DUAL LORENTZ UZAYDA EĞRİLER

Yonca Gül GÜNAY

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL LORENTZ UZAYDA EĞRİLER

Yonca Gül GÜNAY

0000-0002-2397-7020

Prof. Dr. Esen İYİGÜN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2023

TEZ ONAYI

Yonca Gül GÜNAY tarafından hazırlanan "DUAL LORENTZ UZAYDA EĞRİLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Esen İYİGÜN

Başkan : Prof. Dr. Esen İYİGÜN İmza
0000-0001-6821-0248
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Atilla AKPINAR İmza
0000-0002-7612-2448
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İrem KÜPELİ ERKEN İmza
0000-0003-4471-3219
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali KARA
Enstitü Müdürü
../../….

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/………

Yonca Gül GÜNAY

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Esen İYİGÜN
24.07.2023

Yonca Gül GÜNAY
24.07.2023

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUAL LORENTZ UZAYDA EĞRİLER

Yonca Gül GÜNAY

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Esen İYİGÜN

Bu çalışmada Dual sayılar, Dual uzay, Lorentz uzay, Dual Lorentz uzayla ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dual Lorentz eğrisinin Frenet çatısı altında bulunduğu düzleme göre Rektifiyan Dual Lorentz eğrisi, Normal Dual Lorentz eğrisi, Oskülatör Dual Lorentz eğrisi incelenmiştir. Yapılan tüm araştırmalar için içerik Analizinde uzaylarına ve eğrilerine göre tablo oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Dual Sayılar, Dual uzay, Lorentz uzay, Dual Lorentz uzay, Frenet çatısı, Rektifiyan Dual Lorentz eğri, Normal Dual Lorentz eğri, Oskülatör Dual Lorentz eğrisi.

2023, vii + 50 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

CURVES IN DUAL LORENTZ SPACE

Yonca Gül GÜNAY

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Esen İYİGÜN

In this study, same definitions and teorems about Dual numbers, Dual space, Lorentz space, Dual Lorentz space are given. The rectifying Dual Lorentz curve, the Normal Dual Lorentz curve and the Osculator Dual Lorentz curve are examined accorrding to the plane where the dual Lorentz curve is under the Frenet frame. For all the researches a table is formed according to the spaces and curves in Content Analysis.

Key words: Dual numbers, Dual space, Lorentz space, Dual Lorentz space, Frenet frame, Rectifying Dual Lorentz curve, Normal Dual Lorentz curve, Osculator Dual Lorentz curve.

2023, vii + 50 pages.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde, hem lisans hem de yüksek lisans eğitimim boyunca kıymetli bilgilerini benimle paylaşan, her daim sevgisi ve ilgisiyle elinden gelenin fazlasını yapmaya çalışan, varlığıyla bana güç veren, çalışmamın başından sonuna kadar her an akademik bilgisi ve manevi desteğiyle her daim yanımda olan hocam Sayın Prof. Dr. Esen İYİGÜN' e teşekkürlerimi sunarım.

Emeği geçen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ'a ve Sayın Doç. Dr. Yeşim Sağlam ÖZKAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca maddi manevi her türlü desteği hiç esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Yonca Gül GÜNAY

…/…/…….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
ϕ	Açı
$\hat{\tau}$	Burulma
F	Cisim
w	Darboux vektörü
ε	Dual birim
$\bar{d}$	Dual eşlenik
$\hat{\gamma}, \hat{\psi}$	Dual fonksiyonlar
$\left\{\vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{M}}, \vec{\hat{G}}\right\}$	Dual Frenet 3-çatı alanı
H_0^2	Dual hiperbolik birim küre veya Pseudo Dual hiperbolik küre
$\mathbb{D}$	Dual sayılar kümesi
S_1^2	Dual Lorentz birim küre veya Pseudo Dual küre
$\mathbb{D}^n$	Dual Lorentz uzay
$\left\|\vec{Y}\right\|$	Dual sayının modülü
$\hat{k}$	Eğrilik
k_1, k_2	Eğrilik
H_i	Halka olma aksiyomları
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$\langle , \rangle_l$	Lorentz iç çarpım
$\odot$	Reel sayılar cümlesi üzerinde çarpma işlemi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\oplus$	Reel sayılar cümlesi üzerinde toplama işlemi
L^n	n-boyutlu Lorentz uzay
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{R}_1^n$	n-boyutlu 1 indeksli Lorentz uzay
$\mathbb{D}_1^3$	3- boyutlu 1 indeksli Dual uzay
$\wedge$	Vektörel çarpım
V	Vektör uzayı

Kısaltmalar	**Açıklama**
$\mathbb{D}_1^n = \mathbb{D}^n$	
$\mathbb{R}_1^n = L^n$	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu çalışma beş bölüm olarak düzenlenmiştir.

Giriş bölümü olan birinci bölümde yapılan tüm çalışmalardan bahsedilmiş ve bölümler tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Dual sayılarda, Dual uzayda, Lorentz uzayında ve Dual Lorentz uzayda temel kavramlar verilmiştir.

Modern Matematik'te, dual sayılar, karakteristiği $p \neq 2$ olan bir F cismi üzerinde rank 2 olan bütün cebirleri bulmada bir problem olarak ortaya çıkmıştır. Bunun üç çözümü bulunmuştur. Bunlardan bir tanesi $\varepsilon^2 = 0$ ve $a, a^* \in F$ olmak üzere F üzerinde $a + \varepsilon a^*$ dual elemanlarından oluşan cebirdir. Bu elemanlara dual sayılar denir (Veldkamp,1976).

Dual sayılar ilk olarak William Kingdom Clifford (1845-1879) tarafından geometrik araştırmalarda kullanılmıştır. Clifford'dan sonra E.Study (1860-1930) dual sayıları ve dual vektörleri doğrular geometrisinde ve kinematikte kullanmıştır. Ayrıca kendi adıyla bilinen bir dönüşüm tanımlamıştır. Bu dönüşüm, birim dual kürenin noktaları ile 3 boyutlu Öklid uzayındaki yönlü doğrular arasında birebir eşleşme olduğunu göstermektedir (Study, 1903).

1996 yılında H. H. Uğurlu ve A. Çalışkan tarafından yapılan çalışmalarda ise $\mathbb{R}^3$ yerine $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu 1-indeksli Lorentz uzayı alınarak E.Study dönüşümü, ''$\mathbb{D}_1^3$ de dual hiperbolik ve dual Lorentzian birim kürelerinin, dual timelike ve dual spacelike birim vektörleri ile $\mathbb{R}_1^3$ deki yönlü timelike ve spacelike birim vektörleri birebir eşleşir'' şeklinde ifade edilmiştir (Uğurlu & Çalışkan, 1996).

Üçüncü bölümde Lorentz uzayında açı tanımları ve örnekleri verilmiştir. Darboux vektörü için açı tanımları verilmiştir.

Dördüncü bölümde Dual Lorentz uzayında Rektifiyan, Normal ve Oskülatör eğri tanım ve teoremlerine yer verilmiş ve Dual Lorentz uzayında eğrilerin uzay çeşitlerine ve eğri çeşitlerine göre durumları çizelgelerle gösterilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde sonuç kısmına yer verilmiştir.

Bu tezde Dual Lorentz uzayda Oskülatör ve Normal eğri ilk defa çalışılmıştır. Dual sayılarda, Dual uzayda, Lorentz uzayında ve Dual Lorentz uzayda temel kavramlar tanıtılarak ileri seviyede yapılacak çalışmalar için bir temel oluşturma hedeflenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde ilk olarak tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak Dual sayılar, Dual uzay, Lorentz uzay, Dual Lorentz uzayda temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Dual Sayılarda Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\forall y, y^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Y = (y, y^*)$ ikilisine bir sıralı ikili denir.
Bu sıralı ikilinin oluşturduğu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilirse

$$\mathbb{D} = \{(y, y^*) : y, y^* \in \mathbb{R}\}$$

cümlesine dual sayılar cümlesi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.2. $Y = (y, y^*)$ ve $S = (s, s^*)$ olmak üzere

$$Y \oplus S = (y, y^*) \oplus (s, s^*) = (y + s, y^* + s^*)$$

biçiminde tanımlı $\oplus: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ iç işlemine $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesinde toplama işlemi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.3. $Y = (y, y^*)$ ve $S = (s, s^*)$ için

$$Y \odot S = YS = (y, y^*) \odot (s, s^*) = (ys, ys^* + y^*s)$$

şeklinde tanımlı $\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ iç işlemine $\mathbb{D}$ dual sayılar cümlesinde çarpma işlemi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.4. $Y = (y, y^*)$ ve $S = (s, s^*) \in \mathbb{D}$ için $y = s, y^* = s^*$ ise Y ile S eşittir denir ve $Y = S$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri Tanım 2.1.2, Tanım 2.1.3 ve Tanım 2.1.4 deki gibi tanımlanıyor ise $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall (y, y^*) \in \mathbb{D}$ elemanına bir dual sayı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.6. $(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

İspat. $i)$ H_1 : $(\mathbb{D},\oplus)$ ikilisi bir değişmeli bir gruptur.

G_1 :$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biçiminde tanımlandığından $\mathbb{D}$ cümlesi $\oplus$ işlemine göre kapalıdır.

G_2 :$\oplus$ işleminde birleşme özelliği bulunmaktadır. $\forall\, Y, S, N \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}(Y \oplus S) \oplus N &= [(y, y^*) \oplus (s, s^*)] \oplus (n, n^*)\\ &= (y + s, y^* + s^*) \oplus (n, n^*)\\ &= \big((y + s) + n\,, (y^* + s^*) + n^*\big)\\ &= \big(y + (s + n), y^* + (s^* + n^*)\big)\\ &= (y, y^*) \oplus (s + n, s^* + n^*)\\ &= (y, y^*) \oplus [(s, s^*) \oplus (n, n^*)]\\ &= Y \oplus (S \oplus N)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

G_3 :$\oplus$ işlemine göre $\mathbb{D}$ üzerinde $0 = (0, 0)$ etkisiz elemanı vardır. $\forall\, Y \in \mathbb{D}$ için

$$Y \oplus 0 = 0 \oplus Y = Y$$

şeklindedir.

G_4 :$\oplus$ işlemine göre $\forall\, Y \in \mathbb{D}$ için

$$Y \oplus X = X \oplus Y = 0$$

biçiminde bir tek $X \in \mathbb{D}$ ters eleman vardır. Burada $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için $X = (-a, -a^*) \in \mathbb{D}$ dır. O halde $(\mathbb{D},\oplus)$ ikilisi bir gruptur.

G_5 : $\forall\, Y, S \in \mathbb{D}$ için

$$Y \oplus S = S \oplus Y$$

olur. Gerçekten

$$\begin{aligned}Y \oplus S &= (y, y^*) \oplus (s, s^*)\\ &= (y + s, y^* + s^*)\\ &= (s + y, s^* + y^*)\\ &= (s, s^*) \oplus (y, y^*)\\ &= S \oplus Y\end{aligned}$$

dir. Böylece $(\mathbb{D},\oplus)$ ikilisi değişmeli bir gruptur.

$ii)$ H_2 : $\odot$ işlemi birleşmelidir.

$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biçiminde tanımlanan $\odot$ çarpma işlemi için $\mathbb{D}$ cümlesi kapalıdır.

$\forall\, Y, S, N \in \mathbb{D}$ için

$$(Y \odot S) \odot N = Y \odot (S \odot N)$$

dir.

$$\begin{aligned}
(Y \odot S) \odot N &= ((y, y^*) \odot (s, s^*)) \odot (n, n^*) \\
&= \big((ys, ys^* + y^*s)\big) \odot (n, n^*) \\
&= \big((ys)n, (ys)\, n^* + (ys^* + y^*s)n)\big) \\
&= (y(sn), y(sn^*) + y(s^*n) + y^*(sn)) \\
&= \big(y(sn), \mathrm{y}(sn^* + s^*n) + y^*(sn)\big) \\
&= (y, y^*) \odot ((sn, sn^* + s^*n)) \\
&= (y, y^*) \odot (s, s^*) \odot (n, n^*)) \\
&= (Y \odot S) \odot N
\end{aligned}$$

iii) $\forall Y, \mathrm{S}, N \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$(Y \oplus S) \odot N = (Y \odot N) \oplus (S \odot N)$$

ve

$$N \odot (Y \oplus S) = (N \odot Y) \oplus (N \odot S)$$

dir. Gerçekten de;

$$\begin{aligned}
(Y \oplus S\,) \odot N &= ((y, y^*) \oplus (s, s^*) \odot (n, n^*)) \\
&= (y + s, y^* + \ s^*) \odot (n, n^*) \\
&= \big((y + s)n, (y + s)n^* + (y^* + s^*)n\big) \\
&= \big((yn + sn), yn^* + \ sn^* + \ y^*n + s^*n\big) \\
&= (yn, yn^* + \ y^*n) \oplus (sn, sn^* + s^*n) \\
&= \big((y, y^*) \odot (n, n^*)\big) \oplus ((s, s^*) + (n, n^*)) \\
&= (Y \odot N) \oplus (S \odot N)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde soldan dağılma özelliği de elde edilir. O halde *i*, *ii* ve *iii* gereği $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir halkadır.

$\forall Y, S \in \mathbb{D}$ için

$$Y \odot S = S \odot Y$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
Y \odot S &= (y, y^*) \odot (s, s^*\,) \\
&= (ys, ys^* + y^*s) \\
&= (sy, s^*y + sy^*)
\end{aligned}$$

$$= (sy, sy^*{+}s^*y)$$
$$= (s, s^*)\odot(y, y^*)$$
$$= S\odot Y$$

Öyleyse $(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ üçlüsü bir değişimli halkadır.

İkinci işlem $\odot$ için $(1,0)$ bir etkisiz elemandır. $\forall\, Y \in \mathbb{D}$ ise,

$$(1,0)\odot Y = Y\odot(1,0) = Y$$

dir. Sonuç olarak $(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ halkası bir birimli halkadır. Artık $(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ halkası $\mathbb{D}$ ile gösterilecektir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.7. $(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

İspat. $\forall\, Y \in\ \mathbb{D}$ için

$$Y\odot X = X\odot Y = (1,0)$$

eşitliğinden

$$Y\odot X = (1,0)\ \Rightarrow (\mathrm{y}, y^*)\odot(x, x^*) = (1,0)$$
$$\Rightarrow (yx, yx^* + y^*x) = (1,0)$$

ve böylece

$$yx = 1, yx^* + y^*x = 0$$

elde edilir. Buradan $\forall\, Y \in \mathbb{D}$ için Y nin tersi $X = \left(\frac{1}{y}, -\frac{y^*}{y^2}\right)$ şeklindedir. Ancak $y = 0$ için $Y = (0,\ y^*) \in \mathbb{D}$ dual sayılarının tersi yoktur. Bu durumda $(\mathbb{D} - \{0\},\odot)$ bir grup olamaz. Bu da ispatı tamamlar (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.8. $Y \oplus X = S$ denkleminin bir tek $\forall\, X \in \mathbb{D}$ çözümü vardır.

$$(y + x, y^* + x^*\ ) = (s, s^*)$$

olduğundan dual sayıların eşitliğinden $y + x = s$ ve $y^* + x^* = s^*$ yazılabilir. Buradan $x = s - y$ ve $x^* = s^* - y^*$ olup

$$\mathrm{X = S - Y = (s - y}, s^* - y^*) \in \mathbb{D}$$

sonucu elde edilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.9. $\forall\, d = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $d = (y + \varepsilon y^*)$ şeklinde yazılabilir.

İspat. $\forall\, d = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için $d = (y, y^*) = (y, 0) + (0, y^*)$ veya

$$d = (y, y^*) = (y, 0) + [(0,1).(y^*, 0)]$$

yazılabilir. Böylece $d = (y, y^*) = y + \varepsilon y^*$ elde edilir.

Teorem 2.1.10. $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat. $(\mathbb{D}, +)$ ikilisi bir Abel grubu olduğundan, bir reel sayı ile bir dual sayının çarpımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall d = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ için $\alpha . d = \alpha(y + \varepsilon y^*) = (\alpha y) + \varepsilon(\alpha y^*)$

ya da

$\forall d = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ için $d = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \alpha . d = (\alpha, 0).(y, y^*) &= (\alpha y, \alpha y^* + 0y) \\ &= (\alpha y, \alpha y^*) \\ &= (\alpha y, 0) + (0, \alpha y^*) \\ &= (\alpha y, 0) + [(0,1).(\alpha y^*, 0)] \\ &= \alpha y + \varepsilon(\alpha y^*). \end{aligned}$$

Bu durumda dış işlem aksiyomlarının sağlandığını görmek kolaydır (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.11. $\forall d = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ için $d = 1 + \varepsilon y^*$ olarak ifade edilirse $\mathbb{D}$ vektör uzayının bir bazı $\{1, \varepsilon\}$ ya da $\{(1,0).(0,1)\}$ dir. Böylece $boy\mathbb{D} = 2$ olup $\mathbb{D}$ vektör uzayına dual vektör ya da dual düzlem denir (Yüce, 2020a).

ε dual birimi (kompleks birimdeki i ye benzer olarak) kendisi sıfır olmuyorken karesi sıfır olmaktadır. Dolayısıyla dual sayılar reel sayıları içerirken kompleks sayıları içermez. Kompleks sayılarda

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i^2} = -i$$

eşitliği geçerli iken

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{0}$$

eşitliği geçerli değildir (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.12. $Y \oplus X = Y$ denkleminin çözümü olarak tanımlanan dual sayıya $\mathbb{D}$ nin **sıfırı** denir ve $0 = (0,0)$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

$Y \neq (0, y^*)$ için $Y \odot$ X = S denkleminin bir tek çözümü vardır. O halde

$$(y, y^*) \odot (x, x^*) = (s, s^*)$$

$$\Rightarrow (yx, yx^* + y^*x) = (s, s^*)$$

olup sıralı ikililerin eşitliğinden

$$yx = s, yx^* + y^*x = s^*$$

bulunur. Böylece

$$\mathrm{X} = \left(\frac{s}{y}, \frac{ys^* + y^*s}{s^2}\right)$$

elde edilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1.13. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar.

İspat. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $f: (y, 0) \to y$ olarak tanımlansın. f bir izomorfizmdir. Gerçekten de;

$i)$ f lineerdir: $Y = (y, 0)$ ve $S = (s, 0) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$f(Y \oplus S) = f(y + s, 0) = y + s = f(y, 0) + f(s, 0) = f(Y) + f(S)$$

dir. Bununla birlikte

$$f(Y \odot S) = f(ys, 0) = ys = f(y, 0)f(s, 0) = f(Y)f(S)$$

olduğu görülür.

$ii)$ f birebirdir: $Y = (y, 0)$ ve $S = (s, 0)$ ve $Y \neq S \Rightarrow f(Y) \neq f(S)$ dir. Doğrudan dual sayıların eşitliği tanımıyla birlikte $Y \neq S$ ise $y \neq s$ dir. O halde

$$f(Y) \neq f(S)$$

dir.

$iii)$ f örtendir: $\forall$ reel sayı bir tek $(x, 0) \in \mathbb{D}$ dual sayısının f altındaki görüntüsüdür (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.14. $Y = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında y reel sayısına Y nın reel kısmı, y^* reel sayısına da Y nin dual kısmı denir ve $ReY = y, DuY = y^*$ şeklinde yazılır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.15. $(1,0) = 1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı ya da $\mathbb{D}$ deki reel birim denir (Hacısalihoğlu, 1983).

$(0,1)$ dual sayısına dual birim adı verilir ve kısaca ε ile gösterilir ve

$$\varepsilon \,.\, \varepsilon = \varepsilon^2 = (1,0).(1,0) = (0,0) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$\varepsilon \neq 0$ için

$$0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0,$$

$$1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon$$

ve

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \cdots = \varepsilon^n = \cdots = 0$$

(Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.16. $(0, 0) \in \mathbb{D}$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin $\oplus$ işlemine göre birim elemanı denir ve

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$

izomorfizminde karşılık geldiği 0 reel sayısı ile ifade edilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.17. Bir Y dual sayısının bir λ skaler ile çarpımı

$$\lambda\, Y = (\lambda y, \lambda y^*)$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpım

$$\mathbb{R} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

biçiminde bir dış işlemdir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.18. $d = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ dualinin eşleniği $\bar{d}$ ile ve $\bar{d} = y - \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ biçiminde ifade edilir (Yüce, 2020a).

Teorem 2.1.19. $\forall d = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ dual sayısı için

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{y + \varepsilon y^*} = \frac{y - \varepsilon y^*}{(y\ +\ \varepsilon y^*)(y - \varepsilon y^*)} = \frac{1}{y} - \varepsilon \frac{y^*}{y^2}$$

biçiminde tanımlanır. İşlemin tanımlı olabilmesi için $y \neq 0$ olmalıdır.

Ayrıca $y \neq 0$ olmak üzere $d_1 = y + \varepsilon y^*$ ve $d_2 = z + \varepsilon z^* \in \mathbb{D}$ dual sayıları için bölme işlemi

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{y\ +\ \varepsilon y^*}{z + \varepsilon z^*} = \frac{(y\ +\ \varepsilon y^*)(z - \varepsilon z^*)}{(z + \varepsilon z^*)(z - \varepsilon z^*)} = \frac{y}{z} + \varepsilon \frac{y^* z -\ y z^*}{z^2}$$

şeklindedir. Aynı zamanda $\forall d_{1,} d_2 \in \mathbb{D}$ ve $d_2 \neq (0, z^*)$ için $\overline{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)} = \frac{\bar{d_1}}{\bar{d_2}}$ ve d dualinin eşleniği $\bar{d}$ için;

1) $\forall\ d \in \mathbb{D}$ için $\overline{(\bar{d}\,)} = d,$

2) $\forall d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{d_1 + d_2} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2,$

3) $\forall d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{d_1\,.\,d_2} = \bar{d}_1.\bar{d}_2,$

4) $\forall\, d \in \mathbb{D}$ için $d\bar{d} = (y + \varepsilon y^*)(y - \varepsilon y^*) = y^2$,

5) $d + \bar{d} = 2\,Re(d), d - \bar{d} = 2\varepsilon Du(d), d \in \mathbb{R}$ için d $= \bar{d}$

eşitlikleri geçerlidir (Yüce, 2020a).

Bölme işleminde kolaylık olması açısından $\frac{1}{\varepsilon} = \alpha$ ve $\frac{1}{0} = \infty$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1) $\dfrac{1}{\varepsilon y^*} = \dfrac{1}{y^*}\alpha, y^* \neq 0,$

2) $\dfrac{z^*\alpha}{y + \varepsilon y^*} = \dfrac{z^*.\dfrac{1}{\varepsilon}}{y + \varepsilon y^*} = \dfrac{z^*}{\varepsilon(y + \varepsilon y^*)} = \dfrac{z^*}{y\varepsilon} = \dfrac{z^*}{\mathrm{y}}\alpha,$

3) $\dfrac{y + \varepsilon y^*}{z^*\alpha} = \dfrac{y + \varepsilon y^*}{z^*.\dfrac{1}{\varepsilon}} = \dfrac{\varepsilon(y + \varepsilon y^*)}{z^*} = \dfrac{y}{z^*}\varepsilon,$

4) $m\alpha . n\alpha = \infty, m\varepsilon . n\varepsilon = (mn)\,\varepsilon^2 = 0,$

5) $\overline{m\alpha} = -m\alpha, \overline{\infty} = \infty,$

6) $(m\alpha \pm n\alpha) = (m \pm n)\alpha,$

7) $\dfrac{z^*\alpha}{y + \varepsilon y^*} = \dfrac{z^*}{y}\alpha, \dfrac{y + \varepsilon y^*}{z^*\alpha} = \dfrac{y}{z^*}\alpha,$

8) $(y + \varepsilon y^*)z^*\alpha = (yz^*)\alpha,$

9) $(y + \varepsilon y^*) + z^*\alpha = m\alpha,$

$(y + \varepsilon y^*) - z^*\alpha = -z^*\alpha$ (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.20. $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi $\mathbb{D}$ üzerine bir modül olmak üzere $\forall\ d_1 = y + \varepsilon y^*, d_2 = z + \varepsilon z^* \in \mathbb{D}$ için,

$$\langle,\rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \langle d_1, d_2\rangle = d_1\bar{d}_2$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur denir (Yüce, 2020a).

a) Simetri özelliği:

$$\langle d_1, d_2\rangle = \langle d_2, d_1\rangle$$

b) Bilineerlik özelliği: $d_1 = y + \varepsilon y^*, d_2 = z + \varepsilon z^* \in \mathbb{D}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

1) $\langle \alpha d_1, d_2\rangle = \alpha\langle d_1, d_2\rangle$

2) $\langle d_1, \alpha d_2\rangle = \alpha\langle d_1, d_2\rangle$

3) $\langle d_1 + d_2, d_3\rangle = \langle d_1, d_3\rangle + \langle d_2, d_3\rangle$

4) $\langle d_1, d_2 + d_3\rangle = \langle d_1, d_2\rangle + \langle d_1, d_3\rangle$

c) Pozitif tanımlılık özelliği:$\forall \mathrm{d} = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$,$\langle d, d \rangle = y^2 \geq 0$,

$\langle d, d \rangle = y^2 = 0$ olması için gerek ve yeter şart $y = 0$ olmasıdır. O halde $y^* \neq 0$ olduğunda $\langle d, d \rangle = 0$ olduğundan $\langle d, d \rangle = 0$ için $\mathrm{d} = 0 + \varepsilon y^* \neq 0$ elde edilir (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.21. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi bir vektör uzayı olsun. $\forall\, d_1 = y + \varepsilon y^*, d_2 = z + \varepsilon z^* \in \mathbb{D}$ için

$$\langle , \rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \langle d_1, d_2 \rangle = \frac{1}{2}\left(d_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_1 d_2\right) = yz$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon aşağıdaki aksiyomları sağladığında bir iç çarpım fonksiyonudur:

a) Simetri özelliği:

$$\langle d_1, d_2 \rangle = \langle d_2, d_1 \rangle$$

b) Bilineerlik özelliği: $d_1 = y + \varepsilon y^*, d_2 = z + \varepsilon z^* \in \mathbb{D}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

1) $\langle \alpha d_1, d_2 \rangle = \alpha \langle d_1, d_2 \rangle$

2) $\langle d_1, \alpha d_2 \rangle = \alpha \langle d_1, d_2 \rangle$

3) $\langle d_1 + d_2, d_3 \rangle = \langle d_1, d_3 \rangle + \langle d_2, d_3 \rangle$

4) $\langle d_1, d_2 + d_3 \rangle = \langle d_1, d_2 \rangle + \langle d_1, d_3 \rangle$

c) Pozitif tanımlılık özelliği:$\forall \mathrm{d} = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$,$\langle d, d \rangle = y^2 \geq 0$,

$\langle d, d \rangle = y^2 = 0$ olması için gerek ve yeter şart $y = 0$ olmasıdır. O halde $y^* \neq 0$ olduğunda $\langle d, d \rangle = 0$ olduğundan $\langle d, d \rangle = 0$ için $\mathrm{d} = 0 + \varepsilon y^* \neq 0$ elde edilir (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.22. $\forall \mathrm{d} = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının orijin noktasına uzaklığı (modülü) Tanım 2.1.21. gereğince

$$\|d\| = \sqrt{\langle d, d \rangle} = \sqrt{y^2} = |y|$$

biçiminde tanımlanır (Yüce, 2020a).

