BALKOBALANS SAYILARI VE

BALKOBALANSIRLAR

Meryem YILDIZ

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BALKOBALANS SAYILARI VE BALKOBALANSIRLAR

Meryem YILDIZ
0000-0002-7594-7552

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2023

TEZ ONAYI

Meryem YILDIZ tarafından hazırlanan “BALKOBALANS SAYILARI VE BALKO-BALANSIRLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan: Prof. Dr. Osman BİZİM — İmza
0000-0001-5236-4023
Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN — İmza
0000-0002-5341-0009
Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Doç. Dr. İrem KÜPELİ ERKEN — İmza
0000-0003-4471-3291
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../2023

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

03/05/2023

Meryem YILDIZ

TEZ YAYINLANMA

FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof.Dr.Ahmet TEKCAN	Meryem YILDIZ
03/05/2023	03/05/2023
İmza	İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.	Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BALKOBALANS SAYILARI VE BALKOBALANSIRLAR

Meryem YILDIZ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu tezde balans ve kobalans sayılarından elde edilen yeni bir tam sayı dizisi olan balkobalans sayıları tanımlanmış ve bu sayıların genel terimleri balans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir.

Birinci bölümde tam sayı dizileri ile ilgili genel bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde materyal ve yöntem belirtilmiştir.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmı olup bu bölümde, balkobalans sayıları, Lucas-balkobalans sayıları ve balkobalansırlar olmak üzere üç yeni tam sayı dizisi tanımlanmış ve bu tam sayı dizisinin genel terimleri balans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir. Ayrıca bu tam sayı dizileri ile ilgili yeni cebirsel bağıntılar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Balans Sayıları, Kobalans Sayıları, Balkobalans sayıları, Pell Denklemleri, Üçgensel Sayılar, Çözüm Sınıfı.

2023, x+54 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

BALCOBALANCING NUMBERS AND BALCOBALANCERS

Meryem YILDIZ

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this thesis, three new integer sequences are defined and determined the general terms of these integer sequences in terms of balancing numbers.

In the first section, some notations and definitions on integer sequences are given.

In the second section, the material and method are given.

In the third section, which is the original part of the thesis, the general terms of balcobalancing number, Lucas-balcobalancing numbers and balcobalancers are given in terms of balancing number. Further some new algebraic identities on them are obtained.

In the last section, the result is given.

Keywords: Balancing Numbers, Cobalancing Numbers, Balcobalancing Numbers, Pell Equations, Triangular Numbers, Set of Representatives.

2023, x+54 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında, yaptığım çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren araştırmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek gelişimime katkıda bulunan, çalışmalarım süresince her anlamda bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet TEKCAN'a saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Bana hiçbir desteğini esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Meryem YILDIZ

03/05/2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
F_n	Fibonacci sayısı
L_n	Lucas sayısı
P_n	Pell sayısı
Q_n	Pell-Lucas sayısı
B_n	Balans sayısı
b_n	Kobalans sayısı
C_n	Lucas-balans sayısı
c_n	Lucas-kobalans sayısı
R_n	Balansır
r_n	Kobalansır
B_n^{bk}	Balkobalans sayısı
C_n^{bk}	Lucas-balkobalans sayısı
R_n^{bk}	Balkobalansır
Rep	Çözüm temsilcileri kümesi
M	Çözüm matrisi
$x^2 - dy^2 = \pm n$	Pell denklemi

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

$p^2 - 4q > 0$ ve $p \neq q + 1$ özelliğinde p ve q tam sayıları için

$$U_0 = 0, U_1 = 1, U_n = U_n(p,q) = pU_{n-1} - qU_{n-2}$$

ve

$$V_0 = 2, V_1 = p, V_n = V_n(p,q) = pV_{n-1} - qV_{n-2}$$

tam sayı dizileri tanımlansın. Bu takdirde

$$x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

için

$$U_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad \text{ve} \quad V_n = x_1^n + x_2^n$$

dir. U_n ve V_n nin ilk n terim toplamları

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{U_{n+2} - (p-1)U_{n+1} - 1}{p - q - 1}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{V_{n+2} - (p-1)V_{n+1} - p + 2q}{p - q - 1}$$

dir.

Bu diziler için

$$M = \begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} & U_n \\ U_n & U_{n-1} \end{bmatrix} = M^n$$

dir. Dolayısıyla

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = q^n$$

olup

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1}\begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir.

Üstelik $m \geq n$ tam sayıları için

$$V_n^2 - dU_n^2 = 4q^n$$
$$U_{n+1}^2 - pU_{n+1}U_n + qU_n^2 = q^n$$
$$dU_n = V_{n+1} - qV_{n-1}$$
$$V_n = U_{n+1} - qU_{n-1}$$
$$U_{m+n} = U_mV_n - q^nU_{m-n}$$
$$V_{m+n} = V_mV_n - q^nV_{m-n}$$
$$U_{2n} = U_nV_n$$
$$V_{2n} = V_n^2 - 2q^n$$

dir.

U_n de özel olarak $p = 1$ ve $q = -1$ olarak alınırsa

$$U_n = U_n(1, -1) = U_{n-1} + U_{n-2} = F_n$$

Fibonacci tam sayı dizisi elde edilmiş olur. Şu halde Fibonacci tam sayı dizisi

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dir. Burada dikkat edilirse dizinin herhangi bir terimi, kendisinden önce gelen ilk iki terimin toplamı şeklindedir.

Fibonacci tam sayı dizisi ilk olarak Avrupalı matematikçi Leonardo Fibonacci (1170-1250) tarafından tanımlanmıştır. Fibonacci tam sayı dizisi doğada, salyangoz kabuğu, deniz kabuğu, midye kabuğu, eğrelti otu, papatya ve çam kozalağı gibi sarmal yapıların dizilişlerinde karşımıza çıkar. Ayrıca mimaride ise Atina'daki Partenon Tapınağı'nda, Mısır'daki Keops Piramidi'nde, Paris'in ünlü Notre Dame Katedrali'nde ve Edirne'deki Süleymaniye Camii'nin taban planında da görmek mümkündür.

Benzer şekilde V_n tam sayı dizisinde $p = 1$ ve $q = -1$ olarak alınırsa

$$V_n = V_n(1, -1) = V_{n-1} + V_{n-2} = L_n$$

Lucas tam sayı dizisi elde edilmiş olur. Şu halde Lucas tam sayı dizisi

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

dir.

$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ için

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\alpha_1 - \beta_1} \text{ ve } L_n = \alpha_1^n + \beta_1^n$$

olup

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \text{ ve } F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}$$

dir.

Yine U_n tam sayı dizisinde $p = 2$ ve $q = -1$ olarak alınırsa

$$U_n = U_n(2, -1) = 2U_{n-1} + U_{n-2} = P_n$$

Pell tam sayı dizisi elde edilmiş olur. Şu halde Pell tam sayı dizisi

$$P_0 = 0, P_1 = 1, P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

dir. V_n tam sayı dizisinde $p = 2$ ve $q = -1$ olarak alınırsa

$$V_n = V_n(2, -1) = 2V_{n-1} + V_{n-2} = Q_n$$

Pell-Lucas tam sayı dizisi elde edilmiş olur. Şu halde Pell-Lucas tam sayı dizisi

$$Q_0 = Q_1 = 2, Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

dir.

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ için

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

olup

$$Q_n = P_{n-1} + P_{n+1} \text{ ve } Q_n = \frac{P_{2n}}{P_n}$$

dir.

Yukarıda bahsedilen dört tam sayı dizisinden farklı olarak Hintli matematikçiler Behera ve Panda (1999) tarafından balans sayıları tanımlanmıştır. Şöyle ki

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \tag{1.1}$$

eşitliğini sağlayan pozitif n tam sayısına balans sayısı, pozitif r tam sayısına ise balansır demişlerdir.

Balans sayıları B_n ve balansırlar da R_n ile gösterilirse

$$B_0 = 0, B_1 = 1, B_2 = 6, B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

ve

$$R_0 = R_1 = 0, R_2 = 2, R_{n+1} = 6R_n - R_{n-1} + 2$$

dir.

$\gamma = 3 + 2\sqrt{2}$ ve $\delta = 3 - 2\sqrt{2}$ için

$$B_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{4\sqrt{2}} \text{ ve } R_n = \frac{\gamma^n(-1+\sqrt{2}) + \delta^n(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

dir.

(1.1) eşitliğinden

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 1}}{2} \tag{1.2}$$

elde edilir. (1.2) eşitliğine göre B_n bir balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8B_n^2 + 1$ bir tam karedir. Dolayısıyla $\sqrt{8B_n^2 + 1}$ bir tam sayı olup bu tam sayıya Lucas-balans sayısı denir ve C_n ile gösterilir. O halde

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

dir. Buna göre

$$C_0 = 1, C_1 = 3, C_2 = 17, C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

olup

$$C_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

dir.

Daha sonra yine Hintli matematikçiler olan Panda ve Ray (2005) kobalans sayılarını tanımlamışlardır. Şöyle ki

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{1.3}$$

eşitliğini sağlayan pozitif n tam sayısına kobalans sayısı, pozitif r tam sayısına ise kobalansır demişlerdir.

Kobalans sayıları b_n ve kobalansırlar da r_n ile gösterilirse

$$b_0 = b_1 = 0, b_2 = 2, b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

ve

$$r_0 = r_1 = 0, r_2 = 1\ , r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1}$$

dir.

Yukarıda tanımlanan γ ve δ için

$$b_n = \frac{\gamma^n(-1+\sqrt{2}) + \delta^n(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \text{ ve } r_n = \frac{\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}}{4\sqrt{2}}$$

dir.

(1.3) eşitliğinden

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \tag{1.4}$$

elde edilir. (1.4) eşitliğine göre b_n bir kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow 8b_n^2 + 8b_n + 1$ bir tam karedir. Dolayısıyla $\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$ bir tam sayı olup bu tam sayıya Lucas-kobalans sayısı denir ve c_n ile gösterilir. O halde

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

dir. Buna göre

$$c_0 = c_1 = 1, c_2 = 7\ , c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}$$

olup

$$c_n = \frac{\gamma^n(-1+\sqrt{2}) - \delta^n(1+\sqrt{2})}{2}$$

dir.

Yukarıda tanımlanan B_n, R_n, b_n ve r_n tam sayı dizileri için

$$B_n = r_{n+1} \text{ ve } R_n = b_n$$

dir.

Ray (2009), yukarıda tanımlanan tüm bu balans sayıları için

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}, b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \ C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2}$$

ve

$$c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

olduğunu belirterek, bu sayıların genel terimlerini Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2}, b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2}, \ C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \text{ ve } \quad c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

şeklinde elde etmiştir. (Olajos 2010, Panda ve Ray 2011, Panda 2017).

$n \geq 1$ tam sayısı olmak üzere $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklindeki sayılara üçgensel sayılar denir ve T_n ile gösterilir. O halde

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir.

T_n ile B_n ve b_n arasında bir ilişki vardır. Gerçekten de (1.1) eşitliğinden

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2$$

ve böylece

$$T_{B_n+R_n} = B_n^2$$

dir. (1.3) den

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2 + n$$

ve böylece

$$T_{b_n+r_n} = b_n^2 + b_n$$

dir.

Üçgensel sayılardan bazıları tam kare olup bu sayılara kare üçgensel sayılar denir. Kare üçgensel sayılar ise S_n ile gösterilirse, t_n ve s_n tam sayı dizileri için

$$S_n = \frac{t_n(t_n+1)}{2} = s_n^2$$

dir. Üstelik

$$s_n = B_n \text{ ve } t_n = B_n + b_n$$

olup

$$S_n = B_n^2$$

dir.

Yukarıda tanımlanan α ve β için

$$S_n = (\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}})^2,\ s_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \text{ ve } t_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4}$$

olup

$$S_n = \frac{P_{2n}^2}{4},\ s_n = \frac{P_{2n}}{2} \text{ ve } t_n = \frac{P_{2n} + P_{2n-1} - 1}{2}$$

dir.

Liptai (2004), B_n ve F_n tam sayı dizileri arasında bir ilişkinin olup olmadığını ele almış ve sadece $B_1 = F_1 = 1$ olduğunu göstermiştir. Yine Liptai (2006), B_n ve L_n tam sayı dizileri arasında ise hiçbir cebirsel bağıntının olmadığını göstermiştir. Szalay (2007), Liptai' nin ilgilendiği problemi değişik bir yöntem kullanarak incelemiştir. Kovacs ve ark. (2010) ise, $a > 0$ ve $b \geq 0, \text{obeb}(a, b) = 1$ özelliğinde tam sayılar olmak üzere

$$(a + b) + (2a + b) + \cdots + (a(n - 1) + b) = (a(n + 1) + b) + \cdots + (a(n + r) + b)$$

denklemini sağlayan pozitif n tam sayısı için $an + b$ sayısına (a, b)-balans, eşitliği gerçekleyen pozitif r tam sayısı için $ar + b$ sayısına (a, b)-balansır demişler ve bu sayıları $B_n^{(a,b)}$ ve $R_n^{(a,b)}$ ile göstermişlerdir. Liptai ve ark. (2009) ise $y, k, l \geq 4$ tam sayılar olmak üzere

$$1^k + \cdots + (x - 1)^k = (x + 1)^l + \cdots + (y - 1)^l$$

denklemini sağlayan $x \leq y - 2$ özelliğindeki x tam sayısına y için (k, l)-kuvveti demişler ve bu denklem sağlayan k, l tam sayılarını incelemişlerdir. Kovacs ve ark. (2010), pozitif k, x tam sayıları için

$$B_m = \Pi_k(x) = x(x + 1) \ldots (x + k - 1)$$

eşitliğinin $k = 2, 3$ veya 4 için tam sayı çözümlerinin sonlu olmadığını göstermişlerdir. Tengely (2013),

$$B_m = \Pi_5(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$$

denkleminin tam sayı çözümlerinin olmadığını ispatlamıştır. Panda ve ark. (2018) ise B_n ve C_n nin bazı özel toplamları ile ilgili cebirsel sonuçlar elde etmişlerdir. Patel ve ark. (2018) ise tam olmayan B_n ve C_n sayılarını ele almışlar ve bu sayılar ile ilgili bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Ray (2015) ise B_n ve C_n nin bazı toplamlarını matris yöntemini kullanarak elde etmiştir. Gözeri ve ark. (2017) ise B_n, P_n, T_n ve S_n sayıları arasındaki ilişkiyi ele almışlardır. Panda ve Panda (2015),

$$|\ [(n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r)] - [1 + 2 + \cdots + (n - 1)]\ | = 1$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına hemen hemen balans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise hemen hemen balansır demişlerdir. Panda (2017) ise

$$| \, [(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)]-[1+2+\cdots+n] \, | = 1$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına hemen hemen kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise hemen hemen kobalansır demiştir. Daha sonra Tekcan ve Erdem (2023) ise birinci ve ikinci tip hemen hemen tüm balans ve kobalans sayılarının genel terimlerinin balans sayılarına bağlı olarak elde edilebileceğini göstermiştir. Özkoç ve Tekcan (2017) ise $k \geq 1$ tam sayısı için k-balans sayılarını tanımlamışlar ve bunlarla ilgili bazı cebirsel sonuçlar elde etmişlerdir. Tekcan ve Erdem (2020) ise $t \geq 1$ tam sayısı için t-kobalans sayılarını, Tekcan ve Aydın (2021) ise t-balans sayılarını ele alarak bu sayıların genel terimlerini elde etmişlerdir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Balkobalans sayıları esasında balans ve kobalans sayılarından elde edilmiş sayılardır. Şöyle ki (1.1) ve (1.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$1+2+\cdots+n-1+1+2+\cdots+n=2[(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)] \quad (2.1)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu eşitliği sağlayan pozitif n tam sayısına balkobalans, pozitif r tam sayısına ise balkobalansır denir.

(2.1) eşitliği r ye göre çözülürse

$$r=\frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+4n+1}}{2} \quad (2.2)$$

olduğu görülür. Balkobalans sayıları B_n^{bk} ile gösterilirse, (2.2) den B_n^{bk} bir balkobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1$ bir tam karedir. Dolayısıyla

$$C_n^{bk}=\sqrt{8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1} \quad (2.3)$$

tam sayısına Lucas-balkobalans sayısı denir.

Balkobalans sayılarının, balkobalansırların ve Lucas-balkobalans sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için

$$x^2-2y^2=-1 \quad (2.4)$$

denkleminin (Barbeau (2003), Mollin (1996) ve Flath (1989)) tam sayı çözümlerinin bulunması gerekir. Çünkü (2.3) den B_n^{bk} bir balkobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1$ bir tam karedir. Dolayısıyla $y\geq 1$ tam sayısı için

$$8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1=y^2$$

olsun. Bu son denklemin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$$16(B_n^{bk})^2+8B_n^{bk}+2=2y^2$$

ve buradan

$$(4B_n^{bk}+1)^2+1=2y^2$$

elde edilir. Eğer burada

$$x=4B_n^{bk}+1 \tag{2.5}$$

olarak alınırsa (2.4) deki negatif Pell denklemi elde edilmiş olur.

Burada şu şekilde bir yol izlenilecektir: (2.4) deki denkleminin pozitif (x_n, y_n) tam sayı çözümleri belirlenecek, sonrasında (2.5) den

$$B_n^{bk}=\frac{x-1}{4}$$

balkobalans sayıların genel terimi, sonrasında (2.3) den

$$C_n^{bk}=\sqrt{8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1}$$

Lucas-balkobalans sayıların genel terimi ve son olarak da (2.2) den

$$R_n^{bk}=\frac{-2B_n^{bk}-1+\sqrt{8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1}}{2}$$

balkobalansırların genel terimi elde edilecektir. B_n^{bk}, C_n^{bk} ve R_n^{bk} ların genel terimleri belirlendikten sonra bu sayıların balans sayıları, Pell sayıları, üçgensel ve kare üçgensel sayılar ile olan ilişkisi ortaya çıkartılacaktır.

3. BALKOBALANS SAYILARI

Bu bölümde yeni bir tam sayı dizisi tanımlanacak ve bu tam sayı dizisinin balans, kobalans, Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayıları ile olan ilişkisi ele alınacaktır.

3.1 Balkobalans Sayıları

(1.1) ve (1.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$1+2+\cdots+n-1+1+2+\cdots+n=2[(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)] \quad (3.1)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu eşitliği sağlayan pozitif n tam sayısına balkobalans sayısı, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise balkobalansır denir.

(3.1) eşitliği r ye göre çözülürse

$$r=\frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+4n+1}}{2} \quad (3.2)$$

olduğu görülür. Balkobalans sayıları B_n^{bk} ile gösterilirse (3.2) eşitliğinden B_n^{bk} bir balkobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1$ bir tam karedir. Şu halde

$$C_n^{bk}=\sqrt{8(B_n^{bk})^2+4B_n^{bk}+1} \quad (3.3)$$

tam sayı olup bu sayıya Lucas-balkobalans sayısı denir.

Balkobalans sayılarının, balkobalansırların ve Lucas-balkobalans sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için

$$x^2-2y^2=-1 \quad (3.4)$$

denkleminin çözülmesi gerekir. (3.3) den B_n^{bk} bir balkobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{bk})^2 + 4B_n^{bk} + 1$ bir tam karedir. Buna göre belli bir $y \geq 1$ tam sayısı için

$$8(B_n^{bk})^2 + 4B_n^{bk} + 1 = y^2$$

olsun. Bu son denklemin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$$16(B_n^{bk})^2 + 8B_n^{bk} + 2 = 2y^2$$

ve buradan

$$(4B_n^{bk} + 1)^2 + 1 = 2y^2$$

elde edilir. Eğer

$$x = 4B_n^{bk} + 1$$

olarak alınırsa (3.4) deki eşitlik elde edilir.

$x^2 - 2y^2 = -1$ denklemi için $\Omega = \{(x, y): x^2 - 2y^2 = -1\}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. $\Omega = \{(c_n, 2b_n + 1): n \geq 1\}$ dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. (3.4) deki negatif Pell denklemi için çözüm temsilcileri kümesi

$$\text{Rep} = \{[\pm 1 \quad 1]\}$$

ve çözüm matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $n \geq 1$ için $[-1 \quad 1]M^n = [x_n \quad y_n]$ dir. Diğer yandan

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & 2B_n \\ 4B_n & C_n \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$[x_n \quad y_n] = [-1 \quad 1]\begin{bmatrix} C_n & 2B_n \\ 4B_n & C_n \end{bmatrix} = [-C_n + 4B_n \quad -2B_n + C_n]$$

ve dolayısıyla $\Omega = \{(-C_n + 4B_n, -2B_n + C_n): n \geq 1\}$ dir. Ancak

$$-C_n + 4B_n = c_n \text{ ve } -2B_n + C_n = 2b_n + 1$$

olduğundan, $\Omega = \{(c_n, 2b_n + 1): n \geq 1\}$ dir.

Teorem 3.1.2. Balkobalans sayılarının, balkobalansırların ve Lucas-balkobalans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$B_n^{bk} = \frac{c_{2n+1} - 1}{4},\ C_n^{bk} = 2b_{2n+1} + 1 \text{ ve } R_n^{bk} = \frac{4b_{2n+1} - c_{2n+1} + 1}{4}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Yukarıdaki teoremde $x^2 - 2y^2 = -1$ için $\Omega = \{(c_n, 2b_n + 1): n \geq 1\}$ olduğu belirtilmişti. $x = 4B_n^{bk} + 1$ olduğundan $n \geq 1$ için

$$B_n^{bk} = \frac{x_{2n+1} - 1}{4} = \frac{c_{2n+1} - 1}{4}$$

dir. (3.3) den

$$C_n^{bk} = \sqrt{8(B_n^{bk})^2 + 4B_n^{bk} + 1}$$

$$= \sqrt{8(\frac{c_{2n+1} - 1}{4})^2 + 4(\frac{c_{2n+1} - 1}{4}) + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{c_{2n+1}^2 + 1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}}{2})^2 + 1}{2}}$$

$$= \sqrt{\left[2(\frac{\alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}) + 1\right]^2}$$

$$= 2b_{2n+1} + 1$$

elde edilir. Son olarak (3.2) den

$$R_n^{bk} = \frac{4b_{2n+1} - c_{2n+1} + 1}{4}$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki çizelgede tüm balkobalans sayılarının ilk 5 terimi verilmiştir.

