

T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$E^n$  DE FOKAL EĞRİLER VE FOKAL YÜZEYLERİN BİR  
KARAKTERİZASYONU

Burcum ÖZDEMİR

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2008



T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$E^n$  DE FOKAL EĞRİLER VE FOKAL YÜZEYLERİN BİR  
KARAKTERİZASYONU

Burcum ÖZDEMİR

Prof. Dr. Kadri ARSLAN  
(Danışman)

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2008

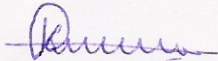
T.C.  
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

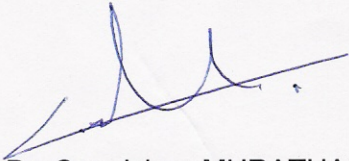
$E^n$  DE FOKAL EĞRİLER VE FOKAL YÜZEYLERİN BİR  
KARAKTERİZASYONU

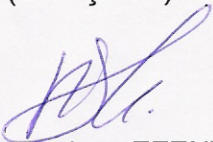
Burcum ÖZDEMİR

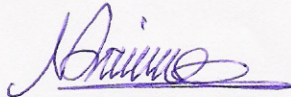
DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI


Bu Tez 31/03/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından  
oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

  
Prof. Dr. Kadri ARSLAN  
(Danışman)

  
Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

  
Prof. Dr. Ridvan EZENTAŞ

  
Prof. Dr. Naim DEREBAŞI

  
Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

## ÖZET

Bu çalışmanın amacı  $E^n$  deki fokal eğriler ve yüzeylerin bir sınıflandırmasını vermektir. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü ve dördüncü bölüm orijinal sonuçlar içermektedir. Üçüncü bölümde  $E^n$  deki fokal eğriler ve bunların bir karakterizasyonu verilmiştir. Son bölümde  $E^3$  fokal yüzeyler ve bunların bir karakterizasyonu ele alınmıştır.

**ABSTRACT**

The object of this thesis is to give a classification of focal curves and surfaces in  $E^n$ . This thesis has four chapters.

The chapter I is an introduction. The chapter II consists of some basic definitions which we will use in other chapters. The chapter III and Chapter IV contain original work. In chapter III we have considered the focal curves in  $E^n$ . In the final chapter the focal surfaces have been studied in  $E^3$ .

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. FOKAL EĞRİLER.....	5
3. 0. Giriş .....	5
3. 1. Eğrilerin Darboux Vektörleri.....	5
3. 2. Eğrilerin k.inci Mertebeden Değmesi .....	12
3. 3. Eğrilerin Genelleştirilmiş Evolütü .....	15
3. 4. Bir Eğrinin Fokal Eğrisi .....	21
4. FOKAL YÜZEYLER.....	35
4. 0. Giriş .....	35
4. 1. Paralel Yüzeyle.....	37
4. 2. Fokal Yüzeyle.....	42
4. 3. Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyle.....	48
4. 4. Maple Yardımıyla Uygulamalar... ..	54
EKLER.....	60
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	65
ÖZGEÇMİŞ .....	68
TEŞEKKÜR .....	69

## SİMGELER DİZİNİ

$M, \tilde{M}$	Manifold
$g, \tilde{g}$	Metrik tensör
$\chi(M)$	$M$ nin teğet vektör alanlarının uzayı
$D$	Normal koneksiyon
$\nabla$	$M$ üzerinde afin koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	$\tilde{M}$ üzerinde afin koneksiyon
$\bar{\nabla}$	Van-der Waerden Bortolotti koneksiyonu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu
$h$	İkinci temel form
$A_\xi$	Şekil operatörü
$NM$	$M$ nin normal demeti
$T_p M$	$p$ noktasında teğet uzay
$T_p^\perp M$	$p$ noktasında normal uzay
$\ H\  = \alpha$	Ortalama eğrilik
$H$	Ortalama eğrilik vektörü
$K$	Gauss eğriliği
$\partial$	Kısmi türev
$\gamma$	Eğri
$E^m$	$m$ -boyutlu Öklid uzay
$E(p, X)$	Afin alt uzay
$\ \cdot\ $	Norm
$\kappa$	Eğrinin 1. eğriliği

## SİMGELER DİZİNİ (Devam)

$\tau$	Eğrinin 2.eğriliği(torsiyonu)
$\tilde{d}$	$\gamma$ eğrisinin Darboux vektörü
$C_{\#}(M)$	$M$ nin değme sayısı
$m(s)$	oskülatör kürenin merkezi
$r(s)$	oskülatör kürenin yarıçapı
$C_{\gamma}(s)$	$\gamma$ eğrisinin fokal eğrisi
$\gamma^{(i)}$	$\gamma$ eğrisinin $i$ -yinci türevi
$d_{\gamma}$	Fonksiyon ailesi
$c_i$	Fokal eğrinin eğrilikleri
$S$	Regüler yüzey
$S^*$	$S$ nin paralel yüzeyi
$k_i$	Regüler yüzeyin asli eğrilikleri
$k_i^*$	Paralel yüzeyin asli eğrilikleri
$H^*$	Paralel yüzeyin ortalama eğriliği
$K^*$	Paralel yüzeyin Gauss eğriliği



## 1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı  $E^n$  deki fokal eğriler ve yüzeylerin bir sınıflandırmasını vermektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde Riemann manifoldu, izometrik immersiyon, ikinci temel form, ortalama eğrilik fonksiyonu ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde  $E^n$  deki fokal eğriler ve bunların bir karakterizasyonu verilmiştir. İlk kısımda  $E^n$  deki eğrilerin Darboux vektörleri ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. İkinci kısımda  $E^n$  deki bir eğrinin  $k$ -inci mertebeden değmesi tanıtılmıştır. Üçüncü kısımda eğrilerin genelleştirilmiş evolütleri verilmiştir. Son olarak bir eğrinin fokal eğrisi ele alınmıştır. Bu bölümde kısmen orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde  $E^3$  deki fokal yüzeyler ve genelleştirilmiş fokal yüzeyler ele alınmış ve yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca Maple programı yardımıyla öteleme yüzeylerinin fokal ve genelleştirilmiş fokal yüzeylerinin grafikleri çizdirilmiş ve bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Bu bölümde orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan teorem ve tanımlarla bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

**Tanım 2. 1.**  $M$ ,  $n$ -boyutlu diferansiyellenebilir ( $C^\infty$  sınıfından) bir manifold olsun.  $M$  üzerindeki  $C^\infty$  vektör alanlarının uzayı  $\chi(M)$  ve  $M$  den  $\mathbb{R}$  ye  $C^\infty$  fonksiyonların uzayı  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  olmak üzere,  $M$  üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir metrik tanımlı ise  $M$  ye bir *Riemann Manifoldu* denir. Burada  $g$  ye *Riemann metriği* (veya metrik tensör) adı verilir (Chen 1973).

$M$  manifoldunun herhangi iki  $p$  ve  $q$  noktasını birleştiren bir  $\alpha$  eğrisi bulunabilirse  $M$  ye *bağlantılı manifold* adı verilir.

**Tanım 2. 2.**  $M$  diferansiyellenebilir manifold olsun.  $M$  üzerindeki  $C^\infty$  vektör alanlarının uzayı  $\chi(M)$  üzerinde tanımlanan,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) ; (X, Y) \rightarrow \nabla (X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü  $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M)$  için,

$$\text{i) } \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\text{ii) } \nabla_{fX + gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

$$\text{iii) } \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

lineerlik özelliklerini sağlarsa,  $\nabla$  ya  $M$  üzerinde bir *Afin koneksiyon* adı verilir (Hacısalıhoğlu 1980). Burada  $\nabla_X$  operatörüne  $X$  e göre *kovaryant türev* denir.

**Tanım 2. 3.**  $(M, g)$  bir Riemann manifoldu ve  $\nabla$  da  $M$  üzerinde tanımlanan bir Afin koneksiyon olsun. O zaman  $\forall X, Y \in \chi(M)$  için,  $\nabla$  dönüşümü

$$\text{i) } \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

$$\text{ii) } Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

şartlarını sağlıyorsa,  $\nabla$  ya  $M$  üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu* (veya  $M$  nin Levi-Civita koneksiyonu) adı verilir (Chen 1973 ve Hacısalihoğlu 1980). Bu koneksiyon kısaca  $M$  deki Riemann koneksiyonu olarak adlandırılır.

**Tanım 2.4.**  $(M, g)$  ve  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  sırasıyla  $n$  ve  $(n+d)$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her  $p \in M$  için  $df_p: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(\tilde{M})$  dönüşümü birebir ise  $f$  ye bir *immersiyon (daldırma)* denir. Ayrıca,  $f: M \rightarrow f(M)$  bir homeomorfizm ise  $f$  ye bir *imbedding (gömme)* denir. Eğer  $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+d}$  ve  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  dönüşümü bir gömme ise  $M$  ye  $\tilde{M}$  nin  $n$ -boyutlu bir *immersed (gömülen) alt manifoldu* adı verilir. Bununla beraber  $f$  bir immersiyon olmak üzere  $\forall X, Y \in T_p M$  için,

$$\tilde{g}(df_p(X), df_p(Y))\big|_{f(p)} = g(X, Y)\big|_p$$

şartını sağlıyorsa  $f$  ye bir *izometrik immersiyon* adı verilir (Chen 1973).

**Tanım 2.5.**  $(M, g)$  ve  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  sırasıyla  $n$  ve  $(n+d)$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Ayrıca  $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+d}$  bir alt manifold ve  $\tilde{\nabla}$  da  $\tilde{M}$  de kovaryant türevi belirtsin. Böylece her  $X, Y \in \chi(M)$  ve her  $p$  için  $(\tilde{\nabla}_X Y)_p$  tanımlıdır. Ayrıca  $(\nabla_X Y)_p \in T_p M$  ve  $h_p(X, Y) \in T_p^\perp M$  olmak üzere,

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + h_p(X, Y) \quad (2.1)$$

biçiminde *Gauss Denklemi* elde edilir. Burada  $h$ ,  $M$  nin ikinci temel formudur. Eğer  $h = 0$  ise  $M$  ye *total (toplam) geodezik* denir (Chen 1973).

**Tanım 2.6.**  $M^n \subseteq \tilde{M}^{n+d}$  bir alt manifold olmak üzere  $M$  ye normal bir birim normal vektör alanı  $\xi$  olsun. Böylece  $\tilde{\nabla}_X \xi$  nin teğet bileşeni  $-A_\xi(X)$  ve normal bileşeni  $D_X \xi$  olmak üzere;

$$(\tilde{\nabla}_X \xi)_p = -(A_\xi(X))_p + (D_X \xi)_p, \quad p \in M \quad (2.2)$$

şeklinde *Weingarten Denklemi* elde edilir. Burada  $A_\xi$  ya şekil operatörü,  $D$  ye de  $M$  nin normal demetindeki (normal) koneksiyonu denir (Chen 1973).

**Önerme 2.7. i)**  $A_\xi(X)$ ,  $\xi$  ve  $X$  üzerinde 2-lineerdir.

ii)  $M$  nin her bir  $\xi$  normal vektörü ve  $X, Y$  tanjant vektörleri için

$$g(A_\xi(X), Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi) \quad (2.3)$$

dır (Chen 1973).

**Tanım 2.8.**  $M \subset \tilde{M}$  alt manifoldunun bir birim normal vektör alanı  $\xi$  olsun. Eğer  $A_\xi$  daima özdeşlik fonksiyonu ile orantılı ise yani bir  $\rho$  fonksiyonu için

$$A = \rho I, \quad (2.4)$$

oluyorsa  $\xi$  ya  $M$  nin *umbilik kesiti* (veya  $M$ ,  $\xi$  ya göre umbiliktir) denir. Eğer  $M$  alt manifoldu  $M$  deki her birim normale göre umbilik ise  $M$  ye *total(toplam) umbiliktir* denir.

**Önerme 2.9.**  $T^\perp M$  üzerinde indirgenmiş metrikle  $M \subset \tilde{M}$  nin  $NM$  normal demetinde

$$D : TM \times T^\perp M \rightarrow T^\perp M$$

$$(X, \xi) \rightarrow D(X, \xi) = D_X \xi$$

biçiminde tanımlanan  $D$  dönüşümü bir metrik koneksiyondur.

İkinci temel form  $h$  nın türevi  $\bar{\nabla}_X h$  ;

$$(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = D_X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\bar{\nabla}$  ya  $M$  nin *Van-der Waerden-Bortolotti koneksiyonu* adı verilir. Eğer  $\bar{\nabla} h = 0$  ise  $M$  nin ikinci temel formu paraleldir denir.

**Tanım 2.10.**  $M$  bir Riemann manifoldu ve  $\xi$  bir normal vektör alanı olsun. Eğer  $M$  ye teğet herhangi bir  $X$  vektör alanı için  $D_X \xi = 0$  ise  $\xi$  ya *paralel normal vektör alanı* denir (Chen 1973).

**Tanım 2.11.**  $M$ ,  $\tilde{M}$  nin  $n$ -boyutlu bir alt manifoldu ve  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de  $T_p M$  nin  $p \in M$  noktasındaki dik çatı alanları olsun. Böylece

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanan  $H \in T_p^\perp M$  vektörüne  $M$  nin *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir. Eğer  $H = 0$  ise  $M$  alt manifolduna *minimal* dir denir. Ayrıca  $\|H\|$  ya  $M$  nin *ortalama eğriliği* adı verilir (Chen 1973).

### 3. FOKAL EĞRİLER

#### 3.0. Giriş

Bu bölümde  $E^n$  de eğrilerin bir karakterizasyonu ele alınmıştır. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda eğrilerin Darboux vektörleri, ikinci kısımda eğrilerin  $k$ -inci mertebeden değmeleri ve üçüncü kısımda da bir eğrinin fokal eğrisi incelenmiştir.

#### 3.1. Eğrilerin Darboux Vektörleri

**Tanım 3.1.1.**  $\gamma \subset E^{n+1}$  regüler bir eğrinin Frenet çatısı  $\{T(s), \dots, N_n(s)\}$  olsun Ayrıca  $\{\kappa_1(s), \dots, \kappa_n(s)\}$ ; bu çatıya karşılık gelen (rasyonel) eğrilik fonksiyonları ile  $\gamma$  nın Frenet formülleri;

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa_1(s)N_1(s) \\ N_1'(s) &= -\kappa_1(s)T(s) + \kappa_2(s)N_2 \\ &\vdots \\ N_i'(s) &= -\kappa_i(s)N_{i-1}(s) + \kappa_{i+1}(s)N_{i+1}(s) \\ &\vdots \\ N_n'(s) &= -\kappa_n(s)N_{n-1}(s) \end{aligned}$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983).

**Tanım 3.1.2.**  $\gamma: R \rightarrow E^n$  birim hızlı eğri olsun. Eğer  $\gamma$  eğrisinin yüksek mertebeden türevleri  $\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(n-1)}(s)$  lineer bağımsız ise  $\gamma$  ya *cenerik eğri* (yada  $(n-1)$  - *oskulator mertebeli eğri*) denir (Shapiro 1998 ve Vargas 2005).

**Tanım 3.1.3.**  $\gamma: R \rightarrow E^n$  birim hızlı eğri olsun.  $\gamma$  eğrisinin hız vektörü  $\gamma'(s) = T$  yi  $E^n$  nin başlangıç noktasına ötelediğimizde  $T$  vektörünün bitim noktası  $S^{n-1} \subset E^n$  birim

küresi üzerinde bir eğri tanımlar bu eğriye  $\gamma$  nın *teğetler göstergesi (tangent indicatrix)* denir (Vargas 2001).

**Tanım 3.1.4.**  $\gamma : R \rightarrow E^n$  birim hızlı eğri olsun.  $p = \gamma(s_0)$  noktasında eğrinin yüksek mertebeden türevleri  $\gamma'(s_0), \gamma''(s_0), \dots, \gamma^{(n-1)}(s_0)$  lineer bağımsız iken  $\gamma'(s_0), \gamma''(s_0), \dots, \gamma^{(n)}(s_0)$  lineer bağımlı ise  $p$  noktasına  $\gamma$  nın *düzleştirme noktası* denir (Vargas 2001).

Aşağıdaki örnekleri verebiliriz (Arnold 1998).

**Örnek 3.1.5.**  $E^3$  de

$$\gamma(t) = (\sin 2t, \cos 2t, \cos 4t)$$

parametrelendirilmesi ile verilen eğri 8 düzleştirme noktasına sahiptir (Şekil 3.1.1).

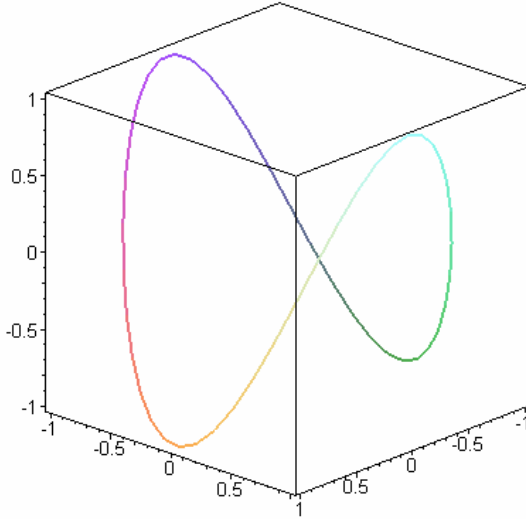
**Çözüm:**  $\gamma(t)$  eğrisinin düzleştirme noktalarına sahip olması için Tanım 3.1.4 gereği  $\gamma'(s_0), \gamma''(s_0), \gamma'''(s_0)$  vektörleri lineer bağımsız olmalıdır. Bu nedenle  $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')=0$  olmalıdır. Buradan  $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = 384\sin(4t) = 0$  bulunur. Böylece bu denklemin çözüm olan  $\frac{k\pi}{4}$ ,  $1 \leq k \leq 8$  değerleri  $\gamma$  eğrisin düzleştirme noktalarıdır.

**Örnek 3.1.6.**  $E^3$  de

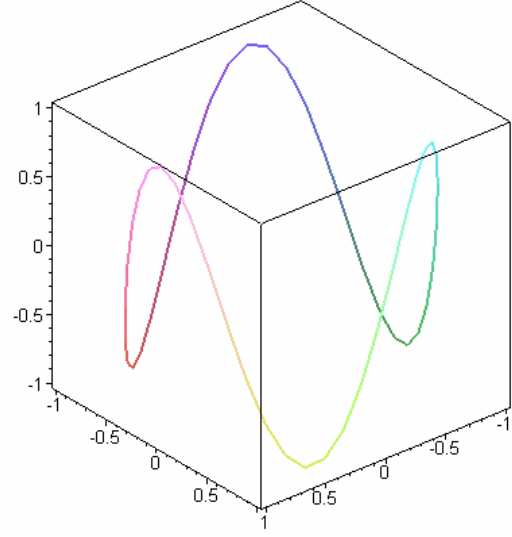
$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos 3t)$$

parametrelendirilmesi ile verilen eğri 6 düzleştirme noktasına sahiptir (Şekil 3.1.2).

**Çözüm:**  $\gamma(t)$  eğrisinin düzleştirme noktalarına sahip olması için Tanım 3.1.4 gereği  $\gamma'(s_0), \gamma''(s_0), \gamma'''(s_0)$  vektörleri lineer bağımsız olmalıdır. Bu nedenle  $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')=0$  olmalıdır. Buradan  $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = 24\sin(3t) = 0$  bulunur. Böylece bu denklemin çözüm olan  $\frac{k\pi}{3}$ ,  $1 \leq k \leq 6$  değerleri  $\gamma$  eğrisin düzleştirme noktalarıdır.



Şekil 3.1.1



Şekil 3.1.2

**Tanım 3.1.7.**  $\gamma : R \rightarrow E^n$  birim hızlı eğri olsun. Eğer  $\gamma$  eğrisinin teğetler göstergesi (tanjant indikatrisi) bir  $p \in \gamma$  noktasında bir düzleştirmeye sahip ise  $p$  noktasına *burulma noktası* denir (Fuster ve Codesal 1999).

**Önerme 3.1.8.**  $E^{2n}$  da  $\gamma : S^1 \rightarrow E^{2n}$  ;

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(nt), \sin(nt))$$

ile tanımlanan kapalı eğrinin burulma noktası yoktur (Vargas 2004).

**Önerme 3.1.9.**  $\gamma : R \rightarrow E^{2n+1}$  de kapalı bir eğrinin burulma noktalarının sayısı en az düzleştirmelerinin sayısı kadardır (Vargas 2001).

