T.C.
Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLARIN q DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ KULLANILARAK TANIMLANAN BAZI ALT SINIFLARI

Zeliha KARAHÜSEYİN

Yüksek Lisans Tezi

T.C

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLARIN q DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ KULLANILARAK TANIMLANAN BAZI ALT SINIFLARI

Zeliha KARAHÜSEYİN

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2017

TEZ ONAYI

Zeliha KARAHÜSEYİN tarafından hazırlanan ''Analitik Yalınkat Fonksiyonların q Diferansiyel Operatörü Kullanılarak Tanımlanan Bazı Alt Sınıfları'' adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arzu AKGÜL
Kocaeli Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
.. / .. /2017

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünün kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.../.../....

İmza

Zeliha KARAHÜSEYİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLARIN q DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ KULLANILARAK TANIMLANAN BAZI ALT SINIFLARI

Zeliha KARAHÜSEYİN

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde q-kalkülüs ve q-türeve ait bazı özellikler verilmiştir.

İkinci bölümde; U açık birim diskinde normalize edilmiş analitik ve yalınkat fonksiyonların oluşturduğu S sınıfı ve reel kısmı pozitif fonksiyonların oluşturduğu P sınıfının temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Analitik, yalınkat fonksiyonların q-diferansiyel operatörü kullanılarak bazı özel alt sınıfları tanımlanmış ve bu sınıfların katsayı sınırları araştırılmıştır. Ayrıca bu sınıflara ait teoremler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; elde edilen tüm sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, yalınkat fonksiyon, diferansiyel operatör

2017, vi + 95 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME SUBCLASSES OF ANALYTIC UNIVALENT FUNCTIONS DEFINED BY q DERIVATIVE OPERATOR

Zeliha KARAHÜSEYİN

Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter; some definitions and theorems about analytic functions which will be used later are introduced. Furthermore, some properties related to q-calculus and q-derivative are given.

In the second chapter; basic properties related to the classes analytic and univalent functions in U are given.

In the third chapter; the some special subclasses of analytic univalent functions defined by q-derivative operator are worked and coefficient estimates are given for functions in these classes. In addition, theorems for these classes were examined.

In the fourth chapter; all obtained results are discussed.

Key words: Analytic function, univalent function, differential operator

2017, vi + 95 pages

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan, ayrıca insani ve ahlaki değerli ile de kendime örnek aldığım değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'e, tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca matematik öğrenimime katkı sağlayan hocalarıma, sabrı ve hoşgörüsüyle eğitimime destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Zeliha KARAHÜSEYİN
…/…/….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathcal{A}$	U diskinde analitik ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
C	U diskinde analitik, yalınkat ve konvekse yakın olan fonksiyonların sınıfı
$C(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli konvekse yakın olan fonksiyonların sınıfı
C_q	U diskinde analitik ve yalınkat olan q-konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$C_q(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli q-konvekse yakın olan fonksiyonların sınıfı
D_r	Orjin merkezli r yarıçaplı disk
$D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\overline{D}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk
$D^*(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı delinmiş açık disk
$\partial D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık diskin sınırı
$D_q f(z)$	f fonksiyonunun q-türevi
$f(U)$	U diskinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna sabordine olması
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
K	U diskinde analitik, yalınkat ve konveks olan fonksiyonların sınıfı
$K(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli konveks olan fonksiyonların sınıfı
K_q	U diskinde analitik ve yalınkat olan q-konveks fonksiyonların sınıfı
$K_q(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli konveks olan fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathcal{R}$	$Re\big(f'(z)\big) > 0, z \in U$ eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı
S	U diskinde analitik, yalınkat ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların sınıfı
S^*	U diskinde analitik, yalınkat ve yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
S_q^*	U diskinde analitik ve yalınkat olan q-yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$S_q^*(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli q-yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{T}$	Negatif katsayılı analitik, yalınkat fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{T}^*$	U diskinde analitik, negatif katsayılı yalınkat ve yıldızıl olan fonksiyonların sınıf
U	$\{z \in \mathbb{C}: \lvert z \rvert < 1\}$, Açık birim disk

ŞEKİLLER DİZİNİ

GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisindeki en güzel konulardan birisi yalınkat fonksiyonlar teorisidir. Bu konunun temeli Koebe'nin 1907 de yayınladığı makalesi olup, bunu 1914 de Granwall'ın alan teoreminin ispatı ve 1916 da Bieberbach'ın yalınkat fonksiyonların ikinci dereceden katsayıları için sonucu ve onun özellikleri izlemiştir.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesini birim diske konform olarak dönüştüren bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi olarak bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Yalınkat fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonunu sağlayan f fonksiyonların oluşturduğu bir S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonların çeşitli alt sınıfları farklı bakış açılarıyla çalışılmıştır. Kesirsel q-kalkülüs, analitik fonksiyonların alt sınıflarını oluşturmada önemli bir araç olmuştur. Örneğin; yalınkat fonksiyonlar teorisinin genişlemesi, q-kalkülüs teori kullanılarak ifade edilebilir. Tarihsel olarak konuşmak gerekirse, aslında Geometrik Fonksiyonlar Teorisinin kaynağında, q-kalkülüs kullanımının sağlam bir temeli bulunur ve basit (veya q-) hipergeometrik fonksiyonlar ilk kez Srivastava (1989) tarafından bir kitap bölümünde Geometrik Fonksiyon Teoride kullanıldı. q-kalkülüs uygulaması Jackson (1908,1910) tarafından çalışılmaya başlanmıştır. q-türev ve q-integral ilk kez Jackson tarafından geliştirilmiştir. Aslında, yalınkat fonksiyonlar teorisi q-kalkülüs teori kullanılarak ifade edilebilir. Dahası; kesirsel q-integral operatör ve q-türev operatörleri gibi q-kalkülüs operatörleri ile analitik fonksiyonların birçok alt sınıfı oluşturuldu. Son dönemlerdeki bir makalede, Purohit ve Raina (2013) açık birim diskte analitik olan fonksiyonların yeni sınıflarını tanımlamak için kesirsel q-kalkülüs operatörlerinin uygulamalarını inceledi. Daha sonra Mohammed ve Darus (2013), kompakt diskte analitik fonksiyonların bazı alt sınıflarında bu q-operatörlerin geometrik özelliklerini ve yaklaşımını çalıştı.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca, q-kalkülüs deki notasyonlar ve bazı temel tanımlar ile q-türev operatörü ve özellikleri verilecektir.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde verilecek temel tanımlar ve teoremler ile ilgili ayrıntılar Pommerenke (1975), Goodman (1983) ve Annaby ve Mansour (2012) de bulunabilir.

1.1.1. Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$$

$$D^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı *açık disk, kapalı disk, delinmiş açık disk* ve *çember* denir. Bundan sonra $D(0, r)$ açık diski D_r ile ve $D(0,1)$ birim diski U ile gösterilecektir.

1.1.2. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir. Eğer A kümesinin bütün noktaları iç nokta ise A kümesine *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümeye de *kapalı küme* denir. A kümesini içeren kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin *kapanışı* denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. A kümesini içeren en geniş açık kümeye veya A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir ve A^0 ile gösterilir.

1.1.3. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olsun. Her $D(z,r)$ diski ile A ve A nın tümleyeni olan A^t kümesinin kesişimi boş kümeden farklı ise z noktasına A kümesinin *sınır noktası* denir.

1.1.4. Tanım. B, $\mathbb{C}$ nin bir alt kümesi olsun. $\mu \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere, $z \in B$ iken $\mu z \in B$ ise, B kümesine *μ-geometrik küme* denir.

1.1.5. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme, U ve V, $\mathbb{C}$ de ayrık açık iki küme olsun. Eğer $A \cap U \neq \phi$, $A \cap V \neq \phi$ ve $A \subset U \cup V$ ise A kümesine *bağlantısız*dır denir. Bağlantısız olmayan kümeye *bağlantılı*dır denir. Açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* denir.

1.1.6. Tanım. Bir X vektör uzayında $L[a,b] = \{c = ta + (1-t)b : 0 \leq t \leq 1\}$ kümesine, a ve b noktalarını birleştiren *doğru parçası* denir. a ve b fonksiyonlarına $L[a,b]$ doğru parçasının *uç noktaları*, $0 < t < 1$ için c noktasına da $L[a,b]$ doğru parçasının *iç noktası* denir. Bir $C \subset X$ alt kümesi verildiğinde her $a,b \in C$ için $L[a,b] \subset C$ oluyorsa C ye *konveks küme* denir. Eğer C konveks kümesindeki bir a noktası herhangi bir $L[a,b] \subset C$ doğru parçasının bir iç noktası değilse a noktasına C kümesinin *ekstrem noktası* denir. C kümesinin ekstrem noktalarının kümesi $E(C)$ ile gösterilir (Goodman 1983).

1.1.7. Tanım. $[a,b]$ kapalı aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yol* veya *eğri* denir. Her $t \in [a,b]$ için $\varphi'(t)$ mevcut ve $\varphi'(t) \neq 0$ ise eğriye *düzgün eğri*, $[a,b]$ aralığının sonlu sayıda alt aralıklarında düzgün olan eğriye *parçalı düzgün eğri* denir. Kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri*, uç noktaları bitişik bir eğriye *kapalı eğri* ve sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her basit kapalı eğrinin sınırladığı küme sadece B kümesinin noktalarından oluşmuş ise B bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

1.1.8. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \leq M < \infty$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa A kümesine *sınırlıdır* denir. A kümesinde alınan her dizinin yığılma noktası yine A kümesine ait ise A kümesine *kompakt* veya *dizisel kompakt* denir.

1.1.9. Teorem. $A \subset \mathbb{C}$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır.

1.1.10. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f[A \cap D(z_0, \delta)] \subset D(f(z_0), \varepsilon)$$

şeklinde bir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer her $z \in A$ noktası için

$$f[A \cap D(z_0, \delta)] \subset D(f(z), \varepsilon)$$

şeklinde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesinde *düzgün süreklidir* denir. Eğer $\lim z_n = z_0$ özelliğinde her bir (z_n) dizisi için $\lim f(z_n) = f(z_0)$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *dizisel süreklidir* denir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde dizisel süreklilik ile süreklilik birbirini gerektirir.

1.1.11. Tanım. f bir B bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in B$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* veya *türevlenebilir* denir. Limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğunda bulunan bütün noktalarda diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik*tir denir.

1.1.12. Teorem. Eğer f fonksiyonu z_0 merkezli ve R yarıçaplı bir γ çemberinin içinde analitik ise, bu durumda γ eğrisinin içinde bulunan her z noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{1.1}$$

dir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki Taylor açılımı adı verilir (Nehari 1952).

1.1.13. Tanım. $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasının $D^*(z_0,r)$ delinmiş komşuluğunda analitik ancak z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktasına *ayrık(tekil) nokta* adı verilir.

1.1.14. Teorem. Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun ayrık tekil noktası ise f fonksiyonu $D^*(z_0,r)$ delinmiş diskinde

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{1.2}$$

açılımıyla temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş komşuluğundaki Laurent açılımı denir (Nehari 1952).

1.1.15. Tanım. $f(z)$ fonksiyonu (1.2) ifadesiyle verilsin. Burada eğer sonlu sayıda a_{-n} katsayısı sıfırdan farklı, diğer tüm katsayılar sıfır ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun *kutup noktası* denir.

1.1.16. Teorem (Maksimum Modül Teoremi). $f(z)$ fonksiyonu sınırlı bir A bölgesinde analitik ve kapanışında sürekli ise $|f(z)|, A$ bölgesinin sınırında maksimum değerini alır. Ayrıca, $f(z)$ fonksiyonu sabit ise $|f(z)|, A$ bölgesinin bir iç noktasında maksimum değerini alır.

1.1.17. Teorem (Schwarz Lemma). f fonksiyonu U açık birim diskinde $f(0)=0$ ve $|f(z)|<1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. O halde U da $|f(z)|<|z|$ ve $|f'(0)|<1$ dir. Eşitlik $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.1.18. Teorem (Schwarz-Pick Lemma). $z \in U$ olmak üzere $|f(z)| < 1$ olacak şekilde $f : U \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu verilsin. Bu durumda $z \in U$ için,

$$|f'(z)| < \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

dir (Graham ve Varolin 1996).

1.1.19. Tanım. Kompleks düzlemin bir D bölgesinde $f: D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin; $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir *konform dönüşüm*dür denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde *konform*dur denir.

1.1.20. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). D, kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesi ve $z_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Bu taktirde $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$ özelliğinde D yi U birim diski üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonu vardır (Riemann 1851).

Riemann Dönüşüm Teoremi gereği basit bağlantılı bir bölgede yalınkatlıkla ilgili problemleri çözmek için bu bölge yerine U birim diskini almak daha uygundur.

1.2. q-Kalkülüs de Notasyon ve Tanımlar

Bu kısımda, q-kalkülüs kavramına ait bazı notasyon ve tanımlar verilecektir (Jackson 1908, Aral ve ark. 2013).

1.2.1. Tanım. $q > 0$ olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$ için q-tamsayısı $[n]_q$,

$$[n]_q = \begin{cases} \dfrac{1 - q^n}{1 - q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Herhangi λ reel sayısı için de bu tanım verilebilir. Bu durumda $[\lambda]_q$ bir q-reel olarak adlandırılır.

1.2.2. Tanım. $q > 0$ olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$ için q-faktöriyeli $[n]_q!$,

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q[n-1]_q \cdots, [1]_q, & n = 1,2, \ldots \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanır.

1.2.3. Tanım. $n, k \in \mathbb{N}$ için q-binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}, \qquad 0 \leq k \leq n \tag{1.3}$$

ile tanımlanır.

q-binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{1.4}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \tag{1.5}$$

denklemlerini sağlar.

1.2.4. Tanım. $(1+z)_q^n$ nin q-analoğu

$$(1+z)_q^n = \begin{cases} (1+z)(1+qz)\dots(1+q^{n-1}z), & n = 1,2,\dots \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

polinomudur.

Ayrıca genel Pochhammer sembolünün bir q-analoğu

$$(z;q)_0 = 1, (z;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1-q^i z), (z;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i z)$$

dir.

1.2.5. Tanım. Gauss Binom formülü

$$(z+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{i(j-1)/2} a^j z^{n-j}$$

dir.

1.2.6. Tanım. Heine Binom formülü

$$\frac{1}{(1-z)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n]_q [n+1]_q \dots [n+j-1]_q}{[j]_q!} z^j$$

dir.

Ayrıca,

$$z^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (z-1)_q^j$$

eşitliği önemli bir özelliktir.

1.3. q-Türev

Bu kısımda q-türev tanımlanacak ve bazı özelikleri verilecektir. $q = 1$ durumunda bilinen türev bağıntıları elde edilir (Jackson 1908, Aral ve ark. 2013).

1.3.1. Tanım. Bir f fonksiyonunun q-türevi $D_q f$,

$$\left(D_q f\right)(z) = \frac{f(z) - f(qz)}{(1-q)z}, \quad z \neq 0 \tag{1.6}$$

ile tanımlanır ve $f'(0)$ varsa $\left(D_q f\right)(0) = f'(0)$ dır.

f diferansiyellenebilir ise

$$\lim_{q \to 1} D_q f(z) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z} = \frac{df(z)}{dz}$$

dir.

q-türev tanımından aşağıdaki kurallar elde edilir:

$$D_q z^k = \frac{1-q^k}{1-q} z^{k-1} \tag{1.7}$$

dir.

Bir fonksiyonun q-türevinin bir lineer operatör olduğu açıktır. Yani, herhangi a ve b sabitleri için

$$D_q\{af(z) + bg(z)\} = aD_q\{f(z)\} + bD_q\{g(z)\} \tag{1.8}$$

dir.

Şimdi, Tanım 1.3.1 kullanılarak $z \neq 0$ olmak üzere çarpımın q-türevi

$$\begin{aligned}
D_q\{f(z)g(z)\} &= \frac{f(qz)g(qz) - f(z)g(z)}{(q-1)z} \\
&= \frac{f(qz)g(qz) - f(qz)g(z) + f(qz)g(z) - f(z)g(z)}{(q-1)z} \\
&= \frac{f(qz)\big(g(qz) - g(z)\big)}{(q-1)z} + \frac{\big(f(qz) - f(z)\big)g(z)}{(q-1)z} \\
&= f(qz)D_q g(z) + D_q f(z)g(z) \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

f ile g yer değiştirdiğinde

$$D_q\{g(z)f(z)\} = f(z)D_q g(z) + D_q f(z)g(qz)$$

elde edilir.

q-türev operatörü için Leibniz kuralı

$$D_q^{(n)}(fg)(z) = \sum_{n=0}^{k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q D_q^{(k)} f(zq^{n-k}) D_q^{(n-k)} g(z)$$

olarak tanımlanır.

f ile g nin bölümüne Tanım 1.3.1 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
D_q\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} &= \frac{1}{(q-1)z}\left\{\frac{f(qz)}{g(qz)} - \frac{f(z)}{g(qz)} + \frac{f(z)}{g(qz)} - \frac{f(z)}{g(z)}\right\} \\
&= \frac{1}{g(qz)}\left\{\frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}\right\} + \frac{1}{(q-1)z}\left\{\frac{f(z)g(z) - f(z)g(qz)}{g(qz)g(z)}\right\} \\
&= \frac{1}{g(qz)} D_q f(z) + \frac{f(z)}{g(qz)g(z)}\left\{\frac{g(z) - g(qz)}{(q-1)z}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{g(z)D_q f(z) - f(z)D_q g(z)}{g(qz)g(z)} \tag{1.10}$$

elde edilir.

Ayrıca, (1.10) eşitliği

$$D_q\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(qz)D_q f(z) - f(qz)D_q g(z)}{g(qz)g(z)}$$

şeklinde de yazılabilir.

q-türev için genel bir zincir kuralı yoktur. Ancak, α, β sabit ve $u = u(z) = \alpha z^\beta$ olmak üzere, $f\big(u(z)\big)$ formundaki fonksiyonlar için bir zincir kuralı verilebilir. Bu zincir kuralı için

$$\begin{aligned}
D_q\{f\big(u(z)\big)\} &= D_q\{f\big(\alpha z^\beta\big)\} \\
&= \frac{f\big(\alpha q^\beta z^\beta\big) - f\big(\alpha z^\beta\big)}{(q-1)z} \\
&= \frac{f\big(\alpha q^\beta z^\beta\big) - f\big(\alpha z^\beta\big)}{\alpha q^\beta z^\beta - \alpha z^\beta} . \frac{\alpha q^\beta z^\beta - \alpha z^\beta}{(q-1)z} \\
&= \frac{f\big(q^\beta u\big) - f(u)}{q^\beta u - u} . \frac{u(qz) - u(z)}{(q-1)z}
\end{aligned}$$

yazılır. Bunun sonucu olarak

$$D_q\{f\big(u(z)\big)\} = \big(D_{q^\beta} f\big)(u(z))D_q\big(u(z)\big)$$

elde edilir.

1.3.2. Önerme. $n \geq 1$ için,

$$D_q(1+z)_q^n = [n]_q(1+qz)_q^{n-1},$$

$$D_q\left\{\frac{1}{(1+z)_q^n}\right\} = -\frac{[n]_q}{(1+z)_q^{n+1}}$$

dir.

İspat. Tanım 1.3.1 gereği,

$$\begin{aligned} D_q(1+z)_q^n &= \frac{(1+qz)_q^n - (1+z)_q^n}{(q-1)z} \\ &= (1+qz)_q^{n-1}\frac{\{1+q^n z-(1+z)\}}{(q-1)z} \\ &= [n]_q(1+qz)_q^{n-1} \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan, (1.10) gereği,

$$\begin{aligned} D_q\left\{\frac{1}{(1+z)_q^n}\right\} &= -\frac{D_q(1+z)_q^n}{(1+qz)_q^n(1+z)_q^n} \\ &= -\frac{[n]_q}{(1+q^n z)(1+z)_q^n} \\ &= -\frac{[n]_q}{(1+z)_q^{n+1}} \end{aligned}$$

dir.

1.3.3. Uyarı. $n \geq 1$ ve $a, b, r, s \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde

$$D_q(a+bz)_q^n = [n]_q b(a+bqz)_q^{n-1},$$

$$D_q(az+b)_q^n = [n]_q a(az+b)_q^{n-1}$$

ve

$$D_q \frac{(1+az)_q^r}{(1+bz)_q^s} = [r]_q a \frac{(1+aqz)_q^{r-1}}{(1+bqz)_q^s} - b[s]_q \frac{(1+az)_q^r}{(1+bz)_q^{s+1}}$$

dir.

2. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde U birim diski üzerinde tanımlı analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı ve bazı alt sınıflarına ait fonksiyonların genel özellikleri verilecektir. Ayrıca reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı tanıtılacaktır.

2.1. Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

Bu kısımda birim diskte analitik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonların S sınıfı verilecektir.

2.1.1. Tanım. D kompleks düzlemde bir bölge olsun. $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu birebir ise f fonksiyonuna D de *yalınkat* veya *ünivalent fonksiyon* denir. Diğer bir deyişle her $z_1, z_2 \in D$ için $f(z_1) = f(z_2)$ iken $z_1 = z_2$ ise f fonksiyonuna D de *yalınkat*tır denir. Geometrik olarak, düzlemde $f(D)$ görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması şeklinde ifade edilir.

D bölgesinde yalınkat bir fonksiyon, D bölgesinin bütün alt kümelerinde de yalınkattır.

2.1.2. Tanım. U birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile gösterilir. Her $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (2.1)$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir.

2.1.3. Tanım. U birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulunu sağlayan (2.1) formundaki fonksiyona *normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyon* denir. U da analitik yalınkat normalize edilmiş bütün fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Buna göre;

$$S = \{f : f : \mathrm{U} \rightarrow \mathbb{C}, \text{analitik ve yalınkat}, f(0) = f'(0) - 1 = 0\}$$

dir.

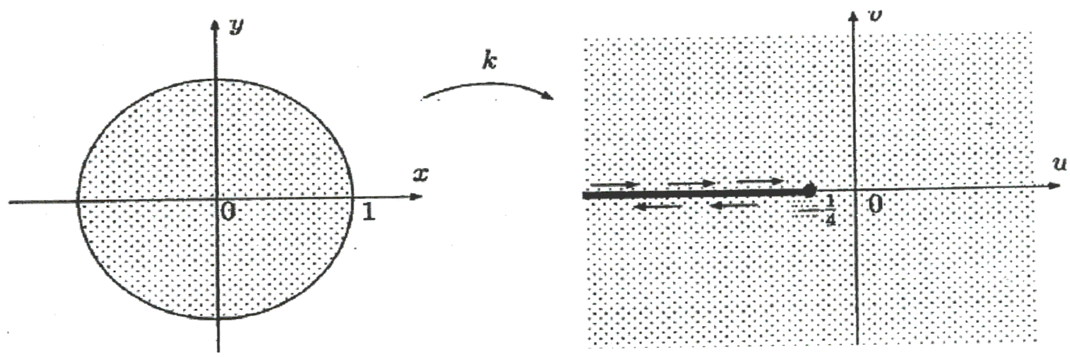
Aşağıda S sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir.

i. $f(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu U yu kendi üzerine resmeder.

ii. $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$ fonksiyonu *Koebe fonksiyonu* olarak adlandırılır. $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ denirse $wz^2 - (2w+1)z + w = 0$ yazılır. z ye göre ikinci dereceden bu ifadenin köklerinin varlığı

$$\Delta = 1 + 4w > 0, \quad (w \in \mathbb{R})$$

olmasıyla mümkün olacağından $w < -1/4$ olamaz. O halde $k(z)$ dönüşümü U yu $-\infty$ dan -1/4 e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış karmaşık düzlem üzerine konform olarak resmeder.



Şekil 2.1. k(U) görüntü bölgesi

iii. $w = f(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu U yu $\mathrm{Re}\{w\} > -1/2$ yarı düzlemine birebir olarak resmeder.

iv. $f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu U yu $-\frac{\pi}{4} < Im(w) < \frac{\pi}{4}$ yatay şeridi üzerine birebir olarak resmeder.

v. $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu U yu bir kardioidin içi üzerine birebir olarak resmeder.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli yeri olan Bieberbach Teoremi, S sınıfına ait bir f fonksiyonu için a_2 katsayısının hesaplanmasında büyük rol oynar.

2.1.4. Teorem (Bieberbach Teoremi). S sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali, $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z + 2z^2 + \cdots$ şeklinde Taylor seri açılımına sahip $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Bieberbach 1916).

2.1.5. Teorem (Koebe Dörtte Bir Teoremi). $f \in S$ ve f fonksiyonu γ değerini almasın. Yani $f(z) = \gamma$ denkleminin U da çözümü olmasın. Bu durumda $\gamma \geq \frac{1}{4}$ dür. Eşitlik, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Koebe 1907).

Koebe Dörtte Bir Teoremi, S sınıfına ait her f fonksiyonun $f(U)$ görüntü bölgesinin orijin merkezli $1/4$ yarıçaplı açık bir diski kapsadığını gösterir.

2.1.6. Teorem (Bieberbach Tahmini). S sınıfına ait her f fonksiyonu $n \geq 2$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlar. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için sağlanır (Bieberbach 1916).

Aşağıdaki teorem S sınıfının bazı elemanter dönüşümler altında değişmez kaldığını gösterir.

2.1.7. Teorem. $z \in U$ ve $f \in S$ ise aşağıda tanımlanan g fonksiyonları da S sınıfına aittir.

(i) $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \cdots$ eşlenik dönüşümü.

(ii) $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta})$ rotasyonu.

(iii) $0 < r < 1$ için $g(z) = \frac{1}{r} f(rz)$ genişlemesi.

(iv) $|\alpha| < 1$ ve $\varphi(z) = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$ olmak üzere $g(z) = \frac{f(\varphi(z))-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}$ disk otomorfizmi.

(v) $n \in \mathrm{Z}^+$ için $g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = \left(\frac{f(z^n)}{z^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ kök dönüşümü.

(vi) $f(z) \neq w$ olmak üzere $g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$ atlanmış değer dönüşümü.

(vii) φ, f fonksiyonunun değer kümesi üzerinde yalınkat ve analitik bir fonksiyon olmak üzere $g(z) = (\varphi \circ f)(z)$ bileşke dönüşümü.

2.1.8. Tanım. $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{A}$ olsun. Bu fonksiyonların konvolüsyonu

$$f_1(z) * f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

ile tanımlanır.

2.1.9. Tanım. $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ formundaki analitik ve yalınkat fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{T}$ sınıfı olarak adlandırılır. $\mathcal{T}$ sınıfı, S nin bir alt sınıfıdır.

2.2. P Sınıfı ve Temel Özellikleri

Bu kısımda U birim diskinde analitik ve reel kısmı pozitif olan fonksiyonların sınıfı tanımlanacak ve kompleks düzlemde sabordinasyon prensibi verilecektir.

2.2.1. Tanım. U birim diskinde analitik $f(0) = 1$ ve $z \in U$ için $Re\{f(z)\} > 0$ olan

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlara *reel kısmı pozitif analitik fonksiyon* denir. U birim diskinde reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir.

$z \in U$ için,

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu P sınıfına ait önemli bir fonksiyondur. Bu fonksiyon U birim diskini $H^+ = \{w \in \mathbb{C}: Rew > 0\}$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder. Bir anlamda Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı temel rolü, p fonksiyonu P sınıfında oynar.

P sınıfına ait bir fonksiyon yalınkat olmak zorunda değildir. Örneğin, $n \geq 2$ tamsayısı için $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına aittir fakat U birim diskinde yalınkat değildir.

Aşağıdaki teorem P sınıfına ait fonksiyonların belli işlemler altında değişmez kaldığını gösterir.

2.2.2. Teorem. f, f_1 ve f_2 fonksiyonları P sınıfına ait ise aşağıda verilen g fonksiyonları da P sınıfına aittir.

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $g(z) = f(e^{i\alpha} z)$.

(ii) $-1 \leq t \leq 1$ için $g(z) = [f(z)]^t$ veya $g(z) = f(tz)$.

(iii) $g(z) = 1/f(z)$.

(iv) $t_1, t_2 > 0$ ve $t_1 + t_2 \leq 1$ için $g(z) = [f_1(z)]^{t_1}[f_2(z)]^{t_2}$.

(v) $\lambda \in U,\ f(\lambda) = a + ib$ ise $g(z) = \frac{1}{a}\left[f\left(\frac{z+\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right) - ib\right]$.

(vi) $b \in \mathbb{R}$ için $g(z) = \frac{f(z)+ib}{1+ibf(z)}$.

2.2.3. Teorem. Eğer reel kısmı pozitif olan $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu U da analitik bir fonksiyon ise

$$|p_n| \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\})$$

ve

$$\left|p_2 - \frac{{p_1}^2}{2}\right| \leq 2 - \frac{|p_2|^2}{2}$$

dir (Pommerenke 1975).

2.2.4. Lemma. $p \in P$ ise, $|x| \leq 1$ ve $|z| \leq 1$ olmak üzere,

$$2c_2 = c_1^2 + x(4 - c_1^2)$$
$$4c_3 = c_1^3 + 2(4 - c_1^2)c_1 x - c_1(4 - c_1^2)x^2 + 2(4 - c_1^2)(1 - |x|^2)z \tag{2.2}$$

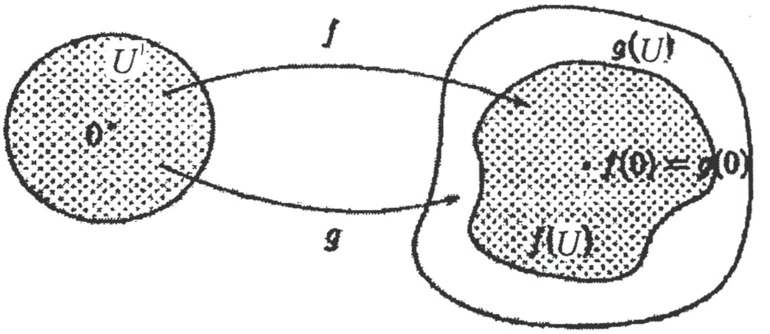
dir (Grenander ve Szegö 1958).

2.2.5. Lemma. $p \in P$ ise,

$$|c_2 - vc_1^2| \leq \begin{cases} -4v + 2, & v \leq 0 \text{ ise} \\ 2, & 0 \leq v < 1 \text{ ise} \\ 4v - 2, & v \geq 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.3}$$

dir (Ma ve Minda 1994).

2.2.6. Teorem (Sabordinasyon Prensibi). $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları U birim diskinde tanımlanmış analitik iki fonksiyon olsun. $\phi(z)$ fonksiyonu U da tanımlı, analitik ve $\phi(0) = 0$, $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $f_1(z) = f_2(\phi(z))$ şeklinde ifade edilebiliyorsa $f_1(z)$ fonksiyonu $f_2(z)$ fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f_1(z) \prec f_2(z)$ ile gösterilir (Goodman 1983).



Şekil 2.2.

Sabordinasyon Prensibi Schwarz Lemmasının genelleştirilmiş halidir. $\phi(z) = z$ olarak alındığında Sabordinasyon Prensibi Schwarz Lemmasına dönüşür.

Aşağıdaki teorem sabordinasyon prensibinin geometrik yorumunu verir.

2.2.7. Teorem. $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları U birim diskinde tanımlı analitik iki fonksiyon olsun. $f_2(z)$ fonksiyonu U birim diskinde yalınkat ise $f_1(z)$ fonksiyonunun $f_2(z)$ fonksiyonuna sabordine olması için gerek ve yeter şart

$$f_1(0) = f_2(0) \text{ ve } f_1(U) \subset f_2(U)$$

olmasıdır (Goodman 1983).

2.2.8. Tanım. A ve B keyfi iki sabit sayı olsun. $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere U da analitik $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonlarının ailesi $P(A, B)$ ile gösterilir.

2.2.9. Teorem. Her $z \in U$ için $\phi(0) = 0, |\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan ve U da analitik olan $\phi(z)$ fonksiyonlarının ailesi Ω olsun. $p(z)$ fonksiyonunun $P(A, B)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart her $z \in U$ ve $\phi(z) \in \Omega$ için

$$p(z) = \frac{1 + A\phi(z)}{1 + B\phi(z)}$$

olmasıdır (Janowski 1973).

2.3. Analitik Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda, birim diskte analitik yalınkat fonksiyonların görüntü bölgelerinin yıldızıl, konveks ve konvekse yakın bölge olması durumunda oluşan alt sınıflar tanımlanacaktır.

2.3.1. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer sabit bir $w_0 \in A$ noktasını her bir $w \in A$ noktasına birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1 - t)w_0 + tw \in A$ ise A kümesine w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. Eğer bütün $w_1, w_2 \in A$ noktalarını birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1 - t)w_0 + tw \in A$ ise A kümesine konveks küme denir. Diğer bir deyişle, konveks küme her bir noktasına göre yıldızıl olan kümedir.

2.3.2. Tanım. $r \in [0,1]$, $f \in A(D_r)$ ve $z_0 \in D_r$ olsun. Eğer f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl ise f fonksiyonuna D_r üzerinde z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Orijine göre yıldızıl olan fonksiyona *yıldızıl fonksiyon* adı verilir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir. Ayrıca f fonksiyonu D_r de yalıntkat ve $f(D_r)$ bölgesi $\mathbb{C}$ de konveks ise f fonksiyonuna D_r üzerinde *konveks fonksiyon* denir. Konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

2.3.3. Tanım. $f \in \mathcal{T}$ ve f yalınkat olmak üzere $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cap S^*$ olarak tanımlanır.

2.3.4. Tanım. $\mathcal{F}$, S nin boş olmayan bir alt sınıfı olsun. $\mathcal{F}$ sınıfındaki her fonksiyon $U_{r^*(F)}$ diski üzerinde yıldızıl olacak şekilde en büyük pozitif sayı $r^*(F)$ olsun. Bu sayıya $\mathcal{F}$ nin *yıldızıllık yarıçapı* denir.

2.3.5. Tanım. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu U da analitik olsun. U da,

$$Re\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0 \tag{2.4}$$

olacak şekilde yalınkat ve konveks bir $\varphi(z)$ fonksiyonu varsa f ye U da *konvekse yakın fonksiyon* denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir.

Ayrıca $\varphi(z)$ konveks ise $h(z) = z\varphi'(z)$ yıldızıl olduğundan (2.4) eşitsizliği

$$Re\frac{zf'(z)}{h(z)} > 0 \text{ veya } \left|arg\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right| < \frac{\pi}{2} \tag{2.5}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanımdan açıktır ki her konveks fonksiyon konvekse yakındır. Daha genel olarak her yıldızıl fonksiyon konvekse yakındır. Böylece incelenen fonksiyon sınıfları arasında

$$K \subset S^* \subset C$$

bağıntısının sağlandığı görülür.

2.3.6. Teorem. $f \in C$ ise, her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ dir.

Aşağıdaki ilk iki teorem yıldızıl ve konveks fonksiyonların analitik ifadesini vermektedir.

2.3.7. Teorem. $f: U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde, f fonksiyonunun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve her $z \in U$ için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır (Goodman 1983).

2.3.8. Teorem. $f: U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve her $z \in U$ için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır (Goodman 1983).

2.3.9. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in K$ ise her bir pozitif n tamsayısı için $|a_n| \leq 1$ dir (Goodman 1983).

2.3.10. Tanım. $f: U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olmak üzere $z \in U$ için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha - mertebeli\ yıldızıl\ fonksiyon$ denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir. Özellikle, U da yıldızıl fonksiyonların sınıfı için $S^*(0) = S^*$ dir.

S_α^* sınıfı $S^*(\alpha)$ sınıfıyla yakından ilgilidir. f,

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1 - \alpha \quad (z \in U) \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlarsa, f fonksiyonuna S_α^* sınıfına aittir denir.

2.3.11. Tanım. $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in U$ ve $P(A,B)$ de olan $p(z)$ fonksiyonları için

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = p(z)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna *Janowski yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S^*(A,B)$ ile gösterilir (Janowski 1973).

2.3.12. Tanım. $f: U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olmak üzere $z \in U$ için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha - mertebeli\ konveks\ fonksiyon$ denir.

2.3.13. Tanım. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu U da analitik olsun. U da,

$$Re\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > \alpha$$

olacak şekilde yalınkat konveks bir $\varphi(z)$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna $\alpha - mertebeli\ konvekse\ yakın\ fonksiyon$ denir.

3. q-TÜREV OPERATÖRÜ KULLANILARAK TANIMLANAN BAZI ALT SINIFLAR

Bu bölümde, q-türev operatörü kullanılarak birim diskte analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca, bu sınıflara ait katsayı bağıntıları, sabordinasyon ve distorsiyon teoremleri verilecektir.

3.1. q-Yıldızıl Fonksiyonlar ve Özellikleri

Bu kısımda, q-yıldızıl fonksiyon tanımlanacak ve bu fonksiyonların bulunduğu sınıfa ait bazı özellikler verilecektir (Polatoğlu 2016).

3.1.1. Tanım. $f(z)$, $\mathcal{A}$ nın bir elemanı olsun.

$$\left|z\frac{D_q f(z)}{f(z)} - \frac{1}{1-q}\right| \leq \frac{1}{1-q}, \quad (\forall z \in U \text{ için})$$

koşulunu sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna U da *q-yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı S_q^* ile gösterilir.

$q \to 1^-$ iken, S_q^* sınıfı S^* sınıfına denk olur.

3.1.2. Teorem. Bir $f(z)$ fonksiyonunun S_q^* sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\left|\frac{f(qz)}{f(z)}\right| \leq 1 \quad (\forall z \in U \text{ için})$$

olmasıdır (Ronning 1993).

3.1.3. Teorem. $f(z)$, $\mathcal{A}$ nın bir elemanı olsun. $f(z) \in S_q^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$z\frac{D_q f(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-qz}$$

olmasıdır.

İspat. $f(z) \in S_q^*$ olsun. Bu taktirde $M = \frac{1}{1-q}$, $M > 1$ olmak üzere

$$\left| z\frac{D_q f(z)}{f(z)} - \frac{1}{1-q} \right| \leq \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \left| z\frac{D_q f(z)}{f(z)} - M \right| \leq M$$

dir. Dolayısıyla,

$$\psi(z) = \frac{1}{M} z \frac{D_q f(z)}{f(z)} - 1$$

fonksiyonunun U birim diskinde modülü en çok 1 dir. Böylece

$$\phi(z) = \frac{\psi(z) - \psi(0)}{1 - \overline{\psi(0)}\psi(z)} = \frac{\frac{1}{M} z \frac{D_q f(z)}{f(z)} - 1 - \left(\frac{1}{M} - 1\right)}{1 - \left(\frac{1}{M} - 1\right)\left(\frac{1}{M} z \frac{D_q f(z)}{f(z)} - 1\right)} \tag{3.1}$$

olur. Bu taktirde, $\phi(0) = 0$, $|\phi(z)| < 1$ ve Schwarz Lemması gereği

$$|\phi(z)| \leq |z| \tag{3.2}$$

dir. Diğer yandan (3.1) ve (3.2) den,

$$z\frac{D_q f(z)}{f(z)} = \frac{1 + \phi(z)}{1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)\phi(z)} = \frac{1 + \phi(z)}{1 - q\phi(z)} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) eşitliği

$$z\frac{D_q f(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-qz}$$

olması demektir.

Tersine, $z\frac{D_q f(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-qz}$ olsun. Bu taktirde

$$z\frac{D_q f(z)}{f(z)} = \frac{1+\phi(z)}{1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\phi(z)} \Longrightarrow z\frac{D_q f(z)}{f(z)} - M = M\frac{\frac{1-M}{M}+\phi(z)}{1+\frac{1-M}{M}\phi(z)}$$

dir. Diğer taraftan, $\frac{\frac{1-M}{M}+\phi(z)}{1+\frac{1-M}{M}\phi(z)}$ fonksiyonu birim çemberi kendi üzerine resmeder. Dolayısıyla,

$$\left|z\frac{D_q f(z)}{f(z)} - M\right| = \left|M\frac{\frac{1-M}{M}+\phi(z)}{1+\frac{1-M}{M}\phi(z)}\right| < M \Longrightarrow \left|z\frac{D_q f(z)}{f(z)} - \frac{1}{1-q}\right| < \frac{1}{1-q}$$

dur.

3.1.4. Sonuç. $f(z) \in S_q^*$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1-r}{1+qr} \le \left|z\frac{D_q f(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+r}{1-qr} \tag{3.4}$$

dir.

