ÖZET

Bu çalışma esas olarak, kompleks fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutan, fen ve mühendislikte bir çok uygulama alanı olan konform dönüşümleri ayrıntılı inceleme temeline kurulmuştur.

Çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde konform dönüşümün tanımı diffeomorfizme bağlı olarak verildi. Kompleks düzlemde bir bölgede konform olma özelliği analitiklik ve ünivalent olmaya bağlı olarak ifade edildi. Genişletilmiş kompleks düzlemde konform dönüşümlerin tipi belirlendi. Konform dönüşümlerin temel teoremi sayılan Riemann dönüşüm teoremi verildi.

Üçüncü bölümde, konformal modül tanımlanarak bazı özellikleri verildi. Konformal modülden faydalanarak Riemann dönüşüm teoreminin genellemesi olan birim dairenin konform genişlemesiyle ilgili Caratheodory-Osgood teoreminin modern ispatı verildi.

Son bölümde, poligonlar üzerine konform dönüşümler için Schwarz-Christoffel formülü verilerek çeşitli uygulamaları yapıldı. Ayrıca basit bağlantılı bölgeler arasında konform dönüşüm örnekleri verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Konform Dönüşümler, Konformal Modül ve Ünivalent Fonksiyonlar.

ABSTRACT

This work as bases is established investigation based on conformal mappings, which are taken an important place in complex analysis and which have applications on science and engineering.

Our work is formed by four chapters. In first chapter, basic definition and theories, which will be used in other chapters, were given. In second chapter, definition of conformal mapping was given depending on diffeomorphisms. In the complex plane, the link between the conformal mappings and analytic univalent functions was established. In the extended complex plane, the type of the conformal mappings was determined. Riemann mapping theorem, which is fundamental theorem in the conformal mappings, was given.

In third chapter, conformal modulo was defined and its some properties were given. Glasses of functions which typically real, one direction convex and star like are defined and features of these functions are examined. Upper bound for maximum modules of these functions and its derivatives were given. The modern proof of the theorem Caratheodory-Osgood which is generalization of Riemann mapping theorem was given.

In last chapter, the Schwarz-Christoffel formula and its applications were given. Also, conformal mappings examples between simple connected were given.

KEYWORDS: Conformal Mappings, Conformal Modulus and Univalent Functions.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve sonuçlar verilecektir. Bu sonuçlardan bazıları önemine binaen ispatlanarak verilmiştir.

1.1. Kompleks Düzlemin Topolojisi

z_0, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde sabit bir nokta ve $0 < r < \infty$ olmak üzere

$$\Delta(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| < r \}$$

$$\overline{\Delta}(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| \leq r \}$$

$$\Delta^*(z_0, r) = \{ z : 0 < |z - z_0| < r \}$$

$$\partial\Delta(z_0, r) = \{ z : |z - z_0| = r \}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli ve r yarıçaplı *açık disk*, *kapalı disk*, *delinmiş açık disk* ve *çember* denir (Pakla 1991).

$A \subset \mathbb{C}$ ve $z \in A$ için $\Delta(z, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z noktasına A kümesinin bir *iç noktası*, bütün noktaları iç nokta olan bir kümeye *açık küme* ve tümleyeni açık olan kümelere de *kapalı küme* denir.

Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesini bulunduran kapalı kümelerin en darına A kümesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A kümesinin bulundurduğu en geniş açık kümeye, başka bir deyişle A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir ve $\overset{o}{A}$ ile gösterilir.

$A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere her bir $\Delta(z, r)$ açık diski ile A ve A nın tümleyeni olan A^t kümesinin kesişimi boş kümeden farklı ise $z \in \mathbb{C}$ noktasına A kümesinin bir *sınır noktası* denir ve A kümesinin sınır noktalarının kümesi ∂A ile gösterilir. Gerçekte $\partial A = \overline{A} - \overset{o}{A}$ dır.

(z_n) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün n doğal sayıları için $z_n \in \Delta(z_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa (z_n) dizisine z_0 noktasına *yakınsaktır* denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ veya $z_n \to z_0$ ile gösterilir. (z_n) kompleks sayıların bir dizisi olmak üzere bir z_0 noktasının her $\Delta(z_0,\varepsilon)$ komşuluğu dizinin sonsuz çoklukta terimini bulunduruyorsa z_0 noktasına (z_n) dizisinin bir *yığılma* noktası denir. Limit ile kapanış arasındaki şu sonuç önemlidir: $z_0 \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ olacak şekilde A da bir (z_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

$A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$f[A \cap \Delta(z_0,\delta)] \subset \Delta(f(z_0),\varepsilon)$$

bağıntısını sağlayan bir $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer her $z \in A$ noktası için

$$f[A \cap \Delta(z,\delta)] \subset \Delta(f(z),\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesinde *düzgün süreklidir* denir. Eğer $\lim z_n = z_0$ iken $\lim f(z_n) = f(z_0)$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *dizisel süreklidir* denir. $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde dizisel süreklilik ile süreklilik bir birini gerektirir.

$A \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z \in A$ için $|z| \le m < \infty$ olacak şekilde $m > 0$ sayısı varsa A kümesine *sınırlıdır* denir. Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesinde her dizinin yığılma noktası yine A kümesinde ise A kümesine *kompakt* veya *dizisel kompakt* denir. $\mathbb{C}$ de kompaktlığın genel tanımı ile dizisel kompaktlık tanımları denktirler. Genelde bu denklik bütün metrik uzaylar için geçerlidir. Ayrıca, $\mathbb{C}$ de bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır. Bu durum ise bütün Öklid uzaylarında geçerlidir.

$\mathbb{C}$ de bir A kümesi ayrık açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa A kümesine *bağlantılı*, açık ve bağlantılı bir kümeye de *bölge* denir. Eğer bir bölgenin tümleyeni açık ve bağlantılı ise bu bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir.

$a \le t \le b$ aralığının $z = \varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yay* veya *eğri* denir. Her $t \in [a,b]$ için $\varphi'(t) \ne 0$ ise eğriye *düzgün eğri* denir. Eğer eğri $[a,b]$ aralığında düzgün değil fakat $[a,b]$ nin alt aralıklarında düzgün ise eğriye *parçalı düzgün eğri* denir. Eğer bir eğri sonlu uzunluğa sahip ise bu eğriye *düzeltilebilir* *(rectifiable) eğri*, kendi kendini kesmeyen eğriye *Jordan eğrisi* adı verilir. Uç noktaları bitişik bir eğriye *kapalı eğri*, sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Jordan eğrisinin içine *Jordan bölgesi* denir. Bir Jordan eğrisi düzlemi eğrinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Bu durum *Jordan Eğri Teoremi* olarak bilinir.

Kompleks düzlemde parçalı düzgün kapalı bir γ eğrisi ve bir $z \in \mathbb{C} - \gamma$ noktası için

$$n\,(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

tamsayısına γ eğrisinin z etrafındaki *dönme dayısı* (*indeks*) denir. Kompleks düzlemde kapalı parçalı düzgün eğrilerin sonlu bir dizisine bir *devir* denir. U kompleks düzlemde açık bir küme ve Γ U da bir devir olsun. Her $z \in \mathbb{C} - U$ için $n(\Gamma, z)$ devir sayısı için $n(\Gamma, z) = 0$ ise Γ devrine U da *sıfıra homologdur* denir.

1.2. Diferansiyellenebilme ve Analitiklik

$A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi için $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 A kümesinin bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{veya} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* veya *türevlenebilir* denir. Limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* adı verilir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Diferansiyellenebilirliği şöyle de tanımlayabiliriz: $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ bir iç nokta olsun. $E : A \to \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|E(z)|}{|z - z_0|} = 0 \tag{1.1}$$

özelliğinde bir fonksiyon olmak üzere eğer her $z \in A$ için

$$f(z) = f(z_0) + c\,(z - z_0) + E(z)$$

olacak şekilde bir c kompleks sayısı varsa f ye z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* denir. Bu tanımın ilk tanıma denk olduğu açıktır. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirse $f'(z_0) = f_x(z_0) = -i\, f_y(z_0)$ dır.

$A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve A kümesinin boş olmayan açık bir alt kümesi U olsun. Eğer f fonksiyonu U kümesinin her noktasında diferansiyellenebilirse f fonksiyonuna U da *analitiktir* denir.

Kompleks değişkenli bir fonksiyonun analitikliği ile ilgili aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem 1.2.1. $A \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde tanımlı bir $f = u + iv$ fonksiyonu A da her yerde u_x, u_y, v_x, v_y sürekli kısmi türevlere sahip olsun. f fonksiyonun A da analitik olması için gerek ve yeter şart A da Cauchy - Riemann denklemleri denilen

$$u_x = v_y \text{ ve } u_y = -v_y$$

denklemlerinin sağlanmasıdır. Bu durumda A da $f'(z) = f_x(z) = -i\, f_y(z)$ dır.

$A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ bir iç nokta olsun. Eğer $z \in A$ için

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + d(\bar{z} - \bar{z}_0) + E(z)$$

olacak biçimde c ve d kompleks sayıları varsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *reel anlamda diferansiyellenebilir* denir. Burada $E(z)$, (1.1) bağıntısını sağlayan bir fonksiyondur. Gerçekte $f = u + iv$ fonksiyonu için c ve d sayıları

$$c = f_z(z_0) = \frac{1}{2}\left[u_x(z_0) + v_y(z_0) + i(v_x(z_0) - u_y(z_0))\right]$$

ve

$$d = f_{\bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}[u_x(z_0) - v_y(z_0) + i(u_y(z_0) + v_x(z_0))]$$

olarak hesaplanır. Diferansiyellenebilen bir fonksiyonun reel anlamda diferansiyellenebilir olduğu ve reel anlamda diferansiyellenebilen bir f fonksiyonunun diferansiyellenebilir olması için $f_{\bar{z}} = 0$ olmasının gerektiği açıktır. Başka bir deyişle reel anlamda diferansiyellenebilen ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan her fonksiyon diferansiyellenebilirdir. Daha açık bir ifadeyle u ve v birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip iki reel değerli fonksiyon ise $f = u + iv$ reel anlamda diferansiyellenebilirdir. Örneğin $f(z) = |z|^2 + (z/\bar{z})$ fonksiyonu $\mathbb{C} - \{0\}$ da reel anlamda diferansiyellenebilir olmasına rağmen sadece $z = \pm 1$ noktalarında f fonksiyonu diferansiyellenebilirdir.

1.3. Cauchy Teoremi ve Sonuçları

Teorem 1.3.1 (Cauchy Teoremi). D kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ve f, D de analitik bir fonksiyon olsun. D de bulunan her parçalı düzgün kapalı γ yolu için

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

dır (Başkan 1996).

Cauchy teoreminin daha genel bir biçimi olan aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 1.3.2. R kompleks düzlemde kapalı bir dikdörtgen ve $f : R \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu R nin içinde analitik olsun. Bu takdirde

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

dır (Başkan 1996).

Teorem 1.3.3 (Cauchy Eşitsizliği). f, fonksiyonu $\Delta = \Delta(z_0, r)$ açık dairesinde analitik ve Δ da $|f(z)| \le M < \infty$ olsun. Bu takdirde, her bir pozitif k tamsayı ve $z \in \Delta$ için

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!M\,r}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

dir. Özel olarak $|f^{(k)}(z_0)| \le k!M\,r^{-k}$ dır (Başkan 1996).

Teorem 1.3.4 (Cebirin Temel Teoremi). Herhangi bir $n \ge 1$ dereceli

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

polinomunun $\mathbb{C}$ de bir kökü vardır (Başkan 1996).

Teorem 1.3.5 (Maksimum Modül Teoremi). Sınırlı bir D bölgesinde analitik ve sınırında sürekli sabit olmayan bir fonksiyon maksimum modülünü D bölgesinin sınırında alır.

Maksimum modül teoreminin basit fakat önemli bir sonucu, $f(z)/z$ fonksiyonuna maksimum modül teoremini uygulamakla elde edilen Schwartz lemmasıdır:

Teorem 1.3.6 (Schwartz Lemması). f fonksiyonu $\Delta = \Delta(0,1)$ açık birim dairesinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde Δ dairesinde $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için geçerlidir.

Tanım 1.3.7. $D \subset \mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Her $z \in D$ noktası için $e^{L(z)} = z$ olacak şekilde $L : D \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonuna D bölgesinde logaritma fonksiyonunun bir *dalı* denir.

Teorem 1.3.8. $D \subset \mathbb{C}$ de bir bölge olsun. D bölgesinin basit bağlantılı olması için gerek ve yeter şart D bölgesinde analitik ve kutbu olmayan her f fonksiyonu için $\operatorname{Log} f(z)$ fonksiyonunun D bölgesinde bir tek dalının olmasıdır.

Düzlemde açık bir U kümesinde tanımlı reel değerli bir u fonksiyonu $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna U kümesinde *harmoniktir* denir.

Teorem 1.3.9. D kompleks düzlemde açık bir daire, $h : \partial D \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve u da D de h fonksiyonunun Poisson integrali olsun. Bu taktirde *u, D* de harmoniktir ve her bir $\zeta \in \partial D$ için $\lim\limits_{z \to \zeta} u(z) = h(\zeta)$ dır. Özellikle, D Dirichlet problemi için uygundur (Nehari 1952).

Teorem 1.3.10. (Özdeşlik Teoremi) f ve g bir D bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. Eğer D de yakınsak bir (z_n) dizisi için $f(z_n) = g(z_n)$ ise bu takdirde D de $f \equiv g$ dir.

Bu teoremden çıkarılacak bir sonuç şudur: Eğer f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik, $z_n \to z_0$ ve $f(z_n) = 0$ ise bu takdirde $f \equiv 0$ dır.

Tanım 1.3.11. Bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesi üzerinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonların sınıfı $C(U)$ ve $C(U)$ nun bir alt sınıfı F olsun. Eğer F de seçilen her bir (f_n) dizisinin U nun bütün kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsak bir (f_{n_k}) alt dizisi varsa F ye U da *normal aile* denir (Ahlfors 1966).

Teorem 1.3.12 (Montel Teoremi). Açık bir U kümesinde analitik fonksiyonların bir ailesi F olsun. F ailesinin U da lokal olarak sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde F bu kümede normal aile oluşturur (Ahlfors 1966).

1.4. Analitik Fonksiyonların Ayrık Singüleriteleri

Tanım 1.4.1. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için $f(z_0) = 0$ ise z_0 sayısına f fonksiyonunun bir *sıfırı* (kökü) denir. Eğer sabit olmayan bir f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ noktası f fonksiyonunun bir sıfırı ise f fonksiyonu D bölgesinde

$$f(z) = (z - z_0)^m \, g(z) \; ; \quad g(z_0) \neq 0 \tag{1.2}$$

biçiminde bir tek gösterime sahiptir. Burada m pozitif tamsayı ve g fonksiyonu D bölgesinde analitiktir. Burada ki m sayısına z_0 da f fonksiyonunun *sıfırının katlılığı* (mertebesi) denir. Bunun anlamı f fonksiyonu z_0 da sıfır değerini tam m defa alır. Başka bir deyişle z_0 noktasının uygun bir komşuluğunun f altındaki resmi orijin noktasının uygun bir komşuluğunu tam m defa örter (Teorem 1.4.8). 0 noktası yerine herhangi bir $w_0 = f(z_0)$ noktası için (1.2) bağıntısı $f(z) = w_0 + (z - z_0)^m \, g(z)$ biçiminde ifade edilir.

Kompleks düzlemde açık bir U kümesinin E alt kümesi, U nun hiçbir yığılma noktasını bulundurmuyorsa E kümesine U kümesinin *ayrık alt kümesi* denir. $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve her bir $w \in \mathbb{C}$ sayısı için $E_w = \{ z \in U : f(z) = w \}$ kümesi U kümesinin ayrık alt kümesi ise f fonksiyonuna U kümesinin *ayrık dönüşümü* denir.

Teorem 1.4.2 (Ayrık Dönüşüm Teoremi). Sabit olmayan bir analitik fonksiyon ayrık dönüşümdür. Bu teorem bize sabit olmayan bir analitik fonksiyonun sıfır yerlerinin ayrık olduğunu gösterir (Pakla 1991)

Bu teoremin analitik devamın presibi olan bir sonucunu verelim.

Sonuç 1.4.2. f ve g fonksiyonları bir D bölgesinde analitik ve $A \subset D$ alt kümesi D de bir limit noktasına sahip olsun. Her bir $z \in A$ için $f(z) = g(z)$ ise bu taktirde her $z \in D$ için $f(z) = g(z)$ dir.

Teorem 1.4.3. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f : U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve bir D bölgesinde f^{-1} fonksiyonunun bir dalı g olsun. Bu takdirde g fonksiyonu da analitiktir (Pakla 1991).

Tanım 1.4.4. f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik değil fakat $\Delta^*(z_0,r)$ dairesine analitik olacak şekilde $r>0$ sayısı varsa z_0 noktasına f nin *ayrık singüler noktası* denir.

Eğer z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası ise f fonksiyonu $\Delta^* = \Delta^*(z_0,r)$ delinmiş dairesinde

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{1.3}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir. Eğer (1.3) ifadesinde bütün a_{-n} katsayıları sıfır ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *kaldırılabilir singüler noktası*, eğer sonlu sayıda a_{-n} katsayıları sıfırdan farklı diğer tüm katsayılar sıfır ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *kutup noktası*, eğer sonsuz sayıda a_{-n} katsayıları sıfırdan farklı ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *esaslı singüler noktası* denir. Eğer f fonksiyonunun bir bölgede ki singüler noktaları kutup noktalarından ibaretse f ye bu bölgede *meromorf fonksiyon* denir.

Teorem 1.4.5 (Casorati-Weierstrass Teoremi). f fonksiyonu bir $\Delta^* = \Delta^*(z_0,r)$ dairesine analitik ve z_0 noktasında esaslı singüleriteye sahip olsun. Bu taktirde $f(\Delta^*)$ kompleks düzlemde yoğundur yani $\mathbb{C}$- $f(\Delta^*)$ kümesi hiçbir iç noktaya sahip değildir.

Teorem 1.4.6 (Argüment Prensibi). *f*, bir D bölgesinde meromorf bir fonksiyon ve γ, D de bulunan ve f fonksiyonunun hiçbir kutup ve sıfır yerinden geçmeyen basit kapalı bir eğri olsun. f fonksiyonunun γ içindeki sıfır ve kutup yerlerinin sayıları (katlılıklar katlılığı kadar sayılmak üzere) sırayla Z_f ve P_f ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = Z_f - P_f = n(f(\gamma),0)$$

dir.

Başka bir deyişle argüment prensibi, f fonksiyonunun γ eğrisi içindeki sıfırlarının sayısının $\Gamma = f(\gamma)$ görüntü eğrisinin orijin etrafındaki sarma sayısına eşit olduğunu ifade eder.

Teorem 1.4.7 (Rouche Teoremi). D kompleks düzlemde bir bölge, f ve g fonksiyonları D bölgesinde analitik olsun. γ, f ve g fonksiyonlarının sıfır yerlerinden geçmeyen kapalı bir eğri olmak üzere her $z \in \gamma$ için

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

ise katlı kökler katlılığı kadar sayılmak üzere f ve g fonksiyonları γ içinde aynı sayıda köke sahiptir (Pakla 1991).

Teorem 1.4.8 (Dallanmış Örtme Prensibi). Açık U kümesinde analitik bir f fonksiyonu bir $z_0 \in U$ noktasında w_0 değerini m defa almış olsun (yani $f(z) - w_0 = 0$ denkleminin z_0 noktasında m katlı kökü olsun). r pozitif sayısı, $\overline{\Delta} = \overline{\Delta}(z_0, r) \subset U$ ve her $z \in \overline{\Delta} - \{z_0\}$ için $f'(z) \neq 0$ ve $f(z) \neq w_0$ özelliklerini sağlayan yeterince küçük bir sayı olmak üzere bir $s = s(r) = \min\{|f(z) - w_0| : z \in \partial\Delta(z_0, r)\} > 0$ sayısı tanımlayalım. Bu takdirde $G = \{z \in \Delta(z_0, r) : f(z) \in \Delta(w_0, s)\}$ bir bölgedir. Üstelik, her $w \in \Delta^*(w_0, s) = \{z : 0 < |z - w_0| < s\}$ için $E_w = \{z \in \Delta(z_0, r) : f(z) = w\}$ kümesi G bölgesinin tam m noktasından oluşur ve bu noktaların her birinde f fonksiyonu w değerini tam bir katlılığında alır (Pakla 1991).

Dallanmış Örtme Prensibi bize $f(G - \{z_0\})$ görüntü kümesi $\Delta^*(w_0, s)$ kümesini tam m defa örttüğünü ifade eder. Başka bir deyişle f fonksiyonunun bir $z_0 \in U$ noktasında w_0 değerini m defa almış olması; z_0 noktasın uygun bir komşuluğunun f fonksiyonu altındaki resminin w_0 noktasının bir uygun bir komşuluğunu tam m defa örttüğünü gösterir. Bu teoreme $f(z) = z^m$ fonksiyonu $z_0 = 0$ noktası için güzel bir örnektir. Her hangi $r > 0$ sayısı için $s = r^m$ ve $G = \Delta(0, r)$ seçilirse $w \in \Delta^*(0, s)$ için E_w kümesinin elemanları w sayısının m. kuvvetten kökleridir.

Teorem 1.4.9. U, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de açık bir küme ve $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$ sürekli bir fonksiyon olsun.Bu taktirde f fonksiyonunun meromorf olması için gerek ve yeter şart $E = \{z \in U : z = \infty \ veya \ f(z) = \infty\}$ kümesinin U kümesinin ayrık alt kümesi ve f fonksiyonunun $U - E \subset \mathbb{C}$ açık alt kümesinde analitik olmasıdır (Pakla 1991).

Teorem 1.4.10. $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ analitik bir fonksiyon ise *f*, $\hat{\mathbb{C}}$ da sabittir.

Dallanmış örtme prensibinin genişletilmiş kompleks düzleme genişletilmişi aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.4.11. $f:U\to\hat{\mathbb{C}}$ meromorf bir fonksiyon ve f bir $z_0\in U$ noktasında w_0 değerini m defa almış olsun. r pozitif sayısı, $\overline{\Delta}=\overline{\Delta}(z_0,r)\subset U$ ve her $z\in\overline{\Delta}-\{z_0\}$ için $f'(z)\neq 0$, $f'(z)\neq 0$ ve $f(z)\neq w_0$ özelliklerini sağlayan yeterince küçük bir sayı olsun. $K=\partial\overline{\Delta}$ çemberi olmak üzere $\Delta(w_0,s)\cap f(K)=\phi$ olacak şekilde en büyük $s=s(r)>0$ sayısını tanımlayalım. Bu takdirde $G=\{z\in\Delta(z_0,r): f(z)\in\Delta(w_0,s)\}$ bir bölgedir. Üstelik, her $w\in\Delta^*(w_0,s)$ için $E_w=\{z\in\Delta(z_0,r): f(z)=w\}$ kümesi G bölgesinin tam m noktasından oluşur ve bu noktaların her birinde f fonksiyonu w değerini tam bir defa alır.

Teorem 1.4.12 (Açık Dönüşüm Teoremi). f, düzlemsel bir D bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu D bölgesinin bir açık dönüşümüdür. Özellikle, $f(D)$ bir bölgedir.

İspat. Bir $U\subset D$ açık kümesi için $f(U)$ kümesinin de açık olduğunu göstermeliyiz. Verilen herhangi bir $w_0\in f(U)$ noktası için ($w_0=f(z_0)$, $z_0\in U$) $\Delta(w_0,s)$ açık dairesinin $f(U)$ kümesinde kaldığını göstermeliyiz. Her bir $z\in\overline{\Delta}-\{z_0\}$ için $f(z)\neq w_0$, $f'(z)\neq 0$ ve $\overline{\Delta}=\overline{\Delta}(z_0,r)\subset U$ olacak şekilde $r>0$ sayısı seçelim. *f*, D bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olduğunda bu seçiliş mümkündür. Dallanmış örtme prensibi gereği $s=\min\{|f(z)-w_0|: z\in\partial D(z_0,r)\}$ olmak üzere $\Delta(w_0,s)$ bölgesinin her bir noktası $f(\Delta(z_0,r))$ bölgesinde yani $f(U)$ bölgesindedir. Dolayısıyla $f(U)$ açık bir kümedir. ■

Teorem 1.4.13. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer *f*, D bölgesinde ünivalent (bire bir) ise bu takdirde her $z\in D$ için $f'(z)\neq 0$ dır.

İspat. D bölgesindeki belli bir z_0 noktasını için $f'(z_0)=0$ olduğunu kabul edelim. f fonksiyonunun D bölgesinde ünivalent olması sabit olmadığını gösterir. Bu yüzden f $w_0=f(z_0)$ değerini z_0 noktasında belli bir m katlılığı ile alır. $f'(z_0)=0$ olduğundan $m\geq 2$ dir. Dallanmış örtme prensibi gereği w_0 noktasına yeterince yakın bir w noktasına ($w \neq w_0$) en azından D bölgesinde iki nokta resmedilir. Bu ise f fonksiyonunun ünivalent olması ile çelişir. ■

Teorem 1.4.14. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun ünivalent olduğu D bölgesinin z_0 noktasını bulunduran bir G alt bölgesi mevcuttur.

İspat. $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan f fonksiyonu $w_0 = f(z_0)$ değerini z_0 noktasında $m=1$ katlılığında alır. Dallanmış örtme prensibinde $U = D$ alarak $m=1$ durumu için G bölgesi z_0 noktasını bulundurur ve G bölgesi f ile $\Delta(w_0, s)$ üzerine ünivalent olarak resmedilir. ■

Teorem 1.4.15 (Ters Dönüşüm Teoremi). D kompleks düzlemde bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ ünivalent analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f^{-1} : f(D) \to D$ ters fonksiyonu da analitiktir.

İspat. Açık dönüşüm teoremi gereği $D' = f(D)$ bir bölgedir. Önce f^{-1} ters fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $z_0 \in D'$ ve $w_0 = f^{-1}(z_0)$ iken verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $f^{-1}[\Delta(z_0, \delta)] \subset \Delta(w_0, \varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ varlığını göstermeliyiz. $U \cap D \cap \Delta(w_0, \varepsilon)$ D de açık bir kümedir ve $w_0 \in U$ dur. Böylece açık dönüşüm teoremi gereği $U' = f(U)$, z_0 noktasını bulunduran D' nün açık bir alt kümesidir. $f^{-1}(U') = U$ dur. O halde f^{-1}, D' de süreklidir. $g = f^{-1}$ fonksiyonu D' bölgesinde Teorem 8.1.8 in hipotezini sağlar. Dolayısıyla f^{-1} analitiktir. ■

Teorem 1.4.16 (Hurwitz Teoremi). (f_n), bir D bölgesinde sıfırı olmayan analitik fonksiyonların bir dizisi ve D bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun D bölgesinde ya hiç sıfırı yoktur yada f özdeş olarak sıfırdır (Duren 1983).

Teorem 1.4.17. (f_n), bir D bölgesinde analitik ve ünivalent fonksiyonların bir dizisi ve D bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün olsun. Bu taktirde f fonksiyonu D bölgesinde ya ünivalent yada sabittir.

İspat. $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitiktir. Sabit olmadığını kabul ederek ünivalent olduğunu gösterelim. $z_0 \in D$ keyfi sabit bir nokta olsun. $z \neq z_0$ için $f(z) \neq f(z_0)$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $D_0 = D - \{z_0\}$ bölgesinde $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ biçiminde tanımlanan (g_n) dizisini göz önüne alalım. f_n fonksiyonları D bölgesinde ünivalent olduklarından g_n fonksiyonlarının D_0 da sıfırı yoktur. $g(z) = f(z) - f(z_0)$ olmak üzere D_0 bölgesinin kompakt alt kümelerinde $g_n \to g$ yakınsaması düzgündür. Üstelik *g,* D_0 da sıfır fonksiyonu değildir. (Eğer olsaydı f D bölgesinde ünivalent olurdu). Hurwitz teoremi gereği g fonksiyonunun D_0 da sıfırı yoktur. Yani $z \neq z_0$ için $f(z) \neq f(z_0)$ dır. Dolayısıyla f fonksiyonu D bölgesinde ünivalenttir. ■

2. KONFORM DÖNÜŞÜMLER

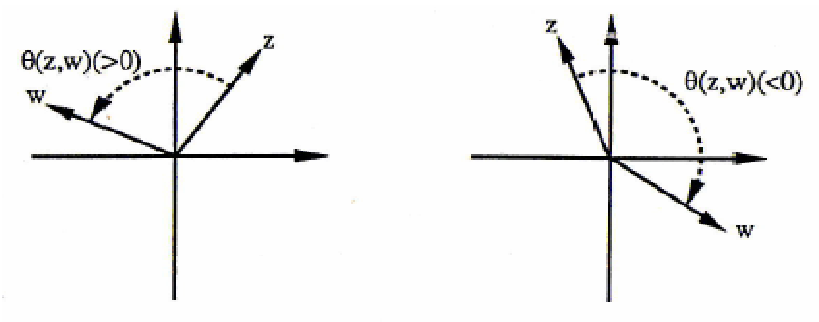
Analitik ünivalent fonksiyonlar kompleks analizde hem geometrik özellikleri hem de yaygın uygulamaları açısından önemli bir yer tutar. Bu fonksiyonlar aynı zamanda açı ölçüsünü ve yönünü korudukları için konform dönüşümler olarak adlandırılır. Tarihsel gelişimi içinde 1851 yılında Riemann, kompleks düzlemde düzlemin tamamı olmayan herhangi basit bağlantılı bir bölgeyi aynı özellikte başka bir bölge üzerine dönüştüren bir konform dönüşümün olduğunu gösterdi. Riemann Dönüşüm Teoremi olarak bilinen Riemann'ın bu buluşu, çalışmamızın bu ve gelecek bölümlerin temelini oluşturmaktadır. Riemann Dönüşüm Teoremine geçmeden önce konform dönüşüm kavramı verilip onunla analitik fonksiyon arasındaki ilişkiler incelenecek. Daha sonra Möbius dönüşümleri denilen önemli elementer konform dönüşümler üzeride durulacak. En sonunda da konform dönüşümlerin sınır davranışları incelenecek.