**Tanım 3.1.10.** Oskülatör mertebesi  $2n$  olan  $\gamma \subseteq E^{2n+1}$  eğrisinin  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{2n-1}$  eğrilikleri her yerde pozitif ve  $\kappa_{2n}$  eğriliği izole edilmiş noktalar (düzleştirmeler) hariç sıfırdan farklı olsun. Böylece

$$\begin{aligned}
a_0(s) &= \kappa_2(s)\kappa_4(s)\dots\kappa_{2n}(s) \\
a_1(s) &= \frac{\kappa_1(s)}{\kappa_2(s)}a_0(s), \quad \kappa_2(s) \neq 0 \\
a_2(s) &= \frac{\kappa_3(s)}{\kappa_4(s)}a_1(s), \quad \kappa_4(s) \neq 0 \\
&\vdots \\
a_j(s) &= \frac{\kappa_{2j-1}(s)}{\kappa_{2j}(s)}a_{j-1}(s), \quad \kappa_{2j}(s) \neq 0 \\
&\vdots \\
a_n(s) &= \frac{\kappa_{2n-1}(s)}{\kappa_{2n}(s)}a_{n-1}(s) = \kappa_1(s)\kappa_3(s)\dots\kappa_{n-1}(s), \quad \kappa_{2n}(s) \neq 0
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

fonksiyonları tanımlandığında

$$\tilde{d}(s) = a_0(s)T(s) + a_1(s)N_2(s) + \dots + a_n(s)N_{2n}(s) \tag{3.1.2}$$

vektörüne  $\gamma$  nın Darboux vektörü adı verilir (Vargas 2004).

**Önerme 3.1.11.** Oskülatör mertebesi  $2n$  olan  $\gamma \subseteq E^{2n+1}$  eğrisinin Darboux vektörü (3.1.2) ile verilsin. Bu eğrinin Frenet eğrilik matrisi  $M(s)$  olmak üzere

$$M(s).\tilde{d} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \kappa_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_{2n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

dir (Vargas 2001).

**Önerme 3.1.12.**  $\gamma \subseteq E^{2n+1}$  eğrisinin Darboux vektörünün türevi

$$\tilde{d}'(s) = a_0'(s)T(s) + a_1'(s)N_2(s) + \dots + a_n'(s)N_{2n}(s) \tag{3.1.4}$$

dir (Vargas 2004).



**İspat.** Darboux vektörünün türevi;

$$\begin{aligned}\tilde{d}'(s) &= a'_0(s)T(s) + a'_1(s)N_2(s) + \dots \\ &+ a'_n(s)N_{2n}(s) + (a_0(s)T'(s) + a_1(s)N'_2(s) + \dots + a_n(s)N'_{2n}(s))\end{aligned}\quad (3.1.5)$$

dir. Bu denklemin sağ tarafındaki ikinci terime  $X$  diyelim. Böylece  $X \equiv 0$  olduğunu göstermemiz ispat için yeterli olacaktır. Bunun için Frenet denklemlerini kullanalım;

$$\begin{aligned}T'(s) &= \kappa_1(s)N_1(s) \\ N'_2(s) &= -\kappa_2(s)N_1(s) + \kappa_3(s)N_3(s) \\ &\vdots \\ N'_{2j}(s) &= -\kappa_{2j}(s)N_{2j-1}(s) + \kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s) \\ &\vdots \\ N'_{2n}(s) &= -\kappa_{2n}(s)N_{2n-1}(s)\end{aligned}\quad (3.1.6)$$

Frenet denklemlerini

$$X = a_0(s)T'(s) + a_1(s)N'_2(s) + \dots + a_n(s)N'_{2n}(s)$$

de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}X &= a_0(s)(\kappa_1(s)N_1(s)) + a_1(s)(-\kappa_2(s)N_1(s) + \kappa_3(s)N_3(s)) + \dots \\ &+ a_j(s)(-\kappa_{2j}(s)N_{2j-1}(s) + \kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s)) + \dots + a_n(s)(-\kappa_{2n}(s)N_{2n-1}(s))\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$a_j(s) = \frac{\kappa_{2j-1}(s)}{\kappa_{2j}(s)} a_{j-1}(s), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

yardımla

$$\begin{aligned}I_1 &= a_j(s)(-\kappa_{2j}(s)N_{2j-1}(s) + \kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s)) \\ &= a_j(s)(-\kappa_{2j}(s)N_{2j-1}(s)) + a_j(s)(\kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s)) \\ &= \frac{\kappa_{2j-1}(s)}{\kappa_{2j}(s)} a_{j-1}(s)(-\kappa_{2j}(s)N_{2j-1}(s)) + a_j(s)(\kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s)) \\ &= -\frac{\kappa_{2j-1}(s)}{\kappa_{2j}(s)} a_{j-1}(s)\kappa_{2j}(s)N_{2j-1}(s) + a_j(s)\kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s) \\ &= -a_{j-1}(s)\kappa_{2j-1}(s)N_{2j-1}(s) + a_j(s)\kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s)\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

bulunur. Şimdi de (3.1.7) denkleminin ardışık terimi olan aşağıdaki ifadeyi hesaplayalım.

$$I_2 = a_{j+1}(s)(-\kappa_{2(j+1)}(s)N_{2(j+1)-1}(s) + \kappa_{2(j+1)+1}(s)N_{2(j+1)+1}(s))$$

olup burada  $a_{j+1}(s) = \frac{\kappa_{2(j+1)-1}(s)}{\kappa_{2(j+)}(s)} a_j(s)$  dir. Yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
I_2 &= a_{j+1}(s)(-\kappa_{2(j+1)}(s)N_{2(j+1)-1}(s) + \kappa_{2(j+1)+1}(s)N_{2(j+1)+1}(s)) \\
&= -a_{j+1}(s)\kappa_{2(j+1)}(s)N_{2(j+1)-1}(s) + a_{j+1}(s)\kappa_{2(j+1)+1}(s)N_{2(j+1)+1}(s) \\
&= -\frac{\kappa_{2(j+1)-1}(s)}{\kappa_{2(j+1)}(s)} a_j(s)\kappa_{2(j+1)}(s)N_{2(j+1)-1}(s) + a_{j+1}(s)\kappa_{2(j+1)+1}(s)N_{2(j+1)+1}(s) \quad (3.1.8) \\
&= -a_j(s)\kappa_{2(j+1)-1}(s)N_{2(j+1)-1}(s) + a_{j+1}(s)\kappa_{2(j+1)+1}(s)N_{2(j+1)+1}(s)
\end{aligned}$$

dir. Böylece (3.1.7) ve (3.1.8) yardımıyla;  $X$  in iki komşuluk teriminin toplamından;

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= (-a_{j-1}(s)\kappa_{2j-1}(s)N_{2j-1}(s) + a_j(s)\kappa_{2j+1}(s)N_{2j+1}(s)) \\
&+ (-a_j(s)\kappa_{2(j+1)-1}(s)N_{2(j+1)-1}(s) + a_{j+1}(s)\kappa_{2(j+1)+1}(s)N_{2(j+1)+1}(s))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $X \equiv 0$  olduğu görülür. Böylece

$$\tilde{d}'(s) = a'_0(s)T(s) + a'_1(s)N_2(s) + \dots + a'_n(s)N_{2n}(s)$$

dır.  $\square$

**Tanım 3.1.13.** (Darboux Köşe)  $\gamma \subseteq E^{2n+1}$  eğrisi verilsin.  $\tilde{d}'$  nin  $\tilde{d}$  ye paralel olduğu noktalara  $\gamma$  eğrisinin Darboux köşesi denir.

**Teorem 3.1.14.**  $\gamma \subset E^{2n+1}$  ( $n \geq 1$ ) türevlenebilir bir eğri ve  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{2n}$  ise  $\gamma$  nın eğrilikleri olsun. Böylece  $\gamma$  nın  $s = s_0$  da bir Darboux köşeye sahip olması için gerek ve yeter şart  $s = s_0$  da

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)' &= 0 \\
\left( \frac{\kappa_4}{\kappa_3} \right)' &= 0 \\
&\vdots \\
\left( \frac{\kappa_{2n}}{\kappa_{2n-1}} \right)' &= 0
\end{aligned} \quad (3.1.9)$$

olmasıdır (Vargas 2001).

**Örnek 3.1.15.**  $E^5$  de

$$\alpha(x) = (\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), x) \quad (3.1.10)$$

parametrelendirilmesiyle verilen eğrinin Darboux vektörünü hesaplayalım.

**Çözüm.** İlk önce  $\alpha(x)$  eğrisinin Frenet çatısı Ek 1 deki Maple programı yardımıyla hesaplandığında

$$V1 := \frac{1}{6} [-\sin(x), \cos(x), -2 \sin(2x), 2 \cos(2x), 1] \sqrt{6}$$

$$V2 := \frac{1}{17} [-\cos(x), -\sin(x), -4 \cos(2x), -4 \sin(2x), 0] \sqrt{17}$$

$$V3 := \frac{1}{101} \left[ -\frac{11}{6} \sin(x), \frac{11}{6} \cos(x), \frac{7}{3} \sin(2x), -\frac{7}{3} \cos(2x), \frac{17}{6} \right] \sqrt{606}$$

$$V4 := \frac{1}{8522} \left[ \frac{82}{17} \cos(x), \frac{82}{17} \sin(x), \frac{532}{17} \cos(2x), \frac{532}{17} \sin(2x), 0 \right] \sqrt{72437}$$

$$V5 := \frac{1}{383666}$$

$$\left[ \frac{5383}{303} \sin(x), -\frac{5383}{303} \cos(x), -\frac{6190}{303} \sin(2x), \frac{6190}{303} \cos(2x), \frac{-6997}{303} \right] \sqrt{116250798}$$

elde edilir. Ayrıca  $\alpha(t)$  eğrisinin Frenet eğrilikleri Ek1 deki verilen Maple programı yardımıyla hesaplanırsa

$$K1 := \frac{\sqrt{17}}{6}$$

$$K2 := \frac{\sqrt{17} \sqrt{101}}{102}$$

$$K3 := \frac{6997 \sqrt{101} \sqrt{72437}}{43896822}$$

$$K4 := \frac{3072377 \sqrt{72437} \sqrt{19375133}}{8420859054726}$$

bulunur. Bununla birlikte (3.1.1) denklemleri yardımıyla

$$a_0 := K_2 * K_4;$$

$$a_0 := \frac{3072377 \sqrt{17} \sqrt{101} \sqrt{72437} \sqrt{19375133}}{858927623582052}$$

$$a_1 := (K_1/K_2) * a_0;$$

$$a_1 := \frac{3072377 \sqrt{17} \sqrt{72437} \sqrt{19375133}}{50525154328356}$$

$$a_2 := (K_3/K_4) * a_1;$$

$$a_2 := \frac{6997 \sqrt{101} \sqrt{72437} \sqrt{17}}{263380932}$$

bulunur.

Böylece  $\alpha(x)$  eğrisinin Darboux vektörü

$$d := a_0 * V_1 + a_1 * V_3 + a_2 * V_5;$$

olduğundan, yukarıdaki değer denklemde yerine yazılırsa

$$d := \frac{1}{303150925970136} \sqrt{4261} \sqrt{191833} \sqrt{6} [-244542109 \sin(x), 244542109 \cos(x), \\ -625688738 \sin(2x), 625688738 \cos(2x), 365940877]$$

elde edilir.  $\square$

### 3.2. Eğrilerin $k$ . mcı Mertebeden Değmesi

**Tanım 3.2.1.**  $E^n$  in  $d$ -boyutlu bir alt manifoldu;

$$M = \{x \in R \mid g_1(x) = \dots = g_{n-d}(x) = 0\}$$

biçiminde verilsin. Eğer her bir  $g_1 \circ \gamma, g_2 \circ \gamma, \dots, g_{n-d} \circ \gamma$  fonksiyonu en az bir  $k$ -katlı sıfıra (çakışık köke) sahipse ve bunlardan en az biri  $t = t_0$  da  $k$ -katlı bir sıfıra sahipse

$\gamma(t_0)$  ile bir noktanın kesişiminde  $\gamma$  ile  $M$  nin değme mertebesi  $k$  dir denir ya da  $\gamma$  ile  $M$ ,  $k$ -değme noktaya sahiptir denir (Vargas 2001).

**Tanım 3.2.2.**  $\gamma \subset E^n$  eğrisinin  $s$  noktasında  $\{T(s), N_1(s), \dots, N_{n-1}(s)\}$  bazı ile gerilen  $E^n$  nin alt uzayına  $\gamma$  nın  $\gamma(s)$  den geçen oskülatör hiperdüzlemi denir. Burada  $N_n(s)$  vektörü  $\gamma$  nın  $s$  noktasındaki binormal vektörüdür. Bununla birlikte  $\gamma$  nın  $s$  noktasındaki normal hiperdüzlemi  $\{N_1(s), \dots, N_n(s)\}$  ile gerilen bir hiperdüzlemdir (Fuster ve Codesal 1999).

**Tanım 3.2.3.** Bir  $\gamma : R \rightarrow E^n$  eğrisi verildiğinde  $\gamma$  eğrisi ile onun oskülatör hiperdüzleminin bir  $p$  düzleştirme noktasındaki değme mertebesi  $n+1$  dir. Eğer bu nokta bir düzleştirme noktası olmayıp sıradan bir nokta ise bu takdirde değme mertebesi  $n$  dir denir. (Vargas 2004).

**Tanım 3.2.4.**  $M$  bir Riemann manifoldu ve  $\nabla$  da  $M$  üzerinde bir Riemann konneksiyonu olsun. Böylece;

$\alpha : I \subseteq R \rightarrow M$  eğrisi için,

$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0 \quad (3.2.1)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\alpha$  ya  $M$  de bir *geodezik eğri* denir. Eğer  $\forall X \in \chi(M)$  için  $\alpha(0) = p$  ve  $\alpha'(0) = X_p$  olacak şekilde tanımlanan  $\alpha$  geodeziğine  $X_p$  nin belirlediği geodezik adı verilir (Chen 1973).

**Tanım 3.2.5.**  $M$  manifoldu  $(n+d)$ -boyutlu  $E^{n+d}$  Öklid uzayında  $n$ -boyutlu bağlantılı bir alt manifold  $M$  olsun. Böylece  $\forall p \in M$  ve  $M$  ye  $p$  noktasında teğet olan herhangi bir birim vektör  $X$  için  $X$  vektörü ve  $p$  noktasında  $M$  nin  $T_p^\perp(M)$  normal uzayı  $E^{n+d}$  nin  $p$  den geçen  $(d+1)$ -boyutlu bir  $E(p, X)$  afin alt uzayını oluşturur.  $E(p, X)$  ve  $M$  nin arakesiti  $p$  nin komşuluğunda bir  $\gamma$  eğrisi belirler. Bu  $\gamma$  eğrisine  $X$  doğrultusunda  $p$  noktasında  $M$  nin normal kesiti denir. ((Arslan 1993), (Arslan ve West 1996), (Chen 1981) ve (Özgür, 1997)).

**Tanım 3.2.6.**  $M$  nin her bir  $\gamma(s)$  normal kesiti aynı zamanda  $M$  nin bir geodeziği (veya denk olarak  $M$  nin her bir geodeziği aynı zamanda  $M$  nin bir normal kesiti) ise  $M$  ye geodezik normal kesitlidir denir (Chen-Verhayen 1984).

**Tanım 3.2.7.**  $\gamma(0) = p \in M$  ve  $u \in U_p(M)$  birim vektör  $M$  nin  $\gamma_u$  geodeziği ile  $\beta_u$  normal kesiti için  $\gamma_u^i(0) = \beta_u^i(0)$  şartı sağlandığında  $1 \leq i \leq k$  olmak üzere  $\gamma_u$  ve  $\beta_u$  eğrileri  $k$ -inci mertebeden değmeye sahiptir denir.

Böylece  $\forall p \in M$  ve  $u = \gamma'(0) \in U_p(M)$  için  $\gamma_u$  ve  $\beta_u$  eğrileri  $k$ -inci mertebeden değmeye sahip ise  $M$  ye eğrileri  $k$ -inci mertebeden değmeye sahip altmanifold denir.

Eğer  $\forall k \in \mathbb{N}$  sayısı için  $M$  altmanifoldu  $k$ -inci mertebeden değmeye sahip ise yani

$$\begin{aligned} \gamma_u'(0) &= \beta_u'(0) \\ &\vdots \\ \gamma_u^k(0) &= \beta_u^k(0) \end{aligned}$$

ise  $M$  nin değme sayısı  $C_{\#}(M) = \infty$  ile gösterilir. Aksi halde  $M$  alt manifoldu  $k$ -inci mertebeden değmeye sahip fakat  $(k+1)$ -inci mertebeden değmeye sahip değil ise

$$C_{\#}(M) = k$$

ile gösterilir (Chen ve Li 2004).

**Örnek 3.2.8.**  $\psi_j : M \rightarrow E^{m_j}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) geodezik normal kesitlere sahip bir izometrik immersiyon olsun. Ayrıca  $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_s^2 = 1$  şartını sağlayan herhangi  $c_1, c_2, \dots, c_s$  reel sayısı için

$$(c_1\psi_1, \dots, c_s\psi_s) : M \rightarrow E^{m_1+m_2+\dots+m_s} : p \mapsto (c_1\psi_1(p), \dots, c_s\psi_s(p))$$

biçiminde tanımlanan köşegen immersiyonu için  $C_{\#}(M) = \infty$  dır (Chen ve Li 2004).

**Teorem 3.2.9.** Geodezik normal kesitlere sahip tüm alt manifoldlar için  $C_{\#}(M) = \infty$  dır (Chen ve Li 2004).

**Teorem 3.2.10.** Her  $M \subset E^{n+k}$  alt manifoldu için  $k$ -değme sayısı en az 2 dir (Chen ve Li 2004).

**Teorem 3.2.11.**  $\gamma$  eğrisi  $M$  nin  $p$  noktasındaki geodezik normal kesit eğrisi olsun. Bu taktirde helissel altmanifoldu helisseldir. Yani normal kesit eğrisinin tüm Frenet eğrilikleri sabittir (Verheyen 1985).

**Önerme 3.2.12.**  $\gamma$  eğrisi  $M$  nin  $p$  noktasındaki geodezik normal kesit eğrisi ise  $p$  noktası  $\gamma$  eğrisinin Darboux köşesidir.

**İspat.**  $\gamma$  eğrisi  $M$  nin  $p$  noktasındaki geodezik normal kesiti ise Teorem 3.2.11 den  $M$  altmanifoldu helisseldir. Yani  $\gamma$  nın Frenet eğrilikleri sabittir. Buradan Teorem 3.1.10 yardımıyla  $p$  noktasının bir Darboux köşe olduğu görülür.  $\square$

### 3.3 Eğrinin Genelleştirilmiş Evolütü

**Önerme 3.3.1.**  $\gamma : R \rightarrow E^{n+1}$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş eğri olsun.

$$d_\gamma : R \times R^{n+1} \rightarrow R$$

$$(s, x) \rightarrow d_\gamma(s, x) = \frac{1}{2} \|\gamma(s) - x\|^2 \quad (3.3.1)$$

fonksiyon ailesi tanımlayalım.

Ayrıca,  $a \in E^{n+1}$  merkezli ve  $r \in R^+$  yarıçaplı bir küre  $S(a, r)$  olmak üzere  $S(a, r)$  küresi  $\gamma$  eğrisine  $s_0$  noktasında teğettir ancak ve ancak

$$d_\gamma(s_0, a) = r^2 \text{ ve } \frac{\partial d_\gamma}{\partial s}(s, a) \Big|_{s=s_0} = \frac{\partial^2 d_\gamma}{\partial s^2}(s, a) \Big|_{s=s_0} = 0 \quad (3.3.2)$$

dır. Yani

$$d_\gamma(s_0, a) = \frac{1}{2} \|\gamma(s_0) - a\|^2 = r^2$$

dir (Fuster ve ark. 1999).

**Önerme 3.3.2.**  $S(a, r)$  küresi  $\gamma$  eğrisi ile  $s_0$  noktasında  $k$ -mertebeden değmeye sahiptir ancak ve ancak

$$d_\gamma(s_0, a) = r^2$$

$$\frac{\partial d_\gamma}{\partial s}(s, a)\Big|_{s=s_0} = \dots = \frac{\partial^k d_\gamma}{\partial s^k}(s, a)\Big|_{s=s_0} = 0$$

ve

$$\frac{\partial^{k+1} d_\gamma}{\partial s^{k+1}}(s, a)\Big|_{s=s_0} \neq 0$$

dır (Fuster ve ark. 1999).

**Tanım 3.3.3.**  $\gamma$  eğrisi ile  $s_0$  noktasında  $k$ -mertebeden değmeye sahip olan  $E^{n+1}$  in hiperküresine  $\gamma$  nın  $s_0$  noktasındaki oskületör hiper küresi adı verilir.

