

## OPTİK GİBİ SAÇILMANIN DÜZLEMSEL DALGA SPEKTRUMU\*

H. Ergun BAYRAKÇI\*\*

### ÖZET

*Düzgün eğrisel ve mükemmel iletken konveks yüzeylerden elektromagnetik dalgaların optik gibi saçılmasında, yansıyan alan düzlemsel dalgaların spektrum integrali olarak bulunmuştur. Kırınıma ait alan için enversiyon yöntemi uygulanarak iki katlı spektrum integrali ile fiziksel enversiyon ve dairelerin enversleri ile de geometrik enversiyon tanımlanmıştır. Spektrum integralleri en dik inişli integrasyon çevresi yöntemi ile hesaplanmıştır.*

### ABSTRACT

#### Plane Waves Spectrum of Quasi Optic Scattering

*The reflection field resulted from the quasi optic scattering of the electromagnetic waves from the perfectly conducting smooth convex curved surfaces is found as the spectrum integral of plane waves. As for the diffracted field, the physical inversion is defined with the two folded spectrum integrals and the geometrical inversion is defined by the inverse of the circles. The spectrum integrals are calculated by the method of the steepest descents of the integration path.*

\* Bu çalışmayı TÜBİTAK (ANKARA) desteklemiştir. (MAG549) 1984.

\*\* Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elektronik Müh. Bölümü- Bursa.

## GİRİŞ

Elektromagnetik saçılma problemlerinde,  $L$  saçılma yüzeyinin eğrilik yarıçapı ve  $k$  dalga sayısı olmak üzere,  $L \gg \lambda$  için geçerli yaklaşık çözüm araştırılır. Bu yaklaşıklığa optik gibi yaklaşım denir ve bu yaklaşıklık iki grupta toplanabilir:

a) Maxwell denklemlerinde  $k \rightarrow \infty$  için geçerli olan,  $(\vec{E}, \vec{H})$  alanlarının asimptotik açılımlarını kullanarak, bunların ilk terimlerine ait çözümleri araştırmak,

b) Helmholtz denkleminin kesin çözümünde bulunan serileri, rezidülerin hızlı yakınsak serilerini elde etmek için, uygun integral dönüşümü kullanarak, bulunan integrallerin asimptotik açılımlarının ilk terimleri ile yetinmek.

Bu iki grupta verilen optik gibi yaklaşıklık düzlemsel dalga yaklaşıklığı olarak adlandırılabilir. Düzlemsel dalga yaklaşıklığı Maxwell teorisinin  $k \rightarrow \infty$  için bir yaklaşımdan ibaret olup, yukarıda bahsedildiği gibi Maxwell denklemlerinin veya kesin çözümdeki serilerde integral dönüşümü ile elde edilen integrallerin asimptotik hesabını yapmaktan ibarettir. Bu durumda yüksek frekanslı elektromagnetik dalgalar ışın adı verilen çizgiler boyunca yayılır. Işınlardan belirlenmesinde, saçılma yüzeyinin kaynağı gördüğü bölgede Fermat prensibi geçerlidir. Bu prensip, iki noktayı birleştiren ışın üzerinde optik yolun stasyoner olduğunu gösterir. Fermat prensibi saçılma yüzeyindeki yansıma ve kırılma teoremlerini verir. Böylece yüzeylerden optik benzeri saçılmada Huygens Prensibi de geçerlidir. Yine düzlemsel dalga yaklaşıldığında, saçılma yüzeyi üzerinde ilerleyen ve noktadan noktaya, yüzeye teğet olarak ve doğru olarak fırlayan ışınlar için terimler elde edilir. Bu dalgalar sürünüm dalgaları olarak isimlendirilmektedir.

Bayrakçı<sup>2,3,4</sup> ve birçokları optik gibi elektromagnetik saçılma ile ilgili araştırmalarında, kesin çözümde Watson veya Poisson integral dönüşümü ile, yöresel düzlemsel dalga yaklaşıklığını gerçekleştirilmesini kullanmışlardır.

Killer<sup>9</sup>, Patbak ve Kouyomajian<sup>10</sup> ve birçokları optik gibi elektromagnetik saçılma ile ilgili araştırmalarında, Maxwell denklemlerinde alanların asimptotik açılımlarının ilk terimleri alınarak yapılan, yöresel düzlemsel dalga yaklaşıklığının gerçekleştirilmesini kullanmışlardır.

Bayrakçı<sup>6</sup> elektromagnetik dalgaların düzgün eğrisel ve mükemmel iletken konveks yüzeylerden optik gibi saçılmasında, yöresel düzlemsel dalga yaklaşıklığını enversiyon yöntemini uygulayarak gerçekleştirmiş ve yansıyan dalgalara ait alanı bulmuştur. Burada geometrik enversiyonun yanında, fiziksel enversiyon da tanımlanmıştır.

Bu araştırmada, sonlu kaynaklı elektromagnetik dalgaların düzgün eğrisel ve mükemmel iletken konveks yüzeylerden optik gibi saçılmasında, yöresel düzlemsel dalga yaklaşıklığı Maxwell denklemlerinde ve kesin çözümde değil de geometrik optiğin ve kırınımın düzlemsel dalga spektrumuna ait integralinde ya-



pılmıştır. Sürünüm dalgaları için geometrik ve fiziksel enversiyon tanımlanarak, enversiyon yönteminin uygulanabileceği gösterilmiştir. Burada fiziksel enversiyon spektrum integralinde yeni bir integral dönüşümü kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

## 1. GEOMETRİK OPTİĞİN DÜZLEMSEL DALGA SPEKTRUMU

Sonlu kaynaklı elektromagnetik dalgaların düzgün eğrisel ve mükemmel iletken konveks yüzeylerden optik gibi saçılmasında, yansıyan alana ait skaler büyüklük, düzlemsel dalgaların spektrum integralinden bulunabilir. Yansıyan dalgalara ait düzlemsel dalgaların spektrum integrali en dik inişli integrasyon çevresi yöntemi ile hesaplanarak, yöresel düzlemsel dalgalar olarak, yansıyan dalgalara ait terimler elde edilebilir. Böylece elektromagnetik dalga ışını boyunca,  $\vec{s}_i$  ışın yönünde birim vektör olmak üzere,

$$\vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{s}_i \times \vec{E}_1, \quad \vec{s}_i \cdot \vec{E}_1 = \vec{s}_i \cdot \vec{H}_1 = 0, \quad \vec{E}_1 \cdot \vec{H}_1 = 0$$

koşullarının yanında, mükemmel iletken yüzeyin yansıma noktasında

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2$$

koşulu da geçerli olmaktadır. Burada  $i = 1$  indisi gelen ve  $i = 2$  indisi de yansıyan dalgalara alanı göstermektedir.