2.1. Eğrisel Açılar ve Diffeomorfizm

Kompleks analizde kompleks değerli bir fonksiyonun herhangi kesişen iki düzgün eğri arasındaki açının ölçüsünü ve yönünü koruması arzu edilen bir durumdur. Bu özellikteki fonksiyonlar ilginç özelliklere sahiptir. Bu kesimde adı geçen fonksiyonların sahip olduğu özelliklere ait bazı notasyonları ve terminolojisini verelim.

Tanım 2.1.1. $z,\ w\in\mathbb{C}-\{0\}$ olmak üzere $\theta(z,w)=\operatorname{Arg}(w/z)$ değerine z den w ye *yönlendirilmiş açı* denir. Buna göre, $\theta(z,w)$ değeri z ile w arasındaki en küçük açının ölçüsünü olup bu değer $(-\pi,\ \pi]$ aralığındadır. Eğer bu açının yönü z den w ya yani saat yönünün tersi ise $\theta(z,w)>0$, eğer w dan z ye yani saat yönünde ise $\theta(z,w)<0$ dır (Şekil 2.1). Buna göre $\theta(z,w)=\pi$ durumu hariç $\theta(z,w)=-\theta(w,z)$ ve $\theta(\bar{z},\overline{w})=-\theta(z,w)$ olduğu açıktır. Üstelik herhangi bir $c\in\mathbb{C}-\{0\}$ sayısı için $\theta(cz,\ cw)=\theta(z,w)$ ve $r,s\in\mathbb{R}^{+}$ için $\theta(rz,sw)=\theta(z,w)$ olur.

Elbette açıların kollarının doğru parçaları veya ışınlar olması zorunlu değildir. En genel anlamda açıların kollarının düzgün yaylar olmasını isteyeceğiz.

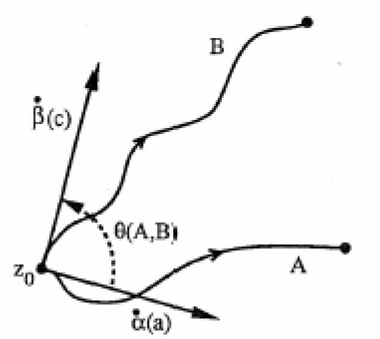


Şekil 2.1

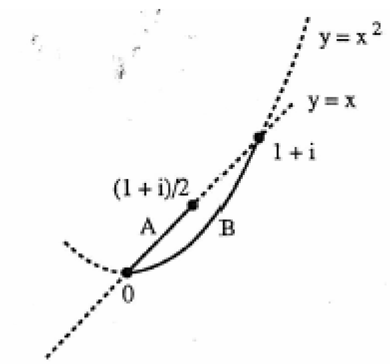
Tanım 2.1.2. Kolları A ve B olan iki düzgün eğri sırasıyla $\alpha:[a,b]\to\mathbb{C}$ ve $\beta:[c,d]\to\mathbb{C}$ düzgün iki eğri ve $\alpha(a)=\beta(c)=z_0$ olsun. $\alpha'(a)$ ve $\beta'(c)$ teğet doğruları arasındaki açıya z_0 noktasındaki *eğrisel açı* denir (Şekil 2.2). z_0 noktasına bu açının köşesi, α ve β eğrilerine eğrisel açının kolları denir.

$$\theta(\alpha,\beta)=\theta[\alpha'(a),\beta'(c)]$$

ifadesine α dan β ya *yönlendirilmiş açı ölçüsü* denir.



Şekil 2.2



Şekil 2.3

Örnek 2.1.3. Şekil 2.3 de verilen $y = x$ ve $y = x^2$ eğrileri arasındaki açının ölçüsünü bulalım. Bu iki eğrinin parametrik gösterimi sırasıyla $\alpha:[0,1/2]\to\mathbb{C}$, $\alpha(t)=t+it$ ve $\beta:[0,1]\to\mathbb{C}$, $\beta(t)=t+it^2$ olsun. Köşesi orijin olan α ve β eğrileri arasındaki açının ölçüsü;

$$\theta(\alpha,\beta)=\theta\,[\alpha'(0),\beta'(0)]=\theta(1+i,1)=\mathrm{Arg}(1/(1+i))=\mathrm{Arg}((1-i)/2)=-\pi/4$$

bulunur.

Tanım 2.1.3. $U \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: U \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ fonksiyonu U da birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. U da

$$J_f(z) = u_x(z)\, v_y(z) - u_y(z)\, v_x(z)$$

biçiminde tanımlanan reel değerli sürekli J_f fonksiyona f fonksiyonunun *Jakobiyeni* denir. Bu fonksiyonun z ve $\bar{z}$ ye göre türevleri cinsinden ifadesi

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2$$

biçimindedir. Özellikle f fonksiyonu $z_0 \in U$ noktasında diferansiyellenebilir ise $f_z(z_0) = f'(z_0)$ ve $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ olduğundan

$$J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2$$

elde edilir.

Tanım 2.1.5. $D \subset \mathbb{C}$ de bir bölge ve $f: D \to \mathbb{C}$ ünivalent fonksiyonu birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. Her $z \in D$ için $J_f(z) \neq 0$ ise f fonksiyonuna D de bir *diffeomorfizm* denir.

Eğer $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bir diffeomorfizm ise D de her yerde $J_f(z) < 0$ yada $J_f(z) > 0$ dır. Bu durum $J_f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli ve sıfır olmayan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Eğer $J_f(z) > 0$ ise f ye *yön koruyan*, $J_f(z) < 0$ ise f ye *yönü ters çeviren dönüşüm* denir. Bir f diffeomorfizminin $\overline{f}$ eşleniği için

$$J_{\overline{f}} = -J_f$$

olduğu açıktır. Buna göre f yön koruyan ise $\overline{f}$ yönü ters çeviren bir dönüşümdür.

Teorem 2.1.6. $D \subset \mathbb{C}$ de bir bölge, $f: D \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm ve $\alpha \subset D$ düzgün bir eğri olsun. Bu taktirde $f(\alpha)$ $\mathbb{C}$ de düzgün bir eğridir.

İspat. $\alpha(t) = x(t) + i\, y(t)$, $t \in [a,b]$ D de düzgün bir eğri olsun. f ünivalent ve D de birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olduğundan $\beta(t) = f(\alpha(t))$ için $\beta'(t) \neq 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Aksini kabul edelim. Yani $\beta'(t_0) = 0$ olacak şekilde bir $t_0 \in [a,b]$ mevcut olsun. Bu taktirde $z_0 = \alpha(t_0)$ için

$$0 = \beta'(t_0) = \frac{d}{dt} f(\alpha(t_0)) = \frac{d}{dt}[u(\alpha(t_0)) + iv(\alpha(t_0))]$$

$$= u_x(z_0)\, x'(t_0) + u_y(z_0)\, y'(t_0) + i[v_x(z_0)\, x'(t_0) + v_y(z_0)\, y'(z_0)]$$

olur. Bu eşitlikten

$$u_x(z_0)\ x'(t_0) + u_y(z_0)\ y'(t_0) = 0$$

$$v_x(z_0)\ x'(t_0) + v_y(z_0)\, y'(z_0) = 0$$

elde edilir. Bu son denklem sistemi $x'(t_0)$ ve $y'(t_0)$ a göre çözülecek olursa

$$x'(t_0)[u_x(z_0)\ v_y(z_0) - v_x(z_0)\ u_y(z_0)] = 0$$

ve

$$y'(t_0)\ [u_x(z_0)\ v_y(z_0) - u_y(z_0)\ v_x(z_0)] = 0$$

olur. Buradan $x'(t_0)\ J_f\ (z_0) = 0$ ve $y'(t_0)\ J_f\ (z_0) = 0$ dır. $J_f\ (z_0) \neq 0$ olduğundan $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ olmak zorundadır. Bu ise α eğrisinin düzgün olması ile çelişir. O halde her $t \in [a,b]$ için $\beta'(t) \neq 0$ olmalıdır.■

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 2.1.7. $D \subset \mathbb{C}$ de bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm olsun. f fonksiyonu D de kenarları α ve β düzgün eğrileri olan eğrisel bir açıyı, f (D) de kenarları $f(\alpha)$ ve $f(\beta)$ olan bir açıya dönüştürür.

2.2 Konform Dönüşümler

Bu kesimde konform dönüşümler çoğu kaynaklarda tanımlananın aksine diffeomorfizme bağlı olarak verilecektir.

Tanım 2.2.1: $D \subset \mathbb{C}$ de bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizm olsun. D de z_0 köşe noktasına sahip eğrisel bir açının kenarları α ve β olmak üzere

$$|\,\theta(\alpha,\beta)\,| = |\,\theta(f(\alpha), f(\beta)\,|$$

ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında *açı koruyan* denir.

Eğer z_0 noktasında $J_f(z_0) > 0$ ve $\theta(\alpha,\beta) = \theta[f(\alpha), f(\beta)]$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında *konformdur* denir. Eğer $J_f(z_0) < 0$ ve $\theta(\alpha,\beta) = \theta[f(\beta), f(\alpha)]$ ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında *ters konform* denir. Kısaca; açı ölçüsünü ve yönünü koruyan bir diffeomorfizme konform dönüşüm, açı ölçüsünü koruyan fakat yönünü ters çeviren diffeomorfizme de ters konform dönüşüm denir. Eğer her $z \in D$ noktası için f konform ise f ye D de *konform dönüşüm* denir.

Örneğin; $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, dönüşümü $\mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$ ye bir konform dönüşüm iken $f(z) = \bar{z}$ dönüşümü $\mathbb{C}$ de bir ters konform dönüşümdür.

Buradan hareketle aşağıdaki sonucu kolayca gösterebiliriz.

Sonuç 2.2.2. Bir f fonksiyonunun bir z_0 noktasında ters konform olması için gerek ve yeter şart $\overline{f}$ fonksiyonunun z_0 da konform olasıdır.

Aşağıdaki teorem bir açının z_0 noktasında yön korumasının $J_f(z_0)$ değerine bağlı ve analitik fonksiyonlar ile konform dönüşümler arasında önemli bir bağ olduğunu ifade eder.

Teorem 2.2.3. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : D \to \mathbb{C}$ bir diffeomorfizim olsun. $z_0 \in D$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) f, z_0 da diferansiyellenebilirdir;

(ii) f, z_0 da açı ölçüsünü korur ve $J_f(z_0) > 0$;

(iii) f, z_0 da konformdur.

İspat: Önce (i)'nin (ii) ve (iii)'ü gerektirdiğini gösterelim. f, z_0 da diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde $J_f(z_0) = \left| f'(z_0) \right|^2 \geq 0$ dır. $J_f(z_0) \neq 0$ olması $J_f(z_0) > 0$ olmasını gerektirir. Böylece $f'(z_0) \neq 0$ elde edilir. Şimdi açının korunduğunu gösterelim. D de köşesi z_0 olan eğrisel açının kenarları α ve β olsun. $\alpha(a) = \beta(c) = z_0$ olmak üzere α eğrisi $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$, β eğrisi $\beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ ile parametrik olarak verilmiş olsun. Bu taktirde $\alpha_1(t) = f(\alpha(t))$ ve $\beta_1(t) = f(\beta(t))$ de $f(\alpha)$ ve $f(\beta)$ eğrilerinin parametrik ifadeleridir. f z_0 da diferansiyellenebilir olduğundan

$$\alpha_1'(a) = f'(\alpha(a))\, \alpha'(a) = f'(z_0)\, \alpha'(a)$$

ve benzer şekilde $\beta_1'(c) = f'(z_0) \cdot \beta'(c)$ dir. $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \theta[f(\alpha), f(\beta)] &= \theta[\alpha_1'(a), \beta_1'(c)] = \theta[f'(z_0)\, \alpha'(a), f'(z_0)\, \beta'(c)] \\ &= \theta[\alpha'(a), \beta'(c)] = \theta(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

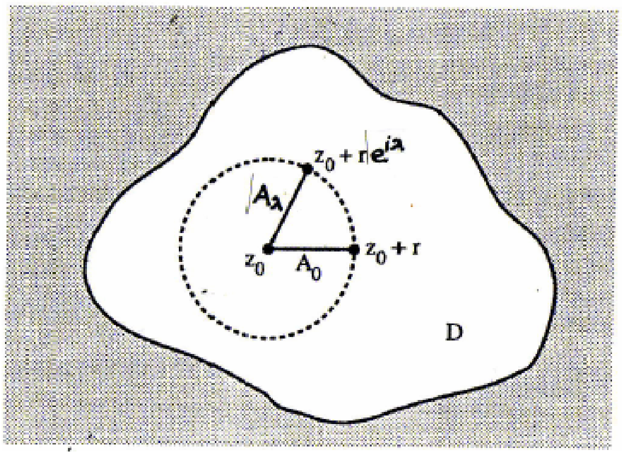
olup f z_0 da konform bir dönüşümdür.

İkinci olarak (ii)'nin (i)'i gerektirdiğini gösterelim. f, z_0 noktasında açı ölçüsünü korusun ve $J_f(z_0) > 0$ olsun. f bir diffeomorfizm olduğundan D de her noktada sürekli kısmi türevlere sahiptir. Bu ise f fonksiyonunun D bölgesinde her noktada reel anlamda diferansiyellenebilir olmasını gerektirir. O halde $\lim_{z\to z_0} |E(z)|/|z-z_0| = 0$ özelliğindeki $E : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve her $z \in D$ için

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + E(z) \tag{2.1}$$

dir. $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ olduğu gösterilirse bu yöndeki ispat tamamlanmış olacak.

$\overline{\Delta}(z_0, r) \subset D$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı seçelim. $0 \le \lambda \le \pi$ olmak üzere A_λ, $\alpha_\lambda(t) = z_0 + t\, e^{i\lambda}$, $0 \le t \le r$, biçiminde parametrelendirilmiş düzgün bir eğri olsun. Eğer $0 < \lambda \le \pi$ ise A_0 ve A_λ eğrileri, köşesi $z_0 \in D$ noktası olan eğrisel (gerçekte doğrusal) açının kenarlarıdır (Şekil 2.3). $\alpha'_\lambda(0) = e^{i\lambda}$ olduğundan $\theta(A_0, A_\lambda) = \lambda$ dır. $f(A_\lambda)$, $\beta_\lambda(t) = f(\alpha_\lambda(t)) = f(z_0 + t\, e^{i\lambda})$, $0 \le t \le r$, biçiminde parametrelendirilmiş düzgün bir eğri olsun. $c = f_z(z_0)$, $d = f_{\bar{z}}(z_0)$ olmak üzere (2.1) gereği



Şekil 2.3

$$\beta'_\lambda(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(z_0 + t\, e^{i\lambda}) - f(z_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[c\, e^{i\lambda} + d\, e^{-i\lambda} + \frac{e^{i\lambda}\, E(z_0 + t.e^{i\lambda})}{t\, e^{i\lambda}} \right] = c\, e^{i\lambda} + d\, e^{-i\lambda}$$

dir. β eğrisi düzgün olduğundan $0 \le \lambda \le \pi$ için $c\, e^{i\lambda} + d\, e^{-i\lambda} \ne 0$ dır. O halde

$$\theta\left[f(A_0), f(A_\lambda)\right] = \mathrm{Arg}\left(\frac{c\, e^{i\lambda} + d\, e^{-i\lambda}}{c + d} \right);\quad 0 < \lambda \le \pi$$

yazılabilir. f z_0 da açı koruyan olduğundan

$$\left|\operatorname{Arg}\left(\frac{c\,e^{i\lambda}+d\,e^{-i\lambda}}{c+d}\right)\right|=\lambda\,;\quad 0\le\lambda\le\pi \tag{2.2}$$

dır. $c\,\overline{d}\,e^{i\lambda}+\overline{c}\,d\,e^{-i\lambda}=2\operatorname{Re}(c\,\overline{d}\,e^{i\lambda})$ ve $|c|^2-|d|^2=J_f(z_0)>0$ olduğundan

$$\operatorname{Im}\left(\frac{c\,e^{i\lambda}+d\,e^{-i\lambda}}{c+d}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{(c\,e^{i\lambda}+d\,e^{-i\lambda})\,(\overline{c}+\overline{d})}{|c+d|^2}\right);\quad 0\le\lambda\le\pi$$

$$=\frac{\operatorname{Im}(|c|^2\,e^{i\lambda}+c\,\overline{d}\,e^{i\lambda}+\overline{c}\,d\,e^{-i\lambda}+|d|^2\,e^{-i\lambda})}{|c+d|^2}$$

$$=\frac{\operatorname{Im}(\,|c|^2\,e^{i\lambda}+|d|^2\,e^{-i\lambda})}{|c+d|^2}=\frac{(\,|c|^2-|d|^2)\sin\lambda}{|c+d|^2}\ge 0$$

elde edilir. Bu durum

$$0\le\operatorname{Arg}\left(\frac{c\,e^{i\lambda}+d\,e^{-i\lambda}}{c+d}\right)\le\pi$$

olmasını gerektirir. (2.2) gereği

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{c\,e^{i\lambda}+d\,e^{-i\lambda}}{c+d}\right)=\lambda=\operatorname{Arg}e^{i\lambda} \tag{2.3}$$

olur. Bu ise her $0\le\lambda\le\pi$ için $(c\,e^{i\lambda}+d\,e^{-i\lambda})/(c+d)$ sayısı $e^{i\lambda}$ sayısının bir pozitif reel katı veya başka bir ifadeyle $(c+d\,e^{-2i\lambda})/(c+d)$ sayısının pozitif reel sayı olması demektir. Eğer $d\ne 0$ ise $\{(c+d\,e^{-2i\lambda})/(c+d)\colon 0\le\lambda\le\pi\}$ kümesi merkezi $c/(c+d)$ ve yarıçapı $|d|/|(c+d)|$ olan bir çember olur. Bu ise yukarıdaki ifadenin pozitif reel sayı olması ile çelişir. O halde $d=0$ olmalıdır. Böylece $f'(z_0)$ mevcut olur.

(*iii*)'ün (*i*)'i gerektirdiğini göstermek için (*ii*)'nin (*i*)'i gerektirmesindeki yol takip edilir. Bunu göstermek daha kolaydır. Örneğin, f fonksiyonunun z_0 noktasında konform olması (2.2) den (2.3)'e kadar olan hesaplamaları atlar. (2.3) eşitliği f'nin z_0 noktasında konform olmasının bir sonucudur. ■

Teorem 2.2.3'ün ters konform dönüşümlere uyarlaması aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.2.4. $f: D\to\mathbb{C}$ bir diffeomorfizim olsun. Bu taktirde $z_0\in D$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(*i*) $\overline{f}$, z_0 da diferansiyellenebilirdir;

(*ii*) *f*, z_0 da açı ölçüsünü korur ve $J_f(z_0)<0$;

(iii) f, z_0 da ters konformdur.

Teorem 2.2.3'ün genel bir hali olan aşağıdaki teorem, kompleks düzlemin konform dönüşümlerini belirlemede önemli bir yere sahip olduğu görülecek.

Teorem 2.2.5. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : D \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun D de konform olması için gerek ve yeter şart f'nin D de analitik ve ünivalent olmasıdır.

İspat. f, D de konform olsun. O halde f bir diffeomorfizmdir. Teorem 2.2.3 gereği f, D de her noktada diferansiyellenebilirdir. Dolayısıyla f, D de analitiktir.

Tersine f ünivalent ve analitik olsun. Bu takdirde f fonksiyonu birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olduğundan Teorem 1.4.13 gereği her $z \in D$ için $J_f(z) = |f'(z)|^2 > 0$ dır. Bu ise f fonksiyonunun D de bir diffeomorfizim olduğunu gösterir. Teorem 2.2.3 gereği f, D de konform dönüşümdür.■

Teorem 2.2.5 den konform iki dönüşümün bileşkesinin konform olduğu ve Teorem 1.4.15 ile Teorem 2.2.5 birlikte düşünülürse konform bir dönüşümün tersinin de konform olduğu söylenebilir.

Uyarı. Bazı yazarlar "konform dönüşüm" tanımını, ünivalentlik şartından vazgeçerek, düzlemsel bir D bölgesinde tanımlı $f : D \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu ve her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ bağıntısıyla verirler. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ örneğinde olduğu gibi. Bu çalışmada her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ şartı sağlayan fonksiyona D de *yerel olarak konform* denilecek. Gerçekten Teorem 1.4.14 gereği $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun z_0 noktasını bulunduran D bölgesinin bir G alt bölgesinde analitik ünivalent olduğu biliniyor. Bu durumda f fonksiyonunun G ye kısıtlanmışı konformdur.

Teorem 2.2.5 kompleks analizde konform dönüşümlerin yapısı bulmak için bir araç olarak kullanılabilir. Aşağıdaki iki teoreme bu açıdan bakılabilir.

Teorem 2.2.6. a ve b kompleks sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konform dönüşümler $f(z) = az + b$ biçiminde fonksiyonlardır.

İspat. $\mathbb{C}$ den $\mathbb{C}$ ye bir f konform dönüşümü tam fonksiyondur. O halde $\mathbb{C}$ de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahiptir. f sabit olmadığından belli bir $n > 0$ sayısı için $a_n \neq 0$ dır. Böylece f fonksiyonunun ∞ da ki ayrık singüleritesi ya esaslı singülerite yada kutuptur. Eğer esaslı singüleriteye sahip olsaydı Casorati–

Weierstrass teoremi ve açık dönüşüm teoremi gereği $U = D^*(\infty,1)$ ve $V = D(0,1)$ kümeleri için $f(U) \cap f(V) \neq \phi$ olmalıydı. Eğer $w \in f(U) \cap f(V)$ ise f altında değeri w olan hem U da hem V de en az bir nokta vardır. Bu ise f fonksiyonunun ünivalent olması ile çelişir. O halde f, ∞ da m. mertebeden ($m \geq 1$) bir kutba sahiptir. Bu ise $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_m z^m$; $a_m \neq 0$ olmasını gerektirir. Eğer $m > 1$ ise Cebirin Temel Teoremi gereği $f'(z_1) = 0$ olacak şekilde bir $z_1 \in \mathbb{C}$ vardır. Teorem 1.4.13 gereği bu durum f fonksiyonunun ünivalent olması ile çelişir. O halde m =1 olmalıdır. Bu durumda $a = a_1 \neq 0$ ve $b = a_0$ olup f, $f(z) = a\,z + b$ biçiminde bir fonksiyondur. ■

Teorem 2.2.7. $D = \Delta(0,1)$ açık birim dairesini kendisi üzerine konform olarak dönüştüren fonksiyonlar $\theta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ ve $|c| < 1$ olmak üzere

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z + c}{1 + \bar{c}z} \tag{2.4}$$

biçimindeki $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonlardır.

İspat. Önce (2.4) tipindeki fonksiyonların D yi kendisi üzerine konform olarak dönüştürdüğünü gösterelim. $g(z) = e^{i\theta} z$, $h(z) = (z + c)/(1 + \bar{c}z)$ denirse $f = g \circ h$ dır. g fonksiyonunun D yi D ye konform olarak dönüştürdüğü açıktır. h fonksiyonunun D de analitik ve kısa bir hesaplamayla $|z| < 1$ için $|h(z)| < 1$ olduğu görülür. Yani $h(D) \subset D$ dir. h fonksiyonunda c yerine -c alarak $k(z) = (z - c) / (1 - \bar{c}z)$ fonksiyonunu tanımlayalım. k fonksiyonu h ile aynı özelliktedir. O halde $k(D) \subset D$, her $z \in D$ için $(k \circ h)(z) = z$ ve $(h \circ k)(z) = z$, yani $h^{-1} = k$ dır. Bu ise h fonksiyonunun D de ünivalent ve

$$D = (h \circ k)(D) = h(k(D)) \subset h(D) \subset D$$

yani $h(D) = D$ olması demektir. Böylece hem g hem de h D yi kendi üzerine konform olarak dönüştürür. O halde $f = g \circ h$ bileşke fonksiyonu da D yi kendi üzerine konform olarak dönüştürür.

Geriye D yi D ye dönüştüren keyfi bir f konform dönüşümünün (2.4) tipinde olduğunu göstermek kalır. Bunun için $k(z) = (z - c) / (1 - \bar{c}z)$ D den D ye konform dönüşüm olmak üzere $c = -f^{-1}(0)$ ve $g : D \to D$, $g = f \circ k$ ile tanımlanan g fonksiyonunu göz önünü alalım. Bu takdirde g de D den D ye konformdur ve

$$g(0) = f(k(0)) = f(-c) = f(f^{-1}(0)) = 0$$

dır. Schwarz Lemması gereği $|g'(0)| \leq 1$ dir. g^{-1}, D yi D ye dönüştüren ve orijini sabit bırakan başka bir konform dönüşümdür. g^{-1} ters fonksiyonuna Schwarz Lemması uygulanırsa

$$\frac{1}{|g'(0)|} = |(g^{-1})'(0)| \leq 1$$

ve buradan $|g'(0)| \geq 1$ elde edilir. Buradan $|g'(0)| = 1$ olur. Schwarz Lemması gereği belli bir $\theta \in \mathbb{R}$ için $g(z) = e^{i\theta} z$ olmak zorundadır. Böylece, $g = f \circ k$ veya $f = g \circ k^{-1} = g \circ h$ olup bu ise f fonksiyonunun (2.4) tipinde olduğunu gösterir. ■

2.3 Genişletilmiş Düzlemde Konform Dönüşümler: Möbius Dönüşümleri

Bu kesimde Möbius Dönüşümlerine yakından bakma imkanı bulacağız. Genişletilmiş düzlemde bölgeler arasında konform dönüşümleri çalışmak mümkündür. Bunun için en uygun yol Teorem 2.2.5 den faydalanmak ve bu teoremi aşağıdaki gibi yeniden ifade etmektir. D, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ ünivalent ve meromorf ise f fonksiyonu D bölgesinde bir konform dönüşümüdür. f fonksiyonu üzerinde ünivalent olma şartı olduğundan en çok bir $z_0 \in D$ noktası için $f(z_0) = \infty$, yani f fonksiyonu D bölgesinde en çok bir basit kutba sahip olabilir. Teorem 1.4.11 gereği meromorf ünivalent bir fonksiyonun birden daha büyük mertebeli kutbu olamaz. Eğer f fonksiyonu genişletilmiş düzlemde bir D bölgesinde konform ise f fonksiyonunun $D_0 = \{z \in D : z \neq \infty, f(z) \neq \infty\}$ gibi sonlu bir bölgeye kısıtlanışı hem analitik hem de ünivalent olup konformdur. Teorem 1.4.9 un tersi gereği, $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ olmak üzere $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ sürekli ve ünivalent fonksiyonu için eğer f fonksiyonunun $D_0 = \{z \in D : z \neq \infty, f(z) \neq \infty\}$ bölgesine kısıtlanışı konform ise bu takdirde f fonksiyonu D bölgesinde konformdur. Sonlu düzlemde olduğu gibi genişletilmiş kompleks düzlemde de konform dönüşümlerin bileşkesi konfordur ve konform dönüşümlerin tersi yine konformdur. Genişletilmiş kompleks düzlemde bir D

bölgesinin f ters konform dönüşümü diye $\bar{f}$ eşlenik dönüşümünün D bölgesinde konform olması anlaşılır. Burada $\overline{\infty} = \infty$ olduğu kabul edilecektir.

Örnek 2.3.1. $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $f(z) = 1/z$, $f(0) = \infty$ ve $f(\infty) = 0$ özelliğinde bir konform dönüşümdür. f fonksiyonu z noktasının bir rasyonel fonksiyonu olduğundan meromorf olup ünivalent olduğu açıktır. Bu fonksiyon $D = \Delta(0,1)$ açık birim dairesini onun dışı olan $D' = \Delta(\infty,1)$ bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür ve $f = f^{-1}$ olduğundan f^{-1} de D' bölgesini $D = \Delta(0,1)$ üzerine konform olarak dönüştürür.

