

REEL SİNÜSLERDE AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÜÇ ÖRNEĞİNE DAYALI FREKANS KESTİRİMİ

Hasan BAYAZIT *^{ID}
Erdoğan DİLAVEROĞLU **^{ID}

Alınma: 29.07.2022 ; düzeltme: 14.11.2022 ; kabul: 18.11.2022

Öz: Bu çalışmada, frekans kestiriminde kullanılan ve ayrık Fourier dönüşümünün üç örneğine dayanan parabolik, Jacobsen, yanlılığı düzeltilmiş Jacobsen ve Quinn kestiricilerinin reel sinyaller üzerindeki davranışları karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Bu kestiricilere alternatif olarak bir sinc fonksiyonu tabanlı frekans kestiricisi önerilmiş ve kestiricinin karesel ortalamalarının karekökü hataları (RMSE) bilgisayar benzetimleri yapılarak karşılaştırılmıştır. Önerilen sinc tabanlı kestirici, frekans aralığının geniş bir kısmında diğer kestiricilere göre düşük RMSE değerleri verdiği gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frekans kestirimi, Ayrık Fourier dönüşümü, Sinc fonksiyonu, Reel sinyaller

Frequency Estimation Based on Three Samples of Discrete Fourier Transform in Real Sinusoids

Abstract: In this study, the behavior of parabolic, Jacobsen, bias-corrected Jacobsen, and Quinn estimators, which are used in frequency estimation and based on three samples of discrete Fourier transform, are examined on real signals comparatively. As an alternative to these estimators, a sinc function-based frequency estimator is proposed, and the root means square errors (RMSE) of the estimator are compared by performing computer simulations. It has been observed that the proposed sinc-based estimator gives lower RMS errors in a wide part of the frequency range compared to other estimators.

Keywords: Frequency estimation, DFT, Sinc function, Real signals

1. GİRİŞ

Sinüsoidal sinyallerin gürültülü ortamlardaki frekans kestirimi haberleşme, ses, radar, güç, biyomedikal, sinyal işleme, ölçme ve benzeri sistemlerinde sık karşılaşılan bir olgudur. Frekans kestiriminde parametrik ve parametrik olmayan iki yöntem kullanılır. Parametrik olmayan kestirim yöntemlerinde belirli bir fonksiyonel form bulunmayıp, kestiricinin formu tamamen veri tarafından belirlenir. Bu tür problemin çözümünde en önemli yardımcı araç ayrık Fourier dönüşümü (AFD) dür. Parametrik frekans kestirimi metodunda ise sinyal segmenti belirli bir model tarafından belirlenir. AFD tabanlı frekans kaydırma ve filtreleme, maksimum olabilirlik, wavelet, interpolasyon, yapay sinir ağı tasarımı gibi birçok parametrik ve parametrik olmayan

* Bursa Uludağ Üniversitesi, Teknik Bilimler MYO, Elektrik Programı, 16059, Bursa/Türkiye

** Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü, 16059 Bursa/Türkiye

İletişim Yazarı: Hasan Bayazit (hashan@uludag.edu.tr)

yöntemler konularında çalışmalar yapılmıştır (Nielsen ve diğ., 2015; Zhang ve diğ., 2020; Fu ve diğ., 2006; Borkowski ve diğ., 2015).

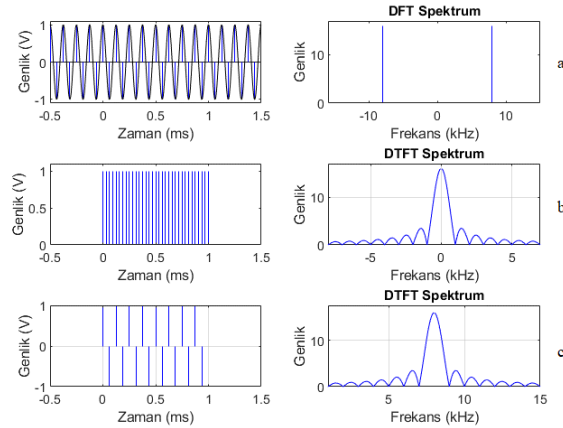
Fourier dönüşümü, sinyal ve sistemlerin frekans domeni analizinde yaygın kullanılan matematiksel bir araçtır. AFD yöntemiyle frekans kestirim algoritmaları iki adımdan oluşur. Birinci adımda, sinyalin maksimum AFD genliğinin hangi binde bulunduğu belirlenir. İkinci adımda, maksimum genliğin bulunduğu yerde daha doğru bir frekans kestirimi gerçekleştirilir. Bilimsel literatürde kompleks ve reel sinüsoidal sinyallerin birfen fazla AFD genliklerini kullanarak frekans kestirimi yapan farklı yöntemler kullanılmıştır (Quinn 1994; Jacobsen ve Kootsookos 2007; Candan 2011; Rife ve Boorstyn 1974).

Bu çalışmada, ayrık Fourier dönüşümünün üç örneğini kullanan parabolik, Jacobsen, yanlılığı düzeltilmiş Jacobsen, Quinn frekans kestiricilerin reel sinyaller üzerindeki davranışları önerilen sinc fonksiyonu tabanlı frekans kestiricisi ile karşılaştırmalı olarak incelenmektedir.

2. PROBLEMİN AÇIKLANMASI

Fourier dönüşümü, lineer sistemlerin analizinde ve sinyallerin frekans içeriklerini belirlemede uzun süreden beri kullanılmaktadır. Analog sinyallerin bilgisayar analizlerini yapmadan önce sinyalin eşit zaman aralıklarıyla örneklenmesi gerekmektedir. Örneklenmiş dalga şekillerin bilgisayar analizlerinde Fourier dönüşümünün bir türü olan ayrık Fourier dönüşümü kullanılır. Hızlı Fourier dönüşümü (HFD), AFD'yi verimli bir şekilde hesaplayan bir algoritmadır (Bergland 1969; Rapuano ve Harris 2007).

AFD vektörel bir işlemdir. Girişine uygulanan N adet zaman vektörünü, çıkışında N sayıdaki frekans vektörüne dönüştürür. Sürekli zamanlı sinyal f_s frekansında örneklendiğinde, bu sinyalin spektrumu, frekansı f_s veya normalize periyodu 2π olan periyodik bir spektrumun oluşmasına neden olur. Frekans domenindeki örnekler eşit aralıkta olup f_s/N nin katları şeklindedir. f_s/N frekans aralıkları, Fourier dönüşümünün frekans duyarlılığını belirler ve $k \cdot f_s/N$ frekansları, frekans binleri olarak isimlendirilir.



