



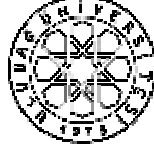
T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN FİGÜRLER

Gamze SALTAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2007



T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN FİGÜRLER

Gamze SALTAN

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2007

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZGÜN FİGÜRLER

Gamze SALTAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez .../.../2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Danışman

ÖZET

Bu tezde, düzgün figürler ele alınmış ve cinsi küçük olan yüzeyler üzerinde sınıflandırılmaları verilmiştir.

Küre üzerindeki düzgün figürlerin neler olduğu ortaçağda Kepler zamanından beri bilinmekteydi. Tor yüzeyi üzerindeki düzgün figürlerin neler olabileceği de Coxeter ve Moser tarafından ortaya konulmuştur.

Yönlendirilebilir yüzeyler üzerinde düzgün figür kavramı ilk olarak 1978 yılında tanımlanmış ve tüm özellikleri elde edilmiştir. Yönlendirilemez yüzeyler üzerindeki düzgün figürler ise son yıllarda ele alınmaya başlamıştır.

Biz burada cinsi 7'ye kadar olan yüzeyler üzerindeki düzgün figürlerin sınıflandırmasını elde ettik.

Birinci bölümde tezde kullanılan bazı temel kavramlar gerektiği oranda hatırlatılmıştır.

İkinci bölümde düzgün figür ve bununla ilgili kavramlar tanımlanmış, temel sonuçlar verilmiştir. Ayrıca cinsi 7'ye kadar olan yüzeyler üzerindeki düzgün figürlerin sınıflandırmasını da bu bölümde verdik.

Üçüncü bölümde ise konuyla yakından alakalı olan Hecke gruplarının düzgün figürlerle olan ilişkisini ortaya koyduk. Basitçe söylemek gerekirse, düzgün figürlerin bilinmesi, Hecke gruplarının normal altgruplarının bilinmesi problemine denktir.

ABSTRACT

In this thesis, regular maps are considered and their classification on some surfaces of small genus is given.

The regular maps on the sphere have been known since Kepler. Coxeter and Moser gave the classification of the regular maps on torus.

Regular maps on orientable surfaces have, first, been defined in 1978 and all their properties are obtained. Regular maps on non-orientable surfaces are considered in recent years.

Here we obtained the classification of all regular maps on surfaces up to genus 7.

In the first chapter, some preliminaries necessary for the following chapters are recalled.

In the second chapter, regular maps and the related notions are defined and some fundamental results are obtained. Further, the classification of all regular maps on surfaces up to genus 7 is given here.

In the third chapter, the relation of regular maps with Hecke groups is given. Simply, knowing regular maps is equal to knowing normal subgroups of Hecke groups.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
0- GİRİŞ	1
0.1. Temel Bilgiler	
1. ÖN BİLGİLER	4
1.1. $PSL(2, \mathbb{R})$	4
1.2. Ayrık Gruplar	4
1.3. Hecke Grupları	7
1.4. Üçgen Grupları	9
1.5. Devirli Gruplar	12
1.6. Dihedral Gruplar	13
1.7. Simetrik ve Alterne Gruplar	14
1.8. Seviye, Parabolik Sınıf Sayısı ve İndeks	15
1.9. Düzgün Figürler	15
2. DÜZGÜN FİGÜRLERİN SINIFLANDIRILMASI	17
2.1. Giriş.	17
2.2. Otomorfizmler	19
2.3. Evrensel Örtü	21
2.4. Küre Üzerindeki Düzgün Figürler	22
2.5. Tor Üzerindeki Düzgün Figürler	23
2.6. Torların bağlantılı toplamları Üzerindeki Düzgün Figürler	27
3. HECKE GRUPLARI VE DÜZGÜN FİGÜRLER	34

KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	38
TEŞEKKÜR	39

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
\mathbb{Q}	Rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
$H(\lambda_q)$	Hecke grubu
$PSL(2, \mathbb{R})$	Reel kat sayılı projektif özel gruplar
Γ	Ayrık grup
A_n	Alterne grup
D_n	Dihedral grup
C_n	Devirli grup
S_n	Simetrik grup
$T(z)$	R ve S üreteçlerinin çarpımı
t	Parabolik sınıf sayısı
n	Seviye (level)
g	U/Γ Riemann yüzeyinin cinsi
$AutM$	Otomorfizm grubu
N	$H(\lambda_q)$ 'nin normal alt grubu
μ	indeks
$\{m, n\}$	Figürün tipi
$x(S)$	Yüzeyin Euler karakteristiği
Γ^*	Yansımaların oluşturduğu grup
$C_n \times C_m$	n ve m mertebeli iki devirli grubun direkt çarpımı
Δ	Üçgen grubu
$G_1 \times G_2$	Direkt çarpım

ŞEKİLLER DİZİNİ	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.2.1	5
Şekil 1.3.1	8
Şekil 1.4.2	10
Şekil 1.9.1	15
Şekil 2.1.1	18

ÇİZELGELER DİZİNİ	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.6.1	28
Çizelge 2.6.2	28
Çizelge 2.6.3	29
Çizelge 2.6.4	30
Çizelge 2.6.5	31
Çizelge 2.6.6	31

0.GİRİŞ

0.1. Temel Bilgiler

Bu çalışmanın amacı, ayrık gruplar teorisinde ve düzgün figürler teorisinde önemli bir araç olan üçgen grupları kavramını incelemek; düzgün figürleri ve ayrık grupların en iyi bilinen örneklerinden olan Hecke gruplarını tanımlamak ve aralarındaki ilişkiyi ortaya koyarak bilinen sonuçlardan yenilerini elde etmektir.

Üçgen grupları, birçok ayrık grubun bölüm grubunun izomorfik olduğu yapılar olarak ortaya çıkmaktadırlar. Ayrık grupların bölüm grupları da düzgün figürlere karşılık geldiğinden bu üç kavram birbirine çok sıkı bir şekilde bağlıdır.

Hecke grupları ilk olarak 1936'da E.Hecke tarafından çalışılmıştır.

$$R(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad S(z) = -\frac{1}{z + \lambda_q}$$

şeklinde iki üreteç tarafından üretilen ve $PSL(2, \mathbb{R})$ 'nin ayrık bir alt grubu olan gruplardır ve $H(\lambda_q)$ ile gösterilirler.

$q = 3, 4, 5$ ve 6 için en önemli Hecke grupları elde edilir. Bunlardan ilki $\Gamma = H(\lambda_3)$ *modüler grup* olarak da bilinir. $q = 4$ ve 6 için $\lambda_4 = \sqrt{2}$ ve $\lambda_6 = \sqrt{3}$ olup $H(\sqrt{2})$ ve $H(\sqrt{3})$ grupları elde edilir.

$q = 5$ için $\lambda_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *altın oran* olup $H(\lambda_5)$ de en çok çalışılan dördüncü Hecke grubudur.

Her ayrık grubun bir simgesi vardır. Bir Hecke grubunun simgesi de

$$(0; 2, q; 1)$$

şeklindedir. Örneğin; modüler grubun simgesi $(0; 2, 3; 1)$ 'dir.

Verilen bir G_1 grubundan çıkan tüm epimorfizmlerin çekirdekleri hesaplanarak G_1 'in normal alt gruplarının belirlenebileceğini hatırlarsak, Hecke gruplarının normal alt gruplarını belirlemede de bu sonuçtan faydalanabiliriz. Adına *üçgen grubu* denilen ve $(g; l, m; n)$ şeklinde gösterilen bazı gruplardan faydalanarak bu epimorfizmleri belirleyebilir ve sonrasında da normal alt grupları elde edebiliriz. Bizim ilgilendiğimiz üçgen gruplarında ileride göreceğimiz sebeplerden dolayı $l = 2$ alınacaktır.

Üçgen grupları cins kavramına göre sınıflandırılabilirler. Bu sınıflandırma sayesinde normal alt grupları da üzerinde hareket ettikleri yüzeylerin cinslerine göre sınıflandırmak mümkün olmaktadır.

Biz bu tezde cinsi 0 (küre yüzeyi) ve cinsi 1 (tor yüzeyi) olan iki temel yüzey ile başlayıp cinsi 7'ye kadar olan sınıflandırmayı yapacağız.

Küre üzerindeki üçgen grupları

$$(m-2)(n-2) < 4$$

şartını sağlamalıdır. Bunların da bazı dejenere gruplar hariç devirli, dihedral, A_3 , S_4 ve A_5 olduklarını göreceğiz.

$H(\lambda_q)$ Hecke gruplarından uygun üçgen grupları üzerine epimorfizmler tanımlayarak her bir epimorfizmin çekirdeği olarak bir normal alt grup elde edeceğiz. Dolayısıyla üçgen gruplarının iyi bilinmesi hem Hecke gruplarının normal alt gruplarının belirlenebilmesinde; hem de bunlara karşılık gelen düzgün figürlerin elde edilmesinde oldukça önemlidir.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramları tanımlayacağız ve bazı temel sonuçları vereceğiz. Bu sonuçların ispatları sayılar teorisi ile ilgili literatürde bulunabilir.

1.1. $PSL(2, \mathbb{R})$

Bu kısımda bu çalışmada ele alınan grupların hepsini alt grup olarak kapsayan bir gruptan söz edeceğiz. Bu, projektif gruplar dediğimiz gruplardan biri olan $PSL(2, \mathbb{R})$ grubudur.