Teorem 2.1.23. $\forall d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ dual sayısı için,

1) $\|d_1 + d_2\| \leq \|d_1\| + \|d_2\|$, (üçgen eşitsizliği)

2) $\|d_1 . d_2\| = \|d_1\| . \|d_2\|$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. 1) $d_1 + d_2 = (\,y + \varepsilon y^*) + (z + \varepsilon z^*) = (y + z) + \ \varepsilon(y^* + z^*)$

için,

$$\|d_1 + d_2\| = |y + z| \leq |y| + |z| = \|d_1\| + \|d_2\|$$

elde edilir.

2) $d_1 = y + \varepsilon y^*, d_2 = z + \varepsilon z^* \in \mathbb{D}$ için

$$d_1 . d_2 = (\,y + \varepsilon y^*).(z + \varepsilon z^*) = yz + \varepsilon(yz^* + y^* z)$$

bulunur. Böylece

$$\|d_1 . d_2\| = |yz| \leq |y|.|z| = \|d_1\|.\|d_2\|$$

dir (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.24. $\mathbb{D}$ dual düzlemde M ve N iki nokta ve noktaların dual sayılardaki ifadeleri sırasıyla d_1 ve d_2 için M ve N arasındaki uzaklık

$$d(M,N) = \|d_2 - d_1\| = \|(\mathrm{z} - \mathrm{y}) + \varepsilon(z^* - y^*)\| = \|\mathrm{z} - \mathrm{y}\|$$

biçimindedir (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.25. $\mathbb{D}$ dual düzlemde O merkezli r yarıçaplı çemberin denklemi

$$\|d\| = |y + \varepsilon y^*| = r = |y| \text{ olup } y = \pm r$$

şeklinde verilir. Özel olarak $y = \pm 1$ denklemi dual düzlem üzerinde orijin merkezli birim çember belirtir (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.26. d_0 merkezli ve r yarıçaplı çemberin denklemi

$$(d - d_0)\left(\bar{d} - \overline{d_0}\right) = r^2$$

biçimindedir. Böylece Öklid anlamında paralel iki doğruya (d_0 noktasından eşit uzaklıktaki) dual çember denir (Yüce, 2020a).

Tanım 2.1.27. d_0 ve d_1 noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi

$$d - d_0 = w(d_1 - d_0)$$

olduğundan,

$$d(w) = d_0(1 - w) + d_1 w, -\infty < w < \infty$$

biçimindedir (Yüce, 2020a).

Örnek 2.1.28. $w \in \mathbb{R}$ için, $d(w) = \varepsilon(1 - w) + 10w$

dual düzlemde bir doğru belirtir.

Teorem 2.1.29. (E.STUDY). $\vec{Y} = \vec{y} + \overrightarrow{\varepsilon y^*}$ ve $\vec{y} \neq \vec{0}$ olmak üzere $\mathbb{D} -$ Modül'de denklemi $\|\vec{Y}\| = (1,0)$ olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ de yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.2. Dual Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D} = \{\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n): Y_i \in \mathbb{D}, 1 \le i \le n\}$ kümesi ifade edilsin. $\mathbb{D}^n$ kümesinin elemanları birer dual sayı olan sıralı n-li şeklindedir. Böylece bu sıralı n-liler $Y_i = y_i + \varepsilon y_i{}^*$ için

$$\begin{aligned}\vec{Y} &= (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (y_1 + \varepsilon y_1{}^*, y_2 + \varepsilon y_2{}^*, \dots, y_n + \varepsilon y_n{}^*) \\ &= (y_1, y_{2,\dots,} y_n) + \varepsilon(y_1{}^*, y_2{}^*, \dots, y_n{}^*)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(y_1, y_{2,\dots,} y_n), (y_1{}^*, y_2{}^*, \dots, y_n{}^*) \in \mathbb{R}^n$ için $Y_i = y_i + \varepsilon y_i{}^*$ dir. $\mathbb{D}^{\boldsymbol{n}}$ kümesi üzerinde toplama, dual sayı ile çarpma ve eşitlik işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\forall \vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*, \vec{S} = (S_1, S_2, \dots, S_n) = \vec{s} + \varepsilon \vec{s}^* \in \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}}$ ve

$\forall \alpha = \alpha + \varepsilon \alpha^* \in \mathbb{D}$ ise,

Toplama: $\vec{Y} \oplus \vec{S} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \oplus (S_1, S_2, \dots, S_n) = (Y_1 + S_1, Y_2 + S_2, \dots, Y_n + S_n)$

veya $\vec{Y} + \vec{S} = (\vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*) + (\vec{s} + \varepsilon \vec{s}^*) = (\vec{y} + \vec{s}) + \varepsilon(\vec{y}^* + \vec{s}^*)$.

Dual sayı ile çarpma: $\alpha \odot \vec{Y} = (\alpha Y_1, \alpha Y_2, \dots, \alpha Y_n) \in \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}}$ veya

$\alpha \odot \vec{Y} = (\alpha + \varepsilon \alpha^*) \odot (\vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*) = \varepsilon(\alpha \vec{y}^* + \alpha^* \vec{y})$.

Eşitlik: $\vec{Y} = \vec{S}$ olması için gerek ve yeter şart $Y_i = S_i$ ya da $\vec{y} = \vec{s}, \vec{y}^* = \vec{s}^*$ olmasıdır (Yüce,2020b).

Tanım 2.2.2. $\forall \vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots Y_n) = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*, \vec{S} = (S_1, S_2, \dots S_n) = \vec{s} + \varepsilon \vec{s}^* \in \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}}$ için

$$\langle , \rangle : \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}} \times \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{D}$$

$$\langle \vec{Y}, \vec{S} \rangle = \sum_{i=1}^{n} Y_i S_i$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur. $Y_i, S_i \in \mathbb{D}$ için bu fonksiyon üzerinde aşağıdaki aksiyomlar mevcuttur:

1) Simetri: $\forall \vec{Y}, \vec{S} \in \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}}$ için

$$\langle \vec{Y}, \vec{S} \rangle = \sum_{i=1}^{n} Y_i S_i = \sum_{i=1}^{n} S_i Y_i = \langle \vec{S}, \vec{Y} \rangle$$

dir.

2) Bilineerlik: $\forall \vec{Y}, \vec{S}, \vec{N} \in \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}}$ ve $\forall \alpha_{1,} \alpha_{\mathbf{2}} \in \mathbb{D}$ için

$$\left\langle \alpha_1 \vec{Y} + \alpha_{\mathbf{2}} \vec{S}, \vec{N} \right\rangle = \alpha_1 \left\langle \vec{Y}, \vec{N} \right\rangle + \alpha_{\mathbf{2}} \left\langle \vec{S}, \vec{N} \right\rangle$$

ve

$$\left\langle \vec{Y}, \alpha_1 \vec{S} + \alpha_{\mathbf{2}} \vec{N} \right\rangle = \alpha_1 \left\langle \vec{Y}, \vec{S} \right\rangle + \alpha_{\mathbf{2}} \left\langle \vec{Y}, \vec{N} \right\rangle$$

özellikleri sağlanır.

3) Pozitif Tanımlılık: $\forall \vec{Y} = (Y_i) \in \mathbb{D}^{\boldsymbol{n}}$ için $\left\langle \vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle = \sum_1^n (Y_i)^2 \in \mathbb{D}$ bulunur. $Y_i = y_i + \varepsilon {y_i}^*$ için $(Y_i)^2 = {y_i}^2 + 2\varepsilon y_i {y_i}^*$ olduğundan ${y_i}^2 \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^n {y_i}^2 \geq 0$ olup $(Y_i)^2 \geq 0$ yada $\left\langle \vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle \geq 0$ bulunur. $\forall \vec{Y} = (0) = \vec{0}$ ve $\left\langle \vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle = 0$ iken $\left\langle \vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle = \sum_{i=1}^n (Y_i)^2 = 0$ olup $(Y_i)^2 = {y_i}^2 + 2\varepsilon y_i {y_i}^* = 0 + \varepsilon 0$ bulunur. Böylece $y_i = 0$ elde edilir fakat ${y_i}^* = 0$ olmak zorunda değildir. Buradan $\vec{Y} \neq 0$ olabilir (Yüce, 2020b).

Tanım 2.2.3. $\vec{Y} = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^* \in \mathbb{D}$ dual vektörünün normu

$$\left\| \vec{Y} \right\| = \sqrt{\left\langle \vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece

$$\left\langle \vec{Y}, \vec{Y} \right\rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle$$

olduğundan

$$\left\| \vec{Y} \right\| = \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle}$$

olup

$$\sqrt{m + \varepsilon n} = \sqrt{m} + \varepsilon n \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

eşitliği kullanılırsa, norm

$$\left\| \vec{Y} \right\| = \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} + \varepsilon \frac{\langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle}{\sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}} = \|\vec{y}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle}{\|\vec{y}\|}$$

biçiminde tanımlanır (Yüce, 2020b).

Örnek 2.2.3. $\vec{Y} = (1 + \varepsilon, 3 + \varepsilon, 5 + \varepsilon) \in \mathbb{D}$ için

$$\vec{Y} = (1 + \varepsilon, 3 + \varepsilon, 5 + \varepsilon) = (1,3,5) + \varepsilon(1,1,1) = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*$$

olmak üzere $\vec{Y}$ dual vektörünün normu

$$\left\| \vec{Y} \right\| = \sqrt{\langle (1,3,5), (1,3,5) \rangle} + \varepsilon \frac{\langle (1,3,5), (1,1,1) \rangle}{\sqrt{\langle (1,3,5), (1,3,5) \rangle}}$$

$$= \sqrt{35} + \varepsilon \frac{9}{\sqrt{35}}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.2.4. $\forall \vec{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*, \vec{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_n) = \vec{s} + \varepsilon \vec{s}^* \in \mathbb{D}$ dual vektörlerinin dual vektörel çarpımı

$$\wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$

$$\vec{Y} \wedge \vec{S} = det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\vec{Y} \wedge \vec{S} = (Y_2 S_3 - Y_3 S_2, Y_3 S_1 - Y_1 S_3, Y_1 S_2 - Y_2 S_1)$$

biçiminde tanımlanır. Aynı zamanda son ifade de $Y_i = y_i + \varepsilon {y_i}^*, S_i = s_i + \varepsilon {s_i}^* \in \mathbb{D}$, $1 \leq i \leq 3$ yazılırsa $\vec{y}, \vec{y}^*, \vec{s}, \vec{s}^* \in \mathbb{R}^3$ reel vektörlerinin vektörel çarpımları yardımıyla vektörel çarpım

$$\vec{Y} \wedge \vec{S} = (\vec{y} + \varepsilon \vec{y}^*) \wedge (\vec{s} + \varepsilon \vec{s}^*) = (\vec{y} \wedge \vec{s}) + \varepsilon[(\vec{y} \wedge \vec{s}^*) + (\vec{y}^* \wedge \vec{s}\,)]$$

şeklinde de yazılabilir (Yüce, 2020b).

2.3. Lorentz Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1. $\langle , \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonunda aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

$\forall y, s \in \mathbb{R}$ ve $m, n, l \in V$ için,

i) Bilineerlik Aksiyomu:

$$\langle ym + sn, l \rangle = y\langle m, l \rangle + s\langle n, l \rangle,$$

ii) Simetri Aksiyomu:

$$\langle m, n \rangle = \langle n, m \rangle$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.2. $\langle , \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. O zaman;

i) $\forall m \in V$ ve $m \neq 0$ için $\langle m, m \rangle > 0$ ise simetrik bilineer form pozitif tanımlı,

ii) $\forall m \in V$ ve $m \neq 0$ için $\langle m, m \rangle < 0$ ise simetrik bilineer form negatif tanımlı,

iii) $\forall m \in V$ ve $m \neq 0$ için $\langle m, m \rangle \geq 0$ ise simetrik bilineer form yarı pozitif tanımlı,

iv) $\forall m \in V$ ve $m \neq 0$ için $\langle m, m \rangle \leq 0$ ise simetrik bilineer yarı negatif tanımlı,

v) $\forall m \in V$ ve $m \neq 0$ için $\langle m, l \rangle = 0 \Rightarrow l = 0$ ise simetrik bilineer forma non-dejenere denir (Gür,2010).