İspat. $w(z) = \frac{1+z}{1-qz}$ lineer dönüşümü $|z| = r$ çemberini merkezi $C(r) = \left(\frac{1+qr^2}{1-q^2r^2}, 0\right)$ ve yarıçapı $\rho(r) = \frac{(1+q)r}{1-q^2r^2}$ olan çembere dönüştürür. Sabordinasyon prensibi kullanılarak,

$$\left|z\frac{D_q f(z)}{f(z)} - \frac{1+qr^2}{1-q^2r^2}\right| \le \frac{(1+q)r}{1-q^2r^2}$$

elde edilir ki bu da (3.4) eşitsizliğini verir.

3.1.5. Teorem. $f(z) \in S_q^*$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{r-q}{1-rq} \leq \left|\frac{f(qz)}{f(z)}\right| \leq \frac{r+q}{1+rq} \tag{3.5}$$

dur.

İspat.

$$w(z) = \frac{f(qz)}{f(z)} = \frac{qz + a_2 q^2 z^2 + a_3 q^3 z^3 + \cdots}{z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots}$$

$$= \frac{q + a_2 q^2 z + a_3 q^3 z^2 + \cdots}{1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots} \quad \Rightarrow w(0) = q$$

olduğundan Teorem 3.1.2 gereği,

$$\phi(z) = \frac{w(z) - w(0)}{1 - \overline{w(0)}.w(z)} = \frac{w(z) - q}{1 - qw(z)} \tag{3.6}$$

fonksiyonu her $z \in U$ için $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlar. Dolayısıyla, Schwarz Lemması gereği

$$|\phi(z)| \leq |z| \tag{3.7}$$

dir.

(3.6) ve (3.7) den,

$$w(z) = \frac{q + \phi(z)}{1 + q\phi(z)} \Leftrightarrow w(z) = \frac{f(qz)}{f(z)} \prec \frac{q+z}{1+qz}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $w(z)=\frac{q+z}{1+qz}$ lineer dönüşümü $|z|=r$ çemberini merkezi $C(r)=\left(\frac{r(1-q^2)}{1-r^2q^2},0\right)$ ve yarıçapı $\rho(r)=\frac{q(1-r^2)}{1-r^2q^2}$ olan çembere dönüştürür. Teorem 2.2.6 gereği,

$$\left|\frac{f(qz)}{f(z)}-\frac{r(1-q^2)}{1-r^2q^2}\right|\le\frac{q(1-r^2)}{1-r^2q^2}$$

yazılabilir ki bu da (3.5) eşitsizliğini verir.

3.1.6. Uyarı. $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ bir q-geometrik B kümesi üzerinde tanımlı olsun. (1.7) kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned}
f(z)&=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\\
D_qf(z)&=D_qz+a_2D_qz^2+a_3D_qz^3+\cdots+a_nD_qz^n+\cdots\\
&=\frac{1-q}{1-q}z^{1-1}+a_2\frac{1-q^2}{1-q}z^{2-1}+a_3\frac{1-q^3}{1-q}z^{3-1}+\cdots+a_n\frac{1-q^n}{1-q}z^{n-1}+\cdots\\
&=1+a_2\frac{1-q^2}{1-q}z+a_3\frac{1-q^3}{1-q}z^2+\cdots+a_n\frac{1-q^n}{1-q}z^{n-1}+\cdots
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow D_qf(z)=1+a_2\frac{1-q^2}{1-q}z+a_3\frac{1-q^3}{1-q}z^2+\cdots+a_n\frac{1-q^n}{1-q}z^{n-1}+\cdots$$

$$zD_qf(z)=z+a_2\frac{1-q^2}{1-q}z^2+a_3\frac{1-q^3}{1-q}z^3+\cdots+a_n\frac{1-q^n}{1-q}z^n+\cdots$$

$\Longrightarrow D^qf(z)=zD_qf(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\frac{1-q^n}{1-q}z^n$

yazılabilir. Diğer taraftan, $f_1(z)=\frac{z}{1-z}$ ise $D^qf_1(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-q^n}{1-q}z^n$ olur. Dolayısıyla, Tanım 2.1.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
D^qf(z)&=zD_qf(z)\\
&=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\frac{1-q^n}{1-q}z^n\\
&=D_qf(z)*f_1(z)=f(z)*D_qf_1(z)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

3.1.7. Teorem. $f(z) \in S_q^*$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\frac{q-q^k}{1-q}\right)^2 |a_k|^2 \le (1+q)^2 + \sum_{n=2}^{k-1} \left(\frac{1+q}{1-q}\right)(1-q^{2n})|a_n|^2 \tag{3.8}$$

dir.

İspat. $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k$ toplamı U da yakınsak olmak üzere, Teorem 3.1.3 ve Uyarı 3.1.6 kullanılarak,

$$\frac{D^q f(z)}{f(z)} = \frac{1+\phi(z)}{1-q\phi(z)} \Leftrightarrow D^q f(z) - q\phi(z) D^q f(z) = f(z) + \phi(z) f(z)$$

ve böylece

$$\sum_{n=2}^{k} a_k \left(\frac{q-q^n}{1-q}\right) z^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n z^n = \phi(z) \left(\sum_{n=1}^{k-1} a_n \left(\frac{q-q^{n+1}}{1-q}\right) z^n \right)$$

yazılabilir.

$z = re^{i\theta}$ olsun. $|\phi(z)| < 1$ olduğundan,

$$\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{q-q^n}{1-q}\right)^2 |a_n|^2 r^{2k} \le \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{q-q^{n+1}}{1-q}\right)^2 |a_n|^2 r^{2k} \tag{3.9}$$

dır.

(3.9) da $r \to 1$ iken limit alınırsa

$$\sum_{n=2}^{k} \left(\frac{q-q^n}{1-q}\right)^2 |a_n|^2 \le \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{q-q^{n+1}}{1-q}\right)^2 |a_n|^2$$

sonucuna ulaşılır ve (3.8) elde edilir.

3.1.8. Teorem (S_q^* sınıfı için Bieberbach-de Branges Teoremi). $f \in S_q^*$ ise, $\forall n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \left(\frac{1-q^2}{q-q^n}\right)\prod_{k=2}^{n-1}\left(1+\frac{1-q^2}{q-q^k}\right) \tag{3.10}$$

dir.

İspat. $f \in S_q^*$ olması için gerek ve yeter şart $\forall z \in U$ için $|f(qz)/f(z)| \leq 1$ olması olduğundan

$$\frac{f(qz)}{f(z)} = w(z)$$

olacak şekilde $w: U \to \overline{U}$ dönüşümü vardır yani

$$\forall z \in U \text{ için } f(qz) = w(z)f(z)$$

dir.

Diğer yandan $w(0) = q$ olduğu açıktır. Seri açılımından $c_n = \sum_{k=1}^{n} w_{n-k}a_k = qa_n + \sum_{k=1}^{n-1} w_{n-k}a_k$ $(a_1 = 1 \ ve \ w_0 = q)$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

elde edilir. Bu eşitlikte z^n in katsayıları karşılaştırılarak $\forall n \geq 2$ için,

$$a_n(q^n - q) = \sum_{k=1}^{n-1} w_{n-k}\, a_k$$

elde edilir. Böylece, $\forall n \geq 1$ için $|w_n| \leq 1 - |w_0|^2 = 1 - q^2$ olduğundan, $\forall n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \frac{1-q^2}{q-q^n}\sum_{k=1}^{n-1}|a_k|$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla, $n = 2$ için, $|a_2| \leq (1-q^2)/(q-q^2)$ ve $n \geq 3$ için, $|a_{n-1}|$ tahmini için de aynı teknik uygulanır ve

$$|a_n| \leq \frac{1-q^2}{q-q^n}\left(1+\frac{1-q^2}{q-q^{n-1}}\right)\sum_{k=1}^{n-2}|a_k|$$

elde edilir. Tekrar $\forall n \geq 3$ için,

$$|a_n| \leq \frac{1-q^2}{q-q^n}\left(1+\frac{1-q^2}{q-q^{n-1}}\right)\left(1+\frac{1-q^2}{q-q^{n-2}}\right)\ldots\left(1+\frac{1-q^2}{q-q^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır. Bu ispatı tamamlar.

3.1.9. Uyarı. $q \to 1^-$ iken (3.10) eşitsizliğinin sağ tarafının n ye yaklaştığı kolaylıkla ispatlanabilir ki bu da yıldızıl fonksiyonlar için Bieberbach-de Branges teoremini verir. Ayrıca,

$$A_n = \left(\frac{1-q^2}{q-q^n}\right)\prod_{k=1}^{n-2}\left(1+\frac{1-q^2}{q-q^{k+1}}\right)$$

olmak üzere $z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$ serilerinin $|z| < q/(q+1-q^2)$ alt diskinde yakınsak olduğu oran testi ile kolayca görülür.

3.2. q-Konveks Fonksiyonlar ve Özellikleri

Bu bölümde, Srivastava (1989) tarafından tanımlanan K_q sınıfına ait q-konveks fonksiyonların Uzoamaka ve ark. (2015) tarafından elde edilen bazı özellikleri verilecektir.

3.2.1. Tanım. Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\left|\frac{zD_q^2 f(z)}{D_q f(z)} - \frac{1}{1-q}\right| \leq \frac{1}{1-q}, \qquad (0 < q < 1, z \in U) \tag{3.11}$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna U da *q-konveks fonksiyon* denir ve $f \in K_q$ ile gösterilir (Srivastava 1989).

3.2.2. Tanım. $\eta: U \to U$ olmak üzere $\eta(0) = q$ olan $\eta \in \mathcal{A}$ ların oluşturduğu küme B_q ile, $\iota = j + 1$ ve $\iota \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\vartheta(q^\iota z) \neq \vartheta(q^j z)$ olan $\vartheta \in B_q$ ların oluşturduğu küme B_q^ι ile gösterilir. Özel olarak, $0 \notin g(U)$ olan $g \in B_q$ ların oluşturduğu küme B_q^0 ile gösterilir.

3.2.3. Lemma. $\eta \in B_q^\iota$ ise,

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left\{\frac{\eta(zq^k)}{q}\right\}$$

çarpımı U nun kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır.

3.2.4. Lemma. $\sigma \in B_q^\iota$ ise, $\prod_{k=0}^{\infty} \left\{\frac{\sigma(zq^k)}{q}\right\}$ çarpımı U nun kompakt alt kümeleri üzerinde $\mathcal{A}$ da sıfırı olmayan ve sıfırdan farklı bir fonksiyona düzgün yakınsar. Üstelik

$$f(z) = \frac{z}{\prod_{k=0}^{\infty} \left\{\frac{\sigma(zq^k)}{q}\right\}}$$

fonksiyonu K_q ya aittir ve $\sigma = \frac{f(q^2z)-f(qz)}{f(qz)-f(z)}$ dir.

3.2.5. Lemma. Bir $f(z)$ fonksiyonunun K_q sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\left|\frac{f(q^2z)-f(qz)}{f(qz)-f(z)}\right| \leq q, \quad (f(qz) \neq f(z), z \in U) \tag{3.12}$$

olmasıdır (Ezeafulukwe ve Darus 2015).

3.2.6. Lemma. f, U da analitik ve sınırlı ise

$$\left|D_q(f(z))\right| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

dir (Selvakumaran ve ark. 2014).

3.2.7. Teorem. $0 < q < 1$ olmak üzere $z \in U$ olsun. Bu taktirde

$$\bigcap_{0<q<1} K_q = K$$

dır.

İspat. $w = \frac{zD_q^2 f(z)}{D_q f(z)}$ olsun. $f \in K_q$ ise, $0 < q < 1$ olmak üzere $q \to 1^-$ iken,

$$\left|w - \frac{1}{1-q}\right| \leq \frac{1}{1-q}$$

kapalı diski sağ yarı düzleme dönüşür ve $Re\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0$ dır. Dolayısıyla $f \in K$ dır. Böylece,

$$K \supseteq \bigcap_{0<q<1} K_q$$

dır.

Tersine, $f \in K$ ise, Teorem 3.2.7 nin hipotezi ile $f(zq)$ analitik fonksiyonu K dadır. Dolayısıyla, $f(zq)$, U da sınırlıdır ve ayrıca

$$g(z) = \frac{f(zq) - f(zq^2)}{1 - \overline{f(zq^2)}f(zq)}, \quad 0 < q < 1$$

U da sınırlıdır ve $g(z)$, $q = 1$ için sıfır olur.

$$h(z) = \frac{g(z)}{\frac{zq - zq^2}{1 - z\bar{z}q^2}} = \frac{\big(f(zq) - f(zq^2)\big)(1 - z\bar{z}q^2)}{(zq - zq^2)\left(1 - \overline{f(zq^2)}f(zq)\right)}$$

$$= \left\{\frac{D_q f(z)}{(1-q)z} - D_q^2 f(z)\right\} \frac{(1 - z\bar{z}q^2)}{\left(1 - \overline{f(zq^2)}\right) f(zq)} \tag{3.13}$$

fonksiyonu $q = 1$ ve ayrıca U nun diğer tüm noktalarında analitiktir. Üstelik $h(z)$, U da sınırlıdır ve

$$\lim_{|z| \to 1} |g(z)| \leq 1 \quad \text{ve} \quad |z| = 1 \ \text{için} \ \left|\frac{zq - zq^2}{1 - z\bar{z}q^2}\right| = 1$$

dir. Dolayısıyla, Teorem 1.1.15 den $M > 0$ olmak üzere $|z| < 1$ diskinde $|h(z)| \leq M$ dir. $w = \frac{zD_q^2 f(z)}{D_q f(z)}$ olsun, (3.13) den

$$\left|\frac{D_q f(z)}{z}\right| \left|\frac{1}{(1-q)} - w\right| \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - |f(z)|^2}\right) \leq M$$

olur. Lemma 3.2.6 gereği, $\left|\frac{D_q f(z)}{z}\right|\left(\frac{1-|z|^2}{1-|f(z)|^2}\right) \leq 1$ olduğundan, $\left|\frac{1}{1-q} - w\right| \leq M$ dir. $M = \frac{1}{1-q}$ olsun. Bu taktirde

$$\bigcap_{0<q<1} K_q = K$$

dır.

3.2.8. Teorem.

$$\varrho(f) = \frac{f(q^2 z) - f(qz)}{f(qz)} \, (z \in U) \tag{3.14}$$

ile tanımlanan

$$\varrho : K_q \to B_q^{\iota}$$

dönüşümü birebir örtendir.

İspat. Lemma 3.2.3 ve 3.2.4 gereği, ϱ dönüşümü örtendir. Şimdi, ϱ nun birebir olduğu gösterilmelidir.

$\rho(z) = \frac{f_1(qz)-f_1(z)}{f_2(qz)-f_2(z)}$ olarak alınırsa,

$$\frac{f_1(q^2 z) - f_1(qz)}{f_1(qz) - f_1(z)} = \frac{f_2(q^2 z) - f_2(qz)}{f_2(qz) - f_2(z)}$$

iken

$$\rho(z) = \frac{f_1(qz) - f_1(z)}{f_2(qz) - f_2(z)} = \frac{f_1(q^2 z) - f_1(qz)}{f_2(q^2 z) - f_2(qz)} = \rho(qz)$$

olur. Böylece $\rho(z)$ fonksiyonunun

$$\rho(z) = \rho(zq^n), \quad (n \in \mathbb{N}, \ z \in U)$$

bağıntısını sağladığı görülür. Dolayısıyla, $\rho(z)$ sabit olmalıdır ve $f_1'(z) = f_2'(z) = 1$ olduğundan bu sabit 1 e eşit olmalıdır.

3.3. q-Konvekse Yakın Fonksiyonlar ve Özellikleri

Bu kısımda, C_q sınıfına ait q-konvekse yakın fonksiyonların bazı özellikleri verilecektir (Uçar 2016, Sahoo ve Sharma 2014).

3.3.1. Tanım. $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu taktirde

$$\left| z\frac{D_q f(z)}{g(z)} - \frac{1}{1-q} \right| < \frac{1}{1-q}, \qquad (z \in U) \tag{3.15}$$

olacak şekilde bir $g(z) \in S^*(A,B)$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna $C_q(A,B)$ sınıfındadır denir.

3.3.2. Teorem. $f(z) \in \mathcal{A}$ olsun. $f(z) \in C_q(A,B)$ olması için gerek ve yeter şart $g(z) \in S^*(A,B)$ olmak üzere

$$z\frac{D_q f(z)}{g(z)} \prec \frac{1+z}{1-qz} \tag{3.16}$$

olmasıdır.

İspat. $f(z) \in C_q(A,B)$ ise,

$$\left| z\frac{D_q f(z)}{g(z)} - \frac{1}{1-q} \right| \le \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \left| z\frac{D_q f(z)}{g(z)} - M \right| \le M, M = \frac{1}{1-q} > 1 \tag{3.17}$$

dir.

Dolayısıyla, U birim diskinde $\psi(z)=\frac{1}{M}.z.\frac{D_q f(z)}{g(z)}-1$ fonksiyonunun modülünün alabileceği en büyük değer 1 dir. Böylece

$$\phi(z)=\frac{\psi(z)-\psi(0)}{1-\overline{\psi(0)}\psi(z)}=\frac{\frac{1}{M}z\frac{D_q f(z)}{g(z)}-\left(\frac{1}{M}-1\right)}{1-\left(\frac{1}{M}-1\right)\left(\frac{1}{M}z\frac{D_q f(z)}{g(z)}-1\right)} \tag{3.18}$$

ve $\phi(0)=0$, $|\phi(z)|<1$ dir. Dolayısıyla Schwarz Lemması gereği

$$|\phi(z)|\leq|z| \tag{3.19}$$

dir. (3.18) ve (3.19) dan,

$$z\frac{D_q f(z)}{g(z)}=\frac{1+\phi(z)}{1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\phi(z)} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) eşitliğinden

$$z\frac{D_q f(z)}{g(z)}\prec\frac{1+z}{1-qz}$$

olduğu görülür.

Tersine, $z\frac{D_q f(z)}{g(z)}\prec\frac{1+z}{1-qz}$ ise

$$z\frac{D_q f(z)}{g(z)}-M=M.\frac{\frac{1-M}{M}+\phi(z)}{1+\frac{1-M}{M}\phi(z)}$$

dir. Diğer taraftan, $\frac{\frac{1-M}{M}+\phi(z)}{1+\frac{1-M}{M}\phi(z)}$ fonksiyonu birim çemberi kendi üzerine dönüştürdüğü için,

$$\left|z\frac{D_q f(z)}{g(z)}-M\right|=M.\left|\frac{\frac{1-M}{M}+\phi(z)}{1+\frac{1-M}{M}\phi(z)}\right|\leq M$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

3.3.3. Sonuç. $f(z)\in C_q(A,B)$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{cases}\dfrac{1-r}{1+qr}(1-Br)^{\frac{A-B}{B}}\leq\left|D_q f(z)\right|\leq\dfrac{1+r}{1-qr}(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0\\ \dfrac{1-r}{1+qr}e^{-Ar}\leq\left|D_q f(z)\right|\leq\dfrac{1+r}{1-qr}e^{Ar}, & B=0\end{cases}\tag{3.21}$$

dir.

İspat. $\left(\frac{1+z}{1-qz}\right)$ lineer dönüşümü $|z|=r$ çemberini merkezi $C(r)=\frac{1+q^2r^2}{1-q^2r^2}$ ve yarıçapı $\rho(r)=\frac{2qr}{1-q^2r^2}$ olan çember üzerine dönüştürdüğü için, Teorem 2.2.6 gereği

$$\left|z\frac{D_q f(z)}{g(z)}-\frac{1+q^2r^2}{1-q^2r^2}\right|\leq\frac{2qr}{1-q^2r^2}\tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22) ifadesi

$$\frac{1-r}{1+qr}\leq\left|z\frac{D_q f(z)}{g(z)}\right|\leq\frac{1+r}{1-qr}$$

veya

$$\frac{|g(z)|}{r}\frac{1-r}{1+qr}\leq\left|D_q f(z)\right|\leq\frac{|g(z)|}{r}\frac{1+r}{1-qr}\tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan, $g(z)\in S^*(A,B)$ olduğundan

$$F(r,A,B)=\begin{cases} r(1+Br)^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0 \\ re^{Ar}, & B=0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$F(r,-A,-B)\leq |g(z)|\leq F(r,A,B) \tag{3.24}$$

dir. Bu sınırlar kesindir:

$$g^*(z)=\begin{cases} z\left(1+Be^{-i\theta}z\right)^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0 \\ ze^{Ae^{-i\theta}z}, & B=0 \end{cases}$$

(3.23) eşitsizliğinde (3.24) kullanılarak (3.21) elde edilir.

3.3.4. Uyarı. (3.21) eşitsizlikleri kesindir, çünkü ekstremal fonksiyon

$$f_*(z)=\begin{cases} z\dfrac{1+z}{1-qz}(1+Bz)^{\frac{A-B}{B}}, & B\neq 0 \\ z\dfrac{1+z}{1-qz}e^{Az}, & B=0 \end{cases}$$

dir.

3.3.5. Teorem. $C_q(A,B)$ sınıfının yıldızıllık yarıçapı

$$\rho(r)=1-(A+2)r+\left(\frac{A-B}{M}-\left(1-\frac{1}{M}\right)\right)r^2+\left(A-\frac{A}{M}\right)r^3$$

polinomunun $(0,1)$ aralığındaki tek köküdür.

İspat. Teorem 3.3.2 kullanılarak, $\phi(z)\in\Omega$, $q=1-\frac{1}{M}$ olmak üzere

$$f(z)\in C_q(A,B) \iff z\frac{D_qf(z)}{g(z)}\prec\frac{1+z}{1-qz} \iff z\frac{D_qf(z)}{g(z)}=\frac{1+\phi(z)}{1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\phi(z)} \tag{3.25}$$

dir. Diğer taraftan,

$$D^qf(z)=zD_qf(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\frac{1-q^n}{1-q}z^n \tag{3.26}$$

dir. (3.25) de (3.26) kullanılarak,

$$\frac{D^qf(z)}{g(z)}=\frac{1+\phi(z)}{1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\phi(z)} \tag{3.27}$$

bulunur. (3.27) de logaritmik türev alındıktan sonra basit hesaplamalarla

$$z\frac{\left(D^qf(z)\right)'}{D^qf(z)}-z\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{\left(2-\frac{1}{M}\right)z\phi'(z)}{1+\frac{1}{M}\phi(z)-\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(\phi(z)\right)^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$|\phi'(z)|\leq\frac{1-|\phi(z)|^2}{1-r^2}$$

eşitsizliğinden,

$$\left|z\frac{\left(D^qf(z)\right)'}{D^qf(z)}-z\frac{g'(z)}{g(z)}\right|\leq\frac{\left(2-\frac{1}{M}\right)r}{1-r^2}\frac{1-|\phi(z)|^2}{1-\frac{1}{M}|\phi(z)|-\left(1-\frac{1}{M}\right)|\phi(z)|^2} \tag{3.28}$$

dir. Kolayca gösterilebilir ki

$$\frac{1-|\phi(z)|^2}{1-\frac{1}{M}|\phi(z)|-\left(1-\frac{1}{M}\right)|\phi(z)|^2}\leq\frac{1-r^2}{1-\frac{1}{M}r-\left(1-\frac{1}{M}\right)r^2} \tag{3.29}$$

dir. Dolayısıyla, (3.28) eşitsizliği (3.29) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\left|z\frac{\left(D^q f(z)\right)'}{D^q f(z)} - z\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \leq \frac{\left(2-\frac{1}{M}\right)r}{1-\frac{1}{M}r-\left(1-\frac{1}{M}\right)r^2} \tag{3.30}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} Re\left(z\frac{\left(D^q f(z)\right)'}{D^q f(z)} - z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) &\geq -\left|z\frac{\left(D^q f(z)\right)'}{D^q f(z)} - z\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \\ &\geq -\frac{\left(2-\frac{1}{M}\right)r}{1-\frac{1}{M}r-\left(1-\frac{1}{M}\right)r^2} \end{aligned} \tag{3.31}$$

dir. $g(z) \in S^*(A,B)$ olduğundan,

$$Re\left(z\frac{g'(z)}{g(z)}\right) \geq \frac{1-Ar}{1-Br} \tag{3.32}$$

dir. (3.31) ve (3.32) birlikte dikkate alınırsa,

$$Re\left(z\frac{\left(D^q f(z)\right)'}{D^q f(z)}\right) \geq \frac{1-(A+2)r+\left(\frac{A-B}{M}-\left(1-\frac{1}{M}\right)\right)r^2+\left(A-\frac{A}{M}\right)r^3}{1-\left(B+\frac{1}{M}\right)r+\left(\frac{1+B}{M}-1\right)r^2 +\left(1-\frac{1}{M}\right)r^3}$$

elde edilir.

Şimdi $\rho(r) = 1-(A+2)r+\left(\frac{A-B}{M}-\left(1-\frac{1}{M}\right)\right)r^2+\left(A-\frac{A}{M}\right)r^3$ polinomu için $\rho(0) = 1 > 0, \rho(1) = -\left(2+\frac{1}{M}(B+1)\right) < 0$ dır. Bu yüzden $\rho(r) = 0$ denkleminin en küçük r_0 pozitif kökü 0 ve 1 arasındadır. Böylece

$$Re\left(z\frac{\left(D^q f(z)\right)'}{D^q f(z)}\right) > 0$$

eşitsizliği $|z| = r < r_0$ için sağlanır. Dolayısıyla $C_q(A,B)$ için q-yıldızıllık yarıçapı r_0 dan daha küçük değildir.

3.3.6. Teorem. $f(z) \in C_q(A,B)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{n=2}^{k} \left| a_n \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) - b_n \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{k-1} \left| a_n q \frac{1-q^n}{1-q} + b_n \right|^2 \tag{3.33}$$

dir.

İspat. Teorem 3.3.2 kullanılarak,

$$D^q f(z) = zD_q f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{1-q^n}{1-q} z^n$$

ve

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere

$$\frac{D^q f(z)}{g(z)} = \frac{1+\phi(z)}{1-q\phi(z)}$$

yazılabilir.

Böylece, $\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n z^n$ toplamı U da yakınsak olmak üzere

$$D^q f(z) - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) - b_n \right] z^n$$

$$[qD^q f(z) + g(z)]\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_n q \frac{1-q^n}{1-q} + b_n \right) z^n \right] \phi(z)$$

ve böylece

$$\sum_{n=2}^{k}\left(a_n\frac{1-q^n}{1-q}-b_n\right)z^n+\sum_{n=k+1}^{\infty}c_nz^n=\left(a_nq\frac{1-q^n}{1-q}+b_n\right)z^n\phi(z)$$

dir. $z=re^{i\theta}$ olsun. Dolayısıyla $|\phi(z)|<1$ dir. $r\to 1$ iken limite geçildiğinde,

$$\sum_{n=2}^{k}\left|a_n\frac{1-q^n}{1-q}-b_n\right|^2\leq\sum_{n=1}^{k-1}\left|a_nq\frac{1-q^n}{1-q}+b_n\right|^2$$

sonucuna ulaşılır.

3.3.7. Tanım. $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu taktirde

$$\left|z\frac{D_qf(z)}{g(z)}-\frac{1}{1-q}\right|\leq\frac{1}{1-q},(z\in U)$$

olacak şekilde bir $g\in S^*$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna C_q sınıfındadır denir.

$q\to 1^-$ iken $(D_qf)(z)\to f'(z)$ olduğundan, limit anlamında $\left|w-\frac{1}{1-q}\right|\leq\frac{1}{1-q}$ kapalı diski sağ yarı düzleme $\left(Re\left(z\frac{f'(z)}{g(z)}\right)>0\right)$ dönüşür ve bundan dolayı C_q sınıfı C ye indirgenir. C_q sınıfındaki fonksiyonlara *q-konvekse yakın fonksiyon* denir. Her $q\in(0,1)$ için, $S_q^*\subset C_q$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan,

$$\bigcap_{0<q<1}C_q\subset C\subset S$$

olduğu kolaylıkla görülür.

3.3.8. Teorem. Eğer $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, S_q^* sınıfına ait ise, her n için $|a_n|\leq c_n$ dir. Eşitlik $f(z)$,

$$k_q(z) = zexp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2lnq}{1-q^n} z^n\right] = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in U$$

fonksiyonunun bir rotasyonu olduğunda sağlanır (İsmail ve ark. 1990).

$k_q(z)$ fonksiyonunun C_q sınıfında oynadığı rol ile Koebe fonksiyonu $k(z)$ nin S^* da oynadığı rol aynıdır. Yukarıda ifade edilen $k_q(z)$ nin türevi alınarak ve her iki tarafta z^{n-1} katsayılarının karşılaştırılmasıyla c_n elde edilir:

$$c_2 = \frac{-2lnq}{1-q} \text{ve} (n-1)c_n = \frac{-2lnq}{1-q^{n-1}}(n-1) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{-2lnq}{1-q^{k-1}} c_{n+1-k}(k-1), n \geq 3$$

$q \to 1^-$ ise, Teorem 3.3.8 in S^* sınıfı için (Bieberbach-de Branges Teoremi olarak bilinen) Bieberbach'ın meşhur tahminine dönüştüğü kolaylıkla ispatlanabilir. Konvekse yakın fonksiyonlar için Bieberbach-de Branges teoreminin karşılaştırılması ile Teorem 3.3.8 in q-konvekse yakın fonksiyonlar için doğru olması beklenir. Ancak, bu hala açık bir problemdir.

Şimdi, C_q da olan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$ fonksiyonları için bazı özellikler verilecektir.

C_q sınıfındaki $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$ fonksiyonları

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \, (A_0 = 0, \; A_1 = 1) \tag{3.34}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$f(z)$, (3.34) formunda ise, basit bir hesaplama ile $\forall z \in U$ için

$$(D_q f)(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n(1-q^n)}{1-q} z^{n-1} \tag{3.35}$$

elde edilir.

3.3.9. Lemma. $f(z)$, (3.34) formunda ve $B_n = A_n(1-q^n)/(1-q)$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}|B_{n+1}-B_n| \leq 1$ olsun. Bu taktirde $g(z) = z/(1-z)$ olmak üzere $f(z) \in C_q$ dur (Raghavendar ve Swaminathan 2012).

Aşağıdaki teorem Lemma 3.3.9 un bir sonucudur.

3.3.10. Teorem. $\forall n \geq 1$ için $B_n = A_n(1-q^n)/(1-q)$ olmak üzere A_n reel sayılar dizisi ve

$$1 \geq B_2 \geq B_3 \geq \cdots \geq B_n \geq \cdots \geq 0 \quad \text{veya} \quad 1 \leq B_2 \leq B_3 \leq \cdots \leq B_n \leq \cdots \leq 2$$

olsun. O halde $g(z) = z/(1-z)$ olmak üzere $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n \in C_q$ dur.

İspat.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|B_{n+1}-B_n| = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}|B_{n+1}-B_n|$$

olduğundan, $1 \geq B_2 \geq B_3 \geq \cdots \geq B_n \geq \cdots \geq 0$ ise

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}|B_{n+1}-B_n| = \lim_{k\to\infty}(B_1 - B_{k+1}) \leq B_1 = 1$$

ve benzer şekilde $1 \leq B_2 \leq B_3 \leq \cdots \leq B_n \leq \cdots \leq 2$ ise $\sum_{n=1}^{\infty}|B_{n+1}-B_n| \leq 1$ dir. Dolayısıyla, Lemma 3.3.9 gereği teoremin ispatı tamamlanır.

3.3.11. Örnek. Krillov (1995) tarafından çalışılan Kuantum dilogaritm fonksiyonu,

$$Li_2(z;q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(1-q^n)}, \quad |z|<1, \quad 0<q<1$$

ile tanımlanır. Teorem 3.3.10 dan $(1-q)Li_2(z;q) \in C_q$ olduğu görülür.

3.3.12. Teorem. f, (3.34) formunda ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n - B_{n-1}| \le 1, \quad B_n = \frac{A_{n+1}(1-q^{n+1})}{1-q} - \frac{A_n(1-q^n)}{1-q}$$

olsun. O halde $g(z) = z/(1-z)^2$ olmak üzere $f \in C_q$ dur.

İspat. B_n katsayısının

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}(B_k - B_{k-1}) + 1\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|B_k - B_{k-1}| + 1 \le 2$$

özelliğinde olduğu görülür. Dolayısıyla $\forall n \ge 2$ için,

$$\left|\frac{A_n(1-q^n)}{1-q} - \frac{A_{n-1}(1-q^{n-1})}{1-q}\right| \le 2$$

olur. Şimdi tekrar üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left|\frac{A_n(1-q^n)}{1-q}\right| &= \left|\frac{A_n(1-q^n)}{1-q} - \frac{A_{n-1}(1-q^{n-1})}{1-q} + \frac{A_{n-1}(1-q^{n-1})}{1-q}\right. \\ &\quad \left. - \frac{A_{n-2}(1-q^{n-2})}{1-q} + \cdots + \frac{A_2(1-q^2)}{1-q} - 1 + 1\right| \\ &\le 2(n-1) + 1 = 2n-1\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $|A_n| \le (2n-1)/(1+q+\cdots+q^{n-1})$ dir. Kök testi kullanılarak, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 den daha küçük olmadığı görülebilir. O halde $f \in \mathcal{A}$ dır.

f, (3.34) formunda olduğundan, (3.35) kullanılarak

$$(1-z)^2\left(D_qf\right)(z) = 1 + \frac{A_2(1-q^2)}{1-q}z - 2z$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{A_n(1-q^n)}{1-q} - \frac{2A_{n-1}(1-q^{n-1})}{1-q} + \frac{A_{n-2}(1-q^{n-2})}{1-q}\right]z^{n-1}$$

bulunur. Hipotezde verilen B_n tanımından,

$$(1-z)^2\left(D_qf\right)(z) = 1 + (B_1-1)z + \sum_{n=3}^{\infty}(B_{n-1}-B_{n-2})z^{n-1}$$

olur. Dolayısıyla, $\sum_{n=2}^{\infty}|B_{n-1}-B_{n-2}| \leq 1$ ise

$$\frac{1}{1-q} - \left|(1-z)^2\left(D_qf\right)(z) - \frac{1}{1-q}\right| \geq 1 - |B_1-1| - \sum_{n=3}^{\infty}|B_{n-1}-B_{n-2}| \geq 0$$

dır. Bu, teoremin ispatını tamamlar.

3.3.13. Teorem. $A_0 = 0, A_1 = 1$ ve $B_n = \frac{A_{n+1}(1-q^{n+1})}{1-q} - \frac{A_n(1-q^n)}{1-q}$ olmak üzere $\{A_n\}$ reel sayıların bir dizisi ve

$$1 \geq B_1 \geq B_2 \geq \cdots \geq B_n \geq \cdots \geq 0 \text{ veya } 1 \leq B_1 \leq B_2 \leq \cdots \leq B_n \leq \cdots \leq 2$$

olsun. Bu taktirde $g(z) = z/(1-z)^2$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n \in C_q$ dur.

3.3.14. Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}A_{2n-1}z^{2n-1}$ ile tanımlı ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}|B_{2n-1}-B_{2n+1}| \leq 1,\ B_n = \frac{A_n(1-q^n)}{1-q}$$

olsun. O halde, $g(z) = z/(1-z^2)$ olmak üzere $f \in C_q$ dur.

İspat. İlk olarak, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_{2n-1} z^{2n-1} \in \mathcal{A}$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için,

$$|B_{2n+1}| = \left|\sum_{k=1}^{n} (B_{2k-1} - B_{2k+1}) - 1\right| \leq 2$$

olduğu kullanılırsa $|A_n| \leq 2/(1 + q + \cdots + q^{n-1})$ elde edilir. Kök testi kullanılarak, $f(z)$ seri açılımının yakınsaklık yarıçapının 1 den daha küçük olmadığı görülür. Dolayısıyla $f \in \mathcal{A}$ dır. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_{2n-1} z^{2n-1}$ olduğu için, (1.6) dan

$$(1 - z^2)\big(D_q f\big)(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_{2n-1}(1 - q^{2n-1})}{1 - q} - \frac{A_{2n+1}(1 - q^{2n+1})}{1 - q}\right] z^{2n}$$

elde edilir. $B_n = A_n(1 - q^n)/(1 - q)$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} |B_{2n-1} - B_{2n+1}| \leq 1$ iken

$$\frac{1}{1 - q} - \left|(1 - z^2)\big(D_q f\big)(z) - \frac{1}{1 - q}\right| \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |B_{2n-1} - B_{2n+1}| \geq 0$$

dır. Bu, teoremin ispatını tamamlar.

3.3.15. Teorem. $\forall n \geq 1$ için $B_n = A_n(1 - q^n)/(1 - q)$ olmak üzere $\{A_n\}$ reel sayıların bir dizisi ve

$$1 \geq B_3 \geq B_5 \geq \cdots \geq B_{2n-1} \geq \cdots \geq 0 \text{ veya } 1 \leq B_3 \leq B_5 \leq \cdots \leq B_{2n-1} \leq \cdots \leq 2$$

olsun. O halde $g(z) = z/(1 - z^2)$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_{2n-1} z^{2n-1} \in C_q$ dur.

3.3.16. Lemma. f, (3.34) ile tanımlı ve

$$\sum_{n=2}^{\infty} |B_n - B_{n-2}| \leq 1, \quad B_n = \frac{A_n(1 - q^n)}{1 - q}$$

olsun. O halde, $g(z) = z/(1 - z^2)$ olmak üzere $f \in C_q$ dur (Raghavendar ve Swaminathan 2012).

Lemma 3.3.16 dan C_q daki fonksiyonlar için aşağıdaki koşullar elde edilir.

3.3.17. Teorem. $\forall n \geq 1$ için $A_1 = 1$ ve $B_n = \frac{A_n(1-q^n)}{1-q}$ olmak üzere $\{A_n\}$ reel sayıların bir dizisi ve

$$1 \geq B_1 + B_2 \geq \cdots \geq B_{n-1} + B_n \geq \cdots \geq 0$$

veya

$$1 \leq B_1 + B_2 \leq \cdots \leq B_{n-1} + B_n \leq \cdots \leq 2$$

olduğu kabul edilsin. O halde, $g(z) = z/(1 - z^2)$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n \in C_q$ dur.

İspat.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |B_n - B_{n-2}| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} |B_n - B_{n-2}|$$

olduğundan $1 \geq B_1 + B_2 \geq \cdots \geq B_{n-1} + B_n \geq \cdots \geq 0$ ise,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} |B_n - B_{n-2}| = \lim_{k\to\infty} (1 - B_{k-1} - B_k) \leq 1 + 0 = 1$$

ve benzer şekilde $1 \leq B_1 + B_2 \leq \cdots \leq B_{n-1} + B_n \leq \cdots \leq 2$ ise $\sum_{n=2}^{\infty} |B_n - B_{n-2}| \leq 1$ dir. Dolayısıyla, Lemma 3.3.16 dan ispat tamamlanır.

3.3.18. Teorem. $a_1 = 1$ ve $\forall n \geq 1$ için $b_n = n a_n$ olmak üzere $\{a_n\}$ reel sayıların bir dizisi ve

$$1 \geq b_1 + b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1} + b_n \geq \cdots \geq 0$$

veya

$$1 \leq b_1 + b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} + b_n \leq \cdots \leq 2$$

olsun. O halde, $g(z) = z/(1 - z^2)$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu konvekse yakındır.

3.3.19. Lemma. f, (3.34) ile tanımlı ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_{n-1} - B_n + B_{n+1}| \leq 1, \quad B_n = \frac{A_n(1 - q^n)}{1 - q}$$

olsun. O halde, $g(z) = z/(1 - z + z^2)$ olmak üzere $f \in C_q$ dur.

Lemma 3.3.19 dan aşağıdaki teorem elde edilir.

3.3.20. Teorem. $A_1 = 1$ ve $\forall n \geq 1$ için $B_n = \frac{A_n(1-q^n)}{1-q}$ olacak şekilde $\{A_n\}$ reel sayıların bir dizisi ve

$$\begin{aligned} 0 \geq B_2 - B_1 \geq B_3 \geq B_2 + B_4 \geq B_2 + B_3 + B_5 \geq \cdots \\ \geq B_2 + B_3 + B_4 + \cdots + B_{n-1} + B_{n+1} \geq 1 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 0 \leq B_2 - B_1 \leq B_3 \leq B_2 + B_4 \leq B_2 + B_3 + B_5 \leq \cdots \\ \leq B_2 + B_3 + B_4 + \cdots + B_{n-1} + B_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

olsun. Bu taktirde, $g(z) = z/(1 - z + z^2)$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n \in C_q$ dur.