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \{T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$$

şeklinde tanımlanır. Notasyondaki 2, alınan $T(z)$ elemanlarına karşı gelen matrislerin 2×2 kare matrisler olduğunu, \mathbb{R} ise katsayıların reel sayılar olduğunu gösterir. \mathbb{R} yerine başka cebirsel yapılar da alınabilir. Örneğin, \mathbb{Z} alınırsa $PSL(2, \mathbb{Z})$ modüler grubu, $\mathbb{Z}[i]$ halkası alınırsa $PSL(2, \mathbb{Z}[i])$ Picard grubu, \mathbb{C} alınırsa $PSL(2, \mathbb{C})$ grubu ve son olarak $\lambda_q = 2 \cos \pi/q, q \in \mathbb{N}, q \geq 3$ olmak üzere $PSL(2, \mathbb{Q}[\lambda_q])$ Hecke grubu elde edilir. Bunların tümü ayrık gruplar teorisinde önemli yer tutan ve çok çalışılmış gruplardır.

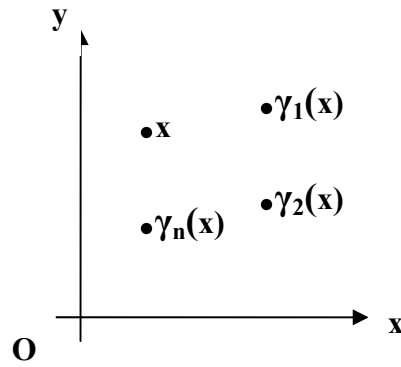
1.2. Ayrık Gruplar

$PSL(2, \mathbb{R})$ grubu, üst yarı düzlemi kendi üzerine 1-1 resmeden en geniş gruptur.

Tanım 1.2.1. $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ olsun. Üst yarı düzlemdeki her x noktasının, x in Γ nin elemanları altındaki görüntülerinin hiç birini bulundurmayan bir komşuluğu bulunabilirse, Γ ya **ayrık grup** denir.

Başka bir deyişle, üst yarı düzlemdeki her x noktası ve her $\gamma \in \Gamma$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabilir ki $D(x, \varepsilon) \cap \{\gamma(x)\} = \emptyset$ olur.

1.2.1. Şekil. Üst Yarı Düzlemdeki Ayrık Grup



Bir Γ ayrık grubunun aşağıdaki gibi bir temsilinin olduğu bilinmektedir.

Üreteçler:

- $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ (hiperbolik üreteçler)
- x_1, x_2, \dots, x_r (eliptik üreteçler)
- p_1, p_2, \dots, p_t (parabolik üreteçler)
- h_1, h_2, \dots, h_u (hiperbolik kenar üreteçleri)

Bağıntılar:

$$x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r x_j \prod_{k=1}^t p_k \prod_{l=1}^u h_l = I$$

Burada $m_i \geq 2$ tamsayıları eliptik üreteçlerin mertebeleri olup grubun periyotları adını alırlar. Gruptaki sonlu elemanlar sadece eliptik elemanlardır. Bunlar sabit noktalar etrafında $2\pi/m_j$ radyanlık dönmelerdir.

Parabolik elemanları da üst yarı düzlemde birer kayma (öteleme) olarak düşünebiliriz. Açıkça bunların mertebeleri sonsuzdur.

Tanım 1.2.2. Parabolik elemanların oluşturduğu denklik sınıflarının sayısına grubun *parabolik sınıf sayısı* denir.

Gösterimdeki t sayısı grubun parabolik sınıf sayısıdır.

Γ , yukarıdaki gösterime sahip bir grup olsun ve üst yarı düzlemi U ile gösterelim. $PSL(2, \mathbb{R})$, U üzerinde hareket ettiğinden (yani üst yarı düzlemdeki noktaları yine üst yarı düzlemdeki noktalara dönüştürdüğünden) Γ alt grubu da U/Γ bölüm yüzeyi üzerinde hareket edecektir. U/Γ nın bir Riemann yüzeyi olduğu bilinmektedir.

Bu çalışmada ele alınacak gruplara karşı gelen Riemann yüzeyleri kompakt, bağlantılı ve yönlendirilebilir olacaktır. Bunların ise Riemann küresi, tor ya da torların bağlantılı toplamına homeomorfik oldukları bilinmektedir.

Bu tezde ele alınacak Ayırık gruplar için $u=2$ olacaktır

Γ , yukarıdaki gösterime sahip bir Ayırık grup olsun. Bu taktirde Γ yı karakterize eden bir kavramdan söz edebiliriz. Buna göre Γ nın simgesi;

$$(g; m_1, \dots, m_r; \infty^{(t)}) \text{ ya da } (g; m_1, \dots, m_r; t)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki m_i 'ler ve t sayısı yukarıda tanımlandığı gibidir. g sayısı ise Γ 'nin üzerinde hareket ettiği bölüm uzayı olan U/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir.

t parabolik sınıf sayısı, simgedeki ∞ 'ların sayısını gösterdiğinden bazen parabolik elemanlar da sonsuz mertebeli eliptik elemanlar olarak düşünülür ve sonuç olarak yukarıda verilen Γ 'nin simgesi;

$$\left(g; m_1, \dots, m_r; \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{t \text{ tane}} \right)$$

şeklinde karşımıza çıkabilir.

Literatürde çok kullanılan Ayrık gruplar, modüler grup ve Hecke gruplarıdır.

1.3. Hecke Grupları

Hecke grupları ilk olarak 1936'da E.Hecke tarafından çalışılmıştır.

$$R(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad S(z) = -\frac{1}{z + \lambda_q}$$

şeklinde iki üreteç tarafından üretilen ve $PSL(2, R)$ 'nin ayrık bir alt grubu olan gruplardır ve $H(\lambda_q)$ ile gösterilirler.

Burada $q \in N, q \geq 3$ olmak üzere $\lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$ şeklinde bir cebirsel sayıdır.

Hecke gruplarının soyut grup yapıları

$$H(\lambda_q) \cong \langle R, S \mid R^2 = S^q = I \rangle \quad (1)$$

şeklinde olup, mertebeleri 2 ve q olan iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Burada R ve S üreteçlerinin çarpımı $T(z) = z + \lambda_q$ olup sonsuz mertebelidir.

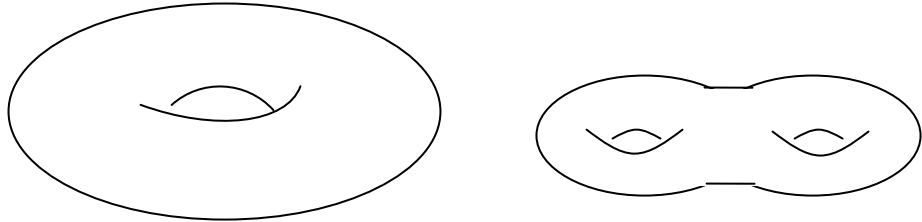
$q = 3, 4, 5$ ve 6 için en önemli Hecke grupları elde edilir. Bunlardan ilki $\Gamma = H(\lambda_3)$ **modüler grup** olarak da bilinir. $q = 4$ ve 6 için $\lambda_4 = \sqrt{2}$ ve $\lambda_6 = \sqrt{3}$ olup $H(\sqrt{2})$ ve $H(\sqrt{3})$ grupları elde edilir.

$q = 5$ için $\lambda_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **altın oran** olup $H(\lambda_5)$ de en çok çalışılan dördüncü Hecke grubudur.

Her ayrık grubun bir simgesi vardır. Bu **simge**, grubun üzerinde hareket ettiği Riemann yüzeyinin cinsi g; parabolik (sonsuz mertebeli) üreteçlerin sayısı t ve eliptik (sonlu mertebeli) üreteçlerin mertebeleri m_1, m_2, \dots, m_r olmak üzere;

$$(g; m_1, \dots, m_r; t) \quad (2)$$

şeklindedir.



Şekil. 1.3.1. Tor yüzeyi ve iki torun bağlantılı toplamı

Burada bahsedilen Riemann yüzeyinin cinsi; yüzeyin delik sayısı olarak da düşünülebilir. Örneğin küre yüzeyi deliksiz olduğundan cinsi 0 iken; 1.3.1. Şekil’de görülen tor yüzeyinin ki 1 , hemen sağındaki iki torun bağlantılı toplamıyla elde edilen yüzeyin cinsi ise 2 ’dir. Daha fazla tor yüzeyi toplanarak daha yüksek cinse sahip yüzeyler de elde edilebilir.

Sonuç olarak bir Hecke grubunun simgesi

$$(0; 2, q; 1) \quad (3)$$

şeklindedir. Örneğin; modüler grubun simgesi $(0; 2, 3; 1)$ ’dir.

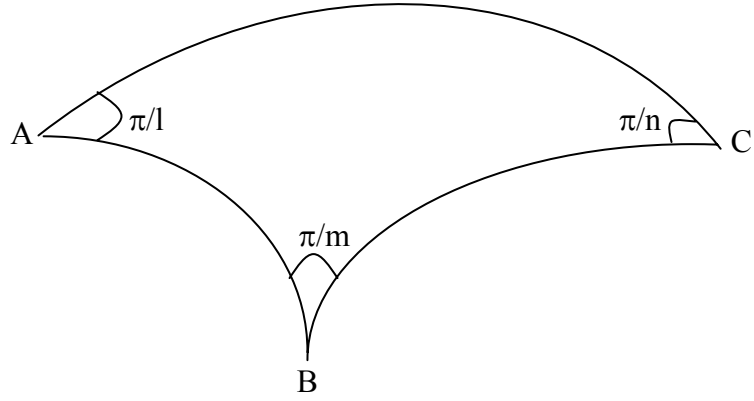
Grup teorisinin temel sonuçlarından birisi de verilen bir grubun normal alt gruplarının bulunmasına imkân sağlayan aşağıdaki sonuçtur:

Teorem 1.3.1. $\theta : G_1 \rightarrow G_2$ bir epimorfizm ise $\text{Ker}\theta \triangleleft G_1$ ’dir ve $G_2 \cong G_1 / \text{Ker}\theta$ ’dir.