### 1.1. Yansıyan Alana Ait Düzlemsel Dalgaların Spektrum İntegrali

İki boyutlu problemlerde,  $\vec{W}$  eş faz yüzeyinin konum vektörü olmak üzere, şekil 1.1'deki geometri kullanılarak, Huygens-Green integralinden  $(\vec{E}, \vec{H})$  alanları ile orantılı skaler büyüklük

$$u(\vec{r}) \sim \frac{ik}{2\pi} \int_C A(s) e^{ik(\vec{P} - \vec{W}) \cdot \vec{N}} \cos(\vec{n}, \vec{\rho}) \frac{ds}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad 1.1$$

yazılabilir<sup>2</sup>.

Mükemmel iletken eğrisel yüzeyin eğrilik yarıçapı vektörü  $\vec{R} = \vec{R}(s, q)$  ile verildiği farzedilsin.  $\vec{W}$  eş faz yüzeyi vektörü ile  $\vec{R}$  eğrilik yarıçapı vektörü arasındaki bağıntı

$$\vec{W}(s, q) = \vec{R}(s, q) - s \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} = \vec{R}(s, q) - s \vec{N}_2(s, q) \quad 1.2$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $s$  ve  $q$  parametredir. 1.2 ifadesinde gelen ışın demeti için

$$s = (\vec{P}_1 - \vec{R}) \cdot \vec{N}_1$$

yazılabilir. Böylece 1 ve 2 indisleri mükemmel iletken yüzeye gelen ve bu yüzeyden yansıyan ışın demetlerine ait olmak üzere, iki boyutlu problemlerde

$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{i}{2\pi} \int_C A(s) e^{ik} [ [\vec{P}_1 - \vec{R}(s)] \cdot \vec{N}_1 + [\vec{P}_2 - \vec{R}(s)] \cdot \vec{N}_2 ] \cos(\vec{n}, \vec{R}_1) \frac{ds}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad 1.3$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eğrisel yüzeyin konum vektörü  $\vec{K} = \vec{K}(s, q)$  ile verildiği farzedilsin.  $\vec{W}$  eş faz yüzeyi vektörü ile  $\vec{K}$  konum vektörü arasındaki bağıntı

$$\vec{W}(s, q) = \vec{K}(s, q) - s \frac{\partial \vec{K}}{\partial s} = \vec{K}(s, q) - s \vec{N}_2(s, q) \quad 1.4$$

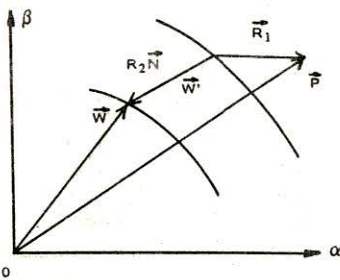
şeklinde ifade edilebilir. 1.4 ifadesinde gelen ışın demeti için

$$s = (\vec{P}_1 - \vec{K}) \cdot \vec{N}_1 \quad 1.5$$

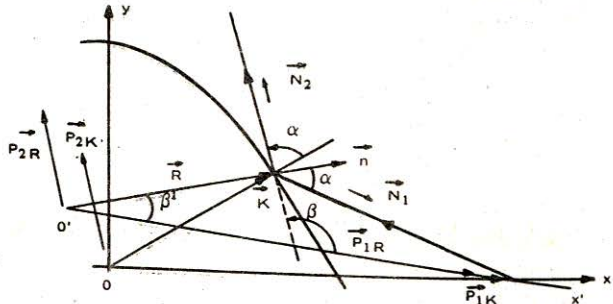
yazılabilir. Böylece, iki boyutlu saçılma problemlerinde, yansıyan dalganın için  $(\vec{E}, \vec{H})$  alanları ile orantılı büyüklük

$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{1}{2\pi} \int_C A(s) e^{ik} [ [\vec{P}_1 - \vec{K}(s)] \cdot \vec{N}_1 + [\vec{P}_2 - \vec{K}(s)] \cdot \vec{N}_2 ] \cdot \cos(\vec{n}, \vec{R}) \frac{ds}{\sqrt{R_1 R_2}} \quad 1.6$$

şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 1 - α, β düzleminde eş-faz yüzeyleri



Şekil 2 - Mükemmel iletken eğrisel yüzeye gelen ışın ve uzak alan için yansıyan ışın

## 1.2. Yansıyan Dalgalara Ait Spektrum İntegralinin En Dik İnişli İntegrasyon Çevresi Yöntemi ile Hesabı

Bir ortogonal koordinatlar sisteminde, bir koordinata göre simetrik olan, iki boyutlu optik gibi saçılma problemlerini ihtiva eden, sonlu kaynaklı elektro-

magnetik dalgaların düzgün eğrisel ve mükemmel iletken konveks yüzeylerden yansımaları göz önünde alınmaktadır. 1.3 ile verilen integralin fazındaki büyüklükler, Şekil 3 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\vec{N}_2 &= \cos \beta \vec{e}_x + \sin \beta \vec{e}_y, & \vec{R} &= R \cos \beta' \vec{e}_x + R \sin \beta' \vec{e}_y, \\ \vec{P}_1 &= \rho_0 \vec{e}_x, & \vec{P}_2 &= \rho \cos \beta \vec{e}_x + \rho \sin \beta \vec{e}_y, \\ \vec{N}_1 &= \cos \sigma \vec{e}_x - \sin \sigma \vec{e}_y.\end{aligned}\quad 1.7$$