**Tanım 3.3.4.**  $\gamma$  eğrisinin  $s$  noktasındaki lifti (fibresi)

$$N_s \gamma(s) = \gamma(s) + \text{Span} \{N_1(s), \dots, N_n(s)\} \quad (3.3.3)$$

ile tanımlanan bir hiper düzlemdir ( $E^{n+1}$  in hiperdüzlemi) (Fuster ve ark. 1999).

**Teorem 3.3.5.** Yukarıdaki tanım ışığında aşağıdakiler elde edilir;

**a)**  $(s, x) \in N_s \gamma(s)$  için

$$x = \gamma(s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i(s); \lambda_i \in R \text{ dir} \quad (3.3.4)$$

**b)** Her noktasında  $\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(n+1)}(s)$  nın lineer bağımsız olduğu  $\gamma(s)$  eğrisinin bir tek  $S(a, r)$  oskületör hiper küresi vardır,

**c)**  $\gamma$  nın oskületör hiper kürelerinin merkezleri; türevlenebilir bir  $C_\gamma : R \rightarrow E^{n+1}$  eğrisini oluşturur, (Hacısalıhoğlu 1980) ve (Fuster ve ark. 1999).

**İspat: a)**  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  noktasındaki lifti  $N_s \gamma(s)$  olsun. Böylece  $(s, x) \in N_s \gamma(s)$  ise

$\langle (\gamma(s) - x), \gamma'(s) \rangle = 0$  dır. Buradan  $x = \gamma(s) + v$  elde edilir. Bu değer yerine yazılırsa

$\langle \gamma(s) - \gamma(s) - v, \gamma'(s) \rangle = 0$  bulunur. Bu da bize  $\langle v, \gamma'(s) \rangle = 0$  olduğunu gösterir. Buradan

$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i(s)$  elde edilir. Bu ifade yerine yazılırsa (3.3.4) eşitliği elde edilir.



$$\text{b) } \frac{\partial^j d_\gamma}{\partial s^j}(s, x) = \langle (\gamma(s) - x), \gamma^{(j)}(s) \rangle + F_j(\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(j-1)}(s))$$

olup burada  $F_j$  polinom fonksiyonlarıdır. Böylece,  $S(a, r)$ ;  $\gamma$  eğrisinin oskütör hiper

küresidir ancak ve ancak  $d_\gamma(s, a) = r^2$  ve  $\frac{\partial^j d_\gamma}{\partial s^j}(s, a) = 0$ ,  $j = \overline{1, n+1}$  dir. Bu nedenle

bazı  $a_i \in R$ ,  $i = 0, \dots, n$  için;

$$a = \gamma(s) + a_0 T(s) + \sum_{i=1}^n a_i N_i(s)$$

elde edilir. Buradan

$$a - \gamma(s) = a_0 T(s) + \sum_{i=1}^n a_i N_i(s) \quad (3.3.5)$$

denklemini

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d_\gamma}{\partial s}(s, a) = 0 \\ \frac{\partial^2 d_\gamma}{\partial s^2}(s, a) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial^{(n+1)} d_\gamma}{\partial s^{(n+1)}}(s, a) = 0 \end{array} \right.$$

denkleminde kullanılırsa  $(n+1)$ -lineer denklem elde edilir. Bu denklemlerin değişkenleri  $a_0, a_1, \dots, a_n$  katsayıları olup  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$   $S(a, r)$  küresinin merkezidir. Yukarıdaki sistemin çözümünün bir tek olması  $\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(n+1)}(s)$  nin lineer bağımsız olmasına bağlıdır. Böylece  $a_0, a_1, \dots, a_n$   $s$  ye bağlı fonksiyonları;  $\kappa_1(s), \dots, \kappa_n(s)$  ve bunların  $s$  ye göre türevlerinden oluşmaktadır.

c) Daha önceden tanımlanan

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_j &= m_j; j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

fonksiyonları;  $\kappa_j(s)$ ,  $j = \overline{1, n}$  ve bunların  $s$  ye göre türevleri olan rasyonel fonksiyonlardır. Böylece

$$C_\gamma(s) = \gamma(s) + \sum_{i=1}^n m_i N_i(s) \quad (3.3.6)$$

$E^{n+1}$  de türevlenebilir bir eğridir (Fuster ve ark. 1999).■

**Tanım 3.3.6.** (3.3.6) parametrelendirilmesi ile tanımlanan  $C_\gamma(s)$  eğrisine  $\gamma$  nın *genelleştirilmiş evolütü* ya da  $\gamma$  nın küresel eğrilik merkezlerinin oluşturduğu eğri adı verilir (Fuster ve ark. 1999).

**Teorem 3.3.7.**  $C_\gamma(s)$  eğrisinin hızı  $C'_\gamma(s)$ ,  $\gamma$  nın  $s$  noktasında binormal vektörü  $N_n(s)$  ye paraleldir (Fuster ve ark. 1999).

**İspat.** (3.3.1) eşitliğinden

$$d_\gamma(s, x) = \frac{1}{2} \langle \gamma(s) - x, \gamma(s) - x \rangle \quad (3.3.7)$$

elde edilir. Böylece

$$X = C_\gamma(s) \Leftrightarrow \frac{\partial d_\gamma}{\partial s}(s, x) = \dots = \frac{\partial^{(n+1)} d_\gamma}{\partial s^{(n+1)}}(s, x) = 0$$

olmalıdır. Böylece ;

$$\frac{\partial d_\gamma}{\partial s}(s, C_\gamma(s)) = \dots = \frac{\partial^{(n+1)} d_\gamma}{\partial s^{(n+1)}}(s, C_\gamma(s)) = 0$$

dır. Ayrıca

$$\frac{\partial^i d_\gamma}{\partial s^i}(s, C_\gamma(s)) = \langle \gamma(s) - x, \gamma^{(i)}(s) \rangle + F_i(\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(i-1)}(s))$$

dir. Her iki tarafın türevini alırsak;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial^i d_\gamma}{\partial s^i}(s, C_\gamma(s)) \right\} &= \langle \gamma(s) - C_\gamma(s), \gamma^{(i+1)}(s) \rangle + \langle \gamma(s) - C_{\gamma'}(s), \gamma^{(i)}(s) \rangle \\ &\quad + F_i'(\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(i-1)}(s)) \\ &= \frac{\partial^{i+1} d_\gamma}{\partial s^{i+1}}(s, C_\gamma(s)) - \langle C_{\gamma'}(s), \gamma^{(i)}(s) \rangle \end{aligned}$$

dır. Fakat  $\forall i \leq n$  için

$$\frac{\partial^{i+1} d_\gamma}{\partial s^{i+1}}(s, C_\gamma(s)) = 0$$

olduğundan

$$\langle C_{\gamma'}(s), \gamma^{(i)}(s) \rangle = 0$$

bulunur. Buradan oskületör düzlem

$$\text{Span}\{\gamma'(s), \gamma''(s), \dots, \gamma^{(n)}(s)\} = \text{Span}\{T(s), N_1(s), \dots, N_{n-1}(s)\}$$

ye dik olduğundan görülür. Bu nedenle  $C_{\gamma'}(s)$  ile  $N_n(s)$  aynı yöndedir.  $\square$

**Teorem 3.3.8.**  $\{m_i\}_{i=1, \dots, n}$  fonksiyonları aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\begin{aligned} m_2(s)k_2(s) &= m_1'(s) \\ m_i(s)\kappa_i(s) &= m_{i-1}'(s) + m_{i-2}(s)\kappa_{i-1}(s) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

(Fuster ve ark. 1999).

**İspat.**  $C_\gamma(s) = \gamma(s) + \sum_{i=1}^n m_i N_i(s)$

eşitliğinde her iki yanın  $s$  ye göre türevini alırsak

$$C'_\gamma(s) = \gamma'(s) + \sum_{i=1}^n m_i'(s)N_i(s) + \sum_{i=1}^n m_i(s)N_i'(s) \quad (3.3.9)$$

dir. Frenet formülleri yardımıyla;

$$\begin{aligned} C'_\gamma(s) &= (m_1'(s) - m_2(s)\kappa_2(s))N_1(s) \\ &+ (m_n'(s) - m_{n-1}(s)\kappa_n(s))N_n(s) \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} (m_i'(s) + m_{i-1}(s)\kappa_i(s) - m_{i+1}(s)\kappa_{i+1}(s))N_i(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.3.7 den  $C'_\gamma(s)$  ile  $N_n(s)$  paralel olduğundan

$$\begin{aligned} m_1'(s) - m_2(s)\kappa_2(s) &= 0 \\ m_i'(s) + m_{i-1}(s)\kappa_i(s) - m_{i+1}(s)\kappa_{i+1}(s) &= 0 \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

dir.  $\square$

**Açıklama 3.3.9**  $m_i$  fonksiyonuna  $\gamma(I)$  eğrisinin  $i$ -yinci eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu 1980). Bu fonksiyonlara bir sonraki bölümde fokal eğrilikler olarak adlandırılacak ve  $c_i$  ile gösterilecektir.

**Teorem 3.3.10.**  $C_\gamma(s)$  eğrisinin singüler noktalarında;  $\gamma$  nın oskütör küresi  $S(a,r)$ ;  $s$  noktasında  $(n+2)$ -mertebeden değmeye sahiptir (Fuster ve ark. 1999).

**İspat.** Teorem 3.3.7 dan;

$$C'_\gamma(s) = (m'_n(s) - m_{n-1}(s)\kappa_n(s))N_n(s)$$

dir. Böylece;

$$C'_\gamma(s) = 0 \Leftrightarrow \langle C_{\gamma'}(s), \gamma^{(i)}(s) \rangle, \forall i \leq n+1$$

elde edilir. Buradan;

$$\frac{\partial^{i+1} d_\gamma}{\partial s^{i+1}}(s, C_\gamma(s)) = 0 \quad \forall i \leq n+1$$

olup tersi de doğrudur.  $\square$

**Teorem 3.3.11.**  $\gamma: R \rightarrow E^{n+1}$  regüler eğrisi  $\gamma$  nın oskütör küresi  $S(a,r)$  ile  $s_0$  noktasında  $(n+2)$ -mertebeden değmeye sahip ise

$$\langle a - \gamma(s), N_i(s_0) \rangle = m_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.3.10)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1980).

**Örnek 3.3.12.** Helis eğrisi

$$\mathbf{x}(s) = (r \cos(\omega s), r \sin(\omega s), h \omega s) ; s \in \mathbf{R} \quad (3.3.11)$$

ile verilsin. Burada  $r > 0$ ,  $h \in \mathbf{R}$  ve  $\omega = 1 / (r^2 + h^2)^{1/2}$  yay sabiti olmak üzere helis eğrisinin oskütör küresin merkez ve yarıçapı aşağıdaki gibidir;

$$m(s) = (-h^2/r \cos(\omega s), -h^2/r \sin(\omega s), h \omega s), \quad (3.3.12)$$

$$r(s) = (r^2 + h^2)/r. \quad (3.3.13)$$

Böylece bir helisin oskütör kürelerinin merkezlerinden geçen eğri yine bir helis üzerindedir (Malkowsky ve ark.2001).

### 3.4 Bir Eğrinin Fokal Eğrisi

$M \subset E^{n+1}$  alt manifoldunun normal çizgilerinin bir ailesinin zarfı o alt manifoldun fokal kümesi ya da kaustiği olarak adlandırılır.

$\gamma$  eğrisine bir noktada dik olan hiper düzlem bu noktada eğriye dik olan tüm doğruların bir birleşimi olarak görülebilir. Böylece  $\gamma$  eğrisine dik olan hiper düzlemlerin bir zarfı fokal kümenin bir bileşeni (esas bileşeni) dir, diğer bileşen ise eğrinin kendisidir (Vargas 2005).

**Tanım 3.4.1.**  $\gamma : R \rightarrow E^{n+1}$ , iyi eğri,  $F : E^{n+1} \times R \rightarrow R$  reel değerli fonksiyonlarının  $(n+1)$ -parametrelili bir ailesi olup

$$F(q, \theta) = \frac{1}{2} \|q - \gamma(\theta)\|^2 \quad (3.4.1)$$

ile verilsin. Böylece  $F$  ailesinin kaustiği

$$\{q \in E^{n+1} : \exists \theta \in R : F'_q(\theta) = 0 \text{ ve } F''_q(\theta) = 0\}$$

ile verilir (Vargas 2005).

**Önerme 3.4.2.**  $F(q, \theta) = \frac{1}{2} \|q - \gamma(\theta)\|^2$  ailesinin kaustiği  $\gamma : R \rightarrow E^{n+1}$  eğrisinin fokal kümesine karşılık gelir (Vargas 2005).

**İspat.**  $F$  ailesinin kaustiği  $F'_q(\theta) = 0$  ve  $F''_q(\theta) = 0$  denklem çifti ile tanımlanır. Böylece her  $\theta$  sabit değeri için (3.4.1) denklemini sağlayan  $q \in E^{n+1}$  noktalar kümesi  $\gamma$  eğrisine  $\gamma(\theta)$  noktasında normal hiper düzlem oluşturur:

$$F'_q(\theta) = \langle q - \gamma(\theta), \gamma'(\theta) \rangle = 0 \quad (3.4.2)$$

dır. Ayrıca her iki denklemi sağlayan bir  $\theta$  sabit değeri için  $q \in E^{n+1}$  noktalar kümesi  $\gamma(s)$  noktasındaki normal hiperdüzlemi durağan (stationary) noktalarıdır. Bu noktalar  $E^{n+1}$  in  $(n-1)$ -boyutlu afin alt uzayını oluşturur;

$$F''_q(\theta) = - \langle q - \gamma(\theta), \gamma''(\theta) \rangle + \langle \gamma'(\theta), \gamma'(\theta) \rangle = 0 \quad (3.4.2)^*$$

dır. Bu alt uzay  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(\theta)$  noktasında  $(n-1)$ - boyutlu fokal düzlem oluşturur.  $\square$

Cenerik bir eğrinin fokal kümesi tanımından, bir noktada  $\gamma$  nın oskütör hiper küresinin merkezi, söz konusu noktada  $\gamma$  ya normal hiper düzlemde bulunur. Bu nedenle,

$$C_\gamma = \gamma + c_1 N_1 + c_2 N_2 + \dots + c_n N_n \quad (3.4.3)$$

dir. Burada  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ;  $\gamma$  eğrisinin türevlenebilir fonksiyonlar olup  $c_i$   $\gamma$  nın  $i$ -inci fokal eğrilik fonksiyonu olarak adlandırılır. Ayrıca  $c_1$  fonksiyonu sıfırdan farklı olup

$$c_1 = \frac{1}{\kappa_1} \text{ dir (Vargas 2001).}$$

**Açıklama 3.4.3.**  $\gamma$  eğrisinin oskütör kürelerinin merkezleri  $\gamma$  eğrisinin  $C_\gamma(s)$  fokal eğrisinin oluşturur ve  $C_\gamma(s)$  ile gösterilir. Bu eğriler (Fuster ve ark., 1999) tarafından (3.3.6) denklemi ile

$$C_\gamma(s) = \gamma(s) + \sum_{i=1}^n m_i N_i(s)$$

şeklinde bir parametrelendirme ile ifade edildi ve bunlara  $\gamma$  nin genelleştirilmiş evolütü adı verildi. Burada  $m_i$  fonksiyonları  $c_i$  lere karşılık gelir ve bunlar  $\gamma$  nın  $i$ -inci fokal eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılır. Bu eğriler  $n = 2$  hali için H.H. Hacısalihoğlu tarafından ele alınmıştır (Hacısalihoğlu 1980).

Şu andan itibaren fokal eğri deyince genelleştirilmiş evolüt anlaşılacaktır.

**Örnek 3.4.4.**  $E^4$  de

$$\gamma(x) = (\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x) \quad (3.4.4)$$

parametrelendirilmesi ile verilen elipsin fokal eğrisini bulalım. Öncelikle  $\gamma(x)$  eğrisinin Frenet çatısı Maple programı yardımıyla hesaplayalım. Bunun için EK 1 deki Maple programı kullanıldığında;

$$V1 := \frac{1}{5} [-\sin(x), \cos(x), -2 \sin(2x), 2 \cos(2x)] \sqrt{5}$$

$$V2 := \frac{1}{17} [-\cos(x), -\sin(x), -4 \cos(2x), -4 \sin(2x)] \sqrt{17}$$

$$V3 := \frac{1}{6} \left[ -\frac{12}{5} \sin(x), \frac{12}{5} \cos(x), \frac{6}{5} \sin(2x), -\frac{6}{5} \cos(2x) \right] \sqrt{5}$$

$$V4 := \frac{1}{8522} \left[ \frac{82}{17} \cos(x), \frac{82}{17} \sin(x), \frac{532}{17} \cos(2x), \frac{532}{17} \sin(2x) \right] \sqrt{72437}$$

Frenet çatsı elde edilir. Ayrıca  $\gamma(x)$  eğrisinin Frenet eğrilikleri Ek1 deki verilen Maple komutu yardımıyla hesaplanırsa

$$K1 := \frac{\sqrt{17}}{5}$$

$$K2 := \frac{6\sqrt{17}}{85}$$

$$K3 := \frac{90\sqrt{72437}}{72437}$$

elde edilir. Böylece sırası ile  $\gamma(x)$  in fokal eğrisinin katsayıları;

$$c1 := 1/K1;$$

$$c1 := \frac{5\sqrt{17}}{17}$$

$$c2 := \text{diff}(c1, x) / K1;$$

$$c2 := 0$$

$$c3 := (\text{diff}(c2, x) + c1 * K2) / K3;$$

$$c3 := \frac{\sqrt{72437}}{255}$$

bulunur.

Böylece  $\gamma$  eğrisinin fokal eğrisi;

$$C_\gamma = \gamma + \frac{5\sqrt{17}}{17} N_1 + \frac{\sqrt{72437}}{255} N_3 \quad (3.4.5)$$

dir.

**Önerme 3.4.5.**  $E^{n+1}$  de  $s$ -yay parametresi ile parametrelendirilmiş  $\gamma$  eğrisinin fokal eğrilikleri,  $c_n \neq 0$  için aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlar:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ \vdots \\ c'_{n-2} \\ c'_{n-1} \\ c'_n - \frac{(R_n^2)'}{2c_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & -\kappa_3 & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ & & & & 0 & \kappa_{n-1} & 0 & \\ & & & & -\kappa_{n-1} & 0 & \kappa_n & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_n & 0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

Eğer eğri küresel ise bu taktirde eşitliğin sol tarafının son bileşeni sadece  $c'_n$  teriminden ibaret olur (Vargas 2001).

**İspat.**  $\gamma$  nın fokal eğrisi;

$$C_\gamma(s) = (\gamma + c_1 N_1 + c_2 N_2 + \dots + c_n N_n)(s)$$

olsun.  $\gamma$  nın yay uzunluğuna göre  $C_\gamma$  nın türevine Frenet denklemleri uygulanarak;

$$\begin{aligned} C'_\gamma &= t + c_1 \underbrace{(-\kappa_1 t + \kappa_2 N_2)}_{n'_1} + c'_1 N_1 \\ &+ c_2 \underbrace{(-\kappa_2 N_1 + \kappa_3 N_3)}_{n'_2} + c'_2 N_2 + \dots \\ &+ c_{i-1} \underbrace{(-\kappa_{i-1} N_{i-2} + \kappa_i N_i)}_{n'_{i-1}} + c'_{i-1} N_{i-1} \\ &+ c_i \underbrace{(-\kappa_i N_{i-1} + \kappa_{i+1} N_{i+1})}_{n'_i} + c'_i N_i + \dots \\ &+ c_{n-1} \underbrace{(-\kappa_{n-1} N_{n-2} + \kappa_n N_n)}_{n'_{n-1}} + c'_{n-1} N_{n-1} \\ &+ c_n \underbrace{(-\kappa_{n-1} N_{n-1})}_{n'_n} + c'_n N_n \\ &= (1 - c_1 \kappa_1) t + (c'_1 - \kappa_2 c_2) N_1 + (c'_2 + c_1 \kappa_2 - c_3 \kappa_3) N_2 + \dots \\ &+ (c'_i + c_{i-1} \kappa_i - c_{i+1} \kappa_{i+1}) N_i + \dots + (c'_n + c_{n-1} \kappa_n) N_n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $C'_\gamma$  vektörü  $N_n$  binormal vektörüne paralel olduğundan  $C'_\gamma$  nin ilk n-1 bileşeni sıfır olur. Bu ise;



$$\begin{aligned}
1 &= \kappa_1 c_1 \\
c'_1 &= \kappa_2 c_2 \\
c'_2 &= -\kappa_2 c_1 + \kappa_3 c_3 \\
&\vdots \\
c'_{n-1} &= -c_{n-2} \kappa_{n-1} + c_n \kappa_n
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

olması demektir. Böylece  $C'_\gamma = (c'_n + c_{n-1} \kappa_n) N_n$  dir. Oskulatör hiper kürenin yarıçapı  $R_n$  olmak üzere  $R_n^2 = \|C_\gamma - \gamma\|^2$  dir. Buradan;

$$\begin{aligned}
(R_n^2)' &= \langle C_\gamma - \gamma, C_\gamma - \gamma \rangle' = 2 \langle C'_\gamma - \gamma', C_\gamma - \gamma \rangle \\
&= 2 \langle (c'_n + c_{n-1} \kappa_n) N_n - t, c_1 N_1 + c_2 N_2 + \dots + c_n N_n \rangle \\
&= 2c_n (c'_n + c_{n-1} \kappa_n)
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

elde edilir.