Bu teorem ile verilen bir G_1 grubundan çıkan tüm epimorfizmlerin çekirdekleri hesaplanarak G_1 ’in normal alt grupları belirlenebilir.

1.4. Üçgen Grupları

Δ ile şekilde görülen ve açıları $\pi/l, \pi/m$ ve π/n olan hiperbolik üçgeni gösterelim.



1.4.2. Şekil. Üçgen grubu

Özel olarak $l = 2$ alacağız. Çünkü $R^2 = I$ 'dir. Dolayısıyla Δ 'nın açıları $\pi/l, \pi/m$ ve π/n 'dir. Bu hiperbolik üçgenin üç kenarındaki yansımalar $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ olsun. Bu üç yansıma ile üretilen grubu Γ^* ile gösterelim:

$$\Gamma^* = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \rangle \quad (4)$$

Burada $x = \sigma_3\sigma_1$ ve $y = \sigma_2\sigma_3$ alalım. Bu durumda

$$x^m = y^n = I$$

olduğu açıktır. O halde $yx = \sigma_2\sigma_1$ olacağından $(yx)^2 = I$ 'dir.

Γ^* grubunun x ve y ile üretilen alt grubunu ele alalım:

$$\Gamma \cong \langle x, y \mid x^m = y^n = (xy)^2 = I \rangle \quad (5)$$

Bu Γ grubunu $\Delta(2, m, n)$ ile gösterip adına **üçgen grubu** diyeceğiz. Şimdi önemli bazı üçgen gruplarının sınıflandırmasını yapacağız.

İlk olarak cinsi 0 olanları ele alalım. Bunların sağlaması gereken bağıntı

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad (6)$$

olduğundan bu bağıntı

$$(m-2)(n-2) < 4 \quad (7)$$

şekline dönüşür. Bu bağıntıyı sağlayan (m, n) doğal sayı ikilileri bize küre üzerinde (cinsi 0) hareket eden tüm üçgen gruplarını verecektir.

İlk olarak $m = 2$ (veya $n = 2$) olursa buna karşılık hangi n (veya m) doğal sayısı alınırsa alınsın (7) bağıntısı sağlanır. Dolayısıyla $(0; 2, 2, n)$ (veya $(0; 2, m, 2)$) şeklinde sonsuz elemana sahip üçgen grubu sınıfları elde edilir. Bunlar dikkatle incelendiğinde sırasıyla D_n (veya D_m) dihedral grubuna izomorfik oldukları görülür.

Özel olarak $(1, n, n)$ üçgen grupları da C_n devirli gruplarına izomorftur ve ilk bileşen 2 olmayıp 1 olduğundan bu durum **dejenere durum** olarak ele alınır.

Bunlar dışında (7) bağıntısını sağlayan sonlu sayıda (m, n) ikilisi daha mevcuttur. Bunlar, $(3, 3)$, $(3, 4)$ ve $(3, 5)$ 'tir. Bu ikililere karşılık gelen üçgen grupları ise $(0; 2, 3, 3)$, $(0; 2, 3, 4)$ ve $(0; 2, 3, 5)$ 'tir. Bu üçgen gruplarının grup yapıları sırasıyla A_3 , S_4 ve A_5 'dir.

1.3.1. Teorem gereği $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarından, uygun üçgen grupları üzerine epimorfizmler tanımlayabilirsek her bir epimorfizmin çekirdeği olarak bir normal alt grup elde edebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla üçgen gruplarının iyi bilinmesi hem Hecke gruplarının normal alt gruplarının belirlenebilmesinde; hem de bunlara karşılık gelen düzgün figürlerin elde edilmesinde oldukça önemlidir.

1.5. Devirli Gruplar

Tanım 1.5.1. $C_n \cong \langle \alpha \mid \alpha^n = I \rangle = \langle \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n = I \rangle$ şeklinde tek elemanla üretilebilen en basit gruba *devirli grup* denir.

C_n 'in, φ - Euler fonksiyonu olmak üzere $\varphi(n)$ tane üreteci vardır. Bunlar $(k, n) = 1$ olmak üzere; α^k 'lerdir. Örneğin; $C_6 \cong \langle \alpha \mid \alpha^6 = I \rangle$ grubunun üreteçleri α ve α^5 'tir.

Mertebesi asal olan her grup devirlidir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için C_n mevcuttur.

Son olarak,

Teorem 1.5.2. $(m, n) = 1$ ise $C_m \times C_n \cong C_{m.n}$ 'dir.

Yukarıdaki teoremden faydalanarak devirli grupların bazen kullanılacak olan iki üreteçli gösteriminden de bahsedebiliriz. Örneğin;

$$\begin{aligned} C_6 &\cong C_2 \times C_3 \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = I \rangle \times \langle \beta \mid \beta^3 = I \rangle \\ &\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 = I, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \end{aligned}$$

Teorem 1.5.3. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $C_n \cong (1, n, n)$ ve $\forall m = 2k, k \in \mathbb{N}^+$ için $C_m \cong (2, k, 2k)$ şeklinde birer gösterime sahiptirler.

İspat: İkinci ifadeyi bundan önceki örnekten sezgisel olarak genelleştirmek kolaydır. İlkinin ispatlayalım:

$$\begin{aligned} (1, n, n) &\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^1 = \beta^n = (\alpha\beta)^n = I \rangle \\ &\cong \langle \beta \mid \beta^n = I \rangle \\ &\cong C_n \end{aligned}$$

Devirli gruplar, bir düzgün çokgenin dönmeleri grubu olarak düşünülebilir. Son olarak tanımdan;

$$|C_n| = n$$

olduğu açıktır.

1.6. Dihedral Gruplar

Tanım 1.6.1. $D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$ grubuna veya buna izomorfik bir gruba *dihedral grup* denir.

D_n , bir düzgün n-genin tüm simetrilerinin (yön koruyan ya da korumayan) grubudur.

D_n 'in bir üçgen grubu olduğunu gösterelim. $(2, 2, n)$, $(2, n, 2)$ veya $(n, 2, 2)$ şeklindedir. D_n grubundaki elemanlardan bazıları C_n 'de de mevcuttur. Aslında $D_n = C_n \cup \alpha C_n$, $\alpha \notin C_n$ şeklinde yazılabilir. Yani, $C_n \triangleleft D_n$ 'dir ve indeksi 2'dir. Diğer koset ise yön korumayan tüm elemanları (yansımaları) içerir.

$$|D_n| = 2n$$

olduğu açıktır.

1.7. Simetrik ve Alterne Gruplar

Tanım 1.7.1. n elemanın tüm permutasyonlarından oluşan gruba n eleman üzerindeki *simetrik grup* denir. S_n ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi $|S_n| = n!$ 'dir.

Her permütasyon 2-devirlerin (transpozisyonların) çarpımı olarak yazılabilir. S_n 'deki $\frac{n!}{2}$ eleman bu şekilde yazıldığında çift sayıda transpozisyon elde edildiği görülür. Bu elemanlara *çift permütasyon*, diğerlerine de *tek permütasyon* denir. Çift permutasyonlar bir alt grup oluşturur, bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $A_n \triangleleft S_n$ 'dir ve indeksi 2'dir. $|A_n| = \frac{n!}{2}$ olduğu benzer şekilde görülür.

Genelde karmaşık bir yapıya sahip olan simetrik ve alterne gruplardan bizim karşımıza çıkacak olanların üçgen grubu olarak ifadeleri aşağıda verilmiştir:

$$A_4 \cong (2,3,3)$$

$$S_4 \cong (2,3,4)$$

$$A_5 \cong (2,3,5)$$

1.8. Seviye, Parabolik Sınıf Sayısı ve İndeks

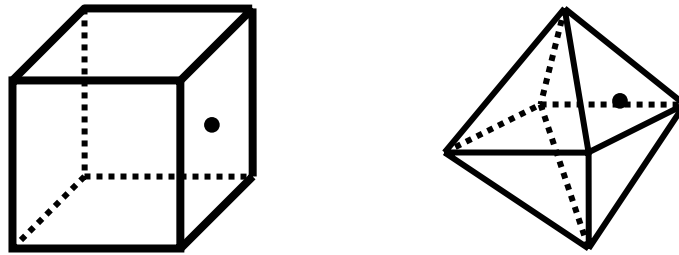
N , $H(\lambda_q)$ 'nin sonlu μ indeksli bir normal alt grubu olsun. N 'nin parabolik sınıf sayısı olan t 'yi yukarıda tanımlamıştık. $\frac{\mu}{t}$ oranına N 'nin seviyesi (level) denir ve genelde n ile gösterilir. Daha kesin olarak n , $T^n = (RS)^n \in \mathbb{N}$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayıdır. $\mu = n.t$ olduğuna dikkat ediniz.

1.9. Düzgün Figürler

Tanım 1.9.1. Sonlu, bağlantılı bir G grafının kompakt, bağlantılı (ve bizim inceleyeceğimiz durumlarda yönlendirilebilir) bir S yüzeyine S - G çokgenlerin bir ailesi olacak şekilde gömülmesine S üzerinde bir *figür* denir.

Bir figür köşe, kenar ve yüzlerden oluşur.