Çizelge 3.1. Tüm balkobalans sayılarının ilk 5 terimi

n	B_n^{bk}	C_n^{bk}	R_n^{bk}
1	10	29	4
2	348	985	144
3	11830	33461	4900
4	401880	1136689	166464
5	13652098	38613965	5654884

Teorem 3.1.3. $B_n^{bk} = \frac{B_{2n}+b_{2n+1}}{2}$, $C_n^{bk} = 2b_{2n+1} + 1$ ve $R_n^{bk} = \frac{-B_{2n}+b_{2n+1}}{2}$ dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.1.2 de $B_n^{bk} = \frac{c_{2n+1}-1}{4}$ olduğu gösterilmişti. Buna göre

$$B_n^{bk} = \frac{c_{2n+1} - 1}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+1}(\frac{\alpha^{-1}+1}{4\sqrt{2}}) + \beta^{4n+1}(\frac{-\beta^{-1}-1}{4\sqrt{2}})}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^{4n}-\beta^{4n}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{B_{2n} + b_{2n+1}}{2}$$

olduğu görülür. $C_n^{bk} = 2b_{2n+1} + 1$ olduğu zaten gösterilmişti. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde $R_n^{bk} = \frac{-B_{2n}+b_{2n+1}}{2}$ olduğu da gösterilebilir.

Teorem 3.1.4. $B_n^{bk} = 2B_n(B_{n+1} - B_n)$, $C_n^{bk} = B_{2n+1} - B_{2n}$, $R_n^{bk} = 4B_n^2$ veya $B_n^{bk} = \frac{C_{2n+1}-C_{2n}-2}{8}$, $C_n^{bk} = \frac{C_{2n+1}+C_{2n}}{4}$, $R_n^{bk} = \frac{C_{2n}-1}{4}$ dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.1.3 den

$$B_n^{bk} = \frac{B_{2n} + b_{2n+1}}{2}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^{4n}-\beta^{4n}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+1} - \alpha^{2n}\beta^{2n+1} - \beta^{2n}\alpha^{2n+1} + \beta^{4n+1}}{8}$$

$$= 2\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n}(\alpha^2 - 1) - \beta^{2n}(\beta^2 - 1)}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}} - \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2B_n(B_{n+1} - B_n)$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

3.1.2, 3.1.3 ve 3.1.4 Teoremlerinde, balkobalans sayılarının, balkobalansırların ve Lucas-balkobalans sayılarının genel terimleri, balans sayılarının genel terimlerine bağlı olarak elde edildi. Tersine aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.5. Tüm balans sayılarının genel terimleri

$$B_n = \begin{cases} B_{\frac{n}{2}}^{bk} - R_{\frac{n}{2}}^{bk} & n \geq 2 \text{ çift} \\ (B_{\frac{n+1}{2}}^{bk} + B_{\frac{n-1}{2}}^{bk} - 2R_{\frac{n+1}{2}}^{bk})/2 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} -B_{\frac{n}{2}}^{bk} + 3R_{\frac{n}{2}}^{bk} & n \geq 2 \text{ çift} \\ B_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + R_{\frac{n-1}{2}}^{bk} & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} -4B_{\frac{n}{2}}^{bk} + 2C_{\frac{n}{2}}^{bk} - 1 & n \geq 2 \text{ çift} \\ 4B_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + 2C_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + 1 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 12B_{\frac{n}{2}}^{bk} - 4C_{\frac{n}{2}}^{bk} + 3 & n \geq 2 \text{ çift} \\ 4B_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + 1 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.1.3 de $B_n^{bk} = \frac{B_{2n}+b_{2n+1}}{2}$ ve $R_n^{bk} = \frac{-B_{2n}+b_{2n+1}}{2}$ olduğu dikkate alınırsa $B_{2n} = B_n^{bk} - R_n^{bk}$ ve böylece $n \geq 2$ çift için

$$B_n = B_{\frac{n}{2}}^{bk} - R_{\frac{n}{2}}^{bk}$$

dir. Diğer tüm eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2 Binet Formülleri, İndirgeme Bağıntıları ve Katsayılar Matrisi

Bu alt bölümde balkobalans sayılarının, balkobalansırların ve Lucas-balkobalans sayılarının Binet formülleri, indirgeme bağıntıları ve katsayılar matrisi ile ilgili sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.2.1. Balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların Binet formülleri $n \geq 1$ için

$$B_n^{bk} = \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4},\ C_n^{bk} = \frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{2\sqrt{2}} \text{ ve } R_n^{bk} = \frac{\alpha^{4n}+\beta^{4n}}{8} - \frac{1}{4}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. $B_n = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$ ve $b_n = \frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$ olduğu dikkate alınırsa Teorem 3.1.3 den

$$\begin{aligned} B_n^{bk} &= \frac{B_{2n}+b_{2n+1}}{2} \\ &= \frac{\frac{\alpha^{4n}-\beta^{4n}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{2} \\ &= \frac{\alpha^{4n}(\frac{1+\alpha}{4\sqrt{2}}) + \beta^{4n}(\frac{-1-\beta}{4\sqrt{2}})}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Ön bilgiler kısmında balans sayılarının genel teriminin $B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2}$ olduğu belirtilmişti. Aynı şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2. Balkobalans sayılarının, balkobalansırların ve Lucas-balkobalans sayılarının indirgeme bağıntıları $n \geq 3$ için

$$B_n^{bk} = 35(B_{n-1}^{bk} - B_{n-2}^{bk}) + B_{n-3}^{bk}$$

$$R_n^{bk} = 35(R_{n-1}^{bk} - R_{n-2}^{bk}) + R_{n-3}^{bk}$$

ve $n \geq 2$ için

$$C_n^{bk} = 34C_{n-1}^{bk} - C_{n-2}^{bk}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.2.1 de $B_n^{bk} = \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}$ olduğu belirtilmişti. Diğer yandan

$$35\alpha^{-3} - 35\alpha^{-7} + \alpha^{-1} \ = \alpha \text{ ve } 5\beta^{-3} - 35\beta^{-7} + \beta^{-1} \ = \beta$$

olduğundan

$$35\left(B_{n-1}^{bk} - B_{n-2}^{bk}\right) + B_{n-3}^{bk}$$

$$= 35\left[\left(\frac{\alpha^{4n-3}+\beta^{4n-3}}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\alpha^{4n-7}+\beta^{4n-7}}{8} - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$+\frac{\alpha^{4n-11}+\beta^{4n-11}}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n}(35\alpha^{-3} - 35\alpha^{-7} + \alpha^{-1}\ ) + \beta^{4n}(35\beta^{-3} - 35\beta^{-7} + \beta^{-11})}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}$$

$$= B_n^{bk}$$

dır. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Balans sayılarının katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $n \geq 1$ için bu matrisin n. kuvveti

$$M^n = \begin{bmatrix} B_{n+1} & -B_n \\ B_n & -B_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

dir. Teorem 3.2.2 gereği $B_n^{bk} = 35\left(B_{n-1}^{bk} - B_{n-2}^{bk}\right) + B_{n-3}^{bk}$ ve $R_n^{bk} = 35(R_{n-1}^{bk} - R_{n-2}^{bk})$ $+R_{n-3}^{bk}$ olduğundan bu sayıların katsayılar matrisi

$$M^{bk} = \begin{bmatrix} 35 & -35 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $C_n^{bk} = 34C_{n-1}^{bk} - C_{n-2}^{bk}$ olduğundan bu sayıların katsayılar matrisi de

$$N^{bk} = \begin{bmatrix} 34 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. M^{bk} ve N^{bk} matrislerinin n. kuvvetleri aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.3. $n \geq 4$ çift iken

$$(M^{bk})^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} B_{4i+1} & -\sum_{i=1}^{n} B_{2i+1} & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} B_{4i+3} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} B_{4i+3} & -\sum_{i=1}^{n-1} B_{2i+1} & \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} B_{4i+1} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} B_{4i+1} & -\sum_{i=1}^{n-2} B_{2i+1} & \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{2}} B_{4i+3} \end{bmatrix}$$

ve $n \geq 3$ tek iken

$$(M^{bk})^n = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} B_{4i+3} & -\sum_{i=1}^{n} B_{2i+1} & \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} B_{4i+1} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} B_{4i+1} & -\sum_{i=1}^{n-1} B_{2i+1} & \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} B_{4i+3} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} B_{4i+3} & -\sum_{i=1}^{n-2} B_{2i+1} & \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} B_{4i+1} \end{bmatrix}$$

dir. Her $n \geq 1$ için

$$(N^{bk})^n = (-1)^n \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} B_{2i-1} & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{2i-1} \\ -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} B_{2i-1} & -\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} B_{2i-1} \end{bmatrix}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Tümevarımla gösterilebilir.

M^{bk} ve N^{bk} katsayılar matrisinin $n.$ kuvveti, balans sayılarının toplamına bağlı olmadan, balans ve Lucas-balans sayılarının genel terimlerine bağlı olarak da verilebilir. Bunun için $n \geq 0$ olmak üzere

$$q_n = \frac{-8B_{2n} + 3C_{2n} - 3}{96} \quad \text{ve} \quad w_n = \frac{-288B_{2n} - 102C_{2n} + 102}{96}$$

tam sayı dizileri tanımlanırsa, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.4. $n \geq 2$ için

$$(M^{bk})^n = \begin{bmatrix} q_{n+2} & w_n & q_{n+1} \\ q_{n+1} & w_{n-1} & q_n \\ q_n & w_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix}$$

ve

$$(N^{bk})^n = (-1)^n \begin{cases} \begin{bmatrix} q_{n+2} - q_{n+1} & q_n - q_{n+1} \\ -q_n + q_{n+1} & -q_n + q_{n-1} \end{bmatrix} & n \geq 2 \text{ çift} \\ \begin{bmatrix} q_{n+1} - q_{n+2} & q_{n+1} - q_n \\ -q_{n+1} + q_n & -q_{n-1} + q_n \end{bmatrix} & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Tümevarımla gösterilebilir.

Bu katsayılar matrislerinin $n.$ kuvvetlerinin karakteristik polinomları ve özdeğerleri aşağıdaki teoremdeki gibidir.

Teorem 3.2.5. $(M^{bk})^n$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P_\lambda((M^{bk})^n) = -\lambda^3 + (2C_{2n}+1)\lambda^2 - (2C_{2n}+1)\lambda + 1$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = C_{2n} + 2\sqrt{2}B_{2n} \text{ ve } \lambda_2 = C_{2n} - 2\sqrt{2}B_{2n}$$

dir. $(N^{bk})^n$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P_\lambda((N^{bk})^n) = \lambda^2 - 2C_{2n}\lambda + 1$$

ve özdeğerleri

$$\lambda_0 = C_{2n} + 2\sqrt{2}B_{2n} \quad \text{ve} \quad \lambda_1 = C_{2n} - 2\sqrt{2}B_{2n}$$

dir. (Tekcan ve Yıldız 2022).