$f(z) = 1/z$ dönüşümü, Möbius dönüşümlerin sınıfı denilen konform dönüşümler sınıfının oldukça önemli bir elemanıdır. a, b, c, d kompleks sayılar ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.5}$$

biçiminde fonksiyonlara *Möbius dönüşümleri* (lineer kesirsel dönüşümler) denir. Rasyonel fonksiyonlarda olduğu gibi Möbius dönüşümleri de meromorf fonksiyonlardır. $ad - bc \neq 0$ şartı bu dönüşümlerin sabit fonksiyonlar olmadığını gösterir. Eğer $c = 0$ ise bu takdirde $a \neq 0$ ve (2.5) bağıntısı $\alpha = a/d \neq 0$ olmak üzere $f(z) = \alpha z + \beta$ biçiminde ifade edilebilir. Bu durumda f yön koruyan bir dönüşümdür ve $f(\infty) = \infty$ dur. $c \neq 0$ ise bu takdirde f Möbius dönüşümü $-d/c$ noktasında bir kutba sahiptir ve $f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) = a/c$ biçiminde tanımlanır. (2.5) bağıntısının $\hat{\mathbb{C}}$ dan $\hat{\mathbb{C}}$ ya konform bir dönüşüm tanımladığını göstermek için f fonksiyonunun ünivalent olduğunu göstermek zor değildir.

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

f fonksiyonunun ters fonksiyonu olup f^{-1} fonksiyonunun kendisi de bir Möbius dönüşümüdür ve $f(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$ dır. Möbius dönüşümlerinin bileşkesinin yine bir Möbius dönüşümü olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 2.2.6 ve Teorem 2.2.7, $\mathbb{C}$ den kendisi üzerine ve birim diskten kendi üzerine olan konform dönüşümlerin özel tipte Möbius dönüşümler olduğunu gösterir. Bu durum aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.3.2. $\hat{\mathbb{C}}$ dan $\hat{\mathbb{C}}$ üzerine olan konform dönüşümler Möbius dönüşümleridir. Özellikle, herhangi bir $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ konform dönüşümünün değer kümesi bütün genişletilmiş kompleks düzlemdir.

İspat. $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ keyfi bir konform dönüşüm olduğunu kabul edelim. $g(z)=1/(z-w_0)$ olmak üzere, $h:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ fonksiyonunu

$$h=\begin{cases} f & ;\ f(\infty)=\infty \quad \text{ise} \\ g\circ f & ;\ f(\infty)=w_0\neq\infty \quad \text{ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. g , $g(w_0)=\infty$ özelliğinde bir Möbius dönüşümü olduğundan h dönüşümü ∞ noktasını sabit bırakan $\hat{\mathbb{C}}$ düzleminin bir konform dönüşümüdür. h fonksiyonunun $\mathbb{C}$ sonlu düzlemine kısıtlanışı da $\mathbb{C}$ düzleminin bir konform dönüşümüdür. Teorem 2.2.6 gereği h fonksiyonu $h(z)=az+b$, $a\neq 0$, biçimindedir. Böylece h fonksiyonu bir Möbius dönüşümüdür. h fonksiyonunun tanımı gereği ya $h=f$ yada $f=g^{-1}\circ h$ olduğundan her iki durumda f bir Möbius dönüşümüdür. ■

Herhangi bir Möbius Dönüşümünü basit Möbius Dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir. Bu basit Möbius dönüşümlerine *elemanter Möbius dönüşümleri* denir. Bu dönüşümler: (i) $f(z)=z+b$ biçimindeki *öteleme*; (ii) a pozitif bir reel sayı olmak üzere $f(z)=az$ biçimindeki *orijine göre genleşme* (homoteti); (iii) $|a|=1$ olmak üzere $f(z)=az$ biçimindeki *orijin etrafındaki dönme*; (iv) $f(z)=z^{-1}$ *inversiyon* dönüşümleridir. $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ keyfi bir Möbius dönüşümü olsun. Eğer $c=0$ ise $f(z)=(a/d)z+b/d$ olup bu dönüşüm (i), (ii) ve (iii) tipindeki dönüşümlerin bileşkesi olarak yazılabilir. Eğer $c\neq 0$ ise

$$f(z)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+(d/c)}$$

biçiminde yazılabilir ve bu ise yukarıda gösterilen elemanter Möbius dönüşümlerin beş veya daha azının bileşkesi olarak elde edilebilir.

Tanım 2.3.3. f Möbius dönüşümü olmak üzere $f(z)=z$ eşitliğini sağlayan $z\in\hat{\mathbb{C}}$ noktalarına f fonksiyonunun *sabit noktaları* denir. Sabit noktalar Möbius dönüşümlerini daha iyi tanımada ilk basamağı oluşturur.

Teorem 2.3.4. f özdeşlik dönüşümü olmayan bir Möbius dönüşümü olsun. Bu takdirde f en çok iki sabit noktaya sahiptir. Başka bir deyişle, eğer $a+d=\mp 2$ ise $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ bir sabit noktaya, diğer durumda ise iki sabit noktaya sahiptir.

İspat. $ad-bc=1$ olmak üzere $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ olsun. Eğer $c=0$ ise $ad=1$ olup, $\alpha=a/d$ ve $\beta=b/d$ denirse, $f(z)=\alpha z+\beta$ olur. Bu dönüşüm her zaman ∞ noktasını sabit bırakır. $\alpha\neq 1$ ise $-\beta/(\alpha-1)$ noktası f fonksiyonunun sabit noktadır. $\alpha=1$ ve $\beta=0$ olmadıkça $\alpha z+\beta=z$ denklemi başka çözüme sahip değildir. Bu yüzden f fonksiyonunun başka sabit noktaları yoktur. $\alpha=1$ olması için gerek ve yeter şart $a=d$ olmasıdır. $(a+d)^2=(a-d)^2+4ad=(a-d)^2+4$ olduğundan $\alpha=1$ olması için gerek ve yeter şart $a+d=\mp 2$ olmasıdır. Böylece $c=0$ olması durumunda $a+d=\mp 2$ ise f fonksiyonu bir sabit noktaya, diğer durumlarda iki sabit notlaya sahip olur.

$c\neq 0$ olması durumunda $f(-d/c)=\infty$ ve $f(\infty)=a/c$ olup $-d/c$ ve ∞ noktaları f fonksiyonunun sabit noktaları değildir. O halde $f(z)=(az+b)/(cz+d)$ dönüşümünün bir tek sabit noktası

$$\frac{az+b}{cz+d}=z$$

denklemini sağlayan sonlu z noktalarıdır. Bu noktalar

$$cz^2+(d-a)z-b=0$$

denkleminin kökleridir. $ad-bc=1$ eşitliği kullanılarak bu denklemin kökleri

$$z=\frac{(a-d)\mp\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$$

dir. Bu durumda $c\neq 0$ iken, eğer $a+d=\mp 2$ ise f fonksiyonunun bir tek sabit noktası, eğer $a+d\neq\mp 2$ ise f fonksiyonunun iki tane sabit noktası vardır. ■

Aşağıdaki iki sonuç bir Möbius dönüşümünün özel noktalardaki değerleri yardımıyla tek olarak belirlenebileceğini gösterir.

Teorem 2.3.5. (z_1,z_2,z_3), $\hat{\mathbb{C}}$ da farklı noktaların sıralı üçlüsü olsun. Bu takdirde $f(z_1)=1$, $f(z_2)=0$ ve $f(z_3)=\infty$ olacak şekilde bir tek f Möbius dönüşümü vardır.

İspat. Önce verilen sıralı üçlünün bileşenlerinin sonlu olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$f(z)=\frac{(z_1-z_3)(z-z_2)}{(z_1-z_2)(z-z_3)} \tag{2.6}$$

dönüşümü istenilen Möbius dönüşümüdür. Eğer z_1, z_2 veya z_3 noktalarından herhangi biri ∞ ise (2.6) bağıntısından f dönüşümü

$$\begin{cases} f(z)=\dfrac{z-z_2}{z-z_3} & : z_1=\infty \ ise \\ f(z)=\dfrac{z_1-z_3}{z-z_3} & : z_2=\infty \ ise \\ f(z)=\dfrac{z-z_2}{z_1-z_2} & : z_3=\infty \ ise \end{cases} \tag{2.7}$$

biçiminde olduğu açıktır.

Bu dönüşümün tek olduğunu gösterelim. Bunun için bu özellikte f ve g gibi iki Möbius dönüşümünün olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $h=f^{-1}\circ g$ fonksiyonu z_1, z_2 , z_3 noktalarını sabit bırakan bir Möbius dönüşümü olur. Teorem 2.3.4 gereği böyle bir h dönüşümü özdeşlik dönüşümüdür. Böylece $g=(f^{-1})^{-1}=f$ elde edilir. ■

Sonuç 2.3.6. (z_1,z_2,z_3) ve (w_1,w_2,w_3), $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks düzlemde farklı noktaların sıralı üçlüsü olsun. $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$ ve $f(z_3)=w_3$ özelliğinde bir tek Möbius dönüşümü vardır.

İspat. Teorem 2.3.5 gereği g ve h Möbius dönüşümlerini $g(z_1)=1$, $g(z_2)=0$, $g(z_3)=\infty$ ve $h(w_1)=1$, $h(w_2)=0$, $h(w_3)=\infty$ olacak şekilde seçebiliriz. Bu takdirde $f=h^{-1}\circ g$ Möbius dönüşümü z_1 noktasını w_1 noktasına, z_2 noktasını w_2 noktasına ve z_3 noktasını da w_3 noktasına dönüştürür. O halde böyle bir dönüşümün tek olduğu Teorem 2.3.5 de izlenen yolla gösterilebilir. ■

Tanım 2.3.7. (z_1,z_2,z_3,z_4) genişletilmiş düzlemin farklı noktaların sıralı dörtlüsü olsun. $f(z_1)=1$, $f(z_2)=0$ ve $f(z_3)=\infty$ özelliğindeki Möbius dönüşümü için $f(z_4)$ kompleks sayısına bu dörtlünün *çapraz oranı* denir ve $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ biçiminde gösterilir. Teorem 2.3.5 gereği böyle bir Möbius dönüşümü bir tektir. Eğer seçilen bu noktalar sonlu ise, (2.6) bağıntısından

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)} \tag{2.8}$$

dir. Eğer noktalardan birinin sonsuz ise (2.7) bağıntısından

$$\left.\begin{array}{ll} [\infty,z_2,z_3,z_4]=\dfrac{z_2-z_4}{z_3-z_4} & , \ [z_1,\infty,z_3,z_4]=\dfrac{z_1-z_4}{z_4-z_3} \\ [z_1,z_2,\infty,z_4]=\dfrac{z_2-z_4}{z_2-z_1} & , \ [z_1,z_2,z_3,\infty]=\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_2} \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

elde edilir. Örneğin;

$$[1,i,-1,-i]=\frac{2\ (2i)}{(1-i)(-1+i)}=2 \qquad \text{ve} \qquad [0,\,-1,\,i,\,\infty]=\frac{-i}{1}=-\,i$$

dir.

Aşağıdaki teorem, Möbius dönüşümler altında çapraz oranın korunduğunu gösterir.

Teorem 2.3.8. f bir Möbius dönüşümü olsun. Bu taktirde genişletilmiş kompleks düzlemde farklı noktaların (z_1,z_2,z_3,z_4) sıralı dörtlüsü için

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=[f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4)]$$

dir.

İspat. $f(z_1)$ noktasını 1 noktasına, $f(z_2)$ noktasını 0 noktasına ve $f(z_3)$ noktasını ∞ noktasına resmeden bir tek Möbius dönüşümü g olsun. Bu takdirde $g\circ f$ fonksiyonu z_1 noktasını 1 noktasına, z_2 noktasını 0 noktasına ve z_3 noktasını da ∞ a resmeder. Çapraz oranın tanımı gereği

$$[z_1,z_2,z_3,z_4]=(g\circ f)(z_4)=g[f(z_4)]=[f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4)]$$

elde edilir. ■

Bu teoremin bir sonucu iki çapraz oranın ne zaman eşit olacağını ifade eder.

Sonuç 2.3.9. $[z_1,z_2,z_3,z_4]$ ve $[w_1,w_2,w_3,w_4]$ çapraz oranlarının eşit olması için gerek ve yeter şart $i=1,2,3,4$ için $f(z_i)=w_i$ olacak şekilde bir f Möbius dönüşümünün mevcut olmasıdır.

İspat. Bu iki çapraz oranın eşit olduğunu kabul edelim. Tanım gereği $g(w_1)=1$, $g(w_2)=0$ ve $g(w_3)=\infty$ olacak şekilde bir tek g Möbius dönüşümü için $g(w_4)=$ $[w_1,w_2,w_3,w_4]$ dir. Sonuç 2.3.6 gereği $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$ ve $f(z_3)=w_3$ olacak şekilde bir tek f Möbius dönüşümünün vardır. Teorem 2.3.8 den

$$g[f(z_4)]=[w_1,w_2,w_3,f(z_4)]=[z_1,z_2,z_3,z_4]=[w_1,w_2,w_3,w_4]=g(w_4)$$

elde edilir. g ünivalent olduğundan $f(z_4)=w_4$ dır. Böylece $i=1,2,3,4$ için $f(z_i)=w_i$ elde edilir.

Tersine, $i=1,2,3,4$ için $f(z_i)=w_i$ olacak şekilde bir f Möbius dönüşümü varsa bu takdirde Teorem 2.3.8 gereği iki çapraz oran eşittir. ■

Teorem 2.3.8, $f(z_1)=w_1$, $f(z_2)=w_2$ ve $f(z_3)=w_3$ olacak şekilde f Möbius dönüşümünün elde edilmesinde oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Çünkü $z\neq z_1,\ z_2,\ z_3$ için $f(z)$ değeri

$$[z_1,z_2,z_3,z]=[w_1,w_2,w_3,f(z)] \tag{2.10}$$

eşitliği yardımıyla tam olarak belirlenebilir.

Örnek 2.3.10. $f(i)=\infty$, $f(0)=1$ ve $f(\infty)=-i$ özelliğindeki f Möbius dönüşümünü bulalım. $z\neq i,\ 0,\ \infty$ için (2.10) gereği $[i,0,\infty,z]=[\infty,1,-i,f(z)]$ yazabiliriz. Buradan (2.9) gereği

$$-i\,z=\frac{1-f(z)}{-i-f(z)}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerle bu özellikteki Möbius dönüşümünün

$$f(z)=\frac{z+1}{iz+1}$$

olduğu görülür.

Möbius dönüşümler altında değişmez kalanların en önemli sınıfını, genişletilmiş düzlemde çemberler oluşturur. $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş düzleminde bir K çemberi ya $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bilinen bir çember yada L, $\mathbb{C}$ de bir doğru olmak üzere $K=L\cup\{\infty\}$ biçiminde bir çemberdir. Böylece, $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş düzlemde herhangi üç noktadan bir ve yalnız bir çember geçtiği söylenebilir. A ve C reel sayılar ve $|B|^2-AC>0$ olmak üzere

$$A|z|^2+B\,z+\overline{B}\,z+C=0 \tag{2.11}$$

bağıntısını sağlayan $z\in\mathbb{C}$ noktalarının kümesi, $A\neq 0$ ise $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir çember, $A=0$ ise $\mathbb{C}$ de bir doğru gösterdiği gösterilebilir. Tersine kompleks düzlemde her bir çember veya doğru (2.11) tipinde bir bağıntıyla ifade edilir. (2.11) bağıntısına $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks düzlemde genel bir çember denklemi olarak bakılabilir. Ayrıca

(2.11) bağıntısıyla verilen çemberlerin yarı çapının ∞ olması ancak ve ancak $A=0$ olmasıyla mümkün olduğu sonucu çıkarılabilir.

Aşağıdaki teorem Möbius dönüşümlerinin genişletilmiş kompleks düzlemde çemberleri koruduğunu gösterir.

Teorem 2.3.11. Möbius dönüşümleri $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş düzlemindeki çemberleri yine $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks düzlemindeki çemberlere dönüştürür.

İspat. K, $\hat{\mathbb{C}}$ da keyfi bir çember ve f fonksiyonu da bir Möbius dönüşümü olsun. Eğer f dönme, öteleme veya uzama-kısalma olan bir Möbius dönüşümü ise bu takdirde $f(K)$ görüntü kümesinin $\hat{\mathbb{C}}$ da bir çember olduğu açıktır. Geriye sadece f fonksiyonunun $f(z)=1/z$ durumu kalır. K çemberi $A|z|^2+Bz+\overline{B}z+C=0$ eşitliği ile verilmiş olsun. $z\neq 0$ kompleks sayısı için $w=z^{-1}$ olarak alınırsa $z\in K$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{A}{|w|^2}+\frac{B}{w}+\frac{\overline{B}}{\overline{w}}+C=0,$$

veya denk bir ifadeyle

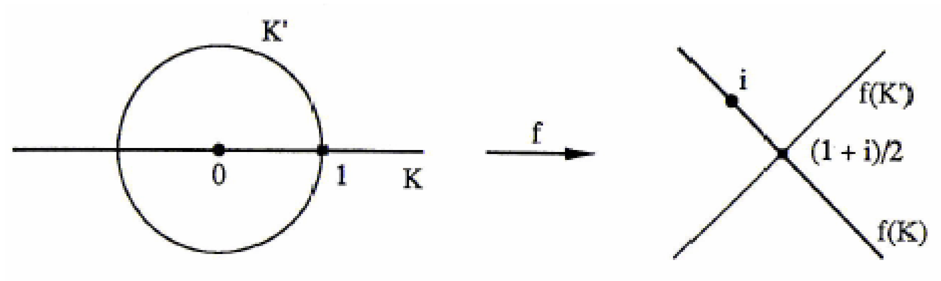
$$C|w|^2+\overline{B}w+Bw+A=0$$

bağıntısının sağlanmasıdır. Bu son eşitlik $\hat{\mathbb{C}}$ da $\widetilde{K}$ gibi başka bir çember denklemidir. Eğer $z=0$ ve $z\in K$ ise $C=0$ olup $w=\infty=1/0$ noktası $\widetilde{K}$ çemberine ait olur. Benzer şekilde $z=\infty$ noktasının K üzerinde olması için gerek ve yeter şart $w=\infty=1/0$ noktasının $\widetilde{K}$ çemberi üzerinde olmasıdır. Sonuç olarak, bir $z\in\hat{\mathbb{C}}$ noktasının K çemberine ait olası için gerek ve yeter şart $w=z^{-1}=f(z)$ noktasının $\widetilde{K}$ çemberine ait olmasıdır. Bu durum $f(K)=\widetilde{K}$ kümesinin $\hat{\mathbb{C}}$ da bir çember olduğunu gösterir. ■

Örnek 2.3.12. $f(z)=(z+i)/(z+1)$ Möbius dönüşümü altında $K=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ve $K'=\{z: |z|=1\}$ çemberlerinin resimlerini bulalım.

Teorem 2.3.11 gereği $f(K)$, $f(1)=(1+i)/2$, $f(0)=i$ ve $f(-1)=\infty$ noktalarından geçen $\hat{\mathbb{C}}$ da bir çemberdir (Şekil 2.5). Bundan dolayı $f(K)$, $y=-x+1$ denklemi ile verilen bir doğrudur. Benzer şekilde $f(K')$, $f(1)=(1+i)/2$, $f(-1)=\infty$ noktaların dan geçen $\hat{\mathbb{C}}$ da $y=x$ denklemiyle verilen bir çemberdir. K ile K'

çemberleri 1 noktasında bir birlerine dik olduğundan konformluk gereği $f(K)$ ile de $f(K')$ çemberleri $(1+i)/2$ noktasında bir birlerine diktirler.

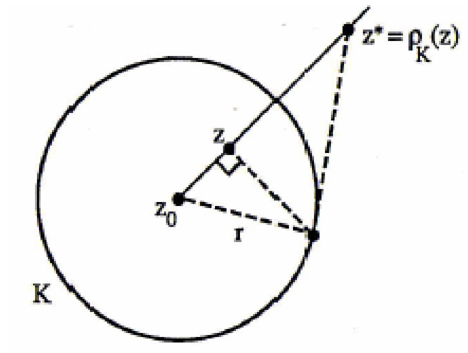


Şekil 2.5

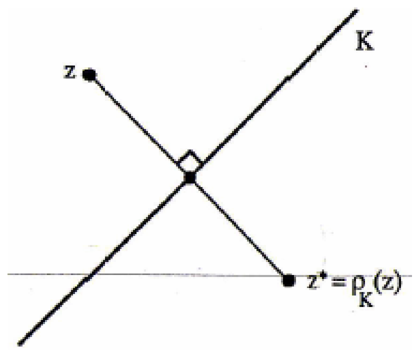
Tanım 2.3.13. *K*, $\mathbb{C}$ de z_0 merkezli ve *r* yarıçaplı bilinen anlamda bir çember olsun. $z \neq z_0, \infty$ için

$$\rho_K(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0\,\bar{z} + r^2 - |z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} \tag{2.12}$$

ve $\rho_K(z_0) = \infty$, $\rho_K(\infty) = z_0$ olarak tanımlı $\rho_K : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fonksiyonuna *K* da bir *yansıma* denir. Bunun geometrik anlamı ρ_K fonksiyonu z_0 ve ∞ dan farklı bir *z* noktasını z_0 ile z noktasını birleştiren doğru üzerinde $|z - z_0||z^* - z_0| = r^2$ bağıntısını sağlayan tek bir z^* noktasına dönüştürür (Şekil 2.6).



Şekil 2.6



Şekil 2.7

Eğer *L* doğrusu $B z + \overline{B} z + C = 0$ (C reel ve $B \neq 0$) denklemi ile verilmiş bir doğru ve $K = L \cup \{\infty\}$ ise bu takdirde ρ_K dönüşümü $\rho_K(\infty) = \infty$ ve $z \neq \infty$ için

$$\rho_K(z) = -\frac{\overline{B}}{B}\bar{z} - \frac{C}{B} \tag{2.13}$$

ile verilir. Bu durumda bir $z \neq \infty$ noktasının K çemberine göre yansıması K çemberini düz ayna kabul eden z^* noktasıdır (Şekil 2.7). (2.12) hem de (2.13) de verilen ρ_K fonksiyonu K üzerindeki noktaları sabit bırakır ve $\rho_K \circ \rho_K$, $\hat{\mathbb{C}}$ da bir özdeşlik dönüşümüdür. Böylece $\rho_K^{-1} = \rho_K$ dır.

a, b, c, d kompleks sayılar olmak üzere (2.12) ve (2.13) bağıntılarından her bir ρ_K yansıma dönüşümünün

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad , \quad ad - bc \neq 0 \tag{2.14}$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfına aittir. Aslında (2.14) tipinde bir f fonksiyonu, $\rho(z) = \bar{z}$ reel eksendeki yansıma ve g Möbius dönüşümü olmak üzere $f = g \circ \rho$ biçiminde bir fonksiyondur. Bu fonksiyonlara *ters Möbius dönüşümleri* denir. Hemen belirtelim ki her ters Möbius dönüşümü bir yansıma değildir. ρ, $\hat{\mathbb{C}}$ dan kendisi üzerine ters konform dönüşümü olduğundan ve Möbius dönüşümleri de $\hat{\mathbb{C}}$ yi kendisi üzerine konform olarak dönüştürdüğünden ters Möbius dönüşümleri de $\hat{\mathbb{C}}$ yi kendisi üzerine ters konform olarak dönüştürür. Gerçekten, Teorem 2.2.3 ve $\hat{\mathbb{C}}$ da ters konform tanımından $\hat{\mathbb{C}}$ dan kendisi üzerine keyfi bir ters konform dönüşümünün (2.14) tipinde olduğu açıktır. (2.14) tipinde verilen bir f fonksiyonu Möbius dönüşümleri ile bir çok ortak özelliğe sahiptir. Örneğin K, $\hat{\mathbb{C}}$ da bir çember ise $f(K)$ da $\hat{\mathbb{C}}$ da bir çemberdir. Ayrıca iki ters Möbius dönüşümün bileşkesi bir Möbius dönüşümüdür. Genelde çift sayıda ters Möbius dönüşümlerle Möbius dönüşümlerinin bileşkesi yine bir Möbius dönüşümdür.

Tanım 2.3.14. K, $\hat{\mathbb{C}}$ da herhangi bir çember olsun. $z, z^* \in \hat{\mathbb{C}} - K$ noktaları için eğer $z^* = \rho_K(z)$ (veya $\rho_K(z) = z^*$) ise z ve z^* noktalarına *K çemberine göre simetrik noktalar* denir.

Aşağıdaki teorem Möbius dönüşümlerinin simetri prensibi ile ilgilidir.

Teorem 2.3.15. f bir Möbius dönüşümü ve K da $\hat{\mathbb{C}}$ da bir çember olsun. Bu takdirde

$$f \circ \rho_K = \rho_{f(K)} \circ f \tag{2.15}$$

dır. Özellikle, z ve z^* K çemberine göre simetrik noktalar ise $f(z)$ ve $f(z^*)$ da $f(K)$ çemberine göre simetrik noktalardır.

İspat. $\rho_{f(K)}^{-1} = \rho_{f(K)}$ gerçeği göz önüne alındığında $g = f^{-1} \circ \rho_{f(K)} \circ f \circ \rho_K$ dönüşümünün $\hat{\mathbb{C}}$ dan kendisi üzerine bir özdeşlik dönüşümü olduğu gösterilirse (2.15) ifadesi gösterilmiş olacaktır. Çift sayıda yansıma dönüşümü ile Möbius dönüşümlerinin birleşimi olan g fonksiyonu bir Möbius dönüşümüdür. Üstelik g fonksiyonu K çemberinin bütün noktalarını sabit bırakır. Teorem 2.3.4 gereği g, $\hat{\mathbb{C}}$ nın tüm noktalarını sabit bırakır. Yani g bir özdeşlik dönüşümüdür. Böylece (2.15) bağıntısı sağlanmış olur.

Eğer z ve z^* noktaları K ya göre simetrik noktalar ise bu takdirde (2.15) gereği $w = f(z)$ ve $w^* = f(z^*)$ noktaları

$$\rho_{f(K)}(w) = \rho_{f(K)}[f(z)] = f[\rho_K(z)] = f(z^*) = w^*$$

bağıntısını sağlar. Bu ise w ve w^* noktalarının $f(K)$ çemberine göre simetrik olduğunu gösterir. ■

Örnek 2.3.16. K, $\hat{\mathbb{C}}$ da z_1, z_2, z_3 noktalarından geçen bir çember olsun. $z \neq z_1, z_2, z_3$ için ρ_K yansımasının

$$\overline{[z_1, z_2, z_3, z]} = [z_1, z_2, z_3, \rho_K(z)] \tag{2.16}$$

eşitliğini sağladığını gösterelim.

f, z_1 noktasını 1 noktasına, z_2 noktasını 0 noktasına ve z_3 noktasını da ∞ a resmeden bir Möbius dönüşümü olsun. Bu takdirde $f(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dur. Üstelik z_1, z_2, z_3 noktalarından farklı z noktası için çapraz oran tanımından $[z_1, z_2, z_3, z] = f(z)$ ve $[z_1, z_2, z_3, \rho_K(z)] = f(\rho_K(z))$ yazabiliriz. Eğer $z \in K$ ise bu takdirde $\rho_K(z) = z$ ve (2.16) bağıntısı $\overline{f(z)} = f(z)$ eşitliğine indirgenir. $f(z)$ reel olduğundan bu eşitlik doğrudur. Eğer z, K üzerinde bulunmuyorsa bu takdirde Teorem 2.3.15 gereği $f(z)$ ve $f[\rho_K(z)]$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a göre simetrik olmalıdır. Başka bir deyişle $\overline{f(z)} = f[\rho_k(z)]$ dir. Böylece (2.16) bağıntısı elde edilmiş olur.

2.4 Riemann Dönüşüm Teoremi

Riemann dönüşüm teoremi, kompleks analizde önemli bir yere sahiptir. Teoremin Riemann tarafından verilen ilk ispatı Dirichlet Prensibine dayanır. Buradaki ispatı ise Montel'in normal ailelerle ilgili teoremine ve Paul Koebe'nin yorumuna dayanmaktadır. İspata hazırlık için önce aşağıdaki yardımcı teoremleri verelim.

Lemma 2.4.1. $f : D \to \mathbb{C}$ konform dönüşüm ve $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu takdirde $D' = f(D)$ de basit bağlantılı bir bölgedir.

İspat. Eğer $D' = \mathbb{C}$ ise ispat açıktır. $D' \neq \mathbb{C}$ olduğunu kabul edelim. f sabit olmayan analitik bir fonksiyon olduğundan D' kesinlikle bir bölgedir. İspat için her $w \in \mathbb{C} - D'$ ve D' de bulunan her kapalı parçalı düzgün β yolu için $n(\beta, w) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. w sabit bir nokta ve β yolu $\beta : [a,b] \to \mathbb{C}$ olarak tanımlansın. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma = f^{-1} o \beta$ eğrisini $\beta(t) = f(\gamma(t))$ olacak biçimde tanımlayalım. Bu durumda γ, D de kapalı parçalı düzgün bir eğridir. D basit bağlantılı olduğundan, γ bu bölgede sıfıra homologdur. γ, D' de bulunduğundan $f'/(f-w)$ fonksiyonu D de analitiktir. Cauchy Teoremi gereği;

$$0 = \int_\gamma \frac{f'(z)\, dz}{f(z) - w} = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\ \gamma'(t).dt}{f(\gamma(t)) - w} = \int_a^b \frac{\beta'(t)\ dt}{\beta(t) - w} = \int_\beta \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 2\pi i\ n(\beta, w)$$

olur. Bu ise $n(\beta, w) = 0$ yani β basit bağlantılıdır.■

Lemma 2.4.2. $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge, $D \neq \mathbb{C}$ ve $z_0 \in D$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikleri sağlayan $f : D \to \mathbb{C}$ konform dönüşümü vardır.