Tanım 1.9.2. Eşlenik (dual) figür aynı yüzey üzerinde bulunan, ancak esas figürün köşelerini yüz merkezleri, yüz merkezlerini ise köşe kabul eden yeni bir figürdür. Küp ile düzgün sekiz yüzlü gibi (Şekil. 1.9.1.).



1. 9. 1. Şekil. Küp ve Düzgün Sekiz Yüzlü

Tanım 1.9.3. M bir figür olsun. M 'nin her bir yüzünün kenar sayılarının ekok'una M 'nin yüz katlılığı (face valency), M 'nin her bir köşesinden çıkan kenarlarının

sayılarının ekok'una da M 'nin köşe katlılığı (vertex valency) denir. Bunlar sırasıyla m ve n ise M 'nin tipi $\{m, n\}$ 'dir denir.

Örneğin; küp $\{4,3\}$, düzgün sekiz yüzlü $\{3,4\}$, düzgün dört yüzlü $\{3,3\}$ tipinde figürlerdir. (Bunlar aynı zamanda birer düzgün figürdür.)

Örneklerden de görülür ki, $\{m,n\}$ tipinde bir figürün eşleniği $\{n,m\}$ tipinde bir figürdür.

Otomorfizmlerden bahsedebilmek için ok (dart) adını verdiğimiz bir kavramdan faydalanacağız.

Tanım 1.9.4. S 'nin, M 'nin oklarının sırasını koruyan bir yön koruyan homomorfizmine M 'nin bir *otomorfizmi* denir. Tüm otomorfizmler $\text{Aut}M$ ile gösterilen bir grup oluşturur.

$\text{Aut}M$ grubu Ω üzerinde geçişmeli ise (yani bir oktan bir başkasına $\text{Aut}M$ ' de bulunan bir elemanla gidilebiliyorsa) M 'ye bir *düzgün figür* denir.

Sezgisel olarak küp, düzgün dört yüzlü, düzgün sekiz yüzlü gibi figürlere, yani her köşesinden bakıldığında aynı görünen figürlere düzgün figür diyeceğiz.

Düzgünlük, figürlerin oldukça önemli bir özelliğidir. Jones-Singerman [10], $(2,m,n)$ türü üçgen gruplarının (Hecke grupları da dahil) normal alt grupları ile $\{m,n\}$ tipindeki düzgün figürler arasında 1-1 bir eşlemenin mevcut olduğunu göstermiştir. Bu eşlemeden faydalanarak, bu çalışmada da bilinen Hecke gruplarının alt grupları hakkında, bu alt gruplardan da düzgün figürler hakkında bilgi edineceğiz.

2. DÜZGÜN FİGÜRLERİN SINIFLANDIRILMASI

2.1. Giriş.

Düzgün figürler ile ilgili çalışmalar daha önce de belirtildiği gibi 1619'da Kepler tarafından başlatılmıştır. Kepler, düzgün dodecahedron $\{5,3\}$ 'ten başlayarak belirli işlemler yardımıyla cinsi 4 olan bir yüzey üzerinde 12 beşgenden oluşan bir figür olan $\{5/2, 5\}$ yıldız çokgenini elde etmiştir.

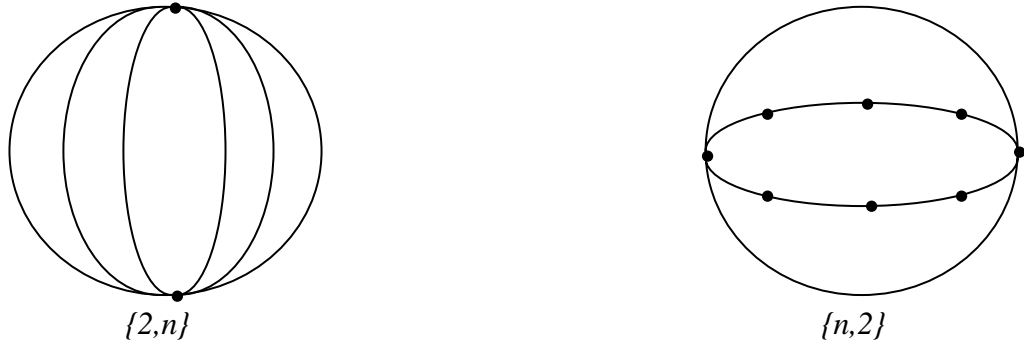
Konu ile ilgili modern çalışmalar iki kaynaktan ivme almıştır. Bunlardan biri otomorfik fonksiyonlar, diğeri ise 4-renk problemidir. İlkinden cinsi 3 olan bir yüzey üzerinde 2 tane figür elde edilmiştir. Bunlar 24 yedigenden ve 12 sekizgenden oluşan figürlerdir. İkinci konudan da tor yüzeyi üzerinde 2 figür elde edilmiştir. Bunlardan biri 7 altıgen, diğeri 5 dörtgenden oluşmaktadır.

1922'de Errera, cinsi 2 olan bir yüzey üzerindeki düzgün figürlerin sistematik bir sınıflandırmasını yapmıştır.

Buraya kadar yapılan çalışmalar, tamamen yönlendirilebilir yüzeyler üzerinde olmuştur. Yönlendirilemeyen yüzeyler üzerindeki ilk çalışmalar Tietze (Tietze 1932) tarafından yapılmıştır.

Cinsi 0 olan bir yüzey (küre) üzerindeki düzgün figürlerin sınıflandırılması uzun zaman önce yapılmıştır. Katı cisimlerle çalışan geometriciler, "5 platonic solids" adı verilen küp, octahedron, tetrahedron, icosahedron ve dodecahedronun birçok özelliklerini incelemişlerdir.

Bunlar dışında kürenin "meridyen"lerinden oluşan düzgün figürler ile bunların duali (eşleniği) olan ve ekvator üzerinde kalan n noktanın küreyi üst ve alt yarılarına böldüğü düzgün figürler de mevcuttur (Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1. Küre üzerinde bazı düzgün figürler

Bunların sayısı $n \in \mathbb{N}$ sayısına bağlı olduğu için sonsuz çokluktur.

Cinsi 1 olan düzgün figürler de cinsi 0 olanlar gibi tamamen bilinmektedir. Bunlar (Jones ve Singerman 1978), (Coxeter ve Moser 1957)'da ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

b ve c negatif olmayan tam sayılar olmak üzere cinsi 1 olan bir düzgün figürün $\{4,4\}_{b,c}$, $\{3,6\}_{b,c}$ ya da $\{6,3\}_{b,c}$ şeklinde olmak zorunda olduğu bilinmektedir.

Cinsi 2 olan düzgün figürler de Coxeter-Moser tarafından sınıflandırılmıştır. Bunların sayısı cinsi ≥ 2 olan tüm düzgün figürlerin sayısı gibi sonludur (Cangül 1993). Cinsi 3 olan düzgün figürler F. A. Sherk tarafından incelenmiştir (Sherk 1959).

Cinsi 4, 5, 6 olan düzgün figürler Garbe (Garbe 1969), (Garbe 1978); cinsi 7 olanlar da Conder ve Dobcsanyi (Conder ve Dobcsanyi 2001) tarafından sistematik olarak sınıflandırılmıştır

Belirli düzgün figür ailelerinin elemanlarının bulunmasıyla yüksek cinse sahip düzgün figürlerin bir kısmının elde edilmesi mümkündür.

2.2. Otomorfizmler

Daha önceki bölümde de tanımladığımız gibi, bir figürün otomorfizmi; bir figürü oluşturan bağıntıları koruyan elemanların bir permütasyonudur. Çünkü karşılıklı iki yüz veya köşe için, bunların etrafındaki kenarların yine aynı yüz ya da köşenin etrafındaki kenarlara aynı ya da ters sırada karşılık gelmesidir. Otomorfizmler açıkça bir grup oluştururlar ve buna “figürün grubu” denir. Bu, bir polihedronun simetri grubunun doğal bir genellemesidir, fakat metriksel özellikler geçerli değildir.

Bir otomorfizm; bir yüzey üzerindeki hareketi ile tanımlanır. Gerçekten de eğer bir yüzü tüm kenar ve köşeleriyle birlikte sabitlersek, o zaman bu yüze komşu olan her yüz de aynı şekilde sabitlenmiş olur ki bunların komşu yüzleri de böylece sabit kalır.

Eğer bir figürün iki özel otomorfizmi varsa bu figüre “düzgün”dür denir. Bu otomorfizmlerden birine R diyelim ki bu bir yüzün ardı sıra gelen kenarlarının dairesel permütasyonudur ve diğeri de bu yüzün ardı sıra gelen kenarlarını birleştiren köşesindeki dairesel permütasyon olan S 'dir (Coxeter 1950). RS bir kenarı ters çevirdiğinden düzgün bir figürün otomorfizmleri grubu N_0 köşe, N_1 kenar ve N_2 yüz üzerinde geçişmelidir. Bu figürün bir yüzü p kenarlı ve bir köşesinden çıkan kenar sayısı da q ise; bu figüre $\{p,q\}$ tipindedir denir.

Yukarıdaki otomorfizmler; $R^p = S^q = (RS)^2 = I$ bağıntısını sağlar ve açıktır ki; $qN_0 = 2N_1 = pN_2$ olur (Threlfall 1932) ve bu figürün duali de $\{q,p\}$ tipindedir. Threlfall'ın “Regelmaessige Zellsysteme” adlı sınıflandırmasındaki elemanlar bu anlamda tamamen düzgün değildir. Errera ve bazı diğer yazarlar gibi Threlfall, her köşedeki kenarların ve her yüzün kenarlarının da aynı sayıda olmasını istemektedir.

Örneğin Threlfall'ın cinsi 2 olan 14 figürü verdiği tablosunda (Threlfall 1932-2) sadece 2., 8., 9. ve son üçünün bizim bildiğimiz anlamda düzgün olduğu görülür.

RS “yarım dönmesi” bir kenarın uç noktalarının yerlerini değiştirir ve bir de bu kenarın iki yüzünün yerlerini değiştirir. Eğer; bu iki yüzün yerini değiştirmeden iki

köşenin yerini değiştiren bir R_j otomorfizmi varsa, figüre “yansımalıdır” denir (Jones ve Singerman 1978).

$$R_1, R_2 = R_1 R \text{ ve } R_3 = R_2 R \text{ olmak üzere}$$

$$[p, q] = \langle R_1, R_2, R_3; R_1^2 = (R_1 R_2)^p = (R_2 R_3)^q = (R_3 R_1)^2 = I \rangle$$

bağıntılarını sağlayan bu üç “yansıma” bir grup üretirler.

Temel bölge; her yüzü, dördü bir kenar etrafında birleşen $2p$ üçgene ayırarak elde edilir.

Eğer yüzey yönlendirilebilir değil ise, bunun üzerindeki bir düzgün figür; kenarları ters çeviren bir yüzü koruyan bir otomorfizme sahiptir ve böylece iki komşu yüzün yönlendirilmesi ortak bir şekilde ters çevrilir. Bu otomorfizm R_j ile özdeşlenmektedir. Bu sebepten yönlendirilemeyen bir yüzey üzerindeki her düzgün figür yansımalıdır. Eğer $4N_j$ üçgenini dönüşümlü olarak, R ve S renkleri koruyacak şekilde, beyaz ve siyah ile boyamaya çalışırsak neticede bir çelişkiye ulaşırız, çünkü iki komşu üçgen aynı renge sahip olacaktır. Bu iki üçgeni R_j birbiri üzerine yansıtılan iki üçgen olarak alırsak; R_j , R ve S 'nin cinsinden tanımlanabilir. Öyle ki;

$$\{R, S\} \cong \{R_1, R_2, R_3\}$$

şeklindedir (Brahana 1926).

$x(S) = N_0 - N_1 + N_2 = 2$ olduğunda, düzgün figürler sadece $\{2, q\}$, $\{q, 2\}$, $\{3, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 3\}$ tipindeki düzgün figürlerdir.

Teorem 2.2.1.. Küre üzerindeki her düzgün figür yansımalıdır.

Diğer taraftan tor üzerindeki ($x(S) = 0$) bazı figürler yansımali olup, bazıları da değildir. Yansımali olmadığı durumda R ve S ; mertebesi $4N_1$ değil, bu sefer $2N_1$ olan bir grup üretirler. Negatif karakteristikli yüzeyler üzerindeki yansımali-olmayan düzgün figürler Sherk tarafından bulunmuştur (Sherk 1962).

$qN_0 = 2N_1 = pN_2$ ile $x(S) = N_0 - N_1 + N_2$ denklemini birleştirirsek ($x(S) \neq 0$ olacak şekilde) $x(S)$ karakteristikli bir yüzey üzerindeki $\{p, q\}$ tipli bir figürün;

$$N_0 = 2pr, N_1 = pqr, N_2 = 2qr, r = \frac{x(S)}{4 - (p-2)(q-2)}$$

bağıntılarına sahip olduğunu görürüz (Bilinski 1950).

Eğer $x(S) = 0$ ise, yani $(p-2)(q-2) = 4$ ise, r için sonsuz değerlerin olabileceğini görürüz (Coxeter ve Moser 1957).

2.3. Evrensel Örtü

$x(S) < 2$ karakteristikli bir yüzey üzerindeki $\{p, q\}$ tipli bir figür; Öklid yüzeyindeki; düzgün bir p -genin $\{p\}$ açısı $(1-2/p)\pi$ olup, buradan; “eğer bu açı $2\pi/q$ ’ya eşitse q ; büyüklük olarak p nin ortak bir köşesi etrafında bulunan açılara eşit olacaktır” şeklinde tanımlı, $\{p, q\}$ düzgün döşemesinin (tesellation) bir parçası olan bir açılıma sahiptir. Kaplamanın geri kalan yüzleri; hali hazırda örtülmüş olan yüzlerin tekrarından oluşur. Diğer bir deyişle, uygun özdeşlemeler alınarak, $\{p, q\}$ evrensel örtüsünden verilen figür türetilir. ($x(S) = 1$ iken, bu projektif düzlemin küre ile iki yapraklı (tabakalı) bir örtüsünü oluşturur. Bu sonuç, antipodal noktaların özdeşleştirilmesiyle elde edilir. Fakat $x(S) \leq 0$ iken, yani $\{p, q\}$ sonsuz iken, evrensel örtü sonsuz çoklukta yapraklara sahip olur).

Figürün grubu böylece, ya $\{p, q\}$ ’nın ya da $[p, q]$ ’nın bölüm grubu olarak gösterilir, yani tüm katlanmamış figürün bir temel bölge olduğu bir normal alt grubun

bölüm grubudur. Çünkü bu normal alt grubun A_i üreteçleri hiçbir noktayı sabit bırakmazlar, bunlar öteleme ya da kayan yansımalarıdır. Yüzey eğer yönlendirilebilir ise, kayan yansımalar yön değiştirdiklerinden bunlar öteleme olmak zorundadır.

Böylece figürün grubu aşağıdaki soyut temsile sahiptir:

$$R^p = S^q = (RS)^2 = I \text{ ve } A_i = I.$$

2.4. Küre Üzerindeki Düzgün Figürler

Yukarıda belirttiğimiz gibi küre üzerindeki düzgün figürler sonsuz çokluktadır. Ancak bunlardan 5 tanesi hariç diğerleri iki sınıfta toplanabilir.

Hatırlanacağı gibi $\{m,n\}$ tipinde bir düzgün figürün küre üzerinde olması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ olmasıydı. Burada $m, n \geq 2$ dir. Çünkü m ya da $n = 1$ olsaydı dejenere figürler olan star (yıldız) figürler ve serbest uçlara (free-edges) sahip figürler elde edilir. $m = 2$ olsa (benzer olarak $n = 2$ durumu da göz önüne alınabilir) $\frac{1}{n} > 0$ yani $n > 0$ olup her n değeri için küre üzerinde $\{2,n\}$ tipinde bir düzgün figür mevcuttur. ($n = 2$ için bunun duali olan $\{m,2\}$ tipindeki figürler elde edilir). $m = 3$ olsa $\frac{1}{3} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ ve buradan $n < 6$ elde edilir. $n = 2$ olması durumu yukarıda ele alınmıştı. $n = 3, 4, 5$ durumlarında sırasıyla $\{3,3\}$, $\{3,4\}$ ve $\{3,5\}$ tipindeki düzgün figürler elde edilir ki bunlar sırasıyla; tetrahedron (düzgün dörtyüzlü), octahedron (düzgün sekiz yüzlü) ve icosahedrona (düzgün yirmi yüzlü) karşılık gelen figürlerdir. $m = 4$ ise $\frac{1}{4} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ den $n < 4$ bulunur ki bu da bir tek $n = 3$ olması ihtimalini verir. ($n = 2$ durumu yukarıda incelenmişti). Elde edilen yeni figür $\{3,4\}$ 'ün duali olan $\{4,3\}$, yani küptür.

$m = 5$ olsa $n < 10/3$ ve $n = 2$ ya da 3 olması gerekir ki bu da bize yeni bir düzgün figür olarak; $\{3,5\}$ 'in duali $\{5,3\}$ 'ü üretir ki bu da dodecahedrona (düzgün on iki yüzlü) karşılık gelir.

$m = 6$ olduğunda $n < 3$ çıkar ve yeni bir düzgün figür elde edilemez. $m \geq 7$ olması durumunda da $2 \leq n < 3$ sonucu bulunur ki buradan da yeni bir düzgün

- {3,3} Tetrahedron (Düzgün dörtyüzlü)
- {4,3} Küp
- {5,3} Dodecahedron (Düzgün on iki yüzlü)
- {3,4} Octahedron (Düzgün sekiz yüzlü)
- {3,5} Icosahedron (Düzgün yirmi yüzlü).

2.5. Tor Üzerindeki Düzgün Figürler

Bu durumda $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ şartı sağlanacağından basit hesaplamalar sonucu $\{m,n\}$ ikililerinin $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ veya $\{6,3\}$ olması gerektiği bulunur. Bunlar aslında (Coxeter ve Moser 1957)'de şu şekilde incelenmiştir:

Tor Üzerindeki $\{4,4\}$ Tipindeki Düzgün Figürler:

$[4,4]^*$ sonsuz grubunun $\{4,4\}$ figürünün bir yüzü olan temel bir bölgeye sahip 4 indeksli bir normal alt grubu vardır. Bu değişmeli alt grup aşağıdaki iki öteleme ile üretilir. Bunlar

$$X=STS \text{ ve } Y=S^2T$$

dir. Kartezyen eksenler boyunca bu X ve Y ötelemelerine gelince, X^xY^y ötelemelerinin orijini (x,y) noktasına öteledikleri görülür.

İki dik X^bY^c ve $X^{-c}Y^b$ ötelemeleri X ve Y ile üretilene benzer şekilde (ve böylece izomorfik olarak) $[4,4]^*$ 'nin diğer bir alt grubunu üretir.