İspat. M^{bk} nın n. kuvvetinin

$$(M^{bk})^n = \begin{bmatrix} q_{n+2} & w_n & q_{n+1} \\ q_{n+1} & w_{n-1} & q_n \\ q_n & w_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu dikkate alınırsa, buradan bu matrisin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
P_\lambda((M^{bk})^n) &= \det((M^{bk})^n - \lambda I_3) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} q_{n+2} & w_n & q_{n+1} \\ q_{n+1} & w_{n-1} & q_n \\ q_n & w_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} q_{n+2}-\lambda & w_n & q_{n+1} \\ q_{n+1} & w_{n-1}-\lambda & q_n \\ q_n & w_{n-2} & q_{n-1}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + (q_{n+2} + w_{n-1} + q_{n-1})\lambda^2
\end{aligned}$$

$$+(-q_{n+2}w_{n-1} - q_{n+2}q_{n-1} - w_{n-1}q_{n-1} + q_n w_{n-2} + q_{n+1}w_n + q_{n+1}q_n)\lambda$$

$$+q_{n+2}w_{n-1}q_{n-1} - q_{n+2}q_n w_{n-2} + w_{n-2}q_{n+1}^2 - q_{n+1}w_n q_{n-1} + w_n q_n^2 - q_n q_{n+1} w_{n-1}$$

dır. Ancak burada

$$q_{n+2} + w_{n-1} + q_{n-1} = 2C_{2n} + 1,$$

$$-q_{n+2}w_{n-1} - q_{n+2}q_{n-1} - w_{n-1}q_{n-1} + q_nw_{n-2} + q_{n+1}w_n + q_{n+1}q_n = -2C_{2n} - 1$$

ve

$$q_{n+2}w_{n-1}q_{n-1} - q_{n+2}q_nw_{n-2} + w_{n-2}q_{n+1}^2 -$$

$$q_{n+1}w_nq_{n-1} + w_nq_n^2 - q_nq_{n+1}w_{n-1} = 1$$

olduğundan, yukarıdaki eşitlikten karakteristik polinomunun

$$P_\lambda((M^{bk})^n) = -\lambda^3 + (2C_{2n} + 1)\lambda^2 - (2C_{2n} + 1)\lambda + 1$$

olduğu görülür. Bu polinomun kökleri ise $\lambda_0 = 1$ ve

$$\lambda_{1,2} = \frac{2C_{2n} \pm \sqrt{(2C_{2n} + 1)^2 - 2(2C_{2n} + 1) - 3}}{2}$$

$$= C_{2n} \pm \sqrt{C_{2n}^2 - 1}$$

$$= C_{2n} \pm 2\sqrt{2}B_{2n}$$

dir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

3.3 Pell ve Pell-Lucas Sayıları ile Olan İlişki

Hatırlanacağı üzere tüm balans sayılarının genel terimleri

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2}, b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2}, C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \text{ ve } c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

veya

$$B_n = \frac{Q_{2n} + Q_{2n-1}}{8}, b_n = \frac{Q_{2n} - Q_{2n-1} - 4}{8}, C_n = \frac{Q_{2n}}{2} \text{ ve } c_n = \frac{Q_{2n-1}}{2}$$

olacak şekilde Pell veya Pell-Lucas sayılarına bağlı olarak verilebiliyordu. Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1. Balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların genel terimleri Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n^{bk} = P_{2n+1}P_{2n},\ C_n^{bk} = P_{2n+1}^2 + P_{2n}^2,\ R_n^{bk} = P_{2n}^2$$

veya Pell-Lucas sayılarına bağlı olarak

$$B_n^{bk} = \frac{Q_{2n+1}Q_{2n} - 4}{8}, C_n^{bk} = \frac{Q_{2n+1}^2 + Q_{2n}^2}{8}, R_n^{bk} = (\frac{Q_{2n+1} - Q_{2n}}{4})^2$$

şeklinde verilebilir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.1.3 gereği $B_n^{bk} = \frac{B_{2n}+b_{2n+1}}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
B_n^{bk} &= \frac{B_{2n} + b_{2n+1}}{2} \\
&= \frac{\frac{\alpha^{4n}-\beta^{4n}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{4n+1}(\alpha^{-1} + 1) + \beta^{4n+1}(-1 - \beta^{-1})}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1} - (\alpha\beta)^{2n}(\alpha + \beta)}{8} \\
&= \frac{\alpha^{4n+1} - \alpha^{2n+1}\beta^{2n} - \beta^{2n+1}\alpha^{2n} + \beta^{4n+1}}{8} \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{2\sqrt{2}}\right) \\
&= P_{2n+1}P_{2n}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde verilebilir.

Yukarıdaki teoremin tersine, Pell ve Pell-Lucas sayılarının genel terimleri balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların genel terimlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 3.3.2. Pell ve Pell-Lucas sayılarının genel terimleri

$$P_n = \begin{cases} 2(B^{bk}_{\frac{n}{4}} - R^{bk}_{\frac{n}{4}}) & n \equiv 0(\text{mod}4) \\ C^{bk}_{\frac{n-1}{4}} & n \equiv 1(\text{mod}4) \\ 4B^{bk}_{\frac{n-2}{4}} + C^{bk}_{\frac{n-2}{4}} + 1 & n \equiv 2(\text{mod}4) \\ 8B^{bk}_{\frac{n-3}{4}} + 3C^{bk}_{\frac{n-3}{4}} + 2 & n \equiv 3(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$Q_n = \begin{cases} 8R^{bk}_{\frac{n}{4}} + 2 & n \equiv 0(\text{mod}4) \\ 8B^{bk}_{\frac{n-1}{4}} + 2 & n \equiv 1(\text{mod}4) \\ 8B^{bk}_{\frac{n-2}{4}} + 4C^{bk}_{\frac{n-2}{4}} + 2 & n \equiv 2(\text{mod}4) \\ (C^{bk}_{\frac{n+1}{4}} - C^{bk}_{\frac{n-3}{4}})/2 & n \equiv 3(\text{mod}4). \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.3.1 e benzer şekilde gösterilebilir.

Böylelikle balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların genel terimleri ile Pell ve Pell-Lucas sayılarının genel terimleri arasında birebir bir ilişki kurulmuş oldu.

3.4 Balkobalans Sayıları ile Üçgensel ve Kare Üçgensel Sayılar

Giriş kısmında

$$T_{B_n+R_n} = B_n^2 \tag{3.6}$$

ve

$$T_{b_n+r_n} = b_n^2 + b_n$$

şeklinde cebirsel bağıntıların olduğu belirtilmişti. (3.6) eşitliğine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.1. B_n^{bk} balkobalans sayısı için

$$T_{B_n^{bk}+R_n^{bk}} = (B_n^{bk})^2 + \frac{B_n^{bk}}{2}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. (3.1) eşitliği yeniden düzenlenirse $n^2 = 2nr + r^2 + r$ ve buradan

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2 + \frac{n}{2}$$

dir. O halde $T_{B_n^{bk}+R_n^{bk}} = (B_n^{bk})^2 + \frac{B_n^{bk}}{2}$ dir.

Teorem 3.4.2. B_n^{bk}, C_n^{bk} ve R_n^{bk} için

$$B_n^{bk} = \frac{2s_{2n+1} - t_{2n+1} - 1}{2}$$

$$C_n^{bk} = -2s_{2n+1} + 2t_{2n+1} + 1$$

$$R_n^{bk} = \frac{-4s_{2n+1} + 3t_{2n+1} + 1}{2}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. $B_n^{bk} = \frac{B_{2n}+b_{2n+1}}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$B_n^{bk} = \frac{B_{2n} + b_{2n+1}}{2}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^{4n}-\beta^{4n}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{\alpha^{4n+2}(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}) + \beta^{4n+2}(-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\alpha^{4n+2} - \beta^{4n+2}}{4\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2}{4}\right) - 1}{2}$$

$$= \frac{2s_{2n+1} - t_{2n+1} - 1}{2}$$

dir. Diğer eşitliklerde benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.4.2 de balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların genel terimleri, kare üçgensel sayıların genel terimlerine bağlı olarak elde edildi. Tersine kare üçgensel sayıların genel terimleri de balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların genel terimlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.4.3. Kare üçgensel sayıların genel terimleri

$$S_n = \frac{R_n^{bk}}{4}$$

$$s_n = \begin{cases} B_{\frac{n}{2}}^{bk} - R_{\frac{n}{2}}^{bk} & n \geq 2 \text{ çift} \\ (4B_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + C_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + 1)/2 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$t_n = \begin{cases} 2R_{\frac{n}{2}}^{bk} & n \geq 2 \text{ çift} \\ 2B_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + C_{\frac{n-1}{2}}^{bk} & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.1.3 gereği $R_n^{bk} = \frac{-B_{2n} + b_{2n+1}}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$R_n^{bk} = \frac{-B_{2n} + b_{2n+1}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{\alpha^{4n}-\beta^{4n}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n+1}-\beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{\alpha^{4n}(-1+\alpha) + \beta^{4n}(1-\beta)}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\alpha^{4n} + \beta^{4n}}{8} - \frac{1}{4}$$

olduğu görülür. Diğer yandan $S_n = \frac{\alpha^{4n}+\beta^{4n}-2}{32}$ olduğundan, yukarıdaki eşitlikten

$$S_n = \frac{\alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2}{32} = \frac{\frac{\alpha^{4n}+\beta^{4n}}{8} - \frac{1}{4}}{4} = \frac{R_n^{bk}}{4}$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Böylelikle balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların genel terimleri ile kare üçgensel sayılarının genel terimleri arasında birebir bir ilişki kurulmuş oldu.

Son olarak balkobalans sayıları yardımıyla üçgensel sayılar ile kare üçgensel sayılar arasında bir ilişkinin olup olmadığı ele alınabilir, yani $T_m = S_n$ eşitliğinin hangi m balkobalans sayıları için gerçeklendiği belirlenebilir.

Teorem 3.4.4. $n \geq 1$ tek iken

$$T_{2B_{\frac{n-1}{2}}^{bk} + C_{\frac{n-1}{2}}^{bk}} = S_n$$

ve $n \geq 2$ çift iken

$$T_{-2B_{\frac{n}{2}}^{bk} + C_{\frac{n}{2}}^{bk} - 1} = S_n$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. $n \geq 1$ tek olsun. Bu takdirde

$$T_{2B^{bk}_{\frac{n-1}{2}}+C^{bk}_{\frac{n-1}{2}}} = \frac{(2B^{bk}_{\frac{n-1}{2}} + C^{bk}_{\frac{n-1}{2}})(2B^{bk}_{\frac{n-1}{2}} + C^{bk}_{\frac{n-1}{2}} + 1)}{2}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left[2\left(\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{2\sqrt{2}}\right] \times \\ \left[2\left(\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{2\sqrt{2}} + 1\right] \end{array} \right\} / 2$$

$$= \frac{(\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2)(\alpha^{2n}+\beta^{2n}+2)}{32}$$

$$= \frac{\alpha^{4n}+\beta^{4n}-2}{32}$$

$$= S_n$$

dir. Diğer durum da benzer şekilde gösterilebilir.