şeklinde ifade edilebilir. 2.3 ifadesinin fazı uzak alan için

$$(\vec{P}_1 - \vec{R}) \cdot \vec{N}_1 + (\vec{P}_2 - \vec{R}) \cdot \vec{N}_2 = \rho + \rho_0 \cos(\beta - 2\beta') - 2R \cos(\beta - \beta') \quad 1.8$$

olarak elde edilir. Yine Şekil 2'den

$$\sigma = 2\alpha - \beta = \alpha - \beta', \quad \alpha = \beta - \beta'$$

olduğu görülür. Böylece 1.3 integralinin faz fonksiyonu

$$\Psi(\beta') = \rho_0 \cos(\beta - 2\beta') - 2R \cos(\beta - \beta') \quad 1.9$$

olarak ifade edilebilir. Yine 1.3 integralinde

$$ds = R d\beta', \quad R_1 = R, \quad R_2 = R \cos(\beta - \beta')$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{N}_1) = \cos(\beta - \beta')$$

olmak üzere, bu integral

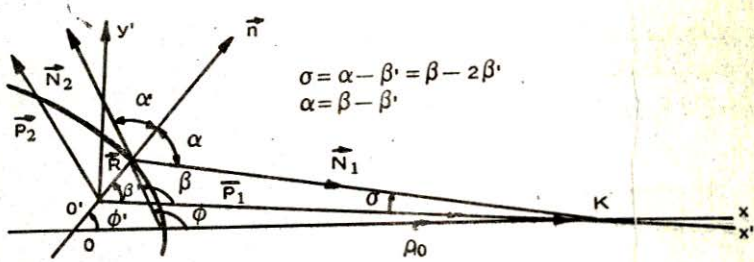
$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{e^{ik}}{\sqrt{k\rho}} \int_c A(\beta') e^{ik\Psi(\beta')} \sqrt{kR \cos(\beta - \beta')} d\beta' \quad 1.10$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu integralin hesabı en dik inişli integrasyon çevresi yöntemi ile  $\ell = \rho - R \cos \alpha$  olmak üzere,

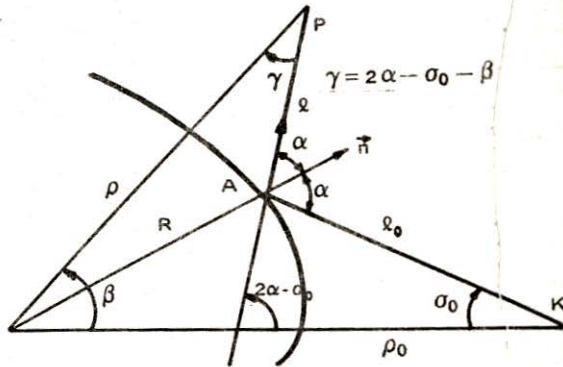
$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} A(\beta_s) \sqrt{\frac{R \cos \alpha}{2\ell_0 + R \cos \alpha}} \frac{e^{ik(\ell + \ell_0) - i\pi/4}}{\sqrt{k\ell}} \quad 1.11$$

şeklinde hesaplanmıştır.





Şekil: 3 - Düzgün eğrisel konveks yüzeyden yansımada ışın yolları



Şekil: 4 - Eğrisel yüzeye gelen ve yansıyan dalga ışınlarına ait geometri

Diğer taraftan, yukarıdaki hesaplamalarda,  $\beta'$  hariç diğer açılar sabit olarak alınmıştır. Şimdi  $\beta$  hariç bütün açılar değişken olduğu göz önüne alınarak, diferansiyel işlem uygulandığı takdirde, 1.3 integrali

$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{i}{2\pi} \int_C A(\alpha) e^{ik\Psi(\alpha)} \frac{kR \cos \alpha}{\sqrt{k\rho_0 \cos \sigma_0} \sqrt{k\rho \cos \gamma}} d\alpha \quad 1.12$$

yazılabilir. Burada faz fonksiyonu

$$\Psi(\alpha) = \rho \cos \gamma + \rho_0 \cos \sigma_0 - 2R \cos \alpha + \rho(\gamma + \beta) \sin \gamma + \rho_0 \sigma_0 \sin \sigma_0 - 2R \alpha \sin \alpha \quad 1.13$$

dır. 1.12 integrali

$$\ell = \rho \cos \gamma - R \cos \alpha, \ell_0 = \rho_0 \cos \sigma_0 - R \cos \alpha \quad 1.14$$

olmak üzere, en dik inişli integrasyon çevre yöntemi ile

$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{i}{\sqrt{2\pi}} A(\alpha_s) \sqrt{\frac{(\ell + \ell_0) R \cos \alpha}{2\ell \ell_0 + (\ell + \ell_0) R \cos \alpha}} \frac{e^{ik(\ell + \ell_0) - i\pi/4}}{\sqrt{k(\ell + \ell_0)}} \quad 1.15$$

şeklinde hesaplanır. Uzak alan için  $\ell \rightarrow \infty$  olup, 1.11 ifadesi elde edilir.

### 1.3. Poisson İntegral Dönüşümüne Geçiş ve $\nu$ Düzleminde İntegrasyon

#### 1.12 integrali

$$\nu = kR \sin \alpha = k\rho_0 \sin \sigma_0 = k\rho \sin \gamma \quad 1.16$$

dönüşümü ile  $\nu$ 'ya göre integrale dönüşebilir. Böylece

$$k\rho_0 \cos \sigma_0 = [(k\rho_0)^2 - \nu^2]^{1/2}, \quad k\rho \cos \gamma = [(k\rho)^2 - \nu^2]^{1/2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{\nu}{kR}$$

$$kR \cos \alpha = [(kR)^2 - \nu^2]^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{\nu}{k\rho}, \quad \sigma_0 = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{\nu}{k\rho_0}$$

olmak üzere, 1.12 integrali  $\nu$  düzleminde

$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{i}{2\pi} \int_{c_1} A(\nu) = \frac{e^{i\Psi_1(\nu) + i\nu\beta}}{[(k\rho_0)^2 - \nu^2]^{1/4} [(k\rho)^2 - \nu^2]^{1/4}} d\nu \quad 1.17$$

şeklinde elde edilir. Burada faz fonksiyonu  $\Psi(\nu) = \psi_1(\nu) + \nu\beta$  olup,

$$\begin{aligned} \Psi_1(\nu) = & [(k\rho)^2 - \nu^2]^{1/2} + [(k\rho_0)^2 - \nu^2]^{1/2} - 2[(kR)^2 - \nu^2]^{1/2} \\ & + \nu \left[ -\cos^{-1} \frac{\nu}{k\rho} - \cos^{-1} \frac{\nu}{k\rho_0} + 2 \cos^{-1} \frac{\nu}{kR} \right] \end{aligned} \quad 1.18$$

dır. 1.17 integralinde, Debye asimptotik açılımı kullanılarak ve

$$B(\nu) = e^{i2\nu \cos^{-1} \nu/kR} \sim (+i) \frac{H_\nu^{(2)}(kR)}{H_\nu^{(1)}(kR)} \quad \text{veya} \quad \sim (+i) \frac{H_\nu^{(2)'}(kR)}{H_\nu^{(1)'}(kR)}$$

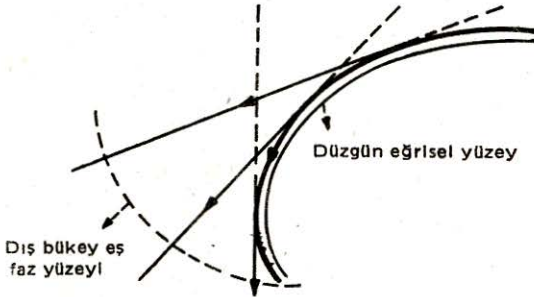
şeklinde ele alınarak, düzgün eğrisel ve mükemmel iletken yüzeylerden yansıma için,

$$u(\vec{\rho}) \sim \frac{i}{4} \int_{c_1} A(\nu) B(\nu) H_\nu^{(1)}(k\rho_0) H_\nu^{(1)}(k\rho) e^{i\nu\beta} d\nu \quad 1.19$$

yazılabilir. 1.19 integrali mükemmel iletken küre ve dairesel silindir halinde Poisson integral dönüşümünden başka bir şey değildir<sup>4,5</sup>

## 2. KIRINIMIN DÜZLEMSEL DALGA SPEKTRUMU VE ENVERSİYON YÖNTEMİ

Sürünüm dalgaları düzgün ve mükemmel iletken konveks yüzeyin eş faz yüzeylerine dik olan elektromagnetik dalga ışınlarının zarfıdır. Buna göre eş-faz yüzeylerinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri, düzgün eğrisel yüzeydir. Sürünüm dalgası bu eğrisel yüzeyin her noktasında, yüzey üzerinde düzlemsel dalga olarak yayılır. Yüzeyden fırlayan ışınlar sönümü ve yüzey üzerinde ilerleyen kısımda yayılımı ifade eder. Sürünüm dalga ışınları dışbükey eş-faz yüzeyi ile eğrisel yüzeyden ayrılır. Sürünüm dalga ışını boyunca, sönüm ışınları odaklaması tam olmayan elektromagnetik ışınlar demetidir. Şekil 5'de konveks düzgün eğrisel yüzey üzerinde sürünüm dalga ışını ve sönüm ışınları görülmektedir. Kaynaktan A kırınım noktasına gelen dalga ve B kırınım noktasından gözlem noktasına giden dalga da yöresel düzlemsel dalgadır.



Şekil: 5 -Konveks düzgün eğrisel yüzey ve sürünüm dalga ışını

Konveks yüzeyin eğrilik yarıçapları odaklanmışsa yöresel olan, odaklanmamışsa yöresel olmayan yüzey olarak tanımlanabilir. Yöresel yüzeylere örnek küresel ve dairesel silindirik yüzeyleri ve yöresel olmayan yüzeylere örnek parabolik silindir, döner paraboloid vs. gösterilebilir.

Yöresel düzgün eğrisel ve mükemmel iletken konveks yüzeylerden saçılmada kırınımın düzlemsel dalga spektrum integralinin hesabında, sürünüm dalga ışınının yüzey boyunca takip ettiği yolda diferansiyel işlemler kırınımın düzlemsel dalga spektrum integralinde uygulanabilmektedir. Yöresel olmayan düzgün eğrisel yüzey halinde, sürünüm dalga ışınının yüzey boyunca takip ettiği yolda diferansiyel işlemler kırınımın düzlemsel dalga spektrum integralinde uygulanamamaktadır. Bu bakımdan yüzey üzerindeki sürünüm dalga ışını boyundaki diferansiyel işlemleri spektrum integralinin dışına almak gerekmektedir. Bu bakımdan, kırınımda elektromagnetik dalga ışını boyunca integral dönüşümleri kullanmak



gerekmektedir. Enversiyon yöntemi ile bu integral dönüşümleri gerçekleştirilebilir. Bu integral dönüşümleri ışın boyunca yöresel düzlemsel dalgaları veren spektrum integrallerinden başka bir şey değildir.

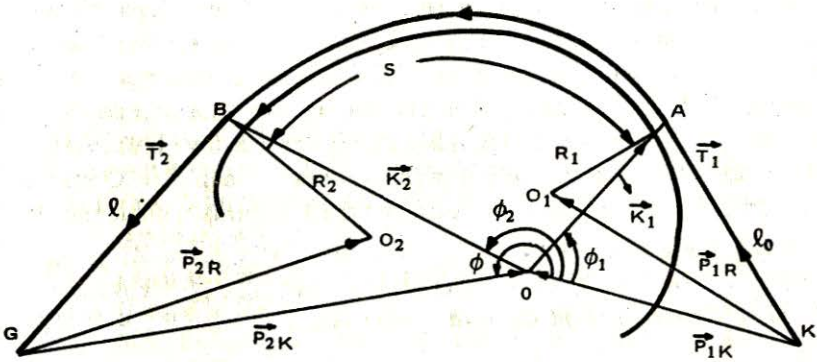
Diğer taraftan, fiziksel enversiyon optik benzeri çözümde kaynağın koordinat dönüşümüne karşı mükemmel iletken yüzeyden kırınım ışınlarının değişmeme özelliğine dayanır. Burada da, sürünüm dalga ışın boyunca, s ışın yönünde birim vektör olmak üzere,

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{s} \times \vec{E}, \quad \vec{s} \cdot \vec{E} = \vec{s} \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{E} \cdot \vec{H} = 0$$

koşulları geçerli olmaktadır.