Tanım 2.3.3. $\langle , \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu simetrik, bilineer ve non-dejenere ise $\langle , \rangle$ ye V üzerinde bir skalar çarpım fonksiyonu, V vektör uzayına da skalar çarpım uzay denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.4. V vektör uzay ve $\langle , \rangle$ V üzerinde bir iç çarpım olsun. İç çarpımın negatif tanımlı olduğu maksimal boyutlu alt uzayının boyutuna V vektör uzayının indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.5. $\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle Y, S \rangle = -y_1 s_1 + \sum_{i=2}^{n} y_i s_i$$

fonksiyonu bir skalar çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde Lorentz metriği denir (Gür,2010).

Tanım 2.3.6. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte $\{\mathbb{R}^n, \langle , \rangle\}$ ikilisine n-boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca Lorentz uzay denir ve L^n ile gösterilir (Gür,2010).

Tanım 2.3.7. $Y \in L^n$ vektörü için;

i) $\langle Y, Y\rangle > 0$ $veya$ $Y = 0$ ise Y ye spacelike (uzay benzeri) vektör,

ii) $\langle Y, Y\rangle < 0$ ise Y ye timelike (zaman benzeri) vektör,

iii) $\langle Y, Y\rangle = 0$ ise Y ye null (ligthlike veya ışık benzeri) vektör denir (Gür,2010).

Tanım 2.3.8. Lorentz uzayında bir Y vektörünün normu

$$\|Y\| = \sqrt{|\langle Y, Y\rangle|}$$

şeklinde tanımlanır (Gür,2010).

Tanım 2.3.9. $Y \in L^n$ için

i) $\|Y\| > 0,$

ii) $\|Y\| = 0, \forall Y \in L^n$ için Y bir null vektördür.

iii) Y bir timelike vektör ise $\|Y\|^2 = -\langle Y, Y\rangle$ dir.

iv) Y bir spacelike vektör ise $\|Y\|^2 = \langle Y, Y\rangle$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.10. L^n , 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör Y ve S olsun.

$$\wedge : L^3 \times L^3 \to L^3$$

$$(Y, S) \to Y \wedge S = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} = (y_3 s_2 - y_2 s_3, y_1 s_3 - y_3 s_1, y_1 s_2 - y_2 s_1)$$

fonksiyonuna vektörel çarpım fonksiyonu, $Y \wedge S$ vektörüne de Y ile S nin vektörel çarpımı denir (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

Teorem 2.3.11. L^n, 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör Y ve S olsun.

i) Y ve S spacelike vektör ise $Y \wedge S$ bir timelike vektördür,

ii) Y ve S timelike vektör ise $Y \wedge S$ bir spacelike vektördür,

iii) Y spacelike ve S timelike vektör ise $Y \wedge S$ bir spacelike vektördür,

iv) Y ve S null vektör ise $Y \wedge S$ bir spacelike vektördür,

v) Y timelike ve S null vektör ise $Y \wedge S$ bir spacelike vektördür,

vi) Y spacelike ve S null vektör olmak üzere $\langle Y, S \rangle = 0$ ise $Y \wedge S$ bir null vektör, $\langle Y, S \rangle \neq 0$ ise $Y \wedge S$ bir spacelike vektördür (Turgut,1995).

Teorem 2.3.12. $Y, S, N \in L^n$ olsun. Bu durumda;

i) $\langle Y \wedge S, N \rangle = -\det(Y, S, N)$,

ii) $(Y \wedge S) \wedge N = -\langle Y, N \rangle S + \langle S, N \rangle Y$,

iii) $\langle Y \wedge S, Y \rangle = 0$ ve $\langle Y \wedge S, S \rangle = 0$,

iv) $\langle Y \wedge S, Y \wedge S \rangle = -\langle Y, Y \rangle \langle S, S \rangle + \langle Y, S \rangle^2$

dir (Turgut, 1995).

2.4. Dual Lorentz Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.4.1. $\langle , \rangle_l : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$

$$\langle \mathrm{Y}, \mathrm{S} \rangle_{\mathrm{l}} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Y}_{\mathrm{i}} \mathrm{S}_{\mathrm{i}} - \mathrm{Y}_{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{n}}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur. Bunu dual Lorentz iç çarpım fonksiyonu denir. Burada $\mathbb{D}^n$ uzayına da dual Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{D}_1^n$ ile gösterilir (Yüce, 2020).

Tanım 2.4.2. Herhangi bir $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^* = (\vec{y}, \vec{y}^*) \in \mathbb{D}_1^n$ dual vektörü ise

$$\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle_l = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_l + 2\varepsilon \langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle_l$$

şeklinde tanımlanırsa;

1) $\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle_l > 0$ veya $\vec{Y} = \vec{0}$ ise $\vec{Y}$ vektörüne spacelike dual vektör,

2) $\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle_l < 0$ ise $\vec{Y}$ vektörüne timelike dual vektör,

3) $\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle_l = 0, (\vec{Y} \neq \vec{0})$ ise $\vec{Y}$ vektörüne null dual vektör,

denir (Yüce, 2020).

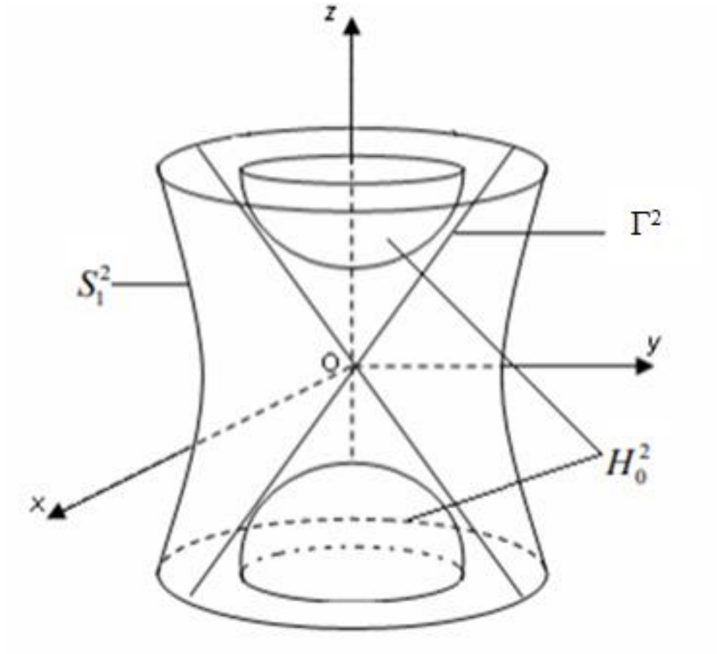
Tanım 2.4.3. $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^* \in \mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz vektörü verilsin.

i) $S_1^2 = \left\{ \vec{Y} = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^* : \left\| \vec{Y} \right\| = (1,0), \vec{y}, \vec{y}^* \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \vec{y} \text{ spacelike } \right\}$

kümesine $\mathbb{D}_1^3$ üzerinde $\hat{O}$ merkezli dual Lorentz birim küre veya pseudo dual küre denir.

ii) $H_0^2 = \left\{ \vec{Y} = \vec{y} + \varepsilon \vec{y}^* : \left\| \vec{Y} \right\| = (1,0), \vec{y}, \vec{y}^* \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \vec{y} \text{ timelike} \right\}$

kümesine $\mathbb{D}_1^3$ üzerinde $\hat{O}$ merkezli dual hiperbolik birim küre veya pseudo dual hiperbolik küre denir (Yüce, 2020).



Şekil 2.1. S_1^2 Lorentz Birim Küresi, H_0^2 Hiperbolik Birim Küresi ve Γ^2 Işık Konisi

Tanım 2.4.4. $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \vec{y} + \varepsilon\vec{y}^* = (\vec{y}, \vec{y}^*) \in \mathbb{D}_1^n$
ise

$$\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle_l = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_l + 2\varepsilon \langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle_l$$

için $\vec{Y} \in \mathbb{D}_1^n$ non-null dual vektörünün normu

$$\|\vec{Y}\| = \sqrt{|\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle_l|}$$

şeklinde tanımlanır. Örnek olarak
$d = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının karakökü ve mutlak değeri sırasıyla

$$\sqrt{y + \varepsilon y^*} = \sqrt{\mathrm{y}} + \varepsilon \frac{y^*}{2\sqrt{\mathrm{y}}}$$

ve

$$|y + \varepsilon y^*| = \begin{cases} y + \varepsilon y^*, y > 0 \\ -y - \varepsilon y^*, \quad y < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa

$$\|\vec{Y}\| = \sqrt{|\langle \vec{Y}, \vec{Y} \rangle_l|} = \sqrt{|\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_l + 2\varepsilon \langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle_l|}$$

normu $\vec{y}$ spacelike dual vektör ise $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_l > 0$ olduğundan

$$|\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_l + 2\varepsilon \langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle_l| = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_l + 2\varepsilon \langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle_l$$

yazılır. Böylece norm

$$\|\vec{Y}\| = \|\vec{y}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{y}, \vec{y}^* \rangle}{\|\vec{y}\|}$$

şeklinde bulunur (Yüce, 2020).

Tanım 2.4.5. Her $\beta_i(t)$ ve $\beta_i^*(t)$, $1 \leq i \leq 3$, türevlenebilir reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\hat{\beta} : I \subset R \to \mathbb{D}_1^3$$

$$t \to \overrightarrow{\hat{\beta}(t)} = (\beta_1(t) + \varepsilon\beta_1^*(t), \beta_2(t) + \varepsilon\beta_2^*(t), \beta_3(t) + \varepsilon\beta_3^*(t))$$
$$= \overrightarrow{\beta(t)} + \varepsilon\overrightarrow{\beta^*(t)}$$

eğrisine dual Lorentz eğrisi denir. Burada $\mathbb{D}_1^3$ de türevlenebilirdir (Bozkır, 2011).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Lorentz Uzayında Açı

Tanım 3.1.1. $Y, S \in L^n$ timelike vektörler olsun. O zaman

$$\langle Y, S\rangle \leq \|Y\|\|S\|$$

olur. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart Y ve S vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

$$\langle Y, S\rangle = \|Y\|\|S\|cosh\phi,$$

olacak şekilde bir tek $\phi > 0$ reel sayısı vardır. Buradaki ϕ açısına timelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

Örnek 3.1.2. $Y = (4, -2, 2) \in L^3$, $S = (2, -1, 1) \in L^3$ için,

$$\langle Y, S\rangle = -8 + 2 + 2 = -4 < 0$$

ve

$$\langle Y, Y\rangle = -16 + 4 + 4 = -8 < 0$$

olduğundan Y timelike vektördür.

$$\langle S, S\rangle = -4 + 1 + 1 = -2 < 0$$

olup S timelike vektördür. O zaman

$$\langle Y, S\rangle \leq \|Y\|\|S\|$$

eşitsizliğinde Y ve S vektörleri yerine yazılırsa,

$$\langle Y, S\rangle = \|Y\|\|S\|cosh\phi$$

için

$$-4 = \sqrt{|-16 + 4 + 4|}\sqrt{|-4 + 1 + 1|}cosh\phi$$

$$\Rightarrow -4 = \sqrt{8}\sqrt{2}cosh\phi$$

ve

$$cosh\phi = \frac{-4}{\sqrt{8}\sqrt{2}}$$

olup ϕ, timelike vektörler arasındaki açı timelike açı olduğundan

$$\phi = cosh^{-1}\frac{-4}{\sqrt{8}\sqrt{2}}$$

için $\phi > 0$ bulunur.

Tanım 3.1.3. $\mathrm{Y}, \mathrm{S} \in L^n$spacelike vektörler olsun. O halde Y ve S vektörlerinin gerdiği düzlem spacelike ise,

$$|\langle Y, S\rangle| \leq \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\|$$

eşitsizliği mevcuttur.

$$\langle Y, S\rangle = \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\| cos\phi$$

olacak şekilde bir tek $0 \leq \phi \leq \pi$ reel sayısı vardır. Buradaki ϕ açısına spacelike vektörler arasındaki Lorentzian spacelike açı denir.

Örnek 3.1.4. $Y = (1, 4, 3) \in L^3$, $S = (2, 8, 6) \in L^3$ için,

$$\langle Y, S\rangle = -2 + 32 + 18 = 48 > 0$$

ve

$$\langle Y, Y\rangle = -1 + 16 + 9 = 24 > 0$$

olduğundan Y spacelike vektördür.

$$\langle S, S\rangle = -4 + 64 + 36 = 96 > 0$$

olduğundan S spacelike vektördür.

$$|\langle Y, S\rangle| \leq \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\|$$

eşitsizliğinde Y ve S vektörleri yerlerine yazılırsa

$$|48| \leq \|24\|\|96\|$$

olduğu görülür. Burada

$$\langle Y, S\rangle = \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\| cos\phi$$

$$\Rightarrow 48 = \sqrt{1 + 16 + 9}\sqrt{4 + 64 + 36}\, cos\phi$$

$$\Rightarrow 48 = \sqrt{24}\sqrt{96} cos\phi$$

$$\Rightarrow cos\phi = \frac{48}{\sqrt{24}\sqrt{96}}$$

ϕ, spacelike vektörler arasındaki Lorentzian spacelike açı olup

$$\phi = cos^{-1} \frac{48}{\sqrt{24}\sqrt{96}}$$

için $\phi = 0$ elde edilir.