Özel olarak $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ köşelerine sahip birim kare olarak da alınabilecek bir dikdörtgenin karşılıklı kenarlarını özdeşleştirerek (bir köşe, bir kenar ve bir yüze sahip bir figür ile örtülü) bir tor elde edilir.

(b,c) , $(0,0)$, $(-c,b)$, $(b-c,b+c)$ şeklindeki, alanı $b^2 + c^2$ olan daha büyük bir karenin kenarları özdeşleştirilerek de benzer şekilde bir tor elde edilebilir. Bu tor $\{X^b Y^c, X^{-c} Y^b\}$ grubu için temel bir bölgedir.

Bu yeni torda bulduğumuz $\{4,4\}_{b,c}$ figürü $n = b^2 + c^2$ olmak üzere n köşeye, $2n$ kenara ve n yüze sahiptir.

Şimdi bütün olarak $\{4,4\}$; $\{X,Y\}$ temel grubu için bir Cayley diyagramı olarak kullanılabilir. Böylece $\{4,4\}_{b,c}$ 'de $\{X,Y\}/\{X^b Y^c, X^{-c} Y^b\}$ bölüm grubu için bir Cayley diyagramı olarak kullanılabilir. Bu da n mertebeli bir gruptur (Coxeter ve Moser 1957).

$\{4,4\}_{b,c}$ figürünün yansımali olması için gerek ve yeter şart $bc(b-c)=0$ olmasıdır. Bu durumda $\{4,4\}_{b,c}$ 'nin grubu $[4,4]/\{X^b Y^c, X^{-c} Y^b\}$ 'dir. Burada

$$X = R_3 R_2 R_1 R_2 \text{ ve } Y = R_2 R_3 R_2 R_1$$

dir.

Böylece sırayla $8b^2$ ve $16c^2$ mertebeli $\{4,4\}_{b,0}$ ve $\{4,4\}_{c,c}$ grupları;

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^4 = (R_2 R_3)^4 = (R_3 R_1)^2 = I \quad (2.1)$$

bağıntılarına sırasıyla

$$(R_1 R_2 R_3 R_2)^b = I \text{ ve } (R_3 R_2 R_1)^{2c} = I \quad (2.2)$$

ekstra bağıntılarını ekleyerek elde edilir.

Özellikle $\{4,4\}_{1,0}$ torunun bir yüzlü bölünmemiş halidir. Benzerlikten $\{4,4\}_{b,0}$ 'ın genelleştirilmesi olarak cinsi p olan bir yüzey üzerinde bir yüze sahip $\{4p,4p\}_{1,0}$ figürleri de elde edilebilir.

Diğer taraftan yansımali-olmayan $\{4,4\}_{b,c}$ figürünün grubu $4(b^2 + c^2)$ mertebeli $[4,4]^* // \langle X^b Y^c, X^{-c} Y^b \rangle$ dir. Bu da $S^4 = T^2 = (ST)^4 = I$ bağıntılarına $(STS)^b (S^2 T)^c = I$ ekstra bağıntıları katılarak elde edilir.

$c = 0$ ya da $b = c$ olduğunda, bu grup 2.1. ve 2.2. bağıntılarıyla verilen grubun 2 indeksli bir alt grubu olur.

Cayley diyagramı olarak $\{4,4\}$ ' e sahip olan $[4,4]$ 'ün diğer alt gruplarının;

a) $\langle X, Y, T; XY = YX, T^2 = I, TXT = X^{-1}, TYT = Y^{-1} \rangle$

b) $\langle X, Y, P; XY = YX, P^2 = Y, P^{-1}XP = X^{-1} \rangle$

c)

$\langle R_1, R', R_2, Y; R^2 = R'^2 = R_2^2 = I, RY = YR, R'Y = YR', R_2RR_2 = R, R_2R'R_2 = R', R_2YR_2 = Y^{-1} \rangle$

d) $\langle P, Q, T; P^2 = Q^2, T^2 = I, TPT = Q^{-1} \rangle$ olduğu bilinmektedir (Coxeter ve Moser 1957).

Tor üzerindeki $\{3,6\}$ ve $\{6,3\}$ Tipindeki Düzgün Figürler:

$[3,6]^*$ sonsuz grubu $\{3,6\}$ figürünün bir yüzünü temel bölge kabul eden 6 indeksli bir normal alt gruba sahiptir. Bu değişmeli grup;

$X = S^{-1}TST, Y = STST, Z = TSTS^{-1}$ şeklindeki üç öteleme ile üretilir. Buradaki X ve Y aralarındaki 120° lik açı olan ötelemeler olup, orjini X^xY^y ötelemesi ile (x,y) noktasına taşırlar.

$X^{b+c}Y^c$ ve $X^{-c}Y^b$ ötelemeleri, aralarında 120° lik açı olan ötelemeler olup (ya da çarpımları I 'yi verecek $Y^{-c}Z^b, Z^{-c}X^b, X^{-c}Y^b$ üç ötelemesi de alınabilir). $[3,6]^*$ 'nin diğer bir alt grubunu üretirler, bu; $\{X,Y\}$ ya da $\{X,Y,Z\}$ ye benzerdir (ve böylece izomorftür).

$(1,0), (0,0), (-c,b), (b-c,2b+c), (2b,2b+c), ((2b+c,b+2c)$ köşelerine sahip daha büyük altıgenin karşılıklı kenarları özdeşlenerek de benzer şekilde bir tor elde edilir. Bunun alanı $b^2 + bc + c^2$ olup $\{X^{b+c}Y^c, X^{-c}Y^b\}$ ya da $\{Y^{-c}Z^b, Z^{-c}X^b, X^{-c}Y^b\}$ grubu için bir temel bölgedir.

Bu yeni tor üzerinde bulduğumuz $\{6,3\}_{b,c}$ figürünün $t = b^2 + bc + c^2$ olmak üzere $2t$ köşesi, $3t$ kenarı ve $2t$ üçgensel yüzü vardır.

Şimdi tüm $\{3,6\}; \{X,Y,Z\}$ temel grubu için bir Cayley diyagramı olarak kullanılabilceği gibi, $\{3,6\}_{b,c}$ t mertebeli bir grup olan $\{X,Y,Z\}/\{Y^{-c}Z^b, Z^{-c}X^b, X^{-c}Y^b\}$ bölüm grubu içinde bir Cayley diyagramı olarak kullanılabilir.

Heawod'un bahsettiği gibi $\{6,3\}_{2,1}$ figürü yedi renkten daha az renk ile renklendirilemez.

$\{3,6\}_{b,c}$ ve $\{6,3\}_{b,c}$ figürünün yansımali olması için gerek ve yeter şart $bc(b-c) = 0$ olmasıdır. Bu durumda $\{3,6\}_{b,c}$ 'nin grubu; $[3,6] / \{X^{b+c}Y^c, X^{-c}Y^b\}$ 'dir. Burada

$$X = (R_3R_2)^2R_1R_2 \text{ ve } Y = R_1R_2(R_3R_2)^2$$

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^3 = (R_1 R_3)^6 = (R_3 R_1)^2 = I \text{ dir.}$$

Böylece sırasıyla $12b^2$ ve $36c^2$ mertebeli $\{3,6\}_{b,0}$ ve $\{3,6\}_{b,c}$ grupları;

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^3 = (R_1 R_3)^6 = (R_3 R_1)^2 = I \quad (2.3)$$

bağıntılarına sırasıyla

$$(R_1 R_2 R_3 R_2 R_3 R_2)^b = I \text{ ve } (R_1 R_2 R_3 R_2 R_3)^{2c} = I \quad (2.4)$$

ekstra bağıntılarını ekleyerek elde edilir.

Diğer taraftan yansımali-olmayan $\{3,6\}_{b,c}$ ve $\{6,3\}_{b,c}$ figürlerinin grubu; $6(b^2 + bc + c^2)$ mertebeli $[3,6]^* / \{X^{b+c}Y^c, X^{-c}Y^b\}$ 'dir. Bu da $S^3 = T^2 = (ST)^6 = I$ bağıntısına $(S^{-1}TST)^b (STS^{-1}T)^c = I$ ekstra bağıntıları katılarak elde edilir.

$c = 0$ ya da $b = c$ olduğunda, bu grup 2.3. ve 2.4. bağıntılarıyla verilen grubun 2 indeksli bir alt grubu olur.

Cayley diyagramı olarak $\{3,6\}$ ya da $\{6,3\}$ 'e sahip olan $[3,6]$ 'nın diğer alt gruplarının;

$$\mathbf{a)} \langle X, Y, Z, S_1; XYZ = ZYX = I, S_1^3 = I, S_1^{-1}XS_1 = Y, S_1^{-1}YS_1 = Z, S_1^{-1}ZS_1 = X \rangle$$

$$\mathbf{b)} \langle S_1, S_2, R; S_1^3 = S_2^3 = (S_1 S_2)^3 = I, R^2 = I, RS_1R = S_2^{-1} \rangle$$

olduğu bilinmektedir, (Coxeter ve Moser 1957).

2.6. Torların bağlantılı toplamları Üzerindeki Düzgün Figürler

Önceki kısımlarda gördük ki; küre ve tor üzerindeki düzgün figürlerin sayısı sonsuz çokluktur. Akla gelen ilk soru cinsi ≥ 2 olan yönlendirilebilir bir yüzeyin de sonsuz çoklukta düzgün figüre sahip olup olmadığıdır. Bunun cevabı olumsuzdur. Yani $g \geq 2$ olmak üzere yönlendirilebilir bir S yüzeyinin cinsi g ise S 'nin üzerinde sadece sonlu sayıda düzgün figür vardır (Cangül 1993).