Şekil 1:

a. 8 kHz frekansla örneklenmiş a. 8 kHz kosinüs sinyalin AFD spektrumu b. dikdörtgen pencere sinyalin ayrık zamanlı Fourier transform (AZFD) spektrumu c. sürekli zaman kosinüs sinyalinin örneklenmiş dikdörtgen pencere ile çarpılmış sinyalin AZFD spektrumu

8kHz frekansındaki sinüsoidal sinyalin 32 örneği için AFD'si alınırsa (örnekleme frekansı $f_s = 32000$ örnek/s), AFD frekans veya bin aralıkları $\frac{f_s}{N} = \frac{32000}{32} = 1\text{kHz}$ olur. Örneklenen

sinyalinin frekansı AFD binlerinin katları şeklinde olduğundan, sinyalin AFD dönüşümü biri 8kHz de pozitif frekans, diğeri -8kHz de negatif frekans olmak üzere simetrik iki palstan oluşur (Şekil 1 a.). 32 kHz frekansla örneklenmiş dikdörtgen pencere fonksiyonun ayrık zamanlı Fourier dönüşümü $\sin(x)/x$ fonksiyonu şeklindedir (Şekil 1 b.). Bu fonksiyon, sinc fonksiyonu olarak bilinmektedir. Sürekli zaman fonksiyonu, örneklenmiş dikdörtgen pencere fonksiyonun ile çarpıldığında sinyal ayrık zamanlı olur. Zaman domeninde ki çarpma işlemi, frekans domeninde katlama (convolution) integraline karşılık gelmektedir. Bunun sonucunda sinyalin pals şeklinde olan biri pozitif diğeri negatif olan iki frekansı, $\pm 8\text{kHz}$ 'e ötelenmiş iki sinc fonksiyonuna dönüşür. Frekans kestiriminde asıl sorun, pals şeklinde olan frekansın fonksiyona dönüşerek, frekans değerinde belirsizlik oluşturmasından kaynaklanmaktadır.

Dijital ortamda sonsuz sayıda veri üzerinden işlem gerçekleştirilmez. AFD frekans spektrumunu $2\pi/N$ dijital frekans katları şeklinde hesaplar. Örnek sayısı N , Nyquist teoremi kriterlerini sağlayacak şekilde seçilmelidir. AFD, analog sinyalin gerçek spektrumunun bir yaklaşımını hesapladığından dolayı spektral kaçak olarak ifade edilen bir olay oluşur (Richard 2011). Bu kaçığı minimize etmek için yollar olsa da tamamen ortadan kaldırmak mümkün değildir. AFD, f_s frekansında örneklenmiş N adet giriş verisini alıp, N adet frekansa dönüştürür.

$$f(k) = \frac{k f_s}{N} \quad (1)$$

Giriş sinyalin enerji seviyeleri Denklem 1 de ifade edilen frekans veya katlarında olduğunda AFD doğru sonuç verir. Oysa ki, sinyal frekansının Denklem 1 de ifade edilen AFD bin frekanslarıyla aynı olmaması durumunda, AFD genliği iki bin arasında bölünür. Spektral kaçak olarak ifade edilen bir durum kendini gösterir. Analog sinyallerin sonlu sayıda alınan örneklerinin AFD değerlerinin hesaplanmasından kaynaklanan kaçınılmaz bir gerçek olarak kendini gösterir.

Spektral kaçığın olumsuz etkisini görebilmek ve sonlandırabilmek için nedenlerine bakmakta fayda vardır. Spektral kaçığın etkisini görebilmek için sinüsoidal sinyalin AFD genlik cevabının bilinmesi gerekir. Sinyal genliği V_m , frekansı f , örnekleme frekansı f_s ve fazı θ olan kosinüs sinyali aşağıda ifade edilmiştir.

$$x_{signal}[n] = V_m \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s} n + \theta\right), \quad n = \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (2)$$

Gerçek frekansın değeri, $f = k_{peak} f_s / N$, Denklem 2 eşitliğinde yerine yazıldığında, örneklenmiş sinyalin bin frekansı cinsinden ifadesi olan Denklem 3 elde edilir.

$$x_{signal}[n] = V_m \cos\left(\frac{2\pi k_{peak}}{N} n + \theta\right) \quad (3)$$

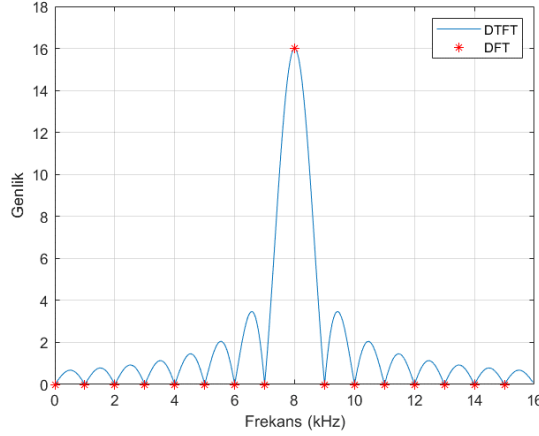
Örneklenmiş sinyalin AFD dönüşümü Denklem 4 ifadesiyle hesaplanır.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_{signal}[n] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4)$$

Ara işlemler sonrasında sinyalin AFD cevabı Denklem 5 deki gibi bulunur.

$$X[k] = \frac{V_m}{2} e^{j\theta} e^{j\frac{\pi(N-1)}{N}(k_{peak}-k)} \frac{\sin\left(\pi(k_{peak}-k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(k_{peak}-k)\right)} + \frac{V_m}{2} e^{-j\theta} e^{-j\frac{\pi(N-1)}{N}(k_{peak}+k)} \frac{\sin\left(\pi(k_{peak}+k)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(k_{peak}+k)\right)} \quad (5)$$

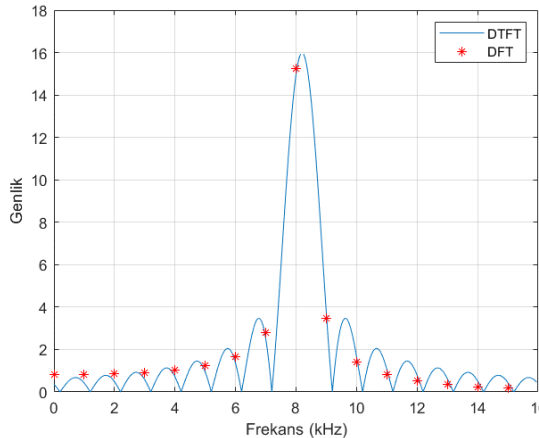
Sinyalin frekansı, AFD binlerinin katları şeklinde olduğundan, biri genliği $\frac{V_m \cdot N}{2}$ olan pozitif frekans, diğeri de aynı genlikli negatif frekanstan oluşan simetrik iki palstan oluşur.



Şekil 2:

32 kHz frekansla örneklenen 8 kHz lik kosinüs sinyalinin pozitif frekans AFD bin genlik değerleri

Şekil 2’de 32kHz frekansla örneklenen 1 V genliğindeki 8kHz’lik kosinüs sinyalin 32 örneği alınarak hesaplanan AFD genlikleri gösterilmiştir. Sinyalin AFD değerleri, Denklem 5 ifadesinin ayrık zamanlı Fourier dönüşümü (AZFD) spektral değerleri üzerinde olduğu unutulmamalıdır. Giriş sinyali, binin tam katlarında olduğundan, sinyalin sıfırdan farklı biri pozitif frekanslar için, diğeri de negatif frekanslar için genliği AZFD’nin maksimum değerinde olan iki adet pals şeklinde değeri vardır. Maksimum genlik değeri $V_m = 1V$, $N = 32$ için $\frac{V_m \cdot N}{2}$ eşitliğinden 16 olarak bulunur. Bu durumda frekans kaçağı bulunmayıp sinyal frekansı Denklem 1 eşitliğinden



Şekil 3:

32 kHz frekansla örneklenen 8,2 kHz lik kosinüs sinyalinin pozitif frekans AFD bin genlik değerleri

$\frac{8 \times 32000}{32} = 8 \text{ kHz}$ olarak bulunur. Sinyal frekansının 8,2 kHz olduğu durumdaki AFD genlik değerleri Şekil 3'te gösterilmiştir. Giriş sinyalinin frekansı, bin frekansının tam katları olmadığından ve AZFD spektrumunun yan loblarından kaynaklanan tek bir frekans yerine, AFD genliği iki bin arasında bölünerek birden fazla frekans bileşenin oluşmasına neden olur. Bu olaya frekans kaçağı denir. Frekans kaçağını tamamen ortadan kaldırmak için kesin bir çözüm bulunmamaktadır. Sinyal frekansını belirgin kılabilmek için en önemli çözüm yöntemi olarak zaman domenindeki sinyalleri, frekans domenindeki yan lobları düşük olan pencere fonksiyonlarıyla çarparak, yan loblardan kaynaklanan etkiyi en aza indirmektir (Prabhu 2014).

3. FREKANS KESTİRİCİLER

3.1. Parabolik Frekans Kestiricisi

Sinüzoidal sinyalin N uzunluğundaki örneklenmiş verisinin AFD'si alındığında bin frekansları f_s/N e eşit olur. Sinyal frekansı bin frekansına eşit olduğunda, k_p binindeki genlik maksimum değere eşit olur. Sinyal frekansı bin frekansına eşit olmadığı durumda maksimum AFD genliği bitişik iki bin arasında bölünür. Gerçek frekansa en yakın olan binin AFD genliği daha büyük olur. Bu durumda, genliğin maksimum olduğu bin k_p , bir öncesi $k_p - 1$ ve bir sonrası $k_p + 1$ binlerinin AFD genlik değerlerini dikkate alarak gerçek frekans kestirimi yapılabilir (Grandke 1983; Voglewede 2004). Üç AFD genlik değeri üzerinden parabolik bir eğri geçirilerek frekansın maksimum değerinin bulunmasına parabolik interpolasyon denir. Gerçek frekans değeri, $k_p - 1$ ve $k_p + 1$ binlerinin AFD genliklerine bağlı olarak k_p bininde herhangi bir yerde olabilir. $|X_{k_p - 1}|$, $|X_{k_p}|$, $|X_{k_p + 1}|$ AFD genlik değerlerinden geçen parabolik fonksiyon tanımlayarak, delta değerini hesaplayan bir kestirici bulunabilir. Delta düzeltme faktörü hesaplandıktan sonra sinyal frekansı Denklem 6 ve Denklem 7 ifadelerinden

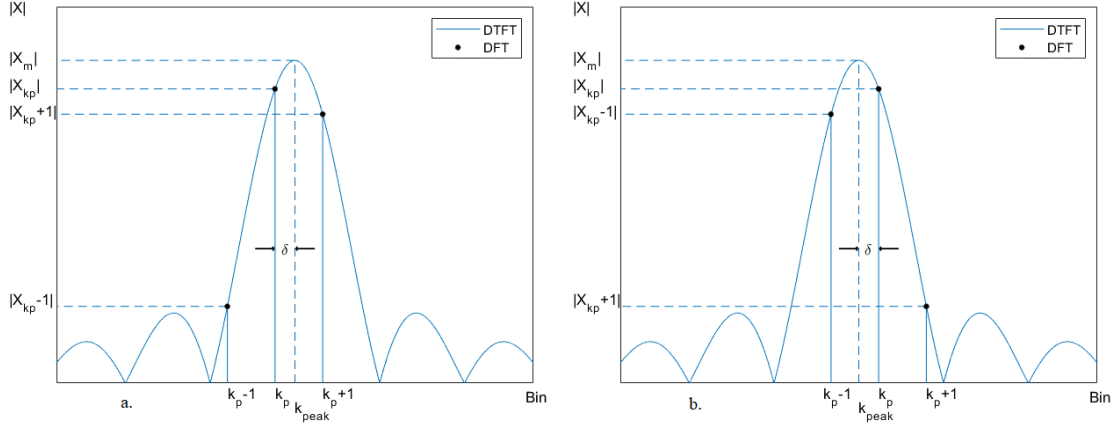
$$k_{peak} = k_p + \delta \quad (6)$$

$$f_{sinyal} = k_{peak} f_s / N \quad (7)$$

hesaplanabilir (Jacobsen ve Kootsookos 2007) . Burada f_s örnekleme frekansını, N , örnek sayısını, k_p maksimum genliğin bulunduğu bini ifade etmektedir. δ değeri $\pm 1/2$ aralığında değişmektedir. Bin frekansları tam sayı değerlerinde olup, gerçek frekansın bin cinsinden değeri olan k_{peak} tam sayı olmak zorunda değildir.