Tanım 3.1.5. $\mathrm{Y}, \mathrm{S} \in L^n$ spacelike vektörler olsun. O halde Y ve S vektörlerinin gerdiği düzlem timelike ise,

$$|\langle Y, S\rangle| > \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\|$$

dir. Burada

$$\langle Y, S\rangle = \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\| cosh\phi$$

olacak şekilde $\phi > 0$ reel sayısı vardır. Buradaki ϕ açısına spacelike vektörler arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

Tanım 3.1.6. $\mathrm{Y} \in L^n$ spacelike ve $\mathrm{S} \in L^n$ timelike vektörler olsun. O zaman

$$|\langle Y, S\rangle| = \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\| sinh\phi$$

olacak şekilde $\phi > 0$ reel sayısı vardır. Buradaki ϕ açısına spacelike vektör ile timelike vektör arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

Örnek 3.1.7. $Y = (1, -4, -5) \in L^3, S = (-4, 3, 2) \in L^3$ için,

$$\langle Y, Y\rangle = -1 + 16 + 25 = 40 > 0$$

spacelike vektör,

$$\langle S, S\rangle = -16 + 9 + 4 = -3 < 0$$

timelike vektör ve

$$\langle Y, S\rangle = 4 - 12 - 10 = -18 < 0$$

timelike vektör olup

$$|\langle Y, S\rangle| = \|\mathrm{Y}\|\|\mathrm{S}\| sinh\phi$$

$$\Rightarrow 18 = \sqrt{|-1 + 16 + 25|}.\sqrt{|-16 + 9 + 4|} sinh\phi$$

$$\Rightarrow sinh\phi = \frac{18}{\sqrt{40}.\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \phi = sinh^{-1} \frac{18}{\sqrt{40}.\sqrt{3}}$$

olacak şekilde $\phi > 0$, spacelike ve timelike iki vektör arasındaki Lorentzian timelike açıdır (Ratcliffe,1994).

Tanım 3.1.8. $\beta: I \subset \mathbb{R} \to L^n$ eğrisinin teğet vektörü w olsun.

i) $\langle w, w\rangle > 0$ ise w eğrisine spacelike (uzay benzeri) eğri,

ii) $\langle w, w\rangle < 0$ ise w eğrisine zamansı timelike (zaman benzeri) eğri,

iii) $\langle w, w \rangle = 0$ ise w eğrisine null (lightlike veya ışık benzeri) eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 3.1.9. $\beta: I \subset \mathbb{R} \to L^3$ diferansiyellenebilir eğrisinin $\beta(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{Z, M, G\}$ ve eğrikleri k_1 ve k_2 olsun.

i) β timelike bir eğri ise;

$$Z \wedge M = -G, M \wedge G = Z, G \wedge Z = -M$$

olur. O halde Frenet formülleri

$$\begin{cases} Z' = k_1 M \\ M' = k_1 Z - k_2 G \\ G' = k_2 Z \end{cases}$$

(Woestijine,1990) ve Darboux vektörü

$$w = k_2 Z - k_1 G$$

biçiminde bulunur (Uğurlu,1997).

ii) β spacelike binormalli spacelike bir eğri ise;

$$Z \wedge M = -G, M \wedge G = -Z, G \wedge Z = M$$

olup Frenet formülleri

$$\begin{cases} Z' = k_1 M \\ M' = k_1 Z + k_2 G \\ G' = k_2 Z \end{cases}$$

(Woestijne,1990) ve Darboux vektörü

$$w = -k_2 Z + k_1 G$$

şeklindedir (Uğurlu,1997).

iii) β timelike binormalli spacelike bir eğri ise;

$$Z \wedge M = G, M \wedge G = -Z, G \wedge Z = -M$$

olmak üzere buradan Frenet formülleri

$$\begin{cases} Z' = k_1 M \\ M' = -k_1 Z + k_2 G \\ G' = k_2 Z \end{cases}$$

(Woestijne,1990) ve Darboux vektörü

$$w = k_2 Z - k_1 G$$

olarak bulunur (Uğurlu,1997).

Tanım 3.1.10. $\beta: I \subset \mathbb{R} \to L^3$ eğrisinin $\beta(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{Z, M, G\}$, eğrikleri k_1 ve k_2, Darboux vektörü w olsun. O zaman;

$i)$ β timelike bir eğri ise,

$$\|w\| = \sqrt{|{k_1}^2 - {k_2}^2|}$$

dir. O halde

$a)$ $|k_1| > |k_2|$ ise $\langle w, w \rangle > 0$ olduğundan w spacelike bir vektör olur. G ile w vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ için, k_1 ve k_2 eğrilikleri ve j vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| cosh\varphi, \\ k_2 = \|w\| sinh\varphi \end{cases} \|w\| = \sqrt{{k_1}^2 - {k_2}^2}$$

ve

$$j = sinh\varphi Z - cosh\varphi G$$

biçiminde tanımlanır.

$b)$ $|k_1| < |k_2|$ ise $\langle w, w \rangle < 0$ olacağından w timelike bir vektör olur. G ile w vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ ile gösterilirse, k_1 ve k_2 eğrilikleri ve j vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| sinh\varphi \\ k_2 = \|w\| cosh\varphi \end{cases}, \|w\| = \sqrt{{k_2}^2 - {k_1}^2}$$

ve

$$j = cosh\varphi Z - sinh\varphi G$$

şeklindedir.

$ii)$ β spacelike binormalli spacelike bir eğri ise,

$$\|w\| = \sqrt{|{k_1}^2 + {k_2}^2|}$$

dir. $\langle w, w \rangle > 0$ olacağından w spacelike bir vektör olur. G ile w vektörü arasındaki Lorentzian spacelike açı φ olmak üzere, k_1 ve k_2 eğrilikleri ve j vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| cos\varphi \\ k_2 = \|w\| sin\varphi \end{cases}, \|w\| = \sqrt{{k_2}^2 + {k_1}^2},$$

$$j = -sin\varphi Z + cos\varphi G$$

biçimindedir.

$iii)$ β timelike binormalli spacelike bir eğri ise,

$$\|w\| = \sqrt{|{k_2}^2 - {k_1}^2|}$$

dir. O halde

$a)$ $|k_2\ | > |k_1\ |$ ise $\langle w, w\rangle > 0$ olduğundan w spacelike bir vektör olur. G ile w vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ için, k_1 ve k_2 eğrilikleri ve j vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| sinh\varphi \\ k_2 = \|w\| cosh\varphi \end{cases}, \|w\| = \sqrt{{k_2}^2 - {k_1}^2}$$

olmak üzere

$$j = cosh\varphi Z - sinh\varphi G$$

şeklinde ifade edilir.

$b)$ $|k_2\ | < |k_1\ |$ ise $\langle w, w\rangle < 0$ olduğundan w timelike bir vektör olur. G ile w vektörü arasındaki Lorentzian timelike açı φ açısı için, k_1 ve k_2 eğrilikleri ve j vektörü,

$$\begin{cases} k_1 = \|w\| cosh\varphi \\ k_2 = \|w\| sinh\varphi \end{cases}, \|w\| = \sqrt{{k_1}^2 - {k_2}^2}$$

$$j = sinh\varphi Z - cosh\varphi G$$

biçiminde tanımlıdır (Gür,2010).

4.BULGULAR

4.1. Dual Lorentz Uzayında Eğriler

Tanım 4.1.1. Bir dual Lorentz eğrisinin $\hat{\beta} : I \subset R \to \mathbb{D}_1^3$ için, $\hat{k} = k + \varepsilon k^*$ eğriliği ve $\hat{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$ burulması sırf dual olması.

$$\langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{Z}} \rangle = \varepsilon_0, \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1, \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \varepsilon_2, \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0$$

ise dual Frenet formüllerinin matris formu

$$\frac{d}{d_s}\begin{bmatrix} \vec{\hat{Z}} \\ \overrightarrow{\widehat{M}} \\ \vec{\hat{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k} & 0 & \hat{\tau} \\ 0 & -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{\tau} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{\hat{Z}} \\ \overrightarrow{\widehat{M}} \\ \vec{\hat{G}} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $\left\{\vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}}\right\}, \left\{\vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}}\right\}$ ve $\left\{\overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\hat{G}}\right\}$ vektör alanları tarafından gerilen düzlemlere sırasıyla oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem ve normal düzlem adı verilir (Bozkır,2011).

Teorem 4.1.2. Eğer $\langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{Z}} \rangle = \varepsilon_0$ ise $\langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle = \mp \hat{k}^2$ dir. Burada $\varepsilon_0 = \pm 1$ dir.

İspat. $\langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{Z}} \rangle = \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \pm 1$ için her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle \overrightarrow{\hat{Z}'}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\hat{Z}'} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\hat{Z}'}, \vec{\hat{Z}} \rangle = 0$$

elde edilir. Her iki tarafın tekrar türevi alınırsa;

$$\langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \langle \overrightarrow{\hat{Z}'}, \overrightarrow{\hat{Z}'} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \langle \hat{k}\overrightarrow{\widehat{M}}, \hat{k}\overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \hat{k}^2 \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = 0$ olup burada $\langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1$ için

$$\langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \hat{k}^2 \varepsilon_1 = 0$$

bulunur. Burada iki durum söz konusudur:

i)$\varepsilon_1 = +1$ için, $\langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \hat{k}^2 = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle = -\hat{k}^2$ elde edilir.

ii) $\varepsilon_1 = -1$ için, $\langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle - \hat{k}^2 = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \vec{\hat{Z}} \rangle = \hat{k}^2$ bulunur.

Teorem 4.1.3. $\langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1$ olmak üzere $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ durumlarına göre $\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \hat{k}^2 - \hat{\tau}^2$, $\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = -\hat{k}^2 - \hat{\tau}^2$ ve $\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = -\hat{k}^2 + \hat{\tau}^2$ dir.

İspat. $\langle \overrightarrow{\widehat{M}'}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}'} \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle -\varepsilon_0\varepsilon_1 \hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, -\varepsilon_0\varepsilon_1 \hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}} \rangle = 0$$

$-\varepsilon_0\varepsilon_1 \hat{k} \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \hat{\tau} \langle \vec{\hat{G}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle - \varepsilon_0\varepsilon_1 \hat{k} \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \hat{\tau} \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0$ olup burada

$$\langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0$$

olarak alınırsa $0 = 0$ özdeşliği vardır. Ayrıca

$\langle \overrightarrow{\widehat{M}'}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = 0$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \langle \overrightarrow{\widehat{M}'}, \overrightarrow{\widehat{M}'} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \langle -\varepsilon_0\varepsilon_1 \hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}}, -\varepsilon_0\varepsilon_1 \hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + {\varepsilon_0}^2{\varepsilon_1}^2\hat{k}^2 \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{Z}} \rangle - \varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}\hat{\tau} \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}} \rangle - \varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}\hat{\tau} \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{Z}} \rangle + \hat{\tau}^2 \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0$$

bulunur. Burada

$\langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{Z}} \rangle = \varepsilon_0, \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0, \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{Z}} \rangle = 0, \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \varepsilon_2$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + {\varepsilon_0}^3{\varepsilon_1}^2\hat{k}^2 + \hat{\tau}^2\varepsilon_2 = 0$$

olarak elde edilir. Böylece;

i) $\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1$ için,

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle - \hat{k}^2 + \hat{\tau}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \hat{k}^2 - \hat{\tau}^2$$

eşitliği bulunur.

ii) $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$ için,

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \hat{k}^2 + \hat{\tau}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = -\hat{k}^2 - \hat{\tau}^2$$

eşitliği mevcuttur.

iii) $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$ için,

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \hat{k}^2 - \hat{\tau}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = -\hat{k}^2 + \hat{\tau}^2$$

vardır. Böylece istenilenler elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.4. $\langle \overrightarrow{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \varepsilon_2$ ise $\varepsilon_{0,}\varepsilon_1, \varepsilon_2$ durumları için $\langle \overrightarrow{\hat{G}''}, \vec{\hat{G}} \rangle = \mp \hat{\tau}^2$ dir.