Böylece  $c_n \neq 0$  için;

$$c'_n - \frac{(R_n^2)'}{2c_n} = -\kappa_n c_{n-1} \tag{3.4.8}$$

dir. Bu denklemler birlikte (3.4.6) denklemlerinden ispat tamamlanır.  $\square$

**Tanım 3.4.6.**  $C'_\gamma(s) = 0$  için  $s$  noktası  $\gamma$  nın köşe noktasıdır (Fuster ve ark. 1999).

**Teorem 3.4.7.**  $n \geq 1$  olmak üzere  $E^{n+1}$  de yay-parametresi ile parametrelendirilmiş cenerik bir eğrinin bir noktasının bir köşe olabilmesi için gerek ve yeter şart söz konusu noktada

$$c'_n + c_{n-1} \kappa_n = 0 \tag{3.4.9}$$

olmasıdır (Vargas 2001).

**İspat.** Teorem 3.3.7 nin ispatında

$$C'_\gamma = (c'_n + c_{n-1} \kappa_n) N_n \tag{3.4.10}$$

olduğunu gördük. Tanım 3.4.6 yardımıyla  $\gamma$  nın bir noktasının köşe olabilmesi için gerek ve yeter şart  $C'_\gamma = 0$  olmasıdır. Buradan  $c'_n + c_{n-1} \kappa_n = 0$  elde edilir (Vargas 2001).  $\square$

**Sonuç 3.4.8.**  $n \geq 1$  olmak üzere  $E^{n+1}$  de yay-parametresi ile parametrelendirilmiş daldırılmış türevlenebilir bir eğrinin küresel olması için gerek ve yeter şart;

$$c'_n + c_{n-1}\kappa_n = 0$$

olmasıdır (Vargas 2001).

**Sonuç 3.4.9.**  $\gamma$  eğrisi  $M \subset E^n$  alt manifoldundan  $p \in M$  noktasında  $\gamma'(0) = X$  yönünde normal kesiti ve  $\gamma$  bu eğrinin fokal eğrisi  $C_\gamma$  olsun.  $C_\gamma$  nın hız vektörü sıfıra eşit ise bu taktirde  $\gamma$  normal kesiti küresel eğrinin bir parçası olur.

**İspat:**  $\gamma$  nın oskülör hiper küresinin yarıçapı  $R_n$  olmak üzere

$$R_n^2 = \langle C_\gamma - \gamma, C_\gamma - \gamma \rangle$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} (R_n^2)' &= 2 \langle C'_\gamma - \gamma', C_\gamma - \gamma \rangle \\ &= \langle 2(c_{n-1}\kappa_n + c'_n)N_n - X, c_1N_1 + c_2N_2 + \dots + c_nN_n \rangle \\ &= 2c_n(c_{n-1}\kappa_n + c'_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $c_d \neq 0$  olduğundan

$$\frac{(R_n^2)'}{2c_n} = c_{n-1}\kappa_n + c'_n \quad (3.4.11)$$

dir. Bununla birlikte (3.4.10) ve (3.4.11) den

$$C'_\gamma = \frac{(R_n^2)'}{2c_n} N_n \quad (3.4.12)$$

bulunur. Buradan eğer  $C'_\gamma = 0$  ise  $(R_n^2)'$  sabittir ve  $\gamma$  eğrisi küresel bir eğridir.  $\square$

**Önerme 3.4.10.**  $\gamma$  eğrisi  $M \subset E^n$  alt manifoldundan  $p \in M$  noktasında  $\gamma'(0) = X$  yönünde normal kesiti ve  $\gamma$  bu eğrinin fokal eğrisi  $C_\gamma$  olsun. Bu taktirde  $C_\gamma$  nın hız vektörü  $\gamma$  nın son Frenet vektörü ile orantılıdır.

**İspat.**  $\gamma$  normal kesitinin genelleştirilmiş evolütü

$$C_\gamma(s) = \gamma(s) + (c_1N_1 + c_2N_2 + \dots + c_nN_n)(s)$$

ile tanımlanır.

$C_\gamma$  nin s ye göre türevi alınır ve türevine Frenet denklemleri uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
C'_\gamma &= (1 - \kappa_1)\dot{t} + (c'_1 - \kappa_2 c_2)N_1 + \dots \\
&+ \sum_{i=2}^{d-1} (c_{i-1}\kappa_i + c'_i - c_{i+1}\kappa_{i+1})N_i + \dots \\
&+ (c_{n-1}\kappa_n + c'_n)N_n
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

elde edilir. Böylece (3.4.6) eşitliklerinden;

$$\begin{aligned}
1 - \kappa_1 c_1 &= 0 \\
(c'_1 - \kappa_2 c_2) &= 0 \\
&\vdots \\
(c_{i-1}\kappa_i + c'_i - c_{i+1}\kappa_{i+1}) &= 0
\end{aligned}$$

dir. Buradan  $C'_\gamma(s) = (c_{n-1}\kappa_n + c'_n)N_n$  elde edilir.  $\square$

**Teorem 3.4.11.**  $\gamma \subset E^{n+1}$  regüler eğrisinin fokal eğrisi  $C_\gamma$  olsun. Eğer  $C_\gamma$  eğrisi 2-düzlemsel (yani  $C'_\gamma, C''_\gamma, C'''_\gamma$  vektörleri lineer bağımlı) ise

- i)  $\kappa_{n-1} = 0$ ,
- ii)  $\kappa_n = 0$ , ya da
- iii)  $C'_\gamma = 0$  dir. Yani  $\gamma$  küreseldir ve p noktası da  $\gamma$  nın bir köşesidir.

**İspat.**  $\gamma$  eğrisinin fokal eğrisi  $C_\gamma$  olsun. (3.4.10) eşitliğinden  $C'_\gamma(s) = (c_{n-1}\kappa_n + c'_n)N_n$  dır. Eğer  $A = (c_n\kappa_{n-1} + c'_n)$  alındığında

$$\begin{aligned}
C'_\gamma &= AN_n \\
C''_\gamma &= -A\kappa_n N_{n-1} + A'N_n \\
C'''_\gamma &= \underbrace{(A'' + A\kappa_n^2)}_B N_n + \underbrace{(-2\kappa_n A' - \kappa'_n A)}_C N_{n-1} - \underbrace{\kappa_{n-1}\kappa_n A}_{D} N_{n-2}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan  $C_\gamma$  düzlemsel olduğundan;

$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ A' & -A\kappa_n & 0 \\ B & C & D \end{vmatrix} = -DA^2\kappa_n = \kappa_n^2\kappa_{n-1}A^3 = 0$$

dır. Böylece  $\kappa_n^2\kappa_{n-1}(c_n\kappa_{n-1} + c'_n) = 0$  denkleminde ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Tanım 3.4.12.**  $M \subseteq E^n$  nin  $p \in M$  noktasında ve  $X_p \in T_p(M)$  doğrultusunda verilen normal kesiti  $\gamma$  olsun.  $\gamma$  nın eğriliği  $\kappa$  olmak üzere  $\left. \frac{d\kappa^2}{ds} \right|_{s=0} = 0$  ise  $p = \gamma(0)$  noktasına  $\gamma$  eğrisinin köşesi adı verilir (Chen 1981).

**Teorem 3.4.13.**  $M \subseteq E^n$  alt manifoldu noktasal 2-düzlemsel normal kesitlere sahip ve her bir  $p \in M$  noktası  $\gamma$  nın bir köşesidir ancak ve ancak  $M$  alt manifoldunun ikinci temel formu paraleldir (Chen 1981).

**İspat.** ( $\Rightarrow$ ):  $M$  nin ikinci temel formu  $h$  nın paralel olduğunu kabul edelim. Bu taktirde tanım gereği  $M$  alt manifoldu noktasal 2-düzlemsel normal kesitlere sahiptir. Böylece  $\gamma'(s) = T \in T_p(M)$  doğrultusunda verilen  $p$  noktasında  $M$  nin normal kesiti olsun.  $\gamma$  eğrisinin eğriliği  $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$  olduğundan

$$\kappa^2(s) = \langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle \quad (3.4.14)$$

dir. Burada  $T = \gamma'(s)$  dir. Ayrıca (2.1) Gauss denkleminden;

$$\begin{aligned} \kappa^2(s) &= \langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle \\ &= \langle \nabla_T T + h(T, T), \nabla_T T + h(T, T) \rangle \\ &= \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + \langle h(T, T), h(T, T) \rangle \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

(3.4.15) denkleminin  $s$  ye göre türevinden;

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa^2(s)}{ds} &= \tilde{\nabla}_T \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle + \tilde{\nabla}_T \langle h(T, T), h(T, T) \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_T (\nabla_T T), \nabla_T T \rangle + 2 \underbrace{\langle h(\nabla_T T), T \rangle, \nabla_T T}_{=0} \\ &\quad - 2 \underbrace{\langle A_{h(T, T)} T, h(T, T) \rangle}_{=0} + 2 \langle D_T h(T, T), h(T, T) \rangle \\ &= 2 \langle \nabla_T (\nabla_T T), \nabla_T T \rangle + 2 \langle D_T (h(T, T)), h(T, T) \rangle \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$D_T (h(T, T)) = (\tilde{\nabla}_T h)(T, T) + 2h(\nabla_T T, T)$$

olduğundan;

$$\frac{d\kappa^2(s)}{ds} = 2\langle \nabla_T(\nabla_T T), \nabla_T T \rangle + 2\langle (\bar{\nabla}_T h)(T, T), h(T, T) \rangle + 2\langle h(\nabla_T T, T), h(T, T) \rangle$$

dir.  $p = \gamma(0)$  noktasında

$$\nabla_t T = 0; \gamma'(s) = T, \gamma'(0) = t$$

dır. Ayrıca ikinci temel form paralel olduğundan

$$\langle (\bar{\nabla}_t h)(T, T), h(t, t) \rangle = 0 \text{ dır. Bu eşitlikler yardımıyla}$$

$$\left. \frac{d\kappa^2(s)}{ds} \right|_{s=0} = 0 \quad (3.4.16)$$

dır. Böylece  $p$ ,  $\gamma(s)$  normal kesitinin bir köşesidir.

( $\Leftarrow$ ): Tersine benzer şekilde gösterilebilir.  $\square$

Noktasal 2-düzlemsel normal kesitlere sahip  $M \subseteq E^n$  alt manifoldunun küresel olması hali yani  $M$  nin

$$S^{n-1}(r) = \{x \in R^n; \|x - c\|^2 = r\}$$

küresi içinde yatması hali B.Y. Chen tarafından incelenmiştir.

**Teorem 3.4.14.**  $M \subset S^{n-1}(r) \subset E^n$  küresel altmanifoldunun noktasal 2-düzlemlere sahip olması için gerek ve yeter şart  $M$  nin ikinci temel formunun paralel olmasıdır (Chen 1998)

**Açıklama 3.4.15.** Teorem 3.4.14, Teorem 3.4.13 ve Sonuç 3.4.9 karşılaştırıldığında Chen'in köşe tanımı ile Vargas'ın köşe tanımlarının örtüştüğü anlaşılmaktadır.

**Önerme 3.4.16.**  $\gamma: I \subset R \rightarrow E^{n+1}$  birim hızlı cenerik bir eğri olmak üzere  $\kappa_i$  ve  $c_i$  sırasıyla  $\gamma$  nın Frenet ve fokal eğriliği olsun. Bu taktirde

$$\kappa_i = \frac{c_1 c_1' + c_2 c_2' + \dots + c_{i-1} c_{i-1}'}{c_{i-1} c_i}; i \geq 2 \quad (3.4.17)$$

dir ((Hacısalıhoğlu 1980) ve (Vargas 2001)).

**İspat.** Tümevarım yöntemi ile ispat yapılabilir. İspat için Önerme 3.4.5 in ' skalar Frenet denklemleri' kullanılacaktır.

$$\kappa_1 = \frac{1}{c_1}, \quad (3.4.18)$$

$$\kappa_2 = \frac{c'_1}{c_2} = \frac{c_1 c'_1}{c_2 c'_2}, \quad (3.4.19)$$

$$\kappa_3 = \frac{c'_2 + c_1 \kappa_2}{c_2} = \frac{c'_2 + c_1 \frac{c'_1}{c_2}}{c_3} = \frac{c_2 c'_2 + c_1 c'_1}{c_2 c_3}, \quad (3.4.20)$$

$$\kappa_i = \frac{c_{i-1} c'_{i-1} + \dots + c_2 c'_2 + c_1 c'_1}{c_{i-1} c_i} \quad (3.4.21)$$

Denkleminin doğru olduğunu kabul edelim. Önerme 3.4.5 in Frenet denklemlerinden

$$c_{i+1} \kappa_{i+1} = c'_i + c_{i-1} \kappa_i \quad (3.4.22)$$

dır. Böylece  $\kappa_i$  değerini yerine yazılırsa

$$c_{i+1} \kappa_{i+1} = c'_i + \frac{c_{i-1} c'_{i-1} + \dots + c_2 c'_2 + c_1 c'_1}{c_i} = \frac{c_i c'_i + \dots + c_2 c'_2 + c_1 c'_1}{c_i} \quad (3.4.23)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Açıklama 3.4.17.** Cenerik bir eğri için,  $c_i$  yada  $c_{i-1}$  fonksiyonları izole edilmiş noktalarda yok edilebilir. Bu noktalarda  $c_1 c'_1 + c_2 c'_2 + \dots + c_{i-1} c'_{i-1}$  fonksiyonları da sıfır olur ve buna karşılık gelen  $\kappa_i$  fonksiyonunun değeri L'Hospital kuralı ile elde edilebilir.

$l$ -oskületör kürenin yarıçapı  $R_l$  olmak üzere,

$$R_l^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_l^2 \text{ ve } R_m^2 = \|C_\gamma - \gamma\|^2 \quad (3.4.24)$$

dir (Vargas 2001).

**Teorem 3.4.18.**  $n \geq 4$  ve  $n$ -çift olmak üzere  $\gamma: R \rightarrow E^{n+1}$  bir eğri olsun.  $\{T(s), N_1(s), \dots, N_n(s)\}$   $\gamma$  nın Frenet vektör alan sistemi olmak üzere  $\gamma$  nın oskületör kürelerinin merkezlerinin koordinatları  $m_i$ ;  $1 \leq i \leq n+1$  olsun. Bu taktirde

$$\text{i) } \det(c'_2, c'_3, \dots, c'_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \gamma \text{ bir eğilim çizgisidir (ya da genel helis),}$$

$$\text{ii) } \det(c'_2, c'_3, \dots, c'_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i^2 = \text{sabittir.}$$

(Hacısalihoglu 1980).

**Teorem 3.4.19.**  $n \geq 1$  olmak üzere  $E^{n+1}$  Öklid uzayında yay-parametresi ile parametrelendirilmiş cenerik bir eğrinin  $l$ -oskulator küresinin  $R_l$  yarı çapının sabit olması için gerek ve yeter şart

a)  $l=1$  için  $c_2 = 0$ ;

b)  $1 < l < n$  için ya  $c_l = 0$  ya da  $c_{l+1} = 0$ ;

c)  $l = n$  için ya  $c_n = 0$  ya da  $c'_n + c_{n-1}\kappa_n = 0$ ;

olmasıdır. Yani,  $1 \leq l < n$  için;  $R_l R'_l = c_l c_{l+1} \kappa_{l+1}$  dir (Vargas 2001).

**İspat.**  $R_1^2 = c_1^2 + \dots + c_l^2$  alalım. Böylece

$$R_1 R'_1 = c_1 c'_1 + c_2 c'_2 + \dots + c_l c'_l$$

dir. Önerme 3.4.16 deki  $\kappa_i$  değerinin yerine yazılması ile

$$R_l R'_l = c_l c_{l+1} \kappa_{l+1}, \quad 1 \leq l < n$$

elde edilir.

$E^{n+1}$  de cenerik bir eğri için ilk  $n-1$  eğrilik hiçbir yerde sıfır değildir ve  $m$ -inci eğrilik izole edilmiş noktalarda sıfır olabilir ve bu noktalar  $R_{n-1}$  de kritik noktalarla çakışmaz.

Böylece  $n \geq 1$  olmak üzere  $E^{n+1}$  de cenerik bir eğri için  $R'_l = 0$  dır ancak ve ancak  $1 \leq l < n$  olmak üzere ya  $c_l = 0$  ya da  $c_{l+1} = 0$  dır. Daldırılmış türevlenebilir bir eğri için  $R_l = c_l$  fonksiyonu asla sıfır olamaz. Bu a) ve b) şıklarını ispatlar.

Önerme 3.4.5'in ispatında  $(R_n^2)' = 2 c_n (c'_n + c_{n-1} \kappa_n) = 0$  olarak elde ettik. Bu da c) şikkını ispatlar.  $\square$

**Sonuç 3.4.20.** Eğer bir noktada  $l$ -inci fokal eğrilik olan  $c_l$  sıfır olursa bu taktirde söz konusu noktada  $R_l$  ve  $R_{l+1}$  sabittir (Vargas 2001).

**Tanım 3.4.21.**  $n > 2$   $\gamma : R \rightarrow E^n$  eğrisinin tanjant vektörü bir  $v \in E^n$  vektörü ile sabit bir açı yapıyor ise  $\gamma$  eğrisine genel helis adı verilir (Fuster ve ark. 1999).

**Önerme 3.4.22.**  $\gamma : R \rightarrow E^n$  eğrisi genel helistir ancak ve ancak  $\det(\gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(n+1)}(t)) = 0$  dır. Burada  $\gamma^{(i)}$  vektörü  $\gamma$  nın  $t$  yay-parametresine göre  $i$ -inci türevi adı verilir (Fuster ve ark. 1999).

**Açıklama 3.4.23.** Bu Önerme her ne kadar Romero-Fuster M.C., Sanabria-Codeçal E. tarafından orijinal sonuç olarak (Fuster ve ark. 1999). çalışmasında verilmiş ise de aslında aynı Önermenin ispatı (Hacısalihoglu 1980) da verilmiştir.

**Tanım 3.4.24.**  $\gamma$  eğrisinin oskütatör hiperdüzlemi ile  $t_0$  da en azından  $m$ -inci mertebeden değmeye sahip ise  $t_0$  noktasına  $\gamma$  nın *düzleştirme noktası* denir (Fuster ve ark. 1999).

**Önerme 3.4.25.**  $t_0 \in R$  noktası  $\gamma \subset E^n$  nın düzleştirme noktasıdır ancak ve ancak  $\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \dots, \gamma^{(n)}(t_0)) = 0$  dır (Fuster ve ark. 1999).

**Tanım 3.4.26.** Bir eğri  $t_0 \in R$  noktasında oskütatör küresi ile en azından  $(n+1)$ -inci mertebeden değmeye sahip ise  $t_0$  noktasına *konformal düzleştirme* ya da *köşe noktası* adı verilir (Fuster ve ark. 1999).

**Tanım 3.4.27.**  $\gamma : R \rightarrow E^n$  eğrisinin teğetler göstergesi (tanjant indikatrisi)

$$\gamma_T : R \rightarrow S^{n-1}$$

ile tanımlanır.  $\gamma_T$  nin düzleştirme noktaları  $\gamma$  nın burulma (twisting) noktalarıdır. Eğer  $\gamma$  eğrisi yay-uzunluğu ile verilen bir eğri ise  $t_0$  noktası  $\gamma$  nın burulma noktasıdır ancak ve ancak

$$\det(\gamma''(t_0), \gamma'''(t_0), \dots, \gamma^{(n+1)}(t_0)) = 0$$

dır (Fuster ve ark. 1999).

Önerme 3.4.25 ve Tanım 3.4.27 gereği aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 3.4.28.** Bir  $\gamma$  eğrisi burulma noktasında bir genel helis ile yüksek mertebeden bir değmeye sahiptir (Fuster ve ark. 1999).



**Sonuç 3.4.29.**  $E^n$  de yay-parametresi ile verilen bir  $\gamma(t)$  eğrisi için  $\gamma(t_0) = p$  noktasında  $\gamma_T(p)$  biçiminde bir genel helis vardır öyle ki bu eğri  $\gamma$  ile en azından  $m$ -inci mertebeden değmeye sahiptir.