3.5 Balkobalans Sayılarının Toplamları

Bu kısımda tüm balkobalans sayılarının toplamları ele alınacaktır.

Teorem 3.5.1. Balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansır-ların ilk n terim toplamları $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{bk} = \frac{b_{2n+2} - 2n - 2}{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{bk} = \frac{c_{2n+2} - 7}{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^{bk} = \frac{B_{2n+1} - 2n - 1}{8}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. $B_n^{bk}=\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8}-\frac{1}{4}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha^{4i+1}=\frac{-\alpha^3(1-\alpha^{4n})}{4\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n}\beta^{4i+1}=\frac{\beta^3(1-\beta^{4n})}{4\sqrt{2}}$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n}B_i^{bk}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha^{4i+1}+\beta^{4i+1}}{8}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{\frac{-\alpha^3(1-\alpha^{4n})}{4\sqrt{2}}+\frac{\beta^3(1-\beta^{4n})}{4\sqrt{2}}}{8}-\frac{n}{4}$$

$$=\frac{\alpha^{4n+3}-\beta^{4n+3}-\alpha^3+\beta^3}{32\sqrt{2}}-\frac{n}{4}$$

$$=\frac{\alpha^{4n+3}-\beta^{4n+3}-10\sqrt{2}}{32\sqrt{2}}-\frac{n}{4}$$

$$=\frac{\alpha^{4n+3}-\beta^{4n+3}}{32\sqrt{2}}-\frac{5}{16}-\frac{n}{4}$$

$$=\frac{\frac{\alpha^{4n+3}-\beta^{4n+3}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{8}-\frac{5}{16}-\frac{n}{4}$$

$$=\frac{\frac{\alpha^{4n+3}-\beta^{4n+3}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}{8}-\frac{n+1}{4}$$

$$=\frac{b_{2n+2}-2n-2}{8}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Balkobalans sayılarının ilk n terim toplamları balans sayılarına, balkobalans sayılarının ilk n terim toplamları toplamları kobalansırlara ve Lucas-balkobalans sayılarının ilk n terim toplamları da kobalans sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 3.5.2. Balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların ilk n terim toplamları $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{bk} = \frac{B_{2n+2} - B_{2n+1} - 4n - 5}{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{bk} = \frac{5C_{2n+1} - C_{2n} - 14}{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^{bk} = \frac{R_{2n+2} - R_{2n+1} - 4n - 2}{16}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. $B_{2n+2} - B_{2n+1} = 2b_{2n+2} + 1$ eşitliği dikkate alınırsa Teorem 3.5.1 den

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} B_i^{bk} &= \frac{b_{2n+2} - 2n - 2}{8} \\ &= \frac{\frac{B_{2n+2} - B_{2n+1} - 1}{2} - 2n - 2}{8} \\ &= \frac{B_{2n+2} - B_{2n+1} - 4n - 5}{16}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Hatırlanacağı üzere tüm balans sayılarının ilk n terim toplamları, bu sayıların kendilerine bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = \frac{5B_n - B_{n-1} - 1}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{5b_n - b_{n-1} + 2 - 2n}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = \frac{5C_n - C_{n-1} - 2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{5c_n - c_{n-1} - 2}{4}$$

şeklinde verilebiliyordu. Bu toplamlara benzer şekilde tüm balkobalans sayılarının ilk n terim toplamları, yine bu sayıların kendilerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 3.5.3. Balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların ilk n terim toplamları $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{bk} = \frac{33B_n^{bk} - B_{n-1}^{bk} - 8n - 2}{32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{bk} = \frac{33C_n^{bk} - C_{n-1}^{bk} - 28}{32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^{bk} = \frac{33R_n^{bk} - R_{n-1}^{bk} - 8n + 4}{32}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Yukarıdaki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde gösterilebilir.

Tüm balans sayılarının yukarıdaki ilk n terim toplamlarına benzer şekilde

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i B_i = \begin{cases} 2B_{\frac{n}{2}}^2 + B_{\frac{n}{2}} C_{\frac{n}{2}} & n \geq 2 \text{ çift} \\ -2B_{\frac{n+1}{2}}(b_{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2}) & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i b_i = \begin{cases} 2B_{\frac{n}{2}}^2 & n \geq 2 \text{ çift} \\ -2b_{\frac{n+1}{2}}^2 - 2b_{\frac{n+1}{2}} & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_i = \begin{cases} B_n + 8B_{\frac{n}{2}}^2 & n \geq 2 \text{ çift} \\ -B_n - 8(b_{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2})^2 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\, c_i = \begin{cases} B_n & n \geq 2 \text{ çift} \\ -B_n & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

toplamları da verilebilir. Bu toplamlara benzer şekilde balkobalans sayıları için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5.4. Balkobalans sayıları, Lucas-balkobalans sayıları ve balkobalansırlar için

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\, B_i^{bk} = \begin{cases} (35B_n^{bk} - B_{n-1}^{bk} - 2)/36 & n \geq 2 \text{ çift} \\ (-35B_n^{bk} + B_{n-1}^{bk} - 10)/36 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\, C_i^{bk} = \begin{cases} (35C_n^{bk} - C_{n-1}^{bk} - 30)/36 & n \geq 2 \text{ çift} \\ (-35C_n^{bk} + C_{n-1}^{bk} - 30)/36 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\, R_i^{bk} = \begin{cases} (35R_n^{bk} - R_{n-1}^{bk} + 4)/36 & n \geq 2 \text{ çift} \\ (-35R_n^{bk} + R_{n-1}^{bk} - 4)/36 & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Yukarıdaki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde gösterilebilir.

Tekcan ve Tayat (2014), $n \geq 0$ tam sayısı için

$$X_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \quad \text{ve} \quad Y_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}}$$

tam sayı dizilerini tanımlamışlar ve bu tam sayı dizileri yardımıyla

$$\sum_{i=1}^{n} B_i\, C_i = \frac{X_n X_{n-1} Y_n Y_{n-1}}{8}$$

olduğunu göstermişlerdir. Esasında yukarıdaki eşitlik

$$\sum_{i=1}^{n} B_i\, C_i = \frac{C_{2n+1} - 3}{32}$$

dir. Bu son eşitliğe benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5.5. Balkobalans ve Lucas-balkobalans sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{bk} C_i^{bk} = \frac{(3B_n^{bk} + C_n^{bk})^2 - 1}{12}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.2.1 den

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{bk}\, C_i^{bk} = B_1^{bk} C_1^{bk} + B_2^{bk} C_2^{bk} + \cdots + B_n^{bk} C_n^{bk}$$

$$= \left(\frac{\alpha^5 + \beta^5}{8} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha^5 - \beta^5}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\alpha^9 + \beta^9}{8} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha^9 - \beta^9}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{(\alpha^{10} + \alpha^{18} + \cdots + \alpha^{8n+2}) - (\beta^{10} + \beta^{18} + \cdots + \beta^{8n+2})}{16\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\alpha^5 + \alpha^9 + \cdots + \alpha^{4n+1}) - (\beta^5 + \beta^9 + \cdots + \beta^{4n+1})}{8\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha^{10}(\alpha^{8n} - 1)}{\alpha^8 - 1} - \frac{\beta^{10}(\beta^{8n} - 1)}{\beta^8 - 1}\right]$$

$$- \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha^5(\alpha^{4n} - 1)}{\alpha^4 - 1} - \frac{\beta^5(\beta^{4n} - 1)}{\beta^4 - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\frac{\alpha^{8n+6} + \beta^{8n+6} - 198}{24}\right] - \frac{1}{16}\left[\frac{\alpha^{4n+3} + \beta^{4n+3} - 14}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[3\left(\frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2 - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{(3B_n^{bk} + C_n^{bk})^2 - 1}{12}$$

elde edilir.

Santana ve Diaz-Barrero (2006),

$$P_{2n+1} \left| \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \right. \text{ ve } P_{2n} \left| \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} \right.$$

eşitliklerini elde etmişlerdir. Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.5.6. Lucas-balkobalans sayıları için

$$C_n^{bk} \left| \sum_{i=0}^{4n} P_{2i+1} \right.$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.5.2 nin ispatına benzer şekilde

$$\sum_{i=0}^{4n} P_{2i+1} = C_n^{bk}(4B_n^{bk} + 1)$$

olduğu gösterilebilir. Buradan istenilen sonuç açıktır.

3.6. Pell ve Balans Sayılarının Toplamları

Bu kısımda Pell ve balans sayılarının bazı özel toplamları ele alınacak ve bu toplamların balkobalans sayılarına bağlı olarak verilebileceği gösterilecektir.

Panda ve Ray (2011),

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + b_n \tag{3.7}$$

eşitliğini, Gözeri ve ark. (2017) ise

$$\sum_{i=0}^{2n-1} Q_i = C_n + c_n$$

eşitliğini elde etmişlerdir. $R_n = b_n$ olduğundan (3.7) eşitliği

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + R_n \tag{3.8}$$

haline gelir. (3.8) eşitliğine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6.1. B_n^{bk} ve R_n^{bk} tam sayıları için

$$\sum_{i=1}^{2n} P_{2i} = B_n^{bk} + R_n^{bk}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. $\alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^{4n} = \frac{-\alpha(1-\alpha^{4n})}{2}$ ve $\beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{4n} = \frac{-\beta(1-\beta^{4n})}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} P_{2i} &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\alpha^{2i} - \beta^{2i}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\frac{-\alpha(1-\alpha^{4n})}{2} - \frac{-\beta(1-\beta^{4n})}{2}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{4n+1}(1+\alpha^{-1}) + \beta^{4n+1}(1+\beta^{-1})}{8} - \frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\alpha^{4n} + \beta^{4n}}{8} - \frac{1}{4}\right) \\
&= B_n^{bk} + R_n^{bk}
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 3.6.2. Pell, Pell-Lucas ve balans sayıları için

$$\sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} = B_n^{bk} - R_n^{bk}$$

$$\sum_{i=1}^{4n} P_i = 2B_n^{bk}$$

$$\sum_{i=0}^{4n+1} Q_i = 12B_n^{bk} + 4R_n^{bk} + 4$$

$$\sum_{i=1}^{4n} Q_i = 2(C_n^{bk} - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{4n+1} B_i = (3B_n^{bk} + R_n^{bk} + 1)(4B_n^{bk} + 1)$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Benzer şekilde yapılabilir.