İkinci bir soru ise böyle bir S yüzeyi verildiğinde bunların toplam sayısının kaç tane olduğudur. Buna kesin bir cevap henüz verilmemiştir. Örneğin $g = 2$ iken iki self-dual figür ve ikişer ikişer dual olan 8 tane düzgün figür olmak üzere toplam 10 adet düzgün figür bulunmaktadır. $g = 3$ iken dördü self-dual ve on altısı ikişer ikişer dual olan toplam 20 adet düzgün figür mevcuttur.

Cinsi $g = 4$ olan bir yüzey 5 'i self-dual toplam 19 düzgün figüre,
 Cinsi $g = 5$ olan bir yüzey 6 'sı self-dual toplam 26 düzgün figüre,
 Cinsi $g = 6$ olan bir yüzey 3 'ü self-dual toplam 23 düzgün figüre,
 Cinsi $g = 7$ olan bir yüzey 4 'i self-dual toplam 26 düzgün figüre

sahiptir. Aşağıda cinsi 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 olan düzgün figürlerin tabloları verilmiştir.

TABLO 2. 6. 1.

CİNSİ 2 OLAN DÜZENLİ FİGÜRLER

Figür	Mertebe	Otomorfizm Grubu
{8, 8}	8	G_8
{10, 5}	10	G_{10}
{5, 10}	10	G_{10}
{6, 6}	12	$G_2 \times G_6$
{8, 4}	16	$\langle -2, 4 \rangle$
{4, 8}	16	$\langle -2, 4 \rangle$
{6, 4}	24	$(4, 6, 2)$
{4, 6}	24	$(4, 6, 2)$
{8, 3}	48	$\langle -3, 4 \rangle$
{3, 8}	48	$\langle -3, 4 \rangle$

TABLO 2. 6. 2.
CİNSİ 3 OLAN DÜZENLİ FİGÜRLER

Figür	Mertebe	Otomorfizm Grubu
{12, 12}	12	G_{12}
{14, 7}	14	G_{14}
{7, 14}	14	G_{14}
{8, 8}	16	$G_8 \times G_2$
{8, 8}	16	$\langle 2, 2 \rangle$
{12, 4}	24	$\langle 6, 2; 2 \rangle$
{4, 12}	24	$\langle 6, 2; 2 \rangle$
{6, 6}	24	$\langle 3, 3; 2 \rangle$
{8, 4}	32	$\langle 2, 8; 2 \rangle$
{4, 8}	32	$\langle 2, 8; 2 \rangle$
{8, 4}	32	$\langle 2, 4 \rangle$
{4, 8}	32	$\langle 2, 4 \rangle$
{12, 3}	48	$\langle 2, 3 \rangle$
{3, 12}	48	$\langle 2, 3 \rangle$
{6, 4}	48	$\langle 2, 4; 2 \rangle$
{4, 6}	48	$\langle 2, 4; 2 \rangle$
{8, 3}	96	$(2, 3, 8; 3)$
{3, 8}	96	$(2, 3, 8; 3)$
{7, 3}	168	$(2, 3, 7; 4)$
{3, 7}	168	$(2, 3, 7; 4)$

TABLO 2. 6. 3.
CİNSİ 4 OLAN DÜZENLİ FİGÜRLER

Figür	Mertebe	Otomorfizm Grubundaki Bağntı
{16, 16}	16	$R^7 S^{-1}$
{18, 9}	18	$R^8 S^{-1}$
{9, 18}	18	$R^8 S^{-1}$
{10, 10}	20	$R^2 S^2$
{12, 6}	24	$R^4 S^{-2}$
{6, 12}	24	$R^4 S^{-2}$
{16, 4}	32	$R^8 S^{-2}$
{10, 4}	32	$R^8 S^{-2}$
{4, 10}	40	$(RS^{-1})^2$
{6, 6}	40	$(RS^{-1})^2$
{6, 6}	36	$(RS^{-1})^2$
{12, 3}	36	(R^2, S)
{5, 5}	72	(R^4, S)

{6, 4}	60	$(RS^{-1})^3$
{4, 6}	72	$(R^2S^2)^2$
{4, 6}	72	$(R^2S^2)^2$
{5, 4}	120	$(R^2S^2)^3$
{4, 5}	120	$(R^2S^2)^3$

TABLO 2. 6. 4.

CİNSİ 5 OLAN DÜZENLİ FİGÜRLER

Figür	Mertebe	Otomorfizm Grubundaki bağıntı
{20, 20}	20	R^9S^{-1}
{22, 11}	22	$R^{10}S^{-1}$
{11, 22}	22	$R^{10}S^{-1}$
{12, 12}	24	R^2S^2
{15, 6}	30	R^5S^{-2}
{6, 15}	30	R^5S^{-2}
{20, 4}	40	$R^{10}S^{-2}$
{4, 20}	40	$R^{10}S^{-2}$
{8, 8}	32	$(R^2, S); (R^2S^2)^2$
{8, 8}	32	$(R^2)^S R^2; (R^2S^2)^2$
{12, 4}	48	$(RS^{-1})^2$
{4, 12}	48	$(RS^{-1})^2$
{6, 6}	48	$(R^2, S^{-1})^2; (R^2S^2)^2$
{8, 4}	64	(R^2, S^2)
{4, 8}	64	(R^2, S^2)
{8, 4}	64	$(R^2)^{S^2} R^2; (RS^{-1})^4$
{4, 8}	64	$(R^2)^{S^2} R^2; (RS^{-1})^4$
{10, 3}	120	(R^5, S)
{3, 10}	120	(R^5, S)
{5, 5}	80	$(R^2, S^2)^2$
{6, 4}	96	$(R^3, S^2)^2$
{4, 6}	96	$(R^3, S^2)^2$
{8, 3}	192	$(R^2, S^{-1}R^4S)$
{3, 8}	192	$(R^2, S^{-1}R^4S)$
{5, 4}	160	$(RS^{-1})^4$
{4, 5}	160	$(RS^{-1})^4$

TABLO 2. 6. 5.
CİNSİ 6 OLAN DÜZENLİ FİGÜRLER

Figür	Mertebe	Otomorfizm Grubundaki bağıntı
{24, 24}	24	$R^{11}S^{-1}$
{26, 13}	26	$R^{12}S^{-1}$
{13, 25}	26	$R^{12}S^{-1}$
{14, 14}	28	R^2S^2
{15, 10}	30	R^3S^{-2}
{10, 15}	30	R^3S^{-2}
{24, 4}	48	$R^{12}S^{-2}$
{4, 24}	48	$R^{12}S^{-2}$
{9, 9}	36	R^3S^3
{14, 4}	56	$(RS^{-1})^2$
{4, 14}	56	$(RS^{-1})^2$
{10, 5}	50	(R^2, S)
{5, 10}	50	(R^2, S)
{8, 6}	48	$(RS^{-1})^2$
{6, 8}	48	$(RS^{-1})^2$
{8, 6}	48	R^4S^{-3}
{6, 8}	48	R^4S^{-3}
{9, 4}	72	$(R^3)^S R^3$
{4, 9}	72	$(R^3)^S R^3$
{10, 3}	150	$(R^2S^2)^3$
{3, 10}	150	$(R^2S^2)^3$
{6, 4}	120	$(RS^{-1})^3$
{4, 6}	120	$(RS^{-1})^3$

TABLO 2. 6. 6.

CİNSİ 7 OLAN DÜZENLİ FİGÜRLER

$(l_1, l_2, 2) \geq l_2$	Mertebe	$(0; l_1, l_2, 2)$ 'de N'nin tanımlama bağıntıları
(28, 28, 2)	28	$x_1^{13} x_2^{-1}$
(30, 15, 2)	30	$x_1^{14} x_2^{-1}$
(16, 16, 2)	32	$x_1^2 x_2^2$
(16, 16, 2)	32	$x_1^{10} x_2^2$
(21, 6, 2)	42	$x_1^7 x_2^{-2}$
(12, 6, 2)	48	$x_1^6 x_2^3; [x_1^3, x_2]$
(9, 6, 2)	54	$x_1^{-3} [x_1, x_2^2]$
(9, 6, 2)	54	$x_1^3 [x_1, x_2^2]$
(9, 6, 2)	54	$[x_1, x_2^2]$
(7, 7, 2)	56	$x_1^3 x_2^2; (x_1^{-3} x_2)^2$
(28, 4, 2)	56	$x_1^{14} x_2^2$
(16, 4, 2)	64	$(x_1^{-1} x_2)^2$
(16, 4, 2)	64	$x_1^{-1} x_2 x_1^{-6} x_2^{-1}$
(12, 3, 2)	144	$x_1^3 [x_1^2, x_2] x_1 [x_1^2, x_2]$
(7, 3, 2)	504	$\left\{ (x_1^2 x_2^{-1})^5 x_1^{-1} \right\}^2$

Yukarıda listelenmiş olan düzgün figürler incelendiğinde aşağıdaki sonuç görülür:

İddia 2. 6. 1. Cinsi $0 < g < 8$ olan yönlendirilebilir bir S yüzeyi üzerindeki düzgün figürlerin tipi $\{p, q\}$ ise $k = \max\{p, q\}$ olmak üzere $k = 4g+2$ 'dir.

Yani p ve q 'nin alabileceği maksimum değer $4g+2$ 'dir. Bu iddia bize cinsi $g > 7$ olan düzgün figürleri araştırırken oldukça faydalı olacaktır. Çünkü p ve q 'ya bağlı olan Riemann-Hurwitz formülünde mümkün olan tüm p, q sayılarını $4g+2$ 'den küçük seçerek inceleyeceğimizden $\{p, q\}$ çiftlerini sonlu sayıya indirebiliriz.