Eğer  $p$  noktası  $\gamma_T$  nin bir düzleştirme noktası ise bu taktirde  $\gamma_T$  genel helis eğrisi  $\gamma$  ile en azından  $(n+1)$ -inci mertebeden değmeye sahiptir (Fuster ve ark. 1999).

Düzleştirme noktaları bulunmayan cenerik bir  $\gamma : s \rightarrow \gamma(s) \in E^{n+1}$  eğrisinin  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  Frenet eğrilikleri ve  $\{T, N_1, \dots, N_n\}$  Frenet çatısı olsun.  $\gamma(s)$  noktasının köşe noktası olmasın.  $(c'_n + c_{n-1}\kappa_n)(s)$  nin işareti  $\varepsilon(s)$  ve  $1 \leq k \leq n$  olmak üzere  $(-1)^k \varepsilon(s)\kappa_n(s)$  nin işareti  $\delta(s)$  olsun.  $\gamma$  eğrisinin köşe olmayan  $\gamma(s)$  noktasında aşağıdaki ifadeler geçerlidir;

**a)**  $C_\gamma$  nın  $C_\gamma(s)$  noktasındaki  $\{\overline{T}, \overline{N}_1, \dots, \overline{N}_n\}$  Frenet çatısı iyi tanımlıdır ve

$$\overline{T} = \frac{(c'_n + c_{n-1}\kappa_n)}{|c'_n + c_{n-1}\kappa_n|} N_n = \varepsilon N_n$$

$$\overline{N}_k = \delta_k N_{n-k}; \quad 1 \leq k \leq n-1$$

$$\overline{N}_n = \pm T$$

dir.

**b)**  $C_\gamma$  nın Öklid eğrilikleri  $K_1, \dots, K_n$  olmak üzere

$$\frac{K_1}{|K_n|} = \frac{K_2}{\kappa_{n-1}} = \dots = \frac{|K_n|}{\kappa_1} = \frac{1}{|c'_n + c_{n-1}\kappa_n|} \quad (3.4.25)$$

burada  $K_n$  nin işareti,  $\pm T$  de seçilen işaretin  $\delta_n$  katıdır yani ya  $K_n = +\delta_n$  ya da

$K_n = -\delta_n$  dir. Böylece  $C_\gamma$  nın  $C_\gamma(s)$  noktasındaki Frenet matrisi

$$\frac{1}{|c'_n + c_{n-1}k_n|} \begin{bmatrix} 0 & |k_n| & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -|k_n| & 0 & k_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{n-1} & 0 & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ & & & & 0 & k_2 & 0 \\ & & & & -k_2 & 0 & \mp \delta_n k_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm \delta_n k_1 & 0 & \end{bmatrix}$$

dir (Vargas 2005).

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir;

**Teorem 3.4.30.**  $\gamma: s \rightarrow \gamma(s) \in E^{n+1}$  düzleştirme noktaları olmayan cenerik bir eğri olsun.  $\gamma$  eğrisi n-inci mertebeden genel helis ise  $C_\gamma$  eğrisi de aynı mertebeden genel bir helistir.

**İspat.**  $\gamma$  ve  $C_\gamma$  eğrilikleri sırasıyla  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  ve  $K_1, \dots, K_n$  olmak üzere (3.4.25) denklemini yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{K_2} &= \frac{|\kappa_n|}{\kappa_{n-1}} = \frac{1}{|c'_n + c_{n-1}\kappa_n|} \\ \frac{K_3}{K_4} &= \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_{n-2}} \\ &\vdots \\ \frac{K_{n-1}}{|K_n|} &= \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca  $\frac{\kappa_{2i}}{\kappa_{2i-1}} = sbt \quad 1 \leq i \leq \frac{n}{2}$  ise  $\frac{K_{2i-1}}{K_{2i}} = sbt$  dir. ■

## 4. FOKAL YÜZEYLER

### 4.0. Giriş

Bu bölümde  $E^3$  deki yüzeylerin paralel yüzeyleri, fokal yüzeyleri ve genelleştirilmiş fokal yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir. Ayrıca bu yüzeylerin Maple programı yardımıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış ve bazı örnekler verilmiştir.

**Tanım 4.0.1.**  $U$ ,  $E^2$  de bir açık alt küme olmak üzere  $X : U \rightarrow E^3$

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)), \quad (4.0.1)$$

biçiminde tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşümüne  $E^3$  de bir yama denir. (Gray 1993).

**Sonuç 4.0.2.**  $X : U \rightarrow E^3$  regüler yaması verilsin Bu taktirde aşağıdakiler birbirine denktir;

i)  $X_u(u_0, v_0)$  ve  $X_v(u_0, v_0)$  lineer bağımsızdır.

ii)  $\det \begin{pmatrix} \langle X_u, X_u \rangle & \langle X_u, X_v \rangle \\ \langle X_v, X_u \rangle & \langle X_v, X_v \rangle \end{pmatrix}$  her  $(u_0, v_0)$  noktasında sıfırdan farklıdır.

iii) her  $(u_0, v_0)$  noktasında  $J(x)$  Jakobien matrisinin rankı 2 ye eşittir.

(Gray 1993). Burada  $\langle, \rangle$  ile  $E^3$  iç çarpım anlaşılacaktır.

**Tanım 4.0.3.**  $\forall (u, v) \in U$  için  $J(x)(u, v)$  Jakobien matrisinin rankı 2 ise  $X : U \rightarrow E^3$  yamasına regüler yama denir.  $X(u_1, v_1) = X(u_2, v_2)$   $u_1 = u_2$   $v_1 = v_2$  ise  $X$  yaması injektiftir (Gray 1993).

**Tanım 4.0.4.** Bir  $X : U \rightarrow E^3$  injektif yaması için  $X_u \times X_v$  sıfırdan farklı olacak biçimde  $(u, v) \in U$  noktalarında birim normal vektör alanı veya yüzeyin normali;

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v) \quad (4.0.2)$$

eşitliği ile tanımlanır (Gray 1993). Burada  $\times$  vektörel çarpımı belirtmektedir.

$X(u, v)$  regüler yaması ile verilen  $S$  yüzeyinin I.temel formun katsayıları

$$\left. \begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.0.3)$$

ve II. temel formun katsayıları

$$e = \langle X_{uu}, \bar{N}(u, v) \rangle, f = \langle X_{uv}, \bar{N}(u, v) \rangle, g = \langle X_{vv}, \bar{N}(u, v) \rangle \quad (4.0.4)$$

dir.

**Teorem 4.0.5.**  $X : U \rightarrow E^3$  regüler bir yama olsun.  $X$  in Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (4.0.5)$$

ve

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad (4.0.6)$$

dır (Gray 1993).

**Sonuç 4.0.6.**  $X : U \rightarrow E^3$  regüler bir yama olsun.  $X$  in asli eğrilikleri  $k_1$  ve  $k_2$  olmak üzere

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{ve} \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (4.0.7)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1980 ve Gray 1993).

**Tanım 4.0.7.**  $U \subset E^3$  bir açık ve  $h: U \rightarrow R$  diferensiyallenebilir bir fonksiyon olmak üzere  $X : U \rightarrow E^3$  Monge yaması

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad (4.0.8)$$

parametrizasyonu ile verilir (Gray 1993).

**Teorem 4.0.8.**  $X(u, v) = (u, v, h(u, v))$  Monge yaması için Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - (h_{uv})^2}{(1 + (h_u)^2 + (h_v)^2)^2}, \quad (4.0.9)$$

$$H = \frac{(1 + (h_v)^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + (h_u)^2)h_{vv}}{(1 + (h_u)^2 + (h_v)^2)^{3/2}}, \quad (4.0.10)$$

#### 4.1 Paralel Yüzeyler

Bu kısımda  $E^3$  ün paralel yüzeyleri ele alındı. Bir  $S$  yüzeyi ile onun  $S^*$  paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili bağıntılar elde edilmiştir.

Paralel altmanifoldlar ile ilgili daha detaylı bilgi için (Görgülü ve ark. 1989) ve paralel hiperyüzeyler için ise bakınız (Görgülü 1989 ve Görgülü 1992).

**Tanım 4.1.1.**  $S \subset E^3$  bir regüler yüzey olsun.  $M$  yüzeyine  $\varepsilon$  uzaklıkta paralel olan yüzey

$$S^* = \left\{ q \in E^3 \mid d(q, M) = \varepsilon \right\}$$

biçiminde tanımlanır (Gray 1993).

**Tanım 4.1.2.**  $S$  regüler yüzeyi (4.0.1) yaması ile verilsin.  $S$  nin birim normal vektörü  $\vec{N}(u, v)$  olmak üzere  $S$  nin paralel yüzeyi  $S^*$

$$X^*(u, v) = \vec{X}(u, v) + \varepsilon \vec{N}(u, v) \quad (4.1.8)$$

şeklinde bir parametrelendirmeye sahiptir, (Görgülü 1989, Gray 1993).

**Teorem 4.1.3.**  $S \subset E^3$  regüler yüzeyinin paralel yüzeyi  $S^*$  olsun.  $S$  nin şekil operatörü  $A$  ve  $k_1, k_2$  ve  $k_1^*, k_2^*$  sırasıyla  $S$  ve  $S^*$  nin asli eğrilikleri olmak üzere  $\det(I - \varepsilon A) > 0$  ise

$$k_i^* = \frac{k_i}{1 - \varepsilon k_i} \quad i = 1, 2 \quad (4.1.9)$$

dir (Gray 1993).

**Teorem 4.1.4.**  $S^*$  yüzeyi  $S$  nin (4.1.8) eşitliği ile tanımlanan paralel yüzeyi olsun. Eğer  $K, H$  ve  $K^*, H^*$  sırasıyla  $S$  ve  $S^*$  yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ise

$$K^* = \frac{\kappa}{1 - \frac{\varepsilon}{2}H + \varepsilon^2\kappa} \quad (4.1.10)$$

$$H^* = \frac{H - \varepsilon\kappa}{1 - \frac{\varepsilon}{2}H + \varepsilon^2\kappa} \quad (4.1.11)$$

dır (Carmo 1983), (Hacısalıhoğlu 1983) ve (Görgülü, 1989).

**Örnek 4.1.5.** (Pseudo-Küre ve paralel yüzeyin eğrilikleri)

$$X(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u)); \quad (u, v) \in I \times (0, 2\pi) \quad I \text{ üzerinde } r(u) > 0$$

yaması ile verilen döneel yüzey denkleminde

$$r(u) = e^{-u}, \quad h(u) = \int \sqrt{1 - e^{-2u}} du, \quad (u > 0)$$

alındığında pseudo küre elde edilir. Böylece pseudo küre  $S$  ve  $S^*$  paralel yüzeyinin eğrilikleri sırasıyla

$$K = -1, \quad H = \frac{1}{2e^{-u} \sqrt{1 - e^{-2u}}} (1 - 2e^{-2u})$$

ve

$$K^* = \frac{1}{r^2 - 2\varepsilon H - \varepsilon^2}, \quad H^* = \frac{H + \varepsilon}{r^2 - 2\varepsilon H - \varepsilon^2}$$

dir (Malkowsky ve ark. 2001).

Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 4.1.6.**  $S^*$  yüzeyi  $S$  nin paralel yüzeyi olsun.  $K, H$  ve  $K^*, H^*$  sırasıyla  $S$  ve  $S^*$  yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri olmak üzere

$$K^*(H - \varepsilon K) - KH^* = 0 \quad (4.1.12)$$

dir.

**İspat.** (4.1.10) ve (4.1.11) bağıntıları yardımıyla (4.1.12) eşitliği elde edilir.  $\square$

**Sonuç 4.1.7.**  $S^*$  yüzeyi  $S$  nin paralel yüzeyi olsun. Eğer  $S$  yüzeyi flat olmayan bir minimal yüzey ise  $S^*$  yüzeyi nin eğrilikleri oranı sabittir, yani;

$$\varepsilon = -\frac{H^*}{K^*} \quad (4.1.13)$$

dır.

**İspat.** Eğer  $S$  minimal ise  $H = 0$  dır . Böylece (4.1.12) denklemi yardımıyla  $\varepsilon KK^* + KH^* = 0$  elde edilir.  $S$  yüzeyi flat olmadığından

$$\varepsilon K^* + H^* = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Örnek 4.1.8.** (Dönel yüzeyin paralel yüzeyi)

$$X(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, h(u)); \quad (u, v) \in I \times (0, 2\pi) \quad I \text{ üzerinde } r(u) > 0 \quad (4.1.14)$$

yaması ile verilen bir dönel yüzeyin  $S$  nin paralel yüzeyi  $S^*$

$$Y(u, v) = (\rho(u) \cos v, \rho(u) \sin v, \psi(u)) \quad (4.1.15)$$

parametrelendirmeye sahiptir. Burada

$$\rho(u) = r(u) - \frac{\varepsilon h'(u)}{\phi(u)}, \quad (4.1.16)$$

ve

$$\psi(u) = h(u) - \frac{\varepsilon r'(u)}{\phi(u)}, \quad (4.1.17)$$

olup

$$\phi(u) = \sqrt{(r'(u))^2 + (h'(u))^2} \quad \text{ve} \quad r(u)\phi(u) > \varepsilon h'(u)$$

dır (Malkowsky ve ark. 2001).

**Örnek 4.1.9.** (Ketanoid ve paralel yüzeyi)

$$X(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u); \quad \forall u, v \in R \quad (4.1.18)$$

yaması ile verilen Ketanoid yüzeyi  $S$  ise paralel yüzeyi  $S^*$

$$Y(u, v) = (\rho(u) \cos v, \rho(u) \sin v, \psi(u)) \quad (4.1.19)$$

parametrelendirilmesine sahiptir. Burada

$$\rho(u) = \cosh u - \frac{\varepsilon}{\cosh u}, \quad (4.1.20)$$

ve

$$\psi(u) = u + \varepsilon \tanh u \quad (4.1.21)$$

dır (Malkowsky ve ark. 2001).

Ayrıca  $\forall u \in R$  ve  $\varepsilon < 1$  için  $\cosh^2 u > \varepsilon$  dır. Bununla beraber  $S$  ve  $S^*$  ın Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = -\frac{1}{\cosh^2 u}, \quad H = 0 \quad (4.1.22)$$

ve

$$K^* = -\frac{1}{\cosh^4 u - \varepsilon^2}, \quad H^* = \frac{\varepsilon}{\cosh^4 u - \varepsilon^2} \quad (4.1.23)$$

dır. Böylece son eşitliklerden (4.1.13) denkleminin sağlandığı görülür.

**Örnek 4.1.10.** ( Helikoid ve paralel yüzeyi)

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv); \quad \forall u, v \in R$$

yaması ile verilen helikoid yüzeyi  $S$  nin paralel yüzeyi

$$Y(u, v) = X(u, v) + \varepsilon \vec{N}(u, v)$$

olup burada

$$\vec{N}(u, v) = \frac{1}{1+u^2} (\sin v, \cos v, u)$$

dir. Böylece  $S$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırası ile

$$K = -\frac{b^2}{(b^2 + u^2)^2}, \quad H = 0 \quad (4.1.24)$$

dir. (4.1.10) ve (4.1.11) eşitlikleri yardımıyla

$$K^* = \frac{-b^2}{(b^2 + u^2)^2 - \varepsilon^2 b^2}, \quad H^* = \frac{\varepsilon b^2}{(b^2 + u^2)^2 - \varepsilon^2 b^2} \quad (4.1.25)$$

dir. Böylece son eşitliklerden (4.1.13) denkleminin sağlandığı görülür.



**Sonuç 4.1.11.**  $S^*$  yüzeyi  $S$  nin paralel yüzeyi olsun. Eğer  $S^*$  minimal ise  $S^*$  düzdür ya da  $S$  yüzeyi eğrilikleri oranı sabit olan bir yüzeydir.

**İspat.**  $S^*$  paralel yüzeyi minimal ise  $K^*(H - \varepsilon K) = 0$  elde edilir. Böylece ya  $K^* = 0$  yada  $\varepsilon = \frac{H}{K}$  dir.  $\square$

**Sonuç 4.1.12.**  $S^*$  yüzeyi  $S$  nin paralel yüzeyi olsun. Eğer  $S^*$  yüzeyi düz ise aşağıdaki durumlardan biri söz konusudur;

- i)  $S$  yüzeyi düzdür, veya
- ii)  $S^*$  paralel yüzeyi minimaldir.

**İspat.**  $S^*$  yüzeyi minimal ise (4.1.12) denkleminde  $KH^* = 0$  dir. Buradan ya  $K=0$  dir yada  $H^* = 0$  dir.  $\square$

**Önerme 4.1.13.**

$$X(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u); \quad \forall u, v \in R$$

regüler yaması ile verilen küre yüzeyi  $S$  ile paralel yüzeyi  $S^*$  nin Gauss eğrilikleri oranı

$$\frac{H^*}{K^*} = r - \varepsilon \quad (4.1.27)$$

dır.

**İspat.** Küre yüzeyinin normal vektörü

$$\vec{N}(u, v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) \quad (4.1.28)$$

dır. Böylece  $S$  ve  $S^*$  in Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{1}{r^2}, \quad H = \frac{1}{r} \quad (4.1.29)$$

ve

$$K^* = \frac{1}{r^2 - 2\varepsilon r + \varepsilon^2}, \quad H^* = \frac{r + \varepsilon}{r^2 - 2\varepsilon r + \varepsilon^2} \quad (4.1.30)$$

dir. Son eşitliklerden (4.1.27) elde edilir.  $\square$

## 4.2 Fokal Yüzeyler

Fokal yüzeyler doğruların kongrüasyonları olarak bilinen yüzeylerdir. Doğru kongrüasyonları ilk defa Hagen ve Pottman tarafından 1991 yılında görüntüleme alanında tanımlanmıştır (Hagen ve ark. 1991).

$E^3$  de bir yüzeyi  $X(u, v)$  olmak üzere vektör değerli bir fonksiyon olarak tanımlayalım. Ayrıca  $N(u, v)$  vektörü de yüzey üzerinde birim normal vektör olsun. bununla birlikte  $E(u, v)$  birim vektörler kümesi olmak üzere doğru kongrüansı

$$C(u, v, z) = X(u, v) + zE(u, v) \quad (4.2.1)$$

ile tanımlanır. Her bir  $(u, v)$  için (4.2.1) denklemi kongrüansın bir doğrusunu belirtir ve üreteç olarak adlandırılır. Burada  $z$  parametresi işaretli uzaklıktır. Ayrıca  $C$  nin üreteç üzerinde iki özel (reel, sanal ya da birim) nokta vardır. Bu noktalar fokal noktalar olarak adlandırılır. Bu noktalar üreteçli oskülatör noktalarıdır. Bu nedenle fokal yüzey fokal noktaların bir geometrik yeri olarak tanımlanır. Genel olarak iki adet fokal yüzey vardır. Eğer  $E(u, v) = N(u, v)$  ise  $C = C_N$  birim normal kongrüansıdır. Böylece  $C_N$  fokal yüzeyinin parametrik gösterimi;

$$Y_i(u, v) = X(u, v) + k_i^{-1}(u, v)N(u, v), \quad i = 1, 2 \quad (4.2.2)$$

dir. Burada  $k_1$  ve  $k_2$  fonksiyonları  $X(u, v)$  yüzeyinin asli eğrilik fonksiyonlarıdır (Hagen ve ark. 1992).

$X(u, v)$  yüzeyi üzerindeki bir  $X(u_0, v_0)$  noktasındaki normal kesit eğrisinin eğrilik merkezi bu noktadaki normal vektörünün belli bir katına karşılık gelir. Bu parçanın ekstrem değerleri iki asli doğrultunun eğriliklerinin merkezidir. Bu iki nokta fokal noktalara karşılık gelir. Bu nedenle doğru kongrüansı iki yüzeye değen doğruların kümesi olarak düşünülür. Bu iki yüzey ise doğru kongrüansının fokal yüzeyidir. Böylece normal kongrüansının fokal noktaları iki asli yönün eğrilik merkezleridir (Hoschek 1971).

Küre yüzeyinin fokal yüzeyleri bir noktada dejenere olur. Dupin yüzeylerinin fokal yüzeyleri eğrilere dejenere olan yüzeylerdir (Hagen ve ark. 1992).