Şekil 4 a.'da sinyalin AFD genlik değerleri $|X_{k_p - 1}|$, $|X_{k_p}|$, $|X_{k_p + 1}|$ olup maksimum AFD genliğinin k_p bininde delta düzeltme faktörü sonra geldiği görülmektedir. Üç AFD genlik örneğinden geçecek bir parabol tanımlayarak frekansın gerçek değerini kestirmek mümkündür. Parabol fonksiyon, Şekil 4 a.'da gösterilen çizim için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$|X_{k_p}| = X_{k_p} = a(k - \delta)^2 + b \quad (8)$$



Şekil 4:
Sinüzoidal sinyalin AZFD spektrumu ve AFD genlik değerleri

Benzer şekilde $k_p - 1$ ve $k_p + 1$ bin değerlerine karşılık gelen AFD genlik değerleri, Denklem 8 deki eşitlikte k yerine $k - 1$ ve $k + 1$ değerlerini koyarak bulunur.

$$|X_{k_p - 1}| = X_{k_{p-1}} = a(k - 1 - \delta)^2 + b \quad (9)$$

$$|X_{k_p + 1}| = X_{k_{p+1}} = a(k + 1 - \delta)^2 + b \quad (10)$$

Denklem 8, Denklem 9 ve Denklem 10 ifadeleri $k = 0$ için δ ya göre çözülürse, aşağıdaki parabolik frekans kestiricisi bulunur (Jacobsen ve Kootsookos 2007) .

$$\hat{\delta}_1 = \frac{0.5(X_{k_{p+1}} - X_{k_{p-1}})}{2X_{k_p} - X_{k_{p+1}} - X_{k_{p-1}}} \quad (11)$$

3.2. Jacobsen Frekans Kestiricisi

Parabolik kestiricisinin gürültülü sinyallerde düşük performans gösterdiği, yanlı (bias) davrandığı görülmektedir. Parabolik kestiricilerde yapılan bazı basit değişikliklerle, örneğin, AFD genlik değerlerini kullanmak yerine kompleks AFD değerlerini aşağıdaki kestiricide kullanarak doğruluğun arttığı, bias özelliğinde de iyileşmeler olduğu gözlenmiştir(Jacobsen ve Kootsookos, 2007).

$$\hat{\delta}_2 = Re \left\{ \frac{(X[k_p - 1] - X[k_p + 1])}{2X[k_p] - X[k_p - 1] - X[k_p + 1]} \right\} \quad (12)$$

3.3. Yanlılığı Düzeltilmiş Jacobsen Frekans Kestiricisi

Jacobsen frekans kestiricisinin RMS hataları ve bu frekans kestiricisinin yanlılığının düzeltilmesi üzerine yapılan çalışmada Candan tarafından önerilen kestirici, yüksek sinyal-gürültü oranlarında etkinlik sağlamaktadır (Candan, 2013).

$$\hat{\delta}_3 = \frac{\tan(\pi/N)}{\pi/N} Re \left\{ \frac{(X[k_p - 1] - X[k_p + 1])}{2X[k_p] - X[k_p - 1] - X[k_p + 1]} \right\} \quad (13)$$

3.4. Quinn Frekans Kestiricisi

Quinn frekans kestiricisi de kompleks AFD değerleri üzerinden işlem yapmaktadır (Quinn, 1994). α_1 ve α_2 değerleri kompleks AFD değerleri üzerinden hesaplandıktan sonra $\alpha_1/(1 - \alpha_1)$ ve $\alpha_2/(1 - \alpha_2)$ oranları hesaplanır. Her iki oranın pozitif olması durumunda düzeltme faktörü $\hat{\delta}_{42}$ kestiricisi ile, aksi takdirde $\hat{\delta}_{41}$ kestiricisi ile hesaplanır.

$$\alpha_1 = Re \left(\frac{X[k_p - 1]}{X[k_p]} \right), \alpha_2 = Re \left(\frac{X[k_p + 1]}{X[k_p]} \right) \quad (14)$$

$$\hat{\delta}_{41} = \alpha_1/(1 - \alpha_1) \quad , \quad \hat{\delta}_{42} = \alpha_2/(1 - \alpha_2) \quad (15)$$

$$Eğer \delta_{41} > 0 ve \delta_{42} > 0 ise \hat{\delta} = \hat{\delta}_{42} , aksi takdirde \hat{\delta} = \hat{\delta}_{41} \quad (16)$$

3.5 Önerilen Sinc Fonksiyonu Tabanlı Frekans Kestirici

Denklem 5 te verilen sinyalin AFD spektrumu sinc fonksiyonuna benzerlik göstermektedir. Gerçek frekansı k_{peak} olan sinyalin AFD spektrumunun pozitif frekans bileşeninin k ya göre değişimi Denklem 17 de verilmiştir. Sinc fonksiyonu yaklaşım yöntemi, maksimum ve ikinci maksimum AFD genliklerinin bulunduğu bin değerlerini Denklem 17 eşitliğinde yerlerine koyarak elde edilen ve fonksiyonun kendisi tarafından belirlenen, lineer olmayan denklemlerin δ ya göre çözülmesine dayanan yaklaşım yöntemidir (Hussain ve Ivanovic, 2015).

$$X[k] = U'_m \frac{\sin(\pi(k_{peak} - k))}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(k_{peak} - k)\right)} \quad (17)$$

$$U'_m = \frac{NV_m}{2} e^{j\theta} e^{j\frac{\pi}{N}(N-1)(k_{peak}-k)} \quad (18)$$