İspat.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_{n-1} - B_n + B_{n+1}| = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} |B_{n-1} - B_n + B_{n+1}|$$

olduğundan,

$$0 \geq B_2 - B_1 \geq B_3 \geq B_2 + B_4 \geq B_2 + B_3 + B_5 \geq \cdots$$
$$\geq B_2 + B_3 + B_4 + \cdots + B_{n-1} + B_{n+1} \geq 1$$

ise

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |B_{n-1} - B_n + B_{n+1}| = \lim_{k\to\infty} -(B_2 + B_3 + B_4 + \cdots + B_{k-1} + B_{k+1}) \leq 1$$

ve benzer şekilde,

$$0 \leq B_2 - B_1 \leq B_3 \leq B_2 + B_4 \leq B_2 + B_3 + B_5 \leq \cdots$$
$$\leq B_2 + B_3 + B_4 + \cdots + B_{n-1} + B_{n+1} \leq 1$$

ise $\sum_{n=1}^{\infty} |B_{n-1} - B_n + B_{n+1}| \leq 1$ dir. Dolayısıyla, Lemma 3.3.19 gereği ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.20 nin bir sonucu olarak, konvekse yakın ailedeki fonksiyonlar için aşağıdaki yeni kriter elde edilebilir.

3.3.21. Teorem. $a_1 = 1$ ve $\forall n \geq 1$ için $b_n = na_n$ olacak şekilde $\{a_n\}$ reel sayıların bir dizisi ve

$$0 \geq b_2 - b_1 \geq b_3 \geq b_2 + b_4 \geq b_2 + b_3 + b_5 \geq \cdots$$
$$\geq b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{n-1} + b_{n+1} \geq -1$$

veya

$$0 \leq b_2 - b_1 \leq b_3 \leq b_2 + b_4 \leq b_2 + b_3 + b_5 \leq \cdots$$
$$\leq b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{n-1} + b_{n+1} \leq 1$$

olsun. O halde, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = z/(1 - z + z^2)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın ailededir.

3.3.22. Lemma. $f \in C_q$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{|g(z)+f(qz)-f(z)|}{|g(z)|} \leq 1 \quad (\forall z \in U \text{ için})$$

olacak şekilde $g \in S^*$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. İspat, Tanım 3.3.7 deki $(D_q f)(z)$ q-türev operatörü ifadesinin yerine yazılması ile hemen elde edilir.

Burada Lemma 3.3.22, C_q sınıfındaki fonksiyonların seri temsilindeki katsayı sınırlarının tahmini için önemli sonuçlardan biri olarak rol oynayacak. Diğer bir deyişle, q-konvekse yakın fonksiyonların sınıfı için Bieberbach-de Branges teoremi analiz edilecek. Konvekse yakın fonksiyonlar için Bieberbach tahmini Reade (1955) tarafından ispatlanmıştır.

Şimdi, q-konvekse yakın ailedeki fonksiyonlar için Bieberbach-de Branges teoremi ifade edilecek ve ispatlanacaktır.

3.3.23. Teorem (C_q sınıfı için Bieberbach-de Branges Teoremi). $f \in C_q$ ise,

$$|a_n| \leq \frac{1-q^n}{1-q}\left[n + \frac{n(n-1)}{2}(1+q)\right] \quad (\forall n \geq 2 \text{ için})$$

dir.

İspat. $f \in C_q$ olduğundan, Lemma 3.3.22 gereği

$$g(z) + f(qz) - f(z) = w(z)g(z) \tag{3.36}$$

olacak şekilde $w: U \to \overline{U}$ dönüşümü vardır. $w(0) = q$ olduğu açıktır. $a_1 = 1 = b_1$ olduğu kabul edilirse

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n + a_n q^n - a_n)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} q b_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} w_{n-k}\, b_k\right) z^n$$

olur. $n \geq 2$ için, z^n in katsayılarının eşitlenmesi ile,

$$a_n(q^n - 1) = b_n(q - 1) + \sum_{k=1}^{n-1} w_{n-k}\, b_k$$

elde edilir. Teorem 1.1.18 den, $\forall n \geq 1$ için $|w_n| \leq 1 - |w_0|^2 = 1 - q^2$ olduğu görülür. $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in S^*$ olduğundan,

$$|a_n| \leq \frac{1-q}{1-q^n}\left[n + (1+q)\sum_{k=1}^{n-1} k\right] \quad (\forall n \geq 2 \text{ için})$$

elde edilir. Bu, teoremin ispatını tamamlar.

3.3.24. Uyarı. $q \to 1^-$ iken, Teorem 3.3.23 konvekse yakın fonksiyonlar için Bieberbach tahmini problemini verir. Klasik oran testi kullanılarak, $|z| < 1$ için

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-q}{1-q^n}\left[n + \frac{n(n-1)}{2}(1+q)\right] z^n \tag{3.37}$$

serilerinin yakınsak olduğu kolaylıkla görülür.

3.3.25. Sonuç. Koebe fonksiyonu $g(z) = z/(1-z)^2$ olmak üzere $f \in C_q$ ise, $\forall n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \frac{1-q}{1-q^n}\left[n + (1+q)\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

dir.

$g(z) = z$ olmak üzere $f \in C$ ise, $\forall n \geq 2$ için $|a_n| \leq 2/n$ olduğu biliniyor. Bunun bir genelleştirmesi olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.26. Sonuç. $g(z) = z$ olmak üzere $f \in C_q$ ise, $\forall n \geq 2$ için $|a_n| \leq (1-q^2)/(1-q^n)$ dir.

$g(z) = z/(1-z)$ olmak üzere $f \in C$ ise, $\forall n \geq 2$ için $|a_n| \leq (2n-1)/n$ olduğu biliniyor. Aşağıdaki sonuç bu sonucun benzeridir.

3.3.27. Sonuç. $g(z) = z/(1-z)$ olmak üzere $f \in C_q$ ise, $\forall n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \frac{1-q}{1-q^n}[n + q(n-1)]$$

dir.

$g(z) = z/(1-z^2)$ olmak üzere $f \in C$ ise, $\forall m \geq 1$ için

$$|a_n| \leq \begin{cases} 1, & n = 2m-1 \ \text{ ise} \\ 1, & n = 2m \ \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu biliniyor. Aşağıdaki sonuç bu sonucun benzeridir.

3.3.28. Sonuç. $g(z) = z/(1-z^2)$ olmak üzere $f \in C_q$ ise, $\forall m \geq 1$ için

$$|a_n| \leq \begin{cases} \dfrac{1-q}{1-q^n}\left(\dfrac{n}{2}(1+q) + \dfrac{1}{2}(1-q)\right), & n = 2m-1 \ \text{ ise} \\ \left(\dfrac{1-q^2}{1-q^n}\right)\dfrac{n}{2}, & n = 2m \ \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat. $g(z) = \frac{z}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}$ olduğundan, (3.36) gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty}(q^n-1)a_n z^n = (q-1)\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n\right)$$

elde edilir. Bu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(q^n - 1)a_n z^n = (q-1)\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} w_{2k}\right)z^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} w_{2k-1}\right)z^{2n} \tag{3.38}$$

ifadesine eşittir. $|a_n|$ in gerekli olan sınırını ispatlamak için, z^{2n-1} ve z^{2n} in katsayılarının ayrı ayrı karşılaştırılması gerekir. İlk olarak (3.38) de z^{2n-1} katsayıları karşılaştırılır ve

$$(q^{2n-1} - 1)a_{2n-1} = (q-1) + \sum_{k=1}^{n-1} w_{2k}$$

elde edilir. $q \in (0,1)$ ve $\forall k \geq 1$ için $|w_k| \leq 1 - q^2$ olduğundan,

$$|a_{2n-1}| \leq \frac{1-q}{(1-q^{2n-1})}(-q + (1+q)n)$$

dir.

İkinci olarak, $n \geq 1$ için z^{2n} katsayıları karşılaştırılarak

$$(q^{2n} - 1)a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} w_{2k-1}$$

ve benzer şekilde

$$|a_{2n}| \leq \frac{1-q}{(1-q^{2n})}(1+q)n$$

bulunur. Dolayısıyla, $|a_n|$ için gerekli sınır ispatlanmış olur.

$g(z) = z/(1 - z + z^2)$ olmak üzere $f \in C$ ise, $\forall n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \begin{cases} \dfrac{4n+1}{3n}, & n = 3m - 1 \text{ ise} \\ \dfrac{4}{3}, & n = 3m \text{ ise} \\ \dfrac{4n-1}{3n}, & n = 3m + 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu biliniyor. Bunun bir genelleştirmesi olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.29. Sonuç. $g(z) = z/(1 - z + z^2)$ olmak üzere $f \in C_q$ ise, $\forall m \geq 1$ için

$$|a_n| \leq \begin{cases} \dfrac{1-q}{1-q^n}\left(\dfrac{1}{3}(2-q) + \dfrac{2n}{3}(1+q)\right), & n = 3m - 1 \text{ ise} \\ \dfrac{1-q^2}{1-q^n}\dfrac{2n}{3}, & n = 3m \text{ ise} \\ \dfrac{1-q}{1-q^n}\left(\dfrac{2n}{3}(1+q) + \dfrac{1}{3}(1-2q)\right), & n = 3m + 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat. $g(z) = z/(1 - z + z^2)$ fonksiyonu yeniden yazılırsa,

$$g(z) = \frac{z(1+z)}{1+z^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{3n-2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{3n-1}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.36) ifadesi basitleştirilerek,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(q^n - 1)a_n z^n = (q-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{3n-2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{3n-1}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}w_{3k-2}\right)z^{3n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}w_{3k-1}\right)z^{3n}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}w_{3k}\right)z^{3n+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}w_{3k}\right)z^{3n-1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\,w_{3k-2}\right)z^{3n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k-1}\,w_{3k-1}\right)z^{3n+1} \tag{3.39}$$

elde edilir. İlk olarak, (3.39) da $\forall n \geq 2$ için z^{3n-1} katsayıları eşitlenerek

$$(q^{3n-1}-1)a_{3n-1}=(-1)^{n-k}(q-1)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\,w_{3k-2}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}w_{3k}$$

bulunur. $q \in (0,1)$ ve $\forall k \geq 1$ için $|w_k| \leq (1-q^2)$ olduğundan,

$$|a_{3n-1}| \leq \frac{1-q}{(1-q^{3n-1})}(-q+2(1+q)n)$$

dır. Sonra, $\forall n \geq 1$ için, (3.39) da z^{3n} ve z^{3n+1} katsayıları karşılaştırılırsa

$$|a_{3n}| \leq \frac{2(1-q)}{(1-q^{3n})}(1+q)n \quad \text{ve} \quad |a_{3n+1}| \leq \frac{(1-q)}{(1-q^{3n+1})}(1+2(1+q)n)$$

katsayı sınırları elde edilir. Böylece, sonucun ispatı tamamlanır.

3.4. α-Mertebeli q-Yıldızıl Fonksiyonlar

Bu kısımda, $S_{q,1}^*(\alpha)$, $S_{q,1}^*(\alpha)$ ve $S_{q,3}^*(\alpha)$ sınıflarına ait α mertebeli q-yıldızıl fonksiyonların bazı özellikleri verilecek (Agrawal ve Sahoo 2015, Wongsaijai ve Sukantamala 2016).

3.4.1. Tanım. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$Re\left\{\frac{zD_qf(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \tag{3.40}$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna *1 tipi α mertebeli q-yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S^*_{q,1}(\alpha)$ ile gösterilir.

3.4.2. Tanım. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\left|\frac{\frac{z(D_qf)(z)}{f(z)} - \alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{1-q}\right| \leq \frac{1}{1-q}, \quad z \in U$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna *2 tipi α mertebeli q-yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S^*_{q,2}(\alpha)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki ifade Tanım 3.4.2 nin denk bir formudur:

$$f \in S^*_{q,2}(\alpha) \Leftrightarrow \left|\frac{z(D_qf)(z)}{f(z)} - \frac{1-\alpha q}{1-q}\right| \leq \frac{1-\alpha}{1-q}. \tag{3.41}$$

$q \to 1^-$ iken $|w-(1-q)^{-1}| \leq (1-q)^{-1}$ kapalı diskinin sağ yarı düzlem olduğu ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $S^*_{q,2}(\alpha)$ sınıfının $S^*(\alpha)$ sınıfına dönüştüğü görülür. Özellikle, $\alpha = 0$ iken, $S^*_q(\alpha)$ sınıfı $S^*_q = S^*_q(0)$ sınıfı ile çakışır ki bu ilk olarak İsmail ve ark. (1990) tarafından ispatlandı.

3.4.3. Tanım. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$\left|\frac{z\left(D_qf(z)\right)}{f(z)} - 1\right| < 1-\alpha \quad (z \in U) \tag{3.42}$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna *3 tipi α mertebeli q-yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S^*_{q,3}(\alpha)$ ile gösterilir.

3.4.4. Teorem. $0 < \alpha < 1$ için,

$$S^*_{q,3}(\alpha) \subset S^*_{q,2}(\alpha) \subset S^*_{q,1}(\alpha) \tag{3.43}$$

dır.

İspat. $f \in S^*_{q,3}(\alpha)$ olsun, (3.42) ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|\frac{z\left(D_q f(z)\right)/f(z) - \alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{1-q}\right| &= \frac{1}{1-\alpha}\left|\frac{zD_q f(z)}{f(z)} - \alpha - \frac{1-\alpha}{1-q}\right| \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}\left|\frac{zD_q f(z)}{f(z)} - 1\right| + \frac{q}{1-q} \leq 1 + \frac{q}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q}\end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. O halde $f \in S^*_{q,2}(\alpha)$; yani $S^*_{q,3}(\alpha) \subset S^*_{q,2}(\alpha)$ dır. Şimdi, $f \in S^*_{q,2}(\alpha)$ olsun.

$$f \in S^*_{q,2}(\alpha) \Leftrightarrow \left|\frac{zD_q f(z)}{f(z)} - \frac{1-\alpha q}{1-q}\right| < \frac{1-\alpha}{1-q} \tag{3.45}$$

olduğundan $z D_q f(z)/f(z)$, $(1-\alpha q)/(1-q)$ merkezli $(1-\alpha)/(1-q)$ yarıçaplı çemberde kalır ve

$$\frac{1-\alpha q}{1-q} - \frac{1-\alpha}{1-q} = \alpha \tag{3.46}$$

olduğu görülür ki bunun anlamı $Re\{zD_q f(z)/f(z)\} > \alpha$ olmasıdır. Dolayısıyla, $f \in S^*_{q,1}(\alpha)$ dır; yani $S^*_{q,2}(\alpha) \subset S^*_{q,1}(\alpha)$ dır. Bu ispatı tamamlar.

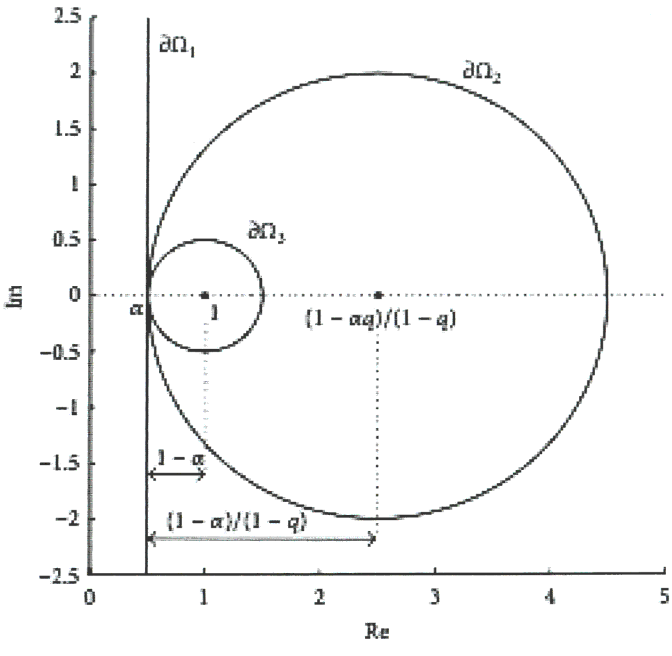
Geometrik olarak, $f \in S^*_{q,k}(\alpha)$ $(k = 1,2,3)$ için $zD_qf(z)/f(z)$ farklı tanım kümelerinde bulunur.

$$\Omega_1 = \{w \in \mathbb{C} : Rew > \alpha\},$$

$$\Omega_2 = \left\{w \in \mathbb{C} : \left|w - \frac{1-\alpha q}{1-q}\right| < \frac{1-\alpha}{1-q}\right\}, \tag{3.47}$$

$$\Omega_3 = \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 1 - \alpha\},$$

sırasıyla Şekil 3.1 de görülür.



Şekil 3.1. Her bir bölgenin sınırı

Bir sonraki sonuç Teorem 3.4.4 ve α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar kullanılarak direkt olarak elde edilir.

3.4.5. Sonuç. $S^*_{q,1}(\alpha)$, $S^*_{q,2}(\alpha)$ ve $S^*_{q,3}(\alpha)$ sınıfları aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\bigcap_{0<q<1} S_{q,1}^*(\alpha) = \bigcap_{0<q<1} S_{q,2}^*(\alpha) = S^*(\alpha),$$

$$\bigcap_{0<q<1} S_{q,1}^*(\alpha) = \bigcap_{0<q<1} S_{q,3}^*(\alpha) \subset S^*(\alpha). \tag{3.48}$$

3.4.6. Önerme. $f \in S_{q,2}^*(\alpha)$ olsun. Bu taktirde,

$$\frac{\frac{z(D_qf)(z)}{f(z)} - \alpha}{1-\alpha} = \frac{z(D_qg)(z)}{g(z)} \quad \text{veya} \quad \frac{f(qz) - \alpha q f(z)}{(1-\alpha)} = \frac{g(qz)}{g(z)} \tag{3.49}$$

olacak şekilde bir tek $g \in S_{q,2}^*$ fonksiyonu vardır. Benzer şekilde, verilen bir $g \in S_{q,2}^*$ için yukarıdaki bağıntıyı sağlayan $f \in S_{q,2}^*(\alpha)$ fonksiyonu vardır. Teklik aşikardır.

$S_{q,2}^*(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonların basit bir karakterizasyonu verilecek. $f \in S_{q,2}^*(\alpha)$ ise $f(z) = 0$, $z = 0$ olmasını gerektirir. Aksi takdirde, $f(z)$ nin sıfırdan farklı en küçük modüllü bir sıfırında $f(qz)/f(z)$ bir kutba sahip olurdu.

3.4.7. Teorem. $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu taktirde $f \in S_{q,2}^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\left|\frac{f(qz)}{f(z)} - \alpha q\right| \leq 1 - \alpha, \quad z \in U$$

olmasıdır.

İspat. İspat, Tanım 3.4.2 ve

$$\frac{z(D_qf)(z)}{f(z)} = \left(\frac{1}{1-q}\right)\left(1 - \frac{f(qz)}{f(z)}\right)$$

eşitliğinden kolaylıkla elde edilir.

3.4.8. Lemma. $h \in B_q$ ise

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\left((1-\alpha)h(zq^n)+\alpha q\right)/q\right\}$$

sonsuz çarpımı U nun kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat. $(1-\alpha)h(z)+\alpha q = g(z)$ alınırsa, $h \in B_q$ olduğundan, $g \in B_q$ olduğu kolayca görülür (İsmail ve ark. 1990).

3.4.9. Lemma. $h \in B_q^0$ ise, $\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\left((1-\alpha)h(zq^n)+\alpha q\right)/q\right\}$ sonsuz çarpımı U nun kompakt alt kümeleri üzerinde U da analitik, sıfırı olmayan ve sıfırdan farklı bir fonksiyona düzgün yakınsar. Dahası,

$$f(z)=\frac{z}{\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\left((1-\alpha)h(zq^n)+\alpha q\right)/q\right\}}$$

fonksiyonu $S_{q,2}^*(\alpha)$ ya aittir ve $h(z)=\Big(\big(f(qz)/f(z)\big)-\alpha q\Big)/(1-\alpha)$ dır.

İspat. Sonsuz çarpımın yakınsaklığı Lemma 3.4.8 de ispatlandı. $h \in B_q^0$ olduğundan, U da $h(z) \neq 0$ dır ve sonsuz çarpım U da sıfırdan farklı olur. Dolayısıyla, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu ile $h(z)$ fonksiyonu arasında

$$\frac{f(qz)}{f(z)}=(1-\alpha)h(z)+\alpha q$$

bağıntısı ve buna denk olarak

$$\frac{\frac{f(qz)}{f(z)}-\alpha q}{1-\alpha}=h(z)$$

bağıntısı bulunur. $h \in B_q^0$ olduğundan, $f \in S_{q,2}^*(\alpha)$ elde edilir ve lemmanın ispatı tamamlanır.

3.4.10. Tanım. $g: U \to U$ bir dönüşüm olmak üzere $g(0) = \frac{q}{1-\alpha(1-q)}$ olan g, U da analitik, sıfırı olmayan ve sıfırdan farklı bir fonksiyon ise bu fonksiyonlarının oluşturduğu küme $B_{q,\alpha}$ ile gösterilir. Özel olarak, $0 \notin g(U)$ olan $g \in B_{q,\alpha}$ fonksiyonlarının oluşturduğu küme $B_{q,\alpha}^0$ ile gösterilir.

3.4.11. Lemma. $g \in B_{q,\alpha}^0$ olması için gerek ve yeter şart

$$g(z) = exp\left\{\left(ln\frac{q}{1-\alpha(1-q)}\right)p(z)\right\} \tag{3.50}$$

olacak şekilde bir $p(z) \in P$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. $g \in B_{q,\alpha}^0$ için, $L(z) = \operatorname{Log} g(z)$ fonksiyonu tanımlansın. $p(z) = \frac{L(z)}{ln\frac{q}{1-\alpha(1-q)}} \in P$ olduğu kolaylıkla gösterilir ve $p(z)$ fonksiyonu (3.50) yi sağlar. Tersine, g, (3.50) ile verilirse, $g \in B_{q,\alpha}^0$ olduğu aşikardır.

3.4.12. Teorem.

$$\rho(f)(z) = \frac{\frac{f(qz)}{f(z)} - \alpha q}{1-\alpha}$$

ile tanımlı $\rho: S_{q,2}^*(\alpha) \to B_q^0$ dönüşümü birebir örtendir.

İspat. $h \in B_q^0$ için,

$$\sigma(h)(z) = \frac{z}{\prod_{n=0}^{\infty}\{((1-\alpha)h(zq^n) + \alpha q)/q\}}$$

ile bir $\sigma: B_q^0 \to \mathcal{A}$ dönüşümü tanımlansın. Lemma 3.4.9 dan $\sigma(h) \in S_{q,2}^*(\alpha)$ ve $(\rho \circ \sigma)(h) = h$ olduğu açıktır. $\sigma \circ \rho$ bileşke dönüşümü göz önüne alındığında

$$(\sigma \circ \rho)(f)(z) = \frac{z}{\prod_{n=0}^{\infty}\{f(zq^{n+1})/qf(zq^n)\}} = \frac{z}{z/f(z)} = f(z)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sigma \circ \rho$ ve $\rho \circ \sigma$ özdeşlik dönüşümüdür ve σ, ρ nin tersidir, yani $\rho(f)$ dönüşümü tersinirdir. Bunun sonucu olarak $\rho(f)$ birebir örtendir. Bu, ispatı tamamlar.

3.4.13. Teorem. $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun katsayıları

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left([k]_q - \alpha\right)|a_k| \leq 1 - \alpha \tag{3.51}$$

eşitsizliğini sağlarsa $f(z)$, 3 tipi α mertebeli bir q-yıldızıl fonksiyondur; yani $f \in S_{q,3}^*(\alpha)$ dır.

İspat. (3.51) eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\left|zD_qf(z) - f(z)\right| - (1-\alpha)|f(z)| &= \left|\sum_{k=2}^{\infty}\left([k]_q - 1\right)\alpha_k z^k\right| - (1-\alpha)\left|z + \sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k z^k\right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty}\left([k]_q - 1\right)|\alpha_k| - (1-\alpha)\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty}|\alpha_k|\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}\left([k]_q - 1\right)|\alpha_k| - (1-\alpha) \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $f \in S_{q,3}^*(\alpha)$ dır.

Şimdi, negatif katsayılı q-yıldızıl fonksiyonların yeni alt sınıfları tanıtılacak.

3.4.14. Tanım. Negatif katsayılı, k-tipi α mertebeli q-yıldızıl fonksiyonların sınıfı

$$\mathcal{T}S_{q,k}^{*}(\alpha) \equiv S_{q,k}^{*}(\alpha) \cap \mathcal{T}, \quad \mathrm{k} = 1,2,3 \tag{3.53}$$

şeklinde tanımlanır.

3.4.15. Teorem. $0 < \alpha < 1$ için,

$$\mathcal{T}S_{q,1}^{*}(\alpha) \equiv \mathcal{T}S_{q,2}^{*}(\alpha) \equiv \mathcal{T}S_{q,3}^{*}(\alpha) \tag{3.54}$$

dır.

İspat. Teorem 3.4.4 kullanılarak, $\mathcal{T}S_{q,1}^{*}(\alpha) \subset \mathcal{T}S_{q,3}^{*}(\alpha)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f \in \mathcal{T}S_{q,1}^{*}(\alpha)$ olduğu kabul edilsin. Bu taktirde

$$Re\left\{\frac{zD_q f(z)}{f(z)}\right\} = Re\left\{\frac{1 - \sum_{k=2}^{\infty}[k]_q |a_k| z^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\, z^{k-1}}\right\} > \alpha \tag{3.55}$$

dır. $zD_q f(z)/f(z)$ nin reel olması için z reel eksen üzerinde olmalıdır. Reel doğru üzerinde $z \to 1^{-}$ iken

$$1 - \sum_{k=2}^{\infty}[k]_q |a_k| > \alpha\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\right) \tag{3.56}$$

olur ki bu eşitsizlik (3.51) i sağlar. Teorem 3.4.13 gereği ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.15 kullanılarak, q-yıldızıl fonksiyonların her tipinin tamamen aynı olduğu görülür. Bu nedenle, $k = 1, 2$ ve 3 olmak üzere q-yıldızıl fonksiyonların her bir sınıfı için $\mathcal{T}S_{q,k}^{*}(\alpha) \equiv \mathcal{T}S_{q}^{*}(\alpha)$ notasyonu verilebilir. Teorem 3.4.13 kullanılarak, $0 < \varepsilon < \big(n(1-\alpha) - [n]_q + \alpha\big)/n$ ve $[n]_q - \alpha < n(1 - \alpha - \varepsilon)$ olmak üzere,

$$f_0(z) = z - \frac{1-\alpha-\varepsilon}{[n]_q - \alpha} z^n \in \mathcal{T}S_q^*(\alpha) \tag{3.57}$$

olduğu kolayca görülür, fakat $z_0 = \left[\left([n]_q - \alpha\right)/n(1-\alpha-\varepsilon)\right]^{1/n}\left(\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)\right) \in U$ olduğunda $f_0'(z) = 0$ dır. Yani, $f_0(z) \notin S$ ve üstelik $f_0(z) \notin S^*(\alpha)$ dır. Bu yüzden, $\mathcal{T}S_q^*(\alpha)$ sınıfının yalınkatlık ve yıldızıllık yarıçapını çalışmak ilginçtir.

3.4.16. Lemma. $f \in \mathcal{T}$ ise f, D_r üzerinde yalınkat olması için gerek ve yeter şart f nin D_r üzerinde yıldızıl olmasıdır.

3.4.17. Teorem. $f \in \mathcal{T}S_q^*$ ise

$$r_0 = \min_{2 \le k \le M_0} \left[\frac{[k]_q - \alpha}{k(1-\alpha)}\right]^{1/(k-1)} \tag{3.58}$$

ve $M_0 > e^{1+\left|ln\left((1-q)(1-\alpha)/\left(q+(1-q)(1-\alpha)\right)\right)\right|}$ olmak üzere f, $|z| < r_0$ da yalınkat ve yıldızıldır.

İspat. $f \in \mathcal{T}S_q^*$ olsun. $D_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}$ üzerinde $Re\{f'(z)\} > 0$ olacak şekilde $0 < r_0 \le 1$ özelliğinde bir r_0 bulunmalıdır. Yalınkatlığı elde etmek için,

$$Re\left\{\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right\} = \int_0^1 Re\{f'\left(z_1 + t(z_2 - z_1)\right)\}\,dt \tag{3.59}$$

eşitliği dikkate alınsın. Diğer yandan her $|z| < r_0$ için,

$$Re\{f'(z)\} = Re\left\{1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|z^{k-1}\right\} > 1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|\, {r_0}^{k-1} \tag{3.60}$$

dır. Teorem 3.4.13 ve (3.60) ın uygulanması ile,

$$r_0 = \inf_{k\geq 2}\left[\frac{[k]_q - \alpha}{k(1-\alpha)}\right]^{1/(k-1)} \tag{3.61}$$

olmak üzere $Re\{f'(z)\} > 0$ eşitsizliği U_{r_0} üzerinde sağlanır.

Şimdi, (3.58) eşitliğini sağlayan $M_0 \in \mathbb{N}$ yi bulmak gerekir. $f: [2,\infty) \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$f(x) = \left[\frac{[x]_q - \alpha}{x(1-\alpha)}\right]^{1/(x-1)} \tag{3.62}$$

ile tanımlı bir fonksiyon olsun. (3.62) de her iki tarafın logaritmik türevi alındığında, $A = (1-q)(1-\alpha)$ olmak üzere

$$f'(x) = \frac{f(x)}{(x-1)^2}\left[lnx - \frac{(x-1)q^x lnq}{q+A-q^x} + ln\frac{A}{q+A-q^x} - \frac{x-1}{x}\right] \tag{3.63}$$

elde edilir. (3.63) ün 2'nci teriminin pozitif olduğu kolaylıkla görülür. Diğer yandan

$$\begin{gathered}\sup_{x\geq 2}\left|ln\frac{A}{q+A-q^x}\right| = \left|ln\frac{A}{q+A}\right|, \\ \sup_{x\geq 2}\frac{x-1}{x} = 1,\end{gathered} \tag{3.64}$$

olduğundan, (3.63) de 3'ncü ve son terim *x* yeterince büyük olduğunda lnx ile sınırlandırılabilir. Bu $M_0 > e^{1+|ln(A/(q+A))|}$ olmak üzere, f nin $[M_0,\infty)$ üzerinde artan bir fonksiyon olmasını gerektirir. Dolayısıyla, yalınkatlık yarıçapı

$$r_0 = \inf_{k\geq 2}\left[\frac{[k]_q - \alpha}{k(1-\alpha)}\right]^{1/(k-1)} = \min_{2\leq k\leq M_0}\left[\frac{[k]_q - \alpha}{k(1-\alpha)}\right]^{1/(k-1)} \tag{3.65}$$

olarak bulunur. Son olarak, yıldızıllık yarıçapını bulmak için Lemma 3.4.16 uygulanarak teoremin ispatı tamamlanır.

3.4.18. Teorem. $f \in \mathcal{T}S_q^*(\alpha)$ ise,

$$r_1 = \min_{2 \le k \le M_1} \left[\frac{[k]_q - \alpha}{k - q} \right]^{1/(k-1)} \tag{3.66}$$

ve $M_1 > e^{1+\left|ln\left((1-q)/(1-\alpha(1-q))\right)\right|}$ olmak üzere f, $|z| < r_1$ de α mertebeli yıldızıldır.

İspat. $|zf'(z)/z - 1| < 1 - \alpha$ olduğu yani,

$$\begin{aligned} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| &= \left| \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)|a_k|z^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^{k-1}} \right| \\ &\le \frac{\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)|a_k||z|^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty}|a_k||z|^{k-1}} \le 1 - \alpha \end{aligned} \tag{3.67}$$

olduğu gösterilmelidir. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k - \alpha)|a_k||z|^{k-1} \le 1 - \alpha \tag{3.68}$$

ise (3.67) doğrudur. Teorem 3.4.13 gereği

$$r_1 = \inf_{k \ge 2} \left[\frac{[k]_q - \alpha}{k - \alpha} \right]^{1/(k-1)} \tag{3.69}$$

olmak üzere eşitsizlik D_{r_1} üzerinde sağlanır. Son olarak, Teorem 3.4.17 deki aynı teknik kullanılarak, $M_1 > e^{1+\left|ln\left((1-q)/(1-\alpha(1-q))\right)\right|}$ olmak üzere

$f(x) = \left[([k]_q - \alpha)/(k-\alpha)\right]^{1/(k-1)}$ fonksiyonunun $[M_1, \infty)$ üzerinde artan olduğu bulunur. Bu, ispatı tamamlar.

Şimdi, Teorem 3.3.17 ve Teorem 3.3.18 ile bulunan yıldızıllık ve yalınkatlık yarıçapını doğrulamak için bazı örnekler verilecektir.

3.4.19. Örnek. $q = 0.75$ olmak üzere $\mathcal{TS}_q^*$ göz önüne alınsın. Teorem 3.3.17 den $\mathcal{TS}_q^*$ sınıfının yalınkatlık yarıçapı

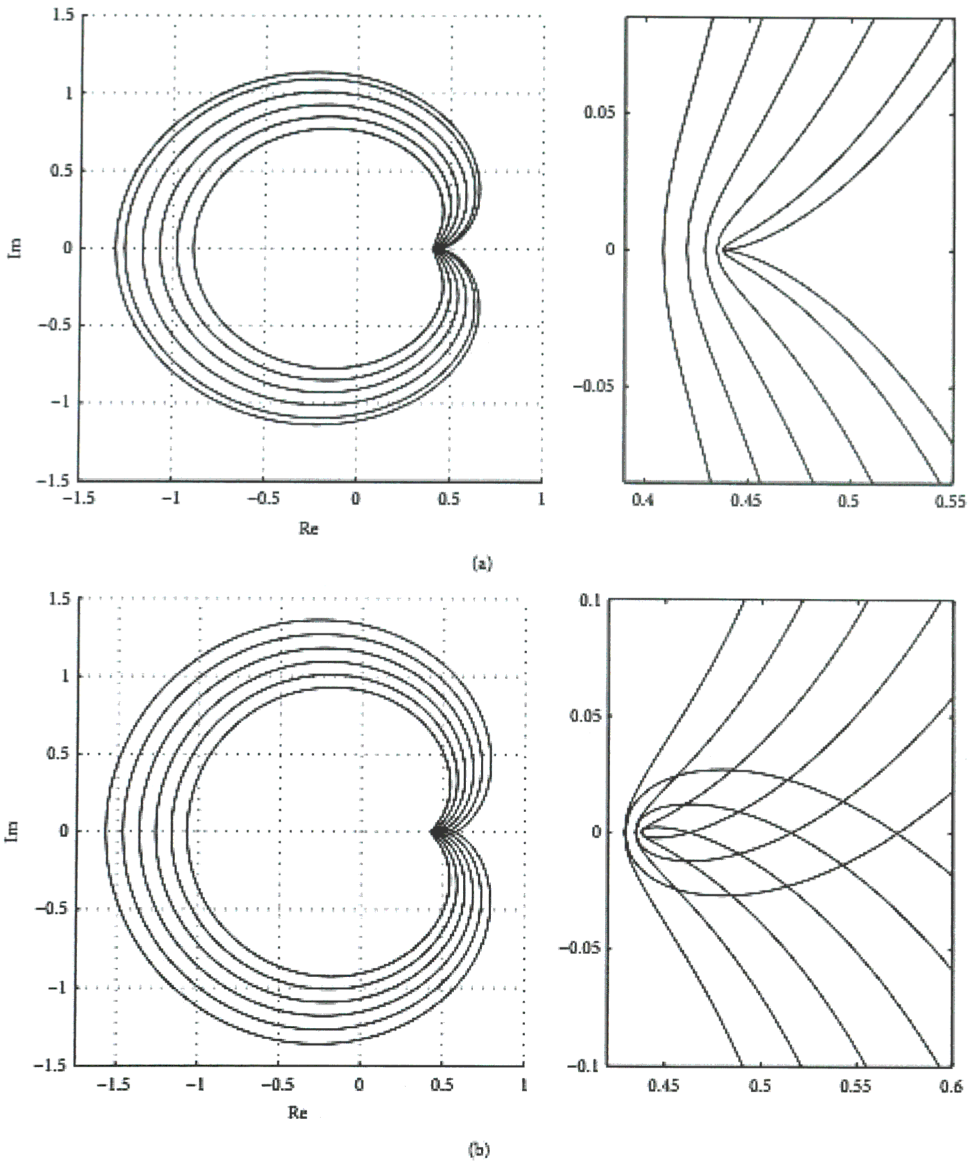
$$r_0 = \min_{2\leq k\leq e^{[1+|ln 0.25|]}} \left[\frac{[k]_{0.75}}{k}\right]^{1/(k-1)} = \min_{2\leq k\leq 11} \left[\frac{[k]_{0.75}}{k}\right]^{1/(k-1)} = 0.875 \qquad (3.70)$$

olarak elde edilir.

Şimdi, $n = 2$ ve $\varepsilon = 0.001$ olmak üzere (3.57) de tanımlanan $f_0(z)$ örnek fonksiyonu için

$$f_0(z) = z - \frac{0.999}{1.75} z^2 \qquad (3.71)$$

dır. Açıkça görülür ki, $f_Z(z), D_{0.875}$ üzerinde yerel yalınkattır çünkü $D_{0.875}$ açık diski dışındaki $z_0 \approx 0.87587$ noktasında $f'(z_0) = 0$ dır. Teorem 3.4.17 gereği $f_0(z)$ fonksiyonu $D_{0.875}$ üzerinde yalınkattır.



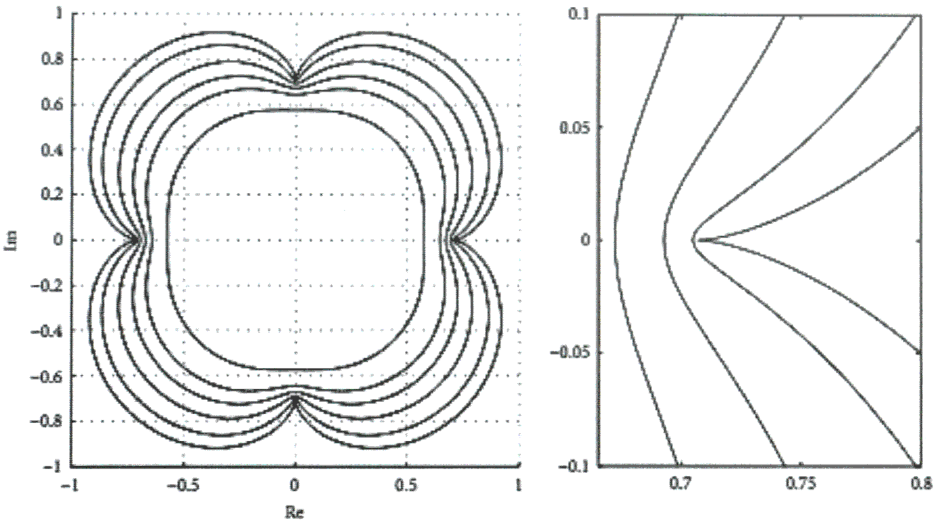
Şekil 3.2. (3.64) de tanımlanan $f_0(z)$ polinomu için $r = 0.875(a)$ ve $r = 1(b)$ çevre uzunluğuna sahip ∂D_r nin görüntüsü

Üstelik, Şekil 3.2, $r = 0.875$ ve $r = 1$ çevre uzunluğuna sahip ∂D_r nin görüntüsünü verir. Şekil 3.2(a) gösterir ki $f_0(z)$ fonksiyonu $D_{0.875}$ üzerinde yalınkat ve yıldızıl bir fonksiyondur. Diğer taraftan, $f_0(z)$, U üzerinde yalınkat bir fonksiyon değildir (Şekil 3.2(b) den görülür).

Diğer bir örnek $\varepsilon = 0.001$ ile $n = 5$ olduğu durumdaki

$$f_0(z) = z - \frac{0.999}{[5]_{0.75}} z^5 \tag{3.72}$$

fonksiyonudur. $|z_0| = 0.88403 \ldots$ olmak üzere $k = 0, 1, 2, 3$ için $z_0 = [5]_{0.75}/4.995^{1/4}(\cos(k\pi/2) + i\sin(k\pi)/2)$ de f nin yerel yalınkat olmadığı görülür.



Şekil 3.3. (3.65) de tanımlanan $f_0(z)$ polinomu altında $r = 0.884$ çevre uzunluğuna sahip ∂D_r nin görüntüsü

Şekil 3.3 gösterir ki (3.72) de tanımlanan f_0 fonksiyonu $D_{0.88403}$ üzerinde yalınkat ve yıldızıldır ki bu Teorem 3.4.17 den $D_{0.875}$ açık diskini kapsar. Yani; örnek, Teorem 3.4.17 de r_0 yarıçapının sadece yalınkatlık ve yıldızıllık için yeterli koşul olduğunu gösterir, fakat (3.72) de tanımlanan $f_0(z)$ fonksiyonundan dolayı koşul gerekli değildir.