Yine Santana ve Diaz-Barrero (2006), $P_1 + P_2 + \cdots + P_{4n+1}$ toplamının

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i\right]^2$$

olduğunu göstermişlerdir. Esasında bu toplam

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = c_{n+1}^2$$

dir. Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6.3. B_n^{bk} balkobalans sayıları için

$$\sum_{i=1}^{8n+1} P_i = (4B_n^{bk}+1)^2$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = \frac{P_{n+1}+P_n-1}{2}$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{8n+1} P_i = \frac{P_{8n+2}+P_{8n+1}-1}{2}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^{8n+2}-\beta^{8n+2}}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{8n+1}-\beta^{8n+1}}{2\sqrt{2}} - 1}{2}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^{8n+2}(1+\alpha^{-1})+\beta^{8n+2}(-1-\beta^{-1})}{2\sqrt{2}}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\alpha^{8n+2}+\beta^{8n+2}}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\alpha^{8n+2}+2\alpha^{4n+1}\beta^{4n+1}+\beta^{8n+2}}{4}$$

$$= 16\left[\left(\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8}\right)(\frac{1}{4}) + \frac{1}{16}\right]$$

$$+8\left(\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8}\right) - 2 + 1$$

$$= 16\left[\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}\right]^2 + 8\left[\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}\right] + 1$$

$$= 16(B_n^{bk})^2 + 8B_n^{bk} + 1$$

$$= (4B_n^{bk}+1)^2$$

olduğu görülür.

Teorem 3.6.3 e benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.6.4. Pell, Pell-Lucas, balans ve Lucas-kobalans sayıları için

$$1+\sum_{i=1}^{8n+3} P_i=(4B_n^{bk}+2C_n^{bk}+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{4n+2} Q_{2i-1}=(8B_n^{bk}+2C_n^{bk}+2)^2$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} B_{2i-1}=(3B_n^{bk}+R_n^{bk}+1)^2$$

$$1+\sum_{i=1}^{4n+2} c_i=(8B_n^{bk}+4R_n^{bk}+3)^2$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2021).

İspat. Teorem 3.6.3 e benzer şekilde yapılabilir.

3.7 Basit Sürekli Kesirli Açılım

A ve $B\neq 0$ herhangi bir tam sayı olmak üzere $\frac{A}{B}$ rasyonel kesri

$$a_0+\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cdots \atop \ddots\; a_{l-3}+\cfrac{b_{l-3}}{a_{l-2}+\cfrac{b_{l-2}}{a_{l-1}}}}}$$

şeklinde bir açılıma sahiptir. Eğer bu açılımdaki her bir $b_i=1$ oluyorsa, yani

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots \atop \ddots\; a_{l-3}+\cfrac{1}{a_{l-2}+\cfrac{1}{a_{l-1}}}}}$$

ise bu açılıma basit sürekli kesirli açılım denir ve bu açılım $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{l-2}, a_{l-1}]$ ile gösterilir. Örneğin, $\frac{473}{9}$ rasyonel kesri için

$$\frac{473}{9} = 52 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

olduğundan

$$\frac{473}{9} = [52; 1, 1, 4]$$

dür.

Teorem 3.7.1. Balkobalans sayılarının basit sürekli kesirli açılımı $k \geq 1$ tamsayı olmak üzere $n = 6k$ ise

$$\frac{B_n^{bk}}{B_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1,32}_{3k-2 \text{ tane}},\ 1, 33, 1, 3, 1, 5, \underbrace{1, 168, 1, 5, 1, 3, 1,5}_{k-1 \text{ tane}}, 1, 169\right]$$

$n = 6k + 1$ ise

$$\frac{B_n^{bk}}{B_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1,32}_{3k-1\text{tane}},\ 1, 172, 1, 5, 1, 3, \underbrace{1, 5, 1, 168, 1, 5, 1, 3}_{k-1 \text{ tane}}, 1, 6\right]$$

$n = 6k + 2$ ise

$$\frac{B_n^{bk}}{B_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1,32}_{3k-1\text{tane}},\ 1, 33, \underbrace{1, 3, 1, 5, 1, 168, 1, 5}_{k-1 \text{ tane}}, 1, 4\right]$$

$n = 6k + 3$ ise

$$\frac{B_n^{bk}}{B_{n-1}^{bk}} = \left[33; \underbrace{1,32}_{3k\text{tane}},\ 1, 172, 1, 5, 1, 3, 1, 5, \underbrace{1, 168, 1, 5, 1, 3, 1, 5}_{k-1 \text{ tane}}, 1, 169\right]$$

$n = 6k + 4$ ise

$$\frac{B_n^{bk}}{B_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1,32}_{3k \text{ tane}},\ 1, 33, 1, 3, \underbrace{1, 5, 1, 168, 1, 5, 1, 3}_{k-1 \text{ tane}}, 1, 6\right]$$

ve $n = 6k + 5$ ise

$$\frac{B_n^{bk}}{B_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1{,}32}_{3k+1\text{tane}},\quad 1, 172, 1, 5, 1, 3, 1, 5, \underbrace{1, 168, 1, 5, 1, 3, 1, 5}_{k-1\text{ tane}}, 1, 168, 1, 5, 1, 4\right]$$

dir. Lucas-balkobalans sayılarının basit sürekli kesirli açılımı $n \geq 2$ için

$$\frac{C_n^{bk}}{C_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1{,}32}_{n-2\text{ tane}},\ 1, 28\right]$$

ve balkobalansırların basit sürekli kesirli açılımı $n \geq 6$ çift için

$$\frac{R_n^{bk}}{R_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1, 32}_{\frac{n-4}{2}\text{ tane}},\ 1, 35, 33,\ \underbrace{1, 32}_{\frac{n-6}{2}\text{ tane}}\ , 1, 33\right]$$

ve $n \geq 5$ tek için

$$\frac{R_n^{bk}}{R_{n-1}^{bk}} = \left[33;\ \underbrace{1, 32}_{\frac{n-5}{2}\text{ tane}},\ 1, 35, 33,\ \underbrace{1, 32}_{\frac{n-5}{2}\text{ tane}}\ , 1, 33\right]$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2022).

İspat. Tümevarımla kolayca gösterilebilir.

3.8 Sirkülant Matrisler ve Spektral Normlar

x_i ler sabit sayılar olmak üzere

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-4} & x_{n-3} \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{bmatrix}$$

tipindeki matrislere sirkülant matris denir. $i=\sqrt{-1}, w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ olmak üzere $j=0,\ 1,\cdots,$ $n-1$ için X matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_j(X)=\sum_{u=0}^{n-1} x_u w^{-j} \tag{3.9}$$

dır. $Q=[q_{ij}]_{n\times n}$ karesel matrisinin eşlenik transpozu Q^* ile gösterilirse, Q^*Q matrisinin özdeğerleri λ_j olmak üzere Q matrisinin spektral normu ise

$$\|Q\|_{spek}=\max_{0\le j\le n-1}\{\sqrt{\lambda_j}\}$$

olarak tanımlanır.

Balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların sirkülant matrisleri sırasıyla $M(B_n^{bk}), M(C_n^{bk})$ ve $M(R_n^{bk})$ ile gösterilsin. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.8.1. $M(B_n^{bk}), M(C_n^{bk}), M(R_n^{bk})$ matrislerinin özdeğerleri $j=0,1,2,\cdots,n-1$ için

$$\lambda_j\Big(M(B_n^{bk})\Big)=\frac{\big(B_{n-1}^{bk}+2\big)w^{-j}-B_n^{bk}}{w^{-2j}-34w^{-j}+1}$$

$$\lambda_j\Big(M(C_n^{bk})\Big)=\frac{\big(C_{n-1}^{bk}-5\big)w^{-j}-C_n^{bk}+1}{w^{-2j}-34w^{-j}+1}$$

$$\lambda_j\Big(M(R_n^{bk})\Big)=\frac{\big(R_{n-1}^{bk}-4\big)w^{-j}-R_n^{bk}}{w^{-2j}-34w^{-j}+1}$$

dir. Bu matrislerin spektral normları ise

$$||M(B_n^{bk})||_{spek}=\frac{33B_{n-1}^{bk}-B_{n-2}^{bk}-8n+6}{32}$$

$$||M(C_n^{bk})||_{spek}=\frac{33C_{n-1}^{bk}-C_{n-2}^{bk}+4}{32}$$

$$||M(R_n^{bk})||_{spek} = \frac{33R_{n-1}^{bk} - R_{n-2}^{bk} - 8n + 12}{32}$$

dir (Tekcan ve Yıldız 2022).

İspat. $B_n^{bk} = \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}$ olduğuna dikkat edilirse (3.9) dan

$$\lambda_j(B_n^{bk}) = \sum_{u=0}^{n-1} B_u^{bk} w^{-j} = \sum_{u=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha^{4u+1} + \beta^{4u+1}}{8} - \frac{1}{4} \right) w^{-ju}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\alpha \sum_{u=0}^{n-1} (\alpha^4 w^{-j})^u + \beta \sum_{u=0}^{n-1} (\beta^4 w^{-j})^u\right] - \frac{1}{4}\sum_{u=0}^{n-1} w^{-ju}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(\alpha - \alpha^{4n+1})(1 - \beta^4 w^{-j}) + (1 - \alpha^4 w^{-j})(\beta - \beta^{4n+1})}{(1 - \alpha^4 w^{-j})(1 - \beta^4 w^{-j})}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{w^{-j}(-\alpha\beta^4 + \alpha^{4n+1}\beta^4 - \alpha^4\beta + \alpha^4\beta^{4n+1}) + \alpha + \beta - \alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{w^{-2j} - 34w^{-j} + 1}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{w^{-j}(\alpha^{4n-3} + \beta^{4n-3} + 14) - (\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1} - 2)}{w^{-2j} - 34w^{-j} + 1}\right]$$

$$= \frac{w^{-j}\left(\frac{\alpha^{4n-3}+\beta^{4n-3}-2+16}{8}\right) - \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}-2}{8}}{w^{-2j} - 34w^{-j} + 1}$$

$$= \frac{(B_{n-1}^{bk} + 2)w^{-j} - B_n^{bk}}{w^{-2j} - 34w^{-j} + 1}$$

olduğu görülür. Diğer iki matrisin özdeğerleri de benzer şekilde gösterilebilir. Balkobalans sayılarının sirkülant matrisi

$$M(B_n^{bk}) = \begin{bmatrix} B_0^{bk} & B_1^{bk} & B_2^{bk} & \cdots & B_{n-2}^{bk} & B_{n-1}^{bk} \\ B_{n-1}^{bk} & B_0^{bk} & B_1^{bk} & \cdots & B_{n-3}^{bk} & B_{n-2}^{bk} \\ B_{n-2}^{bk} & B_{n-1}^{bk} & B_0^{bk} & \cdots & B_{n-4}^{bk} & B_{n-3}^{bk} \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ B_2^{bk} & B_3^{bk} & B_4^{bk} & \cdots & B_0^{bk} & B_1^{bk} \\ B_1^{bk} & B_2^{bk} & B_3^{bk} & \cdots & B_{n-1}^{bk} & B_0^{bk} \end{bmatrix}$$

dır. Buna göre

$$
\begin{aligned}
B_{11}^{bk} &= (B_0^{bk})^2 + (B_{n-1}^{bk})^2 + \cdots + (B_2^{bk})^2 + (B_1^{bk})^2 \\
B_{12}^{bk} &= B_0^{bk} B_1^{bk} + B_{n-1}^{bk} B_0^{bk} + \cdots + B_2^{bk} B_3^{bk} + B_1^{bk} B_2^{bk} \\
&\cdots \\
B_{1(n-1)}^{bk} &= B_0^{bk} B_{n-2}^{bk} + B_{n-1}^{bk} B_{n-3}^{bk} + \cdots + B_2^{bk} B_0^{bk} + B_1^{bk} B_{n-1}^{bk} \\
B_{1n}^{bk} &= B_0^{bk} B_{n-1}^{bk} + B_{n-1}^{bk} B_{n-2}^{bk} + \cdots + B_2^{bk} B_1^{bk} + B_1^{bk} B_0^{bk} \\
B_{21}^{bk} &= B_1^{bk} B_0^{bk} + B_0^{bk} B_{n-1}^{bk} + \cdots + B_3^{bk} B_2^{bk} + B_2^{bk} B_1^{bk} \\
B_{22}^{bk} &= (B_1^{bk})^2 + (B_0^{bk})^2 + \cdots + \left(B_3^{bk}\right)^2 + \left(B_2^{bk}\right)^2 \\
&\cdots \\
B_{2(n-1)}^{bk} &= B_1^{bk} B_{n-2}^{bk} + B_0^{bk} B_{n-3}^{bk} + \cdots + B_3^{bk} B_0^{bk} + B_2^{bk} B_{n-1}^{bk} \\
B_{2n}^{bk} &= B_1^{bk} B_{n-1}^{bk} + B_0^{bk} B_{n-2}^{bk} + \cdots + B_3^{bk} B_1^{bk} + B_2^{bk} B_0^{bk} \\
&\cdots \\
B_{n1}^{bk} &= B_{n-1}^{bk} B_0^{bk} + B_{n-2}^{bk} B_{n-1}^{bk} + \cdots + B_1^{bk} B_2^{bk} + B_0^{bk} B_1^{bk} \\
B_{n2}^{bk} &= B_{n-1}^{bk} B_1^{bk} + B_{n-2}^{bk} B_0^{bk} + \cdots + B_1^{bk} B_3^{bk} + B_0^{bk} B_2^{bk} \\
&\cdots \\
B_{n(n-1)}^{bk} &= B_{n-1}^{bk} B_{n-2}^{bk} + B_{n-2}^{bk} B_{n-3}^{bk} + \cdots + B_1^{bk} B_0^{bk} + B_0^{bk} B_{n-1}^{bk} \\
B_{nn}^{bk} &= (B_{n-1}^{bk})^2 + (B_{n-2}^{bk})^2 + \cdots + \left(B_1^{bk}\right)^2 + \left(B_0^{bk}\right)^2
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
(M(B_n^{bk}))^* M(B_n^{bk}) = \begin{bmatrix}
B_{11}^{bk} & B_{12}^{bk} & \cdots & B_{1(n-1)}^{bk} & B_{1n}^{bk} \\
B_{21}^{bk} & B_{22}^{bk} & \cdots & B_{2(n-1)}^{bk} & B_{2n}^{bk} \\
. & . & \cdots & . & . \\
. & . & \cdots & . & . \\
. & . & \cdots & . & . \\
B_{(n-1)1}^{bk} & B_{(n-1)2}^{bk} & \cdots & B_{(n-1)(n-1)}^{bk} & B_{(n-1)n}^{bk} \\
B_{n1}^{bk} & B_{n2}^{bk} & \cdots & B_{n(n-1)}^{bk} & B_{nn}^{bk}
\end{bmatrix}
$$

dır. Bu matrisin özdeğerleri $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ olup bu özdeğerlerden λ_0 olanı maksimumdur. Kolayca görüleceği üzere

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 &= (B_0^{bk})^2 + (B_1^{bk})^2 + \cdots + (B_{n-2}^{bk})^2 + (B_{n-1}^{bk})^2 \\
&\quad + 2\begin{bmatrix}
B_0^{bk}(B_1^{bk} + B_2^{bk} + \cdots + B_{n-2}^{bk} + B_{n-1}^{bk}) \\
+ B_1^{bk}(B_2^{bk} + \cdots + B_{n-2}^{bk} + B_{n-1}^{bk}) \\
+ \cdots \\
+ B_{n-2}^{bk} B_{n-1}^{bk}
\end{bmatrix} \\
&= (B_0^{bk} + B_1^{bk} + \cdots + B_{n-1}^{bk})^2
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $M(B_n^{bk})$ sirkülant matrisinin spektral normu

$$
\|M(B_n^{bk})\|_{spek} = \sqrt{\lambda_0} = B_0^{bk} + B_1^{bk} + \cdots + B_{n-1}^{bk}
$$

dır. Teorem 3.5.3 gereği

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^{bk} = \frac{33B_n^{bk} - B_{n-1}^{bk} - 8n - 2}{32}$$

olduğundan $M(B_n^{bk})$ nin spektral normu

$$||M(B_n^{bk})||_{spek} = \frac{33B_{n-1}^{bk} - B_{n-2}^{bk} - 8n + 6}{32}$$

dır. Diğerleri de benzer şekilde elde edilebilir.

3.9 Pisagor Üçlüleri

Bu alt bölümde balkobalans sayıları ile ilgili Pisagor üçlüleri ele alınacaktır. m, n, p ler pozitif tam sayılar olmak üzere

$$m^2 + n^2 = p^2$$

eşitliğinin gerçeklenmesi halinde (m, n, p) üçlüsüne Pisagor üçlüsü denir.

Pell sayıları için $(2P_nP_{n+1}, P_{n+1}^2 - P_n^2, P_{n+1}^2 + P_n^2)$ bir Pisagor üçlüsüdür. Gözeri, Özkoç, Tekcan (2017) ise $(B_{n+1} - b_{n+1}, B_{n+1} - b_{n+1} - 1, 2b_{n+1} + 1)$ in bir Pisagor üçlüsü olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.9.1. Balkobalans sayıları için

$(C_n^{bk} - 2R_n^{bk}, 2B_n^{bk}, C_n^{bk})$, $(2B_{n+1}^{bk} - 4R_{n+1}^{bk}, 2B_{n+1}^{bk} - 4R_{n+1}^{bk} - 1, 6R_{n+1}^{bk} - 2B_{n+1}^{bk} + 1)$

ve

$$(4C_n^{bk}(B_n^{bk} - R_n^{bk}), (C_n^{bk})^2 - 4(B_n^{bk} - R_n^{bk})^2, (C_n^{bk})^2 + 4(B_n^{bk} - R_n^{bk})^2)$$

birer Pisagor üçlüsüdür. (Tekcan ve Yıldız 2022).

İspat. Balkobalans sayılarının Binet formülleri kullanılırsa

$$(C_n^{bk} - 2R_n^{bk})^2 + (2B_n^{bk})^2 = \left(\frac{\alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{2\sqrt{2}} - 2\left(\frac{\alpha^{4n} + \beta^{4n} - 2}{8}\right)\right)^2$$

$$+\left(2(\frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1} - 2}{8})\right)^2$$

$$= (\frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1} + 2}{4})^2 + (\frac{\alpha^{4n+1} + \beta^{4n+1} - 2}{4})^2$$

$$= \frac{\alpha^{8n+2} + \beta^{8n+2} + 2}{8}$$

$$= (\frac{\alpha^{4n+1} - \beta^{4n+1}}{2\sqrt{2}})^2$$

$$= (C_n^{bk})^2$$

olduğu görülür. Şu halde $(C_n^{bk} - 2R_n^{bk}, 2B_n^{bk}, C_n^{bk})$ bir Pisagor üçlüsüdür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

3.10 Cassini ve Calatan Özdeşliği

Fibonacci sayıları için Cassini özdeşliği

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

ve Catalan özdeşliği

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2$$

şeklindedir. Bu özdeşliklere benzer şekilde tüm balkobalans sayıları için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.10.1. Balkobalans sayıları, Lucas-balkobalans sayıları ve balkobalansırlar için Cassini özdeşlikleri $n \geq 0$ için

$$(B_n^{bk})^2 - B_{n+1}^{bk} B_{n-1}^{bk} = 8B_n^{bk} + 20$$

$$(C_n^{bk})^2 - C_{n+1}^{bk} C_{n-1}^{bk} = -144$$

$$(R_n^{bk})^2 - R_{n+1}^{bk} R_{n-1}^{bk} = 8R_n^{bk} - 16$$

ve Catalan özdeşlikleri $n \geq r \geq 0$ için

$$(B_n^{bk})^2 - B_{n-r}^{bk} B_{n+r}^{bk} = (\frac{5B_r^{bk} - B_{r-1}^{bk} + 4}{12})^2 + B_n^{bk}(\frac{5B_r^{bk} - B_{r-1}^{bk} - 2}{6}) - \frac{1}{4}$$

$$(C_n^{bk})^2 - C_{n-r}^{bk} C_{n+r}^{bk} = -\left(\frac{5C_r^{bk} - C_{r-1}^{bk}}{12}\right)^2$$

$$(R_n^{bk})^2 - R_{n-r}^{bk} R_{n+r}^{bk} = R_r^{bk}(2R_n^{bk} - R_r^{bk})$$

dir. (Tekcan ve Yıldız 2022)

İspat. $B_n^{bk} = \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}$ olduğundan

$$\begin{aligned}(B_n^{bk})^2 - B_{n+1}^{bk} B_{n-1}^{bk} &= \left(\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}\right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{\alpha^{4n+5}+\beta^{4n+5}}{8} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\alpha^{4n-3}+\beta^{4n-3}}{8} - \frac{1}{4}\right) \\ &= 8\left(\frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}}{8} - \frac{1}{4}\right) + 20 \\ &= 8B_n^{bk} + 20\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

3.11 Çapraz Oran

j_1, j_2, j_3, j_4 ayrık sayılarının çapraz oranları $(j_1, j_2; j_3, j_4)$ ile gösterilir ve

$$(j_1, j_2; j_3, j_4) = \frac{(j_3 - j_1)(j_4 - j_2)}{(j_3 - j_2)(j_4 - j_1)} \tag{3.10}$$

olarak tanımlanır.

Fibonacci sayıları için bu çapraz oran

$$(F_{n+1}, F_{n+2}; F_{n+3}, F_{n+4}) = \frac{F_{n+3}}{2F_{n+1}}$$

dır. Buna benzer şekilde tüm balkobalans sayılarının çapraz oranları aşağıdaki teoremdeki gibidir.