Şekil 4 a.'da gösterildiği gibi ikinci en büyük genliğin maksimum genlikten sonra geldiği durum da incelenmelidir. Bu durumda δ pozitif tanımlanmıştır. AFD nin k_p , k_p+1 anlarındaki değerleri Denklem 17 de k yerine sırasıyla $k = k_p$, $k = k_{peak} + (1 - \delta)$ değerlerini koyarak ve $k_{peak} = k_p + \delta$, $\theta = 0$ olduğunu gözönünde bulundurarak aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$X[k_p] = \frac{NV_m \sin(\pi\delta)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{N}\delta\right)} \quad (19)$$

$$X[k_{p+1}] = \frac{NV_m \sin(\pi(\delta - 1))}{2 \sin\left(\frac{\pi}{N}(\delta - 1)\right)} \quad (20)$$

$X_{k_p}, X_{k_{p+1}}, X_{k_{p-1}}$ değerleri, ayrık Fourier dönüşümün genlik değerlerini göstermektedir.

$$X_{k_p} = |X[k_p]|, X_{k_{p+1}} = |X[k_p + 1]|, X_{k_{p-1}} = |X[k_p - 1]| \quad (21)$$

Denklem 19 ve Denklem 20 ifadeleri genlik cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$X_{k_p} \sin\left(\frac{\pi}{N}\delta\right) - \frac{N \cdot V_m}{2} \sin(\pi\delta) = 0 \quad (22)$$

$$X_{k_{p+1}} \sin\left(\frac{\pi}{N}(\delta - 1)\right) - \frac{N \cdot V_m}{2} \sin\left(\frac{\pi}{N}(\delta - 1)\right) = 0 \quad (23)$$

Denklem 22 ve Denklem 23 eşitlikleri δ 'ya göre çözüldüğünde sinc kestirici aşağıdaki gibi bulunur:

$$\hat{\delta}_5 = \frac{N}{\pi} \frac{X_{k_{p+1}} \sin\frac{\pi}{N}}{(X_{k_p} + X_{k_{p+1}} \cos\frac{\pi}{N})} \quad (24)$$

$$N \rightarrow \infty \text{ için } \hat{\delta}_5 = \frac{X_{k_{p+1}}}{(X_{k_p} + X_{k_{p+1}})} \quad (25)$$

Şekil 4 b.'de gösterildiği gibi ikinci en büyük AFD genliğinin maksimum genlikten önce geldiği durumda ise δ negatif tanımlanmıştır. AFD'nin $k_p, k_p - 1$ anlarındaki değerleri Denklem 17 de k yerine sırasıyla $k = k_{peak} - \delta, k = k_{peak} - (1 + \delta)$ değerlerini koyarak, $\theta = 0$ olduğunu gözönünde bulundurarak aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$X[k_p] = \frac{-NV_m \sin(\pi \cdot \delta)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{N} \cdot \delta\right)} \quad (26)$$

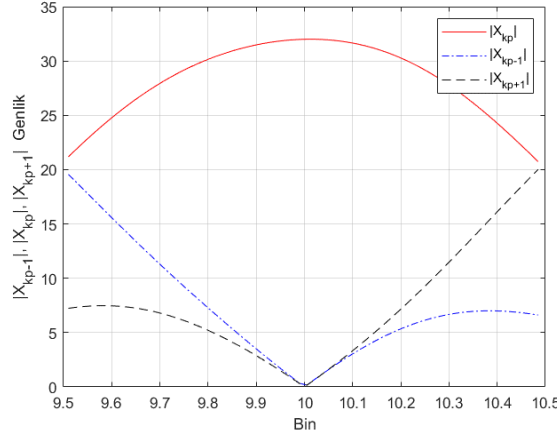
$$X[k_{p-1}] = \frac{NV_m \sin(\pi(\delta + 1))}{2 \sin\left(\frac{\pi}{N}(\delta + 1)\right)} \quad (27)$$

Denklem 26 ve Denklem 27, δ için çözülrse, ikinci en büyük AFD genliğinin maksimum genlikten önce gelmesi durumunda Denklem 24 de ifade edilen eşitliğe benzer, fakat işareti farklı kestirici ifadesi bulunur.

$$\hat{\delta}_5 = \frac{-N}{\pi} \frac{X_{k_{p-1}} \sin \frac{\pi}{N}}{\left(X_{k_p} + X_{k_{p-1}} \cos \frac{\pi}{N} \right)} \quad (28)$$

$$N \rightarrow \infty \text{ için } \hat{\delta}_5 = \frac{-X_{k_{p-1}}}{\left(X_{k_p} + X_{k_{p-1}} \right)} \quad (29)$$

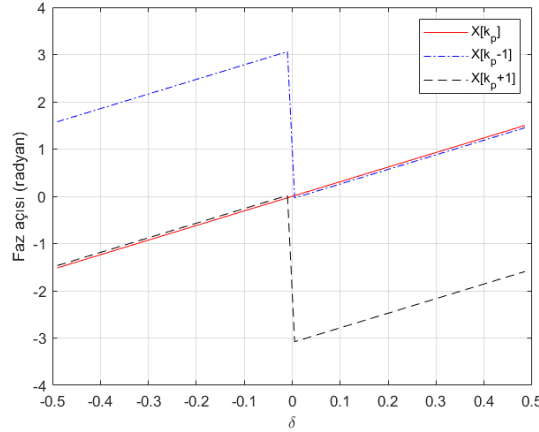
Şekil 5’de genliği 1V, gerçek frekansı onuncu binde ve değeri $\pm 0,5$ aralığında değişen kosinüs sinyalin $k_p - 1$, k_p , $k_p + 1$ frekans binlerinin AFD değerlerinin değişimi gösterilmiştir. Sinyalin $10 \pm 1/2$ bin aralığındaki tüm frekanslar sadece bin 10 da ifade edilir. Eğer gerçek frekans değeri binin tam ortasında ise, bin 10’un AFD genliği maksimum, bin 9’un değeri ve bin 11’in değeri sıfır olur. Gerçek frekansın konumu binin her iki yönüne doğru kaydığında bin 10’un AFD genliği azalırken, bir öncesi ve bir sonrası binlerin AFD genlik değerleri artmaktadır. Gerçek frekans değeri bin 9,5’e doğru gittiğinde, bin 10’un AFD genliği maksimum olurken, bin 9’un AFD genliği ikinci en büyük AFD genlik olur. Bu durumda gerçek frekans değerini bulmak için



Şekil 5:

Kosinüs sinyalin AFD genlik değerlerinin bin frekansına göre değişimi (gürültüsüz veri durumu)

Denklem 28 de ifade edilen kestirici formülü uygulanır. Benzer şekilde, gerçek frekans değeri bin 10,5 değerlerine doğru gittiğinde, bin 10’un AFD genliği maksimum olurken, bin 11’in AFD genliği ikinci en büyük genlik olur. Bu koşullarda gerçek frekans değerini bulmak için Denklem 24 de ifade edilen kestirici formülü kullanılmalıdır. Gerçek frekans değerleri bin uçlarına doğru gittiğinde, maksimum genliğin bulunduğu binin bir öncesini ve bir sonrasının AFD değerlerini karşılaştırarak gerçek frekans değeri oldukça doğru bulunabilir. Zira, Şekil 5’de görüldüğü gibi maksimum genliğin bir öncesi ve bir sonrasının AFD değerleri arasındaki marj büyük olduğundan, bu bölgede yapılan frekans kestirimi daha doğru olur. Gerçek frekans değeri bin ortalarına doğru gelindiğinde, maksimum AFD genliğinin bir öncesi ve bir sonrası AFD değerlerini göz önüne alınarak yapılacak kara vermede hata oranı, özellikle gürültülü ortamlarda artar.



Şekil 6:

Kosinüs sinyalin kompleks AFD değerlerinin faz açılarının δ'ya göre değişimi

Şekil 6'da gerçek frekans değeri 10. binde bulunan, gürültü içermeyen, genliği 1 V olan kosinüs sinyalin AFD kompleks değerlerinin faz açılarının δ ya göre değişim verilmiştir. δ, maksimum AFD genliğinin bulunduğu bin ile gerçek frekansın bulunduğu bin değeri arasındaki farkı olarak da tanımlanabilir. δ'nin negatif olduğu bölgede $X[k_p]$, ve $X[k_p + 1]$, kompleks AFD değerlerinin faz açıları negatif, $X[k_p - 1]$ kompleks AFD değerinin faz açısının pozitif olduğu görülür (Şekil 6). δ'nin pozitif değerleri için ise $X[k_p]$ ve $X[k_p + 1]$ kompleks AFD değerlerinin faz açılarının pozitif, $X[k_p - 1]$ kompleks AFD değerinin faz açısının negatif olduğu görülmektedir. Buradaki amaç, δ'nin hangi durumda hangi sinc kestiricisinin kullanılacağını belirleyecek daha doğru bir ölçüt belirleyebilmektir. $X[k_p]$, $X[k_p - 1]$, $X[k_p + 1]$ faz açılarını dikkate alarak Denklem 30 da ifade edilen seçim kriteri önerilmektedir. Kompleks işlemin gerçek değerinin işareti negatif çıkarsa Denklem 28 de ifade edilen kestirici, pozitif çıkarsa Denklem 24 ile verilen kestirici kullanılmalıdır.

$$\alpha = \text{Reel} \left\{ \frac{X[k_p - 1] - X[k_p + 1]}{X[k_p]} \right\} \quad (30)$$

Tablo 1. AFD tabanlı frekans kestirimi yöntemleri

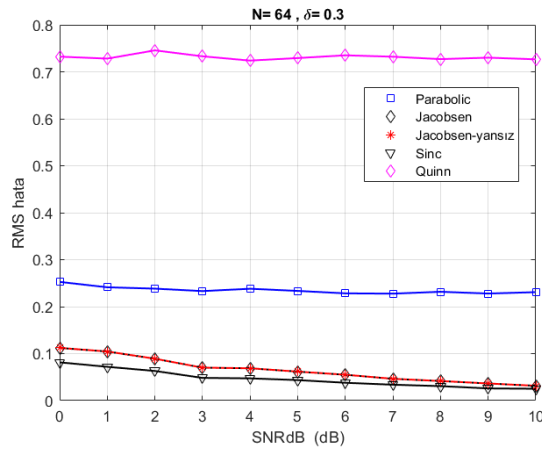
Parabolik Frekans Kestiricisi	$\hat{\delta}_1 = \frac{0.5 (X_{k_{p+1}} - X_{k_{p-1}})}{2X_{k_p} - X_{k_{p+1}} - X_{k_{p-1}}}$
Jacobsen Frekans Kestirici	$\hat{\delta}_2 = \text{Re} \left\{ \frac{(X[k_p - 1] - X[k_p + 1])}{2X[k_p] - X[k_p - 1] - X[k_p + 1]} \right\}$
Yanlılığı düzeltilmiş Jacobsen Frekans Kestirici	$\hat{\delta}_3 = \frac{\tan(\pi/N)}{\pi/N} \text{Re} \left\{ \frac{(X[k_p - 1] - X[k_p + 1])}{2X[k_p] - X[k_p - 1] - X[k_p + 1]} \right\}$

Quinn Frekans Kestirici	$\alpha_1 = \text{Reel} \left(\frac{X[k_p - 1]}{X[k_p]} \right), \alpha_2 = \text{Reel} \left(\frac{X[k_p + 1]}{X[k_p]} \right)$ $\hat{\delta}_{41} = \alpha_1 / (1 - \alpha_1), \hat{\delta}_{42} = \alpha_2 / (1 - \alpha_2)$ <p>Eğer $\delta_{41} > 0$ ve $\delta_{42} > 0$ ise $\hat{\delta} = \hat{\delta}_{42}$</p> <p>aksi taktirde $\hat{\delta} = \hat{\delta}_{41}$</p>
Önerilen Sinc Fonksiyonu Tabanlı Frekans Kestirici	$\hat{\delta}_{51} = \frac{N}{\pi} \frac{X_{k_{p+1}} \sin \frac{\pi}{N}}{(X_{k_p} + X_{k_{p+1}} \cos \frac{\pi}{N})}$ $\hat{\delta}_{52} = \frac{-N}{\pi} \frac{X_{k_{p-1}} \sin \frac{\pi}{N}}{(X_{k_p} + X_{k_{p-1}} \cos \frac{\pi}{N})}$ <p>Eğer $\alpha = \text{Reel} \left\{ \frac{X[k_p - 1] - X[k_p + 1]}{X[k_p]} \right\} > 0$ ise $\hat{\delta}_{51}$</p> <p>Eğer $\alpha < 0$ ise $\hat{\delta}_{52}$</p>