İspat. $\langle \overrightarrow{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \varepsilon_2$
eşitliğinde birinci türev alınırsa,

$$\langle \overrightarrow{\hat{G}'}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle \overrightarrow{\hat{G}}, \overrightarrow{\hat{G}'} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\overrightarrow{\hat{M}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle \vec{\hat{G}}, -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\overrightarrow{\hat{M}} \rangle = 0$$

$-\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\,\langle \overrightarrow{\hat{M}}, \vec{\hat{G}} \rangle - \varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\,\langle \overrightarrow{\hat{G}}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle = 0$ olup $\langle \overrightarrow{\hat{M}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0, \langle \vec{\hat{G}}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle = 0$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$0 = 0$$

özdeşliği elde edilir. Ayrıca

$$\langle \overrightarrow{\hat{G}'}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0$$

ifadesinin ikinci türevi alınırsa

$$\langle \overrightarrow{\hat{G}''}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle \overrightarrow{\hat{G}'}, \overrightarrow{\hat{G}'} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\hat{G}''}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\overrightarrow{\hat{M}}, -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\overrightarrow{\hat{M}} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\hat{G}''}, \vec{\hat{G}} \rangle + {\varepsilon_1}^2{\varepsilon_2}^2\hat{\tau}^2\,\langle \overrightarrow{\hat{M}}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle = 0$$

bulunur. Burada $\langle \overrightarrow{\hat{M}}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle = \varepsilon_1$ için

$$\langle \overrightarrow{\hat{G}''}, \vec{\hat{G}} \rangle + {\varepsilon_1}^3{\varepsilon_2}^2\hat{\tau}^2 = 0$$

olduğu görülür. Şimdi ε_1 ve ε_2 değerleri için bir önceki ifade irdelenirse:

i) $\varepsilon_1 = 1$ ve $\varepsilon_2 = -1$ için

$$\langle \overrightarrow{\hat{G}''}, \vec{\hat{G}} \rangle = -\hat{\tau}^2$$

bulunur.

ii) $\varepsilon_1 = -1$ ve $\varepsilon_2 = 1$ için

$$\langle \overrightarrow{\hat{G}''}, \vec{\hat{G}} \rangle = \hat{\tau}^2$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5. $\langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle = 0$ ise $\langle \overrightarrow{\hat{Z}''}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\hat{M}''} \rangle$ dir.

İspat. $\langle \overrightarrow{\hat{Z}'}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle + \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\hat{M}'} \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle \hat{k}\overrightarrow{\hat{M}}, \overrightarrow{\hat{M}} \rangle + \langle \vec{\hat{Z}}, -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}} \rangle = 0$$

olup $\langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1, \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\hat{Z}} \rangle = \varepsilon_0, \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = 0$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\hat{k} \langle \overrightarrow{\widehat{\mathrm{M}}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \hat{\hat{k}} \langle \overrightarrow{\hat{\mathrm{Z}}}, \overrightarrow{\hat{Z}} \rangle + \hat{\tau} \langle \overrightarrow{\hat{\mathrm{Z}}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_0{}^2 \varepsilon_1 \hat{k} + \hat{k} \varepsilon_1 = 0$$

olduğu görülür.

i) $\varepsilon_0 = 1$ ve $\varepsilon_1 = -1$ için $\hat{k} - \hat{k} = 0$ olup

$$0 = 0$$

özdeşliği elde edilir.

ii) $\varepsilon_0 = -1$ ve $\varepsilon_1 = 1$ için $-\hat{k} + \hat{k} = 0$ olur ve

$$0 = 0$$

özdeşliği mevcuttur. Şimdi tekrar türevi alınırsa

$$\langle \overrightarrow{\hat{Z}'}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}'} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \langle \overrightarrow{\hat{Z}'}, \overrightarrow{\widehat{M}'} \rangle = -\langle \overrightarrow{\hat{Z}'}, \overrightarrow{\widehat{M}'} \rangle - \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M''}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle + \langle \hat{k}\overrightarrow{\widehat{M}}, -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \hat{k} \overrightarrow{\hat{Z}} + \hat{\tau} \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = -\langle \hat{k}\overrightarrow{\widehat{M}}, -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \hat{k} \overrightarrow{\hat{Z}} + \hat{\tau} \overrightarrow{\hat{G}} \rangle - \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M''}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \hat{k}^2 \langle \overrightarrow{\widehat{\mathrm{M}}}, \overrightarrow{\hat{Z}} \rangle + \hat{k}\hat{\tau} \langle \overrightarrow{\widehat{\mathrm{M}}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \hat{k}^2 \langle \overrightarrow{\widehat{\mathrm{M}}}, \overrightarrow{\hat{Z}} \rangle - \hat{k}\hat{\tau} \langle \overrightarrow{\widehat{\mathrm{N}}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle - \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M''}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M''}} \rangle$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.1.6. $\langle \overrightarrow{\hat{\mathrm{Z}}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = 0$ için $\langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$ dir.

İspat. $\langle \overrightarrow{\widehat{Z'}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle + \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle \hat{k}\overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle + \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \hat{\tau} \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = 0$$

olur ve burada $\langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = 0, \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = 0$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$\widehat{\Rightarrow k} \langle \overrightarrow{\widehat{\mathrm{M}}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \hat{\tau} \langle \overrightarrow{\hat{\mathrm{Z}}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = 0$ bulunur ve

$$0 = 0$$

özdeşliği vardır. Dahası

$$\langle \overrightarrow{\widehat{Z'}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle$$

ifadesinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle + \langle \overrightarrow{\widehat{Z'}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\widehat{Z'}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle - \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \overrightarrow{\hat{G}} \rangle + \langle \hat{k}\overrightarrow{\widehat{M}}, -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \hat{\tau} \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = -\langle \hat{k}\overrightarrow{\widehat{M}}, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \hat{\tau} \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle - \langle \overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{Z''}, \vec{\hat{G}} \rangle + -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\hat{k} \langle \vec{\widehat{M}}, \vec{\widehat{M}} \rangle = -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\hat{k} \langle \vec{\widehat{M}}, \vec{\widehat{M}} \rangle - \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

olup $\langle \vec{\widehat{M}}, \vec{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1$ için

$$\langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \vec{\hat{G}} \rangle + -\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2\hat{\tau}\hat{k} = -\varepsilon_1{}^2\varepsilon_2\hat{\tau}\hat{k} - \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

bulunur. Böylece

$\varepsilon_1 = +1$ ve $\varepsilon_2 = -1$ için

$$\langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \hat{\tau}\hat{k} = +\hat{\tau}\hat{k} - \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

elde edilir ve diğer taraftan

$\varepsilon_1 = -1$ ve $\varepsilon_2 = +1$ için

$$\langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \vec{\hat{G}} \rangle - \hat{\tau}\hat{k} = -\hat{\tau}\hat{k} - \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{Z''}}, \vec{\hat{G}} \rangle = -\langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

vardır.

Teorem 4.1.7. $\langle \overrightarrow{\widehat{\mathrm{M}}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0$ ise $\langle \overrightarrow{\widehat{M''}}, \vec{\hat{G}} \rangle = -\langle \vec{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$ dir.

İspat. $\langle \overrightarrow{\widehat{M'}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle \vec{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle \vec{\widehat{M}}, -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\vec{\widehat{M}} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k} \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \hat{\tau} \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle - \varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau} \langle \vec{\widehat{M}}, \vec{\widehat{M}} \rangle = 0$$

bulunur. Burada

$$\langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0, \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \varepsilon_2 \text{ ve } \langle \vec{\widehat{M}}, \vec{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1$$

için

$$\hat{\tau}\varepsilon_2 - \varepsilon_1{}^2\varepsilon_2\hat{\tau} = 0$$
$$\Rightarrow \hat{\tau}\varepsilon_2 = \varepsilon_1{}^2\varepsilon_2\hat{\tau}$$
$$\Rightarrow \hat{\tau} = \hat{\tau}$$

eşitliği elde edilir. İlaveten

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M'}}, \vec{\hat{G}} \rangle = -\langle \vec{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle$$

eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M''}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle \overrightarrow{\widehat{M'}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\widehat{M'}}, \overrightarrow{\widehat{G'}} \rangle - \langle \vec{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$$

$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{M''}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \langle -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}}, -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\vec{\widehat{M}} \rangle = -\langle -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}\vec{\hat{Z}} + \hat{\tau}\vec{\hat{G}}, -\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}\vec{\widehat{M}} \rangle - \langle \vec{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$

$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\widehat{M''}}, \vec{\hat{G}} \rangle + \varepsilon_0\varepsilon_1{}^2\hat{k}\hat{\tau} \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\widehat{M}} \rangle - \varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}^2 \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\widehat{M}} \rangle = -\varepsilon_0\varepsilon_1{}^2\hat{k}\hat{\tau} \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\widehat{M}} \rangle + \varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}^2 \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\widehat{M}} \rangle - \langle \vec{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{G''}} \rangle$

olduğu görülür ve $\langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\widehat{M}} \rangle = 0, \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\widehat{M}} \rangle = 0$ için

$$\langle \overrightarrow{\widehat{M}''}, \vec{\widehat{G}} \rangle = -\langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{G}''} \rangle$$

elde edilir.

4.1.1. Dual Lorentz Uzayında Rektifiyan Eğriler

Tanım 4.1.1.1. Bir dual Lorentz eğrisinin $\hat{k} = k + \varepsilon k^*$ eğriliği ve $\hat{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$ burulması sırf dual olmasın. $\hat{k}, k^* \in \mathbb{R}$ için

$\langle \vec{\widehat{Z}}, \vec{\widehat{Z}} \rangle = \varepsilon_0, \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1, \langle \vec{\widehat{G}}, \vec{\widehat{G}} \rangle = \varepsilon_2, \langle \vec{\widehat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \langle \vec{\widehat{Z}}, \vec{\widehat{G}} \rangle = \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\widehat{G}} \rangle = 0$

ise dual Frenet formüllerinin matris formu

$$\frac{d}{d_s}\begin{bmatrix} \vec{\widehat{Z}} \\ \overrightarrow{\widehat{M}} \\ \vec{\widehat{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k} & 0 & \hat{\tau} \\ 0 & -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{\tau} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{\widehat{Z}} \\ \overrightarrow{\widehat{M}} \\ \vec{\widehat{G}} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $\left\{\overrightarrow{\widehat{Z}}, \vec{\widehat{G}}\right\}$ vektör alanı tarafından gerilen düzleme rektifiyan düzlem adı verilir.

Bir $\hat{\beta}$ dual eğrisinin yer vektörü rektifiyan düzlemde ise eğriye rektifiyan dual Lorentz eğrisi denir. $\hat{\beta}$ bir dual Lorentz eğrisi ise yer vektörü, $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\psi}$ dual fonksiyonlar için

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = \hat{\gamma}(s)\overrightarrow{\widehat{Z}(s)} + \hat{\psi}(s)\overrightarrow{\widehat{G}(s)}$$

olup bu ifadenin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\vec{\hat{\beta}}'(s) = \hat{\gamma}'(s)\overrightarrow{\widehat{Z}(s)} + \hat{\gamma}(s)\overrightarrow{\widehat{Z}(s)}' + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\widehat{G}(s)} + \hat{\psi}(s)\overrightarrow{\widehat{G}(s)}'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\widehat{Z}(s)} = \hat{\gamma}'(s)\overrightarrow{\widehat{Z}(s)} + \hat{\gamma}(s)\hat{k}(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\widehat{G}(s)} + \hat{\psi}(s)\left(-\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\widehat{Z}(s)} = \hat{\gamma}'(s)\overrightarrow{\widehat{Z}(s)} + \left[\hat{\gamma}(s)\hat{k}(s) - \varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\psi}(s)\hat{\tau}(s)\right]\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\widehat{G}(s)}$$

$$\Rightarrow 0 = [\hat{\gamma}'(s) - 1]\overrightarrow{\widehat{Z}(s)} + \left[\hat{\gamma}(s)\hat{k}(s) - \varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\psi}(s)\hat{\tau}(s)\right]\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\widehat{G}(s)}$$

olup $\left\{\overrightarrow{\widehat{Z}(s)}, \overrightarrow{\widehat{M}(s)}, \overrightarrow{\widehat{G}(s)}\right\}$ dual Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Böylece

$$\hat{\gamma}'(s) = (1,0) = 1 + \varepsilon 0 = 1, \hat{\gamma}(s)\hat{k}(s) = \varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\psi}(s)\hat{\tau}(s), \hat{\psi}'(s) = 0$$

sonucuna ulaşılır. İlk eşitlikte $\hat{\gamma}'(s) = 1$ olduğundan $\hat{c}$ bir dual sabit sayı olmak üzere

$$\hat{\gamma}(s) = \hat{s} + \hat{c}$$

dir. Üçüncü eşitlikte $\hat{\psi}'(s) = 0$ olduğundan $\hat{\psi}$ sabit bir dual fonksiyondur. $\hat{\gamma}\hat{k} = \hat{\psi}\hat{\tau}$ eşitliğine göre $\hat{k} \neq 0$ olduğundan $\hat{\psi}$ dual sabiti de sıfırdan farklıdır (Bozkır,2011).