Bir sonraki örnek α mertebeli q-yıldızıl fonksiyonların sınıfına aittir:

3.4.20. Örnek. $q = 0.75$ olmak üzere $\mathcal{T}S_q^*(\alpha)$ sınıfı göz önüne alınsın. $\alpha = 0.5$ için, Teorem 3.4.17 gereği

$$r_0 = \min_{2 \le k \le e^{\left[1+\left|ln\left((1-q)(1-\alpha)/(q+(1-q)(1-\alpha))\right)\right|\right]}} \left[\frac{[k]_{0.75}}{k}\right]^{1/(k-1)}$$

$$= \min_{2 \le k \le 19} \left[\frac{[k]_{0.75}}{k} \right]^{1/(k-1)} \approx 0.94554 \tag{3.73}$$

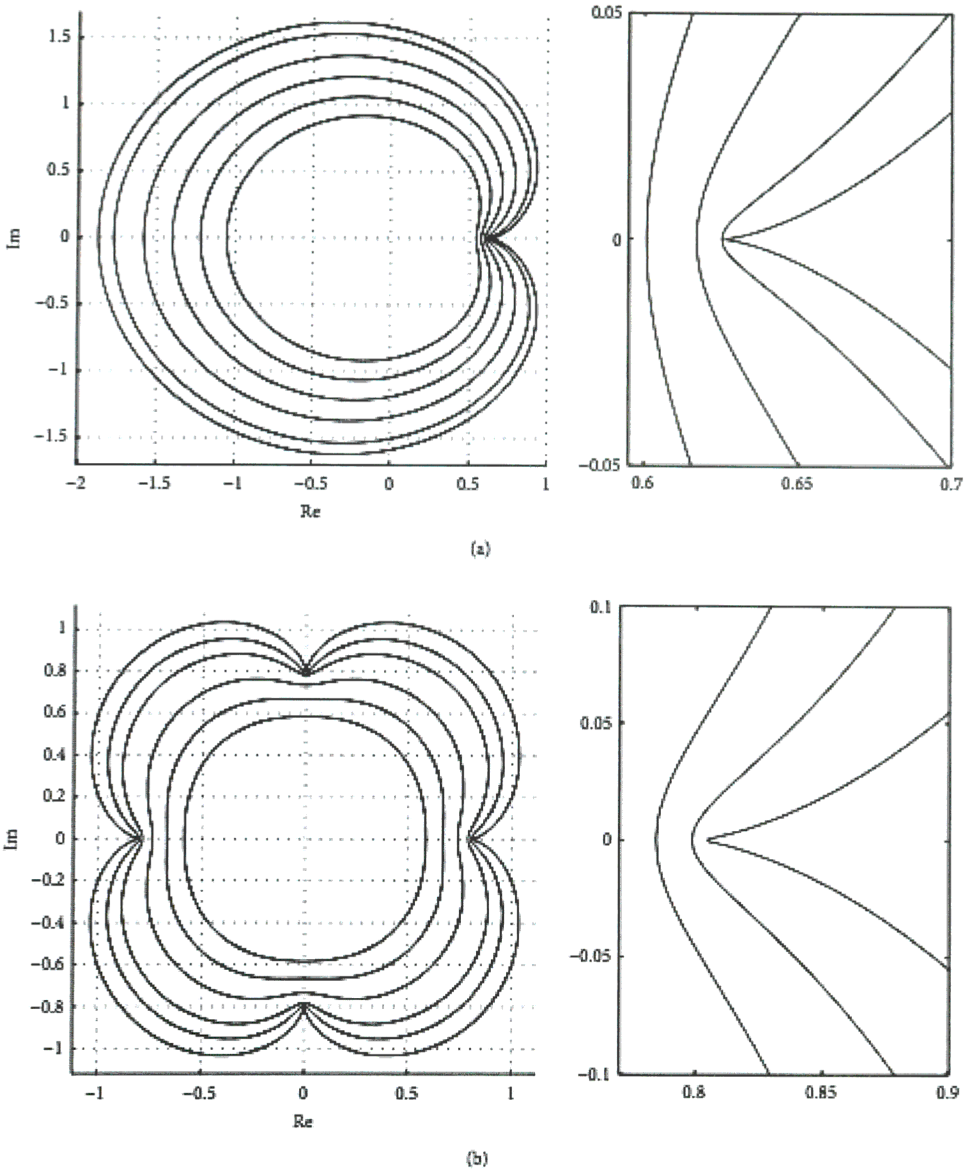
dir. Ancak, $n = 2$ ve $\varepsilon = 0.001$ için (3.57) de tanımlanan $f_0(z)$ fonksiyonu

$$f_0(z) = z - \frac{0.499}{1.25} z^2 \tag{3.74}$$

$D_{0.925}$ diskini kapsayan $D_{1.2525}$ diski üzerinde yerel yalınkattır. Şekil 3.4(a) ile $f_0(z)$ fonksiyonunun U üzerinde yalınkat ve yıldızıl olduğu görülür. Ayrıca, $n = 2$ ve $\varepsilon = 0.001$ için (3.57) de tanımlanan

$$f_0(z) = z - \frac{0.499}{[5]_{0.75} - 0.5} z^5 \tag{3.75}$$

fonksiyonu $D_{1.0055}$ üzerinde yerel yalınkattır ve Şekil 3.4(b) de verilen $f_0(z)$ fonksiyonunun U üzerinde yalınkat ve yıldızıl olduğu görülür.



Şekil 3.4. Sırasıyla (3.67) ve (3.68) de tanımlı $f_0(z)$ polinomu üzerinde $r = 1.2525(a)$ ve $r = 1.005(b)$ çevre uzunluğuna sahip ∂D_r nin görüntüsü

3.4.21. Tanım. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re \frac{D_q(zD_qf(z))}{D_qf(z)} > \alpha$$

ise $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna α mertebeli q-konveks fonksiyon denir ve $f \in K_q(\alpha)$ ile gösterilir. Yani,

$$K_q(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A}: Re\frac{D_q\left(zD_qf(z)\right)}{D_qf(z)} > \alpha, z \in U \right\}$$

dır.

3.4.22. Uyarı.

$$f \in K_q(\alpha) \Leftrightarrow zD_qf \in S_{q,1}^*(\alpha)$$

dır ve $K(\alpha)$, U da α-mertebeli konveks sınıf olmak üzere

$$\lim_{q\to 1^-} K_q(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A}: \lim_{q\to 1^-} Re\frac{D_q\left(zD_qf(z)\right)}{D_qf(z)} > \alpha, z \in U \right\} = K(\alpha)$$

dır.

$S_{q,1}^*(\alpha)$ ile $K_q(\alpha)$ sınıfları arasındaki bu ilgi ve $S_{q,1}^*(\alpha) \subset K_q(\alpha)$ olması nedeniyle $K_q(\alpha)$ sınıfı $S_{q,1}^*(\alpha)$ sınıfı için elde edilen özelliklere benzer özelliklere sahiptir.

3.5. α-Mertebeli q-Konvekse Yakın Fonksiyonlar

Bu kısımda, $UCC_q(\alpha)$ sınıfında olan q-konvekse yakın fonksiyonlara ait bazı özellikler verilecektir (Engel ve Naicu 2016).

3.5.1. Tanım. $0 \leq \alpha < 1$ ve $g \in T^*$ olmak üzere

$$Re\frac{zD_qf(z)}{g(z)} \geq \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in T$ fonksiyonuna α *mertebeli q-konvekse yakın fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların genelleştirilmiş sınıfı $UCC_q(\alpha)$ ile gösterilir.

3.5.2. Uyarı. $\alpha = 0$ ise $UCC_q(0) = UCC_q$ dur.

3.5.3. Tanım. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$Re\frac{zD_q f(z)}{g(z)} \geq \alpha$$

koşulunu sağlayan $f \in T$ fonksiyonuna sabit bir $g \in T^*$ fonksiyonuna göre α mertebeli q-konvekse yakın fonksiyonların genelleştirilmiş sınıfındadır denir ve $UCC_q(g, \alpha)$ ile gösterilir.

3.5.4. Tanım. $g \in T^*$ olmak üzere,

$$Re\frac{zD_q^n f(z)}{g(z)} > 0$$

koşulunu sağlayan $f \in T$ fonksiyonuna $UCC_q{}^n$ sınıfındadır denir.

3.5.5. Teorem. $a_k \geq 0$, $k \in \{2,3, \ldots\}$ olmak üzere $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. $f \in UCC_q(\alpha)$ ise,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-q^k}{1-q}(a_k - \alpha b_k) < 1 - \alpha \tag{3.76}$$

olacak şekilde $g(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \in T^*$ vardır. Eğer

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-q^k}{1-q} a_k < 1 - \alpha \tag{3.77}$$

ise $f \in UCC_q(\alpha)$ dır.

Özel olarak,

$$\frac{1-q^k}{1-q}a_k \leq b_k, \quad k \in \{2,3,\dots\}$$

olması durumunda (3.77) eşitsizliği f nin $UCC_q(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşuldur.

İspat. $f \in UCC_q(\alpha)$ olsun. Bu taktirde

$$Re\frac{zD_qf(z)}{g(z)} > \alpha, \quad z \in U$$

olacak şekilde $g(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \in T^*$ fonksiyonu vardır. $z \in [0,1)$ ise,

$$\frac{z - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-q^k}{1-q}a_k z^k}{z - \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k} > \alpha \tag{3.78}$$

bulunur. $g \in T^*$ olduğundan $\sum_{k=2}^{\infty} kb_k \leq 1$ ve dolayısıyla da $\sum_{k=2}^{\infty} b_k \leq 1$ dir. Bu nedenle $z \in [0,1)$ için $g(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k > 0$ dır. Böylece (3.78) bağıntısı

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1-q^k}{1-q}a_k - \alpha b_k\right)z^{k-1} < 1-\alpha$$

eşitsizliğini verir. (3.77) için $g(z) = z$ seçilsin. $\alpha + |D_qf(z) - 1| < 1$ ise,

$$\alpha - Re\left(\frac{zD_qf(z)}{g(z)} - 1\right) < 1$$

doğrudur fakat

$$\alpha + |D_qf(z) - 1| \leq \sum_{j=2}^{\infty}\left|\frac{1-q^j}{1-q}a_j\right| + \alpha = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1-q^j}{1-q}a_j + \alpha$$

dır. Özel durumu ispatlamak için,

$$\frac{1-q^k}{1-q}a_k \geq b_k, \quad k \in \{2,3,\dots\}$$

olduğu kabul edilsin. Bu taktirde (3.76) eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilirse,

$$\alpha + \frac{\sum_{k=2}^{\infty}\left|b_k - \frac{1-q^k}{1-q}a_k\right| |z|^{k-1}}{1-\sum_{k=2}^{\infty} b_k |z|^{k-1}} \leq \alpha + \frac{\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1-q^k}{1-q}a_k - b_k\right)}{1-\sum_{k=2}^{\infty} b_k}$$
$$= \frac{\alpha + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1-q^k}{1-q}a_k - \alpha b_k\right)}{1-\sum_{k=2}^{\infty} b_k} < 1$$

olur.

3.5.6. Teorem. $a_k, b_k \geq 0$, $k \in \{2,3,\dots\}$ olmak üzere $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $g(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k \in T^*$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. $f \in UCC_q(g,\alpha)$ ise,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1-q^k}{1-q}a_k - \alpha b_k\right) < 1-\alpha \tag{3.79}$$

dır. Eğer

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1-q^k}{1-q}a_k + (2-\alpha)b_k\right] < 1-\alpha \tag{3.80}$$

ise $f \in UCC_q(g,\alpha)$ dır. Özel durumda,

$$\frac{1-q^k}{1-q}a_k \leq b_k, \quad k \in \{2,3,\dots\}$$

olduğunda (3.79), $f \in UCC_q(g,\alpha)$ olmasını gerektirir.

3.5.7. Uyarı. $g_2(z) = z - \frac{z^2}{2} \in T^*$ olmak üzere $f_2(z) = z - \frac{z^2}{1+q} \in UCC_q(g_2, \alpha)$ olduğunda

$$Re\frac{zD_q f_2(z)}{g_2(z)} = Re\frac{z(1-z)}{z\left(1-\frac{z}{2}\right)} = 2Re\frac{1-z}{2-z} > 0$$

olur. Ancak

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-q^k}{1-q}a_k + (2-\alpha)b_k = 1 + \frac{2-\alpha}{2} = 2 - \frac{\alpha}{2} \nless 1$$

dir. Bu, (3.80) in sadece yeterli bir koşul olduğunu gösterir.

Aşağıdaki teorem yıldızıl bir fonksiyon ile konveks bir fonksiyonun konvolüsyonunun yıldızıl olduğunu gösterir.

3.5.8. Teorem. $a_k, b_k, c_k \geq 0$, $k \in \{2,3,\dots\}$ olmak üzere $\phi(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, U da konveks olsun ve $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, $g(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k$ olsun. $k \in \{2,3,\dots\}$ için $\frac{1-q^k}{1-q}a_k \leq b_k$ olmak üzere $f \in UCC_q(g,\alpha)$ ise $f * \phi \in UCC_q(g,\alpha)$ dır.

İspat.

$$(f * \phi)(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k c_k z^k$$

olsun. Tanım 3.5.3 den $(f * \phi)(z) \in UCC_q(g,\alpha)$ ise, $(g * \phi) \in T^*$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re\frac{zD_q(f * \phi)(z)}{(g * \phi)(z)} > \alpha$$

dır. $f \in UCC_q(g,\alpha)$ olduğu kabul edilsin. Teorem 3.5.6 gereği

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1-q^k}{1-q}a_k - \alpha b_k\right] < 1-\alpha \tag{3.81}$$

dır. İspatı tamamlamak için,

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1-q^k}{1-q}a_k c_k - \alpha b_k c_k\right] < 1-\alpha$$

olduğu gösterilmelidir. $\phi \in T$ olduğundan, bir önceki eşitsizlik

$$\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\left[\frac{1-q^k}{1-q}a_k - \alpha b_k\right] < 1-\alpha \tag{3.82}$$

ifadesine denktir. ϕ konveks olduğundan, Teorem 2.3.9 gereği $k = 2,3,\ldots$ için $|c_k| \leq 1$ dir. Dolayısıyla (3.82) den

$$\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\left[\frac{1-q^k}{1-q}a_k - \alpha b_k\right] < \sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{1-q^k}{1-q}a_k - \alpha b_k\right] < 1-\alpha$$

elde edilir ve ispat biter.

3.6. q-Türev Operatörü Kullanılarak Tanımlanan Analitik Yalınkat Fonksiyonların Bir Sınıfı İçin $H_3(1)$ Hankel Determinantı

Bu kısımda, $\mathcal{R}(q)$ sınıfı ve hankel determinantı tanımlandı. $\mathcal{R}(q)$ sınıfı için, $H_2^{\gamma}(1)$ ve $B_2^{\beta}(1)$ in alabileceği optimum sınırlar elde edildi ve $H_3(1)$ Hankel determinantı belirlenmiştir.

3.6.1. Tanım. $f(z) \in \mathcal{A}$ olmak üzere,

$$Re\big(f'(z)\big) > 0, \quad z \in U$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{R}$ ile gösterilir.

3.6.2. Tanım. Bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu,

$$Re\Big(\big(D_q f\big)(z)\Big) > 0, \quad z \in U$$

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{R}(q)$ sınıfındadır denir.

$$\lim_{q \to 1^-} \mathcal{R}(q) = \left\{ f \in \mathcal{A} \colon \lim_{q \to 1^-} R\Big(\big(D_q f\big)(z)\Big) > 0, \quad z \in U \right\} = \mathcal{R}$$

dir.

3.6.3. Tanım. λ negatif olmayan bir reel sayı olsun. $n \geq 1$ ve $t \geq 1$ tamsayıları için, λ parametreli Fekete-Szegö t dereceli Hankel determinantları, yani $H_t^\lambda(n)$,

$$H_t^\lambda(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \cdots & \lambda a_{n+t-1} \\ a_{n+1} & \cdots \; \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \;\; \vdots & \vdots \\ a_{n+t-1} & \cdots \;\; \cdots & a_{n+2(t-1)} \end{vmatrix} \tag{3.83}$$

ile tanımlanır (Babalola 2013).

Ünlü Hankel determinantı $\lambda = 1$ durumundadır. Noonan ve Thomas (1976), $H_t(n)$ Hankel determinantını tanımladı. Ayrıca, diğer benzer determinantlar da aşağıdaki gibi tanımlandı.

3.6.4. Tanım. λ negatif olmayan bir reel sayı olsun. $n \geq 1$ ve $t \geq 1$ tamsayıları için, $B_t^\lambda(n)$ determinantı

$$B_t^{\lambda}(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+t-1} \\ a_{n+t} & a_{n+t-1} & \cdots & a_{n+2t-1} \\ a_{n+2t} & a_{n+2t-1} & \cdots & a_{n+3t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+t(t-1)} & \cdots & \cdots & \lambda a_{n+t^2-1} \end{vmatrix} \tag{3.84}$$

ile tanımlanır (Babalola 2013).

3.6.5. Tanım. $i = 1,2,\dots,t$ olmak üzere, λ_i, negatif olmayan reel sayılar olsun. $n \geq 1$ ve $t \geq 1$ tamsayıları için, λ_i parametreli Fekete-Szegö t dereceli Hankel determinantları, yani $H_t^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t}(n)$,

$$H_t^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t}(n) = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_n & \lambda_2 a_{n+1} & \cdots & \lambda_t a_{n+t-1} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+t-1} & \cdots & \cdots & a_{n+2(t-1)} \end{vmatrix} \tag{3.85}$$

ile tanımlanır (Babalola 2013).

3.6.6. Tanım. $j = 1,2,\dots,n$ olmak üzere, λ_j, negatif olmayan reel sayılar olsun. $n \geq 1$ ve $t \geq 1$ tamsayıları için, $B_t^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t}(n)$ determinantları

$$B_t^{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_t}(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & \lambda_1 a_{n+t-1} \\ a_{n+t} & a_{n+t+1} & \cdots & \lambda_2 a_{n+2t-1} \\ a_{n+2t} & a_{n+2t+1} & \cdots & \lambda_3 a_{n+3t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+t(t-1)} & \cdots & \cdots & \lambda_n a_{n+t^2-1} \end{vmatrix} \tag{3.86}$$

ile tanımlanır (Babalola 2013).

$\lambda_j, j = 1,2,\dots,(t-1)(n-1)$ için, $H_t^{1,1,\dots,1,\lambda_n}(n)$ ve $B_t^{1,1,\dots,1,\lambda_n}(n)$ nin yerine sırasıyla $H_t^{\lambda}(n)$ ve $B_t^{\lambda}(n)$ yazılabilir ve γ, α, β reel sayıları için

$$H_2^{\gamma}(1) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 - \gamma a_2^2,$$

$$H_2^{\alpha}(2) = \begin{vmatrix} a_2 & \alpha a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - \alpha a_3^2$$

ve

$$B_2^{\beta}(1) = \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_3 & \beta a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_3 - \beta a_4$$

olur. Ayrıca, $t = 3, n = 1$ ve $\lambda = 1$ için,

$$|H_3(1)| \leq |a_3||a_2 a_4 - a_3{}^2| + |a_4||a_2 a_3 - a_4| + |a_5||a_3 - a_2{}^2| \tag{3.87}$$

dir.