4. BULGULAR

Bu bölümde MATLAB'ta üretilen, genliği 1 V, faz açısı 0 ile 2π arasında rastgele değişen, frekansı bin cinsinden k_{peak} olan kosinüs sinüzoidal sinyal kullanılmıştır. Sinyale ayrıca beyaz Gauss gürültüsü eklenmiştir. Matematiksel modeli Denklem 31 de verilen sinyali kullanarak parabolik, Jacobsen, yanlılığı düzeltilmiş Jacobsen, Quinn ve sinc kestiricilerin gürültülü ortamlardaki performanslarının karşılaştırmaları yapılacaktır.

$$x_{signal}[n] = V_m \cos \left(\frac{2\pi k_{peak}}{N} n + \theta \right) + \omega[n], \quad n = \{0, 1, \dots, N - 1\} \quad (31)$$



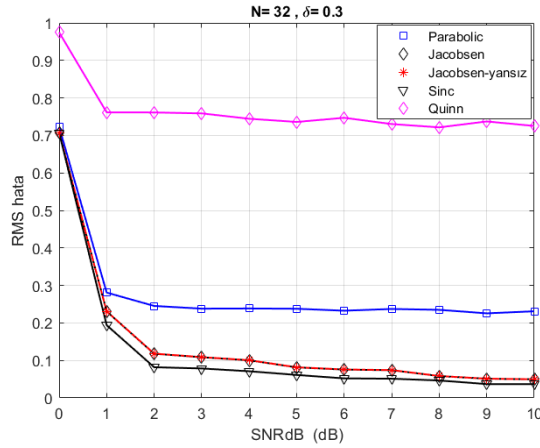
Şekil 7:

$N = 64$, $\delta = 0,30$ ve farklı SNR değerler için RMS hatalarının karşılaştırılması

Kestiricilerin performansları hakkında karar verebilmek için istatistiki açıdan davranışlarının incelenmesi gerekir. RMS hata, gerçek değer ile kestiricinin hesapladığı değerler arasındaki farkın karelerini ortalamasının karekökü olarak tanımlanır. RMSE, modelleme hatalarının bulunmasında yaygın kullanılan bir hesaplama yöntemidir. Ayrıca model performans göstergelerinin iyi bir ölçütüdür.

Şekil 7’de sinyal frekansı onuncu binde, bin merkezinden 0,30 birim uzakta iken, diğer bir deyişle $\delta = 0,3$ iken, örnek sayısı $N = 64$ ve farklı sinyal gürültü oranları (SNR) için Tablo 1 de ifade edilen kestiricilerin ortalama karesel hatalarının değişimi gösterilmiştir. Bilindiği üzere RMS hataları ne kadar küçük olursa o kestiricinin performansı o kadar iyi demektir. Önerilen sinc kestiricisinin düşük SNR seviyelerinde daha iyi bir performans gösterdiği izlenmiştir. Gerçek frekans değerlerinin bin merkezinden uçlara doğru gittiği durumlara önerilen kestiricinin RMS hatalarının daha da iyileştiği gözlenmiştir.

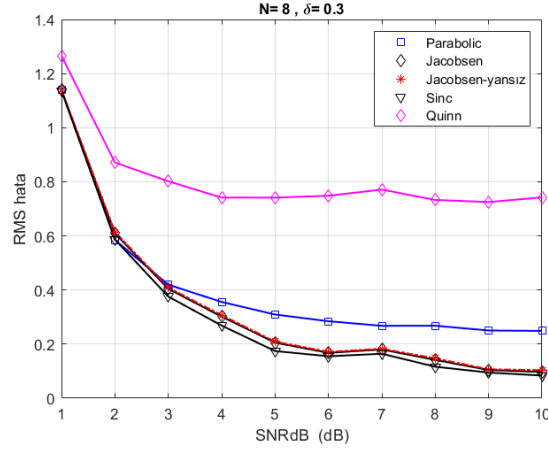
Şekil 8’de aynı sinyal frekansında ve bin merkezinden 0,30 birim uzaklıkta, örnek sayısı $N = 32$ ve farklı sinyal gürültü oranları (SNR) için Tablo 1’ de ifade edilen kestiricilerin RMS hatalarının değişimi incelemiştir. Önerilen sinc kestiricisinin performansının diğer kestiricilerden daha düşük RMS hataları gösterdiği izlenmiştir. Frekans değerleri bin merkezinden uçlara doğru gittikçe RMS hata değerlerinin azalarak iyileştiği izlenmiştir. Gerçek frekansın δ nın $0,2 \sim 0,5$ ve $-0,2 \sim -0,5$ aralığında değiştiği sürece önerilen sinc kestiricinin daha düşük RMS hataları verdiği görülmüştür.



Şekil 8:

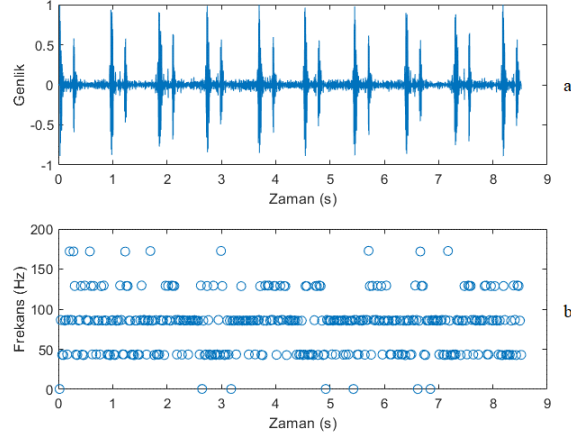
$N = 32$, $\delta = 0,30$ ve farklı SNR değerler için RMS hatalarının karşılaştırılması

Örnek sayısı $N = 8$ için kestiricilerin davranışları Şekil 9’da verilmiştir. Gerçek frekansın bulunduğu bin ve bin merkezinden uzaklık aynı tutulmuş, SNR seviyeleri değiştirilmiştir. Önerilen sinc kestiricinin performansı Jacobsen kestiriciden daha iyi davranmaktadır. Bilindiği üzere sinc kestiricilerini kullanmadan önce, maksimum ikinci AFD genliğinin maksimum AFD genliğinden önce veya sonra gelmesine bağlı olarak kestiricinin pay ve paydasında kullanılacak değerler değişmektedir. Önerilen kestiricisinin karar verme mekanizmasını Jacobsen kestiricisinin δ değerine bağlandığında performansta iyileşmelerin arttığı gözlenmiştir.