## 2.1. Sürünüm Dalgalarının Alanına Ait Düzlemsel Dalgaların Spektrum İntegrali

1.3 ifadesi o şekilde değiştirilecektir ki mükemmel iletken yüzeye gelen ve bu yüzeyden kırınım alanının ışın demetleri bu formüllere girecek şekilde olsun.



Şekil 6 - Mükemmel iletken eğrisel yüzey üzerinde sürünüm dalga ışını ve kırınım noktaları

Yukarıdaki şekilde  $\vec{K}_i$ , eğrisel yüzeyin konum vektörleri,  $\vec{R}_i$  de eğrilik yarıçapı vektörleridir. Burada  $i = 1, 2$ 'dir.

Eğrisel yüzeyin konum vektörü  $\vec{K}_i = \vec{K}_i(s, q)$  ile verildiği farzedilsin.  $\vec{W}$  eş faz yüzeyi vektörü ile  $\vec{K}$  konum vektörü arasındaki bağıntı

$$\vec{W}(s, q) = \vec{K}_1(s, q) - s' \frac{\partial \vec{K}_1}{\partial s} = \vec{K}_1(s, q) - s' \vec{T}_1(s, q) \quad 2.1$$

şeklinde ifade edilebilir. 2.1 ifadesinde gelen ışın demeti için

$$s' = (\vec{P}_2 - \vec{K}) \cdot \vec{T}_2 + s \quad 2.2$$

yazılabilir. A ve B kırınım noktalarının etkin kaynaklar olmaları için bir integral dönüşümü daha yapılarak, bu alanın iki katı spektrum integrali olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Böylece, 1 ve 2 indisleri mükemmel iletken A kırınım noktasında yüzeye gelen ve bu yüzeyden B kırınım noktasından gözlem noktasına giden ışın demetlerine ait indisler olmak üzere, iki boyutlu saçılma probleminde,  $(\vec{E}, \vec{H})$  alanları ile orantılı büyüklük

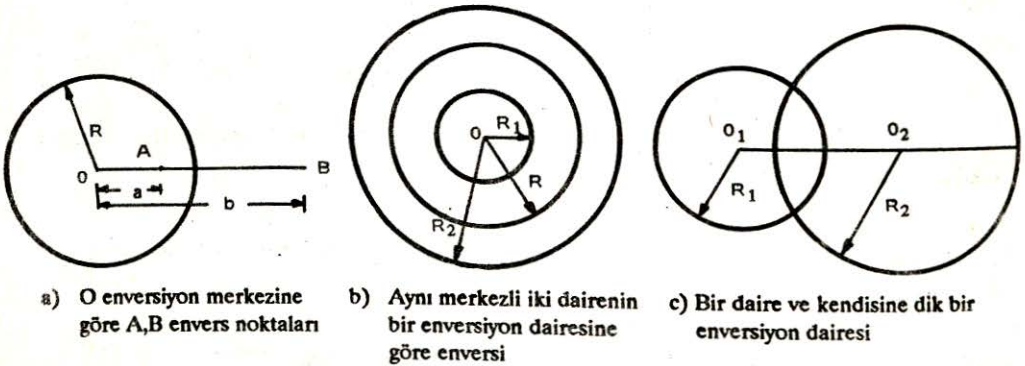
$$u(\rho) \sim \frac{-1}{4\pi^2} \int_{C_2} A_2(s_2) e^{ik [ [\vec{P}_2 - \vec{K}_2(\vec{s}_2) \cdot \vec{T}_2 ] [ \int_{C_1} A_1(s_1) e^{ik [ \vec{P}_1 - \vec{K}_1(s_1) ] \cdot \vec{T}_1 + s } ds_1 ] ds_2 } \quad 2.3$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\vec{T}_{1,2}$  eğrisel yüzeyin kırınım noktalarındaki teğet vektörleri olup,  $s = (s_2)$ 'dir.

## 2.2. Enversiyon Yöntemi: İki Boyutlu Geometrik Enversiyon

Bu çalışmada iki boyutlu enversiyon ele alınmaktadır. Diğer bir ifade ile düzlemde enversiyon de kullanılabilir. Örneğin dairesel silindirik koordinatlar sisteminde Oxy düzleminde ve küresel koordinatlar sisteminde  $\phi = \text{sabit}$  düzlemlerinde iki boyutlu geometrik enversiyon, bir daire yardımı ile elde edilir. A ve B noktalarının R yarıçaplı dairenin O merkezinden a ve b uzaklıkları arasında  $R^2 = ab$  bağıntısı varsa, bu noktalar birbirinin enversi olur. O noktası enversiyon merkezi ve R yarıçapı da enversiyon yarıçapı olarak tanımlanmaktadır<sup>1</sup>.

Bu çalışmada geçecek geometrik enversiyonların birisi,  $R_1$  yarıçaplı bir dairenin aynı merkezli R yarıçaplı bir enversiyon dairesine göre enversi, yine aynı merkezli ve  $R_2$  yarıçaplı bir dairedir. Yarıçaplar arasından  $R^2 = R_1 R_2$  bağıntısı vardır.



Şekil: 7 - Geometrik enversiyon



**İki Boyutlu Fiziksel Enversiyon:** Elektromagnetik dalga ışınının kaynaktan birinci kırınım noktasına yöresel düzlemsel dalga, eğrisel yüzey boyunca düzlemsel dalga ve birinci kırınım noktasından ikinci kırınım noktasına kadar da yine yöresel düzlemsel dalga olarak ilerlediği gözönüne alınarak, 2.3 integrali yazılabilir. Bu iki katlı integral en dik inişli integrasyon çevresi yöntemi ile hesaplanabilir ve eğrisel yüzey boyunca diferansiyel işlemlerin yer almadığı integrallerin genlikleri semer noktalarında yavaşça değişen fonksiyonlardır. Burada fiziksel enversiyon, spektrum integralleri olarak tanımlanan integral dönüşleri kullanılmasıyla, yöresel düzlemsel dalgaların ve düzlemsel dalganın oluşturulmasıdır. Buna göre dairesel eş faz çizgileri elde edilmiş olur<sup>6</sup>.

### 2.3. Mükemmel İletken Yöresel Yüzeyden Optik Gibi Saçılmada Kırınım Ait Spektrum İntegralinden $\nu$ Düzleminde İntegrasyona Geçiş ve Bu Düzlemde İntegrasyon

1.3 integrali tekrar ele alınsın.  $|\nu - kR| \sim 0(\nu^{1/3})$  koşulunda,  $H_\nu^{(1)}(kR) = 0$  veya  $H_\nu^{(1)'}(kR) = 0$  şeklinde Hankel fonksiyonunu veya Hankel fonksiyonunun türevini sıfır yapan denklemlerin ilk sıfırlarının  $\nu$  kompleks düzlemindeki yerleri

$$\nu \sim kR + \frac{(3 Y_{1,2})^{2/3}}{2} (kR)^{1/3} e^{i\pi/3} \quad 2.4$$

idi. Diğer taraftan,  $\alpha$  çok küçük olmak üzere, 1.16 ile verilen dönüşümler ele alındığında, yine  $\nu$  kompleks düzleminde 1.19 integralini elde etmek mümkündür. Bu durumda 1.19 integrali kesin çözümdeki Poisson integral dönüşümü kullanılmasıyla elde edilen neticenin aynıdır.

Sürünüm dalgalarını veren alan için 1.19 integrali  $H_\nu^{(1)}(kR) = 0$  veya  $H_\nu^{(1)'}(kR) = 0$  Hankel fonksiyonunun veya türevinin ilk sıfırları olan  $\nu_{01,2}$  kutbunda, rezidü ile ve birinci yaklaşıklıkla hesaplanır. Burada  $k\rho_0$  ve  $k\rho$  argümanlı Hankel fonksiyonları yerine Debye asimptotik açılımları kullanılır.

Netice olarak, 1.19 integrali

$$u(\vec{\rho}) \sim A(\nu_0) \frac{H_{\nu_0}^{(2)}(kR) e^{ik(\ell_0 + \ell)}}{H_{\nu_0}^{(1)'}(kR) \sqrt{k\ell_0} \sqrt{k\ell}} e^{i\nu_0 \left[ -\cos^{-1} \frac{\nu_0}{k\rho} - \cos^{-1} \frac{\nu_0}{k\rho_0} + \Phi \right]} \quad 2.5$$

olarak hesaplanır. Burada  $H_{\nu_0}^{(1)'}(kR)$ , Hankel fonksiyonunun  $\nu$  ya göre türevi ve

$$[(k\rho_0)^2 - \nu_0^2]^{1/2} = k\ell_0, \quad [(k\rho)^2 - \nu_0^2]^{1/2} = k\ell \quad 2.6$$

dır. Kırınım katsayısının karesi, yumuşak yüzey ve sert yüzey için

$$[D_A^{s,Y}]^2 = [D_B^{s,Y}]^2 = [D^{s,Y}]^2 = -\sqrt{\frac{2\pi}{ik}} \frac{QH_{\nu_{01,2}}^{(2)}(kR)}{QH_{\nu_{01,2}}^{(1)'}(kR)} \quad 2.7$$

olup, Q yumuşak yüzey için 1 ve sert yüzey için de Hankel fonksiyonlarının argümanlarına göre türevlerini ifade etmektedir<sup>9,10</sup>. Böylece

$$\Phi_{01,2} = \Phi - \cos^{-1} \frac{\nu_{01,2}}{k\rho_0} - \cos^{-1} \frac{\nu_{01,2}}{k\rho}, \quad \nu_{01,2} = kR + i\alpha_{1,2}R \quad 2.8$$

ve sönüm katsayısı

$$\alpha_{1,2} \sim \frac{e^{-i\pi/6}}{R} \frac{(3y_{01,2})^{2/3}}{2} (kR)^{1/3} \quad 2.9$$

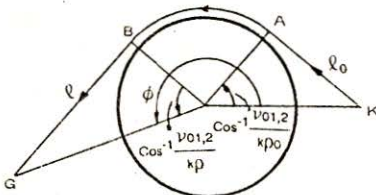
olmak üzere, 2,3 alanı

$$u(\vec{\rho}) \sim -\sqrt{\frac{k}{2\pi}} [D^{s,Y}]^2 e^{-\alpha_{1,2}R\Phi_{01,2}} e^{ikR\Phi_{01,2}} \frac{e^{ik(\ell+\ell_0)-i\pi/4}}{\sqrt{k\ell_0} \sqrt{k\ell}} \quad 2.10$$

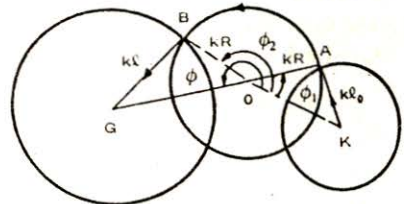
olarak ifade edilebilir.

## 2.4. Mükemmel İletken Yöresel Yüzeyden Optik Gibi Saçılmada Kırınım Ait Spektrum İntegralinde Enversiyon Yöntemi

$k\ell_0$  yarıçaplı daire kaynağın,  $kR$  yarıçaplı daire yöresel yüzeyin merkezinin ve  $k\ell$  yarıçaplı daire gözlemin eş faz çizgileri Şekil 9'da gösterilmiştir.  $k\ell_0$  yarıçaplı dairenin  $kR$  yarıçaplı enversiyon dairesine göre evirtimi yine kendisidir. Böylece  $k\ell$  yarıçaplı daire yöresel düzlemsel dalganın eş faz çizgisi olduğundan, A noktası etkin kaynaktır.