4.1.2. Dual Lorentz Uzayında Normal Eğriler

Tanım 4.1.1.2. Bir dual Lorentz eğrisinin $\hat{k} = k + \varepsilon k^*$ eğriliği ve $\hat{\tau} = \tau + \varepsilon\tau^*$ burulması sırf dual olmasın. $\hat{k}, k^* \in \mathbb{R}$ için $\langle\vec{\hat{Z}},\vec{\hat{Z}}\rangle = \varepsilon_0, \langle\overrightarrow{\widehat{M}},\overrightarrow{\widehat{M}}\rangle = \varepsilon_1, \langle\vec{\hat{G}},\vec{\hat{G}}\rangle = \varepsilon_2, \langle\vec{\hat{Z}},\overrightarrow{\widehat{M}}\rangle = \langle\vec{\hat{Z}},\vec{\hat{G}}\rangle = \langle\overrightarrow{\widehat{M}},\vec{\hat{G}}\rangle = 0$
ise dual Frenet formüllerinin matris formu

$$\frac{d}{d_s}\begin{bmatrix}\vec{\hat{Z}}\\ \overrightarrow{\widehat{M}}\\ \vec{\hat{G}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \hat{k} & 0\\ -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k} & 0 & \hat{\tau}\\ 0 & -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{\tau} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\hat{Z}}\\ \overrightarrow{\widehat{M}}\\ \vec{\hat{G}}\end{bmatrix}$$

biçimindedir. $\left\{\overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\hat{G}}\right\}$ vektör alanı tarafından gerilen düzleme normal düzlem denir.

Bir $\hat{\beta}$ dual eğrisinin yer vektörü normal düzlemde ise eğriye normal dual Lorentz eğrisi adı verilir. $\hat{\beta}$ bir dual Lorentz eğrisi ise yer vektörü, $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\psi}$ dual fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = \hat{\gamma}(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\psi}(s)\overrightarrow{\hat{G}(s)}$$

dir. Eğer her iki tarafın türevi alınırsa

$$\vec{\hat{\beta}}'(s) = \hat{\gamma}'(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\gamma}(s)\,\overrightarrow{\widehat{M}(s)}' + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\hat{G}(s)} + \hat{\psi}(s)\overrightarrow{\hat{G}(s)}'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\hat{Z}(s)} = \hat{\gamma}'(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\gamma}(s)\left(-\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}(s)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \hat{\tau}(s)\overrightarrow{\hat{G}(s)}\right) + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\hat{G}(s)}$$
$$+ \hat{\psi}(s)\left(-\varepsilon_1\varepsilon_2\hat{\tau}(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(-1 - \varepsilon_0\varepsilon_1\hat{\gamma}(s)\hat{k}(s)\right)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \left(\hat{\gamma}'(s) - \varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\psi(s)}\hat{\tau}(s)\right)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$
$$+ \left(\hat{\gamma}(s)\hat{\tau}(s) + \hat{\psi}'(s)\right)\overrightarrow{\hat{G}(s)}$$

olduğundan, $\left\{\overrightarrow{\hat{Z}(s)}, \overrightarrow{\widehat{M}(s)}, \overrightarrow{\hat{G}(s)}\right\}$ dual Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Böylece

$$\begin{cases} -1 - \varepsilon_0\varepsilon_1\hat{\gamma}(s)\hat{k}(s) = 0\\ \hat{\gamma}'(s) - \varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\psi(s)}\hat{\tau}(s) = 0\\ \hat{\gamma}(s)\hat{\tau}(s) + \hat{\psi}'(s) = 0\end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Birinci denklemde
$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = -1$ ve $\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = 1$ durumlarının her ikisinde de

$$\hat{\gamma}(s)\hat{k}(s) = 1$$

elde edilir. Buradan

$$\hat{\gamma}(s) = \frac{1}{\hat{k}(s)}, \hat{k}(s) \neq 0$$

olup iki çözümü mevcuttur:

1) $\hat{k}(s) = sbt$ ise,

$$\hat{\gamma}'(s) = 0 \text{ ve } \hat{\gamma}(s) = sbt$$

bulunur.

$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = -1$ ve $\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = 1$ ve $\hat{\gamma}'(s) = 0$ değerleri ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$\widehat{\hat{\psi}\,(s)}\hat{\tau}(s) = 0$$

olur. Ayrıca

$\widehat{\hat{\psi}\,(s)} = 0$ veya $\hat{\tau}(s) = 0$ alınırsa

$$\widehat{\hat{\psi}\,(s)} = 0 \Rightarrow \hat{\psi}'(s) = 0$$

ve

$$\hat{\tau}(s) = 0 \Rightarrow \tau'(s) = 0$$

Üçüncü denklemde bu elde edilenler yerlerine yazılırsa

$$0 = 0$$

özdeşliği elde edilir. Böylece

$\hat{k}(s) = sbt$ için

$$\{\hat{\gamma}(s) = c_1\}, \left\{\hat{k}(s) = \frac{1}{\hat{\gamma}(s)}\right\}, \{\hat{\psi}(s) = 0, \hat{\tau}(s) = 0\}$$

şartlarında

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = \hat{\gamma}\,(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\psi}\,(s)\overrightarrow{\hat{G}(s)}$$

denkleminde bulduğumuz değerler yerine yazılırsa,

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = c_1\overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$

eğrisi bulunur.

2) $\hat{k}(s) = sbt$ değil ise,

$$\hat{\gamma}'(s) = -\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^2(s)}, \hat{k}^2(s) \neq 0$$

İkinci denklemde yerine yazılırsa,

$$-\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^2(s)} - \varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\hat{\psi}\,(s)}\hat{\tau}(s) = 0$$

ifadesinde $\varepsilon_1 = 1$ ve $\varepsilon_2 = -1$ ile $\varepsilon_1 = -1$ ve $\varepsilon_2 = 1$ için,

$$-\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^2(s)}+\widehat{\hat{\psi}(s)}\hat{\tau}(s)=0,$$

$$\hat{\tau}(s)=\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^2(s)\widehat{\hat{\psi}(s)}},$$

olup,

$$\hat{\gamma}(s)=\frac{1}{\hat{k}(s)},$$

$$\hat{\tau}(s)=\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^2(s)\widehat{\hat{\psi}(s)}},$$

bulunan değerler üçüncü denklemde yerine yazılırsa,

$$\hat{\gamma}(s)\hat{\tau}(s)+\hat{\psi}'(s)=0,$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\hat{k}(s)}.\left(\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^2(s)\widehat{\hat{\psi}(s)}}\right)+\hat{\psi}'(s)=0,$$

$$\Rightarrow\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^3(s)\widehat{\hat{\psi}(s)}}=-\hat{\psi}'(s),$$

$$\Rightarrow\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^3(s)}=-\hat{\psi}'(s)\widehat{\hat{\psi}(s)}.$$

Bu son eşitlikte her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int\frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}^3(s)}=\int-\hat{\psi}'(s)\hat{\psi}(s),$$

$$\frac{-1}{\hat{k}^2(s)}=-\hat{\psi}^2(s)+c,(c=sbt)$$

bulunur.

$\hat{k}(s)=sbt$ olmaması halinde ve $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ durumlarının (+1), (-1) olması halinde elde edilen değerler

$$\{\hat{\gamma}(s)=\hat{\gamma}(s)\},\left\{\hat{k}(s)=\frac{1}{\hat{\gamma}(s)}\right\},\left\{\hat{\psi}(s)=\pm\sqrt{\hat{\gamma}^2+c_1}\right\},$$

$$\left\{\hat{\tau}(s)=\frac{\frac{d}{d_s}\hat{\gamma}(s)}{-\hat{\psi}(s)}\right\}$$

dir. O zaman

$$\vec{\hat{\beta}}(s)=\hat{\gamma}(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}+\hat{\psi}(s)\overrightarrow{\widehat{G}(s)}$$

denkleminde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = \hat{\gamma}\,(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)} \pm \sqrt{\hat{\gamma}^{\,2} + c_1}\overrightarrow{\hat{G}(s)}$$

eğrisi elde edilir.

4.1.3. Dual Lorentz Uzayında Oskülatör Eğriler

Tanım 4.1.3.1. Bir dual Lorentz eğrisinin $\hat{k} = k + \varepsilon k^*$ eğriliği ve $\hat{\tau} = \tau + \varepsilon \tau^*$ burulması sırf dual olmasın. $\hat{k}, k^* \in \mathbb{R}$ için

$\langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{Z}} \rangle = \varepsilon_0, \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \varepsilon_1, \langle \vec{\hat{G}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \varepsilon_2, \langle \vec{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}} \rangle = \langle \vec{\hat{Z}}, \vec{\hat{G}} \rangle = \langle \overrightarrow{\widehat{M}}, \vec{\hat{G}} \rangle = 0$

ise dual Frenet formüllerinin matris formu

$$\frac{d}{d_s}\begin{bmatrix} \vec{\hat{Z}} \\ \overrightarrow{\widehat{M}} \\ \vec{\hat{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{k} & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k} & 0 & \hat{\tau} \\ 0 & -\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{\tau} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{\hat{Z}} \\ \overrightarrow{\widehat{M}} \\ \vec{\hat{G}} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $\left\{\overrightarrow{\hat{Z}}, \overrightarrow{\widehat{M}}\right\}$ vektör alanı tarafından gerilen düzleme oskülatör düzlem denir. Bir $\hat{\beta}$ dual eğrisinin yer vektörü oskülatör düzlemde ise eğriye oskülatör dual Lorentz eğrisi adı verilir. $\hat{\beta}$ bir dual Lorentz eğrisi ise yer vektörü, $\hat{\gamma}$ ve $\hat{\psi}$ dual fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = \hat{\gamma}\,(s)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \hat{\psi}\,(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$

biçiminde ifade edilir. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\vec{\hat{\beta}}'(s) = \hat{\gamma}\,'(s)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \hat{\gamma}\,(s)\,\overrightarrow{\hat{Z}(s)}' + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)} + \hat{\psi}\,(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}'$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\hat{Z}(s)} = \hat{\gamma}\,'(s)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \hat{\gamma}\,(s)\left(\hat{k}(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}\right) + \hat{\psi}'(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$
$$+ \hat{\psi}\,(s)\left(-\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}(s)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \hat{\tau}(s)\overrightarrow{\hat{G}(s)}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \left(-1 + \hat{\gamma}\,'(s) - \hat{\psi}\,(s)\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}(s)\right)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \left(\hat{\gamma}\,(s)\hat{k}(s) + \hat{\psi}'(s)\right)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$
$$+ \left(\hat{\psi}\,(s)\hat{\tau}(s)\right)\overrightarrow{\hat{G}(s)}$$

olup $\left\{\overrightarrow{\hat{Z}(s)}, \overrightarrow{\widehat{M}(s)}, \overrightarrow{\hat{G}(s)}\right\}$ dual Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Böylece

$$\begin{cases} -1 + \hat{\gamma}\,'(s) - \hat{\psi}\,(s)\varepsilon_0\varepsilon_1\hat{k}(s) = 0 \\ \hat{\gamma}\,(s)\hat{k}(s) + \hat{\psi}'(s) = 0 \\ \hat{\psi}\,(s)\hat{\tau}(s) = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Birinci denklemde $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = -1$ ve $\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = 1$ için,

$$-1 + \hat{\gamma}'(s) + \hat{\psi}(s)\hat{k}(s) = 0$$

elde edilir. $\hat{\psi}(s) \neq sbt\ \varepsilon_0, \varepsilon_1$ durumlarının (+1), (-1) olması hallerinde

$$\{\hat{\psi}(s) = \hat{\psi}(s)\}, \{\hat{\tau}(s) = 0\},$$

$$\left\{\frac{d}{d_s}\hat{\gamma}(s) = \frac{\left(\frac{d}{d_s}\hat{\psi}(s)\right)\hat{\psi}(s) + \hat{\gamma}(s)}{\hat{\gamma}(s)}\right\}, \left\{\hat{k}(s) = -\frac{\left(\frac{d}{d_s}\hat{\psi}(s)\right)}{\hat{\gamma}(s)}\right\},$$

$$\left\{\hat{\psi}(s) = \pm\sqrt{\hat{\gamma}(s)^2 - 2\int \hat{\gamma}(s)ds + c_1}\right\}$$

elde edilir.

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = \hat{\gamma}(s)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} + \hat{\psi}(s)\overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$

eşitliğinde çözümler yerine yazılırsa,

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = \hat{\gamma}(s)\overrightarrow{\hat{Z}(s)} \pm \sqrt{\hat{\gamma}(s)^2 - 2\int \hat{\gamma}(s)ds + c_1}\ \overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$

ilk eğri bulunur. İkinci eğrimiz için $\hat{\psi}(s) = sbt(\neq 0)$ olduğunda

$$\{\hat{\psi}(s) = c_2\}, \{\hat{\tau}(s) = 0\}, \{\hat{\gamma}(s) = 0\}, \left\{\hat{k}(s) = \frac{1}{\hat{\psi}(s)}\right\}$$

şeklindedir. Böylece ikinci eğrimiz

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = c_2\overrightarrow{\widehat{M}(s)}$$

olur.

Üçüncü denklemde $\hat{\psi}(s)\hat{\tau}(s) = 0$, $\hat{\psi}(s) = 0$ veya $\hat{\tau}(s) = 0$ dır.

$\hat{\psi}(s) = 0$ olsun. $\hat{\gamma}'(s) = 1 \Rightarrow \hat{\gamma}(s) = s + c_3$,

olup birinci denklemin çözülmesi halinde elde ettiğimiz değerler

$$\{\hat{\tau}(s) = \hat{\tau}(s)\}, \{\hat{\psi}(s) = 0\}, \{\hat{\gamma}(s) = s + c_1\}, \{\hat{k}(s) = 0\}$$

olmak üzere üçüncü eğrimiz de

$$\vec{\hat{\beta}}(s) = s + c_3\overrightarrow{\hat{Z}(s)}$$

şeklinde elde edilir.