**Şekil 9:**

$N = 8$, $\delta = 0,30$ ve farklı SNR değerler için RMS hatalarının karşılaştırılması

Önerilen sinc kestiricisinin gerçek veri (Bigsoundbank 2022) üzerindeki davranışını test amacıyla 11025 Hz frekansıyla örneklenmiş kalp atış sinyalinden alınan 8,52 saniyelik sinyal kullanılmıştır (Şekil 10 a.). Kalp atış sinyalinden 256 örnek aralıklarıyla alınan sinyalin frekans kestirimi önerilen sinc fonksiyonu kestiricisi ile yapılarak frekans-zaman grafiği çizilmiştir (Şekil 10 b.). Frekans kestiricisinin değerlerinin değişimleri, sinyal frekans değişimi ile uyumlu olduğu grafik üzerinden görülmektedir.

**Şekil 10:**

11025 Hz frekansla örneklenmiş **a.** Kalp atış sinyali **b.** Kalp atış sinyal frekansının değişiminin izlenmesi

5. SONUÇ

Bu çalışmada, sinyallerin ayrık Fourier dönüşümünün üç örneğini kullanarak frekans kestirimi yapan kestiricilerin reel sinüslerdeki davranışları, sinc fonksiyonu interpolasyonuna dayanan kestirici ile karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Önerilen kestiricinin düşük sinyal-gürültü oranlarında diğer kestiricilere oranla RMS hatalarında daha iyi performans gösterdiği izlenmiştir. Dijital sinyal işleme uygulamalarında yaygın olarak kullanılan Jacobsen kestiricisini düşük sinyal-gürültü oranlarında hesaplanan düzeltme faktörünün $\delta > 0,2$ ve $\delta < -0,2$ olduğu

durumlarda önerilen sinc kestirici ile düzeltme faktörünün yeniden hesaplanması önerilmektedir. Fazla işlem yükü gerektirmeye bu yöntem ile frekans kestirmede oluşabilecek RMS hatalarında iyileşmeler sağlanmaktadır.

ÇIKAR ÇATIŞMASI

Bu çalışmanın yazarları olarak, herhangi bir kurum/kuruluş ya da kişi ile çıkar çatışması bulunmadığını onaylarız.

YAZAR KATKISI

Hasan BAYAZİT, bu çalışmanın veri toplama, veri analizi, veri yorumlama, makale taslağının oluşturulmasında ve yazılım geliştirme konularında, Erdoğan DİLAVEROĞLU, çalışmanın yazılımını oluşturma, çalışmanın kavramsal ve tasarım süreçlerinin belirlenmesi, bu süreçlerin yönetimi, fikirsel içeriğin eleştirel incelemesinde katkı sağlamıştır.

KAYNAKLAR

1. Bergland, G.D. (1969) A guided tour of the fast Fourier Transform, IEEE Spectrum. doi: 10.1109/MSPEC.1969.5213896
2. Borkowski, J., Kania, D., Mroczka, J. (2015) Interpolated DFT-Based Fast and Accurate Frequency Estimation for the Control of Power, IEEE Transactions on Industrial Electronics vol. 61, No 12. doi: 10.1109/TIE.2014.2316225
3. Candan, Ç. (2011) A Method For Fine Resolution Frequency Estimation From Three DFT Samples, IEEE Signal Processing Letters vol. 18, No.6. doi: 10.1109/LSP.2011.2136378
4. Candan, Ç. (2013) Analysis and Further Improvement of Fine Resolution Frequency Estimation Method From Three DFT Samples, IEEE Signal Processing Letters vol. 20. doi: 10.1109/LSP.2013.2273616
5. Fu, L., Li, H. (2006) Wavelet-based Approach for Frequency Estimation in Complex Noises, ICSP 2006 Proceedings. doi: 10.1109/ICOSP.2006.344500
6. Grandke, T. (1983) Interpolation algorithms for discrete Fourier Transforms of weighted signals, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement ol.32. doi: 10.1109/TIM.1983.4315077
7. <https://bigsoundbank.com/detail-0218-heart-beat.html>, Erişim Tarihi: 6.11.2022, Konu: Kalp atış sinyali.
8. Hussain, A., Ivanovic, M. (2015) Electronics, Communications and Networks IV, CRC Press, volume 1.
9. Jacobsen, E., Kootsookos, P. (2007), Fast, Accurate Frequency Estimator, IEEE Signal Processing Magazine. doi: 10.1109/MSP.2007.361611
10. Nielsen, J. K., Jensen, T.L., Jensen J.R., Christensen, M.G., Jensen, S.H. Liu, S.; Wang, L. (2015) A Fast Algorithm for Maximum Likelihood-Based Fundamental Frequency

Estimation, 23rd European Signal Processing Conference. doi: 10.1109/ EUSIPCO. 2015. 7362451

11. Prabhu, K.M.M. (2014) Window Functions and Their Applications, CRC Press.
12. Quinn, B.G. (1994) Estimating Frequency by Interpolation Using Fourier Coefficients, IEEE Trans. Signal Processing vol. 42. doi: 10.1109/78.295186
13. Rapuano, S., Harris F. (2007) An Introduction to FFT and Time Domain Windows, IEEE Instrumentation & Measurement Magazine. doi: 10.1109/MIM.2007.4428580
14. Richard G. L. (2011) Understanding Digital Signal Processing, Prentice-Hall Third Edition.
15. Rife, D.C.; Boorstyn, R.R (1974) Fast, Single Tone Parameter Estimation for Discrete_Time Observations. IEEE Transactions on Information Theory, IT-20, 123-125.
16. Voglewede, P. (2004) Parabola approximation for peak determination, Global DSP Magazine vol 3,13-17.
17. Zhang, J.; Liu, S.; Tang, L.; Mingotti, A.; Peretto, L.; Wen, H. (2020) Analysis of White Noise on Power Frequency Estimation by DFT-Based Frequency Shifting and Filtering, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement vol 69, 4125-4132. doi:10.1109/TIM. 2019.2941290