3. HECKE GRUPLARI VE DÜZGÜN FİGÜRLER

Hecke, E. 1936'da figürler ve $(2, m, n)$ tipindeki üçgen gruplarının Schreier koset grafları arasında 1-1 bir eşleme bulunduğu gösterilmiştir. Benzer olarak düzgün figürler ve yine $(2, m, n)$ tipindeki üçgen gruplarının Schreier koset grafları arasında da benzer bir eşlemenin var olduğu ispatlanmıştır. Bu eşleme şu şekildedir:

İlk olarak $(2, q, \infty)$ tipindeki Hecke grubu denilen üçgen gruplarından $m|q$ olacak şekilde $(2, m, n)$ üçgen grubuna bir θ homomorfizmi vardır. $M, \{m, n\}$ tipindeki bir düzgün figür olsun. Jones ve Singerman'ın sonucu gereği $(2, m, n)$ üçgen grubunun M 'ye karşılık gelen bir N alt grubu vardır. N 'nin $\theta^{-1}(N)$ ters görüntüsünü düşünelim. Buna başlangıçta aldığımız Hecke grubunun bir normal alt grubudur diyeceğiz.

Hecke grupları (modüler grup dahil) ayrık grupların önemli bir sınıfını oluşturur. Normal alt gruplarının çalışılması da bu eşleme yardımıyla kolaylaştırılabilir. Örneğin; buradaki n sayısı $\theta^{-1}(N)$ normal alt grubunun seviyesine karşılık gelir. Düzgün figürün köşe sayısı ise karşılık gelen normal alt grubun parabolik sınıf sayısıdır.

Eğer $M\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figür, N 'de M 'ye karşılık gelen normal alt grup ise permutasyon metodu ve Riemann-Hurwitz Formülü gereği N 'nin simgesi:

$$\left[1 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right); \frac{q^{(\mu/m)}}{m}, \infty^{(\mu/n)} \right]$$

şeklinde hesaplanabilir.

Son formül yardımıyla $\{m, n\}$ tipinde bir düzgün figürün var olup olmadığı kararlaştırılabilir.

Yukarıdaki eşlemenin verilen bir düzgün figüre karşılık gelen normal alt grubunun bulunmasında nasıl kullanılacağını bir örnekle görelim:

Örnek 3.1. Tor üzerindeki $\{4, 4\}$ tipindeki düzgün figürleri hatırlayalım. $\{4, 4\}$ tipindeki bir düzgün figür $b, c = 0$ olmak üzere (ikisi birden 0 değil) $\{4, 4\}_{b,c}$ şeklindeydi. Bunun otomorfizm grubunun mertebesi $\mu = 4(b^2 + c^2)$ 'dir. bu sayı aynı

zamanda karşılık gelen N normal alt grubunun $H(\lambda_q)$ Hecke grubu içindeki indeksini verir. Yani $|H(\lambda_q):N| = \mu$ 'dür. Hatırlanacağı gibi permütasyon metodu gereği $H(\lambda_q)$ 'nun bir homomorfizmini göz önüne almak gerekir.

$$\theta : H(\lambda_q) \rightarrow (2, 4, 4)$$

bir homomorfizm olsun. $H(\lambda_q) \cong (2, q, \infty)$ olduğundan $4|q$ olmalıdır. $q = 4k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ şeklinde alınabilir. O zaman $H(\lambda_q):N$ 'nin permütasyon gösterimi:

$$\begin{array}{ll} R \rightarrow (2)(2)\dots(2) & \mu|2 \text{ tane} \\ S \rightarrow (4)(4)\dots(4) & \mu|4 \text{ tane} \\ T \rightarrow (4)(4)\dots(4) & \mu|4 \text{ tanedir.} \end{array}$$

O zaman N 'nin simgesi

$$(g; k^{(\mu/4)}, \infty^{(\mu/4)})$$

olmak zorundadır. Burda $R^2 = S^{4k} = I$ olduğundan ve R 'deki devirlerin boyu 2 olduğundan simgede $\mu/4$ tane $4k/4 = k$ periyodu yer almıştır. Son olarak T 'nin gösterimindeki devir sayısı $\mu/4$ olduğundan $\mu/4$ tane ∞ yer almıştır. Yani N 'nin parabolik sınıf sayısı $\mu/4$ olur. Burada $g = 1$ olduğu Riemann-Hurwitz Formülü yardımıyla gösterilebilir. Dolayısıyla $\mu = 4t$, $t \in \mathbb{Z}$ şeklinde bir indekse sahip ve $\{4, 4\}$ tipinde bir düzgün figüre karşılık gelen bir N normal alt grubu;

$$N \cong (I; k^{(t)}, \infty^{(t)}) \cong F_{t+1} * \prod_{k=1}^t C_k$$

şeklindedir.

Dikkat edilirse $H(\lambda_q)/N$ 'nin permütasyon gösterimindeki devir sayıları $\mu/2$ ve $\mu/4$ tanedir. Dolayısıyla $4|\mu$ olduğu açıktır. Bu yüzden yukarıdaki hesaplamalarda $\mu = 4t$ alınmıştır. Burada $n = 4$ normal alt grubun seviyesi olup, t de parabolik sınıf sayısıdır. Sonuç olarak, eğer 4 , μ 'yü bölmez ise $H(\lambda_q)$ 'nun $\{4, 4\}$ tipinde bir düzgün figüre karşı gelen ve indeksi μ olan hiçbir normal alt grubu yoktur.

KAYNAKLAR

- Ball, W. W. R.** 1939, *Mathematical Recreations and Essays* (11th ed.), London.
- Bilinski, S.** 1950, Homogene mreze zatuorenih orijentabilnih ploha. Rad Jugoslav Akad. Znan. Umjet. Odjel Mat. Fiz. Tehn. Nauke 277, 129–164.
- Brahana, H. R., A. B. Coble** 1926, Maps of Twelve Countries with Fivw Sides with a Group Order 120 Containing An Icosahedral Subgroup, Amer.J.Math 48,1-20.
- Cangul, İ.N.** 1993, Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph. D. Thesis, Southampton.
- Conder, M., P. Dobcsányi** 2001. Determination of all Regular Maps of Small Genus, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 81, Issue 2, 224-242
- Coxeter, H. S. M.** 1950, Self-dual Configurations and Regular Graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 56, 413–455.
- Coxeter, H. S. M., W. O. J. Moser** 1957, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springen-Berlin.
- Frucht, R.** 1955, Remarks on Finite Groups Defined By Generating Relations, Canad. J. Math., 7, 8-17, 413.
- Garbe, D.** 1969, Über die Regulare Zerlegungen Geschlossener Orientierbarer Flächen, J. Reine. Angew. Math., 237, 39-55.
- Garbe, D.** 1978, A Remarkan Nonsymmetric Compact Riemann Surfaces, Arch. Der. Math., 30, 435-437.
- Hecke, E.** 1936, Über Die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgeichungen, Math. Ann., 112, 664-669.
- Jones, G. A., D. Singerman** 1978, Theory of Maps on Orientable Surfaces, Proc. L. M. S. (3), 37, 273–307.
- Sherk, F. A.** 1959, The Regular Maps on A Surfaces of Genus Three, Canad. J. of Math., 11, 452-480.
- Sherk, F. A.** 1962, A Family of Regular Maps of Type $\{6,6\}$, Canad. Math. Bull., 5, 13-20.

Singerman, D. 1976, Automorphisms of Maps, Permutation Groups and Riemann Surfaces, Bull. London Math. Soc., 8, 65-68.

Threlfall, W. 1932, Gruppenbilder, Abh. Aschs. Akad. Wiss. Math. –Phys. KI, 41, 1–59.

Threlfall, W. 1932–2, Lösung der Aufgabe 84, Jber. Deutsch. Math. –Vercin., 41, 6-7.

Tietze, H. 1910, Einige Bemerkungen über das Problem des Korten-Farbens auf einseitigen Flächen Jber. Dtsch. Math. –Vercin, 19, 155–159.

ÖZGEÇMİŞ

09.05.1980 yılında Elazığ'da doğmuş olan Gamze SALTAN ilkokulu İstanbul Şenlikköy İlköğretim Okulu'nda, ortaokulu İstanbul Zeynep Bedia Kılıçlıoğlu İlköğretim Okulu'nda, liseyi ise İstanbul Florya Tevfik Ercan Lisesi'nde bitirmiştir. 1998 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazanmış 2002 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne yatay geçiş yapmıştır. 2002 yılında mezun olup 2003 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisansına başlamıştır. 2005 yılında İstanbul'da Fatih Dershanesi'nde matematik öğretmeni olarak göreve başlamıştır ve halen bu dershanenin İstanbul Beylikdüzü-2 şubesinde görevine devam etmektedir.

TEŞEKKÜR

Çok uzun olmasa da akademik yaşantımın başından itibaren daima sabrı, desteği ve bilgisi ile örnek aldığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca lisansüstü eğitimimin başlangıcından itibaren benden desteğini esirgemeyen halam Doç. Dr. Süreyya SALTAN EVRENSEL ve ağabeyim olarak bildiğim eşi Doç. Dr. Türkkkan EVRENSEL; size de teőekkürler...

Bugün, bu çalışmayı yapabilecek bir aşamaya gelmemde maddi-manevi desteklerini eksik etmeyen anneme, babama ve kardeşlerime de teőekkürü borç bilirim.