**Önerme 4.2.1.** Örnek 4.1.8 de verilen döneel yüzeyinin fokal yüzeyleri;

$$Y_i(u, v) = (\rho_i(u) \cos v, \rho_i(u) \sin v, \psi_i(u)) \quad (4.2.3)$$

biçimindedir. Burada

$$\rho_i(u) = r(u) - \frac{h'(u)}{\phi(u)k_i(u)}, \quad (4.2.4)$$

$$\psi_i(u) = h(u) - \frac{r'(u)}{\phi(u)k_i(u)}, \quad (4.2.5)$$

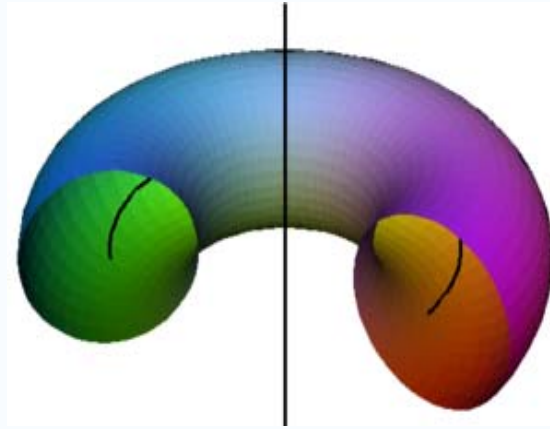
olup

$$\phi(u) = \sqrt{(r'(u))^2 + (h'(u))^2} \quad (4.2.6)$$

dır (Malkowsky ve ark. 2001).

**Örnek 4.2.2.** (Tor yüzeyi)

Tor yüzeyinin Fokal yüzeyleri doğru ve çembere dejenere olur. Şekil 4.2.1.



Şekil 4.2.1. Tor yüzeyinin fokal yüzeyleri

**Örnek 4.2.3.** Örnek 4.1.9 da verilen Ketanoid yüzeyi

$$r(u) = \cosh u, \quad h(u) = u \quad (4.2.7)$$

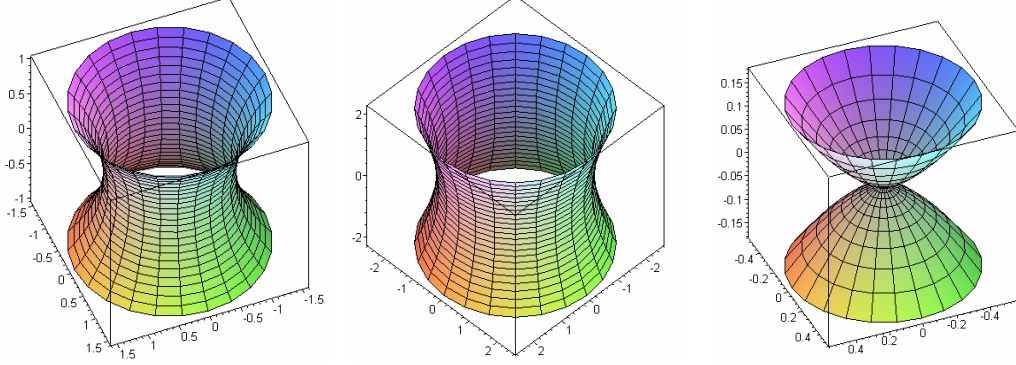
fonksiyonları ile tanımlı bir döneel yüzeydir. Böylece (4.2.3) - (4.2.6) yardımıyla

$$Y_i(u, v) = ((\cosh u \pm 1) \cos v, (\cosh u \pm 1) \sin v, u \pm \sinh u)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki Maple komutları yardımıyla Ketanoid yüzeyi ve Fokal yüzeylerinin grafiğini çizdirebiliriz (Bkz. Şekil 4.2.2.).

`plot3d([cosh(x)*cos(y),cosh(x)*sin(y),x],x=-1..1,y=-Pi..Pi);`

```
plot3d([(cosh(x)+1)*cos(y),(cosh(x)+1)*sin(y),x+sinh(x)],x=-1..1,y=-Pi..Pi);
plot3d([(cosh(x)-1)*cos(y),(cosh(x)-1)*sin(y),x-sinh(x)],x=-1..1,y=-Pi..Pi);
```



Şekil 4.2.2. Ketenoid ve Fokal yüzeyleri

**Örnek 4.2.4.** (Lokal yüzey modeli)

$$X(u, v) = (u, v, \varphi(u, v)); \quad \varphi(u, v) = \frac{1}{2}(au^2 + 2buv + cv^2); \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (4.2.8)$$

Monge yaması ile verilen yüzey modeli için

$$k_i = \frac{1}{2} \left( a + c \mp \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right) \quad 1 \leq i \leq 2$$

dir. Bu yüzeyin fokal yüzeyleri;

$$\begin{aligned} a + c &\neq \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \\ a + c &\neq (a-c)^2 + 4b^2 \\ a^2 + 2ac + c^2 &\neq a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 \\ 4ac &\neq 4b^2 \\ ac &\neq b^2 \end{aligned}$$

için tanımlıdır. Böylece Monge yamasının fokal yüzeyleri;

$$Y_1(u, v) = X(u, v) + \left( \frac{a^2 + c^2 + 2b^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(-(au + 2bv), -(cv + 2bu), 1)}{\sqrt{(au + 2bv)^2 + (cv + 2bu)^2 + 1}}$$

$$Y_2(u, v) = X(u, v) + \frac{2}{\pi} \arctan \left( -\frac{a+c}{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}} \right) \frac{(-(au + 2bv), -(cv + 2bu), 1)}{\sqrt{(au + 2bv)^2 + (cv + 2bu)^2 + 1}}$$

dir.

**Tanım 4.2.5.**  $E^n$  de  $X : U \subset R^2 \rightarrow E^n (u, v) \rightarrow (u, v, h_3(u, v), \dots, h_n(u, v))$

$$h_i(u, v) = f_i(u) + g_i(v) \quad 3 \leq i \leq n \quad (4.2.9)$$

yaması ile verilen yüzey öteleme ( translation) yüzeyi olarak adlandırılır (Dillen ve ark. 1990).

Tanımdan da anlaşılacağı üzere öteleme yüzeyleri iki eğrinin toplam yüzeyleridir. Yani

$$\alpha(u) \rightarrow (u, 0, f_3(u), f_4(u), \dots, f_n(u))$$

$$\beta(v) \rightarrow (0, v, g_3(v), g_4(v), \dots, g_n(v))$$

için

$$X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) \quad (4.2.10)$$

dir (Dillen ve ark. 1990).

**Örnek 4.2.6.** (Paraboloid)

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

yaması ile verilen paraboloid yüzeyi

$$\alpha(u) = (u, 0, u^2)$$

ve

$$\beta(v) = (0, v, v^2)$$

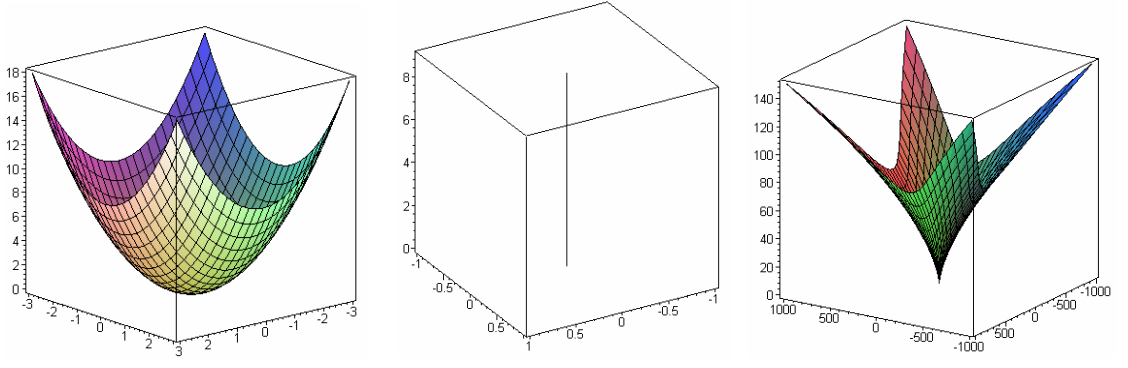
eğrilerinin toplam yüzeyidir. Bu yüzeyinin fokal yüzeylerinin hesabı için EK 2 deki Maple programı kullanıldığında bu yüzeyler için

$$Y_1(u, v) = (0, 0, \frac{1}{2} + u^2 + v^2),$$

ve

$$Y_2(u, v) = (-4u(u^2 + v^2), -4v(u^2 + v^2), \frac{1}{2} + 3u^2 + 3v^2)$$

yamaları elde edilir (Bkz. Şekil 4.2.3.).



Şekil 4.2.3. Paraboloid ve fokal yüzeyleri

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 4.2.7**  $E^3$ 'de bir öteleme yüzeyi  $M$

$$X(u, v) = (u, v, f(u) + g(v)) \quad (4.2.11)$$

regüler yaması verilsin. Bu taktirde  $M$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{\frac{d^2 f(u)}{du^2} \frac{d^2 g(v)}{dv^2}}{\left(1 + \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg(v)}{dv}\right)^2\right)^2} \quad (4.2.12)$$

ve

$$H = \frac{\left(1 + \left(\frac{dg(v)}{dv}\right)^2\right) \frac{d^2 f(u)}{du^2} + \left(1 + \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2\right) \frac{d^2 g(v)}{dv^2}}{\left(1 + \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2 + \left(\frac{dg(v)}{dv}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (4.2.13)$$

dır.

**İspat.** (4.0.9) ve (4.0.10) denklemlerimde  $h(u, v) = f(u) + g(v)$  alındığında istenilen sonuç elde edilir.  $\square$

H. Liu 1999 da yaptığı çalışmada aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

**Teorem 4.2.8.**  $M$ , 3-boyutlu Öklid uzayda sabit Gauss eğrilikli bir öteleme yüzeyi olsun. Bu taktirde  $K = 0$  ise  $M$  yüzeyi silindir yüzeyinin bir parçasıdır.

Böylece aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

**Sonuç 4.2.9.**  $M$ , 3-boyutlu Öklid uzayda düz bir öteleme yüzeyi olsun. Bu durumda  $M$  yüzeyi ya  $E^2 \subset E^3$  düzleminin bir parçasıdır ya da düzlemsel  $\alpha(u)$  (veya  $\alpha(v)$ ) eğrisi üzerine kurulan silindirin bir parçasıdır.

**İspat.** Eğer  $M$  düz bir yüzey ise bu durumda (4.2.12) denklemi yardımıyla

$$\frac{d^2 f(u)}{du^2} \frac{d^2 g(v)}{dv^2} = 0,$$

dır. Böylece iki durum söz konusudur;

Durum I:  $\frac{d^2 f(u)}{du^2} = 0$  ve  $\frac{d^2 g(v)}{dv^2} = 0$  dır.

Durum II:  $\frac{d^2 f(u)}{du^2} = 0$  veya  $\frac{d^2 g(v)}{dv^2} = 0$  dır.

Birinci durum için  $\alpha(u)$  ve  $\alpha(v)$  düz doğrulardır ve sonuçta oluşan öteleme yüzeyi  $E^2 \subset E^3$  düzleminin bir parçası olur. İkinci durum için  $\alpha(u)$  veya  $\alpha(v)$  eğrilerinden biri düz bir doğru iken diğeri bir düzlem eğrisidir ve meydana gelen öteleme yüzeyi bu eğri üzerine kurulan silindirin bir parçasıdır.  $\square$

**Sonuç 4.2.10.**  $M$  yüzeyi (4.2.11) yaması ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun.  $M$  yüzeyi minimal ise

$$f(u) = \frac{1}{a} \log(\cos(au)),$$

$$g(v) = \frac{1}{a} \log(\cos(av)),$$

dır (Scherk 1935).

Böylece minimal öteleme yüzeyleri aynı zamanda Scherk yüzeyleri olarak da adlandırılır.

H.Liu 1999 yılında yaptığı çalışmada aşağıdaki sonucu ispatlamıştır.

**Teorem 4.2.11.**  $M$ , 3-boyutlu Öklid uzayda sabit ortalama eğrilikli ( $H \neq 0$ ) bir öteleme yüzeyi olsun. Bu taktirde  $M$  yüzeyi ya  $E^3$  ün bir parçasıdır yada

$$f(u) + g(v) = \frac{-\sqrt{1+a^2}}{2H} \sqrt{1-4H^2a^2} - av, \quad a \in R$$

ile verilen yüzeydir. Yüksek boyutlu hal için (Verstraelen 1994) e bakınız.

### 4.3 Genelleştirilmiş Fokal Yüzeyler

Genelleştirilmiş fokal yüzeyler Hagen and Hahmann (1992) tarafından tanımlanmıştır.

Verilen bir  $E(u, v)$  birim vektörü için

$$C(u, v) = X(u, v) + D(u, v)E(u, v) \quad (4.3.1)$$

formunda bir doğru kongrüansı tanımlanır. Burada  $D(u, v)$ ;  $X(u, v)$  ile  $E(u, v)$  arasındaki uzaklıktır. Eğer  $E(u, v) = N(u, v)$  ise bu taktirde  $C$  bir normal kongrüanstır. Eğer  $D(u, v) = k_1^{-1}(u, v)$  veya  $D(u, v) = k_2^{-1}(u, v)$  alınırsa fokal yüzeyi elde edilir ve bu yüzey  $C_F(u, v)$  parametrelendirilmesiyle ile verilen özel bir normal kongrüanstır. Böylece

$$C_F(u, v) = X(u, v) + k_i^{-1}(u, v)N(u, v), \quad i = 1, 2 \quad (4.3.2)$$

dir.

Fokal yüzeylerin genelleştirilmesi

$$Y(u, v) = X(u, v) + f(k_1, k_2)(u, v)N(u, v) \quad (4.3.3)$$

parametrelendirilmesiyle ile tanımlanır. Burada  $N$ ,  $X$  yamasının birim normal vektörüdür ve  $F$  ise  $k_1, k_2$  asli eğrilik fonksiyonlarına bağlı reel değerli bir fonksiyondur (Hahmann 1999).

(4.3.3) parametrelendirilmesi ile tanımlanan  $y$  yamasının ofset fonksiyonu için aşağıdaki durumlar incelendi;



- i)  $f = k_1 k_2$  Gauss eğrilik fonksiyonu,
- ii)  $f = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  ortalama eğrilik fonksiyonu,
- iii)  $f = k_1^2 + k_2^2$  enerji fonksiyonu,
- iv)  $f = |k_1| + |k_2|$  tamdeğer eğrilik fonksiyonu,
- v)  $f = k_i$  asli eğrilik fonksiyonu,
- vi)  $f = \frac{1}{k_i}$  fokal noktalar,
- vii)  $f = \text{sabit}$ , ofset yüzeyler.

**Açıklama 4.3.1.** (4.0.7) eşitliklerinin yardımıyla ofset fonksiyonlarını aşağıdaki gibi seçebiliriz;

- a)  $f = K$ , Gauss eğrilik,
- b)  $f = H$ , ortalama eğrilik,
- c)  $f = K - H$ , eğrilikler farkı,
- d)  $f = H + \sqrt{H^2 - K}$ , ya da
- e)  $f = H - \sqrt{H^2 - K}$  asli eğrilik,
- f)  $f = 4H^2 - 2K$ , enerji fonksiyonali,
- g)  $f = \left| H + \sqrt{H^2 - K} \right| + \left| H - \sqrt{H^2 - K} \right|$ , tam değer eğrilik,
- h)  $f = \text{sabit}$ , ofset yüzeyleri.

**Tanım 4.3.2**  $X(u, v)$  regüler bir yüzey olmak üzere

$$Y(u, v) = x(u, v) + f(k_1, k_2)N(u, v) \quad (4.3.4)$$

biçimi tanımlanan yüzeye  $X(u, v)$  nin *genelleştirilmiş fokal yüzeyi* denir. Burada  $f(k_1, k_2)$  skalar fonksiyonu  $k_1$  ve  $k_2$  asli eğriliklerine bağlıdır (Hagen ve ark. 1992).

$$f(k_1, k_2) = \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2}, \quad (4.3.4)^*$$

olsun. Bu durumda  $X(u, v)$  nin genelleştirilmiş fokal yüzeyi

$$Y(u, v) = X(u, v) + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} N(u, v) ; k_1 \neq k_2 \quad (4.3.5)$$

parametrelendirilmesine sahiptir (Hagen ve ark. 1992).

**Önerme 4.3.3.**  $X(u, v)$  yüzeyi minimal olmayan bir regüler yüzey olsun.  $X(u, v)$  in Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla  $K$  ve  $H \neq 0$  olmak üzere  $X(u, v)$  nin (4.3.4)\* ofset fonksiyonu ile verilen genelleştirilmiş fokal yüzeyi

$$Y(u, v) = X(u, v) + \frac{2H^2 - K}{H} N(u, v) \quad (4.3.6)$$

biçiminde bir parametrelendirilmeye sahiptir.

**İspat.**  $K = k_1 k_2$  ve  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  yardımıyla (4.3.4)\* denklemi kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.  $\square$

**Örnek 4.3.4.**  $X(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u); \quad \forall u, v \in R$

yaması ile verilen küre yüzeyini göz önüne alalım. Kürenin normali (4.1.28) denkleminde

$$\vec{N}(u, v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

dir. Gauss ve ortalama eğrilikleri ise (4.1.29) eşitliğinden

$$K = \frac{1}{r^2}, \quad H = \frac{1}{r}$$

elde edilir. Bu durumda kürenin genelleştirilmiş fokal yüzeyi;

$$Y(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u) + \frac{1}{r} (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

dir.

**Önerme 4.3.5.** Eğer  $X(u, v)$  regüler yüzeyi minimal olmayan düz bir yüzey ise  $X(u, v)$  nin (4.3.4)\* ofset fonksiyonu ile verilen genelleştirilmiş fokal yüzeyi

$$Y(u, v) = X(u, v) + 2H N(u, v) \quad (4.3.7)$$

parametrelendirmeye sahiptir.

**İspat.**  $X$  yüzeyi flat ise  $K = 0$  dır. Böylece (4.3.6) denkleminde istenilen sonuç elde edilir.  $\square$

**Örnek 4.3.6.** (Silindir yüzeyinin genelleştirilmiş fokal yüzeyi)

Silindir yüzeyi

$$X(u, v) = (b \cos v, b \sin v, u) ; b \in R \quad (4.3.8)$$

yaması ile verilsin. Bu yama ile verilen silindir yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = 0, \quad H = \frac{1}{2b}$$

dır. Birim normal vektörü ise;

$$N(u, v) = (-\cos v, -\sin v, 0)$$

dır. Böylece (4.3.7) denkleminde

$$Y(u, v) = (b \cos v, b \sin v, u) + \frac{1}{b}(-\cos v, -\sin v, 0) \quad (4.3.9)$$

elde edilir.

**Örnek 4.3.7.**  $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \tilde{a}u) ; \tilde{a} \in R$  yaması ile verilen koni yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = 0, \quad H = -\frac{\tilde{a}}{2u\sqrt{\tilde{a}^2 + 1}} \quad (4.3.10)$$

dır. Yüzeyin birim normal vektörü ise;

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}^2 + 1}}(-\tilde{a} \cos v, -\tilde{a} \sin v, 1) \quad (4.3.11)$$

dır. Bu nedenle koni yüzeyinin (4.3.4)\* ofset fonksiyonu ile verilen genelleştirilmiş fokal yüzeyi;

$$Y(u, v) = \left( \left( u + \frac{\tilde{a}^2}{u(\tilde{a}^2 + 1)} \right) \cos v, \left( u + \frac{\tilde{a}^2}{u(\tilde{a}^2 + 1)} \right) \sin v, u - \frac{\tilde{a}}{u(\tilde{a}^2 + 1)} \right) \quad (4.3.12)$$

parametrelendirmeye sahiptir. Böylece  $\tilde{a} = 1$  için (4.3.12) denklemi

$$Y(u, v) = \left( \left( u + \frac{1}{2u} \right) \cos v, \left( u + \frac{1}{2u} \right) \sin v, u - \frac{1}{2u} \right)$$

biçimine dönüşür.

**Teorem 4.3.9.** (4.3.5) denklemi ile verilen  $X$  yüzeyinin genelleştirilmiş fokal yüzeyi  $Y$  olsun. Eğer  $X$  ve  $Y$  yüzeyleri regüler ise  $Y$  nin Gauss eğriliği  $\tilde{K}$

$$\tilde{K} = \frac{(nl - m^2) + \varphi(u, v)}{(EG - F^2) + \psi(u, v)} \quad (4.3.13)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) = & lf_{vv} - lf k_2^2 + f_{uu}n + f_{uv}f_{vv} - ff_{uu}k_2^2 \\ & - fk_1^2n - ff_{vv}k_1^2 + f^2k_1^2k_2^2 - 2mf_{uv} - f_{uu}^2 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

ve

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & -2Efn + Ef_v^2 + Ef^2k_2^2 \\ & - 2flG + 4f^2l.n - 2ff_v^2l - 2f^3k_2^2 \\ & + f_u^2G - 2ff_u^2n + f^2f_u^2k_2^2 \\ & + f^2k_1^2G - 2f^3k_1^2n + f^2f_v^2k_1^2 + f^4k_1^2k_1^2 \\ & + 4Fm - 4m^2 - 2Ff_u f_v + 4mf_u f_v \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

dir.