Şekil: 8 - Yöresel yüzeyde sürünüm dalga ışını



Şekil: 9 - Yöresel yüzey ile kaynağın ve gözlemin eş faz çizgileri

Diğer taraftan, 2,3 ile verilen iki katlı spektrum integralinin birinci katı  $R_1 = R_2 = R$  ve  $ds = R d\Phi$  olmak üzere, en dik inişli integrasyon çevresi yöntemi ile

$$\int_{C_1} A_1(\nu_0, \Phi_1) e^{ik[\vec{P}_1 - \vec{K}_1(\Phi_1)] \cdot T - ik\Phi_1} d\Phi_1 = A_1(\nu_0, \Phi_{01}) \sqrt{2\pi} \frac{e^{ik\ell_0(\nu_0) - i\pi/4}}{\sqrt{k\ell_0(\nu_0)}} \quad 2.11$$



şeklinde hesaplanır. Burada  $A_1(\nu_0, \Phi_{01}) = A(\Phi_{01}) D_1(\nu_0)$  olup, kırınım katsayısı  $D_1(\nu_0)$ 'dir.

AB yayı boyunca kayıplı düzlemsel dalga yani sürünüm dalgası olarak ilerleyen elektromagnetik dalga B kırınım noktasına ulaşır.

$k\ell$  yarıçaplı dairenin  $kR$  yarıçaplı enversiyon dairesine göre envirtimi yine kendisidir. Böylece  $k\ell$  yarıçaplı daire yöresel düzlemsel dalganın eş faz çizgisi olduğundan, elektromagnetik dalga ışını yöresel düzlemsel dalga olarak B'den G'ye ulaşır. Burada 2.3 ile verilen iki katlı integralin diğer katı

$$A_2(\nu_0, \Phi) = D_1(\nu_0) e^{-\alpha_{12}(\Phi_{02} - \Phi_{01})} e^{iks} = e^{ikR(\Phi_{02} - \Phi_{01})} \quad 2.12$$

olmak üzere, en dik inişli integrasyon çevresi yöntemi ile

$$\begin{aligned} \int_{C_2} A_2(\nu_0, \Phi_2) e^{ik[\vec{P}_2 - \vec{K}_2(\Phi)] \cdot \vec{T}_2 + ikR(\Phi_2 - \Phi_{01})} d\Phi_2 \\ = \sqrt{2\pi} A_2(\nu_0, \Phi_{02}) e^{ikR(\Phi_{02} - \Phi_{01})} \frac{e^{ik\ell(\nu_0) - i\pi/4}}{\sqrt{k\ell(\nu_0)}} \end{aligned} \quad 2.13$$

olarak hesaplanır.

Yukarıdaki integrallerin ağırlık fonksiyonları yavaşça değişen fonksiyonlardır. Kırınım katsayılarının karesi 2.3 ile verilmişti. Netice olarak  $u(\rho)$  skaler alanı için iki katlı integralin yukarıdaki hesabı ile 2.10 ifadesi bulunur.

### 2.5. Mükemmel İletken Yöresel Olmayan Yüzeylerden Optik Gibi Saçılmada Kırınım Ait Spektrum İntegralinde Enversiyon Yöntemi

Şekil 10'da kaynağın ve gözlemin eş faz çizgileri ile mükemmel iletken ve yöresel olmayan konveks yüzey üzerinde kırınımların eş faz çizgileri gösterilmiştir.

Yine 2.3 ile verilen iki katlı spektrum integralinin birinci katı en dik inişli integrasyon çevresi yöntemi ile

$$\int_{C_1} A_1(\nu_{01}, \Phi) e^{ik[\vec{P}_1 - \vec{K}(\Phi)] \cdot \vec{T} - ik\Phi_1} d\Phi_1 = A_1(\nu_{01}, \Phi_{01}) \sqrt{2\pi} \frac{e^{ik\ell_0(\nu_{01}) - i\pi/4}}{\sqrt{k\ell_0(\nu_{01})}} \quad 2.14$$

şeklinde hesaplanır.

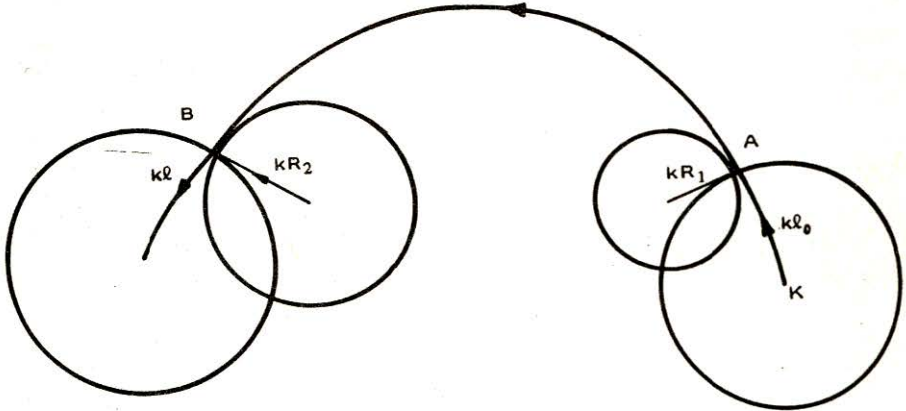
Yumuşak ve sert silindirik yüzeyler için kırınım katsayıları 2.7'de verilmişti.

AB yayı boyunca kayıplı düzlemsel dalga yani sürünüm dalgası olarak ilerleyen elektromagnetik dalga B'ye ulaşır. B kırınım noktasıdır.

