orjinal sonuçlara yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde; öncelikle, semi simetrik, Ricci semi simetrik, Ricci recurrent, Weyl semi simetrik ve Ricci pseudosimetrik Kenmotsu manifoldlar ve Kenmotsu manifoldlarda concircular eğrilik tensörünün özellikleri incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde ayrıca, genelleştirilmiş recurrent, ϕ-simetrik ve ϕ-recurrent Kenmotsu manifoldlarla ilgili tanımlamalara ve sonuçlara yer verilmiştir.

Tezin son bölümünde, genelleştirilmiş Φ–recurrent Kenmotsu manifoldlar ve genelleştirilmiş Φ–recurrent concircular Kenmotsu manifoldlar tanımlanmış ve bu manifoldlarla ilgili orjinal sonuçlara ulaşılmıştır.

1. BÖLÜM

1.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1. *M* bir diferensiyellenebilir C^∞ manifold olsun. *M* üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve *M* den *R* ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere, *M* üzerinde;

$$g:\chi(M)\,x\,\chi(M)\rightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer *g* Riemann metriği ile birlikte *M* ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir ve (*M, g*) şeklinde gösterilir (Koboyashi, Nomizu 1963).

M manifoldunun herhangi iki *p* ve *q* noktası için *M* üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse *M* ye **bağlantılı manifold** adı verilir (O'Neill 1966).

Tanım 1.1.2. *M* bir diferensiyellenebilir manifold ve *M* üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\nabla:\chi(M)\,x\,\chi(M)&\xrightarrow{2-lineer}\chi(M)\\ (X,Y)&\longrightarrow\nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f,g\in C^\infty(M,\mathbb{R}),\quad \forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

i) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z,$

ii) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z,$

iii) $\nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+X(f)Y$

lineerlik özelliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir **Afin Koneksiyon** adı verilir. (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.1.3. (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M uzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak uzere; ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde **sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon** veya M nin **Levi-Civita Koneksiyonu** adi verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 1.1.4. (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$R: \quad \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (1.1)$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (1,3) tensör alanıdır ve M nin **Riemann eğrilik tensorü** olarak adlandırılır.

$\forall\ X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özeliklere sahiptir;

i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$ (1.2)

ii) $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V),$ (1.3)

iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$ (1.4)

iv) $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$ (1.5)

(O'Neill 1983).

Tanım 1.1.5. (*M, g*) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $V,W \in \Pi$ tanjant vektörleri için (0,2) tipindeki Q tensör alanı;

$$Q(V,W) = g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V,W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)} \tag{1.6}$$

ye Π nin **kesitsel eğriliği** denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 1.1.6. (*M, g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, M nin lokal ortonormal vektör alanları olsunlar.

$$S : \chi(M) x \chi(M) \to R$$

$$(X,Y) \to S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlı (0,2) tipindeki S tensör alanına, *M* üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Ayrıca Q Ricci operörü ve S^2 (0, 2)-tensörü sırası ile

$$g(QX,Y) = S(X,Y) \tag{1.8}$$

$$S^2(X,Y) = S(QX,Y) \tag{1.9}$$

biçiminde tanımlanır (Deszcz 1992).

Tanım 1.1.7. (*M, g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Ricci tensörü S sıfırdan farklı ve α , 1-form olmak üzere,

$$(\nabla_X S)(Y,Z)=\alpha(X)S(Y,Z) \tag{1.10}$$

bağıntısını sağlıyorsa, *M* manifoldu **Ricci recurrenttir** denir (Patterson 1952).

Tanım 1.1.8. (*M, g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y) \tag{1.11}$$

olacak biçimde *M* üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani *M* nin Ricci tensörü *S*, metrik tensör *g* nin bir katı ise *M* ye **Einstein manifoldu** adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 1.1.9. (*M, g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$r=\sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i) \tag{1.12}$$

değerine *M* nin **skaler eğriliği** adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 1.1.10. (*M, g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\ X, Y, W \in \chi(M)$ için *M* nin **Weyl konformal eğrilik tensör alanı;**

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{n-2}\left[S(X,Z)Y - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX\right] \\ - \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\right] \end{aligned} \tag{1.13}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 1.1.11. $n \geq 4$ boyutlu M manifoldu için $C = 0$ ise M manifoldu **konformal düzlemsel (flat)** olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 1.1.12. (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\ X, Y, W \in \chi(M)$ için M nin **concircular eğrilik tensörü;**

$$\overline{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{r}{n(n-1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] \tag{1.14}$$

ile tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 1.1.13. Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara uzay form denir.
n-boyutlu bir M uzay formu $M^n(c)$ ile gösterilir. Eğer,

$$c = 0 \text{ ise } M^n(c) = E^n \text{ Öklid uzayı} \tag{1.15}$$

$$c = \frac{1}{\tau^2} \text{ ise } M^n(c) = S^n(\tau) \text{ küresi} \tag{1.16}$$

$$c = -\frac{1}{\tau^2} \text{ ise } M^n(c) = H^n(\tau) \text{ Hiperbolik uzay} \tag{1.17}$$

dır (Chen 1973).

M üzerinde $(0,2)$-tipinde simetrik iki tensör A ve B ise bu tensörlerin Kulkarni-Nomizu çarpımı $⊼$, $\forall\ X_1, X_2, X_3, X_4 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(A ⊼ B)(X_1, X_2, X_3, X_4) = {} & A(X_1, X_4)B(X_2, X_3) + A(X_2, X_3)B(X_1, X_4) \\ & - A(X_1, X_3)B(X_2, X_4) - A(X_2, X_4)B(X_1, X_3)\end{aligned} \tag{1.18}$$

biçiminde tanımlanır (Besse 1987).

M üzerinde $(0,k)$-tipinde $(k \geq 1)$ bir T tensör alanı ve $(0,2)$-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde T nin kovaryant türevi ∇T,

$$\begin{aligned} \nabla T\left(X_1, X_2, \ldots, X_k; X\right) &= \left(\nabla_X T\right)\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right) \\ &= \left(\nabla_X\right)\left(T\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right)\right) - \sum_{i=1}^{k} T\left(X_1, \ldots, \nabla X_i, \ldots, X_k\right), \end{aligned} \tag{1.19}$$

biçiminde, $R.T$ ve $Q(A,T)$ tensörleri ise

$$R.T,\, Q(A,T) : \underbrace{\chi(M) \times \ldots \times \chi(M)}_{(k+2)-defa} \rightarrow C^{\infty}(M,R)$$

$$\begin{aligned} &(R,T)\left(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y\right) = \left(\tilde{R}(X,Y).T\right)\left(X_1, \ldots, X_k\right) \\ &= -T\left(\tilde{R}(X,Y)X_1, X_2, \ldots, X_k\right) - \ldots - T\left(X_1, X_2, \ldots, \tilde{R}(X,Y)X_k\right) \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} &Q(A,T)\left(X_1, X_2, \ldots, X_k; X, Y\right) = \left(\left(X \wedge_A Y\right).T\right)\left(X_1, \ldots, X_k\right) \\ &= -T\left(\left(X \wedge_A Y\right)X_1, X_2, \ldots, X_k\right) - \ldots - T\left(X_1, X_2, \ldots, \left(X \wedge_A Y\right)X_k\right) \end{aligned} \tag{1.21}$$

biçiminde tanımlanır. $T = R$ ve $T = C$ için $Q(g,R)$ ve $Q(g,C)$ tensörleri ilk olarak Eisenhart (1966) ve Tachibana (1974) de tanımlanmıştır.

Örneğin, R nin R üzerine etkisi $R.R$ ve $Q(g,R)$ tensörü $\forall\, X_1, X_2, X_3, X_4, X, Y \in \chi(M)$ için

$$R.R,\, Q(g,R) : \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M,R)$$

$$\begin{aligned} &(R.R)\left(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y\right) = -R\left(\tilde{R}(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4\right) - R\left(X_1, \tilde{R}(X,Y)X_2, X_3, X_4\right) \\ &- R\left(X_1, X_2, \tilde{R}(X,Y)X_3, X_4\right) - R\left(X_1, X_2, X_3, \tilde{R}(X,Y)X_4\right) \end{aligned}$$

ve

$$Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\wedge Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-R(X_1,(X\wedge Y)X_2,X_3,X_4)$$
$$-R(X_1,X_2,(X\wedge Y)X_3,X_4)-R(X_1,X_2,X_3,(X\wedge Y)X_4)$$

ile hesaplanır.

$k\geq 1$ için $\nabla T=0$ ise T tensor alanına **paraleldir** denir. $R.T=0$ ise T **semisimetrik** olarak adlandırılır. T tensor alanı parallel ise semisimetriktir fakat tersi her zaman doğru değildir. $k\geq 1$ için eğer $R.T$ ve $Q(g,T)$ tensörleri M nin her p noktasında lineer bağımlı ise M manifolduna T tensor alanına gore **pseudosimetriktir** denir. Açıkça her semisimetrik tensor alanı pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir (Deszcz ve Grycak 1987). Böylece M manifoldunun T tensör alanına gore pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_T=\{p\in M : p\in M \ de \ Q(g,T)\neq 0\}$$

kümesi üzerinde

$$R.T=L_T Q(g,T) \tag{1.22}$$

olmasıdır. Burada L_T fonksiyonu U_T kümesi üzerinde tanımlanır.

Eğer

$$\nabla S=0 \tag{1.23}$$

ise M ye **Ricci-simetrik**,

$$\nabla C=0 \tag{1.24}$$

ise M ye **konformal simetrik manifold** denir (Chaki ve Gupta 1963).

Eğer $\nabla R = 0$ ise

$$R.R = 0 \tag{1.25}$$

dır, fakat tersi doğru değildir. (1.25) denklemini sağlayan bir (M, g) (yarı)-Riemann manifolduna **semisimetriktir** denir. Sinyukov (1954), Szabó (1982, 1984, 1985) ve Kowalski (1996) çalışmalarında semisimetrik manifoldların sınıflandırılması yapılmıştır.

Eğer $\nabla S = 0$ ise

$$R.S = 0 \tag{1.26}$$

dır, fakat tersi doğru değildir. (1.26) denklemini sağlayan bir (M, g) (yarı)-Riemann manifolduna **Ricci semisimetriktir** denir (Mikash 1980, Sinyakov 1981).

Eğer $\nabla C = 0$ ise

$$R.C = 0 \tag{1.27}$$

dır, fakat tersi doğru değildir. (1.27) denklemini sağlayan bir (M, g) (yarı)-Riemann manifolduna **Weyl semisimetriktir** denir (Deszcz 1992).

$n \geq 3$ boyutlu bir (M, g) (yarı)-Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R.R$ ve $Q(g, R)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye **pseudosimetrik** manifold denir (Deszcz ve Grycak 1987).

(M, g) manifoldunun pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_R = \{p \in M : p \in M \ de \ Q(g, R) \neq 0\}$$

kümesi üzerinde

$$R.R = L_R Q(g, R) \tag{1.28}$$

olmasıdır. Burada L_R fonksiyonu U_R kümesi üzerinde tanımlanır.

$n \geq 3$ boyutlu bir (M, g) (yarı)-Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında $R.S$ ve $Q(g, S)$ tensörleri lineer bağımlı ise M ye **Ricci-pseudosimetrik** manifold denir (Deszcz 1989, Deszcz ve Hotlós 1989).

(M, g) manifoldunun Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_S = \left\{ p \in M : p \in M \ de \ S - \frac{\rho}{n} g \neq 0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$R.S = L_S Q(g, S) \tag{1.29}$$

olmasıdır. Burada L_S fonksiyonu U_S kümesi üzerinde tanımlanır.

Her pseudodimetrik manifold Ricci-pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir. Açıkça, her Ricci-semisimetrik manifold ($R.S = 0$) Ricci-pseudosimetriktir fakat tersi doğru değildir (Deszcz 1989, Deszcz ve Hotlós 1989).

$n \geq 4$ boyutlu (yarı)-Riemann manifoldların sınıfında aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir (Deszcz 1992).

$$R.R = 0 \subset R.S = 0,$$
$$R.R = 0 \subset R.C = 0,$$
$$R.S = 0 \subset R.S = L_S Q(g, S),$$

$$R.R = 0 \subset R.R = L_R Q(g,R),$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \subset R.S = L_S Q(g,S).$$

n-boyutlu bir (M,g) Riemann manifoldu için,

$$R_0(X,Y)U = g(Y,U)X - g(X,U)Y, \quad X,Y,U \in TM \tag{1.30}$$

olmak üzere, concircular eğrilik tensörü $\overline{C}$

$$\overline{C} = R - \frac{r}{n(n-1)} R_0, \tag{1.31}$$

olarak tanımlanabilir. Buradan

$$R.\overline{C} = R.R - \frac{r}{n(n-1)} R.R_0$$

yazılır ve kısa bir hesaplama yardımı ile $R.R_0 = 0$ elde edilir. Bu durumda, n-boyutlu bir (M,g) Riemann manifoldu için

$$R.R = R.\overline{C} \tag{1.32}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde, n-boyutlu bir (M,g) Riemann manifoldu için

$$\overline{C}.\overline{C} = \overline{C}.R \tag{1.33}$$

dir (Hong, Özgür ve Tripathi 2006).

n boyutlu bir (M,g) Riemann manifoldu bir Ricci-pseudosimetrik manifold ise, $R.S$ ve $Q(g,S)$ tensörleri lineer bağımlıdır ve M üzerindeki vektör alanları U, V, X, Y için,

$$Q(g,S)(U,V;X,Y)=-S(R_0(X,Y)U,V)-S(U,R_0(X,Y)V). \tag{1.34}$$

(1.34) eşitliğinden,

$$\overline{C}.S = R.S - \frac{r}{n(n-1)}R_0.S$$

yazılır. (1.30) ve (1.34) eşitliklerinden $R_0.S = Q(g,S)$ elde edilir. Buradan,

$$\overline{C}.S = R.S - \frac{r}{n(n-1)}Q(g,S).$$

n-boyutlu bir (M,g) Riemann manifoldu, $\overline{C}.S = 0$ koşulunu sağlıyorsa

$$R.S = \frac{r}{n(n-1)}Q(g,S)$$

elde edilir. Öyleyse, n-boyutlu bir (M,g) Riemann manifoldu, $\overline{C}.S = 0$ koşulunu sağlıyorsa M bir **Ricci-pseudosimetrik manifolddur** ve $L_S = \frac{r}{n(n-1)}$ (Hong, Özgür ve Tripathi 2006).

2. BÖLÜM

2.1. DEĞME MANİFOLDLAR

Tanım 2.1.1. M bir $(2n+1)$-boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da M üzerinde, sırası ile, (1, 1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere;

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.1}$$

ve

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{2.2}$$

özelliklerini sağlıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya M üzerinde bir **hemen hemen değme yapısı** denir. M bu yapı ile bir **hemen hemen değme manifoldu** olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1. (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için;

i) $\phi\xi = 0$ (2.3)

ii) $\eta(\phi X) = 0$ (2.4)

iii) $rank\phi = 2n$ (2.5)

dir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.2. Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.6}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.7}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde **hemen hemen değme metrik**, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da **hemen hemen değme metrik yapısı**, (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de **hemen hemen değme metrik manifoldu** denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.1.1. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M ile hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) verilsin. Böylece,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \tag{2.8}$$

dir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.3. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M verilsin. Her bir η 1-formu için $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin **değme yapısı** ve M ye de **değme manifoldu** denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.9}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.4. *M* üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y) \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nın **ikinci temel formu** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.5. Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir M manifoldu **değme metrik manifold** olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

2.2. KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 2.2.1. *M*, hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(n = 2m+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. *M* manifoldu $\forall\ X,Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X,\phi Y)\xi - \eta(Y)\phi(X), \tag{2.11}$$

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.12}$$

bağıntılarını sağlıyorsa *M* bir **Kenmotsu manifold**dur (Kenmotsu 1972).

Sonuç 2.2.1. *M*, $(n = 2m+1)$ bir Kenmotsu manifold ise *M* nin bir Riemann eğrilik tensörü *R*, ∇ da *M* uzerinde tanımlanan bir Riemann koneksiyon olmak üzere;

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X, \tag{2.13}$$

$$(\nabla_W R)(X,Y)\xi = g(W,X)Y - g(W,Y)X - R(X,Y)W \tag{2.14}$$

dir (Kenmotsu 1972).

Sonuç 2.2.2. *M,* $(n = 2m+1)$ bir Kenmotsu manifold ise *M* nin bir Riemann eğrilik tensörü *R,* ∇ da *M* üzerinde tanımlanan bir Riemann koneksiyon olmak üzere;

$$(\nabla_X \eta)(Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{2.15}$$

$$\eta(R(X,Y)Z) = \eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z) \tag{2.16}$$

dir (Kenmotsu 1972).

Sonuç 2.2.3. *M,* $(n = 2m+1)$ bir Kenmotsu manifold ise *S, M* nin Ricci tensörü olmak üzere;

$$S(X,\xi) = -(n-1)\eta(X) \tag{2.17}$$

dir (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.2.1. *M,* $(n = 2m+1)$ bir Kenmotsu manifold ise *S, M* nin Ricci tensörü olmak üzere;

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X,Y) + (n-1)\eta(X)\eta(Y) \tag{2.18}$$

dir (Jun, Chand ve Pathak 2005).

Teorem 2.2.2. *M,* $(n = 2m+1)$ bir Kenmotsu manifold ise *M* nin bir Riemann eğrilik tensörü *R* olmak üzere;

$$\begin{aligned} R(X,Y)\phi Z - \phi R(X,Y)Z = {} & g(Y,Z)\phi X - g(X,Z)\phi Y \\ & + g(X,\phi Z)Y - g(Y,\phi Z)X, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} R(\phi X,\phi Y)Z = {} & R(X,Y)Z + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \\ & + g(Y,\phi Z)\phi X - g(X,\phi Z)\phi Y \end{aligned} \tag{2.20}$$

dir (Kenmotsu 1972).

2.3. $\eta-$PARALEL RICCI TENSÖRLÜ KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 2.3.1. *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Ricci tensörü *S*, eğer $\forall\ X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$(\nabla_X S)(\phi Y,\phi Z)=0 \tag{2.21}$$

koşulunu sağlıyorsa, *M* ye $\eta-$**paralel** olarak adlandırılır (Jun, Chand ve Pathak 2005).

M, $(n=2m+1)$-boyutlu, Ricci tensörü $\eta-$paralel bir Kenmotsu manifoldu olsun. Ozaman,

$$(\nabla_X S)(\phi Y,\phi Z)=\nabla_X S(\phi Y,\phi Z)-S(\nabla_X\phi Y,\phi Z)-S(\phi Y,\nabla_X\phi Z). \tag{2.22}$$

(2.4), (2.11) ve (2.18) eşitliklerini (2.22) denklemine uygularsak,

$$\begin{aligned}(\nabla_X S)(\phi Y,\phi Z)&=\nabla_X S(Y,Z)+(n-1)\{\eta(Z)\nabla_X\eta(Y)+\eta(Y)\nabla_X\eta(Z)\}\\&+\eta(Y)\{S(X,Z)+(n-1)\eta(X)\eta(Z)\}+\eta(Z)\{S(Y,X)+(n-1)\eta(Y)\eta(X)\}\\&-S(\nabla_X Y,Z)-S(Y,\nabla_X Z)-(n-1)\{\eta(Z)\eta(\nabla_X Y)+\eta(Y)\eta(\nabla_X Z)\}\end{aligned} \tag{2.23}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$(\nabla_X\eta)(Y)=\nabla_X\eta(Y)-\eta(\nabla_X Y) \tag{2.24}$$

ve

$$\nabla_X S(Y,Z)=(\nabla_X S)(Y,Z)-S(\nabla_X Y,Z)-S(Y,\nabla_X Z)\ . \tag{2.25}$$

(2.24), (2.25) ve (2.15) eşitliklerini kullanarak, (2.23) denklemi

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = \nabla_X S(Y,Z) + (n-1)\{g(X,Y)\eta(Z) + g(X,Z)\eta(Y)\} \\ + \{\eta(Y)S(X,Z) + \eta(Z)S(Y,X)\} \tag{2.26}$$

olarak düzenlenir. (2.21) eşitliğinin (2.26) eşitliğine uygulanmasıyla aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 2.3.1. *M*, hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(n = 2m+1)$ boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. *M* nin , $\eta-$paralel Ricci tensörünün olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = -(n-1)\{g(Y,X)\eta(Z) + g(Z,X)\eta(Y)\} \\ -\{\eta(Y)S(Z,X) + \eta(Z)S(Y,X)\} \tag{2.27}$$

olmasıdır (Jun, Chand, Pathak 2005).

M, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu ve $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. $1 \le i \le n$ için (2.27) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa,

$$dr(X) = 0 \tag{2.28}$$

elde edilir. Öyleyse, *M* manifoldunun *r* skaler eğriliği sabittir. Buradan aşağıdaki teoreme ulaşırız :

Teorem 2.3.2. (M^n, g), $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldunun, $\eta-$paralel Ricci tensörü ise skaler eğriliği sabittir (Jun, Chand, Pathak 2005).

2.4. η –EINSTEIN KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 2.4.1. *M*, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer *M* nin Ricci tensörü $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için;

$a, b : M \to R$ fonksiyonu olmak üzere

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y) \tag{2.29}$$

formunda ise *M* ye bir η **-Einstein manifoldu** denir (Blair 1976).

Teorem 2.4.1. *M*, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer *M*, bir η –Einstein manifold ise $a + b = -(n-1)$ dir (Kenmotsu 1972).

Teorem 2.4.2. *M*, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir η –Einstein Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer *a* ve *b* den biri sabit ise, *M* bir Einstein manifolddur (Kenmotsu 1972).

M, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu ve $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. $1 \le i \le n$ için (2.29) denkleminde $X = Y = e_i$ uygulanırsa,

$$\sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) = a\sum_{i=1}^{n} g(e_i, e_i) + b\sum_{i=1}^{n} \eta(e_i)\eta(e_i)$$

yazılır ve (1.12) den skaler eğrilik,

$$r = an + b \tag{2.30}$$

elde edilir.

Diğer yandan, $a+b=-(n-1)$ olduğunu göz önünde bulundurarak,

$$a=\frac{r}{n-1}+1, \quad b=\frac{-r}{n-1}-n \tag{2.31}$$

elde edilir (Jun, Chand ve Pathak 2005). Buradan aşağıdaki iki teoreme ulaşılır:

Teorem 2.4.3. *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir $\eta-$Einstein Kenmotsu manifoldu olsun. *M* manifoldunun Ricci tensörü

$$S(X,Y)=\left\{\frac{r}{n-1}+1\right\}g(X,Y)+\left\{\frac{-r}{n-1}-n\right\}\eta(X)\eta(Y) \tag{2.32}$$

koşulunu sağlar (Jun, Chand ve Pathak 2005).

Teorem 2.4.4. *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir $\eta-$Einstein Kenmotsu manifoldu olsun. bu durumda $a,b:M\to R$ fonksiyonlarının her ikisi de sabittir (Jun, Chand ve Pathak 2005).

(2.32) yi kullanarak,

$$\begin{aligned}(\nabla_U S)(X,Y)&=\frac{1}{n-1}dr(U)[g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)]\\&+\left(\frac{-r}{n-1}-n\right)\{(\nabla_U\eta)(X)\eta(Y)+\eta(X)(\nabla_U\eta)(Y)\}\end{aligned} \tag{2.33}$$

yazılır ve (2.7) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_U S)(X,Y)&=\frac{1}{n-1}dr(U)g(\phi X,\phi Y)\\&+\left(\frac{-r}{n-1}-n\right)\{g(X,\nabla_U\xi)\eta(Y)+\eta(X)g(Y,\nabla_U\xi)\}\end{aligned} \tag{2.34}$$

elde edilir. (2.12) eşitliği uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(\nabla_U S)(X,Y) = \frac{1}{n-1} dr(U) g(\phi X, \phi Y) + \left(\frac{-r}{n-1} - n \right) \{ [g(U,X) - \eta(U)\eta(X)]\eta(Y) + [g(U,Y) - \eta(U)\eta(Y)]\eta(X) \} \tag{2.35}$$

yazılır ve (2.7) den

$$(\nabla_U S)(X,Y) = \frac{1}{n-1} dr(U) g(\phi X, \phi Y) + \left(\frac{-r}{n-1} - n \right) \{ g(\phi U, \phi X)\eta(Y) + g(\phi U, \phi Y)\eta(X) \} \tag{2.36}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$(\nabla_U S)(\phi X, \phi Y) = \frac{1}{n-1} dr(U) g(\phi X, \phi Y). \tag{2.37}$$

dir. (2.32), (2.37) ve Teorem 2.3.2. yi kullanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.4.5. *M*, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir $\eta-$Einstein Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) *M* manifoldunun Ricci tensörü $\eta-$paraleldir.

ii) *M*, $-n(n-1)$ sabit eğrilikli bir manifolddur.

iii) *M*, Ricci tensörü $S(X,Y) = -(n-1)g(X,Y)$ olarak tanımlı bir Einstein manifolddur (Hong, Özgür ve Tripathi 2006).

3. BÖLÜM

3.1. KENMOTSU MANİFOLDLARI ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Teorem 3.1.1. M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu semisimetrik ise, -1 negatif sabit eğriklidir (Kenmotsu 1972).

Teorem 3.1.2. M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu Ricci semisimetrik ise, bir Einstein manifolddur (Jun, Chand ve Pathak 2005).

İspat: M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun ve $R(X,Y).S=0$ şartını sağlasın. Böylece

$$(R.S)(X,Y,U,V)=-S(R(X,Y)U,V)-S(U,R(X,Y)V)=0 \tag{3.1}$$

dir.(3.1) denkleminde $U=\xi$ alınırsa

$$S(R(X,Y)\xi,V)+S(\xi,R(X,Y)V)=0 \tag{3.2}$$

elde edilir ve burada da (2.13), (2.17) eşitlikleri uygulanırsa

$$\eta(X)S(Y,V)-\eta(Y)S(X,V)-(n-1)\eta(R(X,Y)V)=0$$

elde edilir ve burada $\eta(R(X,Y)V)$ yerine (2.16) uygulanırsa

$$\eta(X)S(Y,V)-\eta(Y)S(X,V)-(n-1)[\eta(Y)g(X,V)-\eta(X)g(Y,V)]=0 \tag{3.3}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.3) denkleminde $X=\xi$ alınır, (2.1), (2.6) ve (2.17) uygulanır ve gerekli sadeleştirilmeler yapılırsa

$$S(Y,V)+(n-1)\eta(Y)\eta(V)-(n-1)[\eta(Y)\eta(V)-g(Y,V)]=0$$

eşitliği görülür ve

$$S(Y,V)=-(n-1)g(Y,V) \tag{3.4}$$

elde edilir. Böylece *M*, bir Einstein manifolddur.

Sonuç 3.1.1. *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. *M* manifoldu semisimetrik ise, bir Einstein manifolddur (Jun, Chand ve Pathak 2005).

İspat: $R(X,Y).R=0$ ise $R(X,Y).S=0$ olacağından, Teorem 3.1.1den sonuca ulaşılır.

Teorem 3.1.3. *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. *M* manifoldu Ricci recurrent ise, bir Einstein manifolddur (Jun, Chand ve Pathak 2005).

İspat: *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. $g(QX,Y)=S(X,Y)$ olmak üzere, bu manifold üzerinde $f^2=g(Q,Q)$ şartını sağlayan bir *f* fonksiyonu tanımlıyalım.

$$Y(f^2)=Y[g(Q,Q)]=2g(\nabla_Y Q,Q) \tag{3.5}$$

ve *M*, Ricci recurrent olduğundan, (1.10) eşitliğinden

$$Y(f^2)=2f^2\alpha(Y) \tag{3.6}$$

yazılır. Aynı zamanda, $Y(f^2) = 2f(Yf)$ olduğundan,

$$f(Yf) = f^2\alpha(Y) \tag{3.7}$$

elde edilir. Bu da bize,

$$Yf = f\alpha(Y) \neq 0 \tag{3.8}$$

olduğunu gösterir. (3.8) eşitliğinden,

$$X(Yf) - Y(Xf) = \{X\alpha(Y) - Y\alpha(X)\}f \tag{3.9}$$

elde edilir. Buradan

$$\{\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\}f = \{X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha[X,Y]\}f \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu denklemin sol tarafının sıfıra eşit olması ve M üzerinde $f \neq 0$ olması neticesinde

$$d_\alpha(X,Y) = 0 \tag{3.11}$$

bulunur. Bu da α, 1-formunun kapalı olduğunu gösterir. (1.10) eşitliğinden, $(\nabla_Y S)(U,V) = \alpha(Y)S(U,V)$ olduğundan,

$$(\nabla_X\nabla_Y S)(U,V) = \{X\alpha(Y) - Y\alpha(X)\}S(U,V) \tag{3.12}$$

dır. Böylece (3.11) eşitliğinden

$$(R(X,Y).S)(U,V) = 2d_\alpha(X,Y)S(U,V) = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Böylece Ricci recurrent bir manifoldun, Ricci semisimetrik olduğu görülür.

Teorem 3.1.4. *M*, $n>3$, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer *M* konformal düzlemsel (flat) ise, -1 negatif sabit eğrilikli bir yüzeydir (Kenmotsu 1972).

Teorem 3.1.5. *M*, $n>3$, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. *M* manifoldu Weyl semisimetrik ise konformal düzlemsedir (flattır). (Jun, Chand ve Pathak 2005).

Sonuç 3.1.2. *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir konformal recurrent Kenmotsu manifoldu hiperbolik yüzey $H^n(1)$ e lokal izometriktir (Jun, Chand ve Pathak 2005).

İspat: Konformal recurrent bir Riemann manifold $R(X,Y).C=0$ eşitliğini sağlar. Öyleyse, bir konformal recurrent Kenmotsu manifoldu, Weyl semisimetriktir. Teorem 3.1.4. ve Teorem 3.1.5. gereğince ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.6. *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) *M*, $C^n \times R$ ye kanonik concirculardır.
ii) *M*, -1 sabit eğriliklidir.
iii) *M*, concircular düzlemseldir (flattır).
iv) *M*, $R(\xi,X).\overline{C}=0$ eşitliğini sağlar.
v) *M*, $R(\xi,X).R=0$ eşitliğini sağlar (Hong, Özgür ve Tripathi 2006).

İspat: *M*, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldun -1 sabit eğrilikli olması için gerek ve yeter şart M nin $C^n \times R$ ye kanonik concircular olmasıdır (Kirichenko 2001). Buradan (i) ve (iii) ifadelerinin denklikleri görülür. Bir Riemanian manifoldun concircular düzlemsel (flat) olması için gerek ve yeter şart bu manifoldun sabit eğrilikli olmasıdır. Bunu göz önünde bulundurarak, (ii) ifadesinin (iii) ifadesini gerektireceği görülür. (iv) durumunun (iii) ile gerçekleneceği açıktır. (1.32) eşitliğinden (iv) ve (v) ifadelerinin denklikleri görülür. Teorem 3.1.1. gereğince (v) eşiliğinden (ii) ifadesine ulaşılır. Kısa bir hesaplama ile (ii) ifadesinden (v) ifadesine ulaşılır.

Teorem 3.1.7. M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) M, $C^n \times R$ ye kanonik concirculardır.

ii) M, $-n(n-1)$ veya -1 sabit eğriliklidir.

iii) M, $\overline{C}(\xi,Y).\overline{C}=0$ eşitliğini sağlar.

iv) M, $\overline{C}(\xi,Y).R=0$ eşitliğini sağlar (Hong, Özgü ve Tripathi 2006).

İspat: (1.14) ifadesinde $X=\xi$ alır, (2.13), (2.1) ve (2.6) eşitlikleri uygulanırsa,

$$\overline{C}(\xi,Y)Z=\left(1+\frac{r}{n(n-1)}\right)\{\eta(Z)Y-g(Y,Z)\xi\} \tag{3.14}$$

(3.14) de $Z=\xi$ alınır, (2.1) ve (2.6) uygulanırsa,

$$\overline{C}(\xi,Y)\xi=\left(1+\frac{r}{n(n-1)}\right)\{Y-\eta(Y)\xi\} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.14) ifadesinden, eğer M, $-n(n-1)$ sabit eğrilikli ise $\overline{C}(\xi,Y)=0$ olduğu görülür. Eğer M, -1 sabit eğrilikli ise $\overline{C}=0$ olacaktır. Böylece, (i) den yola çıkarak (ii) ve (iii) ifadelerine ulaşılır. (1.33) dan (ii) ve (iii) ifadelerinin denklikleri görülür. M manifoldunun $\overline{C}(\xi,Y).R=0$ eşitliğini sağladığını kabul edelim. Bu durumda,

$$0=\left[\overline{C}(\xi,U),R(X,Y)\right]\xi-R\left(\overline{C}(\xi,U)X,Y\right)\xi-R\left(X,\overline{C}(\xi,U)Y\right)\xi\,. \tag{3.16}$$

(3.14), (3.15) ve (2.16) eşitliklerinin (3.16) denklemine uygulanmasıyla,

$$0=-\left(1+\frac{r}{n(n-1)}\right)\{g(U,R(X,Y)\xi)\xi+R(X,Y)U-\eta(U)R(X,Y)\xi$$
$$+\eta(X)R(U,Y)\xi-g(U,X)R(\xi,Y)\xi+\eta(Y)R(X,U)\xi-g(U,Y)R(X,\xi)\xi\}$$

elde edilir. (2.13) eşitliğini kullanarak

$$0=\left(1+\frac{r}{n(n-1)}\right)\{R(X,Y)U+g(Y,U)X-g(X,U)Y\} \tag{3.17}$$

elde edilir. Bu durumda, $r=-n(n-1)$ veya $R(X,Y)U+g(Y,U)X-g(X,U)Y=0$ olmalıdır. İkinci durum da M nin sabit eğriliğinin -1 olmasını gerektirir. Böylelikle, (iii) ifadesinin (i) ifadesine denk olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.1.8. M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer M Ricci-pseudosimetrik ise $r=-n(n-1)$ skaler eğrilikli bir Einstein manifoldudur (ki bu durumda M Ricci-semisimetriktir) veya M üzerinde $L_S=-1$ eşitliği sağlanır (Hong, Özgür ve Tripathi 2006).

İspat: M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Ricci-pseudosimetrik Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde,

$$(R(U,X).S)(Y,V)=L_S Q(g,S)(Y,V;U,X) \tag{3.18}$$

bağıntısı sağlanır. (3.18) de $U=\xi$ alınırsa

$$(R(\xi,X).S)(Y,V)=L_S Q(g,S)(Y,V;\xi,X) \tag{3.19}$$

yazılır.

(3.19) eşitliğinin sol tarafı, (2.13), (2.17) eşitlikleri kullanılarak hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}(R(\xi,X).S)(Y,V) &= -S(R(\xi,X)Y,V)-S(Y,R(\xi,X)V)\\ &= -(n-1)g(X,Y)\eta(V)-\eta(Y)S(X,V)\\ &\quad -(n-1)g(X,V)\eta(Y)-\eta(V)S(X,Y)\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. Diğer yandan (1.34) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}Q(g,S)(Y,V;\xi,X) &= (n-1)g(X,Y)\eta(V)+\eta(Y)S(X,V)\\ &\quad +(n-1)g(X,V)\eta(Y)+\eta(V)S(X,Y)\end{aligned} \tag{3.21}$$

yazılabilir. *M,* Ricci semisimetrik olsun. Bu durumda aynı zamanda Ricci pseudosimetriktir. Öyleyse, $(R(\xi,X).S)(Y,V)=0$ ve (3.20) den

$$(n-1)g(X,Y)\eta(V)+\eta(Y)S(X,V)+(n-1)g(X,V)\eta(Y)+\eta(V)S(X,Y)=0 \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22) eşitliğinde $Y=\xi$ alınırsa

$$S(X,V)=-(n-1)g(X,V) \tag{3.23}$$

elde edilir. Bu da *M*'nin $r=-n(n-1)$ skaler eğrilikli bir Einstein manifold olduğunu gösterir.

Şimdi, *M* nin Ricci semisimetrik olmayan bir Ricci pseudosimetrik manifold olduğunu kabul edelim. (3.20) ve (3.21) eşitliklerinden

$$(1+L_S)\{(n-1)g(X,Y)\eta(V)+\eta(Y)S(X,V)+(n-1)g(X,V)\eta(Y)+\eta(V)S(X,Y)\}=0 \tag{3.24}$$

elde edilir. *M* Ricci semisimetrik değildir. Öyleyse, $L_S=-1$ olmalıdır.

Sonuç 3.1.3. *M,* $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Eğer concircular eğrilik tensörü $\overline{C}$, $\overline{C}(\xi,Y).S=0$ koşulunu sağlarsa, *M* nin skaler eğriliği

$r = -n(n-1)$ eşitliğini sağlar veya *M*, $r = -n(n-1)$ sabit eğrilikli bir Einstein manifoldudur (Hong, Özgür ve Tripathi 2006).

3.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ RECURRENT KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 3.2.1. (*M, g*) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Riemanian eğrilik tensörü *R*, aşağıdaki şartı sağlıyor ise *M* ye **genelleştirilmiş recurrent manifold** denir.

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z = \alpha(W)R(X,Y)Z + \beta(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{3.25}$$

Burada, α ve $\beta, \beta \neq 0$, *A* ve *B* vektör alanları α ve β ile bağlantılı olmak üzere;

$$\alpha(W) = g(W,A), \quad \beta(W) = g(W,B) \tag{3.26}$$

olarak tanımlanan 1-formlardır (De ve Guha 1991).

Tanım 3.2.2. (*M, g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer Ricci eğrilik tensörü *S*, α ve β (3.26) da tanımlanan 1-formlar olmak üzere,

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X)S(Y,Z) + (n-1)\beta(x)g(Y,Z) \tag{3.27}$$

şartını sağlıyor ise *M* ye **genelleştirilmiş Ricci recurrent manifold** denir (De ve Guha 1991).

Tanım 3.2.3. (*M, g*) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer concircular eğrilik tensörü $\overline{C}$, α ve β (3.26) da tanımlanan 1-formlar olmak üzere,

$$(\nabla_X \overline{C})(Y,Z) = \alpha(X)\overline{C}(Y,Z)U + (n-1)\beta(X)[g(Z,U)Y - g(Y,U)Z] \tag{3.28}$$

şartını sağlıyor ise *M* ye **genelleştirilmiş concircular recurrent manifold** denir (Maralabhavi ve Rathnamna 1999).

Teorem 3.2.1. M, $(n = 2m+1)$ boyutlu bir genelleştirilmiş recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda $\alpha = \beta$ (Özgür 2007).

İspat: M, $(n = 2m+1)$ boyutlu bir genelleştirilmiş recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda Riemanian eğrilik tensörü R, $\forall\ X, Y, Z, W$ vektör alanı için (3.25) denklemini sağlar. (3.25) denkleminde, $X = Y = \xi$ alınırsa,

$$(\nabla_X R)(\xi, X)\xi = \alpha(X)R(\xi, Z)\xi + \beta(X)[\eta(Z)\xi - Z] \tag{3.29}$$

elde edilir.

$$(\nabla_X R)(\xi, Z)\xi = \nabla_X R(\xi, Z)\xi - R(\nabla_X \xi, Z)\xi - R(\xi, \nabla_X Z)\xi - R(\xi, Z)\nabla_X \xi \tag{3.30}$$

olarak yazılır. (2.12) in (3.30) denklemine uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(\xi, Z)\xi = \nabla_X R(\xi, Z)\xi - R(\nabla_X \xi, Z)\xi - R(\xi, \nabla_X Z)\xi \\ - R(\xi, Z)X + \eta(X)R(\xi, Z)\xi\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. (2.15) ve (2.13) eşitliklerinin (3.31) e uygulanmasıyla

$$(\nabla_X R)(\xi, Z)\xi = 0 \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.29) ve (3.32) denklemlerinin sol taraflarının eşitliğinden

$$\alpha(X)R(\xi, Z)\xi + \beta(X)[\eta(Z)\xi - Z] = 0 \tag{3.33}$$

yazılır. (2.13) ün (3.33) denklemine uygulanmasıyla

$$[\alpha(X) - \beta(X)][\eta(Z)\xi - Z] = 0 \tag{3.34}$$

elde edilir. Böylece, her X vektör alanı için $\alpha(X)=\beta(X)$ dır.

Teorem 3.2.2. M, $(n=2m+1)$ boyutlu bir genelleştirilmiş recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda M manifoldunun skaler eğriliği r,

$$\eta(A)r=(1-n)[(n-2)\eta(B)+2\eta(A)] \tag{3.35}$$

bağıntısı ile verilir (Özgür 2007).

İspat: M, $(n=2m+1)$ boyutlu bir genelleştirilmiş recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. (3.25) denkleminde ikinci Bianchi eşitliği uygulanır ve bir düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}&\alpha(X)g(R(Y,Z)W,U)+\beta(X)[g(Z,W)g(Y,U)-g(Y,W)g(Z,U)]\\&+\alpha(Y)g(R(Z,X)W,U)+\beta(Y)[g(X,W)g(Z,U)-g(Z,W)g(X,U)]\\&+\alpha(Z)g(R(X,Y)W,U)+\beta(Z)[g(Y,W)g(X,U)-g(X,W)g(Y,U)]=0\end{aligned} \tag{3.36}$$

denklemi elde edilir. $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üere, $1\leq i\leq n$ için (3.36) denkleminde $Y=U=e_i$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}&\alpha(X)S(Z,W)+(n-1)\beta(X)g(Z,W)+R(Z,X,W,A)+\beta(Z)g(X,W)\\&-\beta(X)g(Z,W)-\alpha(Z)S(X,W)+(1-n)\beta(Z)g(X,W)=0\end{aligned} \tag{3.37}$$

bulunur. Burada, $1\leq i\leq n$ için $W=Z=e_i$ uygulanırsa

$$r\alpha(X)+(n-1)(n-2)\beta(X)-2S(X,A)=0 \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) denkleminde $X=\xi$ alınırsa, (3.35) bağıntısına ulaşılır.

Teorem 3.2.3. (M^n,g) bir genelleştirilmiş Ricci recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda $\alpha=\beta$ (Özgür 2007).

İspat: M, $(n=2m+1)$ boyutlu bir genelleştirilmiş Ricci recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda Ricci tensörü S, $\forall\ X,Y,Z,W$ vektör alanı için (3.27) denklemini sağlar. (3.27) denkleminde, $Z=\xi$ alınırsa,

$$(\nabla_X S)(Y,\xi)=(1-n)[\alpha(X)-\beta(X)]\eta(Y) \tag{3.39}$$

elde edilir.

$$(\nabla_X S)(Y,\xi)=\nabla_X S(Y,\xi)-S(\nabla_X Y,\xi)-S(Y,\nabla_X\xi) \tag{3.40}$$

olarak yazılır. (2.12) ve (2.17) nin (3.40) denklemine uygulanmasıyla

$$(\nabla_X S)(Y,\xi)=(1-n)\nabla_X\eta(Y)-(1-n)\eta(\nabla_X Y)-S(X,Y)+(1-n)\eta(X)\eta(Y) \tag{3.41}$$

elde edilir. (2.15) i kullanarak

$$(\nabla_X S)(Y,\xi)=(1-n)g(X,Y)-S(X,Y) \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.39) ve (3.42) denklemlerinin sol taraflarının eşitliğinden

$$(1-n)[\alpha(X)-\beta(X)]\eta(Y)=(1-n)g(X,Y)-S(X,Y) \tag{3.43}$$

yazılır. (3.43) denkleminde $Y=\xi$ alınır ve (2.17) uygulanırsa, $\alpha(X)=\beta(X)$ elde edilir.

Teorem 3.2.4. (M^n,g) bir genelleştirilmiş concircular recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda, her X vektör alanı için $X[r]$ skaler eğrilik r nin kovaryant türevini göstermek üzere,

$$\alpha(X)\left(1+\frac{r}{n(n-1)}\right)-\beta(X)-\frac{1}{n(n-1)}X[r]=0. \tag{3.44}$$

(Özgür 2007).

İspat: *M*, $(n=2m+1)$ boyutlu bir genelleştirilmiş concircular recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda concircular eğrilik tensörü $\overline{C}$, $\forall\ X,Y,Z$ vektör alanı için (3.28) denklemini sağlar. (3.28) denkleminde, $Y=U=\xi$ alınırsa,

$$(\nabla_X\overline{C})(\xi,Z)\xi=\alpha(X)\overline{C}(\xi,Z)\xi+\beta(X)[\eta(Z)\xi-Z] \tag{3.45}$$

elde edilir. (1.13) ve (2.13) ü (3.45) denklemine uygulayarak

$$(\nabla_X\overline{C})(\xi,Z)\xi=\left[\alpha(X)\left(1+\frac{r}{n(n-1)}\right)-\beta(X)\right][Z-\eta(Z)\xi] \tag{3.46}$$

yazılır. Diğer yandan kovaryant türev tanımından,

$$(\nabla_X\overline{C})(\xi,Z)\xi=\nabla_X\overline{C}(\xi,Z)\xi-\overline{C}(\nabla_X\xi,Z)\xi-\overline{C}(\xi,\nabla_X Z)\xi-\overline{C}(\xi,Z)\nabla_X\xi \tag{3.47}$$

dir.

(1.13) ve (2.13) ü kullanarak (3.47) denklemi

$$\begin{aligned}(\nabla_X\overline{C})(\xi,Z)\xi&=\nabla_X\left(\left(1+\frac{r}{n(n-1)}\right)(Z-\eta(Z)\xi)\right)\\&+\left[1+\frac{r}{n(n-1)}\right](-2\eta(\nabla_X\xi)Z+\eta(Z)\nabla_X\xi-\nabla_X Z+\eta(\nabla_X Z)\xi+g(Z,\nabla_X\xi)\xi)\end{aligned} \tag{3.48}$$

olarak yazılır.

(2.12) eşitliğini (3.48) e uygulayarak,

$$\left(\nabla_X \overline{C}\right)(\xi, Z)\xi = \frac{1}{n(n-1)} X[r](Z - \eta(Z)\xi) \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.46) ve (3.49) denklemlerinin sol taraflarının eşitliğinden

$$\left(\alpha(X)\left(1 + \frac{r}{n(n-1)}\right) - \beta(X) - \frac{1}{n(n-1)} X[r]\right)[Z - \eta(Z)\xi] = 0 \tag{3.50}$$

elde edilir. Böylelikle (3.44) bağıntısı elde edilir.

3.3. $\phi-$ SİMETRİK KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 3.3.1. *M*, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. ξ ya ortogonal her *X, Y, Z, W* vektör alanı için,

$$\phi^2\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y)Z\right) = 0 \tag{3.51}$$

ise *M* ye **lokal $\phi-$simetrik manifold** denir (De 2008).

Tanım 3.3.2. *M*, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Keyfi seçilen her *X, Y, Z, W* vektör alanı için,

$$\phi^2\left(\left(\nabla_W R\right)(X,Y)Z\right) = 0 \tag{3.52}$$

ise *M* ye $\phi-$**simetrik manifold** denir (De 2008).

Teorem 3.3.1. *M*, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. *M* manifoldu $\phi-$simetrik ise, bir Einstein manifolddur (De 2008).

İspat: *M*, $(n=2m+1)$ boyutlu $\phi-$ simetrik Kenmotsu manifold olsun. (2.2) eşitliğinin (3.52) ye uygulanmasıyla

$$-(\nabla_W R)(X,Y)Z+\eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi=0 \tag{3.53}$$

yazılır ve buradan

$$-g((\nabla_W R)(X,Y)Z,U)+\eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\eta(U)=0 \tag{3.54}$$

eşitliğine ulaşırız.

$\{e_i\}$, i = 1, 2, . . . , n her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. $1\le i\le n$ için (3.54) denkleminde $X=U=e_i$ uygulanırsa

$$-(\nabla_W S)(Y,Z)+\sum_{i=1}^{n}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i)=0 \tag{3.55}$$

elde edilir.

(3.55) nin ikinci bölümünde $Z=\xi$ alınırsa,

$$\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i)=g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi)g(e_i,\xi) \tag{3.56}$$

elde edilir. $p\in M$ noktasında

$$\begin{aligned} g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi) &= g(\nabla_W R(e_i,Y)\xi,\xi)-g(R(\nabla_W e_i,Y)\xi,\xi) \\ &\quad -g(R(e_i,\nabla_W Y)\xi,\xi)-g(R(e_i,Y)\nabla_W\xi,\xi) \end{aligned} \tag{3.57}$$

olduğunu biliyoruz. $\{e_i\}$ bir ortonormal baz olduğundan p noktasında $\nabla_X e_i=0$. (2.13), (2.1) ve (2.6) eşitliklerini kullanarak

$$g(R(e_i,\nabla_W Y)\xi,\xi) = g(\eta(e_i)\nabla_W Y - \eta(\nabla_W Y)e_i,\xi)$$
$$= \eta(e_i)g(\nabla_W Y,\xi) - \eta(\nabla_W Y)g(e_i,\xi) \tag{3.58}$$
$$= 0$$

(3.58) da elde edilen sonucun (3.57) ye uygulanmasıyla

$$g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi) = g(\nabla_W R(e_i,Y)\xi,\xi) - g(R(e_i,Y)\nabla_W \xi,\xi) \tag{3.59}$$

elde edilir. $g(R(e_i,Y)\xi,\xi) = -g(R(\xi,\xi)Y,e_i) = 0$ olduğundan

$$g(\nabla_W R(e_i,Y)\xi,\xi) + g(R(e_i,Y)\xi,\nabla_W \xi) = 0 \tag{3.60}$$

yazılır. (3.60) eşitliğinin (3.59) a uygulanmasıyla

$$g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi) = -g(R(e_i,Y)\xi,\nabla_W \xi) - g(R(e_i,Y)\nabla_W \xi,\xi)$$

elde edilir. R nin çarpık(anti) simetrik olması özelliği kullanılarak

$$g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi) = 0 \tag{3.61}$$

elde edilir.

(3.55) de $Z=\xi$ alınır ve (3.61) eşitliği kullanılırsa

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = 0 \tag{3.62}$$

elde edilir.

$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \nabla_W S(Y,\xi) - S(\nabla_W Y,\xi) - S(Y,\nabla_W \xi)$ olduğunu biliyoruz. Bu denklemde (2.12), (2.15) ve (2.17) uygulanırsa

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = -(n-1)g(Y,W) - S(Y,W) \tag{3.63}$$

elde edilir. (3.63) ün (3.62) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$S(Y,W) = -(n-1)g(Y,W) \tag{3.64}$$

elde edilir. Bu da bize $\phi-$simetrik Kenmotsu manifoldun bir Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.2. Üç boyutlu bir Kenmotsu manifoldunun lokal $\phi-$simetrik olması için gerek ve yeter şart skaler eğriliğinin sabit olmasıdır (De 2008).

İspat: Üç boyutlu bir Kenmotsu manifoldda, eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{r+4}{2}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ &- \frac{r+6}{2}[g(Y,Z)\eta(X)\xi - g(X,Z)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y] \end{aligned} \tag{3.65}$$

olarak tanımlıdır (De ve Pathak 2004).

(3.65) eşitliğinin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X,Y)Z = {} & \frac{dr(W)}{2}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ & -\frac{dr(W)}{2}[g(Y,Z)\eta(X)\xi - g(X,Z)\eta(Y)\xi \\ & +\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y] \\ & -\frac{r+6}{2}[g(Y,Z)(\nabla_W\eta)(X)\xi + g(Y,Z)\eta(X)\nabla_W\xi \\ & -g(X,Z)(\nabla_W\eta)(Y)\xi - g(X,Z)\eta(Y)\nabla_W\xi + (\nabla_W\eta)(Y)\eta(Z)X \\ & +\eta(Y)(\nabla_W\eta)(Z)X - (\nabla_W\eta)(X)\eta(Z)Y - \eta(X)(\nabla_W\eta)(Z)Y \end{aligned} \tag{3.66}$$

elde edilir. (3.66) eşitliğinin her iki yanına ϕ^2 uygulanırsa

$$\begin{aligned}\phi^2(\nabla_W R)(X,Y)Z = &-\frac{dr(W)}{2}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ &+ g(X,Z)\eta(Y)\xi - \eta(Y)\eta(Z)X + \eta(X)\eta(Z)Y] \\ &+ \frac{r+6}{2}[(\nabla_W\eta)(Y)\eta(Z)X + \eta(Y)(\nabla_W\eta)(Z)X \\ &- (\nabla_W\eta)(X)\eta(Z)Y - (\nabla_W\eta)(Z)\eta(X)Y \\ &- (\nabla_W\eta)(Y)\eta(Z)\eta(X)\xi - \eta(Z)(\nabla_W\eta)(X)\eta(Y)\xi]\end{aligned} \tag{3.67}$$

elde edilir. X, Y, Z ξ ’ya ortogonal seçilir ve (3.51) eşitliği uygulanırsa

$$\frac{dr(W)}{2}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] = 0 \tag{3.68}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.3.1. (x, y, z) R^3 te standart koordinatlar olmak üzere, $M = \{(x, y, z) \in R^3\}$ manifoldunu ele alalım.

$$e_1 = z\frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = z\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = -z\frac{\partial}{\partial z}$$

M nin her noktasında lineer bağımsız vektör alanlarıdır.. Riemann metriği *g,*

$$g(e_1,e_3) = g(e_2,e_3) = g(e_1,e_2) = 0, \quad g(e_1,e_1) = g(e_2,e_2) = g(e_3,e_3) = 1$$

olarak tanımlansın. Bu durumda *g* metriği

$$g = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{z^2}$$

biçimindedir. η 1-formu, her $Z \in \chi(M)$ için, $\eta(Z) = g(Z, e_3)$ olarak tanımlansın. ϕ, $\phi(e_1) = -e_2$, $\phi(e_2) = e_1$, $\phi(e_3) = 0$ olarak tanımlanan (1, 1) tensör alanı olsun. ϕ ve g’nin lineerliğini kullanarak, $\forall\, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\eta(e_3)=1, \quad \phi^2 Z=-Z+\eta(Z)e_3, \quad g(\phi Z,\phi W)=g(Z,W)-\eta(Z)\eta(W)$$

yazılabilir. Böylece, $e_3=\xi$ için, (ϕ,ξ,η,g) yapısı M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı tanımlar.

∇, g metriğine bağlı olarak tanımlı Levi Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda,

$$[e_1,e_2]=0, \quad [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=e_2$$

dir. Koszul formülünde, g metriğinin, ∇ Riemannian konneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z])-g(Y,[X,Z])+g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

olarak verilir. Bu formülü kullanarak,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1}e_3,e_1) &= e_1 g(e_3,e_1)+e_3 g(e_1,e_1)-e_1 g(e_1,e_3) \\ &\quad -g(e_1,[e_3,e_1])-g(e_3,[e_1,e_1])+g(e_1,[e_1,e_3]) \end{aligned}$$

$$g(\nabla_{e_1}e_3,e_1)=1 \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1}e_3,e_2) &= e_1 g(e_3,e_2)+e_3 g(e_2,e_1)-e_2 g(e_1,e_3) \\ &\quad -g(e_1,[e_3,e_2])-g(e_3,[e_1,e_2])+g(e_2,[e_1,e_3]) \end{aligned}$$

$$g(\nabla_{e_1}e_3,e_2)=0 \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1}e_3,e_3) &= e_1 g(e_3,e_3)+e_3 g(e_3,e_1)-e_3 g(e_1,e_3) \\ &\quad -g(e_1,[e_3,e_3])-g(e_3,[e_1,e_3])+g(e_3,[e_1,e_3]) \end{aligned}$$

$$g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_3\right) = 0 \tag{3.71}$$

elde edilir.

$$\nabla_{e_1} e_3 = g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_1\right)e_1 + g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_2\right)e_2 + g\left(\nabla_{e_1} e_3, e_3\right)e_3$$

bağıntısında (3.70), (3.71) ve (3.72) eşitliklerini uygularsak

$$\nabla_{e_1} e_3 = e_1 \tag{3.72}$$

elde edilir. Benzer şekilde aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_1} e_3 = e_1, \quad &&\nabla_{e_1} e_2 = 0, \quad &&\nabla_{e_1} e_1 = -e_3, \\ &\nabla_{e_2} e_3 = e_2, \quad &&\nabla_{e_2} e_2 = e_3, \quad &&\nabla_{e_2} e_3 = 0, \\ &\nabla_{e_3} e_3 = 0, \quad &&\nabla_{e_3} e_2 = 0, \quad &&\nabla_{e_3} e_1 = 0, \end{aligned} \tag{3.73}$$

elde edilir. Bu durumda, $\xi = e_3$ olmak üzere, M manifoldu $\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi$ bağıntısını sağlar. Öyleyse M üç boyutlu bir Kenmotsu manifoldudur. (3.73) eşitliklerini (1.1) de kullanarak

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_2 \\ &= \nabla_{e_1} e_3 \\ &= e_1 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} R(e_1, e_3)e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3} e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{[e_1, e_3]} e_3 \\ &= \nabla_{e_3} e_1 - \nabla_{e_1} e_3 \\ &= -e_1 \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} R(e_2, e_1)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{[e_2, e_1]} e_1 \\ &= -\nabla_{e_2} e_3 \\ &= -e_2 \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} R(e_2, e_3)e_3 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_3 \\ &= \nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{e_2}e_3 \\ &= -e_2 \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned} R(e_3, e_1)e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{[e_3,e_1]}e_1 \\ &= \nabla_{e_3}e_2 + \nabla_{e_1}e_1 \\ &= -e_3 \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned} R(e_3, e_2)e_2 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{[e_3,e_2]}e_2 \\ &= \nabla_{e_3}e_3 + \nabla_{e_2}e_2 \\ &= e_3 \end{aligned} \tag{3.79}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden, tanımlanan üç boyutlu Kenmotsu manifoldunun lokal $\phi-$simetrik olduğu görülür (De 2008).

3.4. $\phi-$ RECURRENT KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 3.4.1. *M,* $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. Keyfi seçilen her *X, Y, Z, W* vektör alanı için,

$$\phi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = A(W)R(X,Y)Z \tag{3.80}$$

olacak sıfırdan farklı bir A 1-formu varsa, M ye $\phi-$ **recurrent manifold** denir.

Teorem 3.4.1. *M,* $(n > 3)$ $(n = 2m+1)$-boyutlu bir $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldunda, 1-form A ile bağlantılı karakteristik vektör alanı ξ ve vektör alanı ρ, eş yönlüdür ve 1-form A

$$A(W) = \eta(\rho)\eta(W) \tag{3.81}$$

olarak tanımlanır (De, Yıldız ve Yalınız 2007).

İspat: M, $(n>3)$ $(n=2m+1)$-boyutlu bir $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. (2.2) nin (3.80) eşitliğine uygulanmasıyla

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z = \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi - A(W)R(X,Y)Z \tag{3.82}$$

elde edilir. (3.82) de Bianchi eşitliği uygulanırsa

$$A(W)\eta(R(X,Y)Z) + A(X)\eta R((Y,W)Z) + A(Y)\eta(R(W,X)Z) = 0 \tag{3.83}$$

olduğu görülür. (3.83) eşitliği (2.16) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &A(W)[\eta(Y)g(X,Z)-\eta(X)g(Y,Z)] \\ &+A(X)[\eta(W)g(Y,Z)-\eta(Y)g(W,Z)] \\ &+A(Y)[\eta(X)g(W,Z)-\eta(W)g(X,Z)]=0 \end{aligned} \tag{3.84}$$

olarak yazılabilir. $\{e_i\}$, i = 1, 2, . . . , n her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. $1 \le i \le n$ için (3.84) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa, her X, W vektör alanı için

$$A(W)\eta(X) = A(X)\eta(W) \tag{3.85}$$

elde edilir. (3.85) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa, $A(X) = g(X,\rho)$ olarak tanımlı 1- form ve ρ, A 1-formu ile bağlantılı vektör alanı olmak üzere her W vektör alanı için

$$A(W) = \eta(\rho)\eta(W) \tag{3.86}$$

bulunur.

Teorem 3.4.2. M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldu $\phi-$recurrent ise, bir Einstein manifolddur (De, Yıldız ve Yalınız 2007).

İspat: M, $(n=2m+1)$-boyutlu bir $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. (3.82) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}&-g((\nabla_W R)(X,Y)Z,U)+\eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\eta(U)\\&=A(W)g(R(X,Y)Z,U)\end{aligned} \tag{3.87}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. $1\le i\le n$ için (3.87) denkleminde $X=U=e_i$ alınırsa

$$-(\nabla_W S)(Y,Z)+\sum_{i=1}^{n}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i)=A(W)S(Y,Z) \tag{3.88}$$

elde edilir. Teorem 3.3.1 in ispatında, $\sum_{i=1}^{n}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi)\eta(e_i)=0$ olduğu gösterildi. Bu durumda, (3.88) eşitliğinde $Z=\xi$ alınırsa

$$-(\nabla_W S)(Y,\xi)=A(W)S(Y,\xi) \tag{3.89}$$

elde edilir. (3.63) ifadesinin (3.89) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$S(Y,W)=-(n-1)A(W)\eta(Y)-(n-1)g(Y,W) \tag{3.90}$$

elde edilir. Teorem 3.4.1 in (3.90) eşitliğine uygulanmasıyla

$$S(Y,W)=-(n-1)g(Y,W)-(n-1)\eta(\rho)\eta(Y)\eta(W) \tag{3.91}$$

elde edilir. Buradan $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldun bir Einstein manifold olduğu sonucuna ulaşılır.

4. BÖLÜM

4.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ $\phi-$RECURRENT KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 4.1.1. *M*, $(n=2m+1)$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. Riemanian eğrilik tensörü *R*, aşağıdaki şartı sağlıyor ise *M* ye **genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifold** denir.

$$\phi^2((\nabla_W R)(X,Y)Z) = \alpha(W)R(X,Y)Z + \beta(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{4.1}$$

Burada, α ve β, $\beta \neq 0$, *A* ve *B* vektör alanları α ve β ile bağlantılı olmak üzere;

$$\alpha(W) = g(W,A), \quad \beta(W) = g(W,B) \tag{4.2}$$

olarak tanımlanan 1-formlardır.

Teorem 4.1.1. *M*, $(n=2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\beta(W)=\alpha(W)$.

İspat: *M*, $(n=2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifold olsun. (2.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}-(\nabla_W R)(X,Y)Z + \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi &= \alpha(W)R(X,Y)Z \\ &\quad + \beta(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{4.3}$$

yazılır ve buradan

$$-g((\nabla_W R)(X,Y)Z,U)+\eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\eta(U)= \\ \alpha(W)g(R(X,Y)Z,U)+\beta(W)[g(Y,Z)g(X,U)-g(X,Z)g(Y,U)] \tag{4.4}$$

eşitliğine ulaşırız.

$\{e_i\}$, i = 1, 2, . . . , n her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. $1 \leq i \leq n$ için (4.4) denkleminde $X = U = e_i$ alınırsa

$$-(\nabla_W S)(Y,Z)+\sum_{i=1}^{n}\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i)=\alpha(W)S(Y,Z)+(n-1)\beta(W)g(Y,Z) \tag{4.5}$$

elde edilir.

(4.5) in ikinci bölümünde $Z = \xi$ alınırsa,

$$\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i)=g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi)g(e_i,\xi) \tag{4.6}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda $p \in M$ noktasında

$$g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi)=g(\nabla_W R(e_i,Y)\xi,\xi)-g(R(\nabla_W e_i,Y)\xi,\xi) \\ -g(R(e_i,\nabla_W Y)\xi,\xi)-g(R(e_i,Y)\nabla_W \xi,\xi) \tag{4.7}$$

olacaktır. $\{e_i\}$ bir ortonormal baz olduğundan p noktasında $\nabla_X e_i = 0$. (2.1), (2.6) ve (2.13) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} g(R(e_i,\nabla_W Y)\xi,\xi) &= g(\eta(e_i)\nabla_W Y-\eta(\nabla_W Y)e_i,\xi) \\ &= \eta(e_i)g(\nabla_W Y,\xi)-\eta(\nabla_W Y)g(e_i,\xi) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) eşitliğinde elde edilen sonucun (4.7) eşitliğine uygulanmasıyla

$$g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi) = g(\nabla_W R(e_i,Y)\xi,\xi) - g(R(e_i,Y)\nabla_W \xi,\xi) \tag{4.9}$$

eşitliğine ulaşılır. $g(R(e_i,Y)\xi,\xi) = -g(R(\xi,\xi)Y,e_i) = 0$ eşitliği gereğince

$$g(\nabla_W R(e_i,Y)\xi,\xi) + g(R(e_i,Y)\xi,\nabla_W \xi) = 0 \tag{4.10}$$

elde edilir ki, buradan

$$g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi) = -g(R(e_i,Y)\xi,\nabla_W \xi) - g(R(e_i,Y)\nabla_W \xi,\xi) \tag{4.11}$$

sonucuna ulaşılır. R nin çarpık (anti) simetrik olması özelliği kullanılarak

$$g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi) = 0 \tag{4.12}$$

bulunur. Bu durumda

$$\eta((\nabla_W R)(e_i,Y)Z)\eta(e_i) = g((\nabla_W R)(e_i,Y)\xi,\xi)g(e_i,\xi) = 0 \tag{4.13}$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

(4.5) de $Z=\xi$ alınır ve (2.17) eşitliği uygulanırsa

$$-(\nabla_W S)(Y,\xi) = -(n-1)\alpha(W)\eta(Y) + (n-1)\beta(W)\eta(Y) \tag{4.14}$$

elde edilir.

$(\nabla_W S)(Y,\xi) = \nabla_W S(Y,\xi) - S(\nabla_W Y,\xi) - S(Y,\nabla_W \xi)$ olduğunu biliyoruz. Bu denklemde (2.12) ve (2.17) uygulanırsa

$$(\nabla_W S)(Y,\xi) = -(n-1)g(Y,W) - S(Y,W) \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden

$$(n-1)g(Y,W)+S(Y,W)=-(n-1)\eta(Y)[\alpha(W)-\beta(W)] \qquad (4.16)$$

denklemi elde edilir.

(4.16) eşitliğinde $Y=\xi$ alınırsa ve (2.1), (2.6) ve (2.17) uygulanırsa

$$\beta(W)=\alpha(W) \qquad (4.17)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.2. M, $(n=2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldu bir Einstein manifolddur.

İspat: (4.17) eşitliğinin (4.16) eşitliğinde uygulanmasıyla

$$S(Y,W)=-(n-1)g(Y,W) \qquad (4.18)$$

elde edilir. Bu da bize genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifoldun bir Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.3. M, $(n=2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda, (M^{2n+1},g) nin karakteristik vektör alanı ξ ve α 1-formu ile bağlantılı vektör alanı A, eşyönlüdür. Ayrıca α, 1-formu $\alpha(W)=\eta(A)\eta(W)$ olarak tanımlanır.

İspat: M, $(n=2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş $\phi-$recurrent Kenmotsu manifold olsun. (4.3) eşitliğinden

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z = \eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi - \alpha(W)R(X,Y)Z \\ - \beta(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{4.19}$$

olduğu görülür. (4.19) denklemine ikinci Bianchi eşitliği uygulandığında

$$\begin{aligned} &(\nabla_W R)(X,Y)Z + (\nabla_X R)(Y,W)Z + (\nabla_Y R)(W,X)Z = \\ &\eta((\nabla_W R)(X,Y)Z)\xi - \alpha(W)R(X,Y)Z - \beta(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ &+\eta((\nabla_X R)(Y,W)Z)\xi - \alpha(X)R(Y,W)Z - \beta(X)[g(W,Z)Y - g(Y,Z)W] \\ &+\eta((\nabla_Y R)(W,X)Z)\xi - \alpha(Y)R(X,Y)Z - \beta(Y)[g(X,Z)W - g(W,Z)X] \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir.(4.17) eşitliğinin (4.20) eşitliğine uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned} &\alpha(W)R(X,Y)Z + \alpha(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ &+\alpha(X)R(Y,W)Z + \alpha(X)[g(W,Z)Y - g(Y,Z)W] \\ &+\alpha(Y)R(W,X)Z + \alpha(Y)[g(X,Z)W - g(W,Z)X] = 0 \end{aligned} \tag{4.21}$$

yazılır. (4.21) de bir düzenleme yapılarak

$$\begin{aligned} &\alpha(W)g(R(X,Y)Z,U) + \alpha(W)[g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U)] \\ &+\alpha(X)g(R(Y,W)Z,U) + \alpha(X)[g(W,Z)g(Y,U) - g(Y,Z)g(W,U)] \\ &+\alpha(Y)g(R(W,X)Z,U) + \alpha(Y)[g(X,Z)g(W,U) - g(W,Z)g(X,U)] = 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. $\{e_i\}$, i = 1, 2, . . . , n her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere, $1 \le i \le n$ için (4.22) denkleminde $X = U = e_i$ alınırsa

$$\begin{aligned} &\alpha(W)S(X,U) + 2n\alpha(W)g(X,U) - \alpha(X)S(W,U) - 2n\alpha(X)g(W,U) \\ &-\alpha(R(W,X)U) + \alpha(X))g(W,U) - \alpha(W)g(X,U) = 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.18) eşitliğinin (4.23) e uygulanmasıyla

$$-\alpha(R(W,X)U) + \alpha(X))g(W,U) - \alpha(W)g(X,U) = 0 \tag{4.24}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

(4.24) denkleminde $X = U = \xi$ alınırsa,

$$\alpha(W) = \alpha(\xi)\eta(W)$$

veya

$$\alpha(W) = \eta(A)\eta(W) \tag{4.25}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.2. *M*, $(n = 2m+1)$ boyutlu Kenmotsu manifold olsun. α ve β (4.2) de tanımlanan 1-formlar olmak üzere, concircular eğrilik tensörü $\overline{C}$ (Yano ve Kon 1984), aşağıdaki şartı sağlıyor ise *M* ye **genelleştirilmiş concircular** $\phi-$**recurrent Kenmotsu manifold** denir.

$$\phi^2\left(\left(\nabla_W\overline{C}\right)(X,Y)Z\right) = \alpha(W)\overline{C}(X,Y)Z + \beta(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{4.26}$$

Teorem 4.1.4. *M*, $(n = 2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş concircular $\phi-$recurrent Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $(n-1)\beta(W) = \left[(n-1) + \frac{r}{n}\right]\alpha(W)$.

İspat: *M*, $(n = 2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş concircular $\phi-$recurrent Kenmotsu manifold olsun. (2.2) uygulanırsa

$$\begin{aligned}-\left(\nabla_W\overline{C}\right)(X,Y)Z + \eta\left(\left(\nabla_W\overline{C}\right)(X,Y)Z\right)\xi &= \alpha(W)\overline{C}(X,Y)Z \\ &+ \beta(W)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}&-g\left(\left(\nabla_W\overline{C}\right)(X,Y)Z,U\right) + \eta\left(\left(\nabla_W\overline{C}\right)(X,Y)Z\right)\eta(U) \\ &= \alpha(W)g\left(\overline{C}(X,Y)Z,U\right) + \beta(W)[g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U)]\end{aligned} \tag{4.28}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ her noktada tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. $1 \leq i \leq n$ için (4.28) denkleminde $Y = Z = e_i$ alınırsa

$$\begin{aligned} &-(\nabla_W S)(X,U) + \frac{W(r)}{n(n-1)}(n-1)g(X,U) + (\nabla_W S)(X,\xi)\eta(U) \\ &-\frac{W(r)}{n(n-1)}(n-1)\eta(X)\eta(U) = \alpha(W)\left[S(X,U) - \frac{r}{n}g(X,U)\right] \\ &\qquad\qquad + (n-1)\beta(W)g(X,U) \end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir.

(4.29) da $U = \xi$ alınır, (2.1), (2.6) ve (2.17) eşitlikleri uygulanırsa

$$0 = \alpha(W)\left[(n-1) + \frac{r}{n}\right]\eta(X) - (n-1)\beta(W)\eta(X) \tag{4.30}$$

elde edilir.

(4.30) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa

$$(n-1)\beta(W) = \left[(n-1) + \frac{r}{n}\right]\alpha(W) \tag{4.31}$$

eşitliğine ulaşılır.

SONUÇ

Tezin birinci bölümü temel kavramlar ve bunlara ilişkin bilenen sonuçlara ayrılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde, değme manifoldlar ve Kenmotsu manifoldlarla ilgili genel bilgilere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, Kenmotsu manifoldları üzerinde bazı eğrilik şartları başlığı altında, sırasıyla, semisimetrik, Ricci semisimetrik, Ricci recurrent, Weyl semisimetrik Kenmotsu manifoldlar, Kenmotsu manifoldlarda concircular eğrilik tensörünün özellikleri ve Ricci pseudosimetrik Kenmotsu manifoldlar incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca, genelleştirilmiş recurrent, f-simetrik ve f-recurrent Kenmotsu manifoldlarla ilgili tanımlamalara ve sonuçlara yer verilmiştir.

M, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifold olmak üzere, M manifoldu semisimetrik$(R.R = 0)$ ise, -1 negatif sabit eğriklidir ve bir Einstein manifolddur. M manifoldu Ricci semisimetrik veya Ricci recurrent ise, yine bir Einstein manifold olacağı gösterilmiştir.

M, $n > 3$ $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifold olmak üzere, M konformal flat ise, sabit eğrilikli bir yüzeydir. Aynı şartlar altında M, Weyl semisimetrik ise konformal flattır. Buradan bir konformal recurrent Kenmotsu manifoldun hiperbolik yüzey $H^n(1)$ e lokal izometrik olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

M, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldlar üzerinde $R(x, X).\overline{C} = 0$, $R(x, X).R = 0$, $\overline{C}(x, X).\overline{C} = 0$ ve $\overline{C}(x, X).R = 0$ durumları araştırılarak, birbirine denk pek çok eşitliğin oluştuğu ispatlanmıştır.

M, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olmak üzere, eğer M Ricci-pseudosimetrik ise $r = -n(n-1)$ skaler eğrilikli bir Einstein manifold olacağı (ki bu durumda M Ricci-semisimetriktir) veya M üzerinde $L_S = -1$ eşitliği sağlanacağı ispatlanmıştır. Buradan eğer concircular eğrilik tensörü $\overline{C}$, $\overline{C}(x,Y).S = 0$ koşulunu sağlarsa, M nin skaler eğriliği $r = -n(n-1)$ eşitliğini sağlayacağı veya M nin, $r = -n(n-1)$ sabit eğrilikli bir Einstein manifold olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

M, $(n = 2m+1)$ boyutlu bir genelleştirilmiş recurrent veya genelleştirilmiş Ricci recurrent Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda, a ve b 1-formları arasında $a = b$ bağıntısı gerçekleneceği ispatlanmıştır. Ayrıca, genelleştirilmiş recurrent Kenmotsu manifoldu için, skaler eğrilik r'nin

$$h(A)r = (1-n)[(n-2)h(B) + 2h(A)]$$

bağıntısı ile verilceği gösterilmiştir. Genelleştirilmiş concircular recurrent Kenmotsu manifoldlarda, her X vektör alanı için $X[r]$ skaler eğrilik r nin kovaryant türevini göstermek üzere, a ve b 1-formları arasında

$$a(X)\left(1 + \frac{r}{n(n-1)}\right) - b(X) - \frac{1}{n(n-1)} X[r] = 0$$

bağıntısının olduğu gösterilmiştir.

M, $(n = 2m+1)$-boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olmak üzere, M manifoldu $f-$simetrik veya $f-$recurrent ise, bir Einstein manifold olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Üç boyutlu bir Kenmotsu manifoldunun lokal $f-$simetrik olması için gerek ve yeter şart skaler eğriliğinin sabit olması olduğu ispatlanmış ve bir üç boyutlu lokal $f-$simetrik Kenmotsu manifoldu örneğine yer verilmiştir.

Tezin son bölümünde, genelleştirilmiş Φ–recurrent Kenmotsu manifoldlar ve genelleştirilmiş Φ–recurrent concircular Kenmotsu manifoldlar tanımlanmış ve bu manifoldlarla ilgili orjinal sonuçlara ulaşılmıştır.

M, $(n = 2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş $f-$recurrent Kenmotsu manifold olmak üzere, a ve b 1-formları $b(W) = a(W)$ bağıntısının sağlanacağı gösterilmiş ve M, $(n = 2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş $f-$recurrent Kenmotsu manifoldun bir Einstein manifold olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ayrıca, (M^{2n+1}, g) nin karakteristik vektör alanı ξ ve α 1-formu ile bağlantılı vektör alanı A'nın, eşyönlü olacağı ispatlanmıştır. α, 1-formunun $a(W) = h(A)h(W)$ olarak tanımlanabileceği belirtilmiştir.

M, $(n = 2m+1)$ boyutlu genelleştirilmiş concircular $f-$recurrent Kenmotsu manifold için, a ve b 1-formları arasında $(n-1)b(W) = \left[(n-1) + \frac{r}{n}\right]a(W)$ bağıntısının sağlanacağı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] KOBAYASHI, S., NOMIZU K. 1963. Foundations of Differantial Geometry, 470 p.

[2] O’NEILL B. 1983. Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 468 p.

[3] HACISALIHOĞLU H.H. 1983. Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, 895 s.

[4] YANO K., Kon M. 1984. Structeres on manifolds, World Scientific, 508 p.

[5] DESZCZ R. 1992. On pseudosymetric spaces, Bull Soc. Math. Belg. Ser. A44, no.1, 1-34.

[6] PATTERSON E.M. 1952. Some theorems on Ricci recurrent spaces, J. London Math. Soc. 27: 287-295.

[7] CHEN B.Y. 1973. Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics. No: 22, Marcel Dekker Inc., New York.

[8] BESSE A.L.1987. Einstein Manifolds, Springer Verling, 510 p.

[9] DESZCZ R., GRYCAK W. 1987. On some class of warped product manifolds, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 15: 311-322.

[10] CHAKI M.C., GUPTA B. 1963. On conformally symmetric spaces, Indian J. Math. 5: 113-122.

[11] MIKASH J. 1980. On geodesic mappings of Ricci 2 symmetric Riemann spaces (in Russian), Mat Zamietki, 28: 313-317.

[12] SINYAKOV E.N. 1981. On geodesic mappings of some special Riemannian spaces (in Russian), Mat Zamietki, 30:889-894.

[13] DESZCZ R., HOTLÓS M. 1989. Remarks on Riemannian manifolds satisfying a certain curvature condition imposed on the Ricci tensor, Prace Navk. Pol. Szczec. 11: 13-34.

[14] BLAIR D.E. 1976. Contact manifolds in Riemannian Geometry, Lecturer Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 509 p.

[15] HONG S., ÖZGÜR C., TRIPATHI M.M. 2006. On some special classes of Kenmotsu manifolds, Kuwait J. Sci. Engrg. 33, no.2, 19-32.

[16] KENMOTSU K. 1972. A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., 24(1):93-103.

[17] JUN J.B., DE U.C., PATHAK G. 2005. On Kenmotsu manifolds, J. Korean Math. Soc., 42:435-445.

[18] DE, U.C., GUHA N. 1991. On generalised recurrent manifolds, Proc. Math. Soc., 7: 7 – 11.

[19] MARALABHAVI Y.B., RATHNAMMA V. 1999. Generalized recurrent and concircular recurrent manifolds, Ind. J. Pure Applied Math., 30: 1167-1171.

[20] ÖZGÜR C. 2007. On generalized reccurent Kenmotsu manifolds, World Appl. Sci. J., 2(1):9-33.

[21] DE U.C., PATHAK G. 2004. On 3-dimensional Kenmotsu manifolds, Ind. J. Pure Applied Math., 35:159-165.

[22] TAKAHASHI T. 1977. Sasakian $f-$symmetric spaces, Tohoku Math. J. 29, 91–113.

[23] VENKATESHA, BAGEWADI C.S. 2006. On pseudo projective $f-$recurrent Kenmotsu manifolds, Sooch. J. Math. 32, no.3, 1-7.

[24] DE U.C., YILDIZ A., YALINIZ A.F. 2008. On $f-$recurrent Kenmotsu manifolds, Turk J. Math. 32, 1-12.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Bursa'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bursa'da tamamladı. 2003 yılında Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi bölümü, Matematik Öğretmenliği programından mezun oldu. Aynı yıl, Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde, Bursa ili, Ümitalan Köyü İlköğretim Okulu'nda matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2005 yılında Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nde, Matematik Bilim Dalı, Geometri Anabilim dalında yüksek lisans çalışmalarına başladı. Şu an, İzmir, Buca Işılay Saygın Anadolu Güzel Sanatlar Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görevini sürdürmektedir.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında yardım ve hoşgörüsünü esirgemeyen, çalışmalarımda büyük emeği olan sayın hocam Prof.Dr. Cengizhan Murathan'a, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve de babaanneme, çalışmalarımda her zaman bana destek olan eşime, en içten teşekkürlerimi sunarım.