(i) $f(D) \subset \Delta = \Delta(0,1)$

(ii) $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$

İspat. $b \in \mathbb{C} - D$ noktasını seçelim ve $f_1 : D \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = z - b$ fonksiyonunu tanımlayalım. f_1 fonksiyonunun D bölgesini orijini bulunduran bir $D_1 = f_1(D)$ gibi basit bağlantılı bir bölgeye resmettiği açıktır. $f_2(z)$ fonksiyonunu D_1 de $\log z$ fonksiyonunun herhangi bir dalı olarak tanımlayalım. Teorem 1.3.8 gereği böyle bir f_2 dalı tanımlanabilir ve bu fonksiyon aynı zamanda analitiktir ve ünivalenttir. $w_0 \in D_2 = f_2(D_1)$ noktası ve $\overline{\Delta}(w_0, r) \subset D_2$ kapalı dairesini göz önüne alalım.

$\widetilde{w}_0 = w_0 + 2\pi i$ olarak tanımlanırsa $\overline{\Delta}(\widetilde{w}_0, r) \cap D_2 = \phi$ olmak zorundadır. Gerçekten; $\widetilde{w} \in \overline{\Delta}(\widetilde{w}_0, r) \cap D_2$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $f_2(\widetilde{z}) = \widetilde{w}$ olacak şekilde $\widetilde{z} \in D_1$ noktası vardır. Öte yandan $\widetilde{w}$ noktasını belli bir $\overline{\Delta}(w_0, r)$ için $\widetilde{w} = w + 2\pi i$ olarak yazabiliriz. Elbette $f_2(z) = w$ olacak şekilde $z \in D_1$ noktaları vardır. Böylece

$$\widetilde{z} = e^{f_2(\widetilde{z})} = e^{\widetilde{w}} = e^{w+2\pi i} = e^{w} = e^{f_2(w)} = z$$

olur. Bu ise $w = f_2(z) = f_2(\widetilde{z}) = \widetilde{w} = w + 2\pi i$ çelişkili durumu gerektirir . O halde $\overline{\Delta}(\widetilde{w}_0, r) \cap D_2 = \phi$ dır. Dolayısıyla, her $z \in D_2$ için $|z - \widetilde{w}| > r$ eşitsizliği sağlanır. Bu da $f_3(z) = r/(z - \widetilde{w}_0)$ Möbius dönüşümü altında D_2 bölgesinin resminin $D_3 = f_3(D_2) \subset \Delta$ olmasını gerektirir. Böylece $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ bileşke fonksiyonu D yi Δ içinde bir bölgeye konform olarak resmeder.

$c = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z_0)$ olsun. Teorem 2.2.7 gereği, $f_4(z) = (z - c)/(1 - \bar{c}z)$ ile verilen $f_4 : \Delta \to \Delta$ fonksiyonu D yi kendi üzerine konform olarak resmeder ve $f_4(c) = 0$ dır. Böylece $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ bileşke fonksiyonu D yi Δ içine konform olarak resmeder ve z_0 noktasını da orijine dönüştürür.

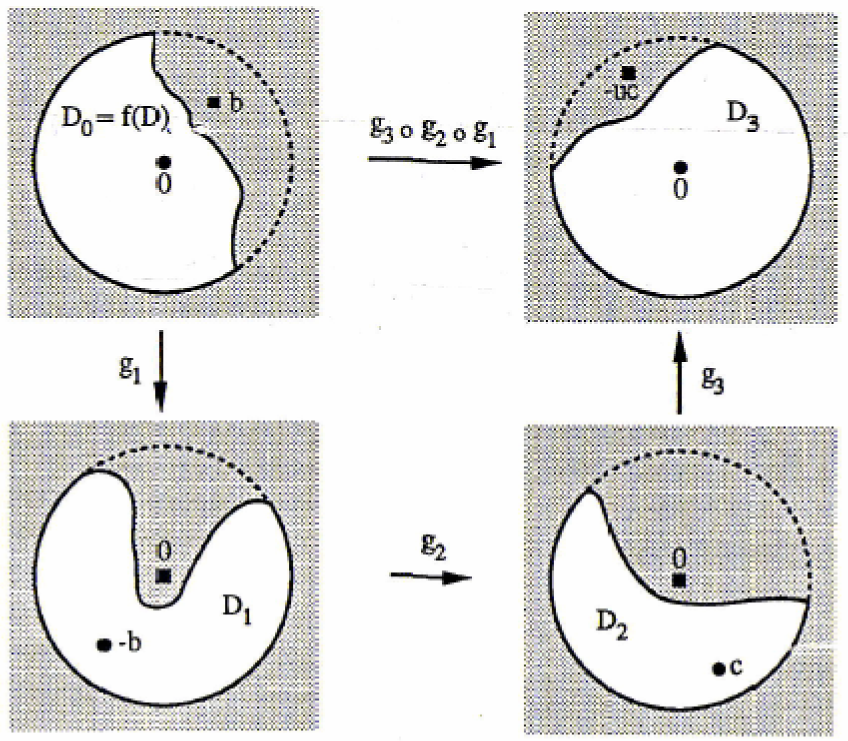
Sonuç olarak, Teorem 1.4.13 gereği $d = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0) \neq 0$ dır. Δ da $u = e^{-i\,Arg\,d}$ olmak üzere $f_5(z) = u\,z$ fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece, $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ fonksiyonu D yi Δ dairesinin bir alt bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür ve

$$f(z_0) = 0, \quad f = f_5'(0)(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0) = u\,d = |d| > 0$$

özelliklerini sağlar. Bu da f fonksiyonunun (i) ve (ii) özelliklerini sağlayan bir konform dönüşüm olduğunu gösterir. ■

Lemma 2.4.3. $D \neq \mathbb{C}$ olmak üzere $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge, $z_0 \in D$ ve $f : D \to \mathbb{C}$ konform dönüşümü Lemma 2.4.2'nin (i) ve (ii) şartlarını sağlasın. $f(D) \neq \Delta$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde bu iki özelliği ve $g'(z_0) > f'(z_0)$ eşitsizliğini sağlayan bir $g : D \to \mathbb{C}$ konform dönüşüm vardır**.**

İspat. $f(D) = D_0$ olsun. İlk olarak $b \in \Delta - D_0$ noktasını seçelim. $f(z_0) = 0 \in D_0$ olduğundan $b \neq 0$ olmak zorundadır. Teorem 2.2.7 gereği $g_1(z) = (z - b) \big/ (1 - \bar{b}z)$ dönüşümü Δ yi kendi üzerine konform olarak dönüştürür. Böylece Δ dairesinin basit bağlantılı bir D_0 alt bölgesini de başka bir böyle $D_1 = g_1(D_0) \subset \Delta$ bölgesine dönüştürür. D_1 bölgesi orijini $(= g_1(b))$ bulundurmamasına rağmen $g_1(0) = -b$ noktasını bulundurur (Şekil 2.8). Doğrudan bir hesaplamayla $g_1'(0) = 1 - |b|^2$ olduğu görülür.



Şekil 2.8

İkinci olarak, Teorem 1.3.8 $\log z$ 'nin D_1 de bir dalının olduğunu garanti eder. Bu dalı L ile gösterelim. $g_2(z) = e^{L(z)/2}$ ile verilsin. Bu takdirde $z \in D_1$ için $|g_2(z)| = \sqrt{|z|} < 1$ ve g_2 fonksiyonu D_1 bölgesinde bire birdir. Gerçekten, $g_2(z_1) = g_2(z_2)$ ise $z_1 = [g_2(z_1)]^2 = [g_2(z_2)]^2 = z_2$ dir. Başka bir deyişle g_2, D_1 den basit bağlantılı $D_2 = g_2(D_1) \subset \Delta$ bölgesi üzerine bir konform dönüşümdür (Şekil 2.8). $c = g_2(-b)$ denirse, $c \in D_2$ olup

$$g_2'(-b) = \frac{1}{2g_2(-b)} = \frac{1}{2c}$$

elde edilir.

Son olarak, $u = e^{i \operatorname{Arg} c}$ olmak üzere Δ dairesini kendi üzerine konform olarak resmeden $g_3(z) = u(z-c)/(1-\bar{c}z)$ dönüşümünü göz önüne alalım. $D_3 = g_3(D_2) \subset \Delta$ ve $g_3(c) = 0 \in D_3$ dür. Ayrıca $g_3'(c) = u/(1-|c|^2)$ dir.

Teoremde istenilen g dönüşümü $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ bileşke dönüşümü olarak tanımlanırsa, g dönüşümü D bölgesini D_3 bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür ve $g(z_0) = 0$ dır. Ayrıca, $u/c = 1/|c|$, $|c|^2 = |g_2(-b)|^2 = |b|$ ve $1+|c|^2 > 2|c|$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} g'(z_0) &= g_3'(c)\, g_2'(-b)\, g_1'(0)\, f'(z_0) = \left(\frac{u}{1-|c|^2}\right)\left(\frac{1}{2c}\right)(1-|b|^2) f'(z_0) \\ &= \left(\frac{1+|c|^2}{2|c|}\right) f'(z_0) > f'(z_0) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi Riemann dönüşüm teoremi ifade ve ispat edilecektir. Teoremin birkaç durumu vardır. İspat için herhangi bir durumunu dikkate almak yeterlidir. Biz burada kompleks düzlemde düzlemin tamamı olmayan basit bağlantılı bir alt bölgeyi açık birim disk üzerine konform olarak dönüştüren dönüşümlerin varlığı ile ilgileneceğiz. Teorem 3.4.3 bu teoremin daha genel halini ifade etmektedir.

Teorem 2.4.4. (Riemann Dönüşüm Teoremi) $D \neq \mathbb{C}$ olmak üzere $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in D$ olsun. $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde D bölgesini $\Delta = \Delta(0,1)$ üzerine konform olarak resmeden bir tek f dönüşümü vardır.

İspat. D bölgesinden Δ birim dairesinin bir alt bölgesi üzerine $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ özelliğindeki bütün $f : D \to \mathbb{C}$ konform dönüşümlerin sınıfını F ile gösterelim. Lemma 2.4.3 gereği $F \neq \phi$ dır. $\Delta(z_0, r) \subset D$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı seçelim. Cauchy Eşitsizliği gereği her $f \in F$ için $f'(z_0) = |f'(z_0)| \leq r^{-1}$ dir. Böylece $\{f'(z_0) : f \in F\}$ kümesinin pozitif reel sayıların sınırlı bir kümesi olduğu görülür. O halde bu kümenin bir en küçük üst sınırı vardır ve bu sınırı l ile gösterelim. $l - n^{-1} \leq f_n'(z_0) \leq l$ özelliğinde $f_n \in F$ fonksiyonlarını seçelim. F ailesi D de lokal sınırlı olduğundan Montel Teoremi gereği her (f_n) dizisinin D nin kompakt alt kümelerinde f ye düzgün yakınsayan bir (f_{n_k}) alt dizisi vardır ve f de D de analitiktir. Ayrıca;

$$f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_0) = 0 \quad \text{ve} \quad f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} f'_{n_k}(z_0) = l > 0$$

dır. Özellikle f, D de sabit değildir. Teorem 1.4.17 gereği f fonksiyonu bu bölgede ünivalent ve $f(D) \subset \overline{\Delta}$ dır. Açık dönüşüm teoremi gereği $f(D)$ açık bir kümedir ve Δ dairesinin bir alt kümesi olmak zorundadır. Böylece $f \in F$ dir. Eğer $f(D) = \Delta$ olduğu gösterilirse teoremin ispatı tamamlanmış olacaktır. Eğer $f(D) \neq \Delta$ olsaydı Lemma 2.4.3 gereği z_0 noktasında türevi $f'(z_0) = l$ den daha büyük olan F ailesinin bir elemanını bulmak mümkün olacaktı. l sayısının tanımı gereği bu mümkün değildir. O halde f fonksiyonu D bölgesini Δ dairesi üzerine konform olarak dönüştürmek zorundadır.

Şimdi böyle bir dönüşümün tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki g fonksiyonu $g(z_0) = 0$ ve $g'(z_0) > 0$ özelliğinde ve D bölgesini Δ dairesi üzerine konform olarak resmeden başka bir dönüşüm olsun. $\varphi : \Delta \to \Delta$, $\varphi = g \circ f^{-1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon konform olup $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi'(0) = g'(z_0)/f'(z_0) > 0$ özelliklerini sağlar. Teorem 2.2.7 gereği böyle bir φ dönüşümü bir tektir ve bu $\varphi(z) = z$ dönüşümüdür. Böylece, her bir $z \in D$ için $g(z) = \varphi[f(z)] = f(z)$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun tek olduğunu gösterir. ■

Riemann Dönüşüm Teoremi, kompleks düzlemin herhangi basit bağlantılı bir D öz alt bölgesinin başka böyle bir alt bölgeye konform olarak resmedilebileceğini gösterir. Aşağıda böyle bir dönüşümün belli bir $z_0 \in D$ noktası için $f(z_0)$ ve $\operatorname{Arg}[f'(z_0)]$ değerlerine göre tek olarak belirlenebileceği gösterilecek.

Teorem 2.4.5. D ve D' bütün bir kompleks düzlem olmayan basit bağlantılı iki bölge ve $z_0 \in D$, $z'_0 \in D'$ ve $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$ olsun. Bu takdirde $f(z_0) = z'_0$ ve $\operatorname{Arg}[f'(z_0)] = \theta_0$ özelliğinde D bölgesinden D' bölgesi üzerine bir tek f konform dönüşümü vardır.

İspat. g, D bölgesinden $\Delta = \Delta(0,1)$ birim dairesi üzerine $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) > 0$ özelliğinde bir konform dönüşüm ve h da D' bölgesinde, $z'_0 \in D'$ noktasında g dönüşümünün sağladığı özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$f(z)=h^{-1}[e^{i\theta_0}\,g(z)]$ biçiminde tanımlanan $f:D\to D'$ fonksiyonu D den D' bölgesine $f(z_0)=z'_0$ ve $f'(z_0)=e^{i\theta_0}\,g'(z_0)/h'(z'_0)$ özelliğinde bir konform dönüşüm-dür. $g'(z_0)>0$ ve $h'(z'_0)>0$ olduğundan $\operatorname{Arg}[f'(z_0)]=\theta_0$ dır. f fonksiyonunun tekliğini göstermek için f ile aynı özelliğe sahip keyfi bir $f_0:D\to D'$ konform dönüşümünü göz önüne alalım. $\varphi=g\circ f^{-1}\circ f_0\circ g^{-1}$ dönüşümü Δ dan Δ üzerine konform dönüşümdür. Üstelik φ dönüşümü $\varphi(0)=0$ ve $\operatorname{Arg}[f'(z_0)]=\operatorname{Arg}[f'_0(z_0)]$ olduğundan

$$\varphi'(0)=g'(0)\cdot\frac{1}{f'(z_0)}\cdot f'(z_0)\cdot\frac{1}{g'(0)}=\frac{f'_0(z_0)}{f'(z_0)}=\frac{|\,f'_0(z_0)\,|}{|\,f'(z_0)\,|}>0$$

özelliğini sağlar. Teorem 2.2.4 ün ispatında olduğu gibi her $z\in\Delta$ için $\varphi(z)=z$ sonucu elde edilir. Bu durum her $z\in D$ için $f_0(z)=f(z)$ olduğunu gösterir. ■

3. KONFORMAL MODÜL VE CARATHEODORY-OSGOOD TEOREMİ

3. 1 Bazı Topolojik Önbilgiler

D ve D', kompleks düzlemin basit bağlantılı iki öz alt bölgeleri olsun. D den D' bölgesine olan bir f konform dönüşümü D bölgesinin herhangi bir noktası komşuluğunda yerel olarak oldukça hoş geometrik ve analitik özelliklere sahip olduğunu ortaya çıkardı. Asıl önemli olan $\zeta \in D$ noktası $z \in \partial D$ noktasına yaklaşırken $f(\zeta)$ hakkında söyleyeceklerimiz-dir. Gerçekten, bununla ilgili öyle problemler vardır ki henüz tam olarak anlaşılamamış ve üzerinde çalışmalar hala sürdürülmektedir. Bununla birlikte bazı özel durumlar için Constantin Caratheodory ve William F. Osgood birbirinden bağımsız olarak buldukları güzel sonucu şöyle ifade edebiliriz: Eğer D ve D', Jordan eğrileri tarafından sınırlanmış iki bölge ise bu takdirde f fonksiyonu bir tek şekilde $\overline{D}$ bölgesinden $\overline{D'}$ bölgesine ünivalent ve sürekli bir $\widetilde{f}$ fonksiyonuna genişletilebilir. Yani $f : D \to D'$ konform ise f fonksiyonu $\widetilde{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$ ünivalent fonksiyonlarına sürekli olarak genişletilebilir. Dolayısıyla, $\widetilde{f}^{-1} : \overline{D'} \to \overline{D}$ ters fonksiyonu da sürekli olup $\widetilde{f}$ genişlemesi bir homeomorfizm olur. Bu kesimde Caratheodory-Osgood Teoremi ve sonuçları üzerinde durulacak.

$\Delta = \Delta(0,1)$ olmak üzere $f : \Delta \to \mathbb{C}$ konform dönüşümü için $f(\Delta)$ bölgesi elbette sınırsız olabilir. Bu durumda f fonksiyonunun genişlemesinden bahsedildiğinde $\hat{\mathbb{C}}$ genişletilmiş düzlemde çalışacağız. Genişletilmiş düzlemde bir $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ kümesinin kapanışı $\hat{A}$ ile ve A kümesinin sınırı $\partial\hat{A}$ ile gösterilecek. Elbette $A \subset \mathbb{C}$ sınırlı ise $\overline{A} = \hat{A}$ ve $\partial A = \partial\hat{A}$ dır. Buna karşılık $A \subset \mathbb{C}$ sınırlı değil ise $\hat{A} = \overline{A} \cup \{\infty\}$ ve $\partial\hat{A} = \partial A \cup \{\infty\}$ olduğu açıktır.

Lemma 3.1.1. $\Delta = \Delta(0,1)$ açık birim dairesi için $f : \Delta \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli ve $D = f(\Delta)$ olsun. Üstelik her $z \in \partial\Delta$ için $\lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta)$ değeri $\hat{\mathbb{C}}$ da mevcut olsun. Bu takdirde

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & ; \quad z \in \Delta \ \text{ ise} \\ \lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta) & ; \quad z \in \partial\Delta \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $\tilde{f} : \overline{\Delta} \to \hat{\mathbb{C}}$ sürekli fonksiyonu, f fonksiyonunun bir tek genişlemesidir. Üstelik, $\tilde{f}(\overline{\Delta}) = \hat{D}$ dır. Eğer $\tilde{f}$ ünivalent ise $\tilde{f}$ fonksiyonu $\overline{\Delta}$ kapalı dairesinden $\overline{D}$ kapanışına bir homeomorfizmdir.

İspat. $\tilde{f}$ fonksiyonunun $\overline{\Delta}$ kapalı dairesinde sürekli olduğunu göstermek için $\tilde{f}$ fonksiyonunun tanımı gereği $\partial\Delta$ sınırında sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $z_0 \in \partial\Delta$ keyfi bir nokta ve (z_n), $\overline{\Delta}$ de $z_n \to z_0$ özelliğinde keyfi bir dizi olsun. Süreklilik için $\tilde{f}(z_n) \to \tilde{f}(z_0)$ olduğunu göstermek yetecektir. $\tilde{f}(z_n) = \lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta)$ olduğundan, Δ dairesinde $\tilde{f}(z_n) \neq \infty$ iken $|f(\zeta_n) - \tilde{f}(z_n)| < n^{-1}$, $\tilde{f}(z_n) = \infty$ iken $|f(\zeta_n)| > n$ ve $|\zeta_n - z_n| < n^{-1}$ özelliğinde ζ_n noktaları seçebiliriz. Böylece $n \to \infty$ yani $\zeta_n \to z_0$ iken

$$|\zeta_n - z_0| \leq |\zeta_n - z_n| + |z_n - z_0| < \frac{1}{n} + |z_n - z_0| \to 0$$

olur. $(\zeta_n) \subset \Delta$ olduğundan $\tilde{f}(z_0)$ fonksiyonunun tanımı gereği $f(\zeta_n) \to \tilde{f}(z_0)$ dır. Eğer $f(z_0) \neq \infty$ ise yeterince büyük n indisleri için $\tilde{f}(z_n) \neq \infty$ olup $|f(\zeta_n)| < n$ olmalı. Böylece, yeterince büyük n indisleri için

$$|\tilde{f}(z_n) - \tilde{f}(z_0)| \leq |\tilde{f}(z_n) - f(\zeta_n)| + |f(\zeta_n) - \tilde{f}(z_0)| \leq \frac{1}{n} + |f(\zeta_n) - \tilde{f}(z_0)| \to 0$$

olur. Bu ise $\tilde{f}(z_0) \neq \infty$ için $\tilde{f}(z_n) \to \tilde{f}(z_0)$ olduğunu gösterir. Eğer $\tilde{f}(z_0) = \infty$ ise bu takdirde $|\tilde{f}(z_n)| \to \infty$ dur. Bu durumda ya $\tilde{f}(z_n) = \infty$ veya

$$|\tilde{f}(z_n)| \geq |\tilde{f}(\zeta_n)| - \frac{1}{n}$$

dır. Bu da $f(z_n) \to \infty = \tilde{f}(z_0)$ demektir. Böylece, $\tilde{f}$ fonksiyonu $\overline{\Delta}$ bölgesinde dizisel sürekli dolayısıyla süreklidir.

Şimdi $\widetilde{f}(\overline{\Delta}) = \hat{D}$ olduğunu gösterelim. $\widetilde{f}$ fonksiyonunun tanımından $\widetilde{f}(\overline{\Delta}) \subset \hat{D}$ olduğu açıktır. $\hat{D} \subset \widetilde{f}(\overline{\Delta})$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $w_0 \in \hat{D}$ iken $\widetilde{f}(z_0) = w_0$ olacak şekilde $z_0 \in \hat{D}$ olduğunu göstermeliyiz. D bölgesinde $(w_n) \to w_0$ olacak şekilde (w_n) dizisini seçelim. $D = f(\Delta)$ olduğundan $w_n = f(z_n) = \widetilde{f}(z_n)$ olacak şekilde Δ dairesinde (z_n) dizisi mevcuttur. $\overline{\Delta}$ kompakt olduğundan $z_{n_k} \to z_0$ olacak şekilde $\overline{\Delta}$ kapalı dairesinde (z_n) dizisinin (z_{n_k}) gibi bir alt dizisi vardır. $\widetilde{f}$ fonksiyonu z_0 noktasında sürekli olduğundan

$$w_0 = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \widetilde{f}(z_{n_k}) = \widetilde{f}(z_0)$$

elde edilir. Böylece, $\widetilde{f}(\overline{\Delta}) = \hat{D}$ olduğu gösterilmiş olur.

Eğer $\widetilde{f}$ fonksiyonu ünivalent ise bu taktirde $\widetilde{f}^{-1} : \hat{D} \to \overline{\Delta}$ fonksiyonu sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Aksi halde, $\widetilde{f}^{-1}$ ters fonksiyonu bir $w_0 \in \hat{D}$ noktasında sürekli değilse $w_n \to w_0$ iken $z_n = \widetilde{f}^{-1}(w_n) \not\to z_0 = \widetilde{f}^{-1}(w_0)$ olacak şekilde $\hat{D}$ bölgesinde bir (w_n) dizisi vardır. $\overline{\Delta}$ kompakt olduğundan, $z_0' \in \Delta$, $z_0' \neq z_0$ noktası için $(z_{n_k}) \to z_0'$ olacak şekilde bir (z_{n_k}) alt dizisi vardır. Öte yandan $\widetilde{f}$ sürekli olduğundan

$$\widetilde{f}(z_0') = \lim_{k\to\infty} \widetilde{f}(z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} = w_0 = \widetilde{f}(z_0)$$

olur. Bu ise $\widetilde{f}$ fonksiyonunun ünivalent olması ile çelişir. O halde, $\widetilde{f}$ fonksiyonu ünivalent ise $\overline{\Delta}$ kapalı dairesinden $\hat{D}$ bölgesine bir homeomorfizm dir.

3.2 Konformal Modül

G bir genel integrasyon bölgesi yani, G_i bilinen integral bölgeleri ve $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ olmak üzere $G = \cup G_n$ olsun. $\rho : G \to [0, \infty)$ biçiminde tanımlı sürekli bir fonksiyonuna G bölgesinde *yoğunluk* fonksiyonu denir. Bu fonksiyonlara G bölgesinde alan ve uzunluk ölçmede kullanılan yeni bir araç olarak bakabiliriz. Şöyle ki; G bölgesinde parçalı düzgün γ yolunun $l_\rho(\gamma)$ ile gösterilen "ρ - uzunluğu"

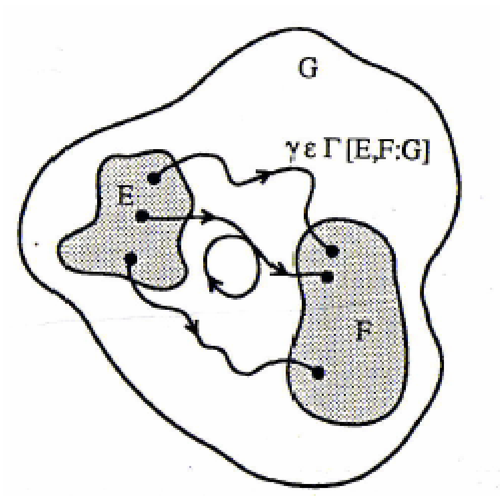
$$l_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)\,|\,dz\,|$$

eşitliği ile verilir. Gerçekte bu uzunluk γ yayı üzerine yerleştirilen bir telin kütlesine karşılık gelir. $G' \subset G$ olmak üzere G' genel integrasyon bölgesinin "ρ-alanı"

$$A_\rho(G') = \iint_{G'} [\rho(z)]^2\, dx\, dy$$

biçiminde tanımlanır. Aslında bu alan, G' bölgesi üzerine yerleştirilen ve yoğunluğu ρ olan bir levhanın kütlesini gösterir. Eğer $\rho(z) = 1$ ise $l_\rho(\gamma)$ uzunluğu γ yayının bilinen uzunluğuna, $A_\rho(G')$ alanı da G' bölgesinin bilinen alanına eşittir.

G bir genel integrasyon bölgesi, *E* ve *F*, *G* bölgesinin boş olmayan ayrık alt bölgeleri olsun. Bu özellikteki *E, F* ve *G* bölgeleri için $[E, F : G]$ gösterimi kullanılacak (Şekil 3.1).



Şekil 3.1

Böyle bir gösterime genişletilmiş reel sayı karşılık getiren $M[E, F : G]$ sayısına $[E, F : G]$ gösterimin *konform modülü* denir. (Ahlfors 1973) a göre bu sayı konform dönüşümler altında değişmez kalır. $\Gamma[E, F : G]$ gösterimi, başlangıç noktası E de bitiş noktası F de olan G de bulunan bütün parçalı düzgün eğrilerin ailesini göstersin. $M[E, F : G]$ sayısını tanımlamak için $l_\rho(\gamma) \geq 1$ özelliğindeki her $\gamma \in \Gamma[E, F : G]$ yolu için G de ρ yoğunluklarına bakarız. Böyle bir ρ fonksiyonuna $[E, F : G]$ gösterimi için *kabul edilebilir* (*admissible*) *yoğunluk* denir. $[E, F : G]$ gösterimi için G de kabul edilebilir tüm yoğunlukların sınıfı Adm $[E,F:G]$ ile gösterilir. Adm $[E,F:G]\neq\phi$ ise $M[E,F:G]$ sayısını

$$M[E,F:G]=\inf\{A_\rho(G):\rho\in \text{Adm}\,[E,F:G]\}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada infimum $[0,\infty]$ genişletilmiş reel aralığında değer alır. Daha açık bir ifade ile $M[E,F:G]$ sayısı, $\gamma\in\Gamma[E,F:G]$ yolu için $l_\rho(\gamma)\geq 1$ özelliğindeki en küçük ρ-alanıdır. $\lambda[E,F:G]=1/M[E,F:G]$ sayısına $\Gamma[E,F:G]$ ailesinin veya G de E ve F arasındaki *ekstremal uzunluğu* denir. $-\gamma\in\Gamma[F,E:G]$ olması için gerek ve yeter şart $\gamma\in\Gamma[E,F:G]$ olmasıdır.

$$\int_{-\gamma}\rho(z)\,|dz|=\int_{\gamma}\rho(z)\,|dz|$$

olduğundan $M[E,F:G]=M[F,E:G]$ olduğu açıktır.

Aşağıdaki örnek yukarıda geçen tanımların anlaşılmasına ışık tutacaktır.

Örnek 3.2.1. $a,b>0$ olmak üzere, köşeleri 0, a, $a+ib$ ve ib olan kapalı dikdörtgensel bölge G olsun (Bakınız Şekil 3.2). Eğer $E=\{x:0\leq x\leq a\}$ ve $F=\{x+ib\;:\;0\leq x\leq a\}$ ise $M[E,F:G]=a/b$ olduğunu gösterelim.

$0\leq x\leq a$ olmak üzere $\gamma_x:[0,b]\to\mathbb{C}$, $\gamma_x(y)=x+i\,y$ biçiminde tanımlanan yolu $\Gamma[E,F:G]$ ailesinin bir elemanıdır. Belli bir $\rho\in$ Adm $[E,F:G]$ yoğunluk fonksiyonu için

$$1\leq\int_{\gamma(z)}\rho(z)\,|dz|=\int_0^b\rho(x+i\,y)\,dy$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği gereği

$$1\leq\left[\int_0^b\rho(x+i\,y)\,dy\right]^2\leq\left\{\int_0^b[\rho(x+i\,y)]^2\right\}\left\{\int_0^b dy\right\}=b\int_0^b[\rho(x+i\,y)]^2\,dy$$

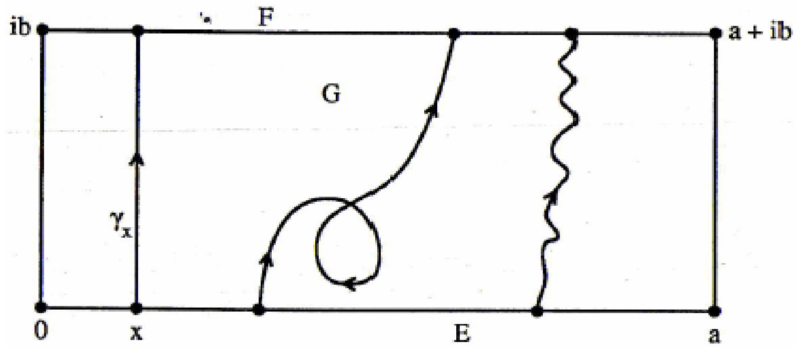
dir. O halde her bir $x\in[0,a]$ için

$$\frac{1}{b}\leq\int_0^b[\rho(x+i\,y)]^2\,dy$$

olur. Buradan

$$\frac{a}{b}=\int_0^a\frac{dx}{b}\leq\int_0^a\left\{\int_0^b[\rho(x+i\,y)]^2\,dy\right\}dx=\iint_G[\rho(z)]^2\,dA=A_\rho(G)$$

elde edilir. Böylece her bir kabul edilebilir ρ yoğunluğu için $\inf A_\rho(G) \geq a/b$ veya $M[E,F;G] \geq a/b$ olur.



Şekil 3.2

$\rho_0 : G \to [0,1]$, $\rho_0(z) \geq 1/b$ biçiminde tanımlı ρ_0 yoğunluk fonksiyonunu göz önüne alalım. Her hangi $\gamma \in \Gamma[E,F:G]$ yolu için $l(\gamma) \geq b$ olduğundan

$$l_{\rho_0}(\gamma) = \int_\gamma \rho_0(z)\,|dz| = \int_\gamma \frac{|dz|}{b} = \frac{l(\gamma)}{b} \geq 1$$

olup $\rho_0 \in \mathrm{Adm}[E,F:G]$ dır. İnfimum özelliğinden

$$M[E,F:G] \leq A_{\rho_0}(G) = \iint_G [\rho_0(z)]^2\,dx.dy = \iint_G \frac{dx.dy}{b^2} = \frac{a.b}{b^2} = \frac{a}{b}$$

elde edilir. Böylece $M[E,F:G] = a/b$ dir.

Aşağıdaki teorem $M[E,F:G]$ sayısının konform dönüşümler altında korunduğunu gösterir.

Teorem 3.2.2. D bir bölge $f : D \to \mathbb{C}$ bir konform dönüşüm olsun. Bu takdirde $G \subset D$ olmak üzere her hangi $[E,F:G]$ gösterimi için

$$M[E,F:G] = M[f(E),f(G):f(G)]$$

dir.

İspat. $M = M[E,F:G]$ ve $M' = M[f(E),f(G):f(G)]$ olsun. $M \leq M'$ olduğunu gösterilirse ispat tamamlamış olacak. Zira ters eşitsizlik f^{-1} fonksiyonunun uygulanması ile elde edilir. $M' < \infty$ kabul edelim. Aksi halde $M \leq M'$ olduğu açıktır. $\tilde{\rho} \in \mathrm{Adm}[f(E),f(G):f(G)]$ olsun. G deki ρ yoğunluğunu $\rho(z) = \tilde{\rho}[f(z)]\,|f'(z)|$ biçiminde tanımlayalım. Buna göre $\rho \in \mathrm{Adm}[E,F:G]$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu göstermek için $\Gamma[E,F:G]$ ailesinde bir $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ yolu seçelim. Bu taktirde, $\beta = f\circ\gamma$ da $\Gamma\,[f(E), f(G): f(G)]$ ailesinde bir yoldur. $\widetilde{\rho}\in \mathrm{Adm}[f(E), f(G): f(G)]$ olduğundan

$$1\le \int_{\beta}\widetilde{\rho}(z)\,|\,dz\,| = \int_a^b \widetilde{\rho}[\beta(t)]\,|\,\beta'(t)\,|\,dt = \int_a^b \widetilde{\rho}\{f\,[\gamma(t)]\}\,|\,f'(\gamma(t)\,|\,|\,\gamma'(t)\,|\,dt$$

$$= \int_a^b \rho(\gamma(t))\,|\,\gamma(t)\,||\,\gamma'(t)\,|dt = \int_{\gamma}\rho(z)|\,dz\,|$$

olur. Bu ise $\rho\in\mathrm{Adm}[E,F:G]$ olduğunu gösterir. $M\le A_\rho(G)$ olduğundan

$$M\le A_\rho(G) = \iint_G [\rho(z)]^2 dA = \iint_G [\widetilde{\rho}(f(z))]^2\,|\,f'(z)\,|^2\,dA$$

$$= \iint_{f(G)} [\widetilde{\rho}(w)]^2\,du\;dv = A_{\widetilde{\rho}}[f(G)]$$

elde edilir. Böylece, $\widetilde{\rho}$ keyfi kabul edilebilir bir yoğunluk olduğundan $M\le M'$ sonucu elde edilir. ■

Lemma 3.2.3. $\Delta=\Delta(0,1)$, $E=\overline{\Delta}(0,1/2)$ ve $0\le\theta_1<\theta_2<2\pi$ olmak üzere $z_1=e^{i\theta_1}$ ve $z_2=e^{i\theta_2}$ olsun. Bu takdirde her $F\subset\Delta-E$ bağlantılı kümesi ve $z_1,z_2\in\overline{F}$ için (Şekil 3.3)

$$M[E,F:\Delta]\ge\min\{\theta_2-\theta_1\,,\,2\pi-(\theta_2-\theta_1)\}\tag{3.2.1}$$

dir.

İspat. Modül, konform dönüşümler altında değişmediğinden $z_1=1$, $z_2=e^{i\theta_0}$ ve $0<\theta_0=\theta_2-\theta_1<2\pi$ olarak alınabilir. Böylece $F\subset\Delta-E$ bağlantılı kümesi için $1, e^{i\theta_0}\in\overline{F}$ dir. $0\le\theta<2\pi$ için $S_\theta=\{r\,e^{i\theta}:1/2\le r<1\}$ olsun. Bu takdirde F kümesi ya her $\theta\in(0,\theta_0)$ için S_θ ile kesişir ya da her $\theta\in(\theta_0,2\pi)$ için S_θ ile kesişir. Aksi taktirde hem S_ψ, hem de S_φ bölgelerinin F ile arakesitleri boş olacak şekilde $\psi\in(0,\theta_0)$ ve $\varphi\in(\theta_0,2\pi)$ açıları mevcut olacaktı. $\Delta-(E\cup S_\psi\cup S_\varphi)$ açık kümesi U ve V gibi iki bileşenden oluşacak ve bunlardan biri 1 noktasını, diğeri de $e^{i\theta_0}$ noktasını bir sınır noktası olarak sahip olacaklardı. ψ ve φ sayılarının seçimi gereği U ve V ayrık açık kümeleri F ile arakesitleri boş olmayan ve $F\subset U\cup V$ özelliğinde iki küme olacaktı. Bu durum, F kümesinin bağlantılı olması ile çelişir. O halde her bir için $S_\theta \cap F \neq \phi$ olduğunu kabul ederek işe başlayıp

$$M[E,F:\Delta] \geq \theta_0 \tag{3.2.2}$$

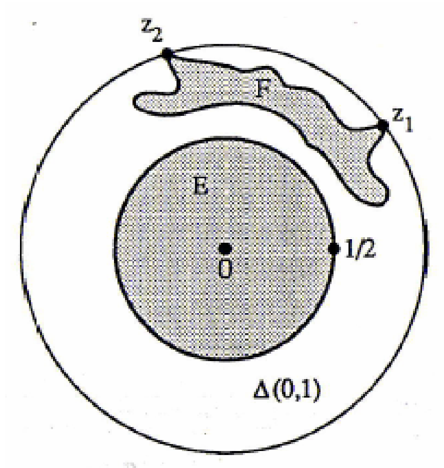
eşitsizliğini göstereceğiz. Benzer şekilde diğer durum için de

$$M[E,F:\Delta] \geq 2\pi - \theta_0 \tag{3.2.3}$$

olup (3.2.2) ve (3.2.3) birlikte

$$M[E,F:\Delta] \geq \min\{\theta_0 \,,\, 2\pi - \theta_0)\}$$

eşitsizliği gösterilmiş olacaktır.



Şekil 3.3

(3.2.2) bağıntısını göstermek için önce $M[E,F:\Delta] < \infty$ olduğunu kabul edelim. Aksi halde gösterilecek bir şey kalmayacaktır. $\rho \in [E,F:\Delta]$ keyfi kabul edilebilir bir yoğunluk fonksiyonu olsun. $A_\rho(\Delta) \geq \theta_0$ olduğunu göstermek istiyoruz. $A_\rho(\Delta)$ sayısının bu alt sınırına ulaşmak için ilk önce her bir $\theta \in (0,\theta_0)$ için $b_\theta e^{i\theta} \in F$ özelliğinde bir $b_\theta \in (1/2,1)$ sayısı seçelim ($S_\theta \cap F \neq \phi$ kabul edildiğinden böyle bir seçim mümkündür). $\gamma_\theta(r) = r e^{i\theta}$ biçiminde bir $\gamma_\theta : [1/2, b_\theta] \to \mathbb{C}$ eğrisini tanımlayalım. Kabul edilebilir yoğunluğun tanımı gereği

$$1 \leq \int_{\gamma_\theta} \rho(z)\,|\,dz\,| = \int_{1/2}^{b_\theta} \rho(r e^{i\theta})\, dr \tag{3.2.4}$$

olduğundan $\gamma_\theta \in \Gamma[E,F:\Delta]$ dır. $A_\rho(\Delta) \geq \theta_0$ olduğunu göstermek için her $0 < \alpha < \beta < \theta$ ve $0 < \varepsilon < 1$ için

$$A_\rho(\Delta) \geq (1-\varepsilon)^2\,(\beta-\alpha) \tag{3.2.5}$$

olduğunu göstermek yetecektir. Çünkü $\beta \to \theta_0$, $\alpha \to 0$ ve $\varepsilon \to 0$ iken (3.2.5) ifadesinin sağ tarafı θ_0 yapılabilir.

Bahsedilen özellikte belli α, β ve ε sayıları verilmiş olsun. (3.2.4) bağıntısı gereği her $\theta \in [\alpha,\beta]$ için

$$\int_{1/2}^{b} \rho(r\,e^{i\theta})\,d\rho \geq 1-\varepsilon \tag{3.2.6}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $b \in (1/2,1)$ sayısını vardır. Aksi taktirde n pozitif tam sayı olmak üzere b sayısı $b = b_n = 1-2^{-n-1}$ olarak seçilirse

$$\int_{1/2}^{b_n} \rho(r\,e^{i\theta_n})\,d\rho < 1-\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\theta_n \in [\alpha,\beta]$ açısını bulmak yetecektir. Bu şekilde $[\alpha,\beta]$ aralığında oluşturulan (θ_n) dizisi bu aralıkta θ gibi bir yığılma noktasına sahiptir. Gerekirse alt diziler yeniden numaralandırılarak $\theta_n \to \theta$ olduğu kabul edilebilir. $b_n \to 1$ olduğundan yeterince büyük n sayıları için $b_n \geq b_\theta$ olur. ρ negatif olmadığından yeterince büyük n sayıları için

$$\int_{1/2}^{b_\theta} \rho(e^{i\theta_n})\,dr \leq \int_{1/2}^{b_n} \rho(r\,e^{i\theta_n})\,dr < 1-\varepsilon$$

dur. ρ fonksiyonunun sürekliliği gereği $r \in [1/2, b_\theta]$ için $\rho(r\,e^{i\theta_n}) \to \rho(r\,e^{i\theta})$ olur. Böylece

$$\int_{1/2}^{b_\theta} \rho(e^{i\theta})\,dr = \lim_{n\to\infty} \int_{1/2}^{b_\theta} \rho(r\,e^{i\theta_n})\,dr \leq 1-\varepsilon$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise (3.2.4) ile çelişir. O halde (3.2.6) bağıntısını sağlayan bir b sayısı vardır.

Şimdi her $\theta \in [\alpha,\beta]$ için (3.2.6) bağıntısı doğru olacak şekilde sabit bir $b \in (1/2,1)$ sayısını seçelim. Cauchy–Schwarz eşitsizliği gereği

$$(1-\varepsilon)^2 \leq \left[\int_{1/2}^{b} \rho(e^{i\theta})\,dr\right]^2 = \left[\int_{1/2}^{b} \rho(e^{i\theta})\,r^{1/2}\ r^{-1/2}\,dr\right]^2$$

$$\leq \left\{ \int_{1/2}^{b} [\rho(e^{i\theta})]^2 \, r \, dr \right\} \left\{ \int_{1/2}^{b} \frac{dr}{r} \right\} = \operatorname{Log}(2b) \int_{1/2}^{1} [\rho(e^{i\theta})]^2 \, r \, dr$$

olur. $\operatorname{Log}(2b) < \operatorname{Log} 2 < 1$ olduğundan $\alpha \leq \theta \leq \beta$ için

$$\int_{1/2}^{b} [\rho(re^{i\theta})]^2 \, r \, dr \geq (1-\varepsilon)^2 \qquad (3.2.7)$$

sonucu elde edilir. Son olarak $S = \{re^{i\theta} : 1/2 \leq r \leq b \, , \, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, Δ da belli bir integrasyon bölgesi olarak verilmiş olsun. Kutupsal koordinatlara geçerek (3.2.7) gereği

$$A_\rho(\Delta) \geq A_\rho(S) = \iint_S [\rho(z)]^2 \, dx \, dy = \int_\alpha^\beta \left\{ \int_{1/2}^{b} [\rho(re^{i\theta})]^2 \, r \, dr \right\} d\theta$$

$$\geq \int_\alpha^\beta (1-\varepsilon)^2 \, d\theta = (1-\varepsilon)^2 (\alpha - \beta)$$

elde edilir. Bu ise (3.2.5) eşitliğini doğrular. ■

Aşağıda ki Lemma bir $[E, F : G]$ gösterimi için $M[E, F : G] = \infty$ olması ile ilgilidir. İspatı için (Palka 1991) ya bakılabilir.

Lemma 3.2.4. $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ olmak üzere $E, F \subset H$ ayrık bağlantılı kümeleri için $\overline{E} \cap \overline{F} = \{0\}$ ise

$$M[E, F : H] = \infty \qquad (3.2.8)$$

dır.

Lemma 3.2.5. $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $0 < r_0 < r_1 < \infty$ olsun. Eğer $E = \overline{\Delta}(z_0, r_0)$ ve $F = \mathbb{C} - \Delta(z_0, r_1)$ ise bu takdirde

$$M[E, F : \mathbb{C}] = 2\pi \left(Log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1} \qquad (3.2.9)$$

dir.

İspat. Modül konform dönüşümler altında değişmez kaldığından $z_0 = 0$ almak genelliği bozmayacaktır. Önce keyfi bir $\rho \in \operatorname{Adm}[E, F : \mathbb{C}]$ yoğunluğu için

$$A_\rho(\mathbb{C}) \geq 2\pi \left(Log \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1} \qquad (3.2.10)$$

olduğunu gösterelim. Her bir $\theta \in [0, 2\pi]$ için $\gamma_\theta : [r_0, r_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_\theta(r) = re^{i\theta}$ biçiminde tanımlanan γ_θ eğrisi için

$$1 \leq \int_{\gamma_\theta} \rho(z)\,|\,dz\,| = \int_{r_0}^{r_1} \rho(re^{i\theta})\,dr$$

olduğundan $\gamma_\theta \in \Gamma[E,F:\mathbb{C}]$ dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği gereği her bir $\theta \in [0,2\pi]$ için

$$1 \leq \left[\int_{r_0}^{r_1} \rho(re^{i\theta})\,dr\right]^2 \leq \left\{\int_{r_0}^{r_1} [\rho(re^{i\theta})]^2\, r\,dr\right\}\left\{\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r}\right\} = \left(Log\frac{r_1}{r_0}\right)\int_{r_0}^{r_1} [\rho(re^{i\theta})]^2\, r\,dr$$

olur. $S = \{z : r_0 \leq |\,z\,| \leq r_1\}$ olarak alınırsa

$$A_\rho(\mathbb{C}) \geq A_\rho(S) = \iint_S [\rho(z)]^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left\{\int_{r_0}^{r_1} [\rho(re^{i\theta})]^2\, r\,dr\right\} d\theta$$

$$\geq \int_0^{2\pi}\left(Log\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1} d\theta = 2\pi\left(Log\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}$$

elde edilir. $\rho \in \mathrm{Adm}[E,F:\mathbb{C}]$ keyfi olduğundan (3.2.10) eşitsizliği gereği

$$M[E,F:\mathbb{C}] \geq 2\pi\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1} \qquad (3.2.11)$$

olmasını gerektirir. Geriye (3.2.11) eşitsizliğinin tersini göstermek kalır. Bunun için de $0 < s_0 < r_0$ ve $r_1 < s_1 < \infty$ için

$$M[E,F:\mathbb{C}] \leq 2\pi\left(\mathrm{Log}\frac{s_1}{s_0}\right)\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-2}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Verilen şartlara uygun s_0 ve s_1 sabit değerlerini seçelim. $h:[0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli fonksiyonunu

$$h(r) = \begin{cases} 0 & ;\ r < s_0 \text{ veya } r > s_1 \\ [\mathrm{Log}(r_1/r_0)]^{-1} & ;\ r_0 \leq r \leq r_1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Buna göre h fonksiyonu $[s_0, r_0]$ ve $[r_1, s_1]$ aralıklarının her birinde lineerdir.

$$\rho(z) = \begin{cases} |\,z\,|^{-1}\, h(|\,z\,|);\ z \neq 0 \\ 0 \qquad ;\ z = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\rho:\mathbb{C}\to[0,\infty)$ sürekli fonksiyonu için $\rho\in \mathrm{Adm}[E,F:\mathbb{C}]$ olduğunu yani her $\gamma\in\Gamma[E,F:\mathbb{C}]$ için $\int_\gamma \rho(z)\,|dz|\geq 1$ olduğunu gösterelim. ki $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ bu özellikte bir eğri olduğunu kabul edelim.

$$c=maks\{t:t\in[a,b],\,|\gamma(t)|\leq r_0\}\ ,\ d=\min\{t:t\in[a,b],\,|\gamma(t)|\geq r_1\}$$

olarak tanımlayalım. Buna göre $|\gamma(c)|=r_0$, $|\gamma(d)|=r_1$ ve $c\leq t\leq d$ için $r_0\leq|\gamma(t)|\leq r_1$ dir. Özellikle, $t\in[c,d]$ için $\rho(\gamma(t))=[|\gamma(t)|\,\mathrm{Log}(r_1/r_0)]^{-1}$ dir. Böylece

$$\int_\gamma \rho(z)\,|dz|=\int_a^b \rho(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt\geq\int_c^d \rho(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt=\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}\int_c^d\frac{|\gamma'(t)|\,dt}{|\gamma(t)|}$$

$$=\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}\int_c^d\frac{|\overline{\gamma(t)}\,\gamma'(t)|\,dt}{|\gamma(t)|^2}\geq\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}\int_c^d\frac{\mathrm{Re}[\overline{\gamma(t)}\,\gamma'(t)]dt}{|\gamma(t)|^2}$$

$$=\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}\int_c^d\frac{d}{dt}\{\mathrm{Log}|\gamma(t)|\}dt=\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}\left[\mathrm{Log}|\gamma(t)|\right]_c^d$$

$$=\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)=1$$

bulunur yani $\rho\in\mathrm{Adm}[E,F:\mathbb{C}]$ dır. $|z|\leq s_0$ veya $|z|\geq s_1$ iken $\rho(z)=0$ ve her z için $\rho(z)\leq[|z|\,\mathrm{Log}(r_1/r_0)]^{-1}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$M[E,F:\mathbb{C}]\leq A_\rho(\mathbb{C})=\iint_C[\rho(z)]^2\,dx\,dy=\iint_{s_0\leq|z|\leq s_1}[\rho(z)]^2\,dx\,dy\leq\left(Log\frac{r_1}{r_0}\right)^{-2}\iint_{s_0\leq|z|\leq s_1}\frac{dx\,dy}{|z|^2}$$

$$=\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_{s_0}^{s_1}\frac{r}{r^2}\,dr\,d\theta=2\pi\left(\mathrm{Log}\frac{s_1}{s_0}\right)\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-2}$$

sonucu elde edilir. $s_0\to r_0$ ve $s_1\to r_1$ alınırsa

$$M[E,F:\mathbb{C}]\leq 2\pi\left(\mathrm{Log}\frac{r_1}{r_0}\right)^{-1}$$

elde edilir. ■

Lemma 3.2.6. $E_1\subset E_2$, $F_1\subset F_2$ ve $G_1\subset G_2$ olmak üzere $[E_1,F_1:G_1]$ ve $[E_2,F_2:G_2]$ iki gösterim olsun. Bu takdirde

$$M[E_1,F_1:G_1]\leq M[E_2,F_2:G_2]$$

dir.

İspat. $M[E_2,F_2:G_2]<\infty$ olduğunu kabul edelim. Aksi takdirde ispat açıktır. $\rho\in\mathrm{Adm}[E_2,F_2:G_2]$ ise $\rho\in\mathrm{Adm}[E_1,F_1:G_1]$ dir. O halde $\rho\in\mathrm{Adm}[E_2,F_2:G_2]$ keyfi olduğundan

$$M[E_1,F_1:G_1]\le A_\rho(G_1)\le A_\rho(G_2)$$

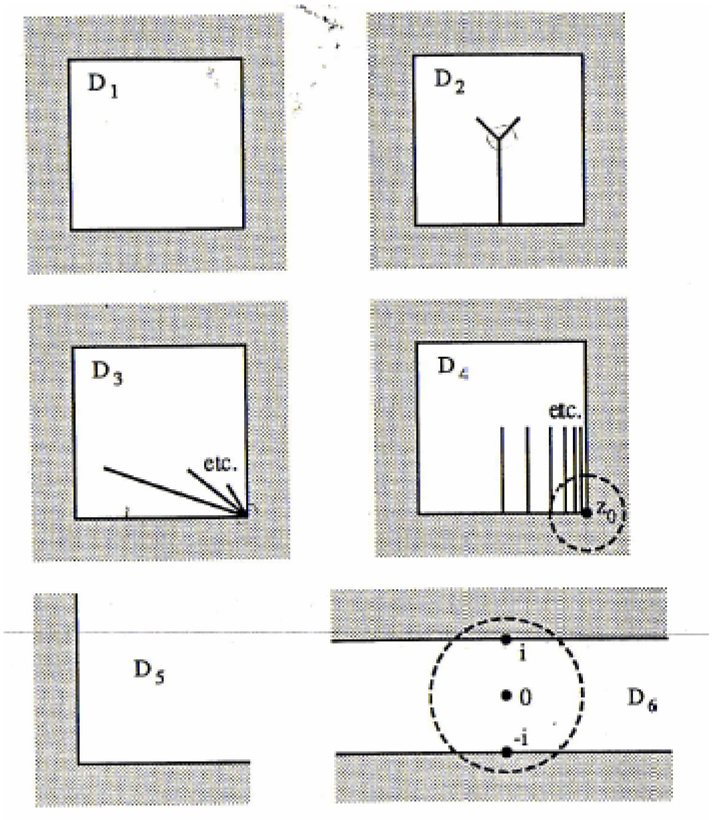
dir. ■

3.3 Birim Dairenin Konform Genişlemesi

$\Delta=\Delta(0,1)$ birim dairesinden $\mathbb{C}$ ye olan keyfi bir f konform dönüşümünün $\overline{\Delta}$ dan $\hat{\mathbb{C}}$ içine sürekli bir dönüşüme genişlemesi kesin değildir. Böyle bir genişleme sadece $D=f(\Delta)$ bölgesinin sınırının uygun bir düzgünlükte olması durumunda mümkündür. Bunun için bazı kavramları tanımaya ihtiyaç vardır.

Kompleks düzlemde bir D bölgesi verilmiş olsun. Eğer her bir $z\in\hat{\partial}D=\partial D\cup\{\infty\}$ noktası ve $r>0$ sayısı için $D\cap\Delta(z,s)$ kümesi $D\cap\Delta(z,r)$ açık kümesinin en çok sonlu sayıda bileşeni ile kesişecek şekilde en az bir $s\in(0,r)$ varsa D bölgesine *sınırı boyunca sonlu bağlantılıdır* denir. Burada hem s sayısının büyüklüğü hem de $D\cap\Delta(z,s)$ ile kesişen $D\cap\Delta(z,r)$ kümesinin bileşenlerinin sayısı z ve r ye bağlı olarak değişebilir. En güzel durum ise her bir $z\in\hat{\partial}D$ ve her bir $r>0$ sayısı için $D\cap\Delta(z,s)$, $D\cap\Delta(z,r)$ kümesinin tam bir bileşeni ile kesişecek biçimde z ve r ye bağlı bir $s\in(0,r)$ sayısının bulunmasıdır. Böyle bir D bölgesine *sınırı boyunca lokal bağlantılıdır* denir. Şekil 3.4 de D_1 sınırı boyunca lokal bağlantılı, D_2 ve D_3 sınırları boyunca sonlu bağlantılı fakat D_4 sonlu bağlantılı değildir. Sınırsız bir D bölgesinin sınırı boyunca sonlu (veya lokal) bağlantılı olması, ∂D sınırının tüm noktalarında şartların sağlanması yanında ∞ da da sağlanması gerekir. Örneğin D_5 bölgesi sınırı boyunca lokal bağlantılıdır ve D_6 şeridi ise sınırı boyunca sonlu bağlantılıdır. $0<r<1$ için $D_6\cap\Delta(\infty,r)=\{z\in D_6:|z|>1/r\}$ bölgesi iki bileşene sahiptir. Bu ise D_6 bölgesinin sınırı boyunca lokal bağlantılı olmasına engeldir.

Yukarıda verilen tanımlar bizi aşağıdaki ilk genişleme sonucuna götürür.



Şekil 3.4

Teorem 3.3.1. $D \subset C$ $\mathbb{C}$ bir bölge f Δ dan D üzerine bir konform dönüşüm olsun. f dönüşümünün $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}$ üzerine sürekli bir $\widetilde{f}$ fonksiyonuna genişletilmesi için gerek ve yeter şart D bölgesinin sınırı boyunca sonlu bağlantılı olmasıdır.

İspat. *D*, sınırı boyunca bağlantılı bir bölge olsun. Lemma 3.1.1 gereği her bir $z \in \partial\Delta$ için $\lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta)$ limitinin $\hat{\mathbb{C}}$ da mevcut olduğu gösterilebilirse $\widetilde{f}$ fonksiyonunun varlığı gösterilmiş olur. Aksini kabul edelim yani, bir $z_0 \in \partial\Delta$ noktasında $\lim\limits_{\zeta \to z_0} f(\zeta)$ limiti $\hat{\mathbb{C}}$ da mevcut olmasın. (z_n), Δ da $z_n \to z_0$ özelliğinde bir dizi olsun. $w_n = f(z_n)$ denirse bu takdirde $\hat{D}$ kompakt olduğundan $w_n \to w_0$ ve $w_0 \in \hat{D}$ dır. Gerçekte w_0 noktası ∂D sınırı üzerindedir. Aksi takdirde $w_0 \in D$ olup f^{-1} fonksiyonunun w_0 da ki sürekliliği gereği $f^{-1}(w_0) \in \Delta$, yani

$$z_0 = \lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} f^{-1}(w_n) = f^{-1}(w_0) \in \Delta$$

olur. Bu ise çelişki oluşturur. Kabul edelim ki $\lim_{\zeta \to z_0} f(\zeta)$ mevcut olmasın. Yani Δ da ikinci bir (z'_n) dizisini için $z'_n \to z_0$ iken $w'_n = f(z'_n) \not\to w_0$ olsun. Önceki tartışma gereği, gerekirse bir alt dizi oluşturarak, $w'_n \to w'_0 \in \hat{\partial} D$ ve $w'_0 \neq w_0$ dır. $\overline{\Delta}(w_0, 2r)$ ve $\overline{\Delta}(w'_0, 2r)$ daireleri ayrık olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı seçelim.