3.6.7. Teorem. $f \in \mathcal{R}(q)$ olsun. γ reel sayısı için,

$$\left|H_2^{\gamma}(1)\right| \leq 2max\left\{\frac{1}{[3]_q}, \left|\frac{2\gamma}{[2]_q^2} - \frac{1}{[3]_q}\right|\right\}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

İspat. $f \in \mathcal{R}(q)$ ise,

$$a_2 = \frac{c_1}{[2]_q} a_3 = \frac{c_2}{[3]_q} a_4 = \frac{c_3}{[4]_q} \tag{3.88}$$

dur. Dolayısıyla, $v = \frac{\gamma[3]_q}{[2]_q^2}$ olmak üzere

$$\left|H_2^{\gamma}(1)\right| = |a_3 - \gamma a_2^2| = \left|\frac{c_2}{[3]_q} - \gamma \frac{c_1^2}{[2]_q^2}\right|$$

$$= \frac{1}{[3]_q} |c_2 - v c_1^2|$$

dir. Lemma 2.2.5 den,

$$|a_3 - \gamma a_2^2| \le \begin{cases} \dfrac{2}{[3]_q} - \dfrac{4\gamma}{[2]_q^2}, & \gamma \le 0 \\ \dfrac{2}{[3]_q}, & 0 \le \gamma \le \dfrac{[2]_q^2}{[3]_q} \\ \dfrac{4\gamma}{[2]_q^2} - \dfrac{2}{[3]_q}, & \gamma \ge \dfrac{[2]_q^2}{[3]_q} \end{cases}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.6.7 de $\gamma = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.6.8. Sonuç. $f \in \mathcal{R}(q)$ olsun.

$$|H_2(1)| \le \frac{2}{[3]_q} \tag{3.89}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

3.6.9. Teorem. $f \in \mathcal{R}(q)$ olsun. β reel sayısı için,

$$\left|B_2^\beta(1)\right| \le 2max\left\{\frac{\beta}{[4]_q}, \left|\frac{2}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{[4]_q}\right|\right\}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

İspat. (3.88) kullanılarak

$$\left|B_2^\beta(1)\right| = |a_2 a_3 - \beta a_4| = \left|\frac{c_1 c_2}{[2]_q[3]_q} - \beta \frac{c_3}{[4]_q}\right|$$

elde edilir. Lemma 2.2.4 den, c_2 ve c_3 yerine yazıldığında,

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| = \left|\left(\frac{1}{2[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{4[4]_q}\right)c_1^3 + \left(\frac{c_1}{2[2]_q[3]_q} - \frac{\beta c_1}{2[4]_q}\right)(4-c_1^2)x\right.$$
$$\left. + \frac{\beta}{4[4]_q}c_1(4-c_1^2)x^2 - \frac{\beta}{2[4]_q}(4-c_1^2)(1-|x|^2)z\right|$$

olur. p, q, a, b reel sayılar olmak üzere $|pa + pb| \leq |p||a| + |p||b|$; $(c+a) \geq (c-a)$ ve $|z| < 1$ olduğu kullanılarak ve ayrıca $\rho = |x| \leq 1$ için, $|c_1| = c \in [0,2]$ alınarak,

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{2[4]_q}\right|c^3 + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{[4]_q}\right|(4-c^2)c\rho$$
$$+ \frac{\beta}{4[4]_q}c(4-c^2)\rho^2 + \frac{\beta}{2[4]_q}(4-c^2)(1-\rho^2) \tag{3.90}$$

elde edilir. İlk olarak; $\beta < \frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ ise, (3.90) ifadesi

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{2[4]_q}\right)c^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{[4]_q}\right)(4-c^2)c\rho$$
$$+ \frac{\beta}{4[4]_q}(4-c^2)(c-2)\rho^2 + \frac{\beta}{2[4]_q}(4-c^2) \tag{3.91}$$
$$= F(\rho)$$

olur. $\beta < \frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ olduğundan, $F(\rho)$ nun ekstrem noktası $\rho = \frac{c}{2-c}\left(\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q\beta} - 1\right)$ dir.

Şimdi,

$$G_1(c) = F(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{2[4]_q}\right)c^3 - \frac{\beta}{2[4]_q}c^2 + \frac{2\beta}{[4]_q},$$

$$G_2(c) = F(1) = \left(\frac{2}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{[4]_q}\right)c,$$

ve

$$G_3(c) = F\left(\frac{c}{2-c}\left(\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q\beta} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{[4]_q}{4[2]_q^2[3]_q^2\beta}c^3 + \left(\frac{[4]_q}{2[2]_q^2[3]_q^2\beta} - \frac{1}{[2]_q[3]_q}\right)c^2 + \frac{2\beta}{[4]_q}$$

dir.

Basit hesaplamalar ile $G_3(c) \leq G_3(2) = \frac{4[4]_q}{[2]_q^2[3]_q^2\beta} - \frac{4}{[2]_q[3]_q} + \frac{2\beta}{[4]_q}$ iken $G_1(c) \leq G_2(c) \leq G_2(2) = \frac{4}{[2]_q[3]_q} - \frac{2\beta}{[4]_q}$ olduğu bulunur. Dolayısıyla, $\beta < \frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ için, maksimum fonksiyonel $\frac{4}{[2]_q[3]_q} - \frac{2\beta}{[4]_q}$ dur. Yani, $\beta < \frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ için

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| \leq \frac{4}{[2]_q[3]_q} - \frac{2\beta}{[4]_q}$$

dur. İkinci olarak; $\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} < \beta < \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ ise,

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{2[4]_q}\right)c^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{[4]_q} - \frac{1}{[2]_q[3]_q}\right)(4-c^2)c\rho$$
$$+ \frac{\beta}{4[4]_q}(4-c^2)(c-2)\rho^2 + \frac{\beta}{2[4]_q}(4-c^2)$$
$$= F(\rho)$$

olur. $\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} < \beta < \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ olduğundan, $F(\rho)$ nun ekstrem noktası $\rho = \frac{c}{2-c}\left(1 - \frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q\beta}\right)$ dır.

$$G_1(c) = F(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{2[4]_q}\right)c^3 - \frac{\beta}{2[4]_q}c^2 + \frac{2\beta}{[4]_q},$$

$$G_2(c) = F(1) = \left(\frac{1}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{2[4]_q}\right)c^3 + \left(\frac{3\beta}{[4]_q} - \frac{2}{[2]_q[3]_q}\right)c,$$

ve

$$G_3(c) = F\left(\frac{c}{2-c}\left(1 - \frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q\beta}\right)\right)$$
$$= \frac{[4]_q}{4[2]_q[3]_q\beta}c^3 + \left(\frac{[4]_q}{2[2]_q[3]_q\beta} - \frac{1}{[2]_q[3]_q}\right)c^2 + \frac{2\beta}{[4]_q}$$

dur.

Dolayısıyla, $\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} < \beta < \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ için, maksimum fonksiyonel $\frac{2\beta}{[4]_q}$ dur. Yani,

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| \leq \frac{2\beta}{[4]_q}, \qquad \frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} < \beta < \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q} \text{ için}$$

dur.

Son olarak; $\beta > \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ ise, (3.91) den

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| \leq \left(\frac{\beta}{4[4]_q} - \frac{1}{2[2]_q[3]_q}\right)c^3 + \left(\frac{\beta}{[4]_q} - \frac{1}{[2]_q[3]_q}\right)\frac{c}{2}(4-c^2)\rho$$
$$+\frac{\beta(c-2)}{4[4]_q}(4-c^2)\rho^2 + \frac{\beta}{2[4]_q}(4-c^2)$$
$$= F(\rho)$$

elde edilir. $\beta > \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ olduğundan, $F(\rho)$ nun ekstrem noktası $\rho = \frac{c}{2-c}\left(\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q\beta} - 1\right)$ dir. Şimdi,

$$G_1(c) = F(0) = \left(\frac{\beta}{4[4]_q} - \frac{1}{2[2]_q[3]_q}\right)c^3 - \frac{\beta}{2[4]_q}c^2 + \frac{2\beta}{[4]_q},$$

$$G_2(c) = F(1) = \left(\frac{\beta}{4[4]_q} - \frac{1}{2[2]_q[3]_q}\right)c^3 + \left(\frac{\beta}{[4]_q} - \frac{1}{[2]_q[3]_q}\right)\frac{c}{2}(4-c^2)$$
$$+\frac{\beta(c-2)}{4[4]_q}(4-c^2) + \frac{\beta}{2[4]_q}(4-c^2)$$

ve

$$G_3(c) = F\left(\frac{c}{2-c}\left(\frac{[4]_q}{[2]_q[3]_q\beta} - 1\right)\right)$$
$$= \left(\frac{[4]_q}{4[2]_q^2[3]_q^2\beta} - \frac{1}{[2]_q[3]_q} + \frac{\beta}{2[4]_q}\right)c^3 + \left(\frac{[4]_q}{4[2]_q^2[3]_q^2\beta} - \frac{1}{[2]_q[3]_q}\right)c^2 + \frac{2\beta}{[4]_q}$$

dur. $\beta > \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ için, maksimum fonksiyonel $\frac{2\beta}{[4]_q} - \frac{4}{[2]_q[3]_q}$ dur. Yani, $\beta > \frac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q}$ için

$$\left|B_2^\beta(1)\right| \leq \frac{2\beta}{[4]_q} - \frac{4}{[2]_q[3]_q}$$

dur. Dolayısıyla,

$$\left|B_2^\beta(1)\right| \leq \begin{cases} \dfrac{4}{[2]_q[3]_q} - \dfrac{2\beta}{[4]_q}, & \beta < \dfrac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} \\ \dfrac{2\beta}{[4]_q}, & \dfrac{[4]_q}{[2]_q[3]_q} < \beta < \dfrac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q} \\ \dfrac{2\beta}{[4]_q} - \dfrac{4}{[2]_q[3]_q}, & \beta > \dfrac{2[4]_q}{[2]_q[3]_q} \end{cases} \tag{3.92}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.6.9 da $\beta = 1$ alınarak, aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.6.10. Sonuç. $f \in \mathcal{R}(q)$ olsun.

$$|B_2(1)| \leq \frac{2}{[4]_q} \tag{3.93}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

3.6.11. Teorem. $f \in \mathcal{R}(q)$ olsun.

$$|H_2(2)| \leq \frac{4}{[3]_q^2}$$

dir (Karahüseyin ve ark. 2017).

İspat. (3.88) den,

$$|H_2(2)| = |a_2 a_4 - a_3^2| = \left| \frac{c_1 c_3}{[2]_q [4]_q} - \frac{c_2^2}{[3]_q^2} \right| \tag{3.94}$$

olur. Lemma 2.2.4 ve (3.94) den,

$$\begin{aligned} |H_2(2)| = \frac{1}{[2]_q [4]_q} \Bigg| &\frac{1}{4}\left(1 - \frac{[2]_q [4]_q}{[3]_q^2}\right) c_1^4 + \left(1 - \frac{[2]_q [4]_q}{[3]_q^2}\right) \frac{c_1^2 (4 - c_1^2) x}{2} \\ &+ \frac{c_1 (1 - |x|^2)(4 - c_1^2) z}{2} - \frac{c_1^2 (4 - c_1^2) x^2}{4} - \frac{[2]_q [4]_q}{[3]_q^2} \frac{(4 - c_1^2)^2 x^2}{4} \Bigg| \end{aligned}$$

elde edilir. $|c_1| = c$ alınırsa,

$$\begin{aligned} |H_2(2)| \leq \frac{1}{[2]_q [4]_q} \Bigg\{ &\frac{1}{4}\left(1 - \frac{[2]_q [4]_q}{[3]_q^2}\right) c^4 + \frac{c(4 - c^2)}{2} + \left(1 - \frac{[2]_q [4]_q}{[3]_q^2}\right) \frac{c^2 (4 - c^2) \rho}{2} \\ &+ \frac{c(c - 2)(4 - c^2) \rho^2}{4} + \frac{[2]_q [4]_q}{[3]_q^2} \frac{(4 - c^2)^2 \rho^2}{4} \Bigg\} \\ = F(c, \rho) \qquad & \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer yandan,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{1}{[2]_q[4]_q}\left\{\left(1 - \frac{[2]_q[4]_q}{[3]_q^2}\right)\frac{c^2(4-c^2)}{2} + \frac{c(c-2)(4-c^2)\rho}{4} + \frac{[2]_q[4]_q}{[3]_q^2}\frac{(4-c^2)^2\rho}{4}\right\}$$

dür. Yani, $F(c,\rho)$, $[0,1]$ aralığında artandır ve böylece $F(c,\rho) \leq F(c,1)$ olur. Bu nedenle,

$$F(c,1) = \frac{1}{[2]_q[4]_q}\left\{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{[2]_q[4]_q}{[3]_q^2}\right)c^4 + \left(3 - \frac{4[2]_q[4]_q}{[3]_q^2}\right)c^2 + \frac{4[2]_q[4]_q}{[3]_q^2}\right\} = G(c) \tag{3.95}$$

dir. Daha sonra, (3.95) kullanılarak basit hesaplamalar ile

$$G'(c) = \frac{2c}{[2]_q[4]_q}\left[\left(3 - \frac{4[2]_q[4]_q}{[3]_q^2}\right) - \left(1 - \frac{[2]_q[4]_q}{[3]_q^2}\right)c^2\right] < 0$$

olur. $c \in [0,2]$ için $G(c) \leq G(0)$ olduğundan, maksimum $G(c) = G(0)$ dır.

(3.89), (3.93), Lemma 2.2.3 ve Teorem 3.6.11 den, Teorem 3.6.12 elde edilir.

3.6.12. Teorem. $f(z) \in \mathcal{R}(q)$ ise,

$$|H_3(1)| \leq \frac{8}{[3]_q^3} + \frac{4}{[4]_q^2} + \frac{4}{[3]_q[5]_q}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

4. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde, analitik yalınkat fonksiyonlara q-türev operatörü uygulanarak yeni bir alt sınıf tanımlanmıştır.

Tezin üçüncü bölümü, analitik yalınkat fonksiyonların katsayı tahminleri üzerinedir. Bu bölüm altı alt başlıktan oluşmaktadır. Bu alt başlıklarda çeşitli yazarlar tarafından tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları verilmiştir. Bu bölümün altıncı kısmında $\mathcal{R}(q)$ sınıfı ve Hankel determinantı tanımlamış, q-operatör kullanılarak Hankel determinantının bazı özel hallerinde alabileceği maksimum değerler hesaplanmıştır.

İlk olarak; $f \in \mathcal{R}(q)$ olmak üzere γ reel sayısı için,

$$\left|H_2^{\gamma}(1)\right| \leq 2max\left\{\frac{1}{[3]_q}, \left|\frac{2\gamma}{[2]_q^2} - \frac{1}{[3]_q}\right|\right\}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

İkinci olarak; $f \in \mathcal{R}(q)$ olmak üzere,

$$|H_2(1)| \leq \frac{2}{[3]_q}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

Üçüncü olarak; $f \in \mathcal{R}(q)$ olmak üzere β reel sayısı için,

$$\left|B_2^{\beta}(1)\right| \leq 2max\left\{\frac{\beta}{[4]_q}, \left|\frac{2}{[2]_q[3]_q} - \frac{\beta}{[4]_q}\right|\right\}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

Dördüncü olarak; $f \in \mathcal{R}(q)$ olmak üzere,

$$|B_2(1)| \leq \frac{2}{[4]_q}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

Beşinci olarak; $f \in \mathcal{R}(q)$ olmak üzere,

$$|H_2(2)| \leq \frac{4}{[3]_q^2}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

Altıncı ve son olarak; $f \in \mathcal{R}(q)$ olmak üzere,

$$|H_3(1)| \leq \frac{8}{[3]_q^3} + \frac{4}{[4]_q^2} + \frac{4}{[3]_q[5]_q}$$

dur (Karahüseyin ve ark. 2017).

KAYNAKLAR

Agrawal, S., Sahoo, S. K. 2015. A generalization of starlike functions of order alpha. **arXiv: 1404.3988v2** [math. CV].

Annaby, M. H., Mansour, Z. S. 2012. q-Fractional Calculus and Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 318 pp.

Aral, A., Gupta, V., Agarwal, R. P. 2013. Applications of q-Calculus in Operator Theory. Springer Science + Business Media, New York, 262 pp.

Babalola, K. O. 2013. On coefficient determinants with Fekete-Szegö parameter. *Applied Mathematics e-Notes*, 13: 92-99.

Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vernitteln. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math.*, 940-955.

Engel, O., Naicu, C. 2016. About a generalized class of close-to-convex functions defined by the q-difference operator. *Scientific Bulletin of the "Petru Major" University of Tirgu Mureş*, 13: 30-34.

Ezeafulukwe, U. A., Darus, M. 2015. Certain properties of q-hypergeometric functions. *Inter. J. Math. Math. Sci.*, Article ID. 489218: 9 pages.

Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions, Vols I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 556 pp.

Graham, I., Varolin, D. 1996. Bloch Constants in One and Several Variables, *Pacif. J. Math.*, 174, 347-357 pp.

Grenander, U., Szegö, G. 1958. Toeplitz forms and their applications, California Monographs in Mathematical Sciences, Univ. California Press, Berkeley.

İsmail, M. E. H., Merkes, E., Styer, D. 1990. A generalization of starlike functions. *Complex Variables Theory Appl.*, 14: 77-84.

Jackson, F. H. 1908. On q-functions and a certain difference operator. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 46: 253-281.

Jackson, F. H. 1910. On q-definite integrals. *Quart J. Pure Appl. Math.*, 41: 193-203.

Janowski, W. 1973. Some extremal problems for certain families of analytic functions. *Ann. Polinici Math.*, 28:297-326.

Karahüseyin, Z., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017. On $H_3(1)$ hankel determinant for univalent functions defined by using q-derivative operator. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, baskıda: 9 pages.

Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebeger analytischer kurven. *Nach. Ges. Wiss.* Gottingen, 191-210.

Krillov, A. N. 1995. Dilogarithm identities. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, 118: 61-142.

Ma, M., Minda, D. 1994. A unified treatment of some special classes of univalent functions: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Ed.: Li, Z., Ren, F., Yang, L., Zhan, S., pp:157-169.

Nehari, Z. 1952. Conformal Mapping, Mcgraw-Hill, New York.

Noonan, J. W., Thomas, D. K. 1976. On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 223(2): 337-346.

Polatoğlu, Y. 2016. Growth and distortion theorems for generalized q-starlike functions. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 5: 7-12.

Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Raghavendar, K., Swaminathan, A. 2012. Close-to-convexity of basic hypergeometric functions using their Taylor coefficients. *J. Math. Appl.*, 35: 111-125.

Reade, M. O. 1955. On close-to-convex univalent functions. *Michigan Math. J.*, 3(1): 59-62.
Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis*, University of Göttingen, Germany.
Ronning, F. 1993. Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118: 189-196.
Sahoo, S. K., Sharma, N. L. 2014. On a generalization of close-to-convex functions. **arXiv: 1404.3268v1** [math. CV].
Selvakumaran, K. A., Purohit, S. D., Secer, A. 2014. Majorization for a class of analytic functions defined by q-differentiation. *Math. Problems Eng.*, 2014: 5 pages.
Srivastava, H. M., Owa, S. 1989. Univalent functions, Fractional calculus, and Their Application, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, and Toronto.
Uçar, H. E. 2016. Coefficient inequality for q-starlike functions. *Applied Mathematics and Computation*, 276: 122-126.
Uzoamaka, A., Ezeafulukwe, U. A., Darus, M. 2015. A note on q-calculus. *Fasciculi Mathematici*, 10(1515): 54-63.
Wongsaijai, B., Sukantamala, N. 2016. Certain Properties of Some Families of Generalized Starlike Functions with respect to q-Calculus. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, Article ID. 6180140: 8 pages.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeliha KARAHÜSEYİN

Doğum Yeri ve Tarihi : Trabzon, 28.07.1990

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Trabzon Yunus Emre Lisesi 2005-2007

Lisans : Akdeniz Üniversitesi 2009-2013

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Trabzon Çukurçayır Ortaokulu 2014-2015

İletişim : karahuseyinzeliha@gmail.com

Yayınları :

Karahüseyin, Z., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017. On $H_3(1)$ hankel determinant for univalent functions defined by using q-derivative operator. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, baskıda: 9 pages.

Karahüseyin, Z., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017. On the Coefficient Problem of Analytic Functions associated with Univalent Functions. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 July 2017, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.

Karahüseyin, Z., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017. On $H_3(1)$ hankel determinant for univalent functions defined by using q-derivative operator. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 July 2017, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

TEZ ÇOĞALTMA VE ELEKTRONİK YAYIMLAMA İZİN FORMU

Yazar Adı Soyadı	Zeliha KARAHÜSEYİN
Tez Adı	ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLARIN q DİFERANSİYEL OPERATÖRÜ KULLANILARAK TANIMLANAN BAZI ALT SINIFLARI
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Tez Türü	Yüksek Lisans
Tez Danışman(lar)ı	Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
Çoğaltma (Fotokopi Çekim) izni	☐ Tezimden fotokopi çekilmesine izin veriyorum ☒ Tezimin sadece içindekiler, özet, kaynakça ve içeriğinin % 10 bölümünün fotokopi çekilmesine izin veriyorum ☐ Tezimden fotokopi çekilmesine izin vermiyorum
Yayımlama izni	☐ Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin veriyorum ☐ Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasının ertelenmesini istiyorum 1 yıl ☐ 2 yıl ☐ 3 yıl ☒ ☐ Tezimin elektronik ortamda yayınlanmasına izin vermiyorum.

Hazırlamış olduğum tezimin belirttiğim hususlar dikkate alınarak, fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere Uludağ Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı tarafından hizmete sunulmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Tarih : …/…/20..

İmza :