T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK MUHAKEME SÜREÇLERİNİN ÖĞRENME YÖRÜNGELERİNE DAYALI ÖĞRETİM TASARIMI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Tuba GÜRBÜZ
0000-0003-4862-8342

BURSA 2022

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK MUHAKEME SÜREÇLERİNİN ÖĞRENME YÖRÜNGELERİNE DAYALI ÖĞRETİM TASARIMI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Tuba GÜRBÜZ
0000-0003-4862-8342

Danışman
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

BURSA 2022

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim.

Tuba GÜRBÜZ

Tarih: 10/08/2022

TEZ YAZIM KILAVUZU'NA UYGUNLUK ONAYI

"Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin Öğrenme Yörüngelerine Dayalı Öğretim Tasarımı Bağlamında İncelenmesi" adlı Doktora tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Tuba GÜRBÜZ

Danışman
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

Ana Bilim Dalı Başkanı
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA BENZERLİK YAZILIM RAPORU

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

10/08/2022

Tez başlığı: Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin Öğrenme Yörüngelerine Dayalı Öğretim Tasarımı Bağlamında İncelenmesi

Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç ve Tartışma ve Öneriler kısımlarından oluşan toplam 178 sayfalık kısmına ilişkin, 09/08/2022 tarihinde şahsım tarafından Turnitin adlı benzerlik tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan özgünlük raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 14'tür.

Uygulanan filtrelemeler:

(a) Kaynakça hariç
(b) Alıntılar hariç/dahil
(c) 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Özgünlük Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir benzerlik içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

10/08/2022

Adı Soyadı: Tuba Gürbüz
Öğrenci No: 811532002
Anabilim Dalı: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı: Matematik Eğitimi
Statüsü: Doktora
Danışman Prof. Dr. Rıdvan Ezentaş 10/08/2022

T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE,

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda 811532002 numara ile kayıtlı Tuba GÜRBÜZ'ün hazırladığı "Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin Öğrenme Yörüngelerine Dayalı Öğretim Tasarımı Bağlamında İncelenmesi" konulu doktora çalışması ile ilgili tez savunma sınavı, 05/09/2022 günü 14:00-15:00 saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin başarılı olduğuna oybirliği ile karar verilmiştir.

Sınav Komisyonu Başkanı
Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ
Bursa Uludağ Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Hatice Kübra GÜLER SELEK
Bursa Uludağ Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Yeliz YAZGAN
Bursa Uludağ Üniversitesi

Üye
Dr. Öğr. Üye. Mevhibe KOBAK DEMİR
Balıkesir Üniversitesi

Üye
Dr. Öğr. Üye. Burcu DURMAZ
Süleyman Demirel Üniversitesi

ÖZET

Yazar	Tuba GÜRBÜZ
Üniversite	Bursa Uludağ Üniversitesi
Enstitü	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ana Bilim Dalı	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Bilim Dalı	Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Tezin Niteliği	Doktora
Sayfa Sayısı	XVIII+212
Mezuniyet Tarihi	05/09/2022
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

SEKİZİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK MUHAKEME SÜREÇLERİNİN ÖĞRENME YÖRÜNGELERİNE DAYALI ÖĞRETİM TASARIMI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Bu çalışmanın amacı öğrenme yörüngeleriyle tasarlanmış geometrik inşa öğretimi sonrasında sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerinin incelenmesidir. Bu amaç doğrultusunda araştırma yöntemi olarak tasarım tabanlı araştırma tercih edilmiştir. Katılımcılar 8. sınıfta öğrenim gören 36 öğrenciden oluşmaktadır. Bu öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri düşük, orta, iyi olmak üzere kategorize edilmiştir. Her bir kategoriden birer öğrenci seçilerek görüşmeler gerçekleştirilmiş ve öğrencilerin geometrik muhakemeleri incelenmiştir.

Bu çalışmada sekizinci sınıf öğrencilerinin temel geometrik kavramları inşasına yönelik öğrenme yörüngeleri tasarlanmış ve uygulanmıştır. Bu yörüngeler uygulama sürecinin geriye dönük analizleri yapılarak revize edilmiştir. Bu öğrenme yörüngeleriyle öğrencilerin geometrik inşa çalışmalarındaki gelişimsel ilerlemeleri ve yaşadıkları zorluklar yorumlayıcı bir çerçeveyle sunulmuştur. Öğretim sonrasında yapılan görüşmelerle öğrencilerin geometrik muhakeme süreçleri bilişsel perspektiften Duval'in bilişsel modeline göre bilişsel ve algısal süreçler açısından incelenmiştir. Ayrıca uygulama öncesinde ve sonrasında öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri ve tutumlarına bakılmıştır.

Araştırma sonucunda geometrik inşa öğretimi sonrasında öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin geliştiği ve geometriye yönelik olumlu tutumlarının arttığı görülmüştür. Ayrıca geometrik düşünme düzeylerinden 2. ve 3. düzeylerde son test lehine anlamlı bir fark gözlenmiştir. Bu sonuca göre geometrik inşa çalışmalarının kritik bir geçiş olan öğrencilerin 2.

seviyeden 3. seviyeye geçişinde etkili olduğu görülmüştür. Geometrik inşa öğretiminin tasarlanan öğrenme yörüngeleriyle öğrencilerin geometrik muhakemelerini geliştirmede etkili olduğu görülmüştür.

Ayrıca geometrik düşünme düzeylerine bakıldığında 1. düzeyde yer alan öğrencilerin genel olarak geometrik inşa görevlerini gerçekleştiremedikleri, muhakeme süreçlerini görsel algının yönettiği dolayısıyla geçerli muhakemeler gerçekleştiremediği görülmüştür. 2. düzeyde yer alan öğrencilerin başarılı inşalar gerçekleştirdiği fakat matematiksel gerekçelendirmede doğal muhakeme davranışları sergilediği, doğrulama noktasında deneysel doğrulamaya yöneldiği ve ölçmeye dayalı muhakeme gerçekleştirdiği görülmüştür. Bu öğrencilerin problem çözme süreçlerini sözel algının yönettiği, işlevsel ve sıralı algı süreçlerinin etkili şekilde yürütüldüğü gözlenmiştir. 3. düzeydeki öğrencilerin doğal muhakemeden çok teorik muhakeme davranışları sergilediği ve inşa süreçlerini başarıyla gerçekleştirdiği, tümdengelimsel bir çıkarım seviyesine gelmemiş olsa da matematiksel ilkelere dayanarak seviyesine göre uygun mantıksal çıkarımlarda bulunduğu görülmüştür.

Anahtar Sözcükler: *Bilişsel model, geometri öğretimi, geometrik düşünme düzeyleri, geometrik inşa, geometrik muhakeme, öğrenme yörüngeleri.*

ABSTRACT

Name Surname	Tuba GÜRBÜZ
University	Bursa Uludag University
Institution	Institute of Educational Sciences
Field	Mathematic and Science Education
Branch	Mathematic Education
Degree Awarded	PhD
Page Number	XVIII+212
Degree Date	05/09/2022
Supervisor	Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

INVESTIGATION OF EIGHTH GRADE STUDENTS' GEOMETRIC REASONING PROCESSES IN THE CONTEXT OF INSTRUCTIONAL DESIGN BASED ON LEARNING TRAJECTORIES

The aim of this study is to examine the geometric reasoning processes of eighth grade students after geometric construction instruction designed with learning trajectories. For this purpose, design-based research was preferred as a research method. Participants consist of 36 students in 8th grade. The geometric thinking levels of these students were categorized as low, medium and good. One student from each category was selected and interviews were conducted, and students' geometric reasoning was examined in these interviews.

In this study, learning trajectories for eighth grade students' construction of basic geometric concepts were designed and implemented. These trajectories have been revised by making retrospective analyzes of the implementation process. With these learning trajectories, the students' developmental progress and difficulties in geometric construction studies are presented with an interpretive framework. The geometric reasoning processes of the students were examined in terms of cognitive and perceptual processes according to Duval's cognitive model, from a cognitive perspective, with the interviews made after the teaching. In addition, students' geometric thinking levels and attitudes were examined before and after the application.

As a result of the research, it was observed that the geometric thinking levels of the students improved and their positive attitudes towards geometry increased after the geometric construction teaching. In addition, a statistically significant difference was observed in favor of the post-test only at the 2nd and 3rd levels when the geometric thinking levels were detailed.

According to this result, it was seen that geometric construction studies were effective in the transition of students from the 2nd level to the 3rd level, which is a critical transition. It has been seen that geometric construction teaching with the designed learning trajectories is effective in improving students' geometric reasoning.

In addition, when the geometric thinking levels were examined, it was seen that the students at the 1st level could not perform the geometric construction tasks in general, and they could not perform valid reasonings because visual perception directed their reasoning processes. It was observed that the students at the 2nd level made successful constructions, but exhibited natural reasoning behaviors in mathematical justification, turned to experimental verification at the point of verification and performed reasoning based on measurement. It was observed that verbal perception managed the problem-solving processes of these students, and functional and sequential perception processes were carried out effectively. On the other hand, it was observed that the students at the 3rd level exhibited theoretical reasoning behaviors rather than natural reasoning and successfully realized the construction processes, and although they did not reach a deductive inference level, they made appropriate logical inferences according to their level based on mathematical principles.

Keywords: *Cognitive model, geometric construction, geometry education, geometric reasoning, geometric thinking levels, learning trajectories*

ÖNSÖZ

Bu çalışma sekizinci sınıf öğrencilerinin temel geometrik kavramları inşasının öğretiminde gerçekleşen geometrik muhakeme süreçlerine odaklanmıştır. Öğrenim hayatımda ilk kez üniversitede karşılaştığım pergel ve çizgeçle gerçekleştirilen geometrik inşa görevleri zihnimde resmen yepyeni bir kapı aralamıştı. Benim için oldukça değerli deneyimler yaşatan inşa görevleri ile daha önce karşılaşmış olmayı umduğumda tez konusu fikri zihnimde netleşmişti. Hem araştırma sürecinde hem de öğretmenlik hayatımda en önemli hedeflerimden biri artık öğrencileri erken yaşta geometrik inşa görevleriyle tanıştırmak olmuştur.

Pandemi döneminin zorluklarıyla mücadele sonucunda tamamladığım bu çalışmamda öncelikle maddi manevi her konuda her zaman destekçim olan gizli danışmanım, kıymetli eşim Dr. Mustafa Çağrı GÜRBÜZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Bu yoğun çalışma sürecinde vakitlerinden aldığım canım oğlum Yunus Emre ve bebeğim Elif Azra'ya sabırları ve verdikleri hayat enerjisi için minnettarım.

Doktora eğitimim boyunca bana rehberlik eden, bilgi ve deneyimlerini paylaşan, huzurlu ve özgür bir çalışma ortamı sunan, akademik yeterliliğin yanı sıra insani olarak da her zaman yanımda hissettiğim başta değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ olmak üzere bölümdeki tüm hocalarıma teşekkür etmek isterim.

Uygulama sürecinde her türlü destekleriyle yanımda olan meslektaşlarım Öznur AYDIN ve Zeynep KAYMAKÇI'ya teşekkür ediyorum.

Bana inanan ve çalışmalarımı başarıyla tamamlamam noktasında beni hayatım boyunca destekleyen başta babam olmak üzere tüm aileme minnettarım.

Doktora öğrenimim boyunca 2211 kodlu Yurt İçi Doktora Burs Programı ile bana maddi anlamda destek olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Son olarak bu noktaya gelene kadar hayatımda olumlu katkıları olan tüm öğretmenlerime ve yakınlarıma şükranlarımı sunuyorum.

Tuba Gürbüz

İÇİNDEKİLER

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

(YÖNTEM)

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

(BULGULAR VE YORUM)

BEŞİNCİ BÖLÜM

(SONUÇ VE TARTIŞMA)

ALTINCI BÖLÜM

(ÖNERİLER)

Tablolar Listesi

Şekiller Listesi

Şekil *Sayfa*

KISALTMALAR

DBRC: Design-Based Research Collective (Tasarım Tabanlı Araştırma Topluluğu)

DGY: Dinamik Geometri Yazılımları

VHGDT: Van Hiele Geometrik Düşünme Testi

GİGF: Geometrik İnşa Gözlem Formu

GM: Geometrik Muhakeme

GYTÖ: Geometriye Yönelik Tutum Ölçeği

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teachers Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)

NGA: National Governors Association (Ulusal Valiler Derneği)

NMP: National Mathematics Advisory Panel (Ulusal Matematik Danışma Paneli)

PME: Psychology of Mathematics Education (Matematik Eğirimi Psikolojisi)

TDK: Türk Dil Kurumu

TTA: Tasarım Tabanlı Araştırma

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Geometri, öğrencilere somut bir modelden hareketle soyut aklı yürütme ve modellemeye kadar bir mantıksal teorinin nasıl kurulduğunu göstermeye olanak sağladığından matematiksel düşüncenin gelişimi için zemin hazırlamaktadır. Bu yüzden geometri öğretimi okul matematiğinin ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir.

Geometri (Antik Yunanca: geometri´a; geo "yer", metron "ölçüm") etrafımızdaki uzayla, uzaydaki şekiller, özellikleri ve farklı "kalıplar" ve "düşünme kalıpları" ile ilgili matematiksel bir alandır. Freudenthal'in belirttiği gibi: "Geometri, ancak geometrinin deneyimlenen alanla ilişkisini kullanırsa anlamlı olabilir. Geometri, gerçekliğin nasıl matematikleştirileceğini öğrenmek için var olan en iyi fırsatlardan biridir" (Freudenthal, 1973, s. 407).

Geometrinin karakteristik bir özelliği, hem teorik bir alan hwm de belki de matematiğin gerçeklikle en bağlantılı parçası olarak ikili doğasıdır. Bu ikili doğanın sonucu olarak öğrenciler geometrik nesnelerin özelliklerini pratik olarak incelerken (örneğin cetvel ve pergellerle veya uygun bir yazılımla), şekillerin özelliklerini belirleyebilir, (örneğin üçgenlerin benzer görünmesi vb.) ve çeşitli varsayımlar üretebilirler, 'bu açılar aynı olmalıdır', "bu açıların toplamı 360^{0} olmalıdır", vb. Matematik öğretimi için, öğrencilerin bu tür varsayımları uygun kanıtlama yollarıyla doğrulamaları arzu edilen bir durumdur. Bununla birlikte, yapılan birçok araştırmada tüm öğrencilerin neden daha resmi ispatın gerekli olduğunu doğal olarak anlamadıkları ve deneysel doğrulamanın yeterli olduğunu düşündükleri iyi bilinmektedir (Kunimune, 2000; Kunimune, Fujita ve Jones, 2010; Mariotti, 2007). National Council of Teachers Mathematics [NCTM] müfredat standartlarında, 5-8. sınıflardaki geometri çalışmalarının, okul öncesinde başlayan resmi olmayan keşifleri 9-12. sınıflarda çalışılan daha resmi süreçlere bağladığı ifade edilmektedir (NCTM, 1989). Bu açıdan bakıldığında geometrik yapıların kullanımının ortaokul öğrencileri için geometrik ifadelerin resmi ispatlanmasından ziyade inşa faaliyetleriyle doğrulanmasında değerli deneyimler kazandırmak adına önemli bir araç olabileceği düşünülmektedir (Kunimune ve diğerleri, 2010).

Mevcut araştırmaların önerdiği gibi, öğrenciler önceden hazırlanmış ispatları okumak ve takip etmek yerine, varsayımların oluşmasına yol açan argümantasyon süreçlerine girebilirlerse, muhtemelen daha zengin bir ispat anlayışına sahip olurlar (Marriotti, 2001). Ayrıca, geometrik yapıların öğrencilere varsayımlar oluşturabilecekleri ve yapılarının neden işe yaradığını düşünebilecekleri fırsatlar sağladığı da yaygın olarak öngörülmektedir. Geometrik yapıların inşası öğrencilerin çeşitli geometrik özellikleri anlamasını geliştirir ve onları akıl yürütmeleri hakkında düşünmeye teşvik eder. Lloyd, Beckmann, Zbiek ve Cooney (2010), öğrencilerin soyut kavramları incelemeden önce somut deneyimlere ihtiyaç duyduklarını ve "anlamlı deneyimler yoluyla matematiği anlamlandırmaları" gerektiğini öne sürmektedir. Geometrik inşa faaliyetleri aslında öğrencilerin çizimlerini görselleştirdikten sonra belirli geometrik özellikleri önermelerine ve ayrıca geometri ifadelerini kanıtlamalarına yardımcı olur (Chan, 2013; Cheung, 2011).

Mevcut okul matematik müfredatında, ilk ve ortaokullarda geometri konularının kapsamının çoğu, Öklid'in yaklaşık MÖ 300'de yazılmış olan klasik Elementler kitabından refere edilen "Öklid geometrisi" dir. Bu kitap, Öklid zamanının geometri ve sayı teorisinin sistematik bir açıklamasıdır (Hartshorne, 2013). Öklid, geometrik bilgiyi sistematik olarak son derece tutarlı ve mantıklı bir şekilde düzenlemiş, tanımlardan aksiyomlara ve sonrasında teoremlerin inşa edilmesine kadar geometri öğrenmede mükemmel bir çerçeve sağlamıştır. Öklid bu eserinde az sayıda aksiyom, postulat ve tanımdan yola çıkarak tümdengelimci bir yaklaşımla diğer önermelerin ispatını vermiştir. Bu sistemin sahip olduğu mantıksal düzenleme geometriyi bilim ve felsefenin de içinde yer aldığı birçok disiplinin dikkatle takip ettiği bir sisteme dönüştürmüştür (Yıldırım, 2015).

Öklid'in Elemanları'nın önemli özelliklerinden biri geometriye yapılandırmacı yaklaşımıdır. Önerilerinin çoğu olağan anlamda teoremler değil (Hartshorne, 2013), daha çok inşa problemleridir. Cetvel ve pergelle geometrik inşa girişiminde bulunmak, zor geometrik yapılarla karşılaşmak Öklid ve eski Yunanlıların ötesine uzanan çok eski bir insan faaliyetidir (Martin, 2012). Geometrik inşa (aynı zamanda pergel inşaları, pergel ve cetvel inşaları veya pergel ve çizgeç inşaları olarak da bilinir), "sadece pergel ve çizgeç kullanarak kenar orta dikme, yükseklik, açıortaylar gibi geometrik objeleri inşa etmek için standart prosedürlere" atıfta bulunur (Lim, 1997, s. 138). Genellikle Öklid inşaları olarak adlandırılırlar. Pergel eşitlik, cetvel de doğrusallığı sağlar. Tüm geometrik inşalar bu iki araca dayanmaktadır (Kunkel, 2003). Öklid'in zamanına dayanan Yunan geometri programı, tüm geometrinin yalnızca cetveller ve pergellerle yapılması gerektiği konusunda ısrarcıdır (Johnston-Wilder ve Mason, 2005). Geometrik inşaların, geometrik şekillerin özelliklerini incelerken tahmin ve mantıksal düşünme becerilerimizi geliştireceği düşünülmektedir. Hershkowitz'e (1998) göre, geometrinin görselleştirme, inşa etme ve akıl yürütme süreçleri arasındaki döngü, öğrenci eylemlerinin ve gözlemlenen sonuçların temsil edilen matematiksel nesnelerle ilişkili olması bakımından geometrik muhakeme sürecinin yansıtılmasında bir model gibi çalışabilir.

Pedagoji perspektifinden, Posamentier (2000) geometrik inşaları birçok farklı geometrik kavramın ve ilişkinin güçlendirilmesi ve problem çözme becerilerinin geliştirilmesi olarak görmektedir. Bu tür uygulamalı deneyimler, özellikle öğrencilerin daha derinlemesine düşünmelerini gerektirdiğinden öğrencilerin matematiğe olan ilgisini de artıracaktır (Ameis, 2005). Wong (2005), öğrencilerden inşa sürecini açıklamalarını istemenin tümdengelimli kanıtların ilk adımı olduğunu ve bu tür sözlü sunumların nedenler ve argümanlarla desteklendiğini, aynı zamanda öğrencilerin organizasyon ve sunum becerilerinin bir eğitimi olarak hizmet ettiğini açıkça belirtmektedir.

Türk Dil Kurumu'na [TDK] göre "akıl yürütme" veya "muhakeme" herhangi bir konuda fikir vermek, tahminde bulunmak olarak ifade edilmiştir. Ancak bu ifadeler çok geniş bir anlam yelpazesinde kullanılmaktadır. Daha özel manada, verilen bilgilerden yeni bilgiler çıkarmamızı sağlayan herhangi bir işlem "akıl yürütme" olarak kabul edilir. Geometri öğrenmede muhakemenin gözlenebilmesi bireyin bir problem ile karşı karşıya kaldığı durumda yaşanabilir. Sınıf ortamında geometri öğrenme etkinliği, geometri öğreniminde akıl yürütmenin 'demokratikleşmesini' gösteren bir eğilimdir. İkinci bir eğilim, bağlamdan geometri öğrenmede akıl yürütme olarak adlandırılabilir. Bu görüşe göre, geometrik bilgi "deneyim alanları" (Bartolini Bussi, 1998) veya geometrik sıçrama (Lehrer ve Romberg, 1998) olarak hizmet edebilecek bağlamlarda anlamlı bir şekilde yapılandırılabilir. Daha geniş anlamda bağlamlar öğrenciler için 'gerçekçi' olmalıdır. Gravemeijer (1999), geometri müfredatının 'gerçekçi' anlayışını; "gerçekçi, matematiğin kendisi de dâhil olmak üzere öğrenciler için deneyimsel olarak gerçek olanı ifade eder. Öğrenciler bir kez matematiğe hâkim olduktan sonra, matematiğin kendisi 'gerçekçi' bir bağlam haline gelebilir." şeklinde tanımlar (s. 108).

Burada Gerçekçi Matematik Eğitimi (Freudenthal, 1973) içinde tanımlanan gerçekliğin bir manasına değinmek gerekir. Gravemeijer (1999)'in matematikleştirme yoluyla yeniden icat dediği süreçte, öğrenciler gerçekçi bir geometrik bağlamda gözlemledikleri ve problem çözdükleri durumlarla karşı karşıya kalırlar ve gerçekçi değişimler altında geometrik şekillerin ve ilişkilerin değişmezlerini araştırırlar. Matematikleştirdikleri bağlamla bu etkileşimde daha yüksek zihinsel eylemler oluştururlar. Matematikleştirme, bir insan etkinliği olarak, bir bağlamın öğelerinin geometrik nesnelere ve ilişkilere dönüştürüldüğü bir tür düzenleme süreci olarak görülür. Öğrencinin "dış aktivitenin içsel aktiviteye dönüşümü" (Wertsch ve Stone, 1985) içinden geçtiği içselleştirme, matematikleştirmenin önemli bir yönüdür. Bu süreçte belirli bir deneyim alanında bir 'araç' olarak inşa edilen geometrik bilginin, başka bir deneyim alanıyla etkileşime girerken ima edilebilecek açık bir geometrik nesne haline geldiği iddia edilebilir. Geometride matematikleştirme, geometrik akıl yürütmeyi gerektirir. "Farklı deneyim alanlarında" geometrik olarak hareket etme (matematikleştirme) ihtiyacından ortaya çıkan farklı akıl yürütme ve açıklama türleri, bu geometrik ortamlar arasındaki benzerlik ve farklılıkların bir parçasıdır. Öğrencilerin ne yaptıklarını ve neden yaptıklarını öğretmenlerine ve akranlarına açıklama ihtiyacı, onları bir notasyon sistemi icat etmeye iter. Bu notasyon sistemi, daha sonraki bir aşamada, onların birçok geometrik gerçeği keşfetmelerini ve açıklamalarını sağlar.

Duval (1998) bilginin sunum biçimi ve birey tarafından bilişsel düzenlemelere odaklanmaktadır. Geometri öğrenmenin görselleştirme, inşa süreçleri ve akıl yürütme (geometride yeterlilik için gerekli olan söylemsel süreçlerle ilgili) olmak üzere üç tür bilişsel süreci içerdiğini ileri sürer. Geometriye bilişsel bir bakış açısından yaklaşırken, bir kişinin geometrik bir figürün çizimine nasıl baktığıyla bağlantılı dört algısal süreç ortaya çıkmaktadır: görsel, sözel, sıralı ve işlevsel (Duval, 1995). Kısaca, görsel algı, bir kişinin geometrik bir şekle bakarken ilk bakışta neyi tanıdığını ifade ederken, bir figürün inşası veya inşasının tanımı söz konusu olduğunda sıralı algı gereklidir. Sözel algı bir figürün görsel olarak kavranması yoluyla belirlenemeyen, ancak konuşma yoluyla verilmesi gereken veya verilen özelliklerden türetilebilen matematiksel özellikleri ifade eder. İşlevsel algı, belirli bir figürü değiştirmenin çeşitli yollarına bağlıdır. Geometrik problemleri çözmek genellikle bu farklı algısal süreçlerin etkileşimlerini gerektirir ve 'geometrik şekil' olarak adlandırılan şey, gerekli matematiksel aktiviteye göre bunlardan sadece biri açıkça vurgulanabilse bile, her zaman hem sözel hem de görsel temsilleri ilişkilendirir (Duval, 2007). Duval'in teorisi, geometri öğretme ve öğrenmede görselleştirmeyi ve akıl yürütmeyi kolaylaştırmak için işlevsel algının önemini vurgulamaktadır.

Özetle, Duval'ın üç akıl yürütme işlevi, bağlamdan geometri öğrenmede iyi bir şekilde ifade edilmiştir. Matematikleştirmenin bir parçası olarak, öğrenciler geometrik bilgilerini yapılandırırken ve genişletirken akıl yürütür ve açıklar. Kanıtlama olarak akıl yürütme, birçok tümevarımsal gerekçelendirmeden başlar. Bu bağlamda Lehrer ve Romberg (1998) çalışmasında, öğrenciler tarafından bir karşı örnek bulma konusundaki uzun süreli başarısızlık bir doğrulama olarak kabul edilmiştir. Genel olarak, bu gerekçeler öğrencileri daha resmi kanıtlamaya sevk etmektedir.

Geometrik muhakemenin doğası ve nasıl geliştirilebileceğine dair yapılan araştırmalar gelişimsel ve bilişsel olmak üzere iki yaklaşımda ele alınabilir: Gelişimsel yaklaşım bu akıl yürütme sürecini birbiriyle ilişkili hiyerarşik seviyeler şeklinde inceler ve akıl yürütme ile gerçekleşen bilgi artışını bu hiyerarşik seviyeler arasındaki geçiş ile açıklar. Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri bu yaklaşıma örnek olarak verilebilir. Van Hiele'nin modelinde geometrik düşünme şekilsel süreçlerle başlayıp zamanla gelişim göstererek bu süreçler yerini teorik/kavramsal süreçlere bırakmaktadır (Van Hiele, 1986). Bilişsel yaklaşımda ise muhakeme esnasında gerçekleşen süreçler arasında hiyerarşik bir ilişki olmadığı ifade edilmektedir. Fischbein'in şekilsel kavram (figural concept) teorisi ve Duval'in bilişsel modeli bu yaklaşımı benimsemektedir.

Fischbein (1993) teorisinde bilişsel psikolojinin şekil ve kavram olmak üzere iki temel bileşeni üzerinde durmaktadır. Şekil bir nesne, olay ya da kavrama ait zihinde oluşan görüntü ve bu görüntünün temsil edildiği ve somutlaştırıldığı halidir. Kavram ise nesnelerin veya olayların özelliklerini kapsayan genel ve soyut bir yapıdır. Bilişsel psikolojide etkileşimli fakat ayrı olarak ele alınan bu zihinsel yapılar Fischbein tarafından eş zamanlı birlikte ele alınarak şekilsel kavram adı altında üçüncü bir yapı tanımlanmış, geometrik muhakeme süreci şekil ve kavram arasındaki etkileşim ile açıklanmıştır. Bu etkileşimin yapısına göre şekil ve kavramın birbirini yönettiği durumlar ortaya çıkmaktadır. Şekil sezgilerimizi kullanarak çözüm üzerinde tahminde bulunmamızı sağlarken, kavramlar sezgilerimizi kullanarak ulaştığımız sonuçların matematiksel olarak temellendirilmesini sağlar. Geometrik muhakemenin yapısı şekil ve kavram arasındaki bu ilişkinin niteliğine göre belirlenmektedir. Fischbein'e (1993) göre muhakeme sürecini şeklin yönettiği durumda adımlar arasındaki mantıksal tutarlık ve genellenebilirlik açısından eksiklikler oluşacağından muhakeme sürecinde hatalar ortaya çıkmakta ve öğrencileri yanlış çıkarımlara götürebilmektedir. Diğer yandan şekli kavramın yönettiği durumlarda ise üst düzey geometrik akıl yürütme süreci gerçekleşmektedir (Güven ve Karpuz, 2016).

Duval (1995) ise geometrik muhakeme sürecini bilişsel ve algısal olarak ele almış ve bu boyutlarla açıklamaya çalışmıştır. Bu modelde geometrik muhakeme için üç bilişsel süreç tanımlanmaktadır:

Görselleştirme süreci bir durumun, uzayın görsel olarak temsil edilmesidir. Oluşturma veya inşa süreci, geometrik bir şeklin pergel, cetvel veya dinamik yazılımlar gibi araçlar kullanılarak inşa edilmesi sürecidir. Bir geometrik şeklin inşası o şekle ait matematiksel özelliklerin incelenmesine ve fark edilmesine olanak sağlaması açısından oldukça önemlidir. Muhakeme süreci ise bilginin temsil edilme şekline göre ele alınırken mevcut bilgide değişim veya genişleme olarak tanımlanmaktadır. Bu değişim veya genişleme üç faklı temsil üzerinden gerçekleşmektedir. Bunlar doğal, sembolik (matematiksel) dil veya şekil ile gösterimdir. Bu ifade etme biçimlerinin özelliklerine göre iki farklı muhakeme süreci ortaya çıkmaktadır: Bunlar doğal ve teorik söylemsel süreçlerdir. Doğal süreçte bilgi konuşma dili veya şekil ile gösterimle ifade edilirken, teorik söylemsel süreç ise bilginin matematiksel olarak aksiyom, tanım ve teoremlere dayandırıldığı muhakeme sürecidir.

Duval (1998)'e göre bu süreçler birbirinden bağımsız olsa da birbirleriyle etkileşim halindedir ve bu etkileşimin öğrenme ortamlarında güçlü bir şekilde sağlanması geometrik muhakeme becerisi kazanabilmek için oldukça önem arz etmektedir. Bu süreçte geometrik ilişkilerin belirlenebilmesi için görsel, sözel, sıralı ve işlevsel algı gibi bazı algısal süreçler de mevcuttur. Duval'in bilişsel modelinde bu şekilsel ve kavramsal süreçler hem etkileşimli hem de ayrı ayrı incelediğinden Fischbein'in teorisini de kapsayan daha bütüncül bir teori olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç olarak gelişimsel ve bilişsel perspektifte ele alınan geometrik muhakeme süreci her iki yaklaşımda da şekilsel ve teorik süreçler üzerinden ele alınmaktadır. Gelişimsel yaklaşımda sezgisel olarak başlayıp şekilsel devam eden ve zamanla teorik sürece evrilen muhakeme süreci genel olarak program ve ders kitaplarının tasarlanmasında önemli katkılar sunmaktadır. Fakat belirli bir kavramın öğretilmesinde ve soyutlanmasında şekilsel ve kavramsal süreçlerin hem ayrı ayrı incelenmesi hem de birlikte değerlendirilmesi daha doğru analizler yapmamızı sağlar. Bu nedenle çalışmada öğrencilerin muhakeme süreçleri bilişsel perspektif açısından analiz edilmektedir.

Geometri, öğrencilerin uzamsal algılarını ve geometrik düşünmelerini geliştirdiği için matematiğin önemli bir alanıdır. İlköğretim düzeyinde geometri öğretiminde yaşanan zorluklar, öğrencilerin bireysel bilişsel ve duyuşsal gelişimleri ve öğretmenlerin öğretim stratejilerini, öğrenme etkinliklerini ve öğrencilerin düzeyleriyle uyumlu kaynakları seçmesi ve uygulaması ile ilgili olabilir (Clements, 2004; Jones, 2002). Geometrik inşa etkinliklerinde pergel ve çizgeçi koordineli biçimde kullanarak geometrik becerilerinin problem çözme sürecinde kullanılması diğer bir deyişle "matematikleştirme" yapılması Öklid geometrisinin öğretilmesinde oldukça değerlidir (Altun, 2018; Janicic, 2010). Yapılan birçok çalışmada geometrik inşa etkinlikleri sadece şekillerin görselleştirilmesini değil, aynı zamanda geometrik yapıların analiz edilmesini ve bu yapılar arasında ilişkiler kurulmasını da gerektirdiğinden öğrencilerde geometrik düşünme, problem çözme ve üst düzey düşünme becerilerini geliştireceği ifade edilmiştir (Ameis, 2005; Cheung, 2011; Deniz ve Kabael, 2020; Fujita ve Jones, 2003; Güven, 2006; Napitupulu, 2001; Posamentier, 2000; Stupel ve Ben-Chaim, 2013).

Araştırmada, öğrencilerin geometrik inşa sürecini doğru muhakemeler yaparak gerçekleştirmesine, uygun geometrik ifadeleri kanıtlamasına veya doğrulamasına yardımcı olacak öğretimin nasıl tasarlanabileceği odak noktası olmuştur. Bu çalışmada geometrik inşa sürecinde öğrencilerin zihinlerinde gerçekleşen bilişsel ve algısal süreçler ortaya çıkarılmaya çalışılarak geometrik muhakemeleri incelenmektedir.

Öğrencilerin öğrenme sürecine yoğunlaşarak hangi yolları takip ettiklerini anlamlandıracak bir öğretim tasarımına ihtiyaç duyulmuştur. Bu bağlamda öğrenme yörüngeleri (Learning Trajectories) bu ihtiyacı karşılayan tasarım modeli olarak seçilmiştir. Matematik eğitimi literatürüne Simon (1995) tarafından tahmini öğrenme yörüngesi (Hypothetical Learning Trajectory) olarak girmiş olsa da Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica, ve Myers, (2009) tarafından yapılan ampirik çalışmalar ile öğrenme yörüngesi kavramı son zamanlarda daha ilgi çekici hal almıştır. Aynı zamanda öğrenme performansları (Catley, Lehrer ve Reiser, 2004), gelişimsel ilerleyiş, büyük fikirler (Brown ve Campione, 1996) gibi farklı terimler ile ifade edilse de öğrenme yörüngesi terimi ön plana çıkmıştır. Farklı öğrenme yörüngeleri tanımlamalarının ortak noktası ise bireyin öğrenme sürecindeki ilerlemesine ilişkin bir yol haritasının tanımlanmasıdır (Gürbüz, 2021; Tanışlı, Aydın, Turgut, Köse ve Çamcı, 2019). Matematiksel bir kavrama ilişkin öğrencilerin düşünmeleri ve öğrenmeleri betimlenerek öğrencilerin matematiksel kavramı daha derinden anlamasını sağlayan öğretim etkinliklerinin oluşturulması sürecinin analizidir. Öğrenme yörüngesi bir dersin planlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi sürecidir (Tanışlı ve diğerleri, 2019). Bu süreçte öğretmen, öğrencileriyle etkinlik uygulanması esnasında etkileşimde bulunarak onların öğrenmelerine ilişkin bilgilerini yeniden şekillendirir ve bu kapsamda öğretimsel etkinlikler sürekli olarak öğrenci gelişimine göre revize edilerek gelişir.

1. 1. Problem Durumu

Yukarıda da değinildiği gibi yapılan birçok araştırma pergel ve çizgeç gibi matematik araçlar kullanılarak geometrik inşa sürecinin geometri öğretiminde oldukça büyük bir öneme sahip olduğunu göstermektedir. Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] Ortaokul Matematik Öğretim programı (MEB, 2018) incelendiğinde tüm sınıf düzeylerinde geometrik yapıların inşasına yönelik kazanımlar yer aldığı görülmektedir. Bu kazanımlar Tablo 1'de aşağıda verilmiştir.

Tablo 1

Ortaokul düzeyinde geometrik inşa öğretimine yönelik kazanımlar.

Sınıf Düzeyi	Kazanımlar
5. sınıf	Bir doğru parçasına eşit uzunlukta doğru parçaları çizer. Bir doğruya üzerindeki veya dışındaki bir noktadan dikme çizer. Bir doğru parçasına paralel doğru parçaları inşa eder, çizilmiş doğru parçalarının paralel olup olmadığını yorumlar.

	Açılarına ve kenarlarına göre üçgenler oluşturur, oluşturulmuş farklı üçgenleri kenar ve açı özelliklerine göre sınıflandırır.
6. sınıf	Açıyı oluşturur ve sembolle gösterir. Bir açıya eş bir açı çizer. Yükseklik kavramını tanır ve inşa eder. Çember inşa eder, merkezini, yarıçapını ve çapını tanır.
7. sınıf	Bir açıyı iki eş açıya ayırarak açıortayı inşa eder.
8. sınıf	Üçgende kenarortay, açıortay ve yüksekliği inşa eder. Yeterli sayıda elemanının ölçüleri verilen bir üçgeni çizer. Eşlik ve benzerliği ilişkilendirir, eş ve benzer şekillerin kenar ve açı ilişkilerini belirler. Benzer çokgenlerin benzerlik oranını belirler, bir çokgene eş ve benzer çokgenler oluşturur.

Geometrik inşa süreci, bireylerin gözlemledikleri veya elde ettikleri sonuçlar üzerinde eylemlerini açıklama, kanıtlama ve genişletme gibi yargılarda bulunmalarını gerektirmektedir (Köse, Tanışlı, Erdoğan ve Ada, 2012). Bu noktada önemli olan, rastgele bir şekil çizebilmekten ziyade, sadece pergel ve cetvel yardımıyla bu şeklin çizimine dair kesin çözüm getiren adımlar ortaya koymaktır (Smart, 1998). Ayrıca bu inşanın öğrenciler tarafından anlaşılması ve bunun öğretimi eğitimciler tarafından bir problem olarak kabul edilmektedir. Nitekim Erduran ve Yeşildere (2010) yaptıkları çalışmalarında inceledikleri matematik öğretmenlerinin geometrik inşa öğretiminde öğretmen merkezli, ezbere dayalı uygulamalara yer verdikleri ve bu durumun öğrencilerde geometrik düşünmeyi harekete geçirmediğini vurgulamışlardır. Bu nedenle geometrik inşa sürecinde çözüme götüren adımları ezberlemek yerine açıklama, atılan her bir adımın neden gerçekleştirildiğini ifade etme ve ispat gibi anlamlı eylemlerde bulunmak önemlidir. Ayrıca basamaklar arasında dinamik geçişler yaparak farklı inşa problemlerine öğrendiklerini yansıtmanın öğrencinin geometrik düşünmesine katkı sağlayacağı açıkça görülmektedir. Öğrencilerden inşa sürecinde gerçekleştirdikleri adımlara ilişkin kendi açıklamalarını ve ispatlarını yapmaları isteniyorsa, bu durumu ortaya çıkaracak öğrenme ortamları özenle düzenlenmelidir (Kondratieva, 2013). Bu çalışmada Öklit inşaları olarak adlandırdığımız temel geometrik yapıların inşasının ezbere yapılan algoritmik adımlar şeklinde öğretilmesinden ziyade öğrencilerin keşfetmeye dayalı etkinliklerle kendi bilgilerini mantıklı adımlarla oluşturmasına yönelik öğrenme yörüngeleri tasarlanmıştır.

Literatürü incelediğimizde ortaokul ve lise öğrencileriyle pergel ve cetvelle geometrik inşa alanında yapılmış birçok araştırmanın betimsel olup durum tespiti ile sınırlı kalan ve geometrik inşa sürecinde yaşanan zorlukları ortaya koyan çalışmalar olduğu görülmektedir (Erduran ve Yeşildere, 2010; Karakuş, 2014; Tosun, 2019; Ulusoy, 2014; 2019). Elbette ki var olan durumun ortaya çıkarılması çözüme ulaştırmada önemli bir adımdır fakat bu zorlukların aşılmasına katkı sağlayacak ve öğrencilerin öğrenmelerini anlamlı hale getirecek ders tasarımlarının yer aldığı çalışmalara da ihtiyaç olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca yapılan araştırmalar incelendiğinde çoğunlukla öğretmenlerin, öğretmen adaylarının ve lise öğrencilerinin geometrik inşa becerilerinin incelendiği (Cheung, 2011; Çiftçi ve Tatar, 2014; Fujita, Jones ve Kunimune, 2010; Girotto, 2016; Karakuş, 2014; Napitupulu, 2001; Öçal ve Şimşek, 2017; Tapan ve Arslan, 2009; Uygun, 2016; Uygun ve Akyüz, 2017; Yıldız ve Baltacı, 2017), ortaokul düzeyindeki öğrencilerin geometrik inşa becerilerinin geliştirilmesine yönelik az sayıda çalışma olduğu görülmektedir (Deniz ve Kabael, 2020; Lim, 1997). Bir önceki bölümde de değinilen NCTM (1989) öğrencilerin anaokulunda başlayan formal olmayan keşiflerinin ilerleyen yıllarda akademik kariyerlerinde resmi süreçlere bağlanmasını 5-8. sınıflarda geometri çalışmalarının desteklenmesine bağlamıştır.

Duval (1998), geometri öğretiminde temel problemin öğrencilerin geometrik muhakemede bilişsel ve algısal süreçleri hem her birinin kendi içerisinde geliştirmede hem de bu süreçler arasındaki geçişlerde yaşandığını vurgulamış, çözümü için ise her bilişsel süreç için özel olarak çalışılması gerektiğini ifade etmiştir. Bu bakımdan öğrencilerin geometri kariyerleri düşünüldüğünde geometrik muhakeme bakımından gelişimlerinin kritik evrelerinden biri olan ortaokul düzeyinde geometrinin temel kavramlarına yönelik geometrik inşa sürecinde öğrencilerin geometrik muhakemelerini incelemek ve onların geometrik muhakemelerini geliştirmek için öğrenme yörüngelerinin etkisini belirlemek bu çalışmanın problem durumu olmuştur.

1. 2. Araştırma Soruları

Bu çalışmanın ana problem cümlesi, “Öğrencilerin geometrik inşa etkinliklerinde geometrik muhakeme süreci nasıldır?” şeklinde ifade edilebilir. Bu kapsamda aşağıdaki alt problemlere cevap aranacaktır:

1. Öğrencilerin uygulama öncesinde ve sonrasında geometrik düşünme düzeyleri nasıldır?
2. Öğrencilerinin geometrik inşa etkinlikleri öncesinde ve sonrasında geometriye yönelik tutumları arasında anlamlı bir fark var mıdır?
3. Temel geometrik inşa becerilerini kazandırmak için tasarlanan öğrenme yörüngelerinin (learning trajectories) etkililiği nasıldır?

4. Öğrencilerin geometrik inşa etkinliklerinde gözlenen bilişsel ve algısal süreçler ve bu süreçler arasındaki ilişki nasıldır?

1. 3. Amaç

Bu araştırmanın amacı ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerinin bilişsel perspektifler açısından analiz edilmesidir. Ayrıca araştırmanın alt amaçları şunlardır:

1. Öğrencilerin geometrik inşaları gerçekleştirmesini sağlayacak etkili öğrenme yörüngeleri tasarlamak
2. Tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine etkisini incelemek
3. Geometrik inşa etkinliklerinde öğrencilerin bilişsel ve algısal süreçlerini ortaya çıkarmak
4. Öğrencilerin erken yaşta geometrik inşa faaliyetlerinde deneyim kazanmalarını ve temel geometrik yapıları içselleştirmelerini sağlamak
5. Tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin tutumlarına etkisini araştırmak

1. 4. Önem

Geometri öğretimi mantıksal düşünmenin gelişimi açısından oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu sebepten okul matematiğinin önemli bir bileşeni olarak öğretim programlarında yer almaktadır. Matematik eğitiminde önemli bir zorluk, öğrencilerin geometride pratik ve teorik alanlar arasında başarılı bir şekilde hareket etmelerini sağlamanın yollarını bulmaktır. Diğer bir deyişle öğrencilerin pratikten teorik geometriye doğru ilerlemelerini sağlamanın yolları gerçekten önemli bir sorundur ve araştırılmaya değer olduğu ifade edilmektedir.

Geometrik inşa faaliyetleri öğrencilerin geometri öğrenme deneyimlerini zenginleştirmelerine, soyut kavramları somutlaştırarak geometrik şekillerin özelliklerini keşfetmelerine ve kanıt oluşturmalarına olanak sağlar. Geometrik inşada önemli olan belli araçlarla adımları takip edip şekli çizmekten ziyade inşa adımlarının mantığının anlaşılması, arka planda oluşan geometrik şekillerin özelliklerinden nasıl faydalanıldığının keşfedilmesidir. Yapılan birçok çalışmada geometrik inşa faaliyetlerinin okullarda öğretmenin yönlendirmesiyle ezbere dayalı uygulamalarla gerçekleştirildiği, bu durumun da geometrik düşünmeyi harekete geçiremediği ifade edilmiştir. Bu uygulamalar öğrencilerin ilgisini çekmemekte ve öğrenciler tarafından anlamsız bulunmaktadır. Oysaki geometrik inşada inşa sürecinin arka planında gerçekleşen matematiksel ilişkilerin anlamlandırılmasının öğrencinin geometrik muhakeme becerilerinin gelişmesine katkı sağlayacağı açıkça görülmektedir.

Kuzle, Glasnović, Gracin ve Klunter (2018) yaptıkları çalışmada ilköğretim öğrencilerinin okul matematiğinde edindikleri geometrik yeterlilikleri hakkında fikir edinmek için geometrik çizimler aracılığıyla geometrik anlayışlarını incelemişlerdir. Araştırma sonucunda ilköğretim öğrencilerinin oldukça dar bir geometri anlayışına sahip oldukları görülmüştür. Özellikle lise düzeyinde öğrencilerden beklenen karmaşık ve üst düzey geometrik inşa faaliyetlerinin gerçekleştirilebilmesi için öğrencilerin erken yaşta geometrik inşa etkinliklerinde deneyim kazanmaları ve ortaokulda Öklid'in temel yapılarının içselleştirilmesi önem arz etmektedir.

Ayrıca çalışmada ortaokul öğrencilerinin temel geometrik kavramların inşasına yönelik öğrenme yörüngeleri tasarlanmış ve uygulanmıştır. Uygulama sürecinin geriye dönük analizleri yapılarak öğrenme yörüngesinin çalışmayan yönleri ve öngörülemeyen öğrenci davranışlarına göre bu yörüngeler revize edilmiş ve nihai halini almıştır. Öğrenme yörüngeleriyle geometrik inşa çalışmalarında öğrencilerin gelişimsel ilerlemeleri ve yaşadıkları zorluklar yorumlayıcı bir çerçeveyle sunulmuştur Bağlam temelli problemler ve sorgulamaya dayalı etkinliklerin yer aldığı geometrik inşa görevleri ile öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerini açığa çıkaran bilişsel eylemler belirlenmiştir. Bu yönüyle alanda çalışan araştırmacılara katkıda bulunacağı düşünülmektedir. Bunun yanı sıra öğrencilere etkili muhakemeler yapabilecekleri öğrenme ortamı oluşturma adına öğretmenlere rehber niteliğinde olacaktır.

1. 5. Varsayımlar

Bu çalışmanın varsayımları aşağıdaki gibidir:

1. Öğrencilerin uygulanan testlerde ve görüşmelerde kendi düşüncelerini olduğu gibi yansıttıkları varsayılmıştır.
2. Veri toplama araçları ve öğrenme yörüngelerinin geliştirilmesi sürecinde alınan uzman görüşlerinin yeterli ve geçerli olduğu varsayılmıştır.
3. Araştırmacıdan kaynaklı olası farklılıkların, çalışma üzerindeki etkisini en aza indirmek için tüm tedbirlerin alındığı varsayılmıştır.

1. 6. Sınırlılıklar

Araştırmada belirlenen sınırlılıklar aşağıdaki gibidir:

1. Tasarlanan öğrenme yörüngeleri Tablo 1’de belirtilen kazanımlar ile sınırlıdır.
2. Araştırma 2018-2019 eğitim-öğretim yılı Bursa ilinde bir devlet okulunun sekizinci sınıfında öğrenim gören 36 öğrenciden elde edilen veriler ile sınırlıdır.
3. Görüşmelerden elde edilen veriler geometrik düşünme düzeylerine göre seçilen öğrenciler ile sınırlıdır.

1. 7. Tanımlar

Araştırmada kullanılan temel kavramlarla ilgili tanımlar aşağıda verilmiştir. Bu kavramlar hakkında ayrıntılı açıklamalar kuramsal çerçevede sunulmuştur.

Geometrik inşa: Geometrik yapıların matematiksel araçlarla veya dinamik geometri yazılımlarıyla inşa edilmesi sürecidir. Bu çalışmada geometrik inşa çalışmaları pergel ve çizgeçle gerçekleştirilmiştir.

Geometrik muhakeme: MEB (2013) muhakemeyi eldeki bilgileri kullanarak yeni bilgi elde etme süreci olarak tanımlamaktadır. Geometrik muhakeme ise eldeki bilgilerden hareketle geometrik şekillerin tanım teorem ve özelliklerinden yararlanarak, analitik düşünme biçimleri (tümevarım, tümdengelim gibi) kullanılarak yeni bilgi elde edilmesi ya da var olan bilginin genişlemesi şeklinde tanımlanmaktadır.

Bilişsel model: Geometrik muhakemeyi bilişsel ve algısal süreçler çerçevesinde inceleyen modeldir. Duval'in geliştirdiği bu modelde görselleştirme, inşa ve muhakeme olmak üzere üç bilişsel süreç ve görsel, sözel, sıralı ve işlevsel algı olmak üzere dört algısal sürecin birbirleriyle etkileşimi ile geometrik muhakeme süreci açıklanmaktadır.

Öğrenme yörüngeleri: Öğrenme sürecinin ilerleyebileceği doğal yol hakkında öğretmenin öngörüsüdür. Bu modelde öncelikle öğrenme hedefleri belirlenir ve öğretmen önceki deneyimlerine dayanarak tahmini bir öğrenme yörüngesi tasarlar. Bu öğrenme yörüngesinde öğrencilerin hedeflere ulaşma yolunda sergileyecekleri davranışlar ve gelişimsel ilerlemeleri adım adım belirlenir. Bunun yanı sıra öğrencilerin karşılaşabilecekleri zorlukla ve hedefin kazanılmasındaki kritik eylemler de ifade edilir. Uygulama sonrasında öğrenci davranışlarına göre öğrenme yörüngesi düzenlenir. Öğrenme yörüngesi doğası gereği sürekli geliştirilebilir yorumlayıcı bir çerçeve sunmaktadır.

2. BÖLÜM
KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2. 1. Geometrinin Tarihsel Gelişimi

Tarihsel ve kültürel nedenlerle, Yunan uygarlığının başarıları, geometrinin bir bilim olarak gelişmesinde oldukça etkili olmuştur. Geometriye olan ilgi, MÖ 300 civarında doruğa ulaşan pratik ihtiyaçlardan daha soyut ve 'küresel' bir rasyonalizasyon sürecine doğru kaymaktadır. Öklid'in Elementlerinden Apollonius, Arşimet, Ptolemy'nin çalışmalarında elde ettiği sistematizasyona dayandırılmaktadır. Bu yeni aşamada, ilgi esas olarak geometrinin kavramsal yönleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Öklid'in incelemesinin mükemmelliği, tüm bilgi alanlarının rasyonel sistemleştirilmesi için bir model ve prototip haline gelmiştir. Yüzyıllar boyunca geometri, Ortaçağ'dan Rönesans'a ve ötesine kadar liberal sanatlardaki bilim adamlarının kültürel oluşumu için en uygun disiplinlerden biri olarak değer görmüştür. Öte yandan, Öklid'in incelemesindeki iyi inşa edilmiş sistematiklik, geometrinin daha fazla ilerlemesini yavaşlatmış ve Öklid şeması içinde neredeyse 2000 yıl boyunca geometrik bilginin "donmasına" neden olmuştur. Bu nedenle, yüzyıllarca süren genel bir durgunluktan sonra, geometrik araştırmalardaki orijinal fikirlerin Öklid geometrisinin dışından gelen uyaranlardan ortaya çıkması şaşırtıcı değildir: 15. yüzyılda perspektif hakkında sanatsal bir ortamda yapılan çalışmalardan (Piero della Francesca, Leon Battista Alberti) , 17. yüzyılda geometri ve cebirin bir karışımından (Descartes) ve on sekizinci yüzyılın sonlarına doğru 3 boyutlu nesnelerin çizimler yoluyla, yani tanımlayıcı geometri (Monge) yoluyla temsil edilmesinin yöntemlerinin sistematik bir çalışmasından söz edebiliriz. Bütün bu yönler (projektif geometri, analitik geometri, betimleyici geometri) Öklid geometrisinin ruhuna yabancı olarak kabul edilmiş ve bu nedenle Öklid'in incelemesinin hala sorgulanmayan otoritesine müdahale edememiştir. Öklidyen olmayan geometrilerin (Gauss, Bolyai, Lobachevsky) keşfi sayesinde Öklid geometrisinin ötesinde bir ilerleme elde etmek için on dokuzuncu yüzyıla kadar beklemek gerekmiştir. Koordinat düzlemi yönteminin Descartes'ın felsefi görüşleriyle yakından bağlantılı olması gibi, Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi de bilgimizin kesinliğinin kaynakları (Kant) hakkındaki felsefi tartışmayla sıkı bir şekilde iç içe geçmiştir. Öklid geometrisine alternatifler hayal etme olasılığının bilinci, belirli bir anlamda, o zamana kadar matematikte ve genel olarak bilimsel bilgide Öklid geometrisine atfedilen merkezi rolün kaybolmasını gerekli kılmıştır. Öte yandan, Öklidyen olmayan geometriler, David Hilbert (1899) tarafından Grundlagen der Geometrie'nin yayınlanmasıyla geometrinin temellerinde (Riemann, Pasch, Peano, Veronese) yeni bir araştırma çağını teşvik etmeye katkıda bulunmuştur.

Sonraki yıllarda, Dedekind, Cantor ve Weierstrass'ın gerçek sayılar teorisi için sağlam bir temel sağlamış olmaları sayesinde, disiplinin cebirsel yönlerine yönelik araştırmalar giderek daha önemli bir rol kazanmıştır. Cebirin kesinlikleri geometride varsayılan kesinliklerden türetilirken, on dokuzuncu yüzyılın sonunda bakış açısının radikal bir şekilde değişmesi ile birlikte kesinliği sağlayan cebir olmuştur. Bu, duyusal deneyimle doğrudan bağlantısı olmayan geometri için modeller, yüksek boyutlu soyut yapıları anlamamızı sağlamıştır (Riemann ve Minkowski'nin diferansiyel geometriye olan katkıları Einstein'ın görelilik kuramı üzerindeki oldukça etkilidir). Geometrik nesnelerin genel bir incelemesi için yeni cebirsel araçlara bir örnek, vektör uzayları teorisidir. Sonuç olarak, geometrik sezgiden daha fazla uzaklaşmayla birlikte geometrinin görsel yönlerine yeniden ilgi duyduğumuz görülmektedir (Mammana ve Villani, 1998). Temel geometriyle ilişkilendirilebilen bu kısa tarihsel taslak, geometrinin görsel, hesaplama, kavramsal, cebirsel, faydacı ve uygulamalı yönler arasında nasıl gezindiğini göstermektedir.

2. 2. Matematiksel Düşünme ve Geometrik Düşünme

Geometri, somut görselleştirmeden soyut akıl yürütme ve modellemeye kadar matematiksel düşüncenin gelişimi için zemin sağlayan çok önemli bir öğrenme alanıdır. Öğrencilerimizin çoğunluğu matematik veya matematikle ilgili herhangi bir alanda ileri çalışmalar yapmayabilirler, onlar için geometri eğitiminin amacı “görsel temsil ve muhakeme yeteneklerini geliştirmek ve bu oldukça farklı süreçlerin sinerjisini desteklemektir” (Hershkowitz, 1998, s. 51).

Geometrik düşüncenin gelişimi şekilleri algılamak, karakteristik özelliklerini fark etmek ve bu özelliklere dayanarak şekiller arasında ilişkiler kurmak, bu ilişkiler üzerinden akıl yürüterek şekil aileleri ve aksiyomatik sistemler arasındaki bağlantıları ortaya çıkarmak şeklinde sürekli devam etmektedir. Öğrencinin geometrik düşünme süreçlerinin kümülatif gelişiminin desteklenmesinde, uygun öğrenme ortamların oluşturulması oldukça önemlidir.

2. 3. Geometrik Muhakeme

MEB (2013) öğretim programında muhakemeyi eldeki bilgileri kullanarak yeni bilgi elde etme süreci olarak tanımlamaktadır. Bu süreçte genelleme, ilişkilendirme, tümevarım, tümdengelim gibi mantıksal düşünme biçimlerini kullanarak matematiksel tanım teorem ve bilgilere dayandırılması matematiksel muhakemedir. Geometrik muhakeme (GM) ise eldeki bilgilerden hareketle geometrik şekillerin özelliklerinden yararlanarak, mantıksal çıkarımlar yoluyla matematiksel dil kullanarak yeni bilgi elde edilmesi ya da var olan bilginin genişlemesi şeklinde tanımlanabilir.

Geometrik düşüncenin gelişimi muhakeme yapabilme gücüne bağlıdır. Literatürde GM süreci ve bu sürecin nasıl geliştirilebileceğine dair birçok çalışma yer almaktadır (Baki, 2018; Duval, 1995; Fujita, 2012; Fujita ve diğerleri, 2010, 2014; Güven ve Karpuz, 2016; Jones, 1998; Kızıltoprak, 2020; Mariotti ve Fischbein, 1997; Olivera ve Zeljić, 2017; Paksu Duatepe, 2016; Van Hiele, 1986; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010).

Öğretim programının özel amaçları arasında yer alan muhakeme becerilerinin geliştirilmesi ancak okullarda uygun öğrenme ortamlarının hazırlanmasıyla mümkündür (MEB, 2013; 2018). Bu öğrenme ortamlarının tasarlanması için geometrik muhakemeyi ele alan farklı perspektiflerin incelenmesi ve bu perspektifler doğrultusunda yapılandırılması gerekmektedir. Literatür incelendiğinde geometrik muhakemeyi gelişimsel (Van Hiele Geometrik Düşünce Düzeyleri, 1959) ve bilişsel (Şekilsel Kavram Teoerisi, 1993; Bilişsel Modeli, 1998) olmak üzere iki bakış açısı ön plana çıkmaktadır.

2. 4. Geometrik Muhakeme Üzerine Geliştirilen Teorilerin Değerlendirilmesi

Geometrinin muhatapları tarafından ne düzeyde anlaşıldığı ve geometrik muhakemenin bireydeki gelişim sürecini ele alan teoriler, karşılaştırmalı olarak değerlendirilmektedir. Hem bilişsel hem de gelişimsel yaklaşımlar geometrik düşünme sürecini şekil ve kavram olarak iki perspektiften ele almışlardır (Güven ve Karpuz, 2016). Şekil ile ifade edilen husus, geometrik şeklin uzamsal özellikleri ve kavram ise tanım, teorem, aksiyom bilgisidir. Van Hiele Geometrik Düşünme modelinin temel hipotezlerinden biri de öğretimin bir etkisi olarak geometrik muhakemenin gelişmesi ile geometrik kavramların şekilsel boyutunun görülmemeye başlaması eğiliminin var olduğu düşüncesidir. Mariotti ve Fischbein (1997) bu hipotezden bağımsız olarak yaş ve öğretimin geometrik muhakeme sürecinde yalnız şekil ile kavram arasındaki ilişkinin düzeyini değiştirdiğini söylemişler, geometrik muhakeme sürecinde şekil ile kavram arasındaki dinamiklerin asla yok olmayacağını belirtmişlerdir. Bu bakımdan Van Hiele'nin geometrik muhakeme sürecine olan yaklaşımı müfredat ve ders kitaplarının hazırlanmasına genel bir bakış açısı sunabilmekte ve önemli katkılar sağlamaktadır (Güven ve Karpuz, 2016). Amerikan geometri öğretim programının geliştirilmesinde bu teori büyük bir etki yaratmıştır (Van de Walle ve diğerleri., 2010). Van Hiele'den farklı olarak ise Fischbein (1993) ve Duval (1995) şekle ve kavrama ait süreçlerin gelişimsel veya hiyerarşik olmadığını öne sürmüşlerdir (Güven ve Karpuz, 2016). Duval geometrik muhakeme sürecinde şekilsel (görselleştirme, inşa) ve kavramsal (muhakeme) süreçleri, kendi alt bileşenleri içerisinde etkileşimli olarak tanımlamış ancak birbirinden bağımsız süreçler olarak ele almaktadır. Fischbein ise geometrik şekillerin şekil ve kavram boyutlarının (her yaş ve öğretim düzeyinde) birlikte ele alınmasının geometrinin doğasına uygun olarak gerekli olduğunu belirtmiştir.

Ayrıca Fischbein, öğrencilerin zihinsel gelişimi bakımından bu iki sürecin bağımsız olarak değil aksine birbiriyle etkileşim içerisinde ele alınması gerekliliğini vurgulamıştır. Yine gelişimsel yaklaşımda algısal süreçler göz ardı edilirken Duval, şekilsel süreçlere algısal (şekle bakma) süreçleri de ekleyerek şekilsel süreçlerde bir genişletme etkisi oluşturmuştur (Güven ve Karpuz, 2016). Öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerinin niteliği bu iki bileşenin etkileşimlerinin niteliği ile doğru orantılı olarak tanımlanmıştır. Ancak kavram kontrolünde gerçekleşen muhakeme üst düzey olarak ifade edilebilir görülmüştür.

2. 4. 1. Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri

Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri gelişimsel yaklaşımın en yaygın örneğidir. Van Hiele'nin modelinde geometrik düşünme şekilsel süreçlerle başlayıp zamanla gelişim göstererek bu süreçler yerini teorik/kavramsal süreçlere bırakmaktadır.

1950'lerin sonlarında geliştirilen van Hiele geometrik düşünme modeli, geometri öğretmek ve öğrenmek için en iyi bilinen çerçevelerden biridir. Bu model halen güncel olan bir araştırma alanıdır ve ayrıca dünya çapında farklı ülkelerin müfredatlarında derin değişiklikler meydana getirmiştir. Teori, NCTM Standartlarının (NCTM, 2009, s. 55) ve Ortak Çekirdek Standartlarının (Dingman, Teuscher, Newton ve Kasmer, 2013) geometri boyutunu etkilemiştir. Model açıklayıcı ve hiyerarşiktir, çünkü öğrencilerin geometrik düşünmelerinin ilerlemesini ve bu ilerlemeyi iyileştirmek için öğretim önerilerini yakalamak için bir bakış açısı sağlar. Modele göre, öğrencilerin geometrik akıl yürütmeleri ayrık, niteliksel olarak farklı düzeylerde gelişir. Seviyeler sıralı ve belirli bir seviyede uzmanlaşmak için öğrencilerin ondan önceki tüm seviyelerden geçmiş olmaları gerekir. "Her düzeyin kendi dilsel simgeleri ve bu işaretleri birbirine bağlayan kendi ilişkiler sistemi vardır" (Van Hiele, 1986, s. 246) ve farklı düzeylerde akıl yürüten iki kişi birbirini anlayamaz. Özellikle öğretmen, öğretim materyalleri, içerikler, kelime dağarcığı öğrenciden daha yüksek düzeydeyse, öğrenci kullanılan düşünce süreçlerini takip edemeyecektir. Birinci seviyede öğrenciler çizimleri karşılaştırır ve şekilleri kesin olmayan niteliklere göre tanımlar, sınıflandırır ve sıralar; şekilleri görsel prototipler kullanarak karakterize ederler, şekilleri alakasız özelliklerle betimlerler ve sonsuz çeşitlilikte şekilleri kavrayamazlar, şekilleri tutarsız bir şekilde sıralarlar ve özellikleri bir şekli belirlemek için gerekli koşullar olarak kullanamazlar (Burger ve Shaughnessy, 1986). 2. seviyede öğrenciler, dörtgenler gibi belirli şekil türleri arasındaki sınıf kapsamlarını tam olarak göremeseler bile, şekilleri özelliklerine göre karşılaştırırlar. Ayrıca, şekilleri asgari sayıda yeterli koşulla belirlemek veya karakterize etmek yerine, gerekli özellikleri uygular, ortaya koyar ve şekilleri adlarından çok özellikleriyle tanımlarlar. Bu düzeyde öğrenciler, kişisel tanımlamalar lehine ders kitabı tanımlarını reddederler. Matematiksel ispatın anlamını anlamazlar ve geometriye ampirik olarak yaklaşırlar, örneğin bir önermenin geçerliliğini birden fazla çizim yaparak ve bunlar üzerinde gözlemler yaparak test ederek kabul ederler. 3. seviyede öğrenciler, şekil türlerinin tanımlarının anlamını kavrar ve bunları açık bir şekilde kullanır, şekilleri sınıf katılımlarına göre veya diğer matematiksel olarak kesin niteliklere göre sıralar. Açıkça "eğer, o zaman" ifadelerini kullanırlar ve zincirleme kuralı ve modus ponens yasasını dolaylı olarak kullanarak gayri resmi tümdengelimli argümanları doğru bir şekilde oluştururlar, ancak aksiyom ve teoremlerin rollerini ayırt edemezler. 4. seviyede öğrenciler kesin bir dil kullanırlar, sıklıkla varsayımlar formüle ederler ve varsayımları tümdengelimli bir şekilde doğrulamaya çalışırlar ve ispatta matematiksel bir önermenin "doğruluğuna" karar vermek için nihai otoriteyi tanırlar. Matematiksel bir söylem içinde aksiyomların, tanımların, teoremlerin ve ispatların rollerini tanırlar; Öklid geometrisinin aksiyomlarını örtük olarak kabul ederler. Bu seviyede bir öğrenci, dikdörtgenlerle ilgili ifadeleri kanıtlamak için kenar-açı-kenar (KAK) varsayımını kullanabilecek, ancak KAK koşulunu önermenin neden gerekli olduğunu anlayamayacaktır (Hoffer, 1981). 5. seviyede öğrenciler farklı aksiyomatik sistemlerde çalışabilir, teoremler kurabilir ve bu sistemleri analiz edebilir/karşılaştırabilir (Fuys, Geddes ve Tischler, 1988). Ayrıca bu seviyede öğrenciler somut modellere başvurmadan geometri problemleri üzerinde çalışırlar (Burger ve Shaughnessy, 1986). Hoffer'a göre "Bu en ileri düzeye lise öğrencileri tarafından nadiren ulaşılır. Bu düzeyde bir öğrenci, örneğin paralel varsayımın (Öklid) dikdörtgenlerin varlığıyla nasıl ilişkili olduğunu ve Öklid dışı geometride dikdörtgenlerin olmadığını anlar. (Hoffer, 1981, s. 14). Aşağıdaki Tablo 2'de van Hiele seviyeleri özetlenmektedir. Van Hiele seviyeleri Hoffer (1981), Usiskin (1982) ve Fuys ve diğerleri (1988)'den yazar tarafından uyarlanmıştır.

Tablo 2

Van Hiele geometrik düşünme düzeyleri

Seviye	Tanım ve Örnek	Düşünce Nesneleri
1	Visual/Recognition-Görsel/Tanıma Öğrenci, şekillerin isimlerini öğrenebilir ve bir şekli bir bütün olarak tanıyabilir. (Kareler ve dikdörtgenler farklı görünür.)	Geometrik şekiller
2	Descriptive/Analysis-Açıklama/ Analiz Öğrenci, şekillerin özelliklerini belirleyebilir. (Dikdörtgenlerin dört dik açısı vardır veya bir dikdörtgenin karşılıklı kenarları eşittir.)	Şekilleri sınıflama

3	Theoretical/Informal deduction- Teorik/Gayrı resmi Tümdengelim Öğrenci, şekilleri ve ilişkileri mantıksal olarak sıralayabilir ve doğru tanımların önemini anlayabilir, ancak matematiksel bir sistem içinde çalışmaz. (Her kare bir dikdörtgendir; basit bir tümdengelim izlenebilir, ancak kanıt anlaşılmaz)	Şekil sınıflamanın özellikleri
4	Formal logic/Deduction- İspat/ tümdengelim Öğrenci, tümdengelimin önemini ve varsayımların, teoremlerin ve ispatın rollerini anlar. (İspatlar anlayarak yazılabilir; bir öğrenci bir dikdörtgenin köşegenlerinin neden eşit olduğunu açıklayabilir.)	Özelliklerin ilişkilerini açıklayabilme
5	Rigor- Kesinlik Öğrenci kesinliğin gerekliliğini anlar ve soyut çıkarımlar yapabilir. (Öklid dışı geometri anlaşılabilir; Öklid dışı geometride dikdörtgenler yoktur.)	İlişkilerin temellendirilmesi

Usiskin (1982)'e göre Van Hiele, ispat yaparken öğrencilerin başarılı olabilmelerini daha önceden geçilmesi gereken belirli seviyelere bağlamıştır. Van Hiele'nin modeline göre, her düzeyde ilerleme, beş öğretim aşamasını içeren bir öğrenme sürecindeki öğretimin bir sonucudur: sorgulama, yönlendirme, açıklama, serbest yönlendirme, entegrasyon. Bu aşamalar hemen hemen sıralı kabul edilebilir. Battista'ya (2007) göre, birçok araştırmacı van Hiele'nin geometrik düşünme düzeylerine ilişkin teorisini derin bir geometrik düşünmeden yoksun bulsa da bilimsel ve matematiksel düşüncenin özünde olan algısallaştırma, kavramsallaştırma, kavramsal düzenleme, aksiyomatik aşamalarından geçerek ilerlemesini tanımlar.

2. 4. 2. Fischbein'in Şekilsel Kavram Teorisi

Muhakeme yani akıl yürütme, eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (tanımlar, ilişkiler, semboller, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümdengelim, tümevarım, genelleme, kıyaslama, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci olarak tanımlanmaktadır (MEB, 2018). Şekilsel Kavram Teorisi'ne göre geometik muhakemenin (GM) yapısı kavram-şekil ilişkisinin niteliği ile ilgilidir. Normal şartlar altında şeklin anlamlarını, ilişkilerini ve özelliklerini kontrol etmesi gereken bileşen kesinlikle kavram olarak görülmüştür (Fischbein, 1993). Bu da GM sürecinde üst düzey muhakeme olarak ele alınmaktadır. Ancak muhakeme sürecinde şeklin kavram üzerinde baskın olduğu durumlar ortaya çıkabilmektedir. Bu duruma çözüm ise mantıksal tutarlılığının ve sonuçtan genellemelere ulaşılmasını sağlayan tümdengelimli yapının eksik kalmasına sebep olduğu görülmektedir (Fischbein, 1993; Güven ve Karpuz, 2016). Bu durumun ilk göze çarpan bir sonucunun ise öğrencilerin ispat süreci üzerinde gerçekleştiği görülmektedir. Öğrenciler ispata ilişkin sürecin doğasını anlayamamaktadır ve daha çok deneme-yanılma yaparak ispatın yapılabileceği düşüncesine sahip olabilmektedirler. Fischbein, birçok öğrencinin geometrik bir şekli şekilsel kavram olarak kabul etmemelerine özel temsiller üzerindeki çalışmalarından edindikleri deneyimlerin etkisinin sebep olduğunu ifade etmektedir. Yani şekli, şekil üzerinden öğrenme deneyimi oldukça etkilidir. Bu durum geometrik şeklin imajının kavramsal tanım üzerinde sahip olduğu baskın etkisi olarak açıklanmaktadır. Örnek vermek gerekirse, öğrenci dikdörtgenin tanımını biliyor olsa da karenin veya kare formunda verilmeyen bir dikdörtgenin yalnız görünüşlerini inceleyerek (şeklin kavram üzerindeki baskın kontrolü) kare ile dikdörtgenin arasındaki hiyerarşik ilişkiyi belirleyemeyecektir (Fischbein, 1993). Ancak öğrenci, verilen şekilleri aynı zamanda kavramsal bir bakış açısıyla ele aldığında karenin de bir dikdörtgen olduğunu kavrayabilecektir. Gelişimsel yaklaşımın aksine, özellikle geometride bir teoremin ispatı sürecinde ihtiyaç duyulabilecek sezgi boyutunun geometrik bir şeklin kavramsal yönünden çok şekilsel yönü ile ilgili olduğu bir gerçektir. Bir ispat veya keşif sürecinde açık argümanlardaki mantıksal sınırlardan değil sezgilerimizden besleniriz ve ilham alırız (Fischbein, 1993). Yani geometrik kavramları öncelikle sezgisel olarak algılar, daha sonra matematikleştirerek anlamlandırırız (Baki, 2006). Bu sebeple yalnız kavram kontrolünde gerçekleştirilen bir muhakemede, problemlerin çözümünde ve ispat sürecinde gerekli olabilecek sezgi boyutu eksik kalacaktır (Güven ve Karpuz, 2016). Çünkü sürekli olarak teorem ve tanım gibi formel gerekçelere (kavrama) dayandırılan bir muhakemede fikirlerin üretkenliğini bozulabilmekte ve engelleyebilmektedir (Fischbein, 1993). Bu sebeple GM sürecinde şekil ile kavram etkileşim içerisinde olması gerekmektedir. Şekilsel kavramların kavramsal ve şekilsel yönleri arasındaki bölünme veya uyum eksikliği öğrencilerin GM oluşturmada hatalarına sebep olmaktadır (Fischbein, 1993). Şekilsel kavram, sadece kavram veya şekle indirgenemeyecek zihinsel dolayısıyla bilişsel bir süreci işaret eder (Fischbein, 1993). Bununla birlikte şekiller ve kavramlar, kişinin (herhangi bir yaş sınırı olmaksızın çocuk veya yetişkin bir birey) bilişsel aktivitesinde bazen birbiriyle etkileşime girer bazen de çatışır. Şekilsel kavramın gelişimi genellikle doğal bir süreç olarak tanımlanmamıştır. Dolayısıyla geometrinin okul öğretiminde zor bir konu olmasının ana nedenlerinden birisi de şekilsel kavramların doğal bir süreçte olması gereken biçimlerine doğru gelişim sergilememesidir. Bu sebeple matematik eğitiminin temel amaçlarından geometri, bütüncül bir zihinsel nesne hâline gelene kadar, geometrik şeklin sahip olduğu iki yön arasında sıkı bir işbirliğinin kurulmasını sağlayacak öğretim durumlarının inşasına yönelik fırsatlar oluşturulmasıdır (Fischbein, 1993).

2. 4. 3. Duval'in Bilişsel Modeli

Geometri, matematik yapan kişiler için heyecan verici olabilir. Ancak öğretim programında geometri öğrenmesi gereken kişilerin karşılaştığı zorlukları gidermemektedir. Geometri öğretmek, sayısal işlemleri veya temel cebiri öğretmekten daha karmaşıktır ve genellikle daha az başarılıdır (Duval, 1998). "Neden geometri öğretilmelidir? veya "Geometri nasıl öğretilmeli?" sorularını cevaplamak için geometrik aktivitenin altında yatan bilişsel karmaşıklığı açıklamak yerinde olacaktır.

Bilişsel süreçler: Duval'e göre geometri, belirli epistemolojik işlevleri yerine getiren üç tür bilişsel süreci içerir:

-Görselleştirme (visualisation); bir ifadenin gösterimi, karmaşık bir durumun keşfi, genel bir bakış için veya öznel bir doğrulama için uzayın somut olarak temsili ile ilgili süreçlerdir.

-İnşa (construction); geometrik yapının araçlarla inşası, temsilci üzerindeki eylemlerin ve gözlemlenen sonuçların temsil edilen matematiksel nesnelerle ilgili olduğu bir model olarak çalışabilir.

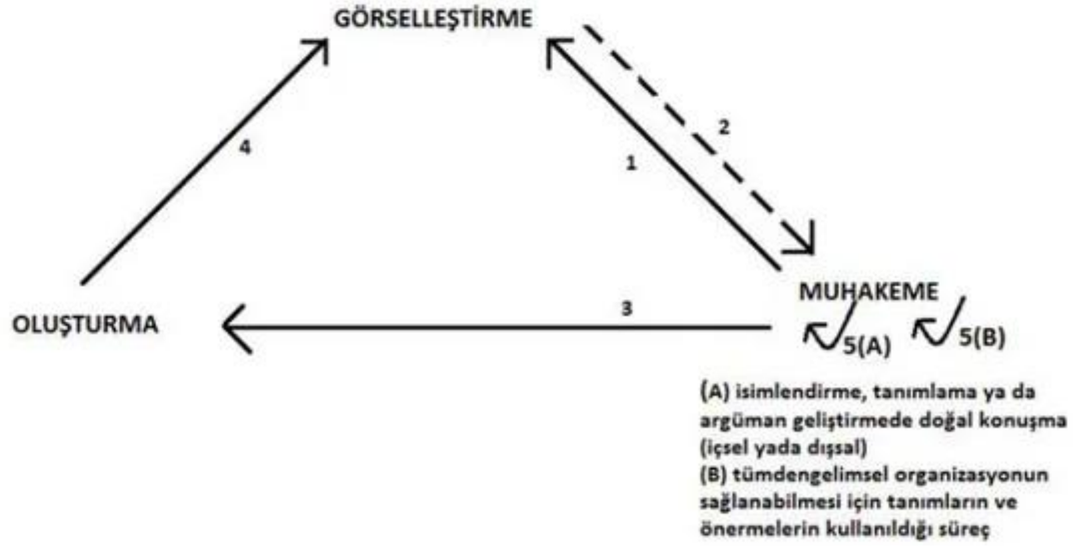
-Akıl yürütme (muhakeme) (reasoning); söylemsel süreçlerle ilgili olarak bir açıklama için bilginin genişletilmesi, doğrulanması veya kanıtlanması sürecidir.

Bu farklı süreçler birbirinden bağımsız yani ayrı ayrı gerçekleştirilebilir. Dolayısıyla görselleştirme, inşa etmeye bağlı değildir: Yani geometrik yapılar nasıl inşa edilirlerse edilsinler, şekillere erişim vardır. Ayrıca inşa süreci görselleştirmeye yol açsa bile, inşa süreçleri sadece matematiksel özellikler ve kullanılan araçların teknik kısıtlamaları arasındaki bağlantılara bağlıdır. Nihayetinde, görselleştirme bazen bir kanıt bulmak için gerekli olan sezgisel bir yardım olabileceği gibi, akıl yürütme yalnızca mevcut olan önermelerin (tanımlar, aksiyomlar, teoremler) bütününe bağlıdır. Bazı durumlarda görselleştirme yanıltıcı veya imkansız olabilir. Bununla birlikte, bu üç bilişsel süreç yakından bağlantılıdır ve bunların sinerjisi, geometride yeterlilik için bilişsel olarak gereklidir (Duval, 1998; Dreyfus, 1991).

Duval bilişsel süreçler arasındaki ilişkiyi aşağıda Şekil 1'deki gibi tasarlamıştır. Şekildeki her bir ok, bir tür bilişsel sürecin herhangi bir görevde başka bir türü nasıl destekleyebileceğini temsil etmektedir.

Şekil 1

Duval'in bilişsel süreçleri



(Güven ve Karpuz, 2016 s. 248)

Yukarıdaki Şekil 1'de Ok-2 kesikli noktalı olarak gösterilmiştir, çünkü görselleştirme her zaman akıl yürütmeye yardımcı olmaz. Ok-5(A) ve 5(B), muhakeme mantığının bağımsız bir şekilde gelişebileceğini vurgulamaktadır. Çoğu durumda daha uzun bir devreye sahip olabiliriz. Örneğin, 2-5(B)-3, belirli bir şekil için bir inşa adımlarını bulma yolunu temsil edebilir; 4-2-5(A) veya 5(B) ise bir inşa sırasını tanımlamanın yollarını temsil edebilir.

Böylece ortaokul ve liselerde geometri öğretiminin temel sorununun öğrencilerin bu üç tür süreç arasındaki iletişimi görmelerini nasıl sağlanacağı olmaktadır. İspat veya muhakeme ile ortaya çıkan zorluklar bilinmektedir ve ilk önce inşa ve görselleştirme süreçlerinin tercih edilmesi daha doğal bir süreç olarak görünmektedir.

Duval'e göre:

1. Üç tür süreç ayrı ayrı geliştirilmelidir.

2. Bir figürü görmenin çeşitli yolları olduğundan, müfredatta farklı görselleştirme süreçleri ve farklı akıl yürütme süreçleri arasında ayrım yapmaya yönelik çalışma gereklidir; aynı şekilde çeşitli akıl yürütme türleri vardır.

3. Bu üç tür sürecin koordinasyonu gerçekten ancak bu farklılaştırma çalışmasından sonra gerçekleşebilir.

Algısal süreçler: Duval'in modelinde geometri, algısal ve bilişsel açıdan ele alınmış ve belirli süreçler ortaya konulmuştur (Jones,1998). Duval, şekli kavrama sırasında hangi süreçlerin yaşandığını açıklamaya çalışmış ve bu süreçleri şekle bakma süreçleri olarak adlandırmıştır. Duval'ın çerçevesinde, şekli kavrama süreçleri dört tür algıdan oluşur: görsel, sözel, sıralı ve işlevsel algıdır. Duval (1998)'e göre, bu süreçlerin her biri matematiksel ilişkilerin tanınmasını (gözlemlenmesini) sağlamak için çeşitli işlevlere hizmet eder ve bir problem çözme sürecinde etkileşimli olarak işlem görür. Bu etkileşimi doğru bir şekilde gerçekleştirebilmek için algısal süreçlerin birbirinden bağımsız ve özgün yollarla geliştirilmesi gerekmektedir (Duval, 1995).

Görsel algı, bir şeklin ilk bakışta ve bir geometrik şeklin şekilsel yapısı (konfigürasyonu) ile ilgili bilgilerin elde edilebildiği aşamadır. Bir şeklin adı ve alanı hakkında bilgi verme, bir şeklin temel geometrik öğelerini (nokta, doğru parçası, üçgen, daire vb.) tanıma gibi işlemleri içerir. Figürün alt öğelerinin belirlenmesi de görsel algı süreci arasındadır. Bu algı türü statiktir ve bu algı ile alt figürler arasındaki ilişkiler fark edilemez (Duval, 1995).

Yalnızca görsel algıya dayalı bir geometrik şeklin matematiksel özelliklerini belirlemek imkansızdır. Şekil hakkında bazı ön bilgilere de ihtiyaç vardır. Verilen ön bilgilerden yola çıkarak şekil ile matematiksel ilkeler (tanım, teorem, aksiyom vb.) arasında ilişki kurmaya sözel algı denir (Duval, 1995, 1998; Micheal, 2013).

Elle yapılan çizimlerden farklı olarak, bir alet yardımıyla geometrik şekiller oluşturmak, yani bir şeklin modelini oluşturmak, şekil hakkında bilgi edinmeyi sağlayacak ve bu bilgi bir problemdeki geometrik ilişkileri tanımaya yarayacaktır (Karpuz ve Atasoy, 2019). Bu nedenle Duval'in Bilişsel Modeli'nde geometrik bir figürün bir araçla oluşturulması veya figür oluşturma süreçlerinin tanımlanması algısal süreçler arasında görülebilir; bu süreçler sıralı algı olarak adlandırılır.

Öte yandan, bir figürün ilk görünümünde yapılan değişiklikler (ek çizgiler çizme, figürü bileşenlerine ayırma, figürün konumunu ve yönünü değiştirme vb.) figürün bazı bileşenlerine diğerlerinden daha fazla odaklanma eylemi işlevsel algı olarak adlandırılır (Duval, 1995). Öğrenci davranışlarına ilişkin şekle bakma süreçlerinin göstergeleri şu şekilde sunulabilir (Karpuz ve Atasoy, 2019)'dan revize edilmiştir:

Tablo 3

Algısal süreçlerin göstergeleri

Görsel	Sözel	İşlevsel	Sıralı
Verilen şekli ve onun temel geometrik unsurlarını	Verilen sözel bilgileri (sorudaki şekil, sembolik temsil ve kavramlar hakkında verilen bilgileri)	Belirli bir geometrik şekli ayrıştırabilir ve farklı bir şekil	Bir alet yardımıyla geometrik bir şekil oluşturabilir.

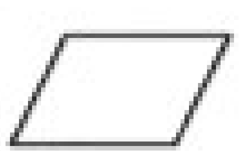
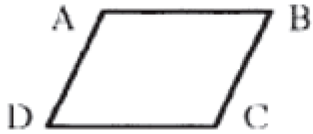
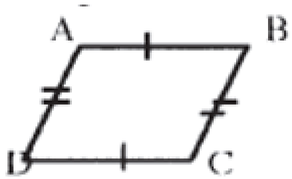
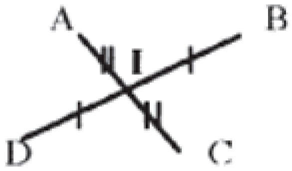
tanıyabilir ve isimlendirebilir.	doğru bir şekilde görsel bilgiye dönüştürebilir. Geometrik ilişkiler hakkında çıkarımlarda bulunurken şeklin dış görünüşüne aldırmaz. Şekil üzerinde verilen görsel bilgileri sembol, notasyon ve matematiksel kavramları kullanarak doğru bir şekilde sözel bilgilere dönüştürebilir ve doğru çıkarımlarda bulunabilir.	oluşturmak için bileşenleri yeniden oluşturabilir. Bir şeklin bazı bölümlerine odaklanabilir ve yeni geometrik öğeler ekleyerek veya çıkararak şekli değiştirebilir. Belirli bir şeklin veya alt öğelerinin konumunu veya yönünü değiştirebilir.	Bir alet yardımıyla geometrik şeklin nasıl oluşturulacağını tanımlayabilir.

Algısal süreçlerinin göstergeleri incelendiğinde geometrik düşünmenin konu ve kavramların öğretiminden çok bilişsel ve kavrama süreçleri olarak ele alındığı görülmektedir. Çünkü matematik, matematiksel sonuçlardan ve birilerinin bulduğu kavramlardan başka bir şey olmayan bir bilim dalı değildir; bir düşünme biçimidir (Cuoco, Goldenberg ve Mark, 1996). Bu düşünme biçimi, bireyin içinde bulunduğu bilişsel ve kavrama süreçleri aracılığıyla kurulur (Duval, 1998).

Görselleştirme "Neyi temsil ettiklerini görmek için resimlere, şekillere, çizimlere ve rakamlara bakmak yeterli mi?" sorusunu akla getirmektedir. Bir şeklin görmenize izin verdiği şey, örneğin 1 veya 2 boyutta, düz veya eğri çizgi, bir üçgenin kapalı taslağı veya 3 boyutta küp olabilir. Bu bütünsel görsel olarak tanımlanması, algısal organizasyon yasalarına bağlıdır ve tüm bu bütünsel şekiller, gerçek nesneleri veya matematiksel nesneleri temsil etmek için kullanılabilir. Ancak Duval (1998)'e göre matematiksel bir nesneyi temsil etmek için iki özel gereksinimin karşılanması gerekir: İlki bir konfigürasyon (geometrik yapı) olmak, yani konfigürasyonu karakterize eden aralarında ilişkilere sahip birkaç kurucu bütünselliğin birleşmesidir. İkincisi, bu bütünsellik tarafından temsil edilen bazı özellikleri sabitleyen bir tanıma ihtiyaç vardır. Bu tanım yapma çabası, konfigürasyonda matematiksel girişi sağlar (kanıt koşulu). O zaman bir geometrik şekle ilişkin iki algı arasındaki ilk ayrım bariz hale gelebilir: Bunlar görsel algı ve sözel algıdır. Görsel algı bir şeklin görsel olarak ifade edilme sürecidir. Görsel algıda geometrik özelliklere odaklanma yoktur. Sözel algı ise şeklin geometrik kavram olarak ifade edilmesi sürecidir.

Tablo 4

Görsel algı ile sözel algı geçiş süreçleri

Algısal Endişe	Söylemsel Endişe	
1. Görsel algı	2a. Görselden sözele	2b. Sözelden görsele
 İlk bakışta bu şekil bir çatı, bir masanın üst yüzeyi, bir dikdörtgeni farklı bir açıdan (örneğin eğik dikdörtgenler prizmasının yan yüzeyi görüntüsü olarak algılanabilir	 "ABCD bir paralelkenardır." Yukarıdaki ifadede ABCD'nin bir paralelkenar olarak ifade edilmesi şekle sözel sürecin hükmetmeye başlamasına sebep olur. Böylece şeklin artık kenarlarına (karşılıklı kenarlar paraleldir gibi), köşelerine, açılarına odaklanılmaya ve aralarındaki ilişkiler görülmeye başlanır.	"ABCD bir paralelkenar olsun."   Bu sözel ifade ile önermeye bağlı olarak paralelkenar olm koşulunu sağlayan birçok farklı görsel algı oluşturulabilir. Karşılıklı kenarların eşit olması ya da köşegenlerin birbirini ortalaması gibi.

Yukarıdaki Tablo 4'de bir geometrik şekle farklı girişler ifade edilmiştir. Bir yanda 1 (görsel algı) ile diğer yanda 2 (sözel algı) ve genellikle karıştırılan 2a (Görselden Sözele) ve 2b (Sözelden Görsele) arasındaki önemli fark görülmektedir. 1'de görülen, herhangi bir nesneyi gösterebilen yalnızca bir bütündür. Örneğin; çatı, belirli bir perspektiften dikdörtgen gibi. Bu bütünler pergel ve cetvel gibi araçlarla inşa edildiğinde geometrik temsiller olarak daha kolay görülür. 2'de aynı bütün, kavram (paralelkenar) olarak ifade edilir ve bu kavramın geometrik özelliklerine odaklanılmaya başlanmaktadır. Bu nedenle, 2'deki görselleştirme, 1'den oldukça farklıdır. 2'de görselleştirme, bütün ve geometrik temsili belirleyen ifadenin birlikteliğini gösteren bir iç hareketi gerektirir. Bu içsel hareket, görme biçiminin algısal organizasyonunda boyutsal bir değişiklik anlamına gelir. Bu içsel boyutsal değişiklik, eşdeğer olmayan 2a ve 2b tarafından ima edilen dayanak(ankraj) değişikliği ile karıştırılmamalıdır. İç boyut değişikliği ve ankraj değişikliği, bir bütün veya konfigürasyona bakmanın matematiksel yolunun özellikleridir.

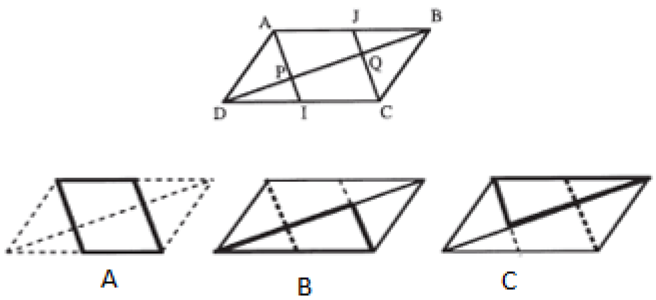
Görselleştirmenin problem çözme sürecinde çalışması işlemsel bir endişe doğurmaktadır (Duval, 1998). Geometrik bir şekil, inşası için açıkça seferber edilen veya hipotezlerde açıkça belirtilenlerden daha fazla kurucu bütünsel ve daha olası alt konfigürasyonlar içerir (Duval 1995, s.182). Şekillerin buluşsal gücünü oluşturan bu fazlalıklar bazı alt konfigürasyonları, bir çözüm veya bir açıklama için anahtar fikirleri verir. Bilişsel bir bakış açısından bu ilgili alt konfigürasyonların görünürlüğü nasıl ayırt edilebileceği sorusunu gündeme getirir. Burada bir çözüm veya açıklama için anahtar fikirleri ortaya çıkarmak için şekil üzerinde zihinden (ilgili kısmın görünür olup diğer kısımların arka plana atılması gibi) veya çizimle (bir dikme çizilmesi veya şeklin döndürülmesi gibi) bazı değişiklikler yapılmaktadır. Bu durum işlevsel algı olarak ifade edilmektedir (Gonzalez, 2013).

Örnek olarak Problem 1 üzerinden ifade edersek,

Problem 1: ABCD bir paralelkenar olsun. I ve J, sırasıyla CD ve AB'nin orta noktalarıdır. DP, PQ ve QB doğru parçalarının aynı uzunlukta olduğunu kanıtlayın.

Şekil 2

Problem 1'in bileşenleri

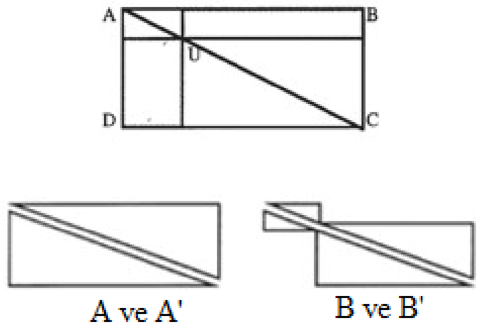


Problemde yer alan şekilde birçok alt konfigürasyon görülebilir. Ancak aşağıdakiler ayırt edilip, çözüm için seçildiğinde, ilgili alt konfigürasyonlara odaklanmak, C'nin açıkça bir orta taban teoreminin düşünülmesini gerektirir. Burada, alt konfigürasyonların ayrımı, uygulanabilir tanımlar ve teoremler tarafından sağlanır. Bazen de tanım ve teoremler ve bunlar arasındaki ilişki belirlendikten sonra başlangıçtaki şekil yeniden bir araya getirilip çözüme ulaşılabilir. Şekli görmek ve ilgili alt konfigürasyonları bulmak için hiçbir açık bilgiye (tanım, teorem vb.) ihtiyaç duyulmayan problem 2'de durum problem 1’den oldukça farklıdır: problem durumunu ya görsel bir algı ya da görsel bir işlevsel algıyla tamamen keşfedebiliriz:

Problem 2: Aşağıdaki şekilde AC, ABCD dikdörtgeninin köşegenidir. U noktası köşegen üzerinde hareket ederken oluşan iki dikdörtgenin alanlarını karşılaştırın.

Şekil 3

Problem 2'nin bileşenleri



Birçok alt konfigürasyon ve bileşenler bu ilk şekilde görülebilir. Ancak çözüm için aşağıdaki şekiller ayırt edilmelidir.

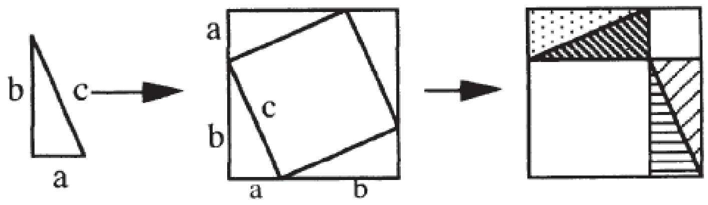
A ve A' alt konfigürasyonları hızlı bir şekilde tanımlanır ve U noktası köşegenler üzerinde hareket ederken değişmez kalır. Alt konfigürasyonlar B ve B', sırasıyla A ve A' içinde yer alır ve U noktasının köşegen üzerindeki konumu ne olursa olsun, algısal olarak örtüşür. Bunu ilk şekilde görmek için açık geometrik bilgiye atıfta bulunmaya gerek yoktur. Burada vizyon, problem çözmede tek lider süreç olabilir. Ana zorluk B ve B' alt konfigürasyonlarının tanımlanması ile ilgilidir (Mesquita, 1998). Başlangıçtaki geometrik şekilde bir alt konfigürasyonun farkını veya görünürlüğünü tetikleyen veya engelleyen birkaç faktör görülmektedir: Alt konfigürasyon için kurucu bütünselin tamamlayıcılığı ve alt konfigürasyonun dış bükeyliği bu faktörler arasındadır. Burada B ve B' alt konfigürasyonları iki tamamlayıcı olmayan bütünden oluşur ve dışbükey değildir. Ayrıca görsel olarak baskın olan diğer alt konfigürasyonlar tarafından maskelenmiş görünürler.

Bu nedenle 12-13 yaşındaki öğrenciler ve hatta daha büyük öğrenciler için onları bulması büyük zorluktur (Duval, 1998). Ancak, bu iki problemde gerçek bir şekil değişikliği gerekli değildir, başlangıç şekline hiçbir şey eklenmemeli veya dönüştürülmemelidir: ilgili tüm alt konfigürasyonlar zaten başlangıç şekli ile verilmiştir. Gerçek bir şekil değişikliği sıradaki problemde görülmektedir. Problem 3 durumunda Pisagor teoreminin bilinen bir kanıtı ile bunun verilmeyen alt konfigürasyonlara örnek teşkil etmektedir.

Problem 3: Bir dik üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ olduğunu kanıtlayınız.

Şekil 4

Pisagor teoremi'nin klasik ispatı



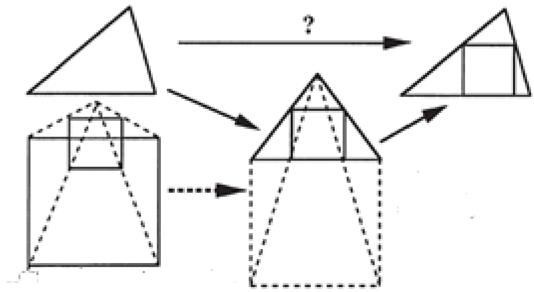
Dik üçgen ilk önce daha büyük bir konfigürasyona dahil edilmelidir, bir dış kenar karesi (a + b) ve iç kenar karesi dik açılı üçgenin üçüncü kenarına (c) eşittir. Bu gerçek bir şekil değişikliğidir. Daha sonra, bu daha büyük konfigürasyon, bazı kurucu bütünseller değiştirilerek yeniden düzenlenebilir, böylece iç kare (c^2), $a^2 ve\ b^2$ alanlarından oluşan iki küçük kareye bölünmüş gibi görünür. İlk şekil değişikliği, problem 1'de olduğu gibi, bir sözel dayanağı ima eder. Bu dayanak, $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısında belirtilen özellikler üzerinde yapılır. İkinci biçimsel değişiklik, yalnızca kurucu bütünsellerin yeniden örgütlenme olanaklarına bağlıdır. Burada, dahil edilen konfigürasyonun kurucu bütünselleri, çözümle ilgili başka bir konfigürasyon elde etmek için bir yapbozun parçaları gibi değiştirilir. Bu şekilsel değişikliği işlevsel algı olarak isimlendirilmiştir (Duval,1998). Buradaki en ilginç ve önemli nokta, işlevsel algının az çok görünür olabilmesi ve görünürlüğünün önceki alt konfigürasyon ayrımında olduğu gibi aynı tetikleyici veya engelleyici faktörlere bağlı olmasıdır. Problem çözmede vizyona buluşsal gücünü veren şey, bir figürün bu şekilsel değişimi ya da işlevsel algısı olarak görülebilir (Duval, 1998).

Bu üç örnek ile dikkat çekilmek istenen, geometride görselleştirmeyle ilgili genel fenomenlerle ilgilidir. Bu nedenle geometride görselleştirme, görülenle ilgili üç değişiklikten en az birini zorunlu olarak gerektirir: boyutsal değişiklik, şekilsel değişiklik, ankraj (dayanak) değişikliği. Boyutsal değişim en belirgin olanıdır. Uzay geometrisinde örneğin üç boyutlu bir katının öncelikle ilgili olanları seçmek için farklı olası düzlem bölümlerini ayırt etmek gibi. Aslında, bir 3B/2B gösterimde bir düzlemin tanımlanması, uzayın geometrik gösterimindeki ilk adımları da ilgilendiren çok önemli bir sorunu ortaya çıkarır. Ve bir üç boyutlu nesnenin duyusal-motor algısından onun 3B/2B temsiline geçiş hiçbir zaman açık veya dolaysız değildir: Düzlem temsillerinden geçen uzun bir yol vardır. Burada sadece düzlem geometrisinde ima edilen boyutsal değişimi açıklanmıştır.

Düzlem geometride, uzay geometrisinde olduğu gibi, boyutsal değişim, şekilsel bir temsile bakma yolunda temel bir bilişsel süreçtir. İspatla ilgili matematiksel nesneler veya özellikler, başlangıç figüründe bu nesneleri temsil eden bütünsellerin veya alt konfigürasyonların boyutundan daha yüksek boyutlu bir konfigürasyonda görülebildiğinde, geometride görselleştirmenin buluşsal bir rol üstlendiği söylenebilir. Bu noktayı açıklamak için, aşağıda düzlem geometrisi problemi verilmiştir (Mesquita, 1998, s.135):

Şekil 5

Duval'in üçgen içine kare yerleştirme problemi



Şekilsel değişim veya işlevsel algı, daha karmaşık ve belki de en az bilinçli olanıdır. Bağlı olduğu görsel algı ve tamamen ayrıldığı (teoremlere ilişkin bilgilere bağlı olan) sözel algıdan ayırt edilmelidir. Özel şekilsel süreçlerle ilgilidir. Her biri için çeşitli işlemlerle ve her işlem için görünürlüğünü tetikleyen veya engelleyen çeşitli faktörlerle birlikte Duval (1998) tarafından üç türde şekil değişikliği ifade edilmiştir. Şekilsel değişim, bir konfigürasyonun görsel organizasyonunu dönüştüren bir eylem olarak görülebilir.

Algısal süreçler hiyerarşik ilişkisi olmayan birbirinden bağımsız dört süreçten oluşmaktadır. Bu süreçlerin her biri şekil üzerindeki matematiksel bilginin fark edilmesine imkân sağlayacak farklı işlevler yerine getirmekte ve bir problemin çözümünde birbiriyle etkileşimli olarak hareket etmektedir (Duval, 1995, 1998).

Geometride, problemde verilen bilgi veya bireyin mevcut bilgileri, bütünsel tanımlamalara ilişkin nesnelerin isimlendirilebildiği bazı anlamsal ağlar altında verilir, ayrıca bütünsellik hakkında sorular, hipotezler, varsayımlar, nesneler ve bunların ilişkileri oluşturulabilir. Bu verilen bilgi, bazı modeller fiziksel olarak oluşturulabilse bile, temsili ve sembolik düzeyde işlenmelidir (Duval, 1998): problem çözme ve muhakeme ilgili geometride üç bilişsel süreç tanımlamıştır:

(1) yukarıda işlemsel endişe olarak tanımlanan, tamamen yapısal bir süreç

(2) betimleme, açıklama, tartışma yoluyla sıradan konuşmada kendiliğinden gerçekleştirilen doğal bir söylemsel süreç (biçimsel, doğal muhakeme)

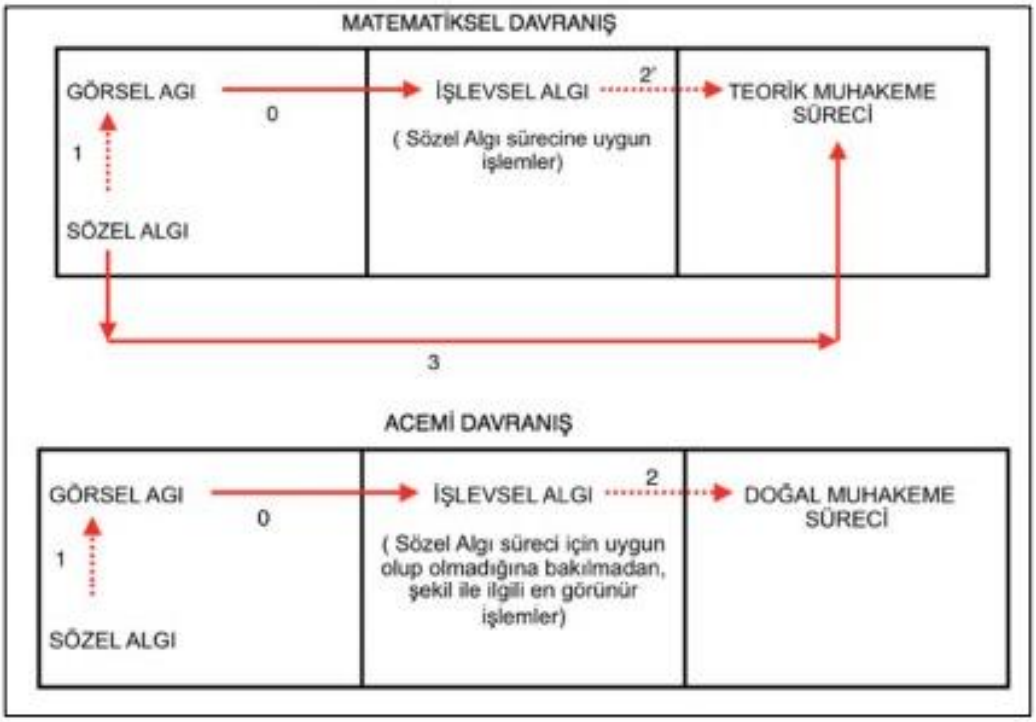
(3) tümdengelim yoluyla gerçekleştirilen teorik bir söylemsel süreç (teorik muhakeme)

Mantıksal zorunluluk deneyimi bu teorik süreçle yakından bağlantılıdır. Bu, tamamen sembolik bir kayıtta veya doğal dil kaydında gerçekleştirilebilir. Ancak bu iki kayıt, öğrenciler için ne aynı zorluğu ne de aynı önemi sağlamaz. İşlevsel algının herhangi bir söylemsel süreçten tamamen bağımsız olduğu daha önce ifade edilmişti. Bu nedenle görselleştirme, geometri araştırmaları için indirgenemez bir süreçtir (Duval, 1998). Ancak görselleştirme, doğal bir söylemsel süreç içine yerleştirilebilir (Şekil 1, 5(A)): "biçimsel akıl yürütme" olarak adlandırılan şey, yapılandırmacı bir sürecin bir tür kendiliğinden ortaya çıkması durumudur (Duval, 1998). Tam tersine, tamamen yapılandırmacı bir süreç, bazen kanıt için anahtar fikirleri verse bile teorik bir söyleme yerleştirilemez. Çünkü doğal muhakeme sürecinde varılan sonuçlar matematiksel ilkelerle desteklenmez aksine şekilsel temsillerden yararlanılarak çıkarımda bulunmaya çalışılır. Daha da önemlisi, doğal söylemsel süreç ile teorik söylemsel süreç arasında bir boşluk vardır (Duval, 1995). Geometri öğretiminin temel sorunlarından biri, çoğu öğrencinin bu boşluğu aşmasını sağlayamamaktır. Ve bazen öğretmenler, doğal söylemsel süreç ile teorik söylemsel süreç arasındaki çalışmanın önemli farkı konusunda net bir farkındalık elde edemeyebilirler (Duval, 1998). Öğretmenler geometride uygun öğretim stratejilerini bulmakta zorlanırlar (Sunzuma ve Maharaj, 2019). Geometri, geometrik düşünme ve görselleştirmeye, yani aktarılabilir anahtar becerilere odaklanan bir dizidir. Öğretmenlerin öğretim stratejileri ile öğrencilerin matematik yeterliliği arasında güçlü bağlantılar bulunur (Hodara, 2011). Öğrencilerin performanslarını geliştirmek için yeterliklerini geliştiren aktif yaklaşımlar arasında da güçlü bağlantılar vardır (Patadia, 2016; Takele, 2020).

Duval bilişsel ve algısal süreçler ile muhakeme türleri arasındaki etkileşime göre gerçekleşen öğrenci davranışlarını ikiye ayırmıştır: Bunlar acemi ve matematiksel davranıştır. Bu davranışlarda algısal süreçlerin etkileşimi şekil 6’da verilmiştir (Karpuz, 2016, s. 35).

Şekil 6

Bilişsel modelde öğrenci davranış biçimleri



Şekil 6 incelendiğinde, matematiksel davranışta işlevsel algının şeklin kavramsal tanımına uygun gerçekleştirilerek sözel algı süreci teorik muhakeme sonucuna ulaştırıldığı görülmektedir. Bu davranışta işlevsel algı teorik muhakemeye dolaylı olarak etki ettiğinden 2' kesik çizgi ile ifade edilse de teorik muhakeme sürecinde yararlanılacak tanım, teorem vs. seçme eylemi işlevsel algının görevidir. Bu da muhakeme sürecinde işlevsel algının kritik rolünü göstermektedir.

Acemi davranışta ise işlevsel algı kavramsal ifadelere bakılmadan gerçekleştirilerek doğal muhakemeye ulaşılabileceği görülmektedir (Duval, 1998).

2. 5. Geometrik Muhakemeyle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Mariotti ve Fishbein (1997), öğrencilerin geometrik muhakeme (GM) süreçlerinde şekil ile kavram arasında gerçekleşen etkileşimleri deneysel bir araştırma ile detaylı olarak ele almıştır. Çalışmada, öğrencilerin karar verme aşamasında geometrik nesnelere ilişkin geliştirdikleri veya sahip oldukları zihinsel şekli kullanmaları durumunda cevaplarının genelde yanlış olduğu belirlenmiş, ancak karar verme aşamasının/sürecinin kavram kontrolünde gerçekleşmesinde ise daha başarılı olduğu ifade edilmiştir. Çalışma, GM'nin kavram ile şekil arasındaki diyalektik etkileşimi temel aldığını ve öğrencilerin GM'de başarılı olabilmeleri için kavram ile şekli iyi bir şekilde entegre etmeyi gerektirdiği sonucuna ulaşmıştır.

Fischbein ve Nachlieli (1998), geometrik şekiller üzerinde kavramsal ve şekilsel bileşenler arasındaki etkileşimi, bireylerin matematiksel yeterlilik düzeyleri ve yaşlarına göre değerlendirmeye tabi tutmuşlardır. Katılımcılara şekilleri tanımlamaları, şekiller arasından paralelkenar olanları bulmaları, üçgenlerde yardımcı eleman tespiti (yüksekliği tanımlamaları ve çizmeleri), dik üçgenleri ayırt etmeleri vb. yeterliklerini gerçekleştirmeye yönelik problemler sorulmuştur. Katılımcıların çoğunluğunun prototip şekil üzerinde kavramları tanımlamaları ve çizmede başarılı oldukları belirlenirken, prototip olmayan şekillerde zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca matematiksel yeterliği yüksek olan katılımcıların problemde verilen şekil üzerinden kavram temelinde düşüncelerini ifade edebildikleri ve bir şekle sokabildikleri belirlenmiştir. Bu tip öğrencilerin karar verme aşamasında/süreçlerinde şekillere ait aksiyomların ve/veya tanımların (kısıtlamalar) etkili olduğu görülmüştür.

Benzer çalışmalarda genellikle katılımcılar dörtgenleri tanımlarken ve sınıflarken ilk örnek (prototip) şekilleri kullanmaya yönelmişlerdir. Matematik başarısı iyi olan öğrencilerin bile doğru tanımı bilmelerine rağmen dörtgenleri prototipleri ile tanıma davranışını sergiledikleri görülmüştür. Öğrencilerin bu davranışlarının, dörtgenlerin kapsayıcı ilişkilerini anlamalarında güçlüklere neden olduğu, onları kavram tanımlamalarında şeklin yönlendirdiği açıkça görülebilmektedir (Erdoğan ve Dur, 2014; Fujita, 2012; Güzeller, 2018; Horzum, 2018; Karpuz, Koparan ve Güven, 2014; Kozaklı Ülger ve Tapan Broutin, 2017; Özkan ve Bal, 2017; Öztürk ve Güven 2016; Türnüklü, Gündoğdu Alaylı ve Aktaş, 2013; Ubuz, 2017; Ubuz ve Üstün, 2004).

Pratt ve Davison (2003), derslerinde etkileşimli tahta kullanılmasının dörtgenlerin tanımının öğretilmesine olan etkisini araştırdıkları çalışmalarında etkileşimli tahtanın, öğrencilerin geometrik şekilleri görsel dönüştürmeleri için tasarlanmış görevleri başarılı olarak tamamlarken geometrik muhakemelerinde şekil ve kavramı entegre edebilmeyi teşvik edemediği belirlenmiştir. Buradan etkileşimli tahtanın, şekillerin kavramsal yönüne dikkat çekebilecek görevler için yeniden düzenlenmesi gerektiği ve karşılaştırmalı tanımları temele alan etkinliklerin gerçekleştirilmesi için kullanılması gerektiği sonucu ortaya çıkmıştır.

Walcott, Mohr ve Kastberg (2009) kuramsal temelini, iki farklı teori olan kavram imajı (Vinner) ve şekilsel kavramı (Fischbein) birbirine uyarlayarak geliştirdikleri “Dinamik Şekilsel Kavram” modele dayandırdıkları çalışmalarında öğrencilerin, öğrencilerin bazılarının dinamik şekilsel kavram geliştirdikleri diğerlerinin ise statik bir şekilsel kavram geliştirme eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Bu süreçte alanları ve taban uzunlukları aynı olan bir paralelkenar ile bir dikdörtgenin benzer ve farklı olan özelliklerini belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrenciler bir dikdörtgeni paralelkenar olarak sınıflayabilmelerine izin veren değişen seviyelerde doğru ve esnek ilk örnekler oluşturabilmişlerdir. Fakat bazen bu esnek ilk örneklerin yetersiz tanımlarla birlikte kullanımı öğrencilerin yanlış bir şekilde paralelkenarı dikdörtgen olarak sınıflandırmalarına sebep olmuştur. Sonuç olarak, katılımcıların şekilleri zihinsel olarak manipüle etmelerini sağlayan sezgi temelinde anlamalarında bir dinamik şekilsel kavram geliştirdikleri görülmüştür.

Geometrik muhakemeyi algısal süreçler üzerinden inceleyen birçok araştırmada öğrencilerin bir üst sınıfa geçerken algısal süreçlerinin genel olarak geliştiği ifade edilmektedir. Ayrıca öğrencilerin genel olarak yaptıkları hatalarının kaynağı olarak görsel algının baskın gelmesi düşünülmektedir. Buna ek olarak sözel-işlevsel algı ve sözel-sıralı algı arasında güçlü bir ilişki görülmüştür (Micheal, 2013).

Geometride teorik muhakeme sürecinin nasıl gerçekleştiğini ortaya koyan bir kuramsal çerçeve de Houdement ve Kuzniak'ın (2003) ifade ettiği geometrik paradigmalardır. Bunlar deneysel doğrulama ile başlayarak teorik muhakemeye doğru evrilen farklı düşünme süreçlerini ifade etmektedir. Bunlar doğal geometri, doğal aksiyomatik geometri ve formalist aksiyomatik geometridir (Dedeoğlu, 2016; Houdement ve Kuzniak, 2003). Bu bağlamda yapılan çalışmalarda lisenin ilk iki yılında öğrencilerin genel olarak doğal geometri paradigması içinde yer aldıkları lise üçüncü sınıfta bazılarının doğal aksiyomatik geometriye geçiş yapabildikleri ifade edilmiştir (Dedeoğlu, 2016; Micheal, 2013). Bu bağlamda 9. ve 10. sınıf öğrencilerinin sezgilerini kullanarak ve deneysel doğrulama ile çıkarımda bulundukları söylenebilir. Doğal geometri paradigmasında yer alan öğrenciler tümdengelimsel çıkarımda bulunamayacak, şekillerin görsel özelliklerine yoğunlaşarak sonuca ulaşmaya çalışacaktır. Bu süreçte şeklin geometrik araçlarla inşa edilmesi deneysel doğrulama için etkili bir adım olacaktır.

Duval'in bilişsel perspektifinden yapılan bazı araştırmalarda geometrik muhakemede sözel-işlevsel algı arasındaki koordinasyonun yeterince kurulamamasının teorik muhakeme sürecine geçişte engel teşkil ettiği görülmektedir (Llinares ve Clemente, 2014; Torregrosa ve Quesada, 2008).

Karpuz (2018) çalışmasında Duval'in bilişsel modeline uygun tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin teorik muhakeme ve şekle bakma süreçlerinin gelişimine katkısını incelemiştir. 9. sınıf öğrencileriyle yürüttüğü çalışmasında bir sınıfta geleneksel öğrenme ortamında, diğer sınıfta tasarlanan öğrenme ortamında ders işlenmiştir. Sonuç olarak tasarlanan öğrenme ortamının öğrencilerin teorik muhakeme sürecinin gelişimine olumlu katkısı olduğu görülmüştür. Fakat algısal süreçlerin gelişimi anlamında iki sınıf arasında bir fark oluşmamıştır. Bu durum teorik muhakemenin algısal süreçlerin gelişimini baskı altına aldığı ve bu süreçlerin aynı zamanda geliştirilmemesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Kızıltoprak (2020) ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin geometrik muhakeme süreçlerini incelemiştir. Bu bağlamda öğretim esnasında öğrencilerin bilişsel ve algısal süreçleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğretim sonunda Duval'in algısal süreçlerine uygun hazırlanan öğrenme ortamının öğrencilerin sözel algı kavrama türüne yaklaştırdığı görülmüştür. Yapılan etkinliklerin öğrencilerin bilişsel süreçlerini açıkça ortaya çıkardığı ifade edilmiştir.

Mutluoğlu ve Erdoğan (2020) yaptıkları çalışmada 6. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki geometrik muhakeme süreçlerini Şekilsel Kavram Teorisi çerçevesinde incelenmişlerdir. Bu kapsamda 5 öğrenci ile görüşmeler yapmış ve muhakeme süreçlerini analiz etmişlerdir. Araştırma sonucunda başarı düzeyi düşük olan öğrencilerin prototip şekil etkisi altında geometrik muhakeme gerçekleştirdikleri ifade edilmiştir. Başarı düzeyi orta ve iyi olan öğrencilerin ise genellikle kavram kontrolünde muhakemelerini yürüttükleri, zaman zaman prototip şekil etkisi altında kaldıkları da görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin cevaplarını açıklarken gerekçelendirme noktasında üst düzey muhakeme sergiledikleri de ifade edilmiştir.

2. 6. Geometrik İnşa ve Muhakeme ilişkisi

Geometride inşanın özel bir anlamı vardır: açıları veya uzunlukları ölçmeden sadece pergel ve cetvel kullanarak geometrik şekillerin çizilmesidir (Hartshorne, 2013). Geometrik yapılar, tarih boyunca matematiğin popüler bir parçası olmuştur. Öklid hala geçerliliğini koruyan geometri referansı olarak kabul edilen "Elementler" adlı kitabında bunu belgelemiştir. Geometrik inşalar geniş ve kapsamlı bir şekilde kullanırsa geometri çalışma alanının bir parçası haline gelebilir (Cohen, Kouropatov, Ovodenko, Hoch ve Hershkovitz, 2017). Geometrik yapılar aynı zamanda geometrik kavramlar hakkında fikir verir ve bize doğrudan ölçümün uygun olmadığı durumlarda şekiller çizmemiz için araçlar sağlar (Hartshorne, 2013). Geometrik inşanın geometrik içerik bilgisini, geometri ispatları için gerekli olan tümdengelimli bir düşünme yolu ile bütünleştirdiği iddia edilmektedir (Cohen ve diğerleri, 2017).

Geometri, gerçek hayattaki önemli faydaları ve uygulamaları dikkate alınarak dünyadaki okul müfredatlarının çoğunda yer almaktadır. Geometri öğrenimi ile akıl yürütme, ispatlama, problem çözme, iletişim kurma, bağlantı kurma, yaratıcı ve yenilikçi düşünme, sorgulama gibi temel beceriler geliştirilebilir (MEB, 2018). Bununla birlikte, geometri öğretmek ve öğrenmek, öğretmenler ve öğrenciler için hala zorluklar teşkil etmektedir. Geometride öğrenme sürecini anlamak, daha etkili geometri eğitimi hakkında fikir verebilir. Geometri öğreniminin altında yatan süreçleri ortaya çıkarmak için üç teorik çerçeve önerilmektedir (Arıcı ve Aslan Tutak, 2015). Duval (1998)'in geometrik akıl yürütme modeli, geometri öğrenmede bilişsel boyutlara odaklanır. Duval (1998)'e göre, üç tür bilişsel süreç; görselleştirme, yapılandırma ve akıl yürütme, geometrik düşünmeyi muhteva eder. Öte yandan

Smith (2010) geometrik akıl yürütmeyi kanıtlama, gerekçelendirme ve tartışmadan oluşturmuştur. Bir başka çerçeve olarak, van Hiele modeli, geometrik düşünmeyi beş hiyerarşik düzeyden meydana getirir. Van Hiele modelinde geometrik düşüncenin gelişimsel yönü vurgulanmıştır. Van de Walle (2010), geometrik deneyimi van Hiele modelinin önemli bir parçası olarak düşünmüştür. Öğrenci çeşitli anlamlı geometrik deneyimler biriktirdikçe, geometrik düşünme ilerleyebilir.

Hershkowitz (1998), geometrinin üç tür bilişsel süreci içereceğini tanımlamaktadır: görselleştirme, inşa etme ve akıl yürütme. Bu üç kavram arasındaki döngü, öğrenci eylemlerinin ve gözlemlenen sonuçların temsil edilen matematiksel nesnelerle ilişkili olması bakımından geometrik muhakeme sürecinin yansıtılmasında bir model gibi çalışabilir.

Pedagoji perspektifinden, Posamentier (2000) geometrik inşaları "birçok farklı geometrik kavramın ve ilişkinin güçlendirilmesi ve problem çözme becerilerinin geliştirilmesi" olarak görmektedir (Posamentier, 2000, s. 1). Bu tür uygulamalı deneyimler, özellikle öğrencilerin daha derinlemesine düşünmelerini gerektirdiğinden öğrencilerin matematiğe olan ilgisini de artıracaktır (Ameis, 2005).

Etkili geometri dersleri tasarlanarak öğrencilerin geometrik deneyimleri artırılabilir. Geometri öğretiminde manipülatiflerin kullanılması öğrencilerin geometriyi anlamalarını sağlayabilir (Clements ve Battista, 1992; Jones, 2002).

Manipülatifler, ampirik düşünmeden daha soyut düşünmeye geçişe izin veren uygun bir bağlam oluşturarak öğrencilerin geometrik akıl yürütme becerilerini geliştirmede araçsal bir rol oynayabilir (Arıcı ve Aslan Tutak, 2015). Bu bağlamda çeşitli araçlar geometri öğretiminde denenmiştir. Ancak geometrik muhakemenin oluşturulmasında geometrik inşa temel teşkil etmektedir. Bununla birlikte diğer dinamik yazılımlar, web teknolojileri, origami ve çeşitli etkinlikler muhakemenin gelişimi için bir araç rolünde değerlendirilmektedir. Coad'ın (2006) ve Olson'un (1975) önerdiği gibi, Öklid geometrisinin belirli öğeleri origami yoluyla oluşturulabilir (örneğin açıortaylar, dik açıortaylar, orta noktalar, yükseklikler). Ancak kavramlar arasındaki ilişkilerin anlamlandırılması ve ilk öğrenme ancak inşa süreci ile mümkündür. Öğrenciler araçlar tarafından oluşturulan yapılar ile geometrik bilgilerin görselleştirilmesini ilerletebilirler. Bu gelişmiş görselleştirme, öğrencilerin geometrik ilişkilerle ilgili varsayımları formüle etmelerini ve değerlendirmelerini sağlayabilir. Görselleştirmenin önemi daha önce yapılan çalışmalarda belirtilmiştir (Delice ve Taşova, 2011; Tekin, 2007; Yolcu ve Kurtuluş, 2010). Delice ve Taşova'nın (2011) vurguladığı gibi matematikte görselleştirme esastır ve görselleştirme öğrencilerin soyut geometrik kavramlarda düşünmesini kolaylaştırır. Uzamsal görselleştirme genellikle uzamsal yeteneğin bir bileşeni olarak kabul edilir. Uzamsal yetenek, şeyleri ve bileşenlerini zihinsel olarak manipüle etmekle ilgilidir (Olkun, 2003) ve bilim, teknoloji, mühendislik ve matematik gibi farklı alanlar için kritik olarak kabul edilir.

2. 7. Geometri Öğretiminde Geometrik İnşa ve Yapılan Çalışmalar

Araştırmanın merkezinde geometri öğrenme süreçleri irdelenmektedir. Geometri öğretiminin, problem çözmenin geliştiği bir zamanda okul müfredatıyla belirsiz bağlantısı ile birlikte keşfedici doğası, geometri öğretiminin öğrenme stratejileri oluşturmak için bir araç olduğu görüşlerini desteklemektedir (Laborde, 2005). Özellikle, nasıl öğrenileceğini öğrenmek üzerine odaklanılmış ve PME (Psychology of Mathematics Education) üretken teori oluşturma metodolojilerine vurgu yapmaktadır. Birçok araştırmacı bir araç ile (geometrik inşa süreci olabilir) öğrenmeyi yeni bir tür öğrenme süreci olarak algılamış ve bunun sonucunda nitel, aydınlatıcı araştırma yöntemleri paradigması (yani araştırmacı için gözlemci rolünü benimseme) uygun görülmüştür (Hoyles ve Noss, 1987).

NCTM'ye (2000) göre, geometrik inşa görevleri öğrencileri "çeşitli araçlar kullanarak iki ve üç boyutlu geometrik nesnelerin temsillerini çizmeye ve inşa etmeye" (s. 308) ve "problemlere ilişkin sağlam anlayışlar geliştirmek için bir yol olarak matematiksel fikirleri tanımaya ve birleştirmeye" teşvik edebilir (s. 354). Bu yapı alternatiflerinin kullanımı hem klasik geometri konusuna yeni bir bakış açısı sağlar hem de klasik araçlarla birlikte geometrik kavramların derinlemesine anlaşılmasını destekleyen farklı matematiksel fikirleri teşvik eder ve farklı fikirler arasındaki bağlantıları vurgular (Cheung, 2011; Pandiscio, 2002).

Öğrencilerin geometrik fikirleri kullanma, eldeki görev için önemli olanları ayırt etme, ardından genelleme ve diğer bağlamlarla sentezleme süreçleri bilişsel olarak ilişkili görülmüştür (Hoyles ve Noss, 1987). Bu sebeple öğrencilerin geometrik şekilleri inşa etmeleri ve bu sürecin bilişsel analizi oldukça değerli verilerin ortaya çıkarılmasına olanak sunacaktır.

Literatür incelendiğinde yapılan birçok araştırmada geometrik inşa etkinliklerinin öğrencilerin geometrik düşünmelerine katkı sağladığı sonucuna ulaşılmıştır (Cheung, 2011; Güven, 2006; Napitupulu, 2001; Uygun, 2016). Benzer şekilde Gür ve Kobak Demir (2017) öğretmen adaylarının geometrik inşa faaliyetlerinin geometrik düşünme düzeylerini artırdığını ifade etmişlerdir.

De Villiers (2003), öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerinin Seviye 2'den Seviye 3'e geçişlerinde geometrik inşa faaliyetlerinin bir öncül ile sonuç arasındaki farkı ve bunların nedensel ilişkisini anlamaya yardımcı oldukları için; başka bir deyişle, eğer-ise ifadesinin mantıksal yapısından dolayı psikolojik olarak son derece gerekli olduğunu vurgulamaktadır.

Belki de geometrik inşa aynı zamanda tahmin gücümüzü geliştirmek için kullandığımız bir araçtır. İnşa süreci boyunca öğrenciler neyin mümkün olduğunu hayal etmek için eğitilir. Muhtemelen öğrencilerin karşılaştığı başarısızlıklar inşa sürecini sağlıklı kılmaktadır. Başarısızlık zamanlarında, öğrenciler neyin yanlış gittiğini değerlendirmeli ve olanları yeniden düşünmeli ve sorunu çözmek için başka bir yol önermelidir (Johnston-Wilder ve Mason, 2005). Öklid inşalarında tanımlardan teoremlere geçiş, temelde yapılandırmacı bir yaklaşıma dayanmaktadır. Öğrencilerin öğrendikleri Öklid geometrisinin yapıcı bir yaklaşıma dayanmasına ve öğrencilerin öngörü ve mantıksal düşünme becerilerini geliştirebilecek avantajlarına rağmen geometrik inşanın mevcut müfredatlarda bir ölçüde ihmal edilmiş olması oldukça ironiktir (Cheung, 2011). Bu durum aslında öğretmenlerin alan bilgisinin yeterli olmadığından hatta birçok öğretmenin Öklid inşalarından haberdar olmadıklarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Nitekim Erduran ve Yeşildere (2010) ve Öçal ve Şimşek (2017) çalışmalarında öğretmenlerin geometrik inşa öğretimi ders süreçlerini incelemişlerdir. Sonuç olarak öğretmen merkezli dersler işlendiği, inşa adımlarının ezbere yapıldığından geometrik düşünme gerçekleşmediği, dolayısıyla matematiksel araçların etkili kullanılamadığı görülmüştür. Benzer şekilde Karakuş (2014) öğretmen adaylarının geometrik inşa etkinliklerine yönelik görüşlerini incelemiştir. Öğretmen adaylarının geometrik inşaya ilişkin olumlu düşünceleri olmasına karşın geçmiş deneyimlerinde bu tür etkinliklerle pek karşılaşmadıklarını bu yüzden alan bilgilerinin yetersiz olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin inşa sürecinde atılan adımların gerekçelerinin açıklanması geometrik muhakeme açısından anlamlı deneyimler kazanmaları için öğretmenlerin de bu konuda rehber çalışmalara ihtiyaç duyduğu söylenebilir.

Öğrenciler, güven eksiklikleri ve yetersiz deneyimlerini içeren bir dizi nedenden ötürü geometrik ispat oluşturma konusunda oldukça isteksizdir. Geometrik yapıların inşası, öğrencilerin yapılar için gerekli adımları düşünmelerini gerektirdiğinden, etkinlikler öğrencilerin geometrik ispat yazma becerilerini geliştirmelerine yardımcı olabilir.

Uygun (2016) pergel ve cetvel yardımıyla üçgenlerin inşasına yönelik bir öğrenme yörüngesi tasarlamış ve öğretmen adaylarına uygulamıştır. Sonuç olarak öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeylerinde ve alan bilgilerinde olumlu gelişme sağlandığı görülmüştür.

Geometrik yapıların pedagojik değeri hep kabul görmüştür (Polya, 1945). Bununla birlikte Tam, Chen ve Tso (2012), öğrencilerin geometrik inşa süreçlerini ve bunların altında yatan geometrik özellikleri ilişkilendirmeyi genellikle zor bulduklarını ifade etmişlerdir. Ortaokulda öğrencilerin erken yaşta geometrik inşa etkinlikleri ile tanışmaları ve deneyimlemeleri ispat ve muhakeme becerilerini geliştirmede etkili olacaktır. Öğrencilerin katı olmayan kanıtları ortaya koymalarına izin vererek şunları önermektedir: "Daha fazla öğrencinin ispat kavramını anlamasına ve erken öğrenme aşamalarında yabancı bir dilin kısıtlamaları olmaksızın kendi kanıtlarını oluşturmasına olanak sağlar. Daha resmi bir tarzın varlığının farkına varmak, bazı Öklid kanıtlarına ve müfredatta matematiksel gerçeklerin kanıtlarına maruz bırakılarak sağlanabilir. Bu nedenle, kendi kanıtlarını anlamayı ve yaratmayı öğrenirken aynı zamanda, bazı öğrenciler biçimsel matematiksel kanıtların dilini de deneyimleyebilir (Waring, 2000, s. 3).

Chikwere ve Ayama (2016) 6. sınıf öğrencileri üzerinde yürüttükleri çalışmalarında geometrik inşa görevlerini soyut olarak öğretilen öğrencilerle uygulamalı olarak öğretilen öğrencilerin performanslarını incelemişler, pratik yöntemle öğretilen öğrenciler, soyut yöntemle öğretilenlere kıyasla son testte çok daha iyi performans göstermişlerdir. Sonuç olarak, uygun metodoloji ve öğretme ve öğrenme materyallerinin birlikte kullanılması öğrencilerin geometrik yapıyı takdir etmesini ve başarıya ulaşmasını sağlayacağı belirtilmiştir.

Bu manada geometrik yapıların öğrencilerin kendi oluşturdukları uygun modellerle inşa ettikleri, inşa adımlarının her birinin matematiksel anlamının sorgulandığı ve ilişkilendirildiği bir öğrenme ortamı sağlanması öğrencilerin üst düzey düşünme becerilerini harekete geçirecektir. Yapılan araştırmalar, ortaokul öğrencilerinin genellikle van Hiele 2. ve 3. seviyeler arasında olduğunu, yani geometrik şekillerin özelliklerini tartışabildiklerini ve belki de şekilleri özellikleri aracılığıyla ilişkilendirebildiklerini fakat ispat üretmek veya anlamak için bir dizi çıkarım yapamayacaklarını göstermiştir. Seviye 2'deki öğrenciler için, eğer öğretmenler neden çalıştıklarına dair bazı gerekçeler olmadan inşa prosedürlerini yalnızca bir dizi adım olarak bırakmayacaklarsa, öğretmenlerin resmi kanıtlar dışında nedenler sağlamanın bazı yollarını bulması gerekecektir.

Duatepe Paksu ve Bayram (2019) yaptıkları çalışmada 6. sınıf öğrencilerinin paralellik ve diklik durumlarını belirleme ve çizme durumlarını incelemişlerdir. Çalışma sonucunda paralellik ve diklik durumlarını hem belirleme hem de çizmede birçok öğrencinin zorlandıkları görülmüştür. Özellikle dik ve yatay durumlarda paralellik belirlemede daha az sıkıntı yaşanırken eğimli durumlarda daha fazla zorluk yaşandığı görülmüştür.

Lim (1997) çalışmasında kanıtlar kullanılmadan geometrik şekillerin (özel üçgenler ve dörtgenler) özelliklerinden yararlanarak geometrik inşa adımlarını açıklayan öğretim dizisi tasarlamıştır. Bu sayede Öklid kanıtlarını kullanmadan, küçük bir konuya yaklaşımdaki bir değişikliğin, daha yüksek dereceli zihinsel aktiviteleri nasıl destekleyebileceğini ve konular arasında nasıl bir ilişki sağlayabileceğini, böylece birleşik bir geometrik yapının oluşturulmasına nasıl katkıda bulunabileceğini göstermektedir.

Bu anlamda geometrik inşa becerilerinin öğretiminde 8. sınıfların tercih edilmesi, hem yapılan inşaların adımlarını üçgen ve dörtgen özelliklerinden yararlanarak açıklamada bu yaş grubuyla çalışmanın daha anlamlı olacağı hem de geometrik muhakemeye yönelik bilişsel eylemleri açığa çıkarmada daha fazla katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Geometrik inşanın fiziki aletlerle mi yoksa bilgisayar yazılımıyla mı yapılması gerektiği sorusu tartışılmış ve bunun üzerine araştırmalar da yapılmıştır. Tüm bunlardan bağımsız bir husus olarak öğrencilerin ispat süreçlerini (teknoloji olsun ya da olmasın) teşvik eden şekillerde geometrik yapıların kullanımını bilgilendirmek için kullanılabilecek yol gösterici bir ilke sağlamanın önemi vurgulanmıştır (Fujita ve diğerleri, 2014). Öğrenciler 'A ve B verilen iki noktadan geçen bir kare oluşturun' gibi zorlu geometrik inşa problemlerini çözdüklerinde, öğrencilerin gerçekleri, nedenleri ve ilişkileri keşfetmeleri beklenir. Hangi koşullar bir şekil oluşturmak için gereklidir; inşa yöntemleri, yöntemlerinin doğru olmasının nedenleri; varsayım ve sonuç arasındaki ilişkiler incelenmesi gereken konulardır. Çiftçi ve Tatar (2014) çalışmalarında geometrik inşada pergel-cetvel ve dinamik yazılım kullanımının akademik başarıya etkisini incelemiştir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının pergel-cetvel ya da dinamik geometri yazılımı (DGY) kullanılmasının başarı açısından anlamlı bir fark oluşturmadığı, iki yöntemin de akademik başarıya olumlu yönde katkısı olduğu görülmüştür. Araştırma sonunda pergel cetvel kullanan öğretmen adayları pergel-cetvel ile çizim yapmanın öğrenmeyi kalıcı ve zevkli hale getirdiğini ifade ederken, DGY kullanan öğretmenler DGY'nin anlamlı öğrenmede etkili olduğunu ifade etmişlerdir. Köse ve diğerleri (2012) ise aynı şekilde pergel-cetvel ile DGY kullanımını karşılaştırmış, sonuç DGY'nin muhakeme sürecinde daha başarılı olduğu şeklinde çıkmıştır. Bir diğer çalışmaya baktığımızda Aktaş ve Mumcu (2019) öğretmen adaylarının kağıt üzerinde ve interaktif beyaz tahta ile geometrik yapılar oluşturma konusundaki görüş ve deneyimlerini incelemiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının interaktif beyaz tahta üzerinde geometrik yapılar kurarken daha fazla sorun yaşadıkları görülmüştür Ayrıca öğretmen adayları etkileşimli tahta üzerine geometrik yapılar kurmanın duyuşsal öğrenme alanında anlamlı olduğu, kağıt üzerinde pergel-cetvel inşasının ise bilişsel öğrenme alanına daha fazla katkı sağladığı yönünde görüş bildirmişlerdir.

Kuzle (2013) araştırmasında Amerika ve Almanya'daki öğretmenlerle farklı araçlarla geometrik inşaya yönelik öğretim deneyi gerçekleştirmiştir. Öğretmen adaylarının tamamının geometrik yapıları inşa ederken pergel ve cetvele başvurdukları görülmüş ve geometrik düşünmeye ve şekiller arasında ilişki kurmaya sağlayacağı katkının önemini vurgulamışlardır. Ayrıca DGY'lerin geometrik inşada ve doğrulama sürecinde kullanışlı oldukları ve mutlaka sınıf ortamında kullanılması gerektiği vurgulanmıştır.

Yapılan birçok çalışmada ortaokul ve lise öğrencilerinin hatta öğretmen ve öğretmen adaylarının bile geometrik inşaları gerçekleştirmede zorluk yaşadıkları görülmüştür. Bu nedenle öğrencilerin erken yaşta geometrik inşalarla tanışmaları formal düzeyde ispat geliştiremeseler bile doğrulama ve dayanak sunma konusunda fırsatlar tanınmalıdır (Fujita ve diğerleri 2014).

Müfredat incelendiğinde 6. sınıftan itibaren temel geometrik çizimlere ait kazanımların pergel-çizgeçle yürütülmesi öğrencilerin erken yaştan itibaren güçlü bir kavramsal alt yapı oluştumasına olanak sağlayacaktır. Bu durum öğrencilerin geometrik inşaya yönelik bilişsel gelişimi için oldukça önemlidir.

Geometrik bir şekil oluşturmak, DGY'lerin dijital araçlarını kullanarak şeklin temel özellikleri sürükleme altında değişmez kalacak şekilde bir bilgisayar ekranında şekli çizmek anlamına gelir. Dinamik Geometri Eğitimi'nin ortaya çıkışı, özellikle geometrinin öğrenilmesi için önemli olan, biçimsel temsilin atlanmasına ve dinamik grafiklere erişime izin vererek matematiksel fikirlere erişim sağlamıştır. Ancak bu, formalizmin yalnızca kullanımı yoluyla soyut matematiksel anlamı iletebilen yerleşik matematikçiler için yararlı olabileceği anlamına gelmez (Laborde, 2005). Dijital teknoloji, formalizmi atlamak için araçlar sağladığı gibi, formalizmin öğrenciler tarafından kullanılma biçimini dönüştürmek için araçlar da sağlayabilir. DGY'nin temsili repertuarları ile bağlantılı olarak programlanabilirlik ve sembolik ifade sağlayan teknolojiler, bu nedenle, gelişen teorik çerçeveler içindeki geometrik öğrenme araştırmalarında düşünülebilir (Clements ve Battista, 1992; Clements ve Sarama, 2004; Kynigos ve Argyris, 2004; Kynigos ve Psycharis, 2003; Sherin, 2002;). Bu bakımdan "Geometrik muhakeme sadece tek başına teknoloji ile karşılanabilir mi?" sorusuna cevap vermek gerekir. Dinamik geometri yazılımı kullanıcının nesneleri algısal olarak değil, geometrik olarak çizmesini sağlar. Örneğin, dairenin teğeti, dairenin yarıçapına dik olma özelliğine sahip bir doğru olarak çizilebilir. Teğet çizginin yazılımda çizimi diklik ilişkisine dayandığından, bu ilişki daire dönüştürüldüğünde, çemberin merkezini yeni bir konuma sürüklerken veya yarıçap noktasını sürüklerken, böylece yarıçapın boyutunu değiştirirken teğet noktası korunacaktır. Bunu yerleşik bilişin bir örneği olarak söyleyebiliriz (Lave, 1988). Öklid geometrisini inşa edenler için, dinamik geometri yazılımının kullanımından büyük ölçüde etkilenen aşağıdaki formülasyonu tanımayacağı ifade edilmiştir (Pratt ve Ainley, 1997):

Basit elementler, bir sistemin belirli öğeleri sağlanır (aksiyomatik) ve yeni öğeler oluşturmak için verilen işlevler kullanılarak bunların üzerine inşa edilebilir. Ancak temel bir unsur silinirse, o zaman tüm bağımlı yapı sağlam olmaz. Öğrenciler bu unsurlarla ekranda çizimler, işaretler olarak karşılaşacaklardır. Öğrencilerin bu unsurları nasıl anlamlandırdıkları;

özellikle teorik dinamik geometri yazılımı ile ilişkilendireceğimiz nitelikleri anlayıp anlamadıkları, yoksa geometrik bir kavramın sadece bilgisayar ekranındaki bir simgeden mi ibaret olduğu düşünülmesi gereken önemli bir konudur. DGY'lerin birçoğunda dikme çizme gibi temel geometrik çizimleri sağlayan hazır butonlar olduğundan özellikle ortaokul döneminde öğrencilerin bu butonlar arkasındaki geometrik ilişkiyi anlamada zorluk çekeceği açıktır (Deniz ve Kabael, 2021). Bu sebepten DGY'lerin birçok kavramı pekiştirmek için oldukça etkili olmasının yanında kavramın zihindeki ilk inşasını anlamlandırması sürecinde yeterli olmadığı düşünülmektedir.

DGY'lerin geliştirilmesi, eğitimciler arasında geometriye olan ilgiyi yeniden uyandırmıştır (Pratt ve Ainley, 1997). Bu, öğrencilerin ve öğretmenlerin bu tür etkinlikleri destekleyecek çok az kültüre veya geometrik bilgiye sahip olduklarında bu tür yazılımlarla nasıl çalışabilecekleri sorusunu gündeme getirebilir. Öğrencilere üzerinde çalışabilecekleri standart geometrik problemler vermekten başka, dinamik geometri yazılımının kullanımına giriş noktaları tasavvur etmek zordur. Bununla birlikte, öğrenciler bu tür sorunlarla ilerlemek için stratejilerden yoksun olabilir ve bu sorunlarla ilişkilerinin uzak olması muhtemeldir. Bu sorunlar, ortaokul aşamasında hissedilir (Pratt ve Ainley, 1997):

- Çocukların kavramsal yapıları hala gelişimlerinin ilk aşamalarındadır ve geometri anlayışları, daha soyut geometrik ilişkilerin herhangi bir takdirinin aksine, şekil ve uzay deneyimi ile sınırlıdır;
- Ortaokulda pedagojik uygulama, nispeten çocuk merkezli ve keşfedicidir, çocukların kendilerine verilen görevleri sahiplenmelerine olanak tanıyan giriş noktalarına ihtiyaç vardır. Aslında, bu tür görevlerin çocuklar tarafından kendi amaçlarına göre şekillendirilebilecek şekilde tasarlanması yerinde olacaktır.

Simpson ve Tall (1998) pasif, organizasyonel ve üretici figürler arasında ayrım yaparlar, aynı sınıflandırmayı zihinsel imgeler için de kullanabiliriz. Pasif bir imaj sadece bir kavramla ilişkilendirilebilirken, örgütsel imaj bilginin kompakt bir şekilde temsil edilmesini sağlar. Alternatif olarak, öğrenci tarafından öğrenmelerine rehberlik etmek için üretici bir görüntü kullanılır ve bu kavramsal veya resmi olarak üretken olabilir. Geometride, düzgün bir beşgenin birçok öğrencinin görselleştirdiği pasif görüntüsü, beş kenarlı herhangi bir şekil olarak beşgen kavramının gelişimini engelleyebilir. Öte yandan, dinamik bir geometri paketinde olduğu gibi "sürüklenen" nesnelerin görüntüleri, bu kavramsal gelişimi artırabilir ve dolayısıyla kavramsal olarak üretken olabilir. Resmi olarak üretken görüntüler şunları içerir: Pisagor Teoreminin bir "kelimesiz kanıtı", resmi bir kanıtı yönlendirmek için kullanabileceğimiz görselleştirme veya daha resmi bir yapı oluşturmak için kullanılan görselleştirilmiş bir "taslak".

Özetle geometrik inşa süreci öğrenci zihninde bir şeklin yapılandırılma süreci ile eşgüdümlü olarak ilerlediğinden dolayı kavramın inşa edilmesinde önemlidir, dinamik yazılımlar ise kavramın inşa sürecinden sonra kavramın değişmez veya değişken özelliklerinin keşfedilmesi için önemli avantajlar sağlamaktadır. Sonuç olarak bir geometrik kavramın zihinsel yapılandırılma süreci pergel ve çizgeçle geometrik inşa ile başlamalı ve kavramın diğer kavramlar ve kendi içindeki görsel ilişkileri dinamik yazılımlar ile pekiştirilmelidir. Bilgisayar tabanlı matematiksel öğrenme ortamlarında bulunan dinamik diyagramların matematiksel muhakeme üzerindeki etkisini anlamak hala tartışılan bir konudur (Jones ve Bill, 1998). Bu tartışmanın ana konusu “ne tür akıl yürütme süreçleri için ve ne tür öğrenme durumlarında, diyagramlar ve/veya görsel imgelerin özellikle yararlı olduğunu bulmak üzerinedir.

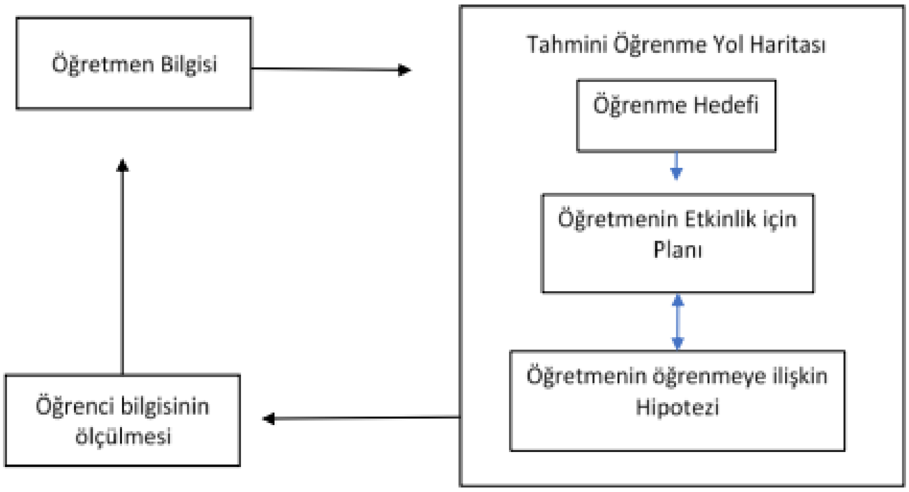
2. 8. Öğrenme Yörüngeleri

Öğrenciler, öğrenme ve gelişmede doğal gelişimsel ilerlemeleri takip ederler. Basit bir örnek olarak, artan hız ve el becerisiyle emeklemeyi, sonra yürümeyi, ardından koşmayı, zıplamayı ve zıplayarak koşmayı öğrenirler. Bunlar, hareketin gelişimsel ilerlemesindeki seviyelerdir. Çocuklar matematik öğrenmede de doğal gelişimsel ilerlemeleri takip eder, matematiksel fikirleri ve becerileri kendi yollarıyla öğrenirler.

Tahmini öğrenme yörüngesi matematik öğretim döngüsü planlanırken bir çatı olarak incelenebilir, bu teorik çatı yapılandırmacı kuramın ilkeleri ve standartları dikkate alınarak kurgulanan ders üretim süreci olarak görülmektedir (Gürbüz, 2021). Bir öğrenme yörüngesi, öğretime neler eklendiğini açıklamaya yardımcı olmaktadır. Ayrıca öğrenci davranışlarını hedef kavramla ilişkilendirerek öğrencilerin basit anlayışlardan daha karmaşık anlayışlara geçerken karşılaşabilecekleri simge ve engelleri tasvir eder (Confrey ve Maloney, 2015). İyi bir matematik eğitiminin üç bileşeni (Zembat, 2016); matematiğin kendisi (matematik kavramların iyi anlaşılması), öğrenim (bu kavramların öğrenimi) ve öğretimdir (kavramların başkasına öğretimi). Simon (1995) bu bileşenleri birbiri ile ilişkilendirerek matematik öğretim döngüsü adını verdiği bir teorik çatı oluşturmuştur.

Şekil 7

Tahmini öğrenme yörüngesinde matematik öğretim döngüsü



Simon (1995) ilk olarak öğrencilerin öğrenirken izledikleri olası yörüngeler olan tahmini öğrenme yörüngelerini önermiştir. Bu yörüngeleri tahmini olarak adlandırmanın nedeni, farklı başlangıç noktalarından beklenen öğrenme hedefine doğru takip edilen öğrencilerin neler yapabileceklerinin önceden bilinmemesidir. Bununla birlikte, son araştırmalar, öğrencilerin bilişsel gelişimini temsil eden bir öğrenme yörüngesinin doğrusal olmadığı gibi rastgele de olmadığını bulmuştur. Öğrenme yörüngeleri, öğrencilerin ilk matematiksel fikirlerini resmi kavramlara dönüştürdüklerinde izledikleri en olası adımları temsil eder. Her öğrenci için birçok öğrenme yörüngesi tanımlanmıştır (Maloney ve Confrey, 2010). Amerika Birleşik Devletleri'ndeki Ulusal Araştırma Konseyi'ne göre, bir öğrenme yörüngesi, öğrencilerin nasıl öğrendiği hakkında karmaşık bir düşünme biçimidir ve bu öğrenmenin gelişimini açıklama eğilimindedir (Council, 2007). Öğrenme yörüngeleri, öğrencilerin bilişsel yasalarının gelişimi ve ilgili bilgi ve beceri gelişiminin tasarımı ile yakından ilişkilidir. Öğrencilerin bilişsel yasalarını sıkı bir şekilde takip eden bir öğrenme yol haritasıdır. Bir öğrenme yörüngesinin hipotezi, grup öğrenme bilincinin bireysel öğrenme davranışına içselleştirilmesinin bir sonucu olan, grup öğrenme bilincinin öğrenme sürecinde oluşan bilişsel yapı ve bilişsel düzen ile öğrenme dizisidir. Bir öğrenme yörüngesi, öğrencilerin öğrenmesinin farklı başlangıç noktalarına, süreçlerine ve taşıyıcılarına odaklanır. Öğrenme yörüngeleri oluşturulurken öğrencilerin kavramları anlamalarının "önce kolay, sonra daha zor" sırasını takip ettiği varsayılır. Öğrenciler önce nitelik hiyerarşisindeki temel niteliklerde uzmanlaşacak, ardından daha zor, daha yüksek dereceli niteliklerde ustalaşmaya yönlendirilecektir. Bu nedenle, düşük seviyedeki nitelikler kolay olmalı ve yüksek seviyedeki niteliklerde ustalaşmak zor olmalıdır. Farklı bilgi durumlarının küme analizi yoluyla, her ülke için öğrencinin öğrenme yörünge haritası, farklı bilgi durumları arasındaki dahil etme ilişkisine göre çizilebilir. Daha sonra farklı bilgi statüsüne sahip öğrenciler haritada farklı öğrenme yörüngeleri seçebilirler. Birinci dereceden öğrenme yörüngesi ilk olarak kabul edilir. Yani, öğrencilerin öğrenmeleri bir tür yeterlilik elde etmek için her seviyeye göre geliştirilir. Daha sonra ikinci dereceden yörünge, bir bireyin birinci dereceden yörüngeye sahip olmadığı öncülüne göre düşünülür.

Öğrenme yörüngesi uygulanırken dikkat edilmesi gereken durumlardan ilki öğrencinin sorulan problemin üstesinden gelememesidir (Gürbüz, 2021), öğrenci matematiksel problemi çözdüğü zaman, kendisi için büyük bir eğitsel ilerleme sağlar. Bu, öğrencinin Simon (1995)'un anlayışa ilişkin işlemsel tanım olarak gördüğü zorlukların üstesinden geldiği anlamına gelir. Buna ek olarak, onun için, anlayış, veri toplama ve hipotez oluşturma sürekli bir süreçtir. Öğrenciler matematiği öğrenince, öğretmen öğrencilerin matematiksel düşüncesini öğrenir ve öğretmen matematiği öğrenmeye devam eder (Gürbüz, 2021). Ancak bu yapının geliştirilmesine ihtiyaç olduğunu ifade eden, Gomez ve Lupianez (2007)'e göre öğrenme sürecinin bileşenleri ve görev dizaynı için daha pratik bir tasarım gereklidir. Simon (1995)'e göre öğretmen bilgisi döngünün kritik bileşenidir. Çünkü öğrenme hedefinin belirlenmesinde, sınıf içi etkinliklerin organize edilmesinde ve beklenen hipotezlerin oluşturulmasında tüm süreç bu bileşenin gücünden beslenmektedir. Simon (1995)'un yapısının geliştirilmesi, matematik derslerinin planlanmasındaki kilit yönlerin açıklamasını sunmuştur. Bununla birlikte, bu yapı, öğrenme süreci hakkında düşünme, matematiksel görev seçimi veya matematiksel görevlerin öğrenme sürecindeki rolü hakkında hiçbir çerçeve sağlamamıştır. Böyle bir çerçeve, faydalı öğrenme yörüngelerinin oluşturulmasına önemli ölçüde katkıda bulunabilir (Tzur ve Simon, 2004). Son yıllarda araştırmacılar, Simon'un (1995) yapısını, öğrenci düşüncesinin zaman içinde nasıl geliştiğine dair deneysel olarak desteklenen açıklamaları içerecek şekilde genişletmişlerdir (Clements ve Sarama, 2004; Confrey, 2016; Daro, Mosher ve Corcoran, 2011; Deniz ve Kabael, 2021; Gürbüz, 2021; Weber ve diğerleri, 2015; Wilson ve diğerleri, 2014).

Öğretmenler, matematiğin her bir ana alanı veya konusu için bu gelişimsel ilerlemeleri anladıklarında ve bunlara dayalı etkinlikleri sıraladıklarında, özellikle gelişimsel olarak uygun ve etkili matematik öğrenme ortamları oluştururlar. Bu gelişimsel yollar, öğrenme yörüngelerinin temelidir. Öğrenme yörüngeleri birkaç soruyu yanıtlamamıza yardımcı olur: Hangi hedefleri oluşturmalıyız? Nereden başlayalım? Bundan sonra nereye gideceğimizi nasıl bileceğiz? Oraya nasıl gideriz? Öğrenme yörüngeleri üç bölümden oluşur: (a) matematiksel bir hedef, (b) öğrencilerin bu amaca ulaşmak için geliştirdikleri gelişimsel bir yol ve (c) düşünme düzeylerinin her biri ile eşleşen bir dizi öğretim etkinliği veya görevidir (Clements ve Sarama, 2014). Öğrencilerin daha yüksek düşünme düzeyleri geliştirmelerine yardımcı olan bu yolun üç bölümünü inceleyelim.

Hedefler: Matematiğin Büyük Fikirleri

Bir öğrenme yörüngesinin ilk kısmı matematiksel bir hedeftir. Hedeflerimiz arasında "matematiğin büyük fikirleri" yani matematiksel olarak merkezi ve tutarlı, öğrencilerin düşünme seviyeleriyle uyumlu ve gelecekteki öğrenmenin temelini oluşturabilecek olan kavram ve beceri kümeleri yer alır. Bu büyük fikirler, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) ve Ulusal Matematik Danışma Paneli (NMP) (Clements ve Sarama, 2004; NCTM, 2000; NMP, 2008) ve özellikle de Ortak Çekirdek Devlet Standartları (NGA, 2010) dahil olmak üzere birçok büyük projeden gelmektedir. Örneğin, büyük bir fikir saymak, bir koleksiyonda kaç tane olduğunu bulmak için kullanılabilir.

Gelişimsel İlerlemeler: Öğrenme Yolları

Bir öğrenme yörüngesinin ikinci kısmı, öğrencilerin matematiksel hedefe ulaşma yolunda geliştirdikleri, her biri bir öncekinden daha karmaşık düşünme düzeylerinden oluşur. Yani gelişimsel ilerleme, öğrencilerin o matematiksel konu hakkında bir anlayış ve beceri geliştirmede izledikleri tipik bir yolu tanımlar. Matematik becerilerinin bu gelişimi, yaşam başladığında başlar. Göreceğimiz gibi, küçük çocukların doğumdan itibaren sayı, uzamsal anlam ve kalıplarda matematik benzeri belirli yeterlilikleri vardır. Ancak, küçük çocukların fikirleri ve durumları yorumlamaları yetişkinlerinkinden benzersiz şekilde farklıdır. Bu nedenle iyi öğretmenler, çocukların durumları, sorunları veya çözümleri yetişkinler gibi "gördüklerini" varsaymamaya özen gösterirler. Bunun yerine iyi öğretmenler çocuğun ne yaptığını ve düşündüğünü yorumlar ve duruma çocuğun bakış açısından bakmaya çalışır. Benzer şekilde, bu öğretmenler çocukla etkileşime girdiklerinde, çocuğun bir sonraki düşünme düzeyini geliştirmesine yardımcı olabilmeleri için öğretim görevlerini ve kendi eylemlerini çocuğun bakış açısından da dikkate alırlar. Bu, öğretimi hem talepkar hem de ödüllendirici hale getirir. Öğrenme yörüngelerimiz, her gelişimsel ilerlemenin her düzeyi için basit etiketler ve örnekler sağlamalıdır.

Öğretim Görevleri: Öğretim Yolları

Bir öğrenme yörüngesinin üçüncü kısmı, gelişimsel ilerlemedeki düşünme düzeylerinin her biri ile eşleşen bir dizi öğretim görevinden oluşur. Bu görevler, öğrencilerin bu düşünme düzeyine ulaşmak için gereken fikirleri ve becerileri öğrenmelerine yardımcı olmak için tasarlanmıştır. Yani öğretmenler olarak bu görevleri öğrencilerin önceki seviyeden hedef seviyeye kadar büyümesini desteklemek için kullanabiliriz. Özet olarak, öğrenme yörüngeleri, öğrenmenin hedeflerini, çeşitli seviyelerdeki öğrencilerin düşünme ve öğrenme süreçlerini tanımlar ve katılabilecekleri öğrenme etkinliklerini ortaya koyar.

Corcoran ve diğerleri (2009), öğrencilerin bilişsel ilerlemelerinin öğrenme yörüngesinde gösterildiğini, öğrenme yörüngesinde öğrencilerin matematiksel olarak nasıl öğrendiklerini ampirik araştırmalara dayandığını belirtmiştir. Öğrenme yörüngesi için çok fazla tanım mevcuttur. Ancak genel özellikleri üzerinden Gürbüz (2021) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

> *Öğrenme yörüngeleri belirli bir matematik konu alanına dayanır (Daro ve diğerleri, 2011; Clements ve Sarama, 2004), öğrencilerin düşünme ve öğrenme ilerlemeleri hakkındaki deneysel (ampirik) verilerden geliştirilmiş (Clements ve Sarama, 2014; Confrey ve diğerleri, 2009), öğrenciler ve matematiksel kavramlar arasında etkileşim oluşturmak için görev kullanmanın önemini vurgular (Battista, 2011; Clement ve Sarama, 2004; Wilson ve diğerleri, 2013) ve doğrulama olarak adlandırılan revizyonlar ve iyileştirmeler gerektirir (Confrey ve diğerleri, 2012; Duncan ve Hmelo-Silver, 2009)* (aktaran Gürbüz, 2021, s. 62)

Buna ek olarak tüm öğrenme yörüngeleri öğrencilerin matematiksel anlayışlarının ve düşüncelerinin nasıl geliştiğini inceler. Ayrıca, öğrenme yörüngeleri matematiksel öğrenmenin nerede başladığını ve öğrencilerin matematiksel anlama açısından durumlarını belirlemektedir (Confrey ve diğerleri, 2012). İfade edilen teorik perspektiflerin her biri, matematik öğrenme süreciyle ilgili bazı kavramsallaştırma ve varsayımları içerir. Bu varsayımlar, belirli bir matematik kavramını öğrenmenin ne anlama geldiğini belirten yol haritasının veya ilerlemenin gelişimini şekillendirir (Gürbüz, 2021). Bu bakış açısından kaynaklanan öğrenmenin ortaya çıkan temsilleri, kavramsal gelişimin tanımlanması ve anlaşılması açısından oldukça farklılık gösterebilir. Öğrenme yörüngesinin prensipleri Weber ve diğerleri (2015) tarafından dört maddede ifade edilmiştir:

1. Bir öğrenme yörüngesinin oluşturulması, öğrencilerin ön bilgilerinin belirlenmesine bağlıdır.
2. Öğrenme yörüngesi belirli matematiksel kavramların öğrenilmesini planlamak için iyi bir araçtır.
3. Matematiksel görevler, belirli matematiksel kavramların öğrenilmesini destekleyen araçlar sunduğu için öğretim sürecinin önemli bir parçasıdır.
4. Öğretim sürecinin varsayımsal ve belirsiz olan doğası nedeniyle, öğretmen öğrenme yörüngelerini düzenli olarak geliştirebilir.

Öğrencilerin öğrenme sürecine yoğunlaşarak hangi yolları takip ettiklerini anlamlandıran güncel araştırma konusu öğrenme yörüngesidir. Matematik eğitimi literatürüne Simon (1995) tarafından tahmini öğrenme yörüngesi (Hypothetical Learning Trajectory) olarak girmiş olsa da Confrey ve diğerleri, (2009) tarafından öğrenme yörüngesi kavramı son zamanlarda ampirik çalışmalar ile daha ilgi çekici hal almıştır. Aynı zamanda öğrenme performansları (Catley ve diğerleri, 2004), gelişimsel ilerleyiş, büyük fikirler (Brown ve Campione, 1996) gibi farklı terimler ile ifade edilse de öğrenme yörüngesi terimi ön plana çıkmıştır.

Literatür incelendiğinde öğrenme yörüngelerinin öğretmenlerin sınıf ortamında öğrencilerin düşünme süreçlerine odaklanmasına katkı sağladığı, öğretim yöntemlerini zenginleştirmeye teşvik ettiği ifade edilmiştir (Donovan, 2019). Ayrıca öğrenme yörüngelerinin ders planlama, tasarım ve değerlendirmede önemli bir çerçeve oluşturduğu bu sayede beklenmedik durumlarla karşılaşma ihtimalinin azaldığı görülmüştür (Gürbüz, 2021; Karakoca, 2019; Wilson ve diğerleri, 2015).

Son olarak Deniz ve Kabael (2021) çalışmasında 6. sınıf öğrencileri için geometrik inşaya yönelik öğrenme yörüngeleri tasarlamış ve öğrencilerin bilişsel gelişimlerini incelemişlerdir. Uygulama sonucunda retrospektif analizler yapılarak hem öngörülemeyen gelişim basamakları ve öğrenci hataları tespit edilmiş, hem de etkinliklerde zayıf kalan yönler tespit edilerek öğrenme yörüngeleri bu doğrultuda revize edilmiştir. Tasarlanan öğrenme yörüngesinin öğrencilerin geometrik oluşumlarının gerçekleştirilmesine önemli katkı sağladığı görülmüştür. Bu anlamda tasarlanan öğrenme yörüngelerinin uygulayıcılar için önemli bir rehber kaynak olduğu söylenebilir. Ayrıca çalışma 6. sınıf düzeyinde olduğundan sadece 5 temel geometrik inşa becerisine yönelik öğrenme yörüngesi tasarlanmış, üst sınıflarda verilen kalan 5 temel geometrik inşa becerisine yönelik muhakeme süreçlerini ortaya çıkaracak çalışmaların gerekliliğine de vurgu yapılmıştır. Bu bağlamda araştırmanın alana önemli katkı sağlayacağı ifade edilmektedir.

3. BÖLÜM
YÖNTEM

Bu araştırmada ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerini derinlemesine inceleyebilmek için genel olarak nitel araştırma yöntemlerinden faydalanılmıştır. Bireyin doğal ortamındaki davranışlarını inceleyebilmek için nitel araştırmanın ilgi alanı geniş bir bakış açısına sahip olmaktır (Johnson ve Christensen, 2004). Nitel verilerin ilk elden zengin ve bütüncül bir içerik sunması, yeni çalışma alanlarını keşfetme ve hipotez geliştirme süreçlerinde araştırmacılara yardımcı olmaktadır (Gürbüz, 2021). Bu araştırmada nitel paradigmaya yönelim gösterilmesinin asıl nedenlerinden biri de araştırmacıya nicel veriler üzerinden elde edilen bulguları daha derinlemesine yorumlama imkânı sağlaması (Miles ve Huberman, 1994) olmuştur. Bu çalışmada etkileşimli (interactive) nitel araştırma tercih edilmiştir. Veriler, doğal yaşam ortamında bireyler ile karşılıklı görüşülerek elde edildiğinden etkileşimli nitel araştırma kapsamında değerlendirilmektedir. Durum çalışması, fenomenoloji, ve kuram oluşturma gibi modeller insan deneyimlerine yoğunlaşmakta ve etkileşimli nitel araştırmalar içerisinde değerlendirilmektedir (Mcmillan ve Schumacher, 2006).

3. 1. Araştırmanın Modeli

Bu çalışma ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerini araştırmaktadır. Bu bakımdan iki aşamalı olarak tasarlanmıştır. Geometrik muhakeme sürecinin gelişimi geometrik düşünme becerisi gerektirir. Ortaokul, öğrencilerin temel geometrik kavramları ilk defa inşa edecekleri ve geometrik olarak bir muhakeme sürecine girecekleri eğitim basamağıdır. Ortaokul düzeyindeki öğrencilere temel geometrik kavramların inşasının öğretimi üzerine yapılan bu araştırmada, öğrencilerin bu kavramları muhakeme edebilme süreçlerini incelemeyi güçlendirmek için öğrenme yörüngeleri kullanılmıştır. Bu çalışmada tasarım tabanlı araştırma yöntemi tercih edilmiştir, bunun nedeni ise öğrenme yörüngelerinin doğasına uygun olmasıdır. Bu bakımdan belirtilen süreç içerisinde öğretim materyal ve etkinlikleri ile öğretim yöntem tekniklerinin harmanlandığı ürünlerin elde edilmesi, öğretim tasarımı, teorisi ve uygulaması arasındaki ilişkinin ortaya çıkarılması için tasarım tabanlı araştırma (TTA) yönteminden yararlanılmıştır. TTA, öğretme-öğrenme kuramlarıyla uyumu nedeniyle; araştırma, geliştirme, tasarım, uygulama, analiz ve yeniden tasarım basamaklarının iç içe ve döngüsel olması gibi özelliklere sahiptir (Collins, 1992). TTA, birden daha fazla yöntemi içerisinde bulundurabilen, kapsamlı ve döngüsel bir süreçtir. TTA da öğretme-öğrenme süreci içinde yapılan analiz, tasarım, geliştirme ve uygulama süreçleri araştırmacı ve katılımcıların işbirliğiyle yapılır, uygulama ortamında (gerçek) yapılır, eğitim uygulamalarını ve/veya kuramlarını geliştirmek için tasarım ilkelerinin geliştirilmesine yönelik sistematik ve esnek bir araştırma yöntemidir

(Wang ve Hannafin, 2005). TTA, güncel kuram uygulamalarının öğrenme sürecine dahil olduğu ve öğrenmeyi etkileyecek biçimde değişik öğrenme yaklaşımları oluşturmayı gerektirir (Brown, 1992; Collins, 1992). Oluşturulan yapı döngüsel olarak hep değerlendirilmektedir, bu yaklaşım öğrenme ortamlarında bilginin inşa edilmesi, geliştirilmesi, özümsenmesi ve geçerliliğin tesis edilmesi gibi durumlara yardımcı olmaktadır (Collins, 1992). Bu nedenle öğrenme yörüngeleri ile tasarlanan temel geometrik kavramları inşa etkinliklerinin öğrenme süreçlerine ilişkin veriler toplanmış ve geliştirilen etkinlik ve materyallerin ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerinin gelişimine yönelik etkileri incelenmiştir.

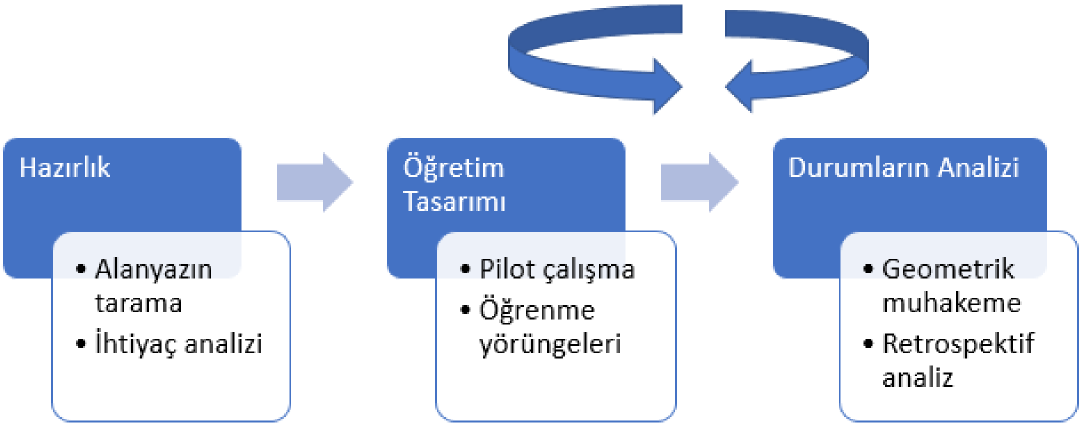
Araştırma üç basamakta gerçekleştirilmiştir. Birinci basamakta geometrik muhakemeyi ortaya çıkarmaya yönelik olarak öğrencilerin geometrik inşa etkinliklerinde ihtiyaçlarını ve ilgili geometri kavramlarını anlama düzeylerini belirlemeye yönelik iç içe geçmiş tek durum deseni kullanılarak durum çalışması gerçekleştirilmiştir. Bu basamakta öğrenci ihtiyaçlarını tespit edilebilmek için temel geometrik kavramların inşasına yönelik olarak pergel ve cetvel kullanımının psikomotor becerilerinin düzeyi, temel geometri kavramlarının inşası hakkındaki bilgileri ve ilgili ünitede temel geometri inşasına yönelik olarak gözlemci katılımı ile sınıf içi gözlemler yapılmıştır. Araştırmacının gözlem verilerini kaydetmesi amacıyla Geometrik İnşa Gözlem Formu (GİGF) geliştirilmiş ve gözlemler sırasında kullanılmıştır (Ek-4). Ayrıca öğrencilere Van Hiele Geometrik Düşünme Testi (VHGDT) uygulanarak geometrik inşa etkinlikleri öncesinde öğrencilerin geometrik düşünme düzeyleri belirlenmiş, bu doğrultuda ders tasarımına yön verilmiştir. Ayrıca öğrencilerin öğrenme düzeylerinin ve öğrenme ihtiyaçlarının belirlenmesi amacıyla ünite sonunda yansız-rasgele seçilen öğrenciler ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Gözlem ve görüşmeler sonucunda, geometrik muhakemeyi ortaya çıkarabilecek geometrik inşa etkinliklerinde öğrencilerin ihtiyaçları belirlenmiştir.

İkinci basamakta, ihtiyaç analizi sonucunda öğrencilerin geometrik inşa yapabilmelerini sağlamak için öğrenme yörüngeleri kullanılarak öğretim materyal ve etkinlikleri tasarlanmış ve uygulanmıştır. Bu süreçte probleme dayalı etkinlikler tasarlanarak yaş grubu itibarıyla öğrencinin ilgisini çekecek geometrik inşa görevleri verilmiştir. Uygulama sonrasında geriye dönük analizler yapılarak öğrenme yörüngelerine ihtiyaç duyulan yardımcı etkinlikler eklenmiş veya var olan etkinlikler düzenlenmiştir. Sonuç olarak araştırmanın ürünü olan nihai öğrenme yörüngeleri tasarlanmıştır.

Üçüncü basamakta ise uygulama boyunca gözlemler ve uygulama sonrası öğrenci ve öğretmen görüşmeleri yapılarak öğretim tasarımının kullanışlılığı, uygulanabilirliği ve eksiklikleri iç içe geçmiş tek durum deseni kullanılarak değerlendirilmiştir. Analizler sonucunda ortaya çıkan durumların birbiri ile ilişkisinin belirlenmesi ve açıklanması iç içe geçmiş durum çalışması kullanımının özelliği doğrultusunda planlanmıştır. İç içe geçmiş tek durum deseni incelenen bir durumun birden fazla analiz birimi içermesi durumlarında kullanılmaktadır (Yin, 2003). İç içe geçmiş tek durum deseni ortaya çıkan durumu ve bu durum ile ilişkili alt durumları bir bütün olarak sistemli bir şekilde inceler. Bu, durumlar arası ilişkileri belirlemeyi ve açıklamaya olanak sağlar. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak araştırma soruları geliştirilmiş, analiz birimleri belirlenmiş, araştırmanın katılımcıları saptanmış, veriler toplanarak araştırma problemi ve alt problemler ile ilişkilendirilerek analiz edilerek yorumlanmıştır. Araştırmanın aşamaları Şekil 8'de gösterilmiştir.

Şekil 8

Araştırmanın aşamaları



Şekil 8'de ifade edildiği gibi araştırmanın hazırlık aşamasından sonra ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakemelerini güçlendirmek ve sürecin incelenmesini kolaylaştırmak için TTA yönteminden faydalanılarak temel geometri kavramlarının inşasına yönelik bir öğrenme yörüngesi geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Araştırmanın son aşamasında katılımcıların geometrik muhakeme süreçlerini derinlemesine incelemek için durum çalışmasından yararlanılmıştır. Alt başlıklarda hem tasarım tabanlı araştırma hem de durum çalışması için gerekli açıklamalar yer almaktadır. İç geçerliği güçlendirmek amacıyla Creswell (2007)' in ifade ettiği kıstaslar dikkate alınarak veri toplama aracının belirlenmesi, geliştirmesi ve veri toplama süreci, verilerin analizi ve yorumlanması özetle araştırma sürecine ilişkin basamaklar ayrıntılı olarak açıklanacaktır.

3. 1. 1. Durum Çalışması

Durum çalışmaları, araştırmacının bir durumu veri toplama araçları ile (gözlem, görüşme, transkript, raporlar) derinlemesine incelediği ve bu durumlara ait temaları ortaya koyduğu nitel yaklaşım olarak ifade edilmiştir (Creswell, 2007). Merriam (1998) durum çalışmasını, araştırmanın sonucundan daha fazla araştırma sürecinin araştırmacı tarafından daha fazla ilgi çekici bulunduğu durumların anlaşılmasına yönelik araştırmalar olarak tanımlamıştır. Durum çalışması araştırmacılar için belirli bir durumu ayrıntılı bir şekilde açıklayabilmenin en iyi yolu olarak görülmektedir (Stake, 2005). Özetle, sistematik olarak çoklu veri toplama araçları aracılığıyla bir veya daha fazla durumun ayrıntılı bir şekilde analizini gerçekleştirmenin modeli olarak durum çalışması görülmektedir. Eğitim araştırmalarında yaygın olarak kullanılan durum çalışması, bir sistemdeki belirli bir olguyu araştırmayı amaçlayan yaklaşım olarak ifade edilebilir (Creswell, 2009; Merriam, 2009). Başka bir deyişle bir olgunun gerçek yaşam bağlamında ele alınarak katılımcıların bakış açılarını ayrıntılı bir şekilde dikkatlice dışa aktarması, okuyucu için anlaşılabilir anlamlar sağlamasıdır (Gall ve diğerleri, 2007). Durum çalışması, bir olguyu (geometrik muhakeme) kendi gerçek yaşam çerçevesi (ortaokul sınıflarındaki geometrik inşalar) içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı (geometrik muhakemenin nasıl oluştuğu) ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının (gözlem, görüşme ve ölçekler) mevcut olduğu durumlarda kullanılan bir araştırma yöntemi olarak tanımlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Creswell (2009)'a göre durum çalışmalarının temel varsayımı özel bir durumun belirlenmesidir. Bu doğrultuda amaç önemli görülmüş ve derinlemesine bir anlayış beklentisi vurgulanmıştır. Veri analizinde duruma ilişkin bir betimlemenin yapılması analizi anlamak için gerekli görülmüş ve durumdan çıkarılan sonuçların ifade edilmesiyle son bulmaktadır.

Üst bölümlerde de belirtildiği üzere araştırmada 'İç İçe Geçmiş Tek Durum Deseni' tercih edilmiştir. Bu desen, tek bir durum içinde birden fazla alt durum oluştuğunda geçerli olan çalışma desenidir. Bir durum çalışması deseninde ortaya çıkan ve bununla ilişkili alt birimleri bütüncül ve sistematik olarak bir arada incelemek ve ilişkilerini ortaya çıkarmak için kullanılmaktadır. Çalışma grubu öğrencilerinin geometrik muhakeme bakımından farklı düzeylerde olması nedeniyle iç içe geçmiş tek durum deseni bu çalışmada tercih edilmiştir. Çalışmada kullanılan durum çalışmasında izlenen aşamalar Yıldırım ve Şimşek (2018)'in belirttiği sıralamaya göre aşağıdaki gibi uyarlanmıştır:

1. Araştırma sorularının geliştirilmesi (Geometrik muhakeme nasıl oluşmaktadır?)
2. Analiz sürecinin belirlenmesi (Duval'in bilişsel teorisine göre muhakeme sürecinde gerçekleşen bilişsel ve algısal süreçler)
3. Çalışılacak durumun belirlenmesi (Temel geometri kavramlarının inşa süreci)
4. Araştırmaya katılacak kişilerin seçimi (Geometrik düşünme düzeylerine göre kategorize edilmiş 8. sınıf öğrencileri)

5. Verilerin toplanması ve alt problemlerle ilişkilendirilmesi (veri toplama araçları)
6. Verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması, raporlanması

Bu bağlamda, özel bir durum çalışması olarak çalışma grubunda yer alan ortaokul öğrencilerinin geometrinin temel kavramlarını matematiksel olarak nasıl inşa ettiklerini, bu inşa sürecinde ise zihinsel olarak muhakemelerinin nasıl geliştiğini incelemeyi amaçlamıştır.

Araştırmanın ikinci aşamasında ise geometrik muhakeme sürecinin incelenmesini güçlendirmek için öğrenme yörüngesinden faydalanılmıştır. Öğrenme yörüngesi bir öğretim tasarımı çalışması olarak görülebilir. Öğretim tasarımı çalışmaları kendi içinde belli özelliklere göre ayrılan modeller üzerinden gelişmektedir. Tasarım tabanlı araştırmalar temelde benzer bileşenleri içermesine rağmen işleyiş sürecinde birbirlerinden farklı özellikler göstermektedirler. Tasarım modellerinde süreç, eğitim gereksinimlerinin tespit edilmesiyle başlar ve gereksinimlerin karşılanması için tasarlanmış ve denenmiş bir öğrenme sisteminin oluşturulmasıyla sona erer (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu bağlamda öğretim tasarımı, belli bir hedef kitlenin eğitimsel gereksinimlerini karşılayabilmek amacıyla işlevsel öğrenme sistemlerinin geliştirilmesi; öğrenmeyi olumlu yönde etkileyen koşulları içeren etkili, verimli ve çekici bir öğretim sistemi ortaya koymaktır (Reigeluth, 1999; Şimşek, 2011). Bu araştırmada geometrik muhakeme sürecinin daha iyi anlaşılabilmesi için öğretim tasarımına ihtiyaç duyulmuştur.

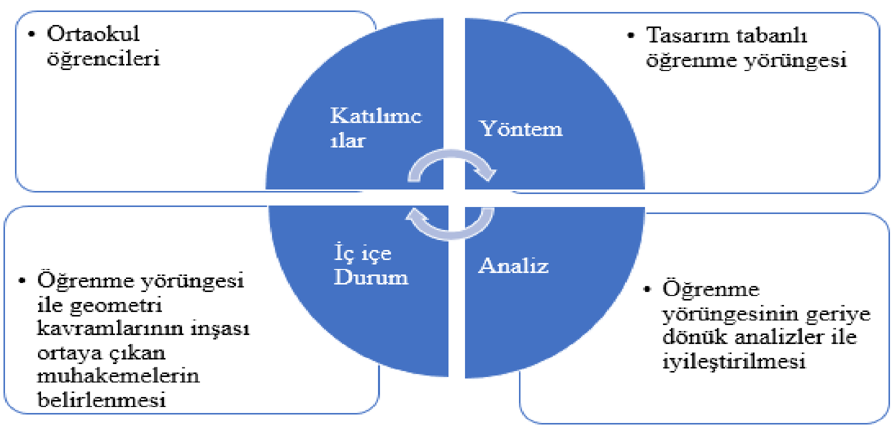
3. 1. 2. Tasarım Tabanlı Araştırma

Tasarım araştırması yaklaşımı (Cobb ve diğerleri, 2003; Collins ve diğerleri, 2004; Kelly, 2003), ortaokul öğrencilerin sınıf içinde geometrik muhakemeyi nasıl inşa ettiklerini araştırmak ve tasarlanan öğrenme yörüngesinin etkililiğini belirlemek amacıyla kullanılmıştır. Tasarım araştırması çerçevesi, araştırmacıların çalışma süreci boyunca müdahale etmelerinin yanı sıra gözlemlemelerine de izin verebilmektedir (Gürbüz, 2021). Tasarım araştırmasının temel amacı, öğrenme ortamının daha iyi anlaşılmasına olanak sağlayacak teknik, model, plan ve materyaller tasarlamaktır. (Cobb ve Gravemeijer, 2006). Matematikte öğrenme ortamı, öğretmen, öğrenci, matematiksel bilgi ve öğretim programı arasındaki etkileşimi ve bu etkileşimin öğretme ve öğrenmeyi ne yönde etkilediğinin bir bütünü niteliğindedir. Tasarım araştırmacıları öğrenme sürecine ilişkin teorileri test etmenin yanında öğrenmeyi desteklemek için tasarlanmış teknikler de geliştirmeye çalışabilirler (Cobb ve diğerleri, 2003). Tasarım araştırması yöntemi, bir öğretim deneyinde sunulan temel geometri kavramlarının inşası etkinlikleri ile ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakemelerini destekleme ve organize etme araçlarını incelemek ve anlamak için kullanılmıştır.

Matematik kariyerleri bakımından ortaokul öğrencilerinin geometrik düşünmede teorik gelişimlerinin ilk yıllarında temel geometrik kavramların inşasında geometrik muhakeme süreçlerini nasıl gerçekleştirdiklerini belirlediğimiz bu çalışmada onların bu muhakeme süreçlerini daha net görebilmek ve doğru muhakeme yapmalarını desteklemek amacıyla tasarım tabanlı araştırma modelinden yararlanılmıştır. Tasarım tabanlı araştırmanın karakteristik özelliği öğrencilerin geometrik muhakemelerinin gözlemlenmesi sırasında süreci daha iyi anlayabilmek için müdahalede bulunulmasına olanak sunmasıdır. Bu bakımdan diğer araştırma desenlerine nispeten daha nitelikli bir katkı sunacağı düşünülmüştür. Tasarım tabanlı araştırma müdahalenin yanı sıra öğrenme çalışmalarına da odaklanmaktadır (Şengel, 2013). Tasarım tabanlı araştırma (TTA) yöntem olarak eğitim uygulamalarını yönlendirmek için bazı geleneksel araştırma yöntemlerinin istenen etkililiği gösterememeleri neticesinde ortaya çıkmıştır (Design Based Research Collective [DBRC], 2003; Ma ve Harmon, 2009; Lai, Calandra ve Ma, 2009). Tasarım tabanlı araştırmalar, etkinliklerin aşamalı olarak geliştirilmesini amaçlar ve öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini ampirik (deneysel) olarak anlamaya olanak sağlar (Cobb ve diğerleri, 2001). Geleneksel araştırma türlerine nazaran getirdiği yenilikler; öğretim kuramlarının somutlaştırılmasına, kuram, tasarım ve uygulama arasındaki ilişkinin anlaşılmasına yardımcı olan bir planlama ve geliştirme sürecidir (Kuzu ve diğerleri, 2011). Günümüzde tasarım tabanlı araştırmaların teorik çerçeve ile desteklenen deneysel eğitim araştırmalarında daha sık kullanılır bir paradigma olduğu ifade edilmektedir (Parker, 2011). Bu araştırmada Parker'ın (2011) ifade ettiği gibi teorik olarak desteklenen geometrik muhakemenin gelişim döngüsü ile öğrencilerin geometri kavramlarını inşa süreçlerinin incelenmesini ve açıklanmasını kolaylaştıracağı düşünülmüştür. Şekil 9'da ise bu sürecin nasıl iç içe girdiği ifade edilmektedir.

Şekil 9

Geometrik muhakeme gelişimi inceleme süreci



TTA, öğretim stratejilerinin sistematik olarak tasarlanmasını sağlamak amacıyla bağlamsal öğrenmenin araştırılması için geliştirilmiş bir model olarak ifade edilmektedir (Wang ve Hannafin, 2005). Tasarım tabanlı araştırmalar öğrenme ortamlarının gelişimi amacıyla bilginin oluşturulma sürecine yardımcı olmaktadır (DBRC, 2003). Ayrıca çok bilinen araştırma yöntemlerinin aksine esnek bir yöntem olarak tercih edilmektedir. Tasarım tabanlı araştırmaların temel amacı eğitim araştırmaları ile gerçek yaşam durumları arasında güçlü bir bağlantı kurulmasını sağlamaktır. Öğretim için geliştirilen ve uygulanan tasarımın sadece değerlendirilmesi yeterli görülmemektedir, aynı zamanda benzer araştırmalara rehber bir görüş ortaya koymak önemli görülmektedir (Amiel ve Reeves, 2008). Bu tanımlamalar dikkate alındığında TTA'nın karakteristik özelliklerini Wang ve Hannafin (2005)'den adapte etmek yerinde olacaktır: Pragmatik bir bakış açısı ile hem dayandığı teoriyi doğrular veya yanlışlar hem de uygulanan etkinliklerin geliştirilmesine yardımcı olur. İç içe desen ile uygulama gerçek dünya ortamlarında gerçekleştirilir ve tasarım süreci araştırmanın içinde incelenir, geliştirilir. Süreç dikkate alındığında analiz, tasarım, uygulama ve yeniden tasarım şeklindedir, uygulama tasarıma bağlıdır ama süreç esnektir. Bütünleştirici bir yapıda, güvenilirliği arttırmak için karma araştırma yöntemleri kullanılabilir. Bağlamsal olarak, araştırma süreci, araştırma bulguları ve yapılan değişiklikler belgelenir. TTA, somut etkinlikleri içeren yapılar tasarlamaya ve araştırmaya odaklanmıştır. Belli bir müdahalenin sadece tasarlanması ve test edilmesinden ziyade bir bütünsel ve bağlamsal yapıyı içermektedir. Bu çalışmada ifade edilen yapı temel geometri kavramlarıdır. Geometrinin temel kavramlarının inşa sürecini içermektedir. Bu kavramlar geometrik düşünmenin temelini oluşturan Öklid'in aksiyomlarına dayanan yapıyı ifade eder. Temel geometrik kavramlar ileriki yıllarda öğrencilerin karşılaşacağı tüm geometri müfredatının zeminini oluşturan kavramsal alt yapıdır.

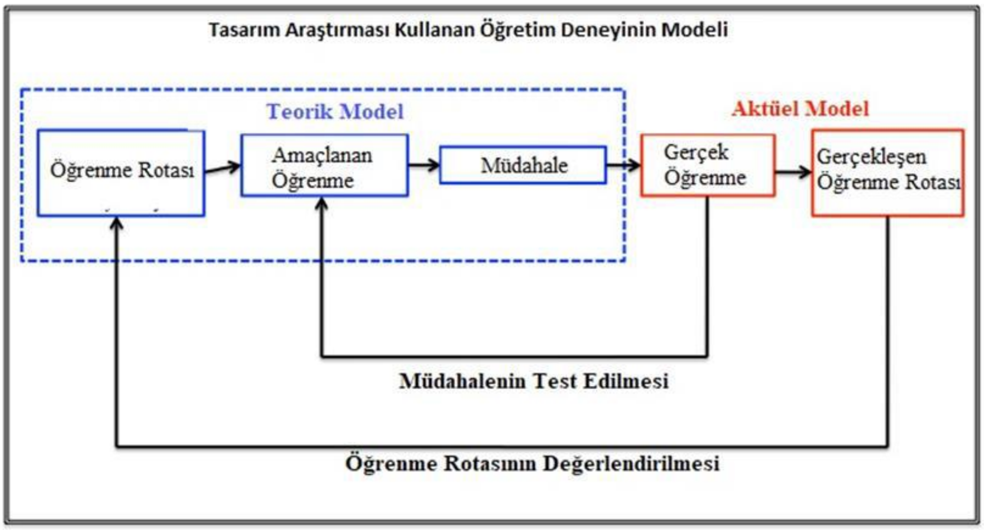
Tasarım tabanlı araştırmada belirli bir kavramın öğretimi esnasında öngörülen olası bilişsel süreçler için bir döngü içerisinde daima geliştirilebilir yerel bir öğretim teorisi (Local Instructional Theory) (LIT) ortaya koymak hedeflenmektedir (Cobb ve diğerleri, 2003). Gravemeijer (1999) LIT'yi öğrenciye kazandırılmak istenen bir kavramın bireyin zihnindeki matematiksel gelişimini öngören ve öğreticilere rehber niteliğinde kavramın inşasında kullanılabilecek etkinliklerin de yer aldığı bir çerçeve olarak tanımlamıştır. Bu çalışmada da temel geometri kavramlarının inşasına yönelik etkinlikler içeren, öğrencilerin olası bilişsel eylemlerini ifade eden ve inşa sürecini destekleyen matematiksel araçların kullanım yönergesini ortaya koyan yerel bir öğretim teorisi niteliğinde öğrenme yörüngeleri tasarlanmıştır.

Araştırma kapsamında öğrenme yörüngesi ile yapılan müdahaleler öğrenme ve öğretme ile ilgili teorik bir yapıyı somutlaştırmakta ve teori ile uygulama arasındaki bağlantıyı içeren bir yapıyı yansıtmaktadır. Bu sayede ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakemeyi nasıl kazandıkları daha iyi gözlenebilecektir. Kuzu ve diğerleri (2011), TTA'nın türevlerini açıklarken yöntem olarak bir TTA da tek bir ortamda uzun süreli araştırma yapmayı, yinelenen döngünün mevcut olması, bağlamsal müdahaleler içermeyi ve gelişimsel süreçlerin barındırması gerekliliğini ifade etmişler ve bilginin ortaya çıkmasının hedeflendiğini vurgulamışlardır. Bu çalışmada temel geometri kavramlarının inşasına yönelik öğrenme yörüngesi kullanılmıştır ve doğası gereği yinelenen döngü ve gelişimsel süreçleri barındırdığı ifade edilebilir. Geometrik muhakeme sürecinde öğrencilerin gelişimsel süreçleri bağlamsal müdahaleler (geometrik inşa) ile sorgulanmış ve ana odak noktası temel geometri kavramlarının inşası yani bilginin nasıl ortaya çıktığı aranmıştır.

Confrey ve Lachance (2000) öğretim deneyini, bir akademik öğretim süresince bir sınıfta gerçekleşen planlı bir öğretim müdahalesi olarak tanımlar. Bir öğretim deneyinin çerçevesi resmi olarak oluşturulmamıştır çünkü gerçek yapısı bağlama göre değişmektedir ve öğrenci tepkisi araştırmacılara yol göstermektedir (Steffe ve Thompson, 2000). Ancak, tasarım araştırması kullanan bir öğretim deneyi bir süreci de incelemelidir (Moss, 2014; Gürbüz, 2021). Aşağıdaki şekil 10'da bu çalışmayı çerçeveleyen tasarım araştırmasını kullanan bir öğretim deneyinin mantık modeli görülmektedir.

Şekil 10

Öğretim deneyi modeli



Bu modelde öğrenme yörüngesi oluşturulması bir başlangıç noktasıdır. Bu başlangıç noktası tasarım tabanlı araştırmalarda üç temel öğenin bir araya gelmesi kullanımını kolaylaştırmaktadır (Gürbüz, 2021). Tasarımın nereye ilerleyeceğini belirleyecek olan hedefin tespiti, tasarımın kendisi ve tasarımın değerlendirilmesidir. TTA sürecinde üst bölümlerde ifade edildiği gibi farklı araştırma yöntemlerini bir arada kullanma işlevi düşünülerek; incelenen sorunla ilgili analiz basamağında durum tespiti amacıyla bir durum çalışması gerçekleştirildikten sonra geliştirilen tasarımın uygulanabilirliğini incelemek veya eksiklikleri sahada gözlemlemek için nicel yöntemlerin kullanmasının (Collins ve diğerleri, 2004) yerinde olacağı söylenebilir. Öğrenme yörüngesi doğasının gereği bu döngü TTA'nın da bir yöntem gerekliliğidir. Geometrinin temel kavramlarının inşa etme görevleri ile ilk defa karşılaşan ortaokul öğrencilerine geometri öğretimi konusunda yapılan bu araştırmada, bu temel geometri kavram öğretimi sürecinde öğrencilerin geometrik muhakemelerinin belirlenmesinde çalışmanın doğasına uygun olması nedeniyle yöntem olarak TTA yöntemi seçilmiştir. TTA kuramları test etmek yerine yeni ürünler geliştirmek amacıyla çeşitli araştırma yöntemlerinden yararlanır (Edelson, 2002). Öğrenme yörüngesinde gelişimsel süreçlerin geometrik muhakeme boyutunda ele alınması ve bu sayede bilginin öğrenci zihninde nasıl oluştuğunun açıklanmaya çalışılması TTA'yı bu yeni öğrenme sürecini açıklamak için bir yöntem olarak kullanmayı mümkün kılmaktadır. Bu çalışmada birden fazla kavram, konu tekrarlı bir döngüde geliştiği ve boylamsal olarak sürdürüldüğü için TTA öğretim deneyi, tasarım araştırması, geliştirme araştırması yerine tercih edilmiştir. Temel geometrik kavramların öğretimi için geliştirilen öğrenme yörüngelerinin her bir müdahale süreci bir öğretim deneyi olarak ele alınmış ve sonunda temel geometri kavramlarının inşası öğretimine yönelik bir tasarım ortaya konulmak istenmiştir.

3. 1. 3. Öğretim Tasarımı

MEB (2013) eğitimin temel amacını bireylere nitelikli bir eğitim hizmeti sunabilmek olarak tanımlamıştır. Bunun için öğretimin ayrıntılı olarak planlanması ve düzenlenmesi gerekliliği ön plana çıkmaktadır. Bu durum ise öğretim tasarımına işaret etmektedir. Öğretim sürecinin etkili bir şekilde uygulanmasını sağlayacak ve bireylerin öğrenmelerine rehber olacak her türlü yolun planlanması öğretim tasarımı olarak ifade edilmiştir (Fer, 2009). Öğretim tasarımı süreci ise dört temel bileşene indirgenmiştir; Hedef kitle (yani öğrenenlerin özelliklerinin belirlenmesi), hedefler ve içerik (öğrenilmek veya öğretilmek istenen içerik temelli kazanımlar), öğretim strateji ve yöntemleri (öğrenenler nasıl öğrendiği) ve son olarak değerlendirme (öğrenmeye ulaşılma durumu) sorgulanmaktadır.

Çalışmada "Temel geometri kavramlarını inşa etmede ortaokul öğrencileri nasıl daha iyi öğrenir?" sorusu temele alınarak öğretim tasarımı gerçekleştirilmiştir. Öğretim tasarımı süreci temel geometri kavramlarının inşasına odaklanmıştır. Öğretim tasarımında çeşitli model ve yaklaşımlar bulunmaktadır. Bu çalışmada ise bir sonuç elde etmenin ötesinde bir sürecin ortaya çıkarılması (ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakemeleri) yer aldığı için öğrenme yörüngelerinden yararlanılmıştır. Öğrenme yörüngeleri bir öğretim tasarım sürecini daha iyi hale getirmek amacıyla geriye dönük analizler yaparak öğretimin ihtiyaçlara cevap vermesini sağlaması nedeniyle tercih edilmiştir. Bir diğer tercih edilme nedeni ise araştırmanın temel problemi olan katılımcıların geometrik muhakemelerini ortaya çıkarmada kullanılan geometrik inşa sürecinin daha iyi anlaşılmasını ve muhakeme sürecinin incelenmesinde öğretim kaynaklı kusurların giderilmesini sağlamaktır. Ayrıca geometrik inşa sürecinin öğretimine yönelik bir öğretim tasarımı da ortaya konulmak istenmektedir. Öğrenme yörüngesi öğrencilerin bilgiyi yapılandırma sürecinin bir haritalaması olarak görülebilir. Öğrencilerin matematik eğitimcileri tarafından yürütülen bilgiyi nasıl yapılandırdıklarına ilişkin araştırmalar, öğrenme yörüngelerini organize bir çerçeve olarak kullanır (Clements ve Sarama, 2004; Confrey ve diğerleri, 2009; Simon, 1995). Öğrenciler matematik öğrenirken doğal gelişimsel ilerlemelerden geçerler ve matematiksel fikir ve becerileri kendi yollarıyla öğrenirler (Clements ve Sarama, 2014). Bu tür gelişimsel ilerlemeler anlaşıldığında ve bunlara dayalı matematiksel etkinlikler sıralı olarak düzenlendiğinde etkili ve zenginleştirilmiş öğrenme ortamları oluşturulabilir. Bu tür gelişimsel ilerlemeler, bir öğrenme yörüngesinin ana bileşenidir. Araştırmalar, bir öğrenme yörüngesinin doğası gereği üç bölümden oluştuğunu göstermektedir (Clements ve Sarama, 2014): (a) matematiksel bir hedef, (b) öğrencilerin bu hedefe ulaşmak için geliştirdikleri gelişimsel ilerlemeler ve (c) bir dizi öğretim etkinliği veya görevidir. Öğrencilerin daha yüksek düşünme düzeyleri geliştirmelerine yardımcı olan bu yörüngedeki düşünce düzeylerinin her birine karşılık gelen bu bölümler aşağıda açıklanmaktadır.

(a) Bir öğrenme yörüngesi matematiksel bir hedefle başlar. Her hedef, matematiksel olarak tutarlı olan ve öğrencilerin düşünmesi yoluyla gelecekteki öğrenmeleri oluşturacak bir dizi kavram ve beceridir. Örneğin cebirsel düşünme, kalıpları tanımayı, analiz etmeyi, ilişkileri incelemeyi, temsil etmeyi ve genellemeler yapmayı içerir. Geometrik düşünme süreci ise görselleştirme inşa etme ve muhakeme süreçlerini içerir.

(b) Gelişimsel ilerlemeler, öğrencilerin matematiksel bir konuda anlayış ve beceri geliştirmede izledikleri tipik bir yola atıfