T.C
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Recep TUTUCU

Prof. Dr. Musa DEMİRCİ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2022

TEZ ONAYI

Recep TUTUCU tarafından hazırlanan "Bazı Özel Sayı Dizileri Arasındaki Bağıntılar" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

Başkan: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL İmza
0000-0002-0700-5774
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Prof. Dr. Musa DEMİRCİ İmza
0000-0002-6439-8439
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mert Sinan ÖZ İmza
0000-0002-6206-0362
Bursa Teknik Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Musa DEMİRCİ
05.01.2023
okudum, anladım.

Recep TUTUCU
05.01.2023
Okudum, anladım.

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/04/2022

Recep TUTUCU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Recep TUTUCU

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Fibonacci sayıları ve Tribonacci sayıları arasında kurulmuş ilişkiler ele alınmış ve çeşitli özdeşliklere yer verilmiştir.

Giriş bölümünde Fibonacci ve Tribonacci sayıları hakkında ön bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ise Fibonacci ve Tribonacci sayı dizileri tanımlanmış, bu sayı dizilerini kullanarak elde edilen karakteristik denklem tanımları ve elde edilişleri, binet formülleri ile ilgili bilgiler, altın ve gümüş oran kavramları ve elde edilişleri hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Fibonacci ve Tribonacci sayılarının yardımıyla elde edilen özdeşliklere yer verilmiştir. Bu bölümün sonunda ise kendi çalışmama ait konudan kısaca bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm ise sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Tribonacci sayıları, Genelleştirilmiş fonksiyon
2022, vii + 33 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

RELATIONSHIP BETWEEN SOME SPECİAL NUMBER SEQUENCES

Recep TUTUCU

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

This thesis consists of 4 chapters. The relationships established between Fibonacci numbers and Tribonacci numbers are discussed and various identities are included.

In the introduction, preliminary information about Fibonacci and Tribonacci numbers is given.

In the second chapter, Fibonacci and Tribonacci numbers sequence are defined, definitions and derivations of characteristic equations obtained by using these number sequences, information about binet formula, information about the concepts of gold and silver rations and how they are obtained is given.

In the third chapter, identities obtained with the help of Fibonacci and Tribonacci numbers are given. At the end of this chapter, the subject of my work is briefly mentioned.

The fourth chapter is the conclusion section.

Key Words: Fibonacci Numbers, Tribonacci Numbers, Generating Function

2022, vii + 33 sayfa.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli bilgilerini benimle paylaşan ve kıymetli zamanını ayıran danışman hocam sayın Prof. Dr. Musa DEMİRCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimi boyunca önerileri, yardımları ve bilgisi ile bana yol gösteren sayın Doç. Dr. Yeliz KARA ŞEN'e ve değerli bilgileri ve fikirleriyle karşılıklı birbirimize yardımcı olduğumuz yüksek lisansta tanıştığım arkadaşım Ebru BİTKİN'e teşekkür ederim.

Özellikle bu dönemlerde bir konu hakkında takıldığımda değerli sözlerini dinleyip farklı bakış açısını bana sunduğu birçok zaman için liseden beri arkadaşım olan Ediz ÖZCAN'a teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca her daim yanımda olan ve bana manevi ve maddi destek sağlayan değerli babam Ahmet TUTUCU'ya ve kıymetli annem Müzeyyen TUTUCU'ya, şuanda Senegal'de bulunan ve orada Türkçe öğretmenliği yapmakta olan ve kıymetli fikirlerini benden esirgemeyen ablam Hatice TUTUCU'ya teşekkür ederim.

Recep TUTUCU
28/04/2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
F_n	$n.$ Fibonacci sayısı
T_n	$n.$ Tribonacci sayısı
Φ(Phi)	Fibonacci dizisindeki ardışık iki sayı arasındaki oran
Φ_3(Tri-Phi)	Tribonacci dizisindeki ardışık iki sayı arasındaki oran
R_l	$l - inci$ tekrar sayısı
$(u_n)_{n\geq 0}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$(v_n)_{n\geq 0}$	Genelleştirilmiş Tribonacci dizisi
$f_{u_n}(x)$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu
$f_{v_n}(x)$	Genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

1.GİRİŞ

Bu tezin amacı Fibonacci sayıları ve Tribonacci sayıları adı verilen özel sayı dizileri ile ilgili bilgi sahibi olunmasıdır. Ayrıca bu özel sayı dizileri yardımıyla ifade edilen matematiksel özdeşlikler ile ilgili teoremler verilerek okuyucuyu bilgilendirmektedir.

Bu özel sayı dizileri öncelikle matematikte ve dolaylı olarakta bir çok bilim dalında kullanılmaktadır. Bu nedenle bu özel sayı dizilerini konu alan çok sayıda makale ve araştırma literatürde yer almaktadır. Her ne kadar Fibonacci sayı dizisi diğer özel sayı dizilerinden önce keşfedilmiş olsa da özellikle 19. yüzyıl ve sonrasında Fibonacci sayıları hakkında birçok enteresan bilgi ortaya çıkarılmış ve hala ortaya çıkarılmak üzere çalışmalar yapılmaktadır. 20.yüzyılda Mark Feinberg tarafından keşfedilen Tribonacci sayılarında da Fibonacci gibi benzeri özellikler görülmüştür. Tribonacci dizisi Fibonacci sayı dizisine göre daha yeni olduğundan dolayı Tribonacci dizisi hakkında araştırmalar ve çalışmalar Fibonacci dizisine göre daha az bulunmaktadır.

Dolayısıyla, bu tezde çok az yazı ve araştırma yapılmış Tribonacci sayı dizisi ile Fibonacci sayı dizisinin arasındaki ilişkilere yer verilmiştir. Tribonacci ve Fibonacci dizilerinin tekrarlama bağıntıları, karakteristik denklemleri ve bu iki özel sayı dizisi arasındaki özdeşlikler paylaşılmıştır. Bu sayede bu tezde okuyucuya bu iki sayı dizisi ile ilgili temel düzeyde bilgi verip o bilgi birikimini bir kademe daha yukarıya taşımaya çalışılmıştır.

2. FİBONACCİ VE TRİBONACCİ SAYILARI

2.1 Fibonacci Sayıları

Leonardo Fibonacci İtalya'nın Pisa şehrinde 1170 yılında doğmuştur. Fibonacci Hint-Arap sayılarını Avrupa'ya getirip bu sayı sistemini tanıtmak ve hesaplama yöntemlerini göstermek için 1202 yılında Liber Abaci isimli kitabı kaleme almıştır. Liber Abaci'de yer alan ünlü tavşan problemiyle meşhur olmuştur. Aslında bu problemde tavşanların üremesiyle oluşturulan sayı sistemini kurucusunun adı verilerek Fibonacci sayıları diye anılmıştır. Tavşanların üremesi için aşağıdaki durumu kurmuştur.

Ocak ayında bir kafeste bir çift tavşan olduğunu varsayalım. Şubat ayında bu tavşanlar başka bir çift doğuracaktır. Bu tavşan çiftleri her zaman doğumdan sonraki ikinci ayda ürerler ve daha sonra ayda bir çift tavşan ürer. Aralığın sonunda tavşan çiftlerinin sayısı kaçtır? Bu sorunu çözmek için aşağıdaki gibi bir sütunlu tablo oluşturalım (Brother U., 1963) .

(1) Verilen ayın başında doğuracak tavşan sayısı
(2) Verilen ayın başında doğurmayan tavşan sayısı
(3) Ay boyunca yetiştirilen tavşan çiftlerinin sayısı
(4) Ay boyunca tavşan çiftlerinin sayısı

Tablo 1.1 Tavşanların aylara göre üreme miktarı

AYLAR	(1)	(2)	(3)	(4)
OCAK	0	1	0	1
ŞUBAT	1	0	1	2
MART	1	1	1	3
NİSAN	2	1	2	5
MAYIS	3	2	3	8
HAZİRAN	5	3	5	13
TEMMUZ	8	5	8	21
AĞUSTOS	13	8	13	34
EYLÜL	21	13	21	55
EKİM	34	21	34	89
KASIM	55	34	55	144
ARALIK	89	55	89	233

Asıl sorunun cevabı aralık ayının sonunda 233 çift tavşan olduğudur. Ancak bu şekilde gelişen sayı dizisini karakterize eden ilginç gerçek şudur: Herhangi bir sayı kendisinden önce gelen iki ardışık sayının toplamıdır. Dahası, yukarıdaki tablodaki dört sütunun tamamının o zamandan beri Fibonacci serisi olarak bilinen aynı serinin sayılarından oluştuğu görülecektir: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,….. (Brother U., 1963).

Bu sayıların Fibonacci sayıları olarak adlandırılması keşfinden yüzlerce yıl sonra olmuştur. 1876 yılından sonra Fransız matematikçi François Edouard Anatole Lucas tarafından Fibonacci sayıları adı verilmiştir.

$n-inci$ Fibonacci sayısını F_n ile gösterilsin ve Fibonacci dizisini matematiksel olarak şöyle bir tanım vererek gösterelim.

Tanım 2.1.1 Başlangıç şartları $F_0 = 0,\ F_1 = F_2 = 1$ olmak üzere $n \geq 3$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

olacak şekilde tekrarlama bağıntısıdır. Böylece n-inci Fibonacci sayısı olan F_n elde edilmiştir.

2.2 Fibonacci Dizisinin Karakteristik Denklemi

Her $n \geq 3$ tamsayısı ve $F_0 = 0,\ F_1 = F_2 = 1$ başlangıç koşulları için Fibonacci dizisi (2.1) denkleminde $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde tekrarlama bağıntısı olarak verilmiştir. Tekrarlama (indirgeme) bağıntısı ile oluşan dizilerin birer fark denklemi olmasından dolayı bu şekildeki dizilerin karakteristik denklemi, F_n yerine k^n alınarak bulunulabilir.

(2.1) denkleminde tüm terimleri eşitliğin sol tarafına alınsın,

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

olur. Elde edilen eşitlikte F_n yerine k^n yazılsın ve

$$k^n - k^{n-1} - k^{n-2} = 0$$

olur. Burada oluşturduğumuz denklemi k^{2-n} ile çarpalım. Böylece,

$$k^2 - k - 1 = 0 \tag{2.2}$$

olur. (2.2) denklemi Fibonacci dizisinin karakteristik denklemidir. Bu karakteristik polinomun farklı işaretlere sahip iki adet kökü vardır. Bu kökler;

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir.

Burada elde ettiğimiz pozitif kök olan k_1 aslında hepimizin bildiği bir sayı olan altın orana denktir. Ayrıca Fibonacci dizisi için elde ettiğimiz bu karakteristik denklem benzer biçimde Tribonacci dizisi içinde gösterilmiştir. Burada bahsettiğimiz bu iki ifadeye ilerleyen konularda değinilmiştir.

2.3 Fibonacci Dizisinin Binet Formülü

Denklem (2.1) de ki tekrarlama bağıntısı n. Fibonacci sayısını gösteriyordu. Bu tekrarlama bağıntısı ikinci mertebeden bir lineer fark denklemi olduğundan ve bu denkleme ait (2.2) de ki karakteristik denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olup

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad n \geq 1 \tag{2.3}$$

ifadesine Fibonacci dizisinin Binet formülü adı verilir. Şimdi bu ifadeyi bir teorem olarak verip nasıl ortaya çıktığını çözümleyelim.

F_n'in bu aşikar formülünü, 1843'te keşfeden Fransız matematikçi Jacques Philipe Marie Binet'in (1789-1856) ardından Binet'in formülü olarak adlandırılmıştır. Aslında ilk olarak 1718'de Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667-1754) tarafından üretme fonksiyonları kullanılarak keşfedilmiştir (Koshy, Fibonacci and Lucas Number with Applications, 2001).

Teorem 2.3.1 $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci dereceden denklemin pozitif kökü α ve negatif kökü β olsun. O zaman, $n \geq 1$ olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.3}$$

olur (Koshy, Fibonacci and Lucas Number with Applications, 2001).

$F_1 = F_2 = 1$ başlangıç koşulu olmak üzere $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Fibonacci tekrarlama bağıntısının çözümü:

Tekrarlama bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 + x + 1 = 0$ 'dır ve bu denklemin çözümü $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 'dir.
$\alpha + \beta = 1$ ve $\alpha\beta = -1$ olduğunu hatırlayalım.

F_n dizisinin genel çözümü $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$ 'dir. A ve B 'yi bulmak için başlangıç koşullarını yerine yazarsak,

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$
$$F_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 1$$

olur. Bu iki denklemi çözelim.

$$A = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{(1 + \sqrt{5})/2}{(5 + \sqrt{5})/2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olur. Benzer biçimde

$$B = \frac{\beta}{1+\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

olur. Böylece verilen koşulları sağlayan tekrarlama bağıntısının çözümü F_n Fibonacci sayısı için Binet formülü olan

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir (Koshy, 2001).

2.4 Fibonacci Dizisi Altın Oran

Fibonacci sayıları yüzyıllardır ilgi odağı olmuştur. Bu sadece matematiksel anlamda değil Fibonacci dizilerinin küçük üyelerinin doğada görünmesidir. Doğada birçok yerde, bir çiçeğin yapraklarının sayısında, bir ağacın dallarının sayısında veya insanlarca yaratılan resim ve mimari eserlerin birçoğunda bu üyeler ve bu üyelerin birbirine oranı sürekli karşımıza çıkmıştır. Bu olay bir çok kişi için merak ve ilgi odağı olmasını sağlamıştır. Bir çok matematikçi ve bilim insanı araştırma konusu olan bu rakama "altın oran", "mükemmel oran", "kutsal oran" gibi isimler vereceklerdir.

Fibonacci dizisinin oranlarının limit değerlerine baktığımızda dizinin 13'üncü terimine kadar bu oran artıp azaldığı ancak 13'üncü terim ve sonrasında ki terimlerin oranlarının limit değerleri bize altın oranı yani 1,618'i verdiği görülmektedir.

Şimdi bu limit değerini daha yakından incelemek için adım adım ilerleyelim. Fibonacci dizisi için tekrarlama bağıntısı

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

şeklinde verilsin. Şimdi bu bağıntının her iki tarafı F_n ile bölünsün.

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

olur. Burada iki ardışık Fibonacci oranı için $n \to \infty$ sınırına doğru yaklaştığını varsayıyoruz. Yani aslında n değeri sonsuza doğru yaklaştıkça bu oran yaklaşılan sayı olacaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha \tag{2.4}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\alpha}$$

yakınsar. O zaman ilk başta aldığımız limit değeri

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

şeklinde olacaktır. Böylece limit varsa, ardışık iki Fibonacci sayısının oranı yeterince büyük n'ler için altın oran olarak adlandırılmıştır.

Aşağıdaki tablo sayesinde ardışık Fibonacci sayılarının oranlarında altın oranı ve hangi terimden sonra bu oranın sürekli olarak altın oranı verdiğini daha yakından incelenip gösterilmiştir.

Tablo 1.2 Ardışık Fibonacci sayılarının oranları

n	F_{n+1}/F_n	ORAN
1	$1/1$	1.00000
2	$2/1$	2.00000
3	$3/2$	1.50000
4	$5/3$	1.66666
5	$8/5$	1.60000
6	$13/8$	1.62500
7	$21/13$	1.61538
8	$34/21$	1.61904
9	$55/34$	1.61764
10	$89/55$	1.61818
11	$144/89$	1.61797
12	$233/144$	1.61805
13	$377/233$	1.61802

Yukarıda ki tabloda da görüldüğü üzere ardışık Fibonacci sayıları arasındaki oranlar $n = 12$ ve ondan sonraki ifadelerde 1.618 sayısına sabitlenmiş bir biçimde devam ettiği görülebilir. Bu oran değişimi $n = 11$ ve önceki ifadelerde ki gibi büyük sayı değişim aralıklarında değil de daha ufak miktarlarla değiştiği görülebiliyor.

2.5 Tribonacci Sayıları

Tribonacci sayıları, 1963 yılında 14 yaşındaki genç bilim insanı Mark Feinberg tarafından keşfedilmiş ve bu keşif Mark Feinberg'e Amerika'nın Pensilvanya eyaletinde Genç Bilim Akademisi şampiyonluğunu kazandırmıştır.

Tıpkı Fibonacci dizisindeki her sayının kendinden önceki iki veya $p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$'in toplamının olduğu gibi; ilk varyasyon her bir sayının kendinden önceki üç sayının veya

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1} + q_{n-2} \tag{2.5}$$

toplamının olduğu bir seridir. Bundan dolayı bu serinin adı Tribonacci'dir. Dizinin ilk birkaç sayısı 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, … şeklindedir (Feinberg, 1963).

2.6 Tribonacci Dizisinin Karakteristik Denklemi

Bölüm 2.2'de bahsedildiği üzere bir tekrarlama bağıntısı ile oluşturulan dizilerin birer fark denklemi olmasından dolayı bu şekildeki diziler için karakteristik denklem nasıl oluşturulduğundan bahsedip Fibonacci dizisi için karakteristik denklem oluşturulmuştu. Tribonacci dizisi de bir tekrarlama (indirgeme) bağıntısı olduğundan benzer biçimde karakteristik denklem oluşturulabilir.

Tribonacci dizisinin tekrarlama bağıntısını (2.5) denkleminde

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1} + q_{n-2}$$

olarak verilmişti. Bu eşitlikte her terimi sol tarafa alalım ve q_n yerine t^n yazılsın.

$$t^{n+1} - t^n - t^{n-1} - t^{n-2} = 0$$

olur. Burada oluşturduğumuz denklemi t^{2-n} ile çarpalım. Böylece

$$t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \tag{2.6}$$

olur. (2.6) denklemi Tribonacci dizisinin karakteristik denklemidir. Bu karakteristik denklemin üç adet kökü vardır. Bu kökler;

$w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ denirse, o zaman

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$t_2 = \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$t_3 = \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

şeklindedir.

2.7 Tribonacci Dizisinin Binet Formülü

Tribonacci dizisinin karakteristik denklemi olarak bir önceki bölümde (2.6) denklemi ile verilmişti. Ayrıca orada belirttiğimiz (2.6) denkleminin $t_1,\ t_2,\ t_3$ kökleri de kullanılacaktır.

Başlangıç koşulları $u_0 = u_1 = 1, u_2 = 2$ olan ve $u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$ denklemi üreten fonksiyonu belirlenerek binet formülü türetilir (Spickerman, 1982).

$f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n = \sum_{i=0}^{\infty} u_ix^i$ üreteç fonksiyonu olarak alalım. O zaman

$$(1 - x - x^2 - x^3)f(x) = 1$$

olur. Bundan dolayı,

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3} = \frac{1}{(1 - t_1)(1 - t_2)(1 - t_3)} = \frac{1}{p(x)}$$

olsun. $p(x) = 0$'ın kökleri, $1/t_1\,, 1/t_2\,, 1/t_3$; $p\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x^2 - x - 1 = 0$'in kökleri $t_1,\ t_2,\ t_3$'dür.

Cardano'nun formülünü $p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$'a uygulanırsa köklerini bulabiliriz. (Bu kökleri biz bir önceki bölümde göstermiştik.) Bu kökler $t_1,\ t_2,\ t_3$ olarak belirlemiştik.

$p(x) = 0$'ın kökleri farklı olduğundan, kısmi kesirler yöntemiyle

$$f(x) = \frac{1}{(1 - t_1 x)(1 - t_2 x)(1 - t_3 x)} = \frac{A}{1 - t_1 x} + \frac{B}{1 - t_2 x} + \frac{C}{1 - t_3 x}$$

şeklindedir. Böylece

$$A = \frac{1}{\left(1 - \frac{t_2}{t_1}\right)\left(1 - \frac{t_3}{t_1}\right)} = \frac{t_1}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)},$$

$$B = \frac{1}{\left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)\left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)} = \frac{t_2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)},$$

$$C = \frac{1}{\left(1 - \frac{t_1}{t_3}\right)\left(1 - \frac{t_2}{t_3}\right)} = \frac{t_3}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Sonuç olarak,

$$f(x) = \frac{t_1}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \sum_{i=0}^{\infty} {t_1}^i x^i + \frac{t_2}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} \sum_{i=0}^{\infty} {t_2}^i x^i + \frac{t_3}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \sum_{i=0}^{\infty} {t_3}^i x^i$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{{t_1}^{i+2}}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{{t_2}^{i+2}}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{{t_3}^{i+2}}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \right) x^i$$

Böylece, Tribonacci dizisi için Binet formülü

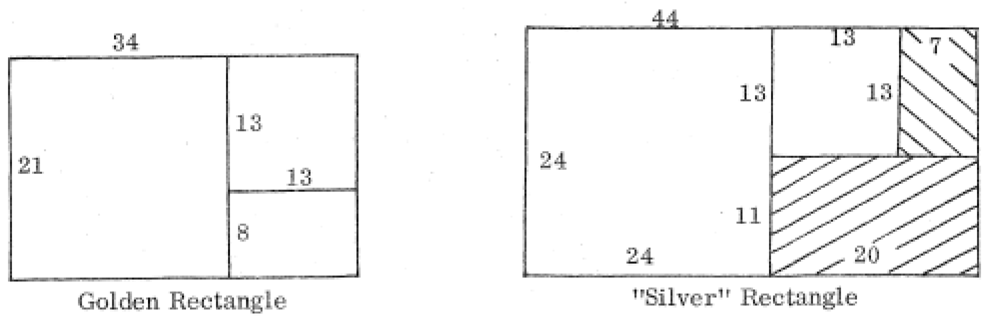
$$u_n = \frac{{t_1}^{n+2}}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} + \frac{{t_2}^{n+2}}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} + \frac{{t_3}^{n+2}}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

şeklindedir (Spickerman, 1982).

2.8 Tribonacci Dizisi Gümüş Oran

Fibonacci serisi gibi Tribonacci serisi de yakınsaktır. Fibonacci sayılarında (p_n/p_{n+1}) 0.6180339…'a yakınsar ve (p_{n+1}/p_n) 1.6180339…'a yakınsar. Tribonacci sayılarında da ardışık iki sayının birbirine bölümü (q_n/q_{n+1}) 0.54368901…'a yakınsar. Fibonacci dizisinde ardışık iki sayı arasındaki orana Phi (Φ) olarak adlandırılırken Tribonacci dizisinde Tri-Phi (Φ_3) olarak adlandırılabilir (Feinberg, 1963).

(q_{n+1}/q_n) oranı ise 1.83928675…'a yakınsar. Bu oran Mark Feinberg'in bahsettiği Tri-Phi (Φ_3)'dir. Bu oran bir çok yerde gümüş oran olarak da adlandırılmaktadır.



Şekil 1.1 Altın dikdörtgen ve gümüş dikdörtgen

Dizilerin özgün tekrarlama bağıntısı Fibonacci altın dikdörtgeninde gösterilmiştir. Dizinin özgün tekrarlama bağıntısına uygun olarak Tribonacci dizisi içinde bir dikdörtgen oluşturulabilir fakat bu dikdörtgen altın dikdörtgenden daha az belirgin özelliklere sahip olduğundan gümüş dikdörtgen olarak adlandırılabilir. Uzun kenarı (q_{n+1}) ve kısa kenarı (q_n) olan gümüş dikdörtgen, altın dikdörtgene oranla daha uzun kenarlara sahiptir.

Gümüş dikdörtgendeki kenar uzunlukları $q_n = 24$ ve $q_{n-1} = 13$ olan kareler çıkarılarak kenar uzunlukları $(q_{n+1} - q_n)$ ve $(q_n - q_{n-1})$ ile (q_{n-1}) ve (q_{n-2}) olan orijinal iki yeni dikdörtgen görülür (gölgeli alanlar). Bu dikdörtgendeki kenar uzunlukları (q_{n-1}) ve (q_{n-2}) Tribonacci sayıları iken diğer kenar uzunlukları Tribonacci dizisinde bulunmayan sayılardır. Bu dikdörtgenin kenar uzunlukları $(q_{n+1} - q_n)$ ve $(q_n - q_{n-1})$'dir. Her bir Tribonacci sayısının kendisinden sonrakinden çıkarılmasıyla elde edilen bir ara serideki sayılardan oluşur (Feinberg, 1963).

3. FİBONACCİ VE TRİBONACCİ SAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Fibonacci sayıları ve Tribonacci sayıları kendi içinde tekrarlama bağıntısı, özdeşlikler olduğu gibi birbirleri arasında da bu gibi durumlar vardır. Bu gibi ilişkilere bir sürü örnek verilebilir ve çoğaltılabilir. Burada Fibonacci ve Tribonacci sayıları arasında kurulmuş olan ilişkilere değinilmiştir. Bu ilişkilerin belirli bir kısmını aşağıdaki teorem ve sonuçlar verilerek gösterilmiştir.

3.1 Fibonacci ve Tribonacci Sayılarının Toplamları Olarak Tekrarlanan Sayılar

Palindromik sayı sağdan ve soldan okunduğunda aynı forma sahip olan bir sayıdır (böylece bir eksene göre simetrik olduğu söylenebilir). İlk 19 palindromik sayı

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

ve açıkça bu sayılar tekrarlanan sayı türüdür. Sayının ondalık açılımının içinde yalnızca bir tekrarlanan rakam var ise bir n sayısı tekrar sayısı olarak adlandırılır. Daha doğrusu, bazı $l \geq 0$ ve $a \in [1,9]$ için (her zaman olduğu gibi, $a \leq b$ tamsayıları için $[a,b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ olarak ayarladık), n sayısı

$$n = a\left(\frac{10^l - 1}{9}\right)$$

formundadır. Eski bir açık problem, sonsuz sayıda asal tekrar sayının varlığını kanıtlamaktan ibarettir (Sloane, tarih yok), burada $l - inci$ tekrar sayısı olarak

$$R_l = \frac{10^l - 1}{9}$$

tanımlanır (Trojovský, 2020).

Pavel Trojovský yapmış olduğu bu çalışmada Tribonacci ve Fibonacci dizilerini incelemiş. Marques, Tribonacci dizisindeki en büyük tekrar sayısının $T_8 = 44$ olduğunu kanıtlarken (Marques, 2011), Lucas ise Fibonacci dizisindeki en büyük tekrar sayısının $F_{10} = 55$ olduğunu göstermiş. Trojovský bu çalışmasında Fibonacci ve Tribonacci sayılarının toplamı olan tekrar sayılarını aramıştır (ikiside aynı indeks olacaktır). Daha spesifik olarak şöyle bir teorem vermiştir:

Teorem 3.1.1 Diophantine denklemi

$$F_n + T_n = a\left(\frac{10^l - 1}{9}\right)\text{'nin}$$

pozitif tamsayı (n, l, a) cinsinden, $a \in [1,9]$ olmak üzere, tek çözümü

$(n, l, a) \in \{(1,1,2), (2,1,2), (3,1,4), (4,1,7)\}$'dir (Trojovský, 2020).

3.2 İki Ayrı Kesişim Üzerine k-Genelleştirilmiş Fibonacci Dizileri

Sayı teorisindeki bazı problemler arasında, bilinen iki dizinin (veya kümenin) kesişimiyle ilgili sorulardır. Örnekler vermeden önce terimleri biraz hatırlayalım.
$F \coloneqq (F_n)_{n\geq 0}$ Fibonacci dizisi, $\mathbb{P} \coloneqq \{p: p\ prime\}$, $\mathcal{P} \coloneqq \{y^t: y, t \in \mathbb{Z},\ t > 1\}$ (mükemmel kuvvet), $\mathcal{F} \coloneqq \{n!: n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$, $\mathcal{R} \coloneqq \{a(10^n - 1)/9): 1 \leq a \leq 9, n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$ (tekrar rakamları veya tek basamaklı sayılar) olarak alalım. Bu kümelerin kesişimiyle ilgili sonuçları aşağıda aktarıyoruz.

- Erdös ve Selfridge $\mathcal{F} \cap\ \mathcal{P} = \{1\}$ olduğunu kanıtladı (P. & J.L., 1975).
- 2000 yılında, Luca $F \cap \mathcal{R} = \{0, 1, 2, 3, 5, 8, 55\}$ olduğunu kanıtladı (F., Fibonacci And Lucas Numbers With Only One Distinct Digit, 2000).
- Luca ayrıca $F \cap \mathcal{F} = \{1, 2\}$ olduğunu da kanıtladı (F., 1999).
- 2003 yılında, Bugeaud ve diğerleri $F \cap\ \mathcal{P} = \{0, 1, 8, 144\}$ olduğunu gösterdi (Y., M., & S., 2006).
- $n \geq 2$ için $((a_n)_{n\geq 1})$, $a_1 = 1$ ve $a_n = n^{a_{n-1}}$ tarafından verilen kule olsun. Luca ve yazarlar $\{a_1 + \cdots + a_n: n \geq 1\} \cap \mathcal{P}$=$\{1\}$ olduğunu kanıtladı (F. & D., 2010)

Yine de $\mathbb{P} \cap F$ ve $\mathbb{P} \cap \mathcal{R}$ gibi bazı ilgili sorular hala açık problemlerdir. $k \geq 2$ ve $F^{(k)} \coloneqq \left(F_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$, olarak belirtelim, k-genelleştirilmiş Fibonacci dizisi terimleri

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)} \tag{3.2.1}$$

yineleme bağıntısını karşılayan, başlangıç koşulları 0, 0, … , 0, 1(k terim) ve ilk sıfır olmayan terim olacak şekilde $F_1^{(k)} = 1$'dir.
Yukarıda ki dizi Fibonacci sayılarının birkaç genellemesinden biridir. Böyle bir diziye ayrıca k-adım Fibonacci sayıları, Fibonacci k-dizisi veya k-bonacci sayıları olarak adlandırılır. Açıkça $k = 2$ için Fibonacci sayılarını ve $k = 3$ için Tribonacci sayıları elde edilir.

Çok yakın tarihli bir makalede, Togbé ve yazarlar lineer yineleme dizisinin sonlu sayıdaki karakteristik polinomunun baskın kökleri tekrarlama sayıları olabilir. Uygulama olarak, (3.2.1)'de ki yinelemenin karakteristik denklemi olduğundan, yani $x^k - x^{k-1} - \cdots - x - 1$, öyle $|\alpha| > 1$ için yalnızca bir α köküne sahiptir, dolayısıyla tüm $k \geq 2$ için $F^k \cap \mathcal{R}$ sonlu bir kümedir.

$F^k \cap F^m$ kesişimi üzerindeki varsayım ve $F^k \cap \mathbb{P}$ kümesi üzerindeki bazı sonuçlara (T.D. & J.V., 2005) bakılabilir. Bu kesişimin bildiğimiz kadarıyla hem Fibonacci hem de Tribonacci sayıları için en kolay $(k, m) = (2,3)$ durumunda bile bilinmediğine dikkat çekiyoruz. Bu kesişimi bulmanın olası bir yolu Fibonacci ve Tribonacci dizilerinde p asal iken modül p^t'ye bakmaktır. Ancak bu yaklaşımla pratikte çalışmak zor görünüyor. Bu gözlem, yazarın genel durumda faydalı olabilecek daha ilginç ve yapıcı bir yaklaşım için bakması istendi.

Mignotte'nin eğer $(u_n)_{n\geq 0}$ ve $(v_n)_{n\geq 0}$ ise iki lineer yineleme dizisi olduğu gösterdiğini fark etmek önemlidir (M., 1978). O zaman bazı teknik varsayımlar altında $u_n = v_m$ denkleminin pozitif n tamsayılarında yalnızca sonlu sayıda çözümü vardır. Ayrıca tüm bu çözümler etkili bir şekilde hesaplanabilir. Bu nedenle, $F^{(k)} \cap F^{(m)}$'nin tüm $k \neq m$ için sonlu bir küme olduğunu düşünmek mantıklı görünüyor.

Bu makalenin amacı, $2 \leq k < m$ tamsayıları için $F^{(k)} \cap F^{(m)}$ kesişimini incelemek ve $(k,m) = (2,3)$ için bu kümeyi tamamen belirlemek amacıyla bir yöntem sağlamak için soyut araçlar uygulanacaktır. Daha doğrusu sonucumuz şudur.

Teorem 3.2.1 $n > 3$ olan m ve n pozitif tamsayılarında $F_n = T_m$ Diophantine denkleminin tek çözümü $(n,m) = (7,6)$'dır.
Böylece, $F \cap T = \{0, 1, 2, 13\}$'dir (Marques, 2011).

3.3 Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi ve Genelleştirilmiş Tribonacci Üçgeni Arasındaki Bazı Bağlantılar

Bu bölümde genelleştirilmiş bir Fibonacci tipi ikinci dereceden doğrusal yineleme $\{U_n\}$ ele alınacaktır. Genelleştirilmiş Tribonacci üçgeninin bazı özellikleri tarafından, genelleştirilmiş Fibonacci ardışık sayılarının çarpımı olan $U_n U_{n+1}$ ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının karesi olan U_n^2 için formüller türetilmiştir. Bu formüller burada paylaşılmıştır. Daha çok ayrıntı için Fibonacci Quarterly dergisinin 2012 yılının şubat ayında ki yayınında bulunan "Some Connections Between a Generalized Tribonacci Triangle and a Generalized Fibonacci Sequence" (Kuhapatanakul, 2012) makaleyi inceleyebilir.

- a ve b reel sayıları için genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n\}$, $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ ve $U_{n+1} = aU_n + bU_{n-1}$ $(n \geq 1)$ ile tanımlanır.
- Eğer $a = b = 1$ ise o zaman $U_n = F_n$, klasik Fibonacci sayısıdır.
- $F_{n+1} = \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i}$ $(n \geq 0)$ Pascal üçgeninde yükselen köşegen doğruları üzerindeki elemanların toplamıyla Fibonacci sayıları elde edilebilir. ($\lfloor x \rfloor$, x'i geçemeyen en büyük tamsayıdır.)
- Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı U_n için Pascal üçgeninde Fibonacci sayılarının elde dilişi ile $U_{n+1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} a^{n-2i} b^i$ $(n \geq 0)$ genişlemesine sahibiz.
- 1997'de Alladi ve Hoggat Tribonacci üçgenini oluşturdular (K. & V. E., 1997)

Tablo 1.3 Tribonacci Üçgeni

	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	3	1						
3	1	5	5	1					
4	1	7	13	7	1				
5	1	9	25	25	9	1			
6	1	11	41	63	41	11	1		
7	1	13	61	129	129	61	12	1	
…									

Yukarıda vermiş olduğumuz tanımlamalar doğrultusunda verilmiş olan bağlantıları paylaşalım. Daha fazla ayrıntı için (Kuhapatanakul, 2012) bakılabilir.

Tanım 3.3.1 $n \in \mathbb{Z}$ alalım. Herhangi bir negatif olmayan i tamsayısı için,

$$T(n,i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \binom{n-j}{i} a^{n-2j} b^{i+j} & ;\ 0 \leq i \leq n \\ 0 & ;\ otherwise \end{cases}$$

$(0 < i < n)$'dir. $T(n,i)$'nin toplamındaki tüm terimlerin $j > \min\{n-i, i\}$ iken sıfır olduğunu görüyoruz (Kuhapatanakul, 2012).

Tanım 3.3.2 Genelleştirilmiş Tribonacci üçgenini aşağıdaki şekilde tanımlanabilir (Kuhapatanakul, 2012).

Tablo 1.4 Genelleştirilmiş Tribonacci Üçgeni

	0	1	2	3	4	5	6	…	n	…
0	T(0,0)									
1	T(1,0)	T(1,1)								
2	T(2,0)	T(2,1)	T(2,2)							
3	T(3,0)	T(3,1)	T(3,2)	T(3,3)						
4	T(4,0)	T(4,1)	T(4,2)	T(4,3)	T(4,4)					
5	T(5,0)	T(5,1)	T(5,2)	T(5,3)	T(5,4)	T(5,5)				
6	T(6,0)	T(6,1)	T(6,2)	T(6,3)	T(6,4)	T(6,5)	T(6,6)			
⋮			⋮							
n	T(n,0)	T(n,1)	T(n,2)			…			T(n,n)	
⋮			⋮							

Teorem 3.3.3 Negatif olmayan n tamsayısı için

(1) $U_{n+1}{}^2 = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor} T(2n-2i,i) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{i=0} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i} a^{2(n-i-j)} b^{i+j}$.

(2) $U_n U_{n+1} =$

$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor} T(2n-2i-1,i) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor} \sum_{j=0}^{i=0} \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j-1}{i} a^{2(n-i-j)} b^{i+j}$.

biçimindedir (Kuhapatanakul, 2012).

Lemma 3.3.4 $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

(1) $U_{n+2}^2 = (a^2+b)U_{n+1}^2 + (a^2b+b^2)U_n^2 - b^3U_{n-1}^2$.

(2) $U_{n+1}U_{n+2} = (a^2+b)U_nU_{n+1} + (a^2b+b^2)U_{n-1}U_n - b^3U_{n-2}U_{n-1}$.

biçimindedir (Kuhapatanakul, 2012).

Lemma 3.3.5 $n \in \mathbb{N}$ olsun. Negatif olmayan $i < n$ tamsayıları için

$$T(n,i) = aT(n-1,i) + abT(n-1,i-1) + b^2T(n-2,i-1)$$

biçimindedir (Kuhapatanakul, 2012).

3.4 Genelleştirilmiş Fibonacci ve Tribonacci Dizisi için İlişkiler

Önceki bölümlerde olduğu gibi bu bölümde, Fibonacci ve Tribonacci dizileri arasında kurulmuş farklı bağlantılar derlenmiştir.

$(u_n)_{n\geq 0}$, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olsun. u_0 ve u_1 ikilisi sıfır olmayan keyfi sayılar olmak üzere $n \geq 2$ için

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

ikinci dereceden yineleme bağıntısı verilsin. $(v_n)_{n\geq 0}$, genelleştirilmiş Tribonacci dizisi olsun. v_0 ve v_1 ikilisi sıfır olmayan keyfi sayılar olmak üzere $n \geq 3$ için

$$v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3}$$

üçüncü dereceden yineleme bağıntısı verilsin.

Her iki dizinin elli yılı aşkın süredir bir arada bulunmasına ve her iki sınıfa ilişkin zengin bir literatür olmasına rağmen bugüne kadar ayrı ayrı incelenmiştir. Bu çalışmada bu popüler diziler arasında birçok bağıntı keşfedilmiştir.

Sonuçlarımızı kanıtlamak için tipik üreteç fonksiyonların yapısını kullanılmıştır. Bu iki genelleştirilmiş dizi ve bunlarla ilgili çift ve tek indeksli diziler için üreteç fonksiyonlar aşağıda belirtilmiştir.

$$f_{u_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \frac{u_0 + (u_1 - u_0)x}{1 - x - x^2}, \tag{3.4.1}$$

$$f_{u_{2n}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^n = \frac{u_0 + (u_1 - 2u_0)x}{1 - 3x + x^2}, \tag{3.4.2}$$

$$f_{u_{2n+1}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1} x^n = \frac{u_1 + (u_0 - u_1)x}{1 - 3x + x^2}, \tag{3.4.3}$$

$$f_{v_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \frac{v_0 + (v_1 - v_0)x + (v_2 - v_1 - v_0)x^2}{1 - x - x^2 - x^3}, \tag{3.4.4}$$

$$f_{v_{2n}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n} x^n = \frac{v_0 + (v_2 - 3v_0)x + (2v_1 - v_2)x^2}{1 - 3x - x^2 - x^3}, \tag{3.4.5}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{v_{2n+1}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n+1} x^n \\ &= \frac{v_1 + (v_2 - 2v_1 + v_0)x + (v_2 - v_1 - v_0)x^2}{1 - 3x - x^2 - x^3}. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Bu ifadeler aşağı yukarı belirli hesaplamalar sonucu elde edilir. Bu fonksiyonlar, u_n için (Mező, 2009)'da türetilmiştir. v_n için ise (Frontczak, 2018)'den gelir.

3.4.1 U_n ve V_n arasındaki basit ilişkiler

Bu bölümün ana sonuçları genelleştirilmiş Fibonacci ve Tribonacci sayıları arasındaki üç temel ilişkiyi ortaya koymaktadır. Bulgularımız üç ayrı teoremde sunulmuştur. Şunu not ediyoruz, $n < 0$ için $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ standart kuralı kullanacağız.

Teorem 3.4.1.1 Sırasıyla, $(u_n)_{n\geq 0}$ ve $(v_n)_{n\geq 0}$ genelleştirilmiş Fibonacci ve Tribonacci dizileri olarak tanımlasın. O zaman, her $n \geq 2$ için aşağıdaki özdeşliğe sahibiz (Frontczak, 2018).

$$u_0 v_n = (u_0 - u_1)u_{n-1} + v_0 u_n + (v_1 - v_0)u_{n-1} + (v_2 - v_1 - v_0)u_{n-2} + \sum_{k=0}^{n-3} u_k v_{n-3-k}. \tag{3.4.7}$$

İspat: (3.4.1) denkleminden şu çıkarımı yapıyoruz.

$$\frac{u_0 + (u_1 - u_0)x}{f_{u_n}(x)} = 1 - x - x^2.$$

Burada denklemin her iki tarafına $-x^3$ ekleyelim.

$$\frac{u_0 + (u_1 - u_0)x - x^3 f_{u_n}(x)}{f_{u_n}(x)} = 1 - x - x^2 - x^3.$$

Elde ettiğimiz bu denklem (3.4.4)'de ki denklem ile aşağıdaki ilişkiyi verir.

$$f_{v_n}(x) = (v_0 + (v_1 - v_0)x + (v_2 - v_1 - v_0)x^2)\frac{f_{u_n}(x)}{u_0 + (u_1 - u_0)x - x^3 f_{u_n}(x)}$$

veya

$$\begin{aligned} u_0 f_{v_n}(x) - v_0 f_{u_n}(x) &= (u_0 - u_1)x f_{v_n}(x) + (v_1 - v_0)x f_{u_n}(x) \\ &\quad + (v_2 - v_1 - v_0)x^2 f_{u_n}(x) + x^3 f_{u_n}(x) f_{v_n}(x) \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

eşit olarak yukarıdaki biçimde gösterilebilir. (3.4.8)'de ki denklemin sol tarafı (LHS),

$$LHS = \sum_{n=1}^{\infty}(u_0 v_n - v_0 u_n)x^n$$

biçimindedir. (3.4.8)'de ki denklemin sağ tarafı(RHS),

$$RHS = (u_0 - u_1)\sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1}x^n + (v_1 - v_0)\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}x^n + (v_2 - v_1 - v_0)\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2}x^n + \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-3} u_k u_{n-3-k}x^n$$

biçimindedir. Terimleri toplama ve x^n için katsayıları kıyaslama formülü kanıtlıyor. Spesifik örnek olarak aşağıdaki özdeşliği belirtebiliriz.

$u_n = F_n$ ve $v_n = T_n$ olduğunda (3.4.7) denklemi

$$T_n = F_n + \sum_{k=0}^{n-2} F_k T_{n-2-k} \tag{3.4.9}$$

biçiminde sadeleşir.

Teorem 3.4.1.2 $n \geq 2$ için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir (Frontczak, 2018).

$$u_0 v_{2n} = (2u_0 - u_1)u_{2n-2} + v_0 u_{2n} + (v_2 - 3v_0)u_{2n-2} + (2v_1 - v_2 - 2v_0)u_{2n-4} + \sum_{k=0}^{n-3} u_{2k}\left(2v_{2(n-2-k)} + v_{2(n-3-k)}\right). \tag{3.4.10}$$

İspat: Teorem 3.4.1.1'in ispatına benzerdir.

Spesifik örnek olarak aşağıdaki özdeşlik verilebilir.

$u_{2n} = F_{2n}$ ve $v_{2n} = T_{2n}$ olduğunda (3.4.10) denklemi

$$T_{2n} = F_{2n} + F_{2n-2} + \sum_{k=0}^{n-2} F_{2k}\big(2T_{2(n-1-k)} + T_{2(n-2-k)}\big). \qquad (3.4.11)$$

biçiminde sadeleşir.

Teorem 3.4.1.3 $n \geq 2$ için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir (Frontczak, 2018).

$$u_1 v_{2n+1} = (u_1 - u_0)v_{2n+1} + v_1 u_{2n+1} + (v_2 - 2v_1 + v_0)u_{2n-1} + (v_2 + v_1 - v_0)u_{2n-3} + \sum_{k=0}^{n-3} u_{2k+1}(2v_{2(n-2-k)+1} + v_{2(n-3-k)+1}. \qquad (3.4.12)$$

Spesifik örnek olarak aşağıdaki özdeşlik verilebilir.

$u_{2n+1} = F_{2n+1}$ ve $v_{2n+1} = T_{2n+1}$ olduğunda (3.4.12) denklemi

$$T_{2n+1} = T_{2n-1} + F_{2n+1} - F_{2n-1} + 2F_{2n-3} + \sum_{k=0}^{n-3} F_{2k+1}(\,2T_{2(n-2-k)+1} + T_{2(n-3-k)+1}). \qquad (3.4.13)$$

biçiminde sadeleşir.

3.4.2 $U_n$ve V_n arasındaki daha gelişmiş ilişkiler

Teorem 3.4.2.1 $n \geq 1$ için aşağıdaki özdeşlik geçerlidir (Frontczak, 2018).

$$u_0 \sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k} = v_0 \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-1-k}\big((u_0 - u_1)v_k + (v_1 - v_0)u_k\big) + (v_2 - v_1 - v_0)\sum_{k=0}^{n-2} u_k v_{n-2-k} + \sum_{k_1+k_2+k_3=n-3} u_{k_1} v_{k_2} v_{k_3}. \qquad (3.4.14)$$

Spesifik örnek olarak aşağıdaki özdeşliği verelim.

$u_n = F_n$ ve $v_n = T_n$ olduğunda (3.4.14) denklemi

$$\sum_{k=0}^{n} T_k T_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} F_k T_{n-k} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=n-3 \\ k_1,k_2,k_3 \geq 1}} F_{k_1} T_{k_2} T_{k_3}. \qquad (3.4.15)$$

biçiminde sadeleşir.

Benzer biçimde bir önceki bölümde de olduğu gibi bu bölümde de çift ve tek indeksli Fibonacci ve Tribonacci sayıları içinde belirli özdeşlikler bulunmaktadır. Dahası Robert Frontczak'ın "Relation for Generalized Fibonacci and Tribonacci Sequence" adlı makalesinde mevcuttur ve incelenebilir. Bu makalede konumuz olan Fibonacci ve Tribonacci sayılarına ait özdeşlikler haricinde lucas sayılarının da Fibonacci ve Tribonacci sayıları ile olan özdeşliklerine de yer verilmiştir.

3.5 Tribonacci ve Fibonacci Kodlama Özel Bölüm

Bu çalışma esas olarak aşağıda belirtmiş olduğum kaynaklardan yararlanılarak ortaya çıkarılmıştır.

(1) Introduction to Coding and Information Theory, S.Roman, 1996
(2) Coding Theory A First Course, S.Ling, C,Xing, 2004
(3) A First Course in Coding Theory, R.Hill, 1986

Bu kaynaklar asıl konunun bahsedildiği yerlerdir. Bu çalışmamda Fibonacci ve Tribonacci arasında ki ilişkileri konu aldığımız için özel olarak üzerinde çalıştığım ve çalışmaya devam edeceğim bu bölümü yukarıda ki kaynaklardan elde ettiğim veriler doğrultusunda özel bir alan tanımlanmıştır ve buna şöyle devam ediliyor.

Bu bölümde iki özel sayı dizisinin terimlerini modül 3'e göre inceleyip Tribonacci terimleri üzerinde belirli bir küme ile çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca Tribonacci sayıları modül 3'te $\mathbb{Z}_3$ sonlu cismine yapısal olarak benzer özellik sağlayıp sağlamadığına göre değerlendirilmiştir. Bunun için bildiğimiz toplama ve çarpma işlemi tanımlanmıştır. Daha sonra $T(n, 3)$ vektör uzayımız oluşturuldu. Bu doğrultuda Tribonacci vektör uzayımızdan aldığımız her bir vektörü iki adımda kodlanması karar verildi.

İlk adımda, n uzunluğunda ki Tribonacci vektörünü kendi içinde kodlanmıştır. Bunun sonucunda bileşenler yine Tribonacci sayısı olacaktır. Ancak elde edilen vektör kodlanmış biçimdedir.

İkinci adımda, elde ettiğimiz kodlanmış vektörü Fibonacci sayılarına göre eşleştirilmiştir.

Yukarıda ki bahsedilen iki adım bir dönüşüm tanımlanıyor. Ancak ondan önce konuyla ilgili bilgileri paylaşalım.

Modül 3'e göre Tribonacci terimleri;

$T_0 \equiv 0$	$T_{13} \equiv 0$	$T_{26} \equiv 0$	$T_{39} \equiv 0$	....	$T_{13n} \equiv 0$
$T_1 \equiv 1$	$T_{14} \equiv 1$	$T_{27} \equiv 1$	$T_{40} \equiv 1$	....	$T_{13n+1} \equiv 1$
$T_2 \equiv 1$	$T_{15} \equiv 1$	$T_{28} \equiv 1$	$T_{41} \equiv 1$	....	$T_{13n+2} \equiv 1$
$T_3 \equiv 2$	$T_{16} \equiv 2$	$T_{29} \equiv 2$	$T_{42} \equiv 2$	....	$T_{13n+3} \equiv 2$
$T_4 \equiv 1$	$T_{17} \equiv 1$	$T_{30} \equiv 1$	$T_{43} \equiv 1$	....	$T_{13n+4} \equiv 1$
$T_5 \equiv 1$	$T_{18} \equiv 1$	$T_{31} \equiv 1$	$T_{44} \equiv 1$	....	$T_{13n+5} \equiv 1$
$T_6 \equiv 1$	$T_{19} \equiv 1$	$T_{32} \equiv 1$	$T_{45} \equiv 1$	....	$T_{13n+6} \equiv 1$
$T_7 \equiv 0$	$T_{20} \equiv 0$	$T_{33} \equiv 0$	$T_{46} \equiv 0$	....	$T_{13n+7} \equiv 0$
$T_8 \equiv 2$	$T_{21} \equiv 2$	$T_{34} \equiv 2$	$T_{47} \equiv 2$	....	$T_{13n+8} \equiv 2$
$T_9 \equiv 0$	$T_{22} \equiv 0$	$T_{35} \equiv 0$	$T_{48} \equiv 0$	....	$T_{13n+9} \equiv 0$
$T_{10} \equiv 2$	$T_{23} \equiv 2$	$T_{36} \equiv 2$	$T_{49} \equiv 2$	....	$T_{13n+10} \equiv 2$
$T_{11} \equiv 1$	$T_{24} \equiv 1$	$T_{37} \equiv 1$	$T_{50} \equiv 1$	....	$T_{13n+11} \equiv 1$
$T_{12} \equiv 0$	$T_{25} \equiv 0$	$T_{38} \equiv 0$	$T_{51} \equiv 0$	....	$T_{13n+12} \equiv 0$

Hatırlatma 3.5.1 $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $m \geq 1$ olsun.

$$a \equiv b(mod\ m) \iff m|(a-b)$$

tanımlanan işlem bir denklik sınıfıdır. Ayrıca,

$$\mathbb{Z}/_{\equiv} = \mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, .., \overline{m-1}\}$$

olduğunu da biliyoruz.

Hatırlatma 3.5.2 Her $n \geq 0$ için, hatırlatma 3.5.1'e göre

- $T_{13n}, T_{13n+7}, T_{13n+9}, T_{13n+12} \equiv 0 \Leftrightarrow 3 \mid T_{13n}, T_{13n+7}, T_{13n+9}, T_{13n+12}$
- $T_{13n+1}, T_{13n+2}, T_{13n+4}, T_{13n+5}, T_{13n+6}, T_{13n+11} \equiv 1 \Leftrightarrow 3 \mid (T_{13n+1} - 1), (T_{13n+2} - 1), (T_{13n+4} - 1), (T_{13n+5} - 1), (T_{13n+6} - 1), (T_{13n+11} - 1)$
- $T_{13n+3}, T_{13n+8}, T_{13n+10} \equiv 2 \Leftrightarrow 3 \mid (T_{13n+3} - 2), (T_{13n+8} - 2), (T_{13n+10} - 2)$

biçiminde olduğu söylenebilir.

Hatırlatma 3.5.3 Ayrıca hatırlatma 3.5.1'e göre m modülüne göre kalan sınıfları kümesini göstermiştik. O zaman

$$\overline{0} \equiv \overline{T_{13n}} \Leftrightarrow T_{13n} \equiv 0\ (mod\ 3)$$
$$\overline{1} \equiv \overline{T_{13n+1}} \Leftrightarrow T_{13n+1} \equiv 1\ (mod\ 3)$$
$$\overline{2} \equiv \overline{T_{13n+3}} \Leftrightarrow T_{13n+3} \equiv 2\ (mod\ 3)$$

biçimdedir.

Not: Konu boyunca T_3 kümesi kullanılacatır.

$$T_3 = \{\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+3}}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} = \mathbb{Z}_3$$

$$\overline{T_{13n}} = \overline{T_{13n+7}} = \overline{T_{13n+9}} = \overline{T_{13n+12}} = \overline{0}$$
$$\overline{T_{13n+1}} = \overline{T_{13n+2}} = \overline{T_{13n+4}} = \overline{T_{13n+5}} = \overline{T_{13n+6}} = \overline{T_{13n+11}} = \overline{1}$$
$$\overline{T_{13n+3}} = \overline{T_{13n+8}} = \overline{T_{13n+10}} = \overline{2}$$

Not: T_3 için toplama ve çarpma işlemleri tanımlayalım.

$+$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n+1}}$	$\overline{T_{13n+3}}$
$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n+1}}$	$\overline{T_{13n+3}}$
$\overline{T_{13n+1}}$	$\overline{T_{13n+1}}$	$\overline{T_{13n+3}}$	$\overline{T_{13n}}$
$\overline{T_{13n+3}}$	$\overline{T_{13n+3}}$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n+1}}$

$\cdot$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n+1}}$	$\overline{T_{13n+3}}$
$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n}}$
$\overline{T_{13n+1}}$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n+1}}$	$\overline{T_{13n+3}}$
$\overline{T_{13n+3}}$	$\overline{T_{13n}}$	$\overline{T_{13n+3}}$	$\overline{T_{13n+1}}$

Tanım 3.5.4 F_q^n kümesine benzer Tribonacci vektör kümesi oluşturuldu.

$$\left(F_q^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) : v_i \in F_q\}\right)$$

Tribonacci vektör kümesini $T(n,3)$ olarak adlandırılmıştır.

$$T(n,3) = \{x = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) : \overline{x_i} \in T_3^n, i = 1, \dots, n\}$$

Tanım 3.5.5 $C \subset T(n,3)$ olsun. C bir lineer kod ancak ve ancak C, $T(n,3)$'ün bir alt uzayıdır.

Tanım 3.5.6 $T(n,3)$ üzerinde uzunluğu n boyutu k olan bir C lineer kodu $q - lu\ [n,k] - kod$ olarak isimlendirilir. Eğer C'nin uzaklığı d biliniyorsa o zaman $[n,k,d] - kod$ olarak isimlendirilir.

Tanım 3.5.7 C lineer kodunun üreteç matrisi T_G olarak gösterilir.

Not: C $[n,k] - lineer\ kod$ ise C'nin üreteç matrisi $k \times n$ matrisidir.

Tanım 3.5.8 $T_G' = (I_k | A)$ formundaki bir üreteç matrisine standart form denir.

Tanım 3.5.9 C, T_3 üzerinde T_G üreteç matrisli bir $[n,k,d] - kod$ olsun. C'nin her bir kod sözcüğü bir bilgi parçasını temsil edebilir. Dolayısıyla C, 3^k farklı bilgi parçasını temsil edebilir.

$$T(k,3) \xrightarrow{\theta} M_{1xk}(T_G) \xrightarrow{\beta} C \subset T(n,3) \xrightarrow{\omega} C \subset F(n,3)$$

$$u = (u_1, \dots, u_k) \to \theta(u) = [u_1 \dots u_k]_{1xk} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix}_{kxn} = [x_1 \dots x_n]$$

$$\to \beta(x) = (x_1 \dots x_n) \to \omega\big((x_1, \dots, x_n)\big) = \big(F_{x_i}, F_{x_i}, \dots, F_{x_i}\big)$$

$$,x_i = \begin{cases} \overline{F_0} \ ; & \overline{x_i} = \overline{T_{13n}} \\ \overline{F_1} \ ; & \overline{x_i} = \overline{T_{13n+1}} \\ \overline{F_3} \ ; & \overline{x_i} = \overline{T_{13n+3}} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Sayfa 25'de bahsedilen iki adımda herhangi bir Tribonacci vektörünün kodlanması yukarıda gösterilmiş olan dönüşüm yardımıyla elde edilmektedir.

Örnek 3.5.10 T_3 kümesi üzerinde

$$C_1 = \left(\begin{matrix} (\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}), \\ (\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}), \\ (\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}) \end{matrix} \right)$$

bir lineer koddur.

Örnek 3.5.11 Örnek 3.5.11'de ki C_1 kodunun üreteç matrisini bulalım.

$$C_1 = \left(\begin{matrix} (\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}), \\ (\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}), \\ (\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}) \end{matrix} \right)$$

C_1'in üreteci $S = \{(\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}})\}$'dir.

Böylece, C_1'in üreteç matrisi:

$T_G = \begin{pmatrix} \overline{T_{13n+1}} & \overline{T_{13n+3}} & \overline{T_{13n}} \\ \overline{T_{13n}} & \overline{T_{13n+3}} & \overline{T_{13n}} \end{pmatrix}$'dir.

Örnek 3.5.12 Örnek 3.5.11'de elde ettiğimiz üreteç matrisin standart formunu bulalım.

$$T_G = \begin{pmatrix} \frac{\overline{T_{13n+1}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n+3}}}{T_{13n+3}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\overline{T_{13n+1}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n+3}}}{T_{13n+3}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\overline{T_{13n+1}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n+3}} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\overline{T_{13n+1}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n+1}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n+3}} \end{pmatrix}$$

O zaman, T_G üreteç matrisin standart formu;

$$T_G' = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\overline{T_{13n+1}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n+1}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n+3}} \end{array} \right).$$

Örnek 3.5.13 Örnek 3.4.11' de elde ettiğimiz üreteç matrisi yardımıyla $(\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}), (\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+1}}), (\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n+1}})$ tribonacci vektörlerini kodlayalım.

$u = (\overline{u_1}, \overline{u_2}) \in T(2,3)$ tribonacci vektörlerini alalım.

$$\theta(u) = [\overline{u_1}, \overline{u_2}]_{1x2} \begin{bmatrix} \frac{\overline{T_{13n+1}}}{T_{13n}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n+1}} & \frac{\overline{T_{13n}}}{T_{13n+3}} \end{bmatrix}_{2x3} = [\overline{u_1 T_{13n+1}} \ \overline{u_2 T_{13n+1}} \ \overline{u_2 T_{13n+3}}]_{1x3}$$

O zaman,

$$\beta([\overline{u_1 T_{13n+1}} \ \overline{u_2 T_{13n+1}} \ \overline{u_2 T_{13n+3}}]) = (\overline{u_1 T_{13n+1}}, \overline{u_2 T_{13n+1}}, \overline{u_2 T_{13n+3}})$$

ve

$$\omega\big((\overline{u_1 T_{13n+1}}, \overline{u_2 T_{13n+1}}, \overline{u_2 T_{13n+3}})\big) = \big(\overline{F_{J_n}}, \overline{F_{J_n}}, \overline{F_{J_n}}\big). \ (j_1, j_2, \dots, j_n = 0,1,3)$$

şeklindedir.

<u>Mesaj Vektörü</u>	<u>İlk adım Vektör Kodlaması</u>	<u>İkinci Adım Vektör Kodlama</u>
$(\overline{u_1}, \overline{u_2})$	$(\overline{u_1 T_{13n+1}}, \overline{u_2 T_{13n+1}}, \overline{u_2 T_{13n+3}})$	$\big(\overline{F_{J_n}}, \overline{F_{J_n}}, \overline{F_{J_n}}\big)$
$(\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}})$	$(\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n}}, \overline{T_{13n}})$	$(\overline{F_3}, \overline{F_0}, \overline{F_0})$
$(\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+1}})$	$(\overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+3}})$	$(\overline{F_1}, \overline{F_1}, \overline{F_3})$
$(\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n+1}})$	$(\overline{T_{13n+3}}, \overline{T_{13n+1}}, \overline{T_{13n+3}})$	$(\overline{F_3}, \overline{F_1}, \overline{F_3})$

4. SONUÇ

Fibonacci ve Tribonacci sayılarının ayrı ayrı çok zengin bir literatürü olmasına rağmen her iki dizi bir arada pek çalışılmamıştır. Gerekli literatür taraması yapıp elde ettiğimiz veriler bu çalışmamızda derlenmiştir. Bu çalışmamızda amacımıza ulaşabilmek için öncelikle okuyucuya konu ile ilgili bilgi ve fikir sahibi olabileceği veriler paylaşılmıştır. Fibonacci ve Tribonacci sayılarının başlangıç koşuluyla birlikte tanımlanarak karakteristik denklemleri, binet formülleri, altın ve gümüş oran ifadeleri elde edildi. Daha sonra Fibonacci ve Tribonacci sayıları arasında kurulan ilişkiler ve özdeşlikler derlenerek gösterildi.

Ayrıca son olarak kendi çalışmam olan ve konferansta sunmuş olduğum Tribonacci ve Fibonacci kodlanması ile ilgili bir kısım bilgi paylaşıldı. Bu çalışmanın ilham konusu aslında sonlu cisimler üzerinde oluşturulmuş vektör uzaylarının kodlanması üzerinedir. Bende bu yapıyı daha özel bir alanda oluşturduğum ve adını Tribonacci vektörleri koymuş olduğum vektör uzayında çalışma yaptım. Bu çalışma üzerinde hala devam etmekteyim.

Sonuç olarak birçok kaynak bir araya getirildi ve ana konu hakkında daha rahat anlaşılabilecek düzeyde bir kaynak oluşturulmaya çalışılmıştır.

KAYNAKÇA

Frontczak, R. (2018). Convolutions for Generalized Tribonacci Numbers and Related Results. *International Journal of Mathematical Analysis,* Vol. 12(7); 307 - 324.

Brother U., A. (1963). Exploring Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 1(1):57-63.

F., L. (1999). Products Of Factorials In Binary Recurrence Sequences. *Rocky Mountain J. Math.*, (29): 1387-1411.

F., L. (2000). Fibonacci And Lucas Numbers With Only One Distinct Digit. *Port. Math.*, (57): 243-254.

F., L., & D., M. (2010). Perfect Powers In The Summatory Function Of The Power Tower. *J.Théor., Nombres Bordx.*, (22): 703-718.

Feinberg, M. (1963). Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, 1(3):70-74.

Hill, R. (1986). *A First Course in Coding Theory.*

K., A., & V. E., H. (1997). On Tribonacci Numbers And Related Functions. *The Fibonacci Quarterly*, (15.1) : 42-45.

Koshy, T. (2001). T. Koshy içinde, *Fibonacci and Lucas Number with Applications* (s. 79). New York: John Wiley & Sons.

Koshy, T. (2001). T. Koshy içinde, *Fibonacci and Lucas Number with Applications* (s. 145). New York: John Wiley & Sons.

Kuhapatanakul, K. (2012). Some Connections Between a Generalized Tribonacci Triangle and a Generalized Fibonacci Sequence. *Fibonacci Quarterly*, (50.1):44-50.

LING, S., & CHAOPING, X. (2004). *Coding Theory A First Course.* Cambridge Universty .

M., M. (1978). Intersection Des Images De Certaines Suites Récurrentes Linéaires. *Theor. Comput. Sci.*, (7): 117–121.

Marques, D. (2011). ON THE INTERSECTION OF TWO DISTINCT k-GENERALIZED FIBONACCI SEQUENCES. *Mathematica Bohemica*, 137; 403-413.

Mező, . (2009). Several Generating Functions for Second-Order Recurrence Sequences. *Journal of Integer Sequences*, Vol. 12, Article 09.3.7.

P., E., & J.L., S. (1975). The Product Of Consecutive Integers Is Never A Power. *Illinois J. Math.*, (19): 292-301.

Roman, S. (1996). *Introduction to Coding and Information Theory*.

Sloane, N. (tarih yok). *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 05 15, 2022 tarihinde OEIS: https://oeis.org/ adresinden alındı

Spickerman, W. (1982). BINET'S FORMULA FOR THE TRIBONACCI SEQUENCE. *The Fibonacci Quarterly*, 20(2): 118-120.

T.D., N., & J.V., P. (2005). Primes In Fibonacci n-Step And Lucas n-Step Sequences. *J. Integer Seq.*, 8.

Trojovský, P. (2020). On Repdigits as Sums of Fibonacci and Tribonacci Number . *MDPI*, 1-7.

Y., B., M., M., & S., S. (2006). Classical And Modular Approaches To Exponential Diophantine Equations I: Fibonacci and Lucas Perfect Powers. *Ann. Math.* , (163): 969-1018.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Recep TUTUCU
Doğum Yeri ve Tarihi	: Sakarya, 28/10/1997
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	: Hendek Anadolu Lisesi, 2011-2015
Lisans	: Trakya Üniversitesi, 2016-2020
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2020-2023
İletişim	: recepptutucuu@gmail.com