Konveks eğrisel yüzey boyunca sürünüm dalgaları eğrisel yüzeyden dışarı doğru ve eğrisel yüzeye teğet olarak fırladığından, bunlar sönümü oluşturmaktadır. Böylece eğrisel yüzey üzerinde sürünüm dalgalarının izlediği her noktanın eğrilik yarıçapına ait daire gözönüne alınarak, eğrilik yarıçapının ve dalga boyunun fonksiyonu olarak, sönüm katsayısı bulunabilir. Eğrisel yüzey üzerinde çok küçük bir uzunluk elemanına ait sönüm katsayısı bulunup, sürünüm dalga ışını boyunca bunun integrali alınarak, sönüm bulunabilir. Sönüm faktörü integralin ağırlık fonksiyonuna etkir. Böylece sönüm faktörü

$$e^{-\int_{s_1}^{s_2} \alpha(s) ds} \quad 2.15$$

olarak ifade edilebilir ve sönüm katsayısı için de 2.9 ifadesi geçerlidir.



Şekil: 11 - Yöresel olmayan yüzeyde kırınım noktalarındaki eş faz çizgileri ile kaynağın ve gözlemin eş faz çizgileri

Şekil 11'de verilen  $k\ell$  yarıçaplı dairenin,  $kR_2$  yarıçaplı enversiyon daire-sine göre envertimi yine kendisidir. Böylece  $k\ell$  yarıçaplı daire yöresel düzlemsel dalganın eş faz çizgisi olduğundan, elektromagnetik dalga ışını B kırınım noktasından G gözlem noktasına ulaşır. Burada 2.3 ile verilen iki katlı integralin diğer katı, ağırlık fonksiyonu

$$A_2(\nu_{02}, \Phi) = D_B(\nu_{02}) e^{-\int_{\Phi_{01}}^{\Phi_{02}} \alpha_{1,2} R(\Phi) d\Phi} \quad 2.16$$

ve sürünüm dalgası faktörü

$$e^{iks_{12}} = e^{ik \int_{\Phi_{01}}^{\Phi_{02}} \left( \frac{d\vec{K}}{d\Phi} \cdot \frac{d\vec{K}}{d\Phi} \right)^{1/2} d\Phi} \quad 2.17$$



olmak üzere, en dik inişli integrasyon yöntemi ile

$$\int_{C_2} A_2(\nu_{02}, \Phi_2) e^{i[\vec{P}_2 - \vec{K}_2(\Phi_2)] \cdot \vec{T} + iks_{12}} d\Phi_2$$

$$= A_2(\nu_{02}, \Phi_{02}) \cdot e^{iks_{12}} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \frac{e^{ik\ell(\nu_{02}) - i\pi/4}}{\sqrt{k\ell(\nu_{02})}} \quad 2.18$$

olarak hesaplanır. Burada  $D_B(\nu_{02})$ , B deki kırınım katsayısı olup, bunun karesi için 2 indisi için 2.7'deki ifadeler kullanılabilir.

**Sonuç:** Sonlu kaynaklı elektromagnetik dalgaların yöresel olmayan konveks mükemmel iletken yüzeylerden optik gibi saçılmasında, kaynağın, yüzeyin ve gözlemin eş faz çizgileri daireler olduğundan, daha basitleştirmek veya çözümü bilinen bir probleme dönüştürmek amacı ile optik gibi saçılma problemlerinde kırınımına ait enversiyon yöntemi ortaya atılmıştır. Bu arada geometrik enversiyon olarak, dairelerin bir enversiyon dairesine göre evirtimleri tanımlanmıştır. Fiziksel enversiyon olarak da, birinci kırınım noktasına gelen ve ikinci kırınım noktasından giden elektromagnetik dalga ışınlarının yöresel düzlemsel dalgalar olması için gerekli integral dönüşümleri, kırınım noktalarındaki yüzeyin eş faz çizgileri arasındaki etkileşme olarak tanımlanmıştır.

### KAYNAKLAR

1. AKHUNLAR, A.: "Elektromagnetik Alanlar-Statik Elektrik Alanları" İ.T.Ü. Yayınları a.29/310, 1965.
2. BAYRAKÇI, H.E.: "Kostik Dalgaların Tam İletken Dairesel Silindirden Saçılması", Doktora Tezi, İ.T.Ü.-Gümüşsuyu Elektrik Fakültesi, Şubat 1974.
3. BAYRAKÇI, H.E.: "Dipolden Işıyan Yüksek Frekanslı Elektromagnetik Dalgaların Geniş Yarıçaplı Silindirik Yönlü Endüktif İki Empedans Yüzeyinden Saçılması" TÜBİTAK MAG-430, Ağustos 1978.
4. BAYRAKÇI, H.E.: "Dipolden Işıyan Yüksek Frekanslı Elektromagnetik Dalgaların Geniş Yarıçaplı Silindirik Endüktif Bir Empedans Yüzeyinden Saçılması", Doçentlik tezi, İ.T.Ü., 1978.
5. BAYRAKÇI, H.E.: "Elektromagnetik Saçılma Empedans Yüzeyleri. Hertz Dipolü Alanında Bulunan Küresel Endüktif Bir Empedans Yüzeyinden Saçılması", Doçentlik Tezi, İ.T.Ü., 1980.
6. BAYRAKÇI, H.E.: "Sonlu Kaynaklı Elektromagnetik Dalgaların Dairesel Silindirik ve Küresel Mükemmel İletken Yüzeylerden Optik Benzeri Saçılmasında Enversiyon Metodu ve Yüzeysel Akım Dağılımı Metodu", Doçentlik Tezi, 1981.

7. KAY, I. and KALLER, J.B.: "Asymptotic Evaluation of the Field at a Caustic", Jour. Appl. Phys., vol. 25, No. 7, July 1954.
8. KAY, I.: "Field in the Neighborhood of a Caustic". IRE Trans on Antenna and Propagation, Vol. AP-7, 1959.
9. KELLER, J.B.: "Geometrical Theory of Diffraction", J. Opt. Soc. Am., Vol. 52, No. 2, Feb. 1962.
10. PATBAK, P.H., KOUYOMAJIAN, R.G.: "The Radiation From Apertures in Curved Surfaces", NASA, CR-2263, July 1973.