4.2. Dual Lorentz Uzayında Yapılan Çalışmaların İçerik Analizi

Dual Lorentz uzayındaki yapılan bazı çalışmaların uzay ve eğri çeşitlerine göre içerik analizleri Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Eğrilerin uzay çeşitlerine göre içerik analizi

	Yazarlar	Tezin/Makalenin/Kitabın Adı	Yayım Yılı	Türü	Uzay Çeşitleri				
					Öklid	Lorentz	Dual	Dual Lorentz	Minkowski
1	A.Z.Pirdal	3-Boyutlu Dual Lorentz Uzayında İvme Eksenleri	2006	YL Tezi		x		x	
2	A.Yücesan, N.Ayyıldız, A. C. Çöken	On Rectifying Dual Space Curves	2007	Makale		x	x		
3	E.Özbey, M.Oral	A Study on Rectifying Curves in the Dual Lorentzian Space	2009	Makale				x	
4	Ö. Bektaş	Dual Lorentz Uzayında Paralel Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri	2010	YL Tezi	x	x	x	x	
5	S. Gür	Dual Lorentz Uzayında Spacelike – Timelike İnvolüt– Evolüt Eğriler Üzerine	2010	YL Tezi	x	x	x	x	
6	M. Bozkır	Dual Lorentz Uzayında Rektifiyan Eğriler	2011	YL Tezi	x		x	x	x
7	C. Ekici,H. Öztürk	On Time-like Ruled Surfaces in Minkowski 3-Space	2013	Makale					x
8	S. Gür,S. Şenyurt	Spacelike – Timelike-Involute – Evolute Curve Couple on	2013	Makale				x	
9	R.Lopez	Diffrerential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space	2014	Makale		x			x

Çizelge 4.1. Eğrilerin uzay çeşitlerine göre içerik analizi (devam)

	Yazarlar	Tezin/Makalenin/Kitabın Adı	Yayım Yılı	Türü	Uzay Çeşitleri				
					Öklid	Lorentz	Dual	Dual Lorentz	Minkowski
10	Y.Ünlütürk, M.Çimdiker,C.Ekici	Characteristic properties of the parallel ruled surfaces with Darboux frame in Euclidean 3- space	2016	Makale	x				
11	B. Şahiner, M.Kazaz,H. H.Uğurlu	Dual Lorentziyen Birim Küresel Timelike Eğrilerin Eğrilik Teorisi Kullanılarak Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi	2018	Makale				x	
12	S.Öztürk	Öklid Uzayında Sabit Oranlı Eğri Çiftleri	2018	YL Tezi	x				
13	T.Baysal	Dual Uzayda Bir Eğri ve Onun Tabi Lift Eğrisinin Darboux Vektörleri Tarafından Oluşturulan Regle Yüzey Çiftleri	2019	YL Tezi			x		
14	E.Ovalıoğlu	Yarı-Öklidyen Uzayda Null Eğriler veNull Eğrilerin Sınıflandırılması	2019	YL Tezi	x	x			x
15	S.Yüce	Sayılar ve Geometri	2020	Kitap	x	x	x	x	
16	Ş. Kılıçoğlu, S. Şenyurt	An examination on N − D∗ partner curves with common principal normal and Darboux vector in E^3	2021	Makale	x				
17	A.Yücesan, G. Ö.Tükel	Dual Lorentz Uzayında Elastik Eğriler	2021	Makale				x	
18	Ü.Bayrak Torbalı	Lorentz Uzayında Null ve Null Olmayan Eğrilerin Yapılarının İncelenmesi	2022	YL Tezi	x	x			

Çizelge 4.1’ de Öklid uzayında 9, Lorentz uzayında 8, Dual uzayda 6, Dual Lorentz uzayda 9, Minkowski uzayında 4 çalışmaya rastlanmıştır. Bektaş (2010), Gür (2010) ve Bozkır (2011) tezlerinde bir çok uzaya yer vermişlerdir. Yüce (2020) kitabında Öklid uzay, Lorentz uzay, Dual Lorentz uzay yer almaktadır.

Çizelge 4.2. Eğrilerin çeşitlerine göre içerik analizi

	Yazarlar	Tezin/Makalenin/Kitabın Adı	Yayım Yılı	Türü	Eğri çeşitleri					
					Spacelike	Timelike	Involüt-Evolüt	Rektifiyan	Elastik	Null
1	A.Z.Pirdal	3-Boyutlu Dual Lorentz Uzayında İvme Eksenleri	2006	YL Tezi						
2	A.Yücesan, N.Ayyıldız, A. C. Çöken	On Rectifying Dual Space Curves	2007	Makale				x		
3	E.Özbey, M.Oral	A Study on Rectifying Curves in the Dual Lorentzian Space	2009	Makale						
4	Ö. Bektaş	Dual Lorentz Uzayında Paralel Regle Yüzeyler ve Bazı Karakteristik Özellikleri	2010	YL Tezi						
5	S. Gür	Dual Lorentz Uzayında Spacelike – Timelike İnvolüt– Evolüt Eğriler Üzerine	2010	YL Tezi	x	x	x			
6	M. Bozkır	Dual Lorentz Uzayında Rektifiyan Eğriler	2011	YL Tezi				x		
7	C. Ekici, H. Öztürk	On Time-like Ruled Surfaces in Minkowski 3-Space	2013	Makale		x				
8	S. Gür,S.Şenyurt	Spacelike – Timelike-Involute – Evolute Curve Couple on Dual Lorentzian Space	2013	Makale	x	x	x			
9	R.Lopez	Diffrerential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space	2014	Makale						

Çizelge 4.2. Eğrilerin çeşitlerine göre içerik analizi (devam)

	Yazarlar	Tezin/Makalenin/Kitabın Adı	Yayım Yılı	Türü	Eğri çeşitleri					
					Spacelike	Timelike	Involüt-Evolüt	Rektifiyan	Elastik	Null
10	Y.Ünlütürk, M.Çimdiker,C.Ekici	Characteristic properties of the parallel ruled surfaces with Darboux frame in Euclidean 3- space	2016	Makale						
11	B. Şahiner, M.Kazaz,H. H.Uğurlu	Dual Lorentziyen Birim Küresel Timelike Eğrilerin Eğrilik Teorisi Kullanılarak Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi	2018	Makale		x				
12	S. Öztürk	Öklid Uzayında Sabit Oranlı Eğri Çiftleri	2018	YL Tezi			x			
13	T.Baysal	Dual Uzayda Bir Eğri ve Onun Tabi Lift Eğrisinin Darboux Vektörleri Tarafından Oluşturulan Regle Yüzey Çiftleri	2019	YL Tezi						
14	E.Ovalıoğlu	Yarı-Öklidyen Uzayda Null Eğriler veNull Eğrilerin Sınıflandırılması	2019	YL Tezi						x
15	S.Yüce	Sayılar ve Geometri	2020	Kitap						
16	Ş. Kılıçoğlu, S. Şenyurt	An examination on $N - D*$ partner curves with common principal normal and Darboux vector in E3	2021	Makale						
17	A.Yücesan, G. Ö.Tükel	Dual Lorentz Uzayında Elastik Eğriler	2021	Makale					x	
18	Ü.Bayrak Torbalı	Lorentz Uzayında Null ve Null Olmayan Eğrilerin Yapılarının İncelenmesi	2022	YL Tezi						x

Çizelge 4.2’ de çalışılan eğri çeşitlerini ifade edelim. Spacelike 2, timelike 4, involüt-evolüt 3, rektifiyan 2, elastik 1 ve null eğride 2 çalışma bulunmaktadır. Gür (2010) yüksek lisans tezinde spacelike eğri, timelike eğri ve involüt-evolüt eğri olmak üzere 3 eğri çeşidi yer almaktadır. Tezimizde rektifiyan eğrileri kapsayan tezler bize çok yol gösterici olmakla birlikte yeni fikirler oluşturmuştur.

5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde Dual sayılar, Dual uzay, Lorentz uzay, Dual Lorentz uzayla ilgili tanımlar, teoremlere ve Lorentz uzayında açı tanımları yapılıp, bunlara ilişkin örneklere yer verilmiştir. Tezin 4.bölümünde Dual Lorentz uzayında Dual Rektifiyan eğri, Dual Normal eğri, Dual Oskülatör eğri çeşitleri incelenmiştir. Bölümün sonunda eğrilerin uzaylarına ve çeşitlerine göre içerik analizi yer almaktadır. Bundan sonraki bu alanda yapılacak olan çalışmalara katkı sağlaması öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

Akutagawa, K. & Nishikawa, S. (1990). The gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space. Töhoko Math., J. 42(1), 67-82.

Baysal, T. (2019). Dual uzayda bir eğri ve onun tabii lift eğrisinin Darboux vektörleri tarafından oluşturulan regle yüzey çiftleri [Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi], Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Bektaş, Ö. (2010). Dual Lorentz uzayında paralel regle yüzeyler ve bazı karakteristik özellikleri [Yüksek lisans tezi, Ordu Üniversitesi], Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Bozkır, M. (2011). Dual Lorentz uzayında rektifiyan eğriler [Yüksek lisans tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi], Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ekici, C. & Öztürk, H. (2013). On time-like ruled surfaces in Minkowski 3-space. Universal Journal of Applied Science 1(2), 56-63.

Gür, S. (2010). Dual Lorentz uzayında spacelike-timelike involüt-evolüt eğriler üzerine [Yüksek lisans tezi, Ordu Üniversitesi], Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Gür, S. & Şenyurt, S. (2013). Spacelike–timelike involute–evolute curve couple on dual Lorentzian space. J. Math. Comput. Sci., 3(4), 1054-1075.

Hacısalihoğlu, H. H. (1983). Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya.

López, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. International Electronic Journal Of Geometry, 7(1), 44-107.

O’Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 468.

Ovalıoğlu, E. (2019). Yarı Öklidyen uzayda null eğriler ve null eğrilerin sınıflandırılması [Yüksek lisans tezi, Uludağ Üniversitesi], Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ozbey, E. & Oral, M. (2009). A study on rectifying curves in the dual Lorentzian space. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 46(5), 967-978.

Öztürk, S. (2018). Öklid uzayında sabit oranlı eğri çiftleri [Yüksek lisans tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi], Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Pirdal, A. Z. (2006). 3-boyutlu Dual Lorentz uzayında ivme eksenleri [Yüksek lisans tezi, Sakarya Üniversitesi], SakaryaÜniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ratcliffe, J. G. (1994). Foundations of Hyperbolic Manifolds. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 736.

Study, E. (1903). Geometrie der Dynamen, Leipzig.

Şahiner, B., Kazaz, M. & Uğurlu, H. H. (2018). Dual Lorentziyen birim küresel timelike eğrilerin eğrilik teorisi kullanılarak robot uç-işlevci hareketinin incelenmesi. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 18(2), 468-476.

Şenyurt, S. & Kılıçoğlu, Ş. (2021). An examination on N− D* partner curves with common principal normal and Darboux vector in E3. Turkish Journal of Science, 6(2), 89-95.

Torbalı, Ü. G. B. (2022). Lorentz uzayında null ve null olmayan eğrilerin yapılarının incelenmesi [Yüksek lisans tezi, Uludağ Üniversitesi], Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Turgut, M. (1995). 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler [Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi], Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Uğurlu, H. H. (1997). On the geometry of timelike surfaces. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 46, 211-223.
Uğurlu, H. H. & Çalışkan, A. (1996). The study mapping for directed spacelike and timelike in Minkowski 3-space R13. Mathematical and Computational Applications, 1(2), 142-148.
Unluturk, Y., Cimdiker, M. & Ekici, C. (2016). Characteristic properties of the parallel ruled surfaces with Darboux frame in Euclidean 3-space. Communication in Mathematical Modeling and Applications, 1(1), 26-43.
Veldkamp, G. R. (1976). On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous, spatial kinematics. Mechanism and Machine Theory, 11(2), 141-156.
Woestijine, V. D. I. (1990). Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. Geometry and topology of submanifolds, II, 344-369.
Yüce, S. (2020a). *Dual Sayılar ve Galile Düzlemi*: Sayılar ve Geometri. Pegem Akademi.
Yüce, S. (2020b). *Dual Uzaylar*: Sayılar ve Geometri. Pegem Akademi.
Yücesan, A. & Tükel, G. Ö. (2021). Dual Lorentz uzayında elastik eğriler [Yüksek lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi], Süleyman Demirel Fen Bilimleri Enstitüsü.
Yücesan, A., Ayyıldız, N. & Çöken, A. C. (2007). On rectifying dual space curves. Rev. Mat. Complut, 20(2), 497-506.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yonca Gül GÜNAY
Doğum Yeri ve Tarihi : Bursa, 27/08/1995
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Bursa Süleyman Çelebi Anadolu Lisesi
Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Final Okulları, Kültür Okulları

İletişim (e-posta) : gunayyoncagul@gmail.com

Yayınları :
Günay, Y. G. & İyigün, E. (2022, August 29- September 1). *Darboux vectors and constant curvature ratios in Minkowski 4-space.* 11 th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, İstanbul.