D sınırı boyunca sonlu bağlantılı olduğundan $D \cap \Delta(w_0, s)$ kümesi $D \cap \Delta(w_0, r)$ kümesinin sadece sonlu sayıda bileşeni ile kesişecek biçimde bir $s \in (0, r)$ sayısı seçmek mümkündür. Yeterince büyük n indisleri için $w_n \in D \cap \Delta(w_0, s)$ olduğundan sonsuz çokluktaki n sayıları için bu sonlu sayıdaki bileşenlerden en az biri w_n yi bulundurmak zorundadır. Başka bir deyişle, her k için $D \cap \Delta(w_0, r)$ kümesinin belli bir E' bileşenine ait olan $(w_{n_k}) \subset (w_n)$ alt dizisi bulunabilir. Benzer şekilde her k için $(w'_{m_k}) \subset (w'_n)$ alt dizisi F' de kalacak biçimde $D \cap \Delta(w'_0, r)$ kümesinin bir F' bileşeni bulunabilir. Dikkat edilirse $E = f^{-1}(E')$ ve $F = f^{-1}(F')$ kümeleri Δ da ayrık bağlantılı kümelerdir.

Şimdi $[E', F' : D]$ ve $[E, F : \Delta]$ gösterimlerini inceleyelim. w_0 veya w'_0 noktalarından en az biri sonlu olmak zorundadır. Kabul edelim ki $w_0 \neq \infty$ olsun. E' ve F' kümelerinin oluşumları gereği $E' \subset \widetilde{E} = \overline{\Delta}(w_0, r)$ ve $F' \subset \widetilde{F} = \mathbb{C} - \Delta(w_0, 2r)$ dir. Lemma 3.2.6 ve Lemma 3.2.5 gereği

$$M[E', F' : D] \leq M[\widetilde{E}, \widetilde{F} : C] = \frac{2\pi}{\ln 2} < \infty$$

olur. Bütün k lar için $z_{n_k} = f^{-1}(w_{n_k}) \in E$ ve $z_{n_k} \to z_0$ olduğundan $z_0 \in \overline{E}$ dır. Benzer sebeplerden $z_0 \in \overline{F}$ dir. h, Δ dairesini $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ yarı düzlemine dönüştüren $h(z_0) = 0$ özelliğinde bir Möbius dönüşümü olsun. $h(E)$ ve $h(F)$ kümeleri H bölgesinin ayrık bağlantılı alt kümeleridir ve orijin kapanışlarının ortak noktalarıdır. Lemma 3.2.4 ve Teorem 3.2.2 gereği

$$M[E, F : \Delta] = M[h(E), h(F) : H] = \infty$$

dur. Buradan $M[E,F:\Delta] \neq M[E',F':D]$ olur. Bu ise modülün konform dönüşümler altında değişmez kalması ile çelişir. O halde $\lim_{\zeta \to z} f(\zeta)$ $\hat{\mathbb{C}}$ da mevcut olmalı. $\tilde{f}$ genişlemesinin varlığı Lemma 3.1.1 de ifade edilmiştir.

Teoremin tersini göstermek için $\tilde{f}$ genişlemesi mevcut olduğunu fakat D bölgesinin sınırı boyunca sonlu bağlantılı olmadığını kabul edelim. O halde her bir $s \in (0,r)$ için $D \cap \Delta(w_0,s)$ kümesi $D \cap \Delta(w_0,r)$ kümesinin sonsuz çoklukta bileşeni ile kesişecek şekilde bir $w_0 \in \hat{\partial} D$ noktası ve $r > 0$ sayısı vardır. $n \neq m$ için w_n ve w_m $D \cap \Delta(w_0,r)$ kümesinin farklı bileşenlerinde kalacak ve $w_n \to w_0$ olacak şekilde D de bir (w_n) dizisini oluşturabiliriz. $z_n = f^{-1}(w_n)$ diyelim. Gerekirse bir alt diziye geçerek $z_n \to z_0 \in \partial\Delta$ kabul edebiliriz. $\tilde{f}$ fonksiyonu z_0 noktasında sürekli ve

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{n \to \infty}(w_n) = w_0$$

olduğundan $\tilde{f}[\overline{\Delta} \cap \Delta(z_0,\delta)] \subset \Delta(w_0,r)$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. $C = \Delta \cap \Delta(w_0,r)$ kümesi bağlantılıdır ve $\tilde{f}(C) = f(C) \subset D \cap \Delta(w_0,r)$ dır. Kendisi bağlantılı bir küme olduğundan $f(C)$, $D \cap \Delta(w_0,r)$ kümesinin belli bir bileşeninin alt kümesi olmak zorundadır. Başka bir deyişle yeterince büyük n ler için $z_n \in C$ ve $w_n \in f(C)$ demektir. Bu ise w_n noktalarının $D \cap \Delta(w_0,r)$ kümesinin farklı bileşenlerinde olması ile çelişir. O halde D sınırı boyunca sonlu bağlantılı olmak zorundadır. ■

Teorem 3.3.1, $\Delta = \Delta(0,1)$ dairesinin Şekil 3.4 deki D_1, D_2, D_3, D_5 veya D_6 tipindeki bölgelerden biri üzerine $\overline{\Delta}$ kapanışının sürekli olarak genişletilebileceğini ifade eder. Buna karşılık Δ dairesinden D_4 tipindeki bölgeler üzerine bir konform dönüşümün $\overline{\Delta}$ ye sürekli bir genişlemesi yoktur.

Caratheodory, ispatı çok daha karmaşık topolojik bilgi gerektiren Teorem 3.3.1 in aşağıdaki değişik şeklini gösterdi: Δ dan D üzerine bir f konform dönüşümü bir $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}$ ya bir $\tilde{f}$ sürekli dönüşümüne genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart $\hat{\partial} D$ sınırının $\hat{\mathbb{C}}$ nın lokal bağlantılı bir alt kümesinin olmasıdır. Caratheodory nin bu sonucu ispatı (Pommerenke 1975) de bulunabilir.

Teorem 3.3.1 D nin sınırı boyunca sonlu bağlantılı olması durumunda da geçerlidir.

Teorem 3.3.2. f fonksiyonu $\Delta = \Delta(0,1)$ dairesinden $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerine konform bir dönüşüm olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}$ üzerine bir homeomorfizme genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart D bölgesinin sınırı boyunca lokal bağlantılı olmasıdır.

İspat. D nin sınırı boyunca lokal bağlantılı olduğunu kabul edelim. Teorem 3.3.1 gereği f fonksiyonu $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}$ üzerine sürekli bir $\tilde{f}$ fonksiyonuna genişletilebilir. Eğer $\tilde{f}$ fonksiyonunun ünivalent olduğunu gösterirsek Lemma 3.1.1 gereği $\tilde{f}$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu göstermiş oluruz. Bir an için $\tilde{f}$ nın ünivalent olmadığını kabul edelim. f ünivalent ve $\tilde{f}(\partial\Delta) \subset \hat{\partial} D$ olduğundan $\tilde{f}$ nın ünivalent olmadığı yer sadece $\partial\Delta$ üzerindedir. O halde farklı z_0 ve z_0' noktaları için $\tilde{f}(z_0) = \tilde{f}(z_0')$ olacak şekilde $z_0 = e^{i\theta_1}$ ve $z_0' = e^{i\theta_2}$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ noktaları vardır. $w_0 = \tilde{f}(z_0) = \tilde{f}(z_0')$, $E = \overline{\Delta}(0,1/2)$, $E' = f(E)$ ve $m = \min\{\theta_2 - \theta_1, 2\pi - (\theta_2 - \theta_1)\}$ diyelim. E', D de kompakt ve $w_0 \in \hat{\partial} D$ noktası E' ye ait değildir. Bu yüzden $E' \cap \overline{\Delta}(w_0, r_1) = \phi$ olacak biçimde bir $r_1 > 0$ sayısı seçilebilir. Diğer yandan $2\pi[\mathrm{Log}(r_1/r_0)]^{-1} < m$ olacak biçimde $r_0 \in (0, r_1)$ seçelim. Son olarak D sınırı boyunca lokal bağlantılı olduğundan $D \cap \Delta(w_0, s)$, $D \cap \Delta(w_0, r_0)$ kümesinin bir F' bileşeninde kalacak şekilde $s \in (0, r_0)$ seçelim. Eğer $w_0 \ne \infty$ ise $E' \subset \tilde{E} = \mathbb{C} - \Delta(w_0, r_1)$ ve $F' \subset \tilde{F} = \overline{\Delta}(w_0, r_0)$ dır. Diğer taraftan, eğer $w_0 = \infty$ ise $E' \subset \tilde{E} = \overline{\Delta}(0, r_1^{-1})$ ve $F' \subset \tilde{F} = \mathbb{C} - \Delta(0, r_0^{-1})$ olup her iki durumda da Lemma 3.2.6 ve 3.2.5 gereği

$$M[E', F' : D] \le M[\tilde{E}, \tilde{F} : \mathbb{C}] = 2\pi \left(\mathrm{Log} \frac{r_1}{r_0} \right)^{-1} \le m \tag{3.3.1}$$

dir. $F = f^{-1}(F') \subset \Delta - E$ bağlantılı bir kümedir. Eğer (z_n), $z_n \to z_0$ özelliğinde Δ da bir dizi ise $\tilde{f}$ fonksiyonunun sürekliliğinden $w_n = f(z_n) \to \tilde{f}(z_0) = w_0$ dır. Bu durum yeterince büyük n ler için (w_n) dizisinin $D \cap \Delta(w_0, s)$ kümesinde dolayısıyla F' kümesinde olduğunu gösterir. Bu durumda yeterince büyük n ler için $z_n \in F$ demektir.

$z_n \to z_0$ olduğundan $z_0 \in \overline{F}$ dır. Benzer şekilde z_0' noktasının da $\overline{F}$ da olduğu görülür. Lemma 3.2.3 ve Teorem 3.2.2 birlikte düşünüldüğünde

$$m \leq M\,[E, F : \Delta] = M\,[E', F' : D]$$

olduğu görülür. Bu ise (3.3.1) eşitsizliği ile çelişir. O halde $\widetilde{f}$ ünivalent ve Lemma 3.2.1 gereği $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}$ üzerine bir homeomorfizmdir.

Tersine, $\widetilde{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun $\overline{\Delta}$ da homeomorfizme bir genişlemesi olsun. $w_0 \in \hat{\partial} D$ ve $r > 0$ alalım. $z_0 = \widetilde{f}^{-1}(w_0)$ denirse $\widetilde{f}$ sürekli olduğundan $\widetilde{f}\,[\overline{\Delta} \cap \Delta(z_0, \delta)] \subset \Delta(w_0, r)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı seçebiliriz. $f\,[\Delta \cap \Delta(z_0, \delta)]$ kümesi $D \cap \Delta(w_0, r)$ kümesinde bağlantılı olduğundan $f\,[\Delta \cap \Delta(z_0, \delta)]$, $D \cap \Delta(w_0, r)$ kümesinin belli bir C bileşeni içinde kalır. Şimdi, yeterince küçük $s \in (0, r)$ için $D \cap \Delta(w_0, s) \subset C$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksini yani $w_n \to w_0$ özelliğinde $D - C$ de bir (w_n) dizisinin olduğunu kabul edelim. $z_n = f^{-1}(w_n)$ denirse (z_n), $z_{n_k} \to z_0' \in \overline{\Delta}$ olacak şekilde bir alt diziye sahiptir. Süreklilik gereği

$$\widetilde{f}(z_0') = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} = w_0$$

dır. $\widetilde{f}$ fonksiyonunun bire birliği gereği $z_0 = z_0'$ dır. Bu ise yeterince büyük k değerleri için $z_{n_k} \in \Delta \cap \Delta(z_0, \delta)$ olduğunu gösterir. Böylece aynı k lar için $w_{n_k} = f(z_{n_k}) \in C$ dir. Bu ise $D - C$ de (w_n) dizisinin seçimi ile çelişir. Başka bir deyişle, verilen bir $w_0 \in \hat{\partial} D$ noktası ve $r > 0$ sayısı için $s \in (0, r)$ yeterince küçük olmak şartıyla $D \cap \Delta(w_0, s)$ kümesi $D \cap \Delta(w_0, r)$ nın bir bileşeni ile kesişir. Böylece D sınırı boyunca lokal bağlantılıdır. ■

3. 4 Caratheodory–Osgood Teoremi

D, $\mathbb{C}$ de bütün düzlem olmayan basit bağlantılı bir bölge olsun. D bölgesinin sınırı boyunca lokal bağlantılı olduğunu kabul edelim. $\widetilde{f}$, $\Delta = \Delta(0,1)$ dairesini D üzerine dönüştüren herhangi bir f konform dönüşümünün $\overline{\Delta}$ ye homeomorfik bir genişlemesi olmak üzere

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \hat{\mathbb{C}}, \quad \gamma(t) = \widetilde{f}(e^{it})$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu takdirde γ, $\hat{\mathbb{C}}$ de basit ve kapalı bir eğridir ve bu eğri $\hat{\partial}D$ dir. Bu yüzden $\hat{\partial}D$, $\hat{\mathbb{C}}$ da bir Jordon eğrisidir. Bir D bölgesinin $\hat{\partial}D$ sınırı $\hat{\mathbb{C}}$ de bir Jordon eğrisi ise D ye $\hat{\mathbb{C}}$ da bir *Jordon bölgesi* denir. Eğer D, $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge, $D \neq \mathbb{C}$ ve D sınırı boyunca lokal bağlantılı ise bu taktirde D bir Jordon bölgesidir. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Yani D, $\mathbb{C}$ de bir Jordon bölgesi ise bu taktirde D basit bağlantılı ve sınırı boyunca lokal bağlantılıdır. Bu son ifade Caratheodory-Osgood genişleme teoreminin ispatının bir parçası olmasına rağmen burada ispatına girmeyeceğiz. Böylece Jordon eğri teoreminin $\hat{\mathbb{C}}$ için de geçerli olduğunu ifade etmiş bulunuyoruz. Yani J, $\hat{\mathbb{C}}$ de bir Jordon eğrisi ise bu takdirde D ve D^*, $\hat{\partial}D = \hat{\partial}D^* = J$ özelliğinde $\hat{\mathbb{C}}$ düzleminin ayrık alt bölgeleri olmak üzere $\hat{\mathbb{C}} - J = D \cup D^*$ dır. Bu durum $\mathbb{C}$ de bir D Jordon bölgesinin basit bağlantılı olduğunu gösterir. Çünkü $\hat{\mathbb{C}} - D$ bağlantılıdır. Gerçekten $J = \hat{\partial}D$ eğrisine Jordon eğri teoremi uygulanırsa, $\hat{\mathbb{C}} - D = \hat{D}^*$ kümesinin bağlantılı bir küme olduğu görülür.

Teorem 3.4.1 (Caratheodory-Osgood Teoremi). D, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $f : \Delta = \Delta(0,1) \to D$ bir konform dönüşüm olsun. f fonksiyonunun $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}$ üzerine bir homeomorfizme genişletilebilmesi için gerek ve yeter şart D bölgesinin bir Jordon bölgesi olmasıdır.

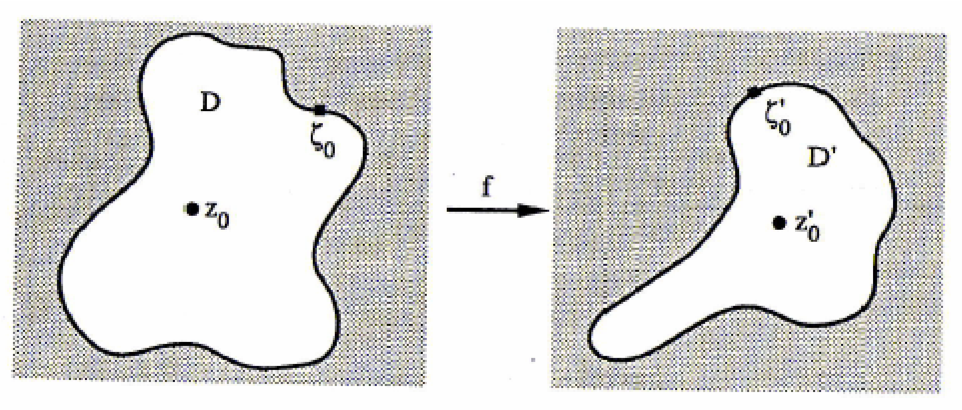
Teoremin ispatı, Teorem 3.2.2 yi sınırı basit kapalı parçalı düzgün bir eğri olan sınırlı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesine uygulamakla elde edilir.

Şimdi Teorem 3.2.2'nin kullanışlı bir sonucunu verelim.

Sonuç 3.4.2. D ve D' iki Jordon bölgesi olmak üzere $f : D \to D'$ bir konform dönüşüm olsun. Bu takdirde f fonksiyonu $\hat{D}$ dan $\hat{D}'$ya bir $\tilde{f}$ homeomorfizmine genişletilebilir.

İspat. Riemann Dönüşüm Teoremi gereği $\Delta = \Delta(0,1)$ açık dairesini D üzerine dönüştüren bir g konform dönüşümü vardır. Bu takdirde $h = fog$ fonksiyonu da Δ yı D' ye konform olarak dönüştürür. Caratheodory-Osgood teoremi gereği g ve h $\overline{\Delta}$ de $\tilde{g}$ ve $\tilde{h}$ gibi iki homeomorfizme genişletilebilir. Böylece $\tilde{h} o \tilde{g}^{-1}$ fonksiyonu da $\hat{D}$ dan $\hat{D}'$ üzerine bir homeomorfik genişleme olur. Bu ise f fonksiyonunun genişlemesidir. ■

Teorem 2.4.5 de görüldüğü gibi düzlemde basit bağlantılı bir D $(\neq \mathbb{C})$ bölgesinden aynı özellikte başka bir D' bölgesi üzerine, belli bir $z_0 \in D$ noktasında $f(z_0) \in D'$ ve $\text{Arg}[f'(z_0)]$ değerleri belirlenmiş ise bir f konform dönüşümü tek olarak belirlenmiş olur. D ve D' Jordon bölgeleri olduğunda Caratheodory-Osgood teoremi bu bölgeler arasında bir konform dönüşüşü tek olarak belirlemek için başka anlamlara kapı açar. Bunlardan biri Şekil 3.5 de verilen durumda ortaya çıkar. Aşağıda verilen bu durum Riemann ın kendi ifadesi olan sonuçtur.



Şekil 3.5

Teorem 3.4.3. D ve D' kompleks düzlemde iki Jordon bölgesi olsun. Verilen $z_0 \in D$, $\zeta_0 \in \hat{\partial} D$, $z_0' \in D'$ ve $\zeta_0' \in \hat{\partial} D'$ noktaları için $f(z_0) = z_0'$, $f(\zeta_0) = \zeta_0'$ özelliğinde D yi D' üzerine konform olarak resmeden $\hat{D}$ dan $\hat{D}'$ üzerine bir tek f homeomorfizmi vardır.

İspat. φ, $\Delta = \Delta(0,1)$ den D üzerine $\varphi(0) = z_0$ özelliğinde bir konform dönüşüm ve $\tilde{\varphi}$ dönüşümü de onun $\overline{\Delta}$ daki homeomorfik genişlemesi olsun. Eğer $\tilde{\varphi}^{-1}(\zeta_0) = e^{i\theta_0}$ ise bu takdirde $g(z) = \tilde{\varphi}(e^{i\theta_0} z)$ dönüşümü, Δ yi D üzerine konform olarak resmeden $g(0) = z_0$ ve $g(1) = \zeta_0$ özelliğinde $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}$ da üzerine bir g homeomorfizmi tanımlar. Benzer şekilde $h(0) = z_0'$ ve $h(1) = \zeta_0'$ özelliğinde Δ yi D' bölgesine konform olarak dönüştüren $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}'$ üzerine bir h homeomorfizmi oluşturulur. $f = hog^{-1}$ fonksiyonu $\hat{D}$ dan $\hat{D}'$ bölgesi üzerine istenilen özelliklere sahip bir homeomorfizmdir. Üstelik böyle bir f dönüşümü bir tektir. Gerçekten, diyelim ki f_0, z_0 ile z_0' ve ζ_0 ile ζ_0' noktalarını karşılık tutan $\hat{D}$ den $\hat{D}'$ üzerine bir başka homeomorfizm olsun. Bu takdirde $h^{-1}ofog$ dönüşümü $\overline{\Delta}$ den yine kendisi üzerine bir homeomorfizmdir ve Δ dairesini kendi üzerine konform olarak dönüştürür. Üstelik 0 ve 1 noktalarını sabit bırakır. Δ dan kendi üzerine 0 noktasını sabit bırakan konform dönüşüm özdeşlik dönüşümü ve onun rotasyonlardır. 1 noktasını sabit bırakan böyle bir böyle bir dönüşüm ancak özdeşlik dönüşümüdür. Böylece $z \in \overline{\Delta}$ için $(h^{-1} o f o g)(z) = z$ dır. Bu ise her $z \in \overline{D}$ için $f_0(z) = (hog^{-1})(z) = f(z)$ olması demektir. Bu durum f fonksiyonunun tekliğini gösterir. ■

Tanım 3.4.4. $\mathbb{C}$ de bir D Jordon bölgesi ve $(\varsigma_0, \varsigma_1, \varsigma_2)$ D bölgesinin farklı sınır noktalarının sıralı üçlüsü olsun. Eğer $\gamma(a) = \gamma(b) = \varsigma_0$ ve $t_1 < t_2$ için $\gamma(t_1) = \varsigma_1$, $\gamma(t_2) = \varsigma_2$ özelliklerine sahip $\gamma : [a,b] \to \partial\hat{D}$ eğrisi pozitif yönlendirilmiş ise $(\varsigma_0, \varsigma_1, \varsigma_2)$ sıralı üçlüsüne veya $\hat{\partial} D$ sınırına D ye göre *pozitif yönlendirilmiştir* denir. Bu durumda $\hat{\partial} D$ de alınan $(\varsigma_0, \varsigma_1, \varsigma_2)$ sıralı üçlüsü $\varsigma_0, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_0$ biçiminde sıralanır. Eğer aynı parametrelendirmede bu üçlü $\varsigma_0, \varsigma_2, \varsigma_1, \varsigma_0$ biçiminde sıralanırsa $\hat{\partial} D$ ye D bölgesine göre *negatif yönlendirilmiştir* denir.

Eğer f fonksiyonu $\Delta = \Delta(0,1)$ dairesini $\mathbb{C}$ de bir D Jordon bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür, $\widetilde{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun $\overline{\Delta}$ deki homeomorfik genişlemesi ve $\partial \hat{D}$ sınırının $[0,2\pi]$ üzerindeki parametrik ifadesi $\gamma(t) = \widetilde{f}(e^{it})$ ise bu takdirde γ, D bölgesine göre pozitif olarak yönlendirilmiştir.

Bu hazırlıklardan sonra aşağıdaki sonucu ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 3.4.5. D ve D' kompleks düzlemde iki Jordon bölgesi olsun. $\hat{\partial} D$ sınırı $(\varsigma_0, \varsigma_1, \varsigma_2)$ farklı noktaların sıralı üçlüsü ile, $\hat{\partial} D'$ de $(\varsigma_0', \varsigma_1', \varsigma_2')$ farklı noktaların sıralı üçlüsü ile yönlendirilmiş olsun. Bu takdirde $j = 0, 1, 2$ için $f(\varsigma_j) = \varsigma_j'$ olacak şekilde $\hat{D}$ dan $\hat{D}'$ üzerine bir tek f homeomorfizmi vardır. Üstelik f fonksiyonu D bölgesini D' üzerine konform olarak dönüştürür.

İspat. Her iki nokta üçlüsünün pozitif olarak yönlendirildiğini kabul edelim. $\Delta = \Delta(0,1)$ olmak üzere, g fonksiyonu $g(1) = \varsigma_0$ özelliğinde ve Δ dairesini D üzerine konform olarak dönüştüren $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}'$ ne bir homeomorfizm olsun. Ayrıca, h fonksiyonu da $h(1) = \varsigma_0'$ özelliğinde ve Δ dairesini D' üzerine konform olarak dönüştüren $\overline{\Delta}$ dan $\hat{D}'$ ne bir homeomorfizm olsun. $0 \le t \le 2\pi$ için $\gamma(t) = g(e^{it})$ ile verilen $\hat{\partial} D$ sınırının γ gösterimi D bölgesine göre pozitif olarak yönlendirildiğinden, $\gamma(0) = g(1) = \varsigma_0$ olduğundan ve $(\varsigma_0, \varsigma_1, \varsigma_2)$ D bölgesine göre pozitif olarak yönlendirildiğinden $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ için $\varsigma_1 = g(e^{i\theta_1})$ ve $\varsigma_2 = g(e^{i\theta_2})$ yazılabilir. Benzer sebepten dolayı $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi$ için $\varsigma_1' = h(e^{i\alpha_1})$ ve $\varsigma_2' = h(e^{i\alpha_2})$ yazılabilir. φ, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(e^{i\theta_1}) = e^{i\alpha_1}$ ve $\varphi(e^{i\theta_2}) = e^{i\alpha_2}$ özelliğinde bir Möbius dönüşümü olsun. Bu takdirde φ dönüşümü $\partial\Delta$ sınırını kendisi üzerine dönüştürür. Böylece $\varphi(\Delta) = \Delta$ yada $\varphi(\Delta) = \hat{\mathbb{C}} - \overline{\Delta}$ dır. Eğer ikincisi doğru ise o zaman φ Δ da basit bir kutba sahip ve sıfırı yoktur. $\partial\Delta$ sınırının parametrik gösterimi $\beta(t) = \varphi(e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$, ile verilsin. Argüment Prensibi gereği

$$n(\beta, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(e^{it})\, i\, t\, dt}{\varphi(e^{it})} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\varphi'(z)\, dz}{\varphi(z)} = -1$$

elde edilir. Bu ise β eğrisinin Δ dairesine göre negatif olarak yönlendirildiğini gösterir. Halbuki $(\beta(0), \beta(\theta_1), \beta(\theta_2)) = (1, e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2})$ olduğundan bu durum mümkün değildir. Böylece $\varphi(\overline{\Delta}) = \overline{\Delta}$ ve $f = h \circ \varphi \circ g^{-1}$ istenilen özellikte bir homeomorfizm olmalı.

Şimdi f fonksiyonunun tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki f_0 $\hat{D}$ bölgesini $\hat{D}'$ üzerine dönüştüren istenilen özelliklere sahip keyfi bir homeomorfizm olsun. Bu takdirde $\varphi_0 = g^{-1} \circ f_0^{-1} \circ f \circ g$ fonksiyonu $\overline{\Delta}$ dan yine kendisi üzerine bir homeomorfizm olup Δ dairesini kendisi üzerine konform olarak resmeder ve $1, e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$ noktalarını sabit bırakır. Teorem 2.2.7 gereği φ_0, bir Möbius dönüşünün $\overline{\Delta}$ ye kısıtlanışıdır. φ_0 üç noktayı sabit bıraktığından φ_0 Möbius dönüşümü özdeşlik dönüşümü olmak zorundadır. Böylece $f_0 = f$ sonucu elde edilir. ■

Bu bölümdeki sonuçlar bir çok uygulamaya sahiptir. Bunlardan biri de herhangi sınırlı Jordon bölgesinin Dirichlet problemi için uygun olduğudur. Bunu göstermek için Caratheodory-Osgood Teoremini kullanılır.

Teorem 3.4.6. $\mathbb{C}$ de sınırlı herhangi bir D Jordon bölgesi Dirichlet problemi için uygundur.

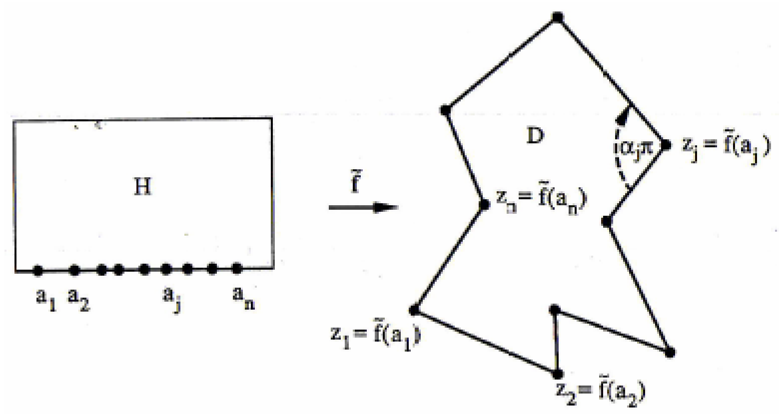
İspat. $h : \partial D \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunu göz önüne alalım. $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ sürekli, D de harmonik ve ∂D de $u = h$ olacak şekilde bir u harmonik fonksiyonunu oluşturmak istiyoruz. D yi $\Delta = \Delta(0,1)$ üzerine konform olarak dönüştüren f fonksiyonu, $\overline{D}$ dan $\overline{\Delta}$ üzerine bir homeomorfizm olsun. $h_0 = h \circ f^{-1}$ fonksiyonu $\partial\Delta$ üzerinde süreklidir. Teorem 1.3.9 gereği $\partial\Delta$ de h_0 fonksiyonuna eşit ve Δ da harmonik olan sürekli bir $u_0 : \overline{\Delta} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Böylece $u = u_0 \circ f$ fonksiyonu $\overline{D}$ de sürekli ve ∂D üzerinde $u = h$ dır. Ayrıca doğrudan hesaplamayla D de $u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.4.6 da yapılan tartışma, h sınır fonksiyonunun sadece ∂D sınırında değil aynı zamanda ∞ da da sürekli olması şartıyla sınırsız bir D Jordan bölgesinde de yapılabilir. $\Delta = \Delta(0,1)$ de Dirichlet problemi herhangi bir Jordon bölgesinin Dirichlet probleminin çözümü olan bir integral formülünün ortaya çıkmasını sağlar ki böyle bir f dönüşümü açık olarak belirlenebilir.

4. KONFORM DÖNÜŞÜM UYGULAMALARI

4.1 Çokgenler Üzerine Konform Dönüşümler

$[z_j, z_{j+1}]$, kompleks düzlemde z_j ve z_{j+1} noktalarını birleştiren doğru parçasını göstersin. $j = 1, 2, \cdots, n-1$ için herhangi z_j, z_{j+1} ve z_{j+2} noktaları doğrusal olmamak üzere $\gamma = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + \cdots + [z_{n-1}, z_n] + [z_n, z_1]$ düzlemde basit kapalı poligonal bir yol olsun. Böyle bir γ Jordon eğrisine köşeleri $z_1, z_2, \cdots, z_n$ olan *kapalı poligon* (çokgen) denir. γ kapalı poligonunun içi D olmak üzere $\overline{D} = P$ diyelim (Şekil 4.1).



Şekil 4.1

Eğer $\lambda_j = [z_j, z_{j+1}]$ olarak alınırsa, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ P poligonunun kenarları olur. $0 < \alpha_j < 2$ ve $\alpha_j \neq 0$ olmak üzere bir z_j köşesindeki P poligonunun iç açısı $\alpha_j \pi$ olarak yazılabilir. Böylece temel geometriden

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n - 2 \tag{4.1.1}$$

olduğunu biliyoruz.

Bu kesimde $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ yarı düzleminden D üzerine olan konform dönüşümleri inceleyeceğiz. Bu bizi meşhur Schwarz–Christoffel formülüne götürecek.

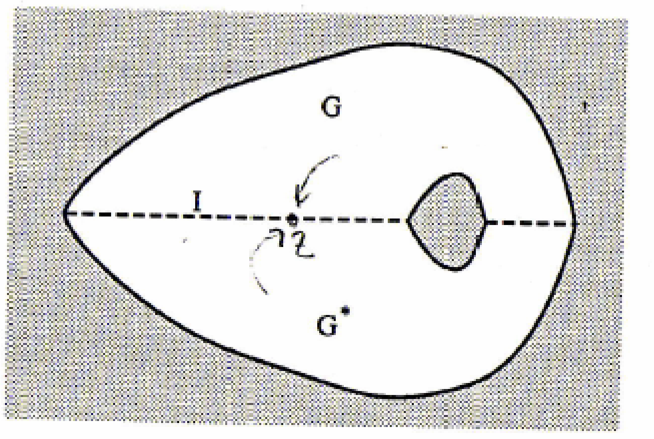
Daha önceden $\Delta = \Delta(0,1)$ diskini H üzerine Möbius dönüşümü yardımıyla konform olarak resmedebileceğimizi görmüştük. Böylece bir anlamda Δ dairesinin verilen bir poligon üzerine konform dönüşümünü de incelemiş olacağız. Eğer f H den D üzerine konform bir dönüşüm ise bu takdirde f, $\hat{H}$ dan P ye bir $\widetilde{f}$ homeomorfizmine genişletilebilir. $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq \infty$ olmak üzere $\widetilde{f}$ altında görüntüleri $z_j \in P$ olan ∂H sınırındaki noktaları a_j ile gösterelim (Şekil 4.1).

Schwarz–Christoffel formülünün temelini oluşturan metot, belli bir bölgede verilen analitik bir fonksiyonun yansıma prensibi yardımıyla daha geniş bir bölgede analitik fonksiyona genişletilmesidir. Schwarz"ın geliştirdiği bu metot "yansıma prensibi" olarak bilinir.

Lemma 4.1.1. D kompleks düzlemde reel eksene göre simetrik bir bölge , G ve G^*, $D - \mathbb{R}$ kümesinin bileşenleri ve $I = D \cap \mathbb{R}$ olsun. Eğer $f : G \cup I \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli, G de analitik ve I üzerinde reel değerli ise bu takdirde

$$F(z) = \begin{cases} f(z)\,; & z \in G \cup I \\ \overline{f(z)}; & z \in G^* \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $F : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitiktir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2

İspat. Hipotez gereği F, G de analitik olduğundan G^* da da analitiktir.
Gerçekten $z_0 \in G^*$ için

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right)} = \overline{f'(\bar{z}_0)}$$

olup, F z_0 da diferansiyellenebilirdir ve $F'(z_0)=\overline{f'(z_0)}$ dir. f fonksiyonunun I da reel değerli ve sürekli olması F fonksiyonunun da I da sürekli olmasını gerektirir. Böylece, F, D de en azından sürekli bir fonksiyondur. F fonksiyonunun D de analitik olduğunu göstermek için Morera teoremini kullanacağız. R, D de kenarları eksene paralel herhangi kapalı bir dikdörtgensel bölge olsun. Eğer R, $G\cup I$ veya $G^*\cup I$ da bulunuyorsa bu takdirde Teorem 1.3.2 gereği

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz=0$$

olur. Diğer bütün durumlarda R, I ile biri $G\cup I$ de biri de $G^*\cup I$ da bulunan R' ve R'' gibi iki küçük dörtgenlere ayrılır. Böylece önceki tartışma ile

$$\int_{\partial R} F(z)dz=\int_{\partial R'} F(z)dz+\int_{\partial R''} F(z)dz=0+0=0$$

elde edilir. Bu ise Morera teoremi gereği F fonksiyonunun D de analitik olduğunu gösterir. ■

Aşağıda Lemma 4.1.1 in meromorf fonksiyonlara genişletilmiş biçimi ispatsız olarak verilecek. İspat için (Palka 1991) ya bakılabilir.

Teorem 4.1.2 (Schwarz Yansıma Prensibi). K ve $\widetilde{K}$, ρ ve $\widetilde{\rho}$ yansımalarına karşılık gelen $\hat{\mathbb{C}}$ da iki çember ve D, $\mathbb{C}$ de K ya göre simetrik (yani $\rho(D)=D$) olan bir bölge olsun. G ve G^*, $D-K$ kümesinin bileşenleri ve $I=D\cap K$ olsun. Eğer $f:G\cup I\to\mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli, G de analitik ve I kümesini $\widetilde{K}$ çemberinin bir alt kümesine resmediyorsa bu takdirde

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & ;\ z\in G\cup I \\ (\widetilde{\rho}\circ f\circ\rho) & ;\ z\in G^* \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $F:D\to\hat{\mathbb{C}}$ fonksiyonu bir meromorf fonksiyondur.

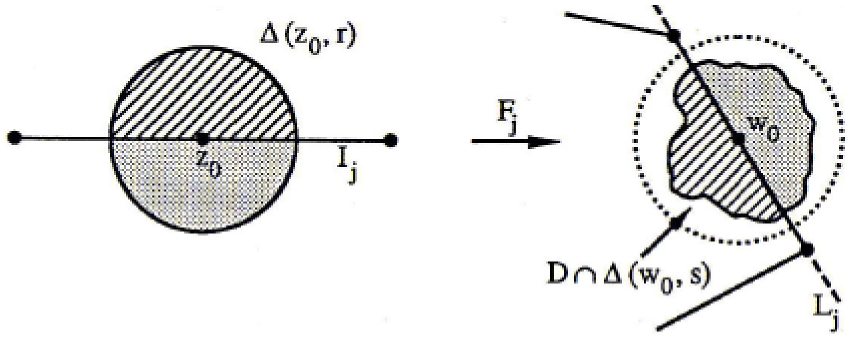
Teorem 4.1.2 de geçen F fonksiyonuna *yansıma ile f fonksiyonunun I nın karşısına devamı* denilir. Ayrıca bu teorem bize üst yarı düzlemden bir poligonal H bölgesi üzerine konform dönüşümün kurulmasında yardımcı olacaktır. Bunun için bazı teknik detaylara da ihtiyacımız olacak. Aşağıdaki iki Lemma bu ihtiyacımızı giderecektir.

Lemma 4.1.3. $H=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ üst yarı düzlemi, P düzlemde kapalı bir poligonu ve D de bu poligonun içini göstersin. f, H bölgesini D üzerine resmeden konform dönüşüm ve f fonksiyonunun $\hat{H}$ ya homeomorfik genişlemesi $\widetilde{f}$ olsun. $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq \infty$ noktalarının $\widetilde{f}$ altındaki resimleri P poligonunun köşeleri olsun. Bu takdirde f''/f' fonksiyonu $G = C - \{a_1, \cdots, a_n\}$ bölgesinde analitik bir g fonksiyonuna genişletilebilir.

İspat. $I_1 = (-\infty, a_1), \cdots, I_n = (a_{n-1}, a_n)$ ve $I_{n+1} = (a_n, \infty)$ olsun. $\widetilde{f}$ altında her bir I_j aralığının resmi P çokgeninin L_j kenarı içinde kalır. ρ_j, L_j deki ρ da reel eksendeki yansımayı göstersin. Schwarz yansıma prensibi gereği $\widetilde{f}$ fonksiyonu I_j aralığının karşı tarafına $D_j = H \cup I_J \cup H^*$ bölgesinde bir F_j analitik fonksiyonu tanımlayacak biçimde devam ettirilebilir. Burada $H^* = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ olup H^*da F_j fonksiyonu

$$F_j = \rho_j \circ f \circ \rho \tag{4.2}$$

ile verilir. F_j fonksiyonunun hem H da hem H^*da ünivalent olduğu açıktır. Özellikle Teorem 1.4.13 gereği her $z \in H \cup H^*$ için $F_j'(z) \neq 0$ dır. Ayrıca $z \in I_j$ için de $F_j'(z) \neq 0$ dır. Gerçekten $z_0 \in I_j$ için $w_0 = F_j(z_0) = \widetilde{f}(z_0)$ noktası $\partial D \cap L_j$ ye ait olmasına rağmen w_0 P poligonunun köşesinde değildir. Böylece $\Delta(w_0, s) - L_j$ nin iki bileşenlerinden biri olan $D \cap \Delta(w_0, s)$ kümesi bir yarı daire olacak şekilde bir $s > 0$ sayısı seçilebilir. Daha sonra $\mathbb{R} \cap \Delta(z_0, r)$, I_j aralığının alt kümesi ve $\widetilde{f}[H \cap \Delta(z_0, r)] \subset D \cap \Delta(w_0, s)$ olacak şekilde yeterince küçük $r > 0$ sayısı seçelim. Böylece $F_j[H \cap \Delta(z_0, r)]$ kümesi L_j doğru parçasının bir tarafında kalır ve onun L_j deki yansıması yani $F_j[H^* \cap \Delta(z_0, r)]$ kümesi L_j nin diğer tarafında kalır (Şekil 4.3).



Şekil 4.3

Bu durum F_j fonksiyonunun $\Delta(z_0,r)$ de ünivalent olduğunu dolayısıyla $F_j'(z_0)\neq 0$ olduğunu gösterir. Yukarıda yapılan tartışmalar ışığında $g_j = F_j''/F_j'$ fonksiyonu D_j de analitiktir.

$j\neq k$ için H^*da F_j ve F_k fonksiyonların ilişkileri nasıldır? F_j fonksiyonu H^* bölgesini $\rho_j(D)$ üzerine konform olarak dönüştürür. $\rho_j(D)$ üzerinde $F_k\circ F_j^{-1}$ fonksiyonunu hesaplamak için (2.11) bağıntısını kullanacağız. $\rho_j^{-1}=\rho_j$ olduğundan

$$F_k\circ F_j^{-1}=(\rho_k\circ f\circ\rho)\circ(\rho_j\circ f\circ\rho)^{-1}=\rho_k\circ f\circ\rho\circ\rho^{-1}\circ f^{-1}\circ\rho_j^{-1}=\rho_k\circ\rho_j$$

olur. Doğrularda ki iki yansımanın birleşimi olarak $\rho_k\circ\rho_j$ fonksiyonu $a\neq 0$ ve b sabitler olmak üzere $(\rho_k\circ\rho_j)(z)=a\,z+b$ biçimindedir. O halde her $z\in\rho_j(D)$ için

$$(F_k\circ F_j^{-1})(z)=a\,z+b$$

veya denk bir ifade ile her $z\in H^*$ için $F_k(z)=a\,F_j(z)+b$ olur. Son bağıntı gereği $j\neq k$ için H^* da $g_k=F_k''/F_k'=F_j''/F_j'=g_j$ elde edilir. Sonuç olarak $G=C-\{a_1,\cdots,a_n\}=\cup_j D_j$ bölgesinde eğer $z\in D_j$ için $g(z)=g_j(z)$ biçiminde bir g fonksiyonu tanımlanırsa bu takdirde H da f''/f' ile uyumlu analitik bir fonksiyon oluşturabiliriz. ■

Aşağıdaki Lemma oluşturulan g fonksiyonunun singüleriterinin tabiyatını açıklar.

Lemma 4.1.4. Lemma 4.1.3 ün hipotezleri altında $\widetilde{f}(a_j)$ köşesindeki P poligonunun iç açılarının ölçüleri $\alpha_j\pi$ olsun. Eğer $a_j\neq\infty$ ise g fonksiyonunun a_j noktalarındaki singüleriteleri basit kutup olup rezidüsü α_j-1 dir. Üstelik $z\to\infty$ iken $g(z)\to 0$ dır.

İspat. Notasyonları muhafaza etmek için $a_j=a$ ve $\alpha_j=\alpha$ yazalım. İspatın ilk kısmında $a\neq\infty$ kabul edelim. $z\in G$ için $h(z)=g(z)-(\alpha-1)(z-a)^{-1}$ fonksiyonunu tanımlayalım. f_0, $\Delta(a,\delta)$ dairesinde hem analitik hem de sıfırı olmayan bir fonksiyon olmak üzere belli bir $\Delta^*(a,\delta)$ delinmiş dairesinde h fonksiyonunun

$$h(z)=\frac{(\alpha+1)f_0'(z)+(z-a)f_0''(z)}{\alpha\,f_0(z)+(z-\alpha)f_0'(z)} \tag{4.3}$$

biçiminde ifade edilebileceğini göstermeliyiz. $z \to a$ iken (4.3) ün sağ tarafı $(\alpha+1) f_0'(a) / \alpha f_0(a)$ limitine yaklaştığından h, a noktasında kaldırılabilir singüleriteye sahiptir. Böylece g fonksiyonunun a noktasındaki singüleriteleri basit kutup olup rezidüsünün $\alpha - 1$ olduğunu görülür.

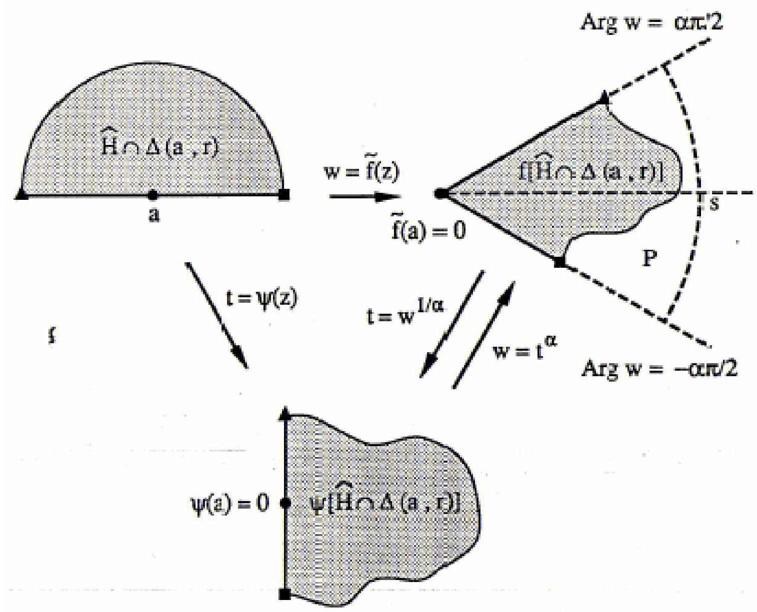
Eğer $c \neq 0$ ve d kompleks sabitler ise bu takdirde $\varphi = c\,f + d$ dönüşümü H yı D ye benzer bir poligonal bir bölgeye konform olarak resmeder. $\hat{H}$ nın homeomorfik genişlemesi $\tilde{\varphi} = c\,\tilde{f} + d$ dır ve böylece $\tilde{\varphi}$ dönüşümü $a_1, \cdots, a_n$ noktalarını görüntü poligonunun köşelerinde alır. Böylece Lemma 4.1.3 φ fonksiyonuna uygulanabilir. Sonuç D de analitik ve H da $\varphi'' / \varphi' = f'' / f'$ olan bir fonksiyondur. Sonuç 1.4.2 gereği f'' / f' fonksiyonunun G ye tek analitik genişlemesi g dir ve bu Lemma 4.1.3 ün ispatında oluşturulan fonksiyondur. Başka bir deyişle, Lemma 4.1.3 ü f veya φ fonksiyonuna uygulayıp uygulamamamız arasında farkı yoktur. Çünkü her iki durumda aynı g fonksiyonunu elde edilir. Sonuçta (4.3) bağıntısının doğruluğunu göstermek için H da f fonksiyonunun $\tilde{f}$ genişlemesinin $\tilde{f}(a) = 0$ bağıntısını sağladığı ve Şekil 4.3 de olduğu gibi orijinde P nin iç açısının pozitif reel eksen tarafında oluşturulduğunu kabul etmek işimizi kolaylaştıracaktır. (aksi halde uygun c ve d sabitleri için $c\,f + d$ ile f yer değiştirir.) Bu durumda

$$D \cap \Delta(0,\delta) = \{ w \in \Delta(0,s) :|\operatorname{Arg} w| < \alpha\,\pi/2 \}$$

olacak şekilde sabit bir s sayısı seçebiliriz. Daha sonra $\tilde{f}\,[\hat{H} \cap \Delta(a,r)] \subset \Delta(0,s)$ olacak şekilde r sayısını seçebiliriz. Son olarak $\psi : \hat{H} \cap \Delta(a,r) \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu $t = \psi(z) = [\tilde{f}(z)]^{1/\alpha}$ biçiminde tanımlayalım. Bu fonksiyon bir homeomorfizm olup $H \cap \Delta(a,r)$ kümesini $\{t : \operatorname{Re} t > 0\}$ yarı düzlemi içinde bulunan bir bölgeye konform olarak resmeder. Aynı zamanda ψ dönüşümü $I = (a-r, a+r)$ aralığını t-düzleminde imajiner eksen üzerinde bir açık aralığa dönüştürür (Şekil 4.4).

Şimdi yansımayla ψ fonksiyonunu I nın karşısına devam ettirebiliriz. Bunun yardımıyla her $z \in H \cap \Delta(a,r)$ için $f(z) = [\phi(z)]^{\alpha}$ özelliğinde $\phi : \Delta(a,r) \to \mathbb{C}$ konform dönüşümünü oluşturabiliriz. $\Delta(a,r)$ de analitik ve sadece a da basit kutbu olan bir ϕ fonksiyonu, ϕ_0 $\Delta(a,r)$ de analitik ve hiç sıfırı olmamak üzere $\phi(z) = (z-a)\phi_0(z)$, biçiminde yeniden yazılabilir. Teorem 1.3.8 $\log\phi_0(z)$

fonksiyonunun $\Delta(a,r)$ de dallarının olduğunu gösterir. Esas dalı L olarak seçelim. Buna göre $z \in H \cap \Delta(a,r)$ için $L(z) = \text{Log}\,\phi(z) - \text{Log}\,(z-a)$ olur. (L nin $H \cap \Delta(a,r)$ ye kısıtlanışı $\log \phi_0(z)$ fonksiyonunun $H \cap \Delta(a,r)$ deki bir dalıdır). Böylece $z \in H \cap \Delta(a,r)$ için



Şekil 4.4

$$f(z) = [\phi(z)]^{\alpha} = e^{\alpha\,\text{Log}\,\phi(z)} = e^{\alpha[\text{Log}\,\phi(z) - \text{Log}\,(z-a)] + \alpha\,\text{Log}\,(z-a)} = (z-a)^{\alpha}\, e^{\alpha\, L(z)}$$

elde ederiz. $f_0(z) = e^{\alpha L(z)}$ denirse f_0 fonksiyonu $\Delta(a,r)$ de analitik ve hiç sıfırı yoktur. Böylece $z \in H \cap \Delta(a,r)$ için $f(z) = (z-a)^{\alpha} f_0(z)$ biçiminde yazılabilir. $H \cap \Delta(a,r)$ de h fonksiyonu için

$$h(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\alpha - 1}{z-a} = \frac{(\alpha+1) f_0'(z) + (z-a) f_0''(z)}{\alpha\, f_0(z) + (z-\alpha) f_0'(z)}$$

elde edilir. Son ifade a noktasında sıfıra gitmediğinden bu formülle tanımlanan fonksiyon $\Delta(a,\delta)$ de analitik olacak şekilde $(0,r)$ de bir δ sayısı seçebiliriz. Bu fonksiyon ve h $H \cap \Delta(a,r)$ de çakıştığından ve her iki fonksiyonda $\Delta^*(a,\delta)$ de analitik olduğundan analitik devam prensibi gereği onlar $\Delta^*(a,\delta)$ delinmiş dairesinin her yerinde eşit olmak zorundalar. Bu ise (4.3) ifadesinin doğru olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.1.5 (Schwarz Christoffel Formülü). $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ üst yarı düzlem, P kompleks düzlemde kapalı bir poligon, D bu poligonun içi ve f H dan D üzerine bir konform dönüşüm olsun. Üstelik, f nin $\hat{H}$ ya homeomorfik bir genişlemesi olan $\widetilde{f}$ fonksiyonu $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq \infty$ noktalarını P poligonunun köşelerine resmetsin. Ayrıca her bir $\widetilde{f}(a_j)$ köşelerindeki P poligonunun iç açılarının ölçüleri $\alpha_j \pi$ olsun. Bu takdirde $z \in H$ ve $a_n \neq \infty$ için

$$f(z) = A\int_i^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\, d\zeta + B \qquad (4.4)$$

ve $a_n = \infty$ için

$$f(z) = A\int_i^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1}(\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1}\, d\zeta + B \qquad (4.5)$$

olacak şekilde A ve B sabitleri vardır.

İspat. g fonksiyonu Lemma 4.1.3 deki gibi f den oluşturulmuş olsun. g fonksiyonunun G tanım kümesinde $a_n \neq \infty$ iken

$$h(z) = g(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}$$

ve $a_n = \infty$ iken

$$h(z) = g(z) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j}$$

biçiminde tanımlanan h fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda h G de analitiktir. Lemma 4.1.4 in ışığı altında h nın $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ve ∞ noktalarında kaldırılabilir singüleriteye sahip olduğunu söyleyebiliriz. Böylece h $\hat{\mathbb{C}}$ de analitik ve Teorem 1.4.10 gereği de h $\hat{\mathbb{C}}$ da sabittir. $h(\infty) = 0$ olduğundan her $z \in \mathbb{C}$ için $h(z) = 0$ sonucu elde edilir. Bu yolla g için açık bir formüle ulaşırız.

$a_n \neq \infty$ olduğunda H da $\log f'(z)$ nin bir l dalını seçelim ve H da

$$l'(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = g(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} = \frac{d}{dz}\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1)\operatorname{Log}(z - a_j)$$

dir. (f' H da analitik ve sıfırı olmadığından böyle bir l fonksiyonu vardır.) Böylece $z \in H$ ve belli bir C sabiti için

$$l(z)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)\mathrm{Log}(z-a_j)+C$$

dir. Böylece $e^C=A$ olmak üzere

$$f'(z)=e^{l(z)}=A(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}$$

sonucuna ulaşılır. $B=f(i)$ denirse integral alınarak (4.4) eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $a_n=\infty$ olması durumunda küçük değişikliklerle (4.5) elde edilir. ■

(4.4) ve (4.5) bağıntılarında ki tüm kuvvetlerin esas kuvvetler olduğunu vurgulamak istiyoruz. Bu ifadelerdeki integrali alınan fonksiyonlar $\overline{H}-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ da sürekli olduğundan, integralleri $\mathbb{R}-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ kümesinde her bir z noktası için $\widetilde{f}(z)$ yi hesaplamak herhangi bir sıkıntıya sebep olmaz. Dahası eğer $z=a_j$, $1\le j\le n$ veya $z=\infty$ ise bu takdirde de (4.4) veya (4.5) sağ taraftaki integral hala $\widetilde{f}(z)$ değerine sahiptir. İntegraller z nin bazı değerleri için has olmayan integraller olmalarına rağmen yine (4.4) veya (4.5) integrallerindeki i başlangıç noktası keyfidir. Onun yerine $\overline{H}$ da başka nokta örneğin orijin noktası seçilebilir. Bu durumda B sabiti değişecektir. Buna göre (4.4) ve (4.5) formülleri $a_n\neq\infty$ için

$$f(z)=\mathrm{A}\int_0^z(\zeta-\mathrm{a}_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-\mathrm{a}_2)^{\alpha_2-1}\cdots(\zeta-\mathrm{a}_\mathrm{n})^{\alpha_\mathrm{n}-1}d\zeta+\mathrm{B}, \tag{4.6}$$

$a_n=\infty$ için

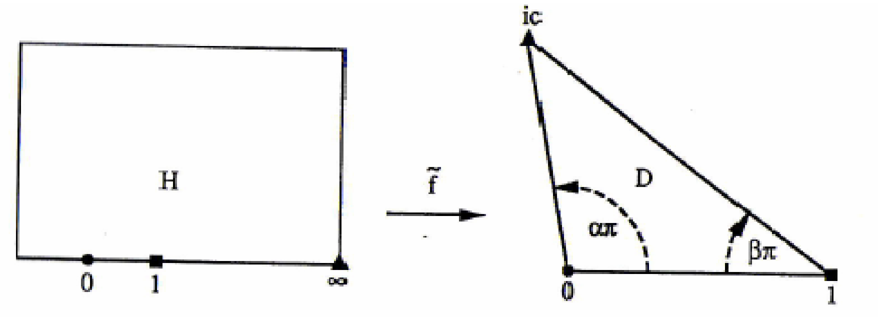
$$f(z)=\mathrm{A}\int_0^z(\zeta-\mathrm{a}_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-\mathrm{a}_2)^{\alpha_2-1}\cdots(\zeta-\mathrm{a}_{\mathrm{n-1}})^{\alpha_{\mathrm{n-1}}-1}d\zeta+\mathrm{B} \tag{4.7}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Schwarz-Cristofel Formülündeki integraller temel integral teknikleriyle nadiren hesaplanabilir olmasına rağmen, integrallerin nümerik teknikleri yardımıyla hesaplamak mümkündür.

Teorem 4.1.5, $j=1,2,\dots,n-1$ için herhangi z_j, z_{j+1} ve z_{j+2} noktaları doğrusal olmamak şartıyla sınırı $\gamma=[z_1,z_2]+[z_2,z_3]+\cdots+[z_{n-1},z_n]+[z_n,z_1]$ kapalı poligonal yol olan (basit olması gerekli değil) bir D bölgesine de genişletilebilir. Bu durumda f fonksiyonu $\hat{H}$ da sürekli fakat bir homeomorfizm olmak zorunda olmayan $\hat{f}$ genişlemesini kabul eder.

Şimdi Schwarz Christoffel Formülüyle ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 4.1.6. $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ bölgesini $\operatorname{Im} c > 0$ olmak üzere köşeleri $0, 1$ ve ic olan kapalı T üçgeninin D içi üzerine resmeden konform dönüşüm bulalım (Şekil 4.5).



Şekil 4.5

$\alpha\pi$ ve $\beta\pi$ sırasıyla T üçgeninin 0 ve 1 köşelerindeki iç açılarının ölçüleri olsun. H yarı düzlemini D üzerine dönüştüren f konform dönüşümünü bulacağız. f fonksiyonunun $\hat{H}$ ya homeomorfik genişlemesi olan $\hat{f}$ fonksiyonu $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(1) = 1$ ve $\hat{f}(\infty) = ic$ özelliğinde olsun. O halde (4.7) bağıntısı ve Teorem 4.1.5 gereği $z \in \hat{H}$ ve belli A ve B sabitleri için

$$\tilde{f}(z) = \mathrm{A}\int_{0}^{z} \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1}\, d\zeta + \mathrm{B}$$

yazılabilir. $\tilde{f}(0) = 0$ olduğundan B=0 ve $\tilde{f}(1) = 1$ olduğundan

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1} d\zeta}$$

bulunur. Böylece H yi D ye dönüştüren konform dönüşüm

$$f(z) = \frac{\int_0^z \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1}\, d\zeta}{\int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(\zeta - 1)^{\beta-1}\, d\zeta}$$

dir.

Örnek 4.1.7. $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ bölgesini, köşeleri 0, 1, 1+i ve i olan Q kapalı karesinin D iç bölgesi üzerine dönüştüren konform dönüşümü bulalım.

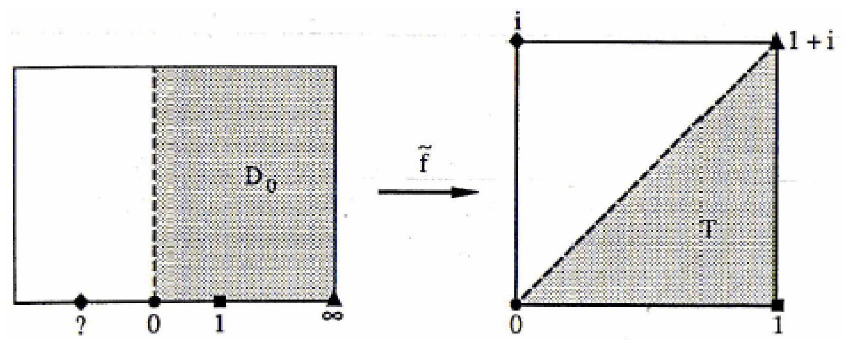
H den D ye f konform dönüşümünün $\hat{H}$ ya homeomorfik genişlemesi olan $\hat{f}$ fonksiyonu için $\tilde{f}(0)=0$, $\tilde{f}(1)=1$ ve $\tilde{f}(\infty)=1+i$ olsun. Ancak $\tilde{f}$ altında $(-\infty,0)$ aralığındaki hangi noktasının i ye dönüşeceği akla gelen ilk sorudur. Bunun için Q nun simetrikliğinden faydalanabiliriz. $D_0=\{z:\operatorname{Re}z>0,\operatorname{Im}z>0\}$ çeyrek düzlemi ile köşeleri 0, 1 ve 1+i olan T üçgenini göz önüne alalım (Şekil 4.6). D_0 bölgesini T üçgeninin içine dönüştüren yegane konform dönüşüm g ve onun $\hat{D}_0$ ya homeomorfik genişlemesi olan $\tilde{g}$ $\tilde{g}(0)=0$, $\tilde{g}(1)=1$ ve $\tilde{g}(\infty)=1+i$ özelliğinde olsun. $\tilde{g}$ dönüşümünü pozitif imajiner I eksenini Q nun $[0,1+i]$ köşegenine dönüştürür. Yansıma prensibi gereği $\tilde{g}$ yı I nın karşı tarafına devam ettirebiliriz. Kare, köşegenlerine göre simetrik olduğundan yansıma işlemi $\hat{H}$ dan Q üzerine ve H yi D üzerine konform olarak dönüştüren ve $G(0)=0$, $G(1)=1$ $G(\infty)=1+i$ ve $G(-1)=i$ özelliğinde bir G homeomorfizmi üretir.Teorem 3.4.5 de ifade edilen teklik gereği $G=\tilde{f}$ olmak zorundadır. Buna göre $\tilde{f}(-1)=i$ dir. (4.7) gereği $z\in\hat{H}$ için $\tilde{f}$ nın integral temsili

$$\tilde{f}(z)=\mathrm{A}\int_0^z \zeta^{-1/2}(\zeta-1)^{-1/2}(\zeta+1)^{-1/2}\,d\zeta+\mathrm{B}$$

dir. $\tilde{f}(0)=0$ ve $\tilde{f}(1)=1$ olduğundan A ve B sabitleri hesaplandığında H nın D üzerine bir konform dönüşümünün

$$f(z)=\frac{\int_0^z \zeta^{-1/2}(\zeta-1)^{-1/2}(\zeta+1)^{-1/2}d\zeta}{\int_0^1 \zeta^{-1/2}(\zeta-1)^{-1/2}(\zeta+1)^{-1/2}d\zeta}$$

olduğu görülür.



Şekil 4.6

Teorem 4.1.5 in birim daireye uyarlanışı aşağıdaki teoremde verilecek.

Teorem 4.1.8. *f* fonksiyonu $\Delta = \Delta(0,1)$ diskini kompleks düzlemde kapalı bir *P* poligonunun içi olan *D* üzerine konform olarak dönüştürsün. *f* fonksiyonunun $\overline{\Delta}$ ya sürekli bir genişlemesi olan $\widetilde{f}$ fonksiyonu $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \partial D$ noktalarını *P* poligonunun köşelerine dönüştürsün ve *P* nin $\widetilde{f}(b_j)$ köşelerindeki iç açıları $\alpha_j \pi$ olsun. Bu takdirde her $z \in \Delta$ için

$$f(z) = \mathrm{A} \int_0^z \left(\frac{\mathrm{b}_1 - \zeta}{1+\zeta}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(\frac{\mathrm{b}_2 - \zeta}{1+\zeta}\right)^{\alpha_2 - 1} \cdots \left(\frac{\mathrm{b}_n - \zeta}{1+\zeta}\right)^{\alpha_n - 1} \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^2} + \mathrm{B}$$

olacak şekilde A ve B sabitleri vardır.

İspat. $-\pi < \operatorname{Arg} b_1 < \operatorname{Arg} b_2 < \cdots < \operatorname{Arg} b_n \leq \pi$ olduğunu kabul edelim. $\varphi(z) = (1+iz)/(1-iz)$ Möbius dönüşümü $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ üst yarı düzlemi Δ üzerine dönüştürür. O halde $g = f o \varphi$ dönüşümü de *H* yı *D* üzerine konform olarak resmeder. $\varphi^{-1}(z) = i\,[(1-z)/(1+z)]$ olduğundan *g* fonksiyonunun $\hat{H}$ ya genişlemesi olan $\widetilde{g} = \widetilde{f} o \varphi$ fonksiyonu altında *P* nin köşelerine dönüştürülmüş olan noktalar

$$a_j = \varphi^{-1}(b_j) = i\frac{1-b_j}{1+b_j}$$

ile verilen $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq \infty$ noktalarıdır. $f = g o \varphi^{-1}$ olduğundan

$$f'(z) = g'[\varphi^{-1}(z)][(\varphi^{-1}]'(z) = -\frac{2i\, g'[\varphi^{-1}(z)]}{(1+z)^2} \tag{4.8}$$

dir. Önce $\operatorname{Arg} b_n < \pi$ yani $b_n \neq -1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_n \neq \varphi^{-1}(-1) = \infty$ olur. Teorem 4.1.5 gereği belli A_0 sabiti için

$$g'(z) = \mathrm{A}_0 (z-a_1)^{\alpha_1 - 1} (z-a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (z-a_n)^{\alpha_n - 1} \tag{4.9}$$

biçiminde olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi j yi sabit tutalım. Basit bir hesaplamayla

$$\varphi^{-1}(z) - a_j = \frac{2i(b_j - z)}{(1+b_j)(1+z)}$$

olur. *L* orijinden geçen doğru olmak üzere $\psi(z) = (b_j - z)/(1+z)$ Möbius dönüşümü $C = \partial\Delta(0,1)$ çemberini $\hat{C} = L \cup \{\infty\}$ çemberine dönüştürür. 0 ve ∞ *C* ye göre simetrik noktalar olduğundan $b_j = \psi(0)$ ve $-1 = \psi(\infty)$ noktaları da $\widetilde{K}$ ya göre simetrik olmalı. Bu durum, L yi b_j ve -1 noktalarını birleştiren doğru parçasının orta dikmesi olarak tanımlayabileceğimizi gösterir. $\psi(\Delta)$ nin L ile sınırlanan açık yarı düzlemlerden biri içinde bulunduğu kolayca görülebilir. Bunun b_j nin olduğu yarı düzlem olduğunu kabul edelşm. Yarı düzlemin tümleyeni $(-\infty,0]$ reel aralığını bulundurduğundan $\psi(\Delta)$, $(-\infty,0]$ dan ayrıktır. Buradan $l(z) = \mathrm{Log}[(b_j - z)/(1+z)]$ fonksiyonunun Δ da analitik olduğu sonucu çıkar. Böylece, $l_0(z) = \mathrm{Log}[\varphi^{-1}(z) - a_j]$ olarak tanımlanan l_0 fonksiyonu Δ da analitiktir. Üstelik Δ da

$$e^{l_0(z) - l(z)} = \frac{[\varphi^{-1}(z) - a_j](1+z)}{(b_j - z)} = \frac{2i}{1+b_j}$$

bir sabittir. Dolayısıyla l_0 ve l fonksiyonları Δ da bir sabit farkıyla birbirine eşittir. Yani $l_0(z) = l(z) + \gamma_j$ dir. Sonuç olarak, $c_j = e^{(\alpha_j - 1)\gamma_j}$ olmak üzere her $z \in \Delta$ için

$$[\varphi^{-1}(z) - a_j]^{\alpha_j - 1} = e^{(\alpha_j - 1) l_0(z)} = e^{(\alpha_j - 1) l(z) + (\alpha_j - 1)\gamma_j} = c_j \left(\frac{b_j - z}{1+z} \right)$$

dir. Bu durum her bir $j = 1, 2, \cdots, n$ için doğrudur.

(4.8) ve (4.9) dan $b_n \neq -1$ iken ve her $z \in \Delta$ için A belli bir sabit olmak üzere

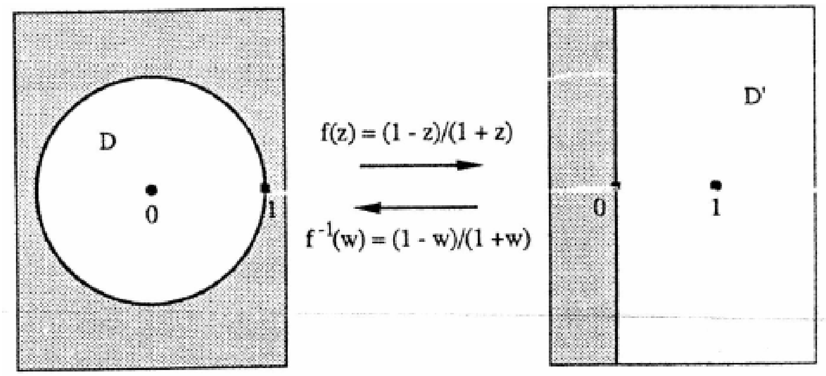
$$f'(z) = \frac{\mathrm{A}}{(1+z)^2} \left(\frac{b_1 - z}{1+z} \right)^{\alpha_1 - 1} \left(\frac{b_2 - z}{1+z} \right)^{\alpha_2 - 1} \cdots \left(\frac{b_n - z}{1+z} \right)^{\alpha_n - 1} \tag{4.10}$$

sonucuna ulaşırız. $b_n = -1$ olursa Teorem 4.1.5 den $f'(z)$ için (4.10) bağıntısına benzer son çarpanın olmadığı bir ifade elde edilir. Bununla birlikte (4.10) bağıntısı $b_n = -1$ olması durumunda da uygulanır. Gerçekten (4.10) bağıntısındaki son çarpan $(-1)^{\alpha_n - 1}$ olur ki bu da A sabiti içindedir. $f(0) = \mathrm{B}$ olmak üzere (4.10) bağıntısının integrali alınarak istenilen bağıntı elde edilmiş olur. ■

4.2 Basit Bağlantılı Bölgeler Üzerine Konform Dönüşümler

Bu kesimde temel konform dönüşümlerin bazı örnekleri verilmiştir.

Örnek 4.2.1. $f(z) = (1-z)/(1+z)$ fonksiyonu $D = \Delta(0,1)$ diskini $D' = \{w : \mathrm{Re}\, w > 0\}$ yarı düzlemine konform olarak resmeder (Şekil 4.7).

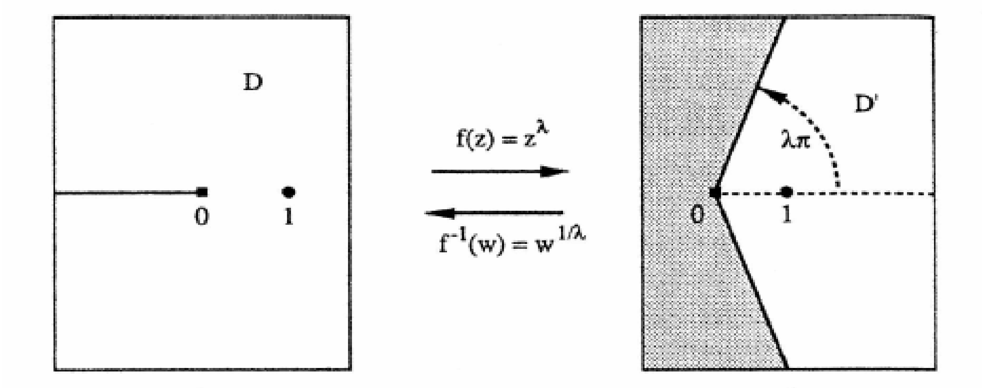


z-düzlemi *w*-düzlemi

Şekil 4.7

Gerçekten, $w = f(z)$ için $\operatorname{Re} w = (1 - |z|^2)\,/\,(|1 + z|^2) > 0$ olduğundan $w \in D'$ yani $f(D) \subset D'$ dır. Her bir $w \in D'$ noktası için $w = (1 - z)/(1 + z)$ eşitliğinden $z = (1 - w)/(1 + w)$ elde edilir. Bu takdirde $z \in D$ dir. Böylece, D bölgesinde analitik ve ünivalent olan f fonksiyonu, Teorem 2.2.5 gereği D den D' üzerine bir konform dönüşümdür. $f^{-1} = f$ olduğundan, D' bölgesini de D ye konform olarak resmeder.

Örnek 4.2.2. $D = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ ve $0 < \lambda \le 1$ olsun. $f(z) = z^{\lambda}$ ile tanımlanan $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu D yi konform olarak $D' = \{w : |\operatorname{Arg} w| < \lambda\pi\}$ açısal bölgesine resmeder (Şekil 4.8).



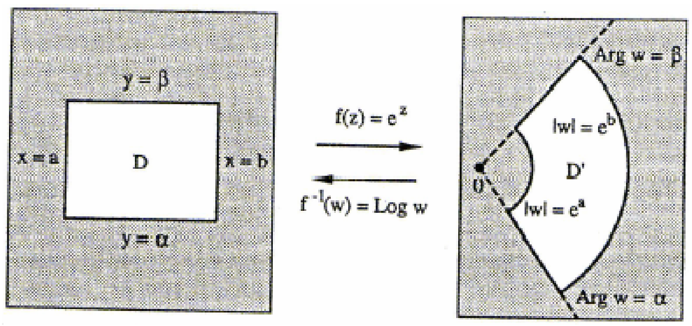
z-düzlemi *w*-düzlemi

Şekil 4.8

$0 < \lambda \le 1$ ve her $z \in D$ noktası için $|z^{\lambda}| = |z|^{\lambda}$ ve $\operatorname{Arg}(z^{\lambda}) = \lambda \operatorname{Arg} z$ olduğundan görüntü kümesi D' olmak üzere f fonksiyonunun ünivalent olduğunu görmek zor değildir. Aynı zamanda f fonksiyonu analitik olduğundan D den D' üzerine bir konform dönüşümdür. $f^{-1}: D' \to D$ ters dönüşümü $f^{-1}(w) = w^{1/\lambda}$ dir. f fonksiyonunun $D \cap \Delta(0,r)$ ye kısıtlanışı $D \cap \Delta(0,r)$ bölgesinden $D' \cap \Delta(0,r^{\lambda})$ bölgesine bir konform dönüşümdür.

$\lambda > 1$ iken $f(z) = z^{\lambda}$ fonksiyonu D de analitik fakat ünivalent olmadığından $f(z) = z^{\lambda}$ fonksiyonu D de bir konform dönüşüm değildir. Bununla birlikte $f(z) = z^{\lambda}$, $\lambda > 1$, fonksiyonu D de yerel olarak konform dönüşümdür.

Örnek 4.2.3. $-\infty \le a < b \le \infty$ ve $-\pi \le \alpha < \beta \le \pi$ olmak üzere $f(z) = e^{z}$ fonksiyonu $D = \{z : a < x < b,\ \alpha < y < \beta\}$ bölgesini $D' = \{w : e^{a} < |w| < e^{b},\ \alpha < \operatorname{Arg} w < \beta\}$ bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür (Şekil 4.9). f fonksiyonunun $f^{-1}: D' \to D$, $f^{-1}(w) = \operatorname{Log} w$ biçimindeki ters fonksiyonu, esas logaritmanın D' bölgesine kısıtlamasından ibarettir.

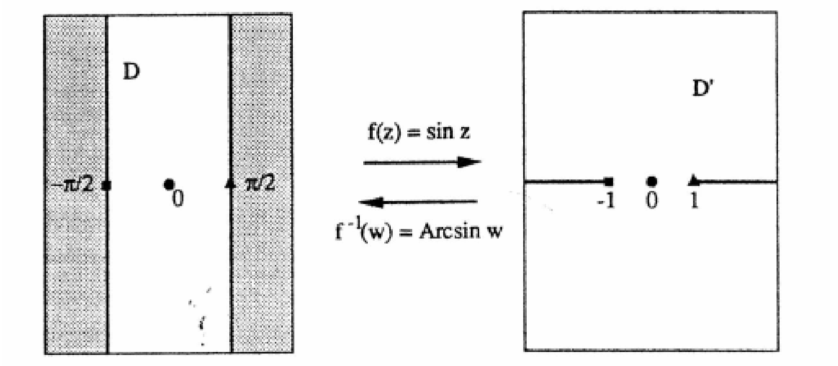


z-düzlemi w-düzlemi

Şekil 4.9

Örnek 4.2.4. $f(z) = \sin z$ fonksiyonu $D = \{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$ sonsuz şeridini $D' = \mathbb{C} - \{w : |\operatorname{Re} w| \ge 1 \text{ ve } \operatorname{Im} w = 0\}$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder. Gerçekten $z = x + iy$ için $w = f(z) = u + iv$ ise $u = \sin x \cosh y$, $v = \cos x \sinh y$ olur. D bölgesini $I_{x_0} = \{x_0 + iy : -\infty < y < \infty\}$ dik doğrularıyla tarandığında $x_0 = 0$ için $u = 0$ ve $v = \sinh y$ olup $f(I_0)$, v-eksenidir. $0 < |x_0| < \pi/2$ için $u^2/(\sin^2 x_0) - v^2/(\cos^2 x_0) = 1$ hiperbol ailesi elde edilir. Eğer $0 < x_0 < \pi/2$ ise $u > 0$ olup hiperbollerin sağ kolları, $-\pi/2 < x_0 < 0$ ise $u < 0$ olup hiperbollerin sol kolları elde edilir. Böylece, I_{x_0} doğruları D yi taradığından $f(I_{x_0})$ parabolleri de D' bölgesini bire bir olarak tarar.(Şekil 4.10)

Burada $f^{-1}: D' \to D$ ters fonksiyonu $f^{-1}(w) = Arc\sin w$ biçiminde esaslı ark sinüs fonksiyonunun D' bölgesine kısıtlamasından ibarettir.



z-düzlemi w-düzlemi

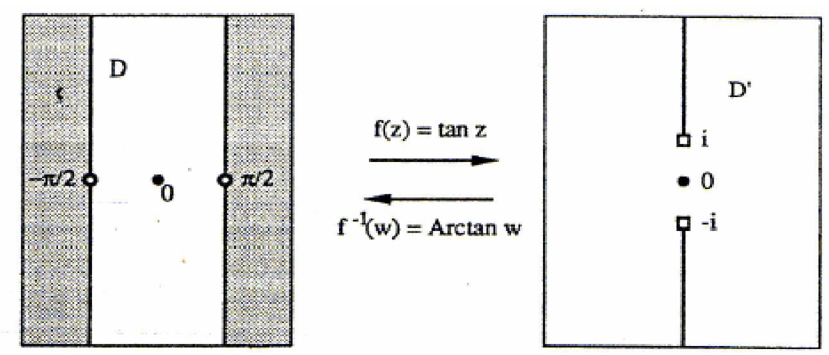
Şekil 4.10

Örnek 4.2.5. $f(z) = \tan z$ fonksiyonu $D = \{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$ sonsuz şeridini $D' = \mathbb{C} - \{w : |\operatorname{Im} w| \geq 1 \text{ ve } \operatorname{Re} w = 0\}$ bölgesine konform olarak resmeder.

Gerçekten,

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = i\frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}$$

biçimde yazılabilir. $f_1(z) = \sin z$, $f_2(z) = e^z$, $f_3(z) = (1-z)/(1+z)$ ve $f_4(z) = iz$ olarak alınırsa $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ şeklinde yazılabilir. Her bir f_i, $1 \leq i \leq 4$, bilinen konform dönüşümler olduğundan, D bölgesinin f altındaki görüntüsü Şekil 4.11 da gösterildiği gibidir.



z-düzlemi w-düzlemi

Şekil 4.11

Burada $f^{-1}: D' \to D$ ters fonksiyonu $f^{-1}(w) = Arc\tan w$ biçiminde esaslı ark tanjant fonksiyonunun D' bölgesine kısıtlamasından ibarettir

Dikkat edilirse $g(z) = i\sin z$ fonksiyonu da D şeridini D' bölgesi üzerine konform olarak resmeden başka bir dönüşümdür. Fakat bu resmetme *f* fonksiyonundan oldukça farklıdır. Örneğin, f $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığını $(-\infty, \infty)$ aralığına dönüştürür, halbuki *g,* $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığını sanal eksen üzerindeki $[-i, i]$ aralığına dönüştürür.

Örnek 4.2.6. $f(z) = (z + z^{-1})/2$ fonksiyonunu $D = \{z : |z| > 1\}$ bölgesini $D' = \mathbb{C} - [-1,1]$ bölgesi üzerine konform olarak dönüştürür. $|z| = 1$ için

$$f(z) = (z + z^{-1})/2 = (z + \bar{z})/2 = \operatorname{Re} z$$

olduğundan, $f(z) \in [-1,1] = \mathbb{C} - D'$ dir. $w \neq -1, 1$ için $(z + z^{-1})/2 = w$ denklemi $z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1}$ ve $z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1}$ gibi iki çözüme sahiptir. Eğer $w \notin [-1, 1]$ ise ne z_1 nede z_2 birim modüle sahip olamaz. $|z_1||z_2| = |z_1 z_2| = 1$ olduğundan bu noktalardan biri *D* bölgesinde diğeri de $\Delta(0,1)$ dairesinde olmak zorundadır. Gerçekten, $w \in D'$ için $\operatorname{Re} w > 0$ veya $\operatorname{Re} w = 0$ ve $\operatorname{Im} w > 0$ olacak şekilde $|z_1| > 1$ olduğu gösterilebilir. Buna karşılık D' bölgesinin diğer tüm w elamanları için $|z_2| > 1$ olduğu gösterilebilir. Önceki bilgilerin ışığı altında f fonksiyonunun D bölgesine kısıtlanışı ünivalent fonksiyondur ve değer kümesi D' bölgesidir.

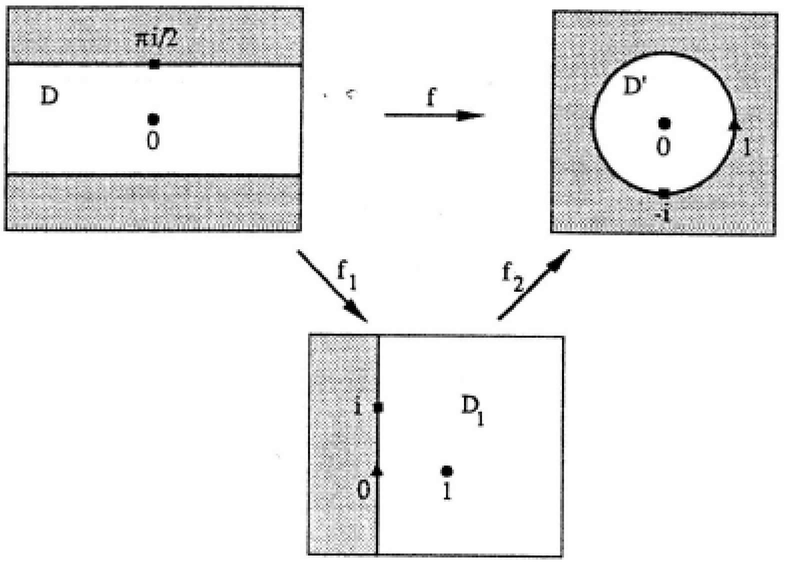
Aşağıdaki iki örnek, verilen bölgeler arasındaki konform dönüşümün temel dönüşümler yardımıyla oluşturulabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.2.7. $D = \{ z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2 \}$ şeridini $D' = \Delta(0,1)$ üzerine konform olarak dönüştüren dönüşümü bulalım.

Şekil 4.12 de görüldüğü gibi, D bölgesini D_1 bölgesine konform olarak dönüştüren dönüşüm $f_1(z) = e^z$ ve D_1 bölgesini D' bölgesine konform olarak dönüştüren dönüşüm $f_2(z) = (1 - z)/(1 + z)$ olduğundan,

$$f(z) = (f_2 \circ f_1)(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}$$

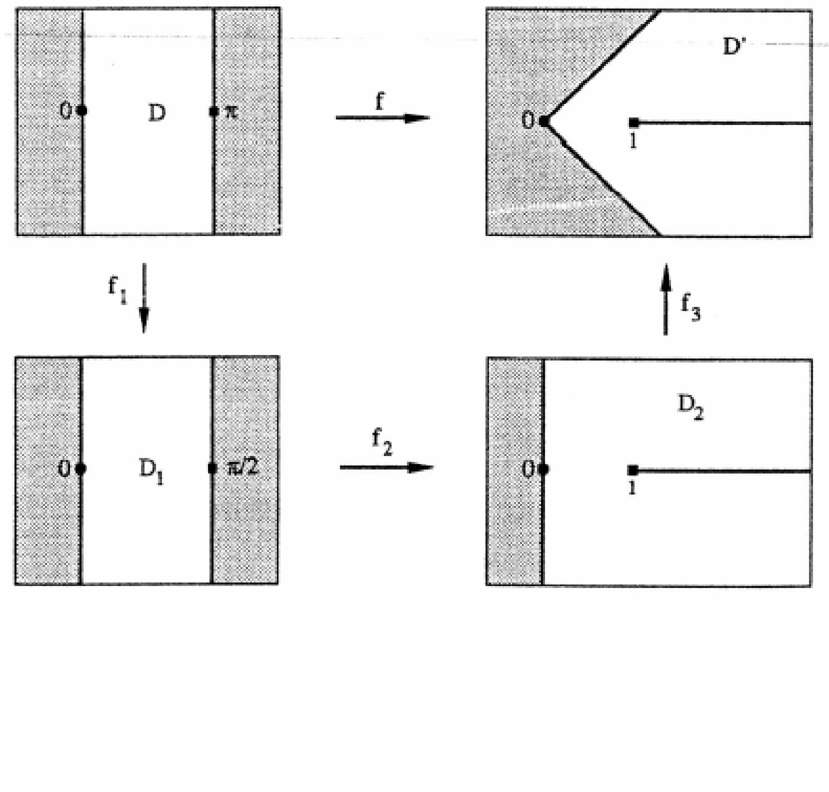
fonksiyonu *D* bölgesini D' bölgesine konform olarak resmeder



Şekil 4.12

Örnek 4.2.8. $D=\{\ z:\ 0<\operatorname{Re} z<\pi\ \}$ şeridini $D'=\{\ w:|\operatorname{Arg} z|<\pi/4\ \}-[1,\infty)$ bölgesi üzerine konform olarak dönüştüren dönüşümü bulalım.

Şekil 4.13 de görüldüğü gibi D bölgesini D_1, D_1 bölgesini D_2 ve D_2 bölgesini de D' bölgesi üzerine konform olarak dönüştüren temel dönüşümler sırasıyla $f_1(z)=z/2$, $f_2(z)=\sin z$ ve $f_3(z)=\sqrt{z}$ fonksiyonlarıdır. Böylece $f(z)=(f_3\circ f_2\circ f_1)(z)=\sqrt{\sin(z/2)}$ fonksiyonudur.D bölgesini D'bölgesine konform olarak dönüştürür.



Şekil 4.13

KAYNAKLAR

AHLFORS, L. V. 1966. Complex Analysis. Mc Graw–Hill Book Company. Tokyo. 317p.

AHLFORS, L. V. 1973. Conformal Invaryants Mc Graw–Hill Book Company. Tokyo. 157p.

BAŞKAN, T. 1996. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Uludağ Üniversitesi basımevi, No:17. Bursa. 359s.

DUREN, P. L. 1983. Unıvalent Fonksiyonlar. Springer-Verlag. New York. 1-54p.

GOLIZIN, G. M. 1969. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Amer. Math. Soc. 676p.

GOODMAN, A. W. 1983. Univalent Fonksiyonlar I. Mariner Publishing Company, Inc. 246p.

GONZALEZ, M. O., 1991. Classical Complex Analysis II. 145-167p.

NEHARI, Z. 1952. Conformal Mapping. Mc Grow–Hill. New York. 396p.

PALKA, B. P. 1991. An ıntroduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag. New York. 560p.

POMMERENKE, Ch. 1975. Unıvalent Functions One than hoeckand Ruprecht Göttingen. 376p.

ULUÇAY, C. 1978. Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları. 736s.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında İznik’te doğan Ahmet Faruk KOÇUM; ilk ve orta öğrenimini İznik’te lise öğrenimini Bursa’da tamamladı. Lisans öğretimini 2003 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinde tamamladı. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans öğrenimine başladı.