**İspat.**  $X(u, v)$  yüzeyinin genelleştirilmiş fokal yüzeyi  $Y(u, v)$  parameterlendirilmesi (4.3.5) denklemi ile verilsin. Böylece  $F$  nin I. temel form katsayıları  $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$  ve ikinci temel form katsayıları ise  $\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$  olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \tilde{E} = \langle F_u, F_u \rangle &= \langle (X_u + f_u N + fN_u), (X_u + f_u N + fN_u) \rangle \\ &= \langle X_u, X_u \rangle + 2f \langle N_u, X_u \rangle + f_u^2 \langle N, N \rangle + f^2 \langle N_u, N_u \rangle \\ \Rightarrow \tilde{E} &= E - 2fl + f_u^2 + f^2k_1^2 \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F} = \langle F_u, F_v \rangle &= \langle (X_u + f_u N + fN_u), (X_v + f_v N + fN_v) \rangle \\ &= \langle X_u, X_v \rangle - 2 \langle N, X_{uv} \rangle + f_u f_v \\ \Rightarrow \tilde{F} &= F - 2m + f_u f_v \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G} = \langle F_v, F_v \rangle &= \langle (X_v + f_v N + fN_v), (X_v + f_v N + fN_v) \rangle \\ &= \langle X_v, X_v \rangle + 2f \langle N_v, X_v \rangle + f_v^2 \langle N, N \rangle + f^2 \langle N_v, N_v \rangle \\ \Rightarrow \tilde{G} &= G - 2fn + f_v^2 + f^2k_2^2 \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

olarak  $F$  nin I. temel form katsayıları hesaplanmış olur.

II. temel form katsayılarını hesaplamadan önce  $F_{uu}, F_{uv}, F_{vv}$  değerlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
F_{uu} &= X_{uu} + f_{uu}N + 2f_u N_u + fN_{uu} \\
F_{vv} &= X_{vv} + f_{vv}N + 2f_v N_v + fN_{vv} \\
F_{uv} &= X_{uv} + f_{uv}N + f_u N_v + f_v N_u + fN_{uv}
\end{aligned}$$

Böylece  $F$  nin II. temel form katsayıları;

$$\begin{aligned}
\tilde{l} &= \langle N, F_{uu} \rangle \\
&= \langle N, (X_{uu} + f_{uu}N + 2f_u N_u + fN_{uu}) \rangle \\
\Rightarrow \tilde{l} &= l + f_{uu} - fk_1^2
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{m} &= \langle N, F_{uv} \rangle \\
&= \langle N, (X_{uv} + f_{uv}N + f_u N_v + f_v N_u + fN_{uv}) \rangle \\
\Rightarrow \tilde{m} &= m + f_{uv}
\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{n} &= \langle N, F_{vv} \rangle \\
&= \langle N, (X_{vv} + f_{vv}N + 2f_v N_v + fN_{vv}) \rangle \\
\Rightarrow \tilde{n} &= n + f_{vv} - fk_2^2
\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

olarak hesaplanmış olur. Böylece  $F$  nin  $\tilde{K}$  Gauss eğriliği;

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{l}\tilde{n} - \tilde{m}^2}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}$$

olmak üzere değerler yerine yazılırsa;

$$\tilde{K} = \frac{(l + f_{uu} - fk_1^2).(n + f_{vv} - fk_2^2) - (m + f_{uv})^2}{(E - 2fl + f_u^2 + f^2k_1^2)(G - 2fn + f_v^2 + f^2k_2^2) - (F - 2m + f_u f_v)^2} \tag{4.3.22}$$

olarak elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.3.13) eşitliği elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Sonuç 4.3.10.** Eğer (4.3.5) denklemi ile verilen  $X$  yüzeyinin genelleştirilmiş fokal yüzeyi düz ise (4.3.15) eşitliğinde verilen  $\varphi(u, v)$  için aşağıdaki eşitlik söz konusudur;

$$\varphi(u, v) = -(nl - m^2) \tag{4.3.23}$$

dir. Burada  $l$ ,  $n$  ve  $m$   $X$  yüzeyinin II. temel form katsayılarıdır.

**Sonuç 4.3.11.** Eğer  $\varphi(u, v) = 0$  ve  $\psi(u, v) = 0$  ise  $\tilde{K} = K$  dir.

#### 4.4. Maple Yardımıyla Uygulamalar

$E^3$  de  $X(u,v) = (a(u,v), b(u,v), c(u,v))$  yaması ile verilen yüzeylerin Gauss eğriliği  $K$ , ortalama eğrilik  $H$  ve asli eğrilikleri  $k_1, k_2$  yi hesaplamak için EK 4 deki Maple programını geliştirdik.

##### Önerme 4.4.1. (Dönel yüzey)

> a:=r(u)\*cos(v):

> b:=r(u)\*sin(v):

> c:=h(u):

yaması ile verilen dönel yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri Ek 4 de verilen Maple programı yardımıyla

$$K := - \frac{\left( \left( \frac{d^2}{du^2} r(u) \right) \left( \frac{d}{du} h(u) \right) - \left( \frac{d^2}{du^2} h(u) \right) \left( \frac{d}{du} r(u) \right) \right) \left( \frac{d}{du} h(u) \right)}{r(u) \left( \left( \frac{d}{du} r(u) \right)^2 + \left( \frac{d}{du} h(u) \right)^2 \right)^2}$$

ve

$$H := \frac{1}{2} \left( r(u) \left( \frac{d^2}{du^2} r(u) \right) \left( \frac{d}{du} h(u) \right) - r(u) \left( \frac{d^2}{du^2} h(u) \right) \left( \frac{d}{du} r(u) \right) - \left( \frac{d}{du} h(u) \right) \left( \frac{d}{du} r(u) \right)^2 - \left( \frac{d}{du} h(u) \right)^3 \right) / \left( \sqrt{r(u)^2 \left( \left( \frac{d}{du} r(u) \right)^2 + \left( \frac{d}{du} h(u) \right)^2 \right)} \left( \left( \frac{d}{du} r(u) \right)^2 + \left( \frac{d}{du} h(u) \right)^2 \right) \right)$$

olarak hesaplanır.

### Örnek 4.4.2. (Helikoid)

> a:=u\*cos(v):

> b:=u\*sin(v):

> c:=v:

yaması ile verilen dönel yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri Ek 4 de verilen Maple programı yardımıyla

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}, H = 0,$$

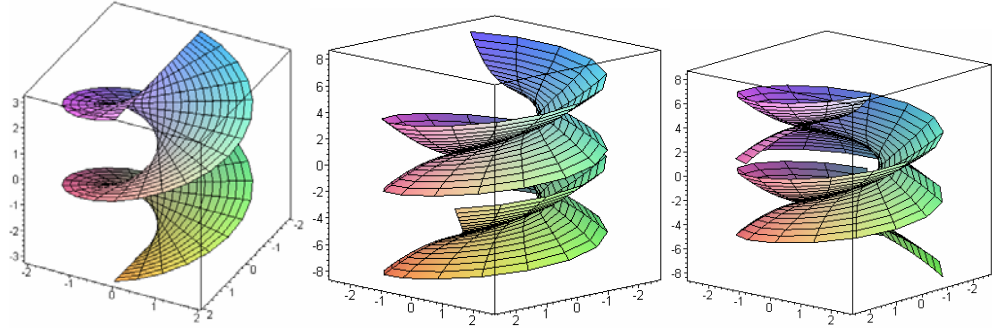
olarak hesaplanır.

Böylece aşağıdaki Maple komutları yardımıyla Helikoid ve Fokal yüzeylerinin grafiğini çizdirebiliriz (Bkz. Şekil 4.4.1.).

> plot3d([a, b, c], u=-2..2, v=-Pi..Pi);

> plot3d([a+(1/k1)\*n1, b+(1/k1)\*n2, c+(1/k1)\*n3], u=-1.7..1.7, v=-5..5);

> plot3d([a+(1/k2)\*n1, b+(1/k2)\*n2, c+(1/k2)\*n3], u=-1.7..1.7, v=-5..5);



Şekil 4.4.1. Helikoid ve Fokal yüzeyleri

Helikoid yüzeyi minimal olduğundan (4.3.4)\* ofset fonksiyonu ile verilen genelleştirilmiş fokal yüzeyi tanımlı değildir.

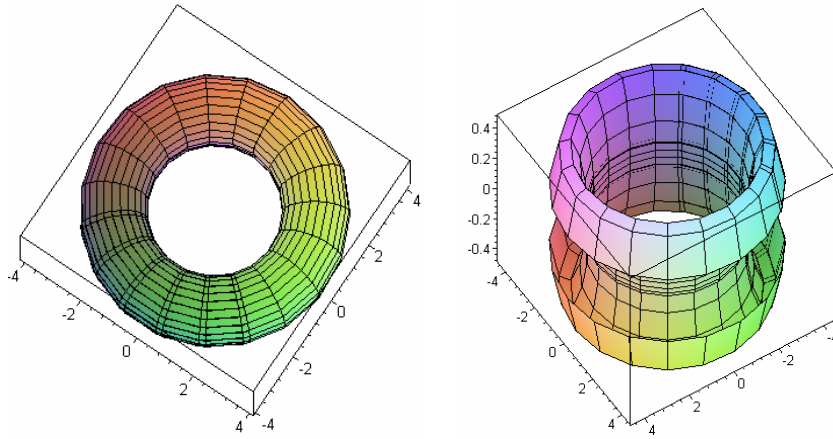
### Örnek 4.4.3. Tor Yüzeyi

$$> a:=(3+\cos(v))*\cos(u):$$

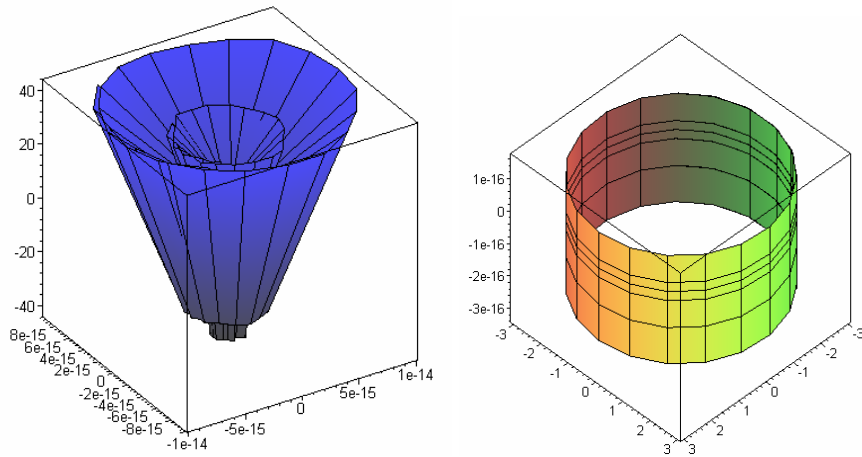
$$> b:=(3+\cos(v))*\sin(u):$$

$$> c:=\sin(v):$$

yaması ile verilen tor yüzeyinin ile (4.3.4)\* ofset fonksiyonu ile verilen genelleştirilmiş fokal yüzeyinin grafikleri Şekil 4.4.2. ve fokal yüzeyleri ise Şekil 4.4.3. de verilmiştir.



Şekil 4.4.2. Tor yüzeyi ve genelleştirilmiş fokal yüzeyi



Şekil 4.4.3 Tor yüzeyinin fokal yüzeyleri



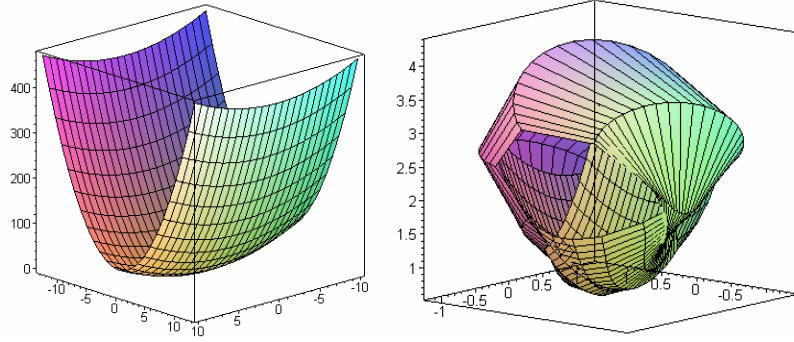
**Örnek 4.4.4.** (lokal yüzey modeli)

> a:=u:

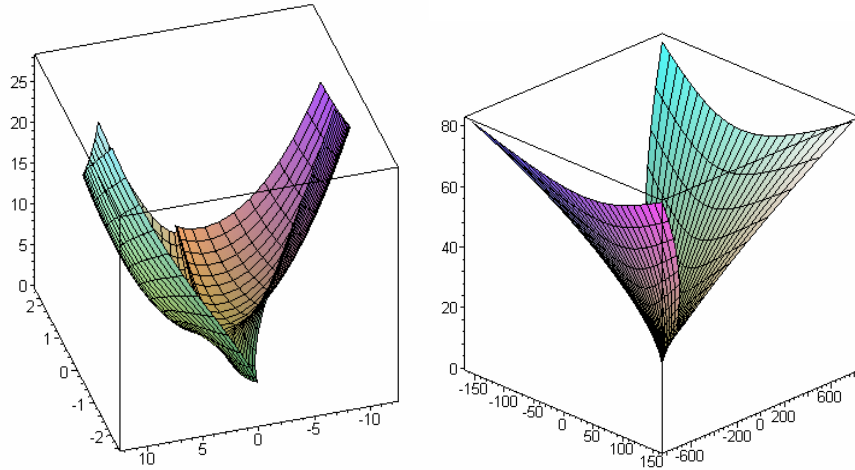
> b:=v:

> c:=(1/2)\*(u^2+5\*v^2):

yaması ile verilen lokal yüzey modeli ve (4.3.4)\* ofset fonksiyonu ile verilen genelleştirilmiş fokal yüzeyinin grafikleri Şekil 4.4.4 de ve fokal yüzeyleri ise Şekil 4.4.5. de verilmiştir.



**Şekil 4.4.4.** Lokal yüzey modeli ve genelleştirilmiş fokal yüzeyi



**Şekil 4.4.5.** Lokal yüzey modelinin fokal yüzeyleri

**Örnek 4.4.5.** (lokal yüzey modeli I)

> a:=u:

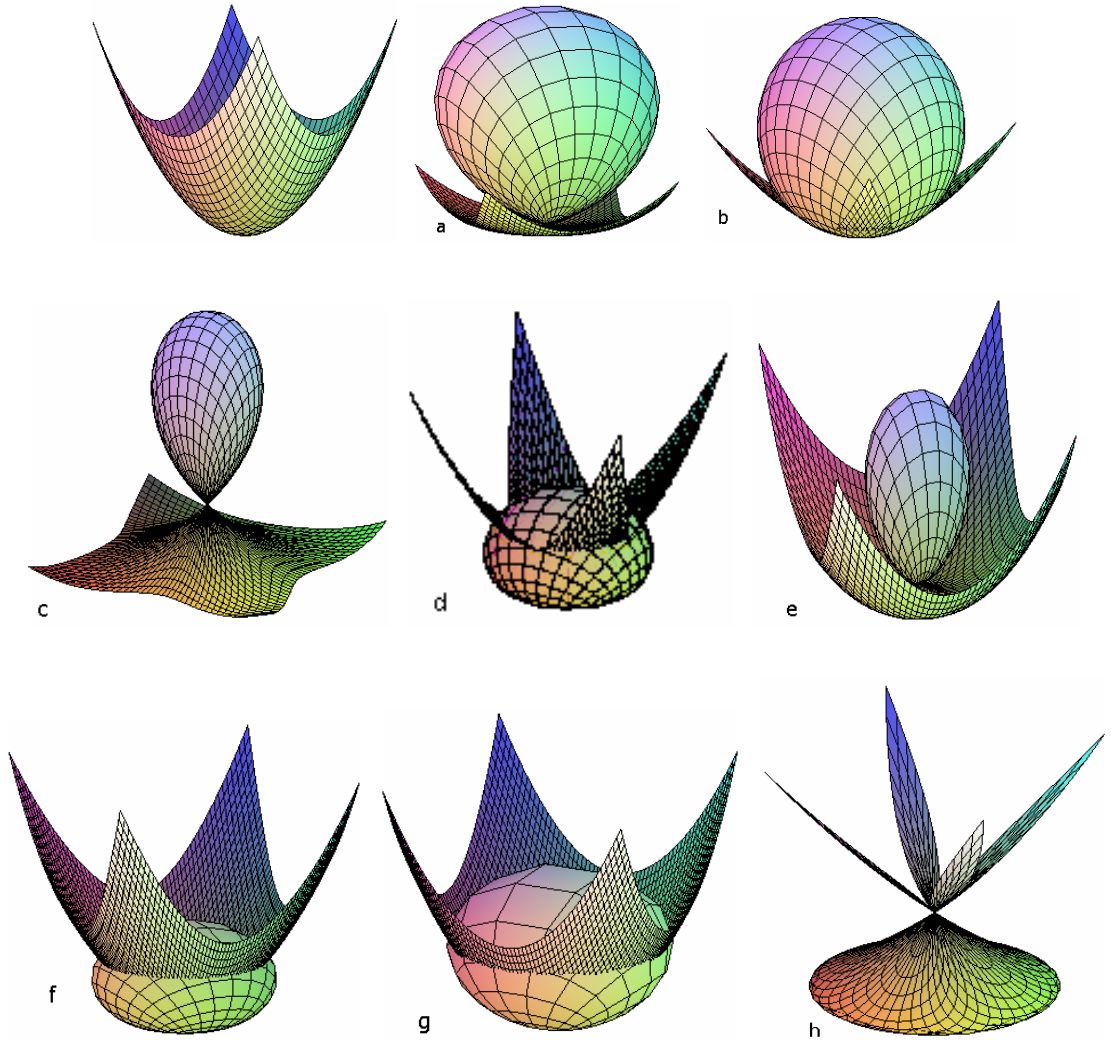
> b:=v:

> c:=u<sup>2</sup>+v<sup>2</sup>:

yaması ile verilen lokal yüzey modelinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = \frac{4}{(4u^4 + 4v^4 + 1)^2} ; H = \frac{2(1 + 2v^2 + 2u^2)}{(4u^4 + 4v^4 + 1)^{3/2}}$$

dır. Böylece bu yüzeyin Açıklama 4.3.0 da verilen genelleştirilmiş fokal yüzeylerinin Maple komutları yardımıyla grafikleri



Şekil 4.4.6.  $h(u,v) = u^2 + v^2$  yüzeyi ve bunun Genelleştirilmiş fokal Yüzeyleri

**Örnek 4.4.6.** (lokal yüzey modeli II)

> a:=u:

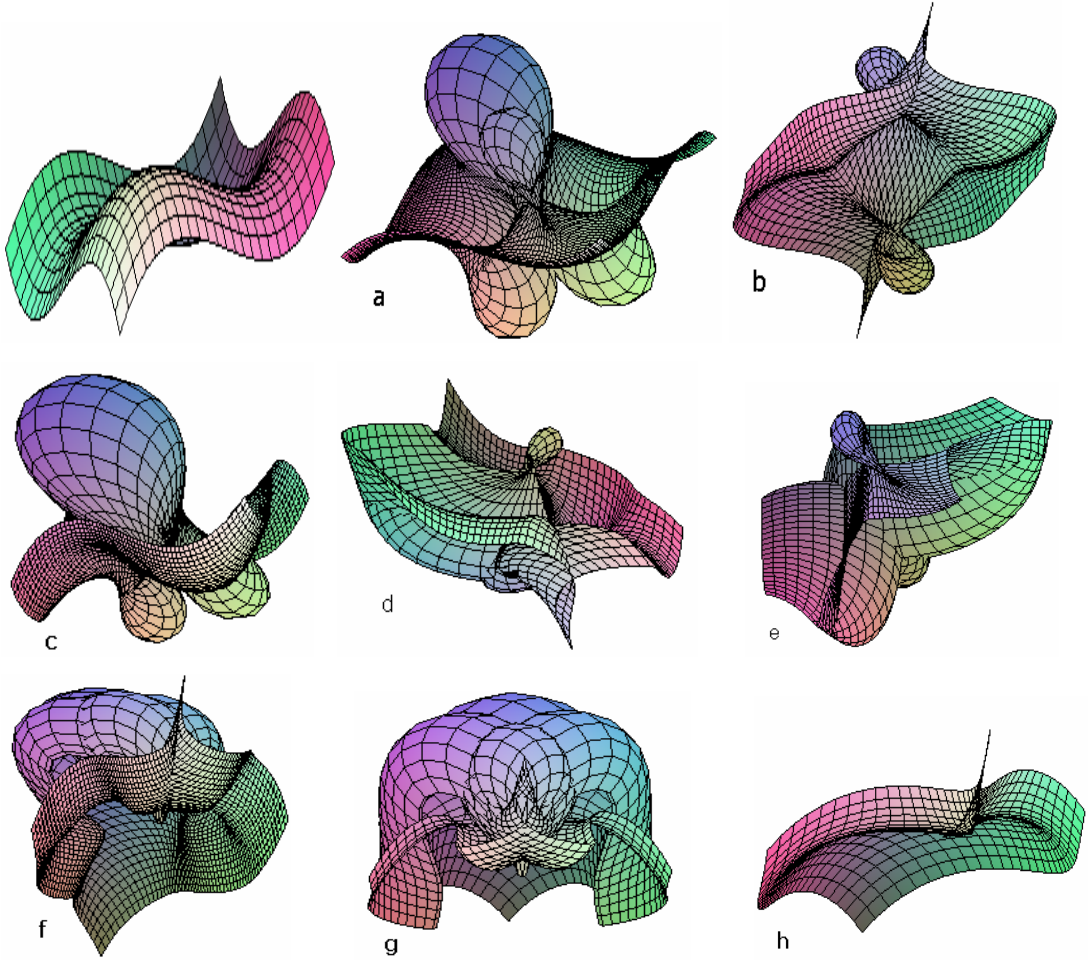
> b:=v:

> c:=u<sup>3</sup>+v<sup>3</sup>:

yaması ile verilen lokal yüzey modelinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = \frac{36uv}{(9u^4 + 9v^4 + 1)^2} ; H = \frac{3(u + 9uv^4 + 9vu^4)}{(9u^4 + 9v^4 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

dır. Böylece  $h(u,v) = u^3 + v^3$  öteleme yüzeyi ve bu yüzeyin Açıklama 4.3.1 de verilen genelleştirilmiş fokal yüzeylerinin Maple komutları yardımıyla grafikleri



Şekil 4.4.7.  $h(u,v) = u^3 + v^3$  yüzeyi ve bunun Genelleştirilmiş fokal Yüzeyleri

**EKLER****EK 1**

```

> restart:with(linalg):
> r:=x->[cos(x),sin(x),cos(2*x),sin(2*x),x]:
> E1:=diff(r(x),x):
> norm(E1,2):
> normE1:=simplify(((1+(sin(x))^2+(cos(x))^2+4*(sin(2*x))^2+4*(cos(2*x))^2)^(1/2)):
> V1:=E1/normE1;
> E2:=diff(E1,x):
> norm(E2,2);
> normE2:=simplify(((cos(x))^2+(sin(x))^2+16*(cos(2*x))^2+16*(sin(2*x))^2)^(1/2));
> V2:=E2/normE2;
> diff(E2,x)-(dotprod(diff(E2,x),E1)/dotprod(E1,E1))*E1:
>E3:=simplify([sin(x), -cos(x), 8*sin(2*x), -8*cos(2*x), 0]-(-sin(x)*sin(x)-
cos(x)*cos(x)-16*sin(2*x)*sin(2*x)-
16*cos(2*x)*cos(2*x))/(1+sin(x)*sin(x)+cos(x)*cos(x)+4*sin(2*x)*sin(2*x)+4*cos(2*
x)*cos(2*x))*[-sin(x), cos(x), -2*sin(2*x), 2*cos(2*x), 1]):
> evalm(norm(E3,2)):
>normE3:=simplify(1/6*(289+121*(sin(x))^2+121*(cos(x))^2+196*(sin(2*x))^2+196*
(cos(2*x))^2)^(1/2)):
> V3:=E3/normE3;
> T3:=diff(E2,x):T4:=diff(T3,x):T4+(dotprod(T4,E2)/dotprod(E2,E2))*E2:
> E4:=simplify([cos(x), sin(x), 16*cos(2*x), 16*sin(2*x), 0]+(-cos(x)*cos(x)-
sin(x)*sin(x)-64*cos(2*x)*cos(2*x)-
64*sin(2*x)*sin(2*x))/(cos(x)*cos(x)+sin(x)*sin(x)+16*cos(2*x)*cos(2*x)+16*sin(2*
x)*sin(2*x))*[-cos(x), -sin(x), -4*cos(2*x), -4*sin(2*x), 0]):
> norm(E4,2):
>normE4:=simplify(2/17*(1681*(cos(x))^2+1681*(sin(x))^2+70756*(cos(2*x))^2+707
56*(sin(2*x))^2)^(1/2)).

```

```

> V4:=E4/normE4;
> T5:=diff(T4,x):T5-
(dotprod(T5,E1)/dotprod(E1,E1))*E1+(dotprod(T5,E3)/dotprod(E3,E3))*E3:
> E5:=simplify([-sin(x), cos(x), -32*sin(2*x), 32*cos(2*x), 0]-
(sin(x)*sin(x)+cos(x)*cos(x)+64*sin(2*x)*sin(2*x)+64*cos(2*x)*cos(2*x))/(1+sin(x)*
sin(x)+cos(x)*cos(x)+4*sin(2*x)*sin(2*x)+4*cos(2*x)*cos(2*x))*[-sin(x), cos(x), -
2*sin(2*x), 2*cos(2*x), 1]+(11/6*sin(x)*sin(x)+11/6*cos(x)*cos(x)-
224/3*sin(2*x)*sin(2*x)-
224/3*cos(2*x)*cos(2*x))/(289/36+121/36*sin(x)*sin(x)+121/36*cos(x)*cos(x)+49/9*
sin(2*x)*sin(2*x)+49/9*cos(2*x)*cos(2*x))*[-11/6*sin(x), 11/6*cos(x), 7/3*sin(2*x), -
7/3*cos(2*x), 17/6]):
> norm(E5,2):
> evalm(norm(E5,2)):
> normE5:=simplify(1/303*(48958009+28976689*(sin(x))^2+28976689*(cos(x))^2+38
316100*(sin(2*x))^2+38316100*(cos(2*x))^2)^(1/2)):
> V5:=E5/normE5;
çatısı elde edilir. Ayrıca  $\alpha(t)$  eğrisinin Frenet eğrilikleri aşağıda verilen Maple komutu
yardımıyla hesaplanır
> K1:=dotprod(diff(V1,x),V2)/normE1:
> K1:=simplify(1/6*(1/102*6^(1/2)*cos(x)*17^(1/2)*cos(x)+1/102*6^(1/2)*sin(x)*17^(
1/2)*sin(x)+8/51*6^(1/2)*cos(2*x)*17^(1/2)*cos(2*x)+8/51*6^(1/2)*sin(2*x)*17^(1/2
)*sin(2*x))*6^(1/2));
> K2:=dotprod(diff(V2,x),V3)/normE1:
> K2:=simplify(1/6*(11/10302*17^(1/2)*sin(x)*606^(1/2)*sin(x)+11/10302*17^(1/2)*co
s(x)*606^(1/2)*cos(x)+56/5151*17^(1/2)*sin(2*x)*606^(1/2)*sin(2*x)+56/5151*17^(
1/2)*cos(2*x)*606^(1/2)*cos(2*x))*6^(1/2));
> K3:=dotprod(diff(V3,x),V4)/normE1;
> K3:=simplify(1/6*(-451/43896822*606^(1/2)*cos(x)*72437^(1/2)*cos(x)-
451/43896822*606^(1/2)*sin(x)*72437^(1/2)*sin(x)+3724/21948411*606^(1/2)*cos(2
*x)*7

```

**EK 2**

```

> a:=u:
> b:=v:
> c:=u^2+v^2:
> L:=(x1-a)^2+(x2-b)^2+(x3-c)^2:
> A:=simplify(diff(L,u)):
> B:=simplify(diff(L,v)):
> C:=simplify(diff(A,u)):
> DD:=simplify(diff(B,v)):
> EE:=simplify(diff(diff(L,u),v)):
> H:=simplify(C*DD-EE^2):
> SON:=[A=0,B=0,H=0]:
> sols:=solve(SON,{x1,x2,x3}):
> Y1:=factor(sols[1]):
> Y2:=factor(sols[2]):

```

**EK 3**

```

> restart:with(linalg):
> r:=x->[cos(x),sin(x),cos(2*x),sin(2*x)];
> E1:=diff(r(x),x);
> E1 := [-sin(x), cos(x), -2*sin(2*x), 2*cos(2*x)];
> norm(E1,2);
> normE1:=simplify((((sin(x))^2+(cos(x))^2+4*(sin(2*x))^2+4*(cos(2*x))^2)^(1/2)));
> V1:=E1/normE1;
> E2:=diff(E1,x);
> norm(E2,2);
> normE2:=simplify((((cos(x))^2+(sin(x))^2+16*(cos(2*x))^2+16*(sin(2*x))^2)^(1/2)));
> V2:=E2/normE2;
> diff(E2,x)-(dotprod(diff(E2,x),E1)/dotprod(E1,E1))*E1;

```

```

>[sin(x), -cos(x), 8*sin(2*x), -8*cos(2*x)]-(-sin(x)*sin(conjugate(x))-
cos(x)*cos(conjugate(x))-16*sin(2*x)*sin(2*conjugate(x))-
16*cos(2*x)*cos(2*conjugate(x)))/(sin(x)*sin(conjugate(x))+cos(x)*cos(conjugate(x))+
4*sin(2*x)*sin(2*conjugate(x))+4*cos(2*x)*cos(2*conjugate(x)))*[-sin(x), cos(x), -
2*sin(2*x), 2*cos(2*x)];
> E3:=simplify([sin(x), -cos(x), 8*sin(2*x), -8*cos(2*x)]-(-sin(x)*sin(x)-cos(x)*cos(x)-
16*sin(2*x)*sin(2*x)-
16*cos(2*x)*cos(2*x))/(sin(x)*sin(x)+cos(x)*cos(x)+4*sin(2*x)*sin(2*x)+4*cos(2*x)
*cos(2*x))*[-sin(x), cos(x), -2*sin(2*x), 2*cos(2*x)]);
> evalm(norm(E3,2));
> normE3:=simplify(6/5*(4*(sin(x))^2+4*(cos(x))^2+(sin(2*x))^2+(cos(2*x))^2)^(1/2));
> V3:=E3/normE3;
> T3:=diff(E2,x):T4:=diff(T3,x):T4+(dotprod(T4,E2)/dotprod(E2,E2))*E2;
> E4:=simplify([cos(x), sin(x), 16*cos(2*x), 16*sin(2*x)]+(-cos(x)*cos(x)-
sin(x)*sin(x)-64*cos(2*x)*cos(2*x)-
64*sin(2*x)*sin(2*x))/(cos(x)*cos(x)+sin(x)*sin(x)+16*cos(2*x)*cos(2*x)+16*sin(2*
x)*sin(2*x))*[-cos(x), -sin(x), -4*cos(2*x), -4*sin(2*x)]);
> norm(E4,2);
>normE4:=simplify(2/17*(1681*(cos(x))^2+1681*(sin(x))^2+70756*(cos(2*x))^2+707
56*(sin(2*x))^2)^(1/2));
> V4:=E4/normE4;
> dotprod(diff(V1,x),V2)/normE1;
>K1:=simplify(1/5*(1/85*5^(1/2)*cos(x)*17^(1/2)*cos(x)+1/85*5^(1/2)*sin(x)*17^(1/
2)*sin(x)+16/85*5^(1/2)*cos(2*x)*17^(1/2)*cos(2*(x))+16/85*5^(1/2)*sin(2*x)*17^(1
/2)*sin(2*(x)))*5^(1/2));
> dotprod(diff(V2,x),V3)/normE1;
> K2:=simplify(1/5*(-2/85*5^(1/2)*sin(x)*17^(1/2)*sin(x)-
2/85*5^(1/2)*cos(x)*17^(1/2)*cos(x)+8/85*5^(1/2)*sin(2*x)*17^(1/2)*sin(2*(x))+8/8
5*5^(1/2)*cos(2*x)*17^(1/2)*cos(2*(x)))*5^(1/2));
> dotprod(diff(V3,x),V4)/normE1;

```

```

>K3:=simplify(1/5*(-82/362185*5^(1/2)*cos(x)*72437^(1/2)*cos(x)-
82/362185*5^(1/2)*sin(x)*72437^(1/2)*sin(x)+532/362185*5^(1/2)*cos(2*x)*72437^(
1/2)*cos(2*(x))+532/362185*5^(1/2)*sin(2*x)*72437^(1/2)*sin(2*(x)))*5^(1/2));
> c1:=1/K1;
> c2:=diff(c1,x)/K1;
> c3:=(diff(c2,x)+c1*K2)/K3;

```

#### EK. 4.

```

> xu1:=diff(a,u); xu2:=diff(b,u); xu3:=diff(c,u);
> xv1:=diff(a,v); xv2:=diff(b,v); xv3:=diff(c,v);
> E:=simplify(xu1*xu1+xu2*xu2+xu3*xu3);
> F:=simplify(xu1*xv1+xu2*xv2+xu3*xv3);
> G:=simplify(xv1*xv1+xv2*xv2+xv3*xv3);
> u1:=simplify(xu2*xv3-xv2*xu3);u2:=simplify(-(xu1*xv3-
xv1*xu3));u3:=simplify(xu1*xv2-xv1*xu2);
> U:=[u1,u2,u3];
> W:=simplify(sqrt(u1^2+u2^2+u3^2));
> n1:=u1/W;
> n2:=u2/W;
> n3:=u3/W;
> xuu1:=diff(xu1,u);xuu2:=diff(xu2,u);xuu3:=diff(xu3,u);
> xuv1:=diff(xu1,v);xuv2:=diff(xu2,v);xuv3:=diff(xu3,v);
> xvv1:=diff(xv1,v);xvv2:=diff(xv2,v);xvv3:=diff(xv3,v);
> e:=simplify(xuu1*n1+xuu2*n2+xuu3*n3);
> f:=simplify(xuv1*n1+xuv2*n2+xuv3*n3);
> g:=simplify(xvv1*n1+xvv2*n2+xvv3*n3);
> K:=simplify((e*g-f^2)/(E*G-F^2));
> H:=simplify((e*G+E*g-2*F*f)/(2*(E*G-F^2)));
> k1:=(H+sqrt(H^2-K));
  ➤ k2:=(H-sqrt(H^2-K));

```



**KAYNAKLAR**

Arnold V.I., 1995. On The Number of Flattenings Points of Space Curves, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 171, p.11-12.

Arnold V.I., 1998. Towards the Legendrian Sturm Theory of Space Curves, Funct. Anal. and Appl. Vol. 32 No.2. p.78-80.

Arslan, K., 1993. Isoparametric Submanifolds with  $P_k$ -PNS. Phd. Thesis, Leeds University.

Arslan, K. And West, A., 1996. Non Spherical Submanifolds with 2-Planar Normal Sections, Bull.Londan. Math. Soc.Vol 28, p.88-92.

Bang-Yen Chen and Shi-Jie Li, 2004. The Contact Number of Euclidean Submanifold, Proceedings of the Edinburg Mathematical Society , 47, p.69-100.

Carmo, M. P. Do, 1983. Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, Vieweg Verlag, Wiesbaden, Braunschweig.

Chen, B. Y., 1973. Geometry of Submanifolds. Newyork, M. Dekker.

Chen, B. Y., 1981. Submanifolds with Planar Normal Sections. Soochow. J.Math. Vol 7, p.19-27.

Chen, B. Y. and Verhayen, P., 1984. Submanifolds with Geodesic Normal Sections. Vol 269, p. 417-429.

Dillen, F., Pas, J., and Verstralen, 1990. L., On the Gauss Map of Surface of Revolution, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 18, p.239-246.

Elber, G., Kim, M. S., 1997. Geometric Shape Recognition of Freeform Curves and Surfaces CVGIP:Graphical Model and Image Processing 59(6):p.417-433.

Gray, A., 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc.

Görgülü, A., 1989. Relations Between The Mean Curvatures of the Parallel Submanifolds. Commun. Fac.Sci.Univ.Ank.Ser.A, V.38, Number 1-2, p. 87-93.

Görgülü, A., 1992. On The Curvatures of The Parallel Hypersurfaces. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank.Series.A,V.41,p.85-91.

Görgülü, A. and Özdamar E., 1989. Parallel Submanifolds Journal of Mathematics And Stastics of the Faculty of Arts and Science, Gazi Üniv.V.2, p.55-63.

Hacısalıhoğlu, H.H., 1983. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No 2.

Hagen, H., Pottman, H., Divivier, A., 1991. Visualization Functions on a Surface, Journal of Visualization and Animation, Vol. 2, p.52-58.

Hoschek, J., 1971. Liniengeometrie,BI Zürich.

Hagen,H., Hahmann, S. 1992. Generalized Focal Surfaces: A New Method for Surface Interrogation IEEE.

Klingenberg, W., 1978. A Course in Differential Geometry, Springer Verlag.

Liu., 1999. Translation Surfaces With Constant Mean Curvature in 3-Dimensional Spaces, Journal of Geometry, p.141-149.

Looijenga, E.J.N., 1974. Structural Stability of Smooth Families of  $C^\infty$ -Functions, Doctoral Thesis, University of Amsterdam.

Malkowsky,E., 2001. Velitkovic,V.,Visualization of Differential Geometry, Facta Universitatis, Mechanics, Automatic Control and Robotics, Vol.3, No.11, p.127-133.

Malkowsky, E., 2001. Velickovic, V., Some geometric properties of screw surfaces and exponential cones, Proceedings of 10th Congres of Yugoslav Mathematicians, Belgrade, p.395-399.

Monterde, J., 2004. Curves With Constant Curvature Ratios.

Özgür, C., 1997, Noktasal k-Düzlemsel Normal Kesitlere Sahip Altmanifoldlar, Yüksek Lisans Tezi, Kocaeli Üniv.

- Porteous, J.R., 1971. The Normal Singularities of Submanifolds. *J.Diff.Geom.* 5, p.543-564.
- Romero-Fuster M.C., 1999. Sanabria-Codesal E., Generalized evolutes, vertices and Conformal Invariants of Curves in  $R^{n+1}$ , *Indoy. Mathem., N. S.*,10(2), p.297-305.
- Romero-Fuster M.C., Sanabria-Codesal E., 1999. Generalized Helices, Twistings and Flattenings of Curves in n-Space, *Mat. Contemp.* 17, Brasil. p.267-280.
- Shapiro, B., 1998. Discriminants of Convex Curves are Homeomorphic, *Proceedings of the American Mat. Soc.* Vol.126. No.7, p.1923-1930.
- Uribe-Vargas R., 2004. 4-Vertex Theorems, Sturm Theory and Lagrangian Singularities, *Mathematical Physics, Geometry and Analysis*, 7, p.223-237.
- Uribe-Vargas R., 2005. On Vertices, Focal Curvatures and Differential Geometry of Space Curves, *Bull Braz. Math Soc*, Vol.36, N.3.
- Uribe-Vargas R., 2004. On Singularities, 'Perestroikas' and Differential Geometry of Space Curves, *L'Enseignement Mathématique*, 50, p.69-101.
- Uribe-Vargas R., 2001. Singularities symplectiques et de contact en geometrie differentielle des courbes et des surfaces, P.H.D. Thesis.
- Verhayen, P., 1985. Submanifolds with Geodesic Normal Sections are Helical, *Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino.*43, p.511-527.
- Verstraelen, L., Walrave, J. and Yaprak, 1994. S., The Minimal Translation Surfaces in Euclidean Space. *Sochow J. Math.* 20, p.77-82.
- Zafindratafa, G., 1996. Hypersurface Whose Mean Curvature Function is of Finite Type, *Journal of Geometry, Mathematics and Statistics*, Vol.55, No 1-2.

## **ÖZ GEÇMİŞ**

Burcum ÖZDEMİR 05.12.1976 tarihinde Kütahya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kütahya’da tamamladıktan sonra 1995 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 1999 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Dumlupınar Üniversitesinde Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2003 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisansını tamamladı. Aynı yılda 35. madde gereğince Bursa Uludağ Üniversitesine Araştırma Görevlisi olarak Doktora eğitimi görmek üzere görevlendirilmiştir.

## TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan, maddi manevi desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren, engin bilgi ve fikirleriyle beni aydınlatan ve yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a yürekten teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini çok gördüğüm, kendisinden çok şey öğrendiğim sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu günlere gelmemde madden ve manen çok emeği geçen, bana verdikleri değer ve sevgiyle her problemi aşmama yardımcı olan sevgili babama, anneme ve ağabeyime sonsuz teşekkürler.

Tüm bunların yanı sıra sevgili arkadaşım Hacer'e ve bu uzun ve zorlu sürecin son aşamalarında tanıştığım, bana değer veren, güvenen, sabır ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sözlüm Yusuf'a sonsuz teşekkürler...