Teorem 3.11.1. Tüm balkobalans sayılarının çapraz oranları

$$(B^{bk}_{n+1}, B^{bk}_{n+2}; B^{bk}_{n+3}, B^{bk}_{n+4}) = \frac{288B^{bk}_{n+2}B^{bk}_{n+3} + 72B^{bk}_{n+2} + 72B^{bk}_{n+3} + 324}{280B^{bk}_{n+2}B^{bk}_{n+3} + 70B^{bk}_{n+2} + 70B^{bk}_{n+3} + 175}$$

$$\left(C^{bk}_{n+1}, C^{bk}_{n+2}; C^{bk}_{n+3}, C^{bk}_{n+4}\right) = \frac{72C^{bk}_{n+2}C^{bk}_{n+3} - 612}{70C^{bk}_{n+2}C^{bk}_{n+3} - 315}$$

$$(R^{bk}_{n+1}, R^{bk}_{n+2}; R^{bk}_{n+3}, R^{bk}_{n+4}) = \frac{144R^{bk}_{n+2}R^{bk}_{n+3} + 36R^{bk}_{n+2} + 36R^{bk}_{n+3} - 144}{140R^{bk}_{n+2}R^{bk}_{n+3} + 35R^{bk}_{n+2} + 35R^{bk}_{n+3} - 70}$$

dır. (Tekcan ve Yıldız 2022)

İspat. $B^{bk}_n = \frac{\alpha^{4n+1}+\beta^{4n+1}-2}{8}$ olduğu göz önüne alınırsa (3.10) dan

$$\left(B^{bk}_{n+1}, B^{bk}_{n+2}; B^{bk}_{n+3}, B^{bk}_{n+4}\right) = \frac{\left(B^{bk}_{n+3} - B^{bk}_{n+1}\right)\left(B^{bk}_{n+4} - B^{bk}_{n+2}\right)}{\left(B^{bk}_{n+3} - B^{bk}_{n+2}\right)\left(B^{bk}_{n+4} - B^{bk}_{n+1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13}-2}{8} - \frac{\alpha^{4n+5}+\beta^{4n+5}-2}{8}\right)\left(\frac{\alpha^{4n+17}+\beta^{4n+17}-2}{8} - \frac{\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}-2}{8}\right)}{\left(\frac{\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13}-2}{8} - \frac{\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}-2}{8}\right)\left(\frac{\alpha^{4n+17}+\beta^{4n+17}-2}{8} - \frac{\alpha^{4n+5}+\beta^{4n+5}-2}{8}\right)}$$

$$= \frac{[\alpha^{4n+5}(\alpha^8 - 1) + \beta^{4n+5}(\beta^8 - 1)][\alpha^{4n+9}(\alpha^8 - 1) + \beta^{4n+9}(\beta^8 - 1)]}{[\alpha^{4n+9}(\alpha^4 - 1) + \beta^{4n+9}(\beta^4 - 1)][\alpha^{4n+5}(\alpha^{12} - 1) + \beta^{4n+5}(\beta^{12} - 1)]}$$

$$= \frac{[24\sqrt{2}(\alpha^{4n+9} - \beta^{4n+9})][24\sqrt{2}(\alpha^{4n+13} - \beta^{4n+13})]}{[4\sqrt{2}(\alpha^{4n+11} - \beta^{4n+11})][140\sqrt{2}(\alpha^{4n+11} - \beta^{4n+11})]}$$

$$= \frac{36(\alpha^{8n+22} + \beta^{8n+22} + 34)}{35(\alpha^{8n+22} + \beta^{8n+22} + 2)}$$

olur. Burada

$$\alpha^{8n+22}+\beta^{8n+22}=\alpha^{4n+9}\alpha^{4n+13}+\alpha^{4n+9}\beta^{4n+13}+\alpha^{4n+13}\beta^{4n+9}+\beta^{4n+9}\beta^{4n+13}$$

$$-2(\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}+\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13})$$

$$+2(\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}+\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13})+34$$

$$=(\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}-2)(\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13}-2)$$

$$+2(\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}+\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13})+30$$

$$=64\left(\frac{\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}-2}{8}\right)\left(\frac{\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13}-2}{8}\right)$$

$$+16\left(\frac{\alpha^{4n+9}+\beta^{4n+9}-2}{8}+\frac{\alpha^{4n+13}+\beta^{4n+13}-2}{8}\right)+38$$

$$=64B_{n+2}^{bk}B_{n+3}^{bk}+16B_{n+2}^{bk}+16B_{n+3}^{bk}+38$$

olduğundan, yukarıdaki eşitlikten

$$\left(B_{n+1}^{bk},B_{n+2}^{bk};B_{n+3}^{bk},B_{n+4}^{bk}\right)=\frac{288B_{n+2}^{bk}B_{n+3}^{bk}+72B_{n+2}^{bk}+72B_{n+3}^{bk}+324}{280B_{n+2}^{bk}B_{n+3}^{bk}+70B_{n+2}^{bk}+70B_{n+3}^{bk}+175}$$

elde edilir. Diğer iki eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

4. SONUÇ

(1.1) ve (1.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 + 1 + 2 + \cdots + n = 2[(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r)]$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif n tam sayısına balkobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise balkobalansır denilmişti.

Yukarıdaki eşitlikten

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 4n + 1}}{2}$$

olduğu görülür. Balkobalans sayıları B_n^{bk} ile gösterilirse yukarıdaki eşitlikten B_n^{bk} bir balkobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^{bk})^2 + 4B_n^{bk} + 1$ bir tam karedir. Buna göre

$$C_n^{bk} = \sqrt{8(B_n^{bk})^2 + 4B_n^{bk} + 1}$$

tam sayısına Lucas-balkobalans sayısı denir.

Bu tezde yukarıda bahsedilen balkobalans sayılarının, Lucas-balkobalans sayılarının ve balkobalansırların genel terimleri elde edilmiştir. Genel terimleri belirlendikten sonra da sırasıyla bu sayıların Binet formülleri, indirgeme bağıntıları, katsayılar matrisi, Pell, Pell-Lucas, üçgensel ve kare üçgensel sayıları ile olan ilişkisi, tüm bu sayıların toplamları, basit sürekli kesirli açılımları, sirkülant matrisleri ve spektral normları, bu sayılar ile ilgili Pisagor üçlüleri, Cassini ve Calatan özdeşlikleri ve çapraz oranları ile ilgili cebirsel bağıntılar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Barbeau, E.J. (2003). Pell's equation. Springer-Verlag New York, Inc.

Behera, A. ve Panda, G.K. (1999). On the square roots of triangular numbers. *The Fibonacci Quart.* 37(2): 98-105.

Flath, D.E. (1989). Introduction to number theory. Wiley.

Gözeri, G.K., Özkoç, A. ve Tekcan, A. (2017). Some algebraic relations on balancing numbers. *Utilitas Mathematica* 103: 217-236.

Kovacs, T., Liptai, K. ve Olajos, P. (2010). On (a,b) balancing numbers. *Publ. Math. Deb.* 77(3-4): 485-498.

Liptai, K. (2004). Fibonacci balancing numbers. *The Fibonacci Quart.* 42(4): 330-340.

Liptai, K. (2006). Lucas balancing numbers. *Acta Math. Univ. Ostrav.* 14: 43-47.

Liptai, K., Luca, F., Pinter, A. ve Szalay, L. (2009). Generalized balancing numbers. *Indag. Mathem. N.S.* 20(1): 87-100.

Mollin, R.A. (1996). Quadratics. CRS Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo

Olajos, P. (2010). Properties of balancing, cobalancing and generalized balancing numbers. *Annales Mathematicae et Informaticae* 37: 125-138.

Özkoc, A. ve Tekcan, A. (2017). On k-balancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 23(3): 38-52.

Panda, G.K. ve Ray, P.K. (2011). Some links of balancing and cobalancing numbers with Pell and associated Pell numbers. *Bull. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1): 41-72.

Panda, K.G. ve Ray, P.K. (2005). Cobalancing numbers and cobalancers. *Int. Jour. of Math and Math. Sci.* 8: 1189-1200.

Panda, G.K. ve Panda, A.K. (2015). Almost balancing numbers. *Jour. of the Indian Math. Soc.* 82(3-4): 147-156.

Panda, G.K., Komatsu, T. ve Davala, R.K. (2018). Reciprocal sums of sequences involving balancing and Lucas-balancing numbers. *Math. Reports* 20(70): 201-214.

Panda, A.K. (2017). Some variants of the balancing sequences. *Ph.D. Dissertation.* National Institute of Technology Rourkela, India.

Patel, B.K., Irmak, N. ve Ray, P.K. (2018). Incomplete balancing and Lucas-balancing numbers. *Mathematical Reports* 20(70): 59-72.

Ray, P.K. (2009). Balancing and cobalancing numbers. *Ph.D. Dissertation*. Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Ray, P.K. (2015). Balancing and Lucas-balancing sums by matrix methods. *Mathematical . Rep.* 17(67): 225-233.

Santana, S.F. ve Diaz-Barrero, J.L. (2006). Some properties of sums involving Pell numbers. *Missouri Journal of Mathematical Science* 18(1): 33-40.

Szalay, L. (2007). On the resolution of simultaneous Pell equations. *Annales Mathematics and Informatics* 34: 77-87.

Tekcan, A. ve Tayat, M. (2014). Generalized Pell numbers, balancing numbers and binary quadratic forms. *Creative Mathematics and Informatics* 23(1): 15-122.

Tekcan, A. ve Erdem, A. (2020). t-cobalancing numbers and Lucas t-cobalancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 26(1): 45-58.

Tekcan, A. ve Aydın, S. (2021). On t-balancers, t-balancing numbers and Lucas t-balancing numbers. *Libertas Mathematica* 41(1): 37-51.

Tekcan, A. ve Yıldız, M. (2021). Balcobalancing numbers and balcobalancers. *Creative Mathematics and Informatics.* 30(2): 203-222.

Tekcan, A. ve Yıldız, M. (2022). Balcobalancing numbers and balcobalancers II. *Creative Mathematics and Informatics.* 31(2): 247-258.
Tekcan, A. ve Erdem, A. (2023). General terms of all almost balancing numbers of first and second type. *Communications in Mathematics* 31(1): 155-167
Tengely, S. (2013). Balancing numbers which are products of consecutive integers. *Publ. Math. Deb.* 83(1-2): 197-205.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Meryem YILDIZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Osmangazi, 29/07/1998
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: Süleyman Çelebi Anadolu Lisesi, 2012-2016
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2016-2020
Çalıştığı Kurumlar	: Bursa Uzman Kariyer Eğitim Kurumları, 2018-2022
İletişim (e-posta)	: mrymyildiz.001@gmail.com
Yayınlar	**:**

Yıldız, M. ve Altınkaya, Ş. (2021). Sabordinasyon ve Fibonacci sayılar dizisi ile tanımlanan kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların yeni bir alt sınıfı için katsayı eşitsizlikleri. *Süleyman Demirel Üniv. Fen Ed. Fak. Fen Dergisi.* 16(1): 308-318.
Tekcan, A. ve Yıldız, M. (2021). Balcobalancing numbers and balcobalancers. *Creative Mathematics and Informatics* 30(2): 203-222.
Tekcan, A. ve Yıldız, M. (2022). Balcobalancing numbers and balcobalancers II. *Creative Mathematics and Informatics.* 31(2): 247-258.
Tekcan, A. ve Yıldız, M. (2022). Almost balcobalancing numbers. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.* 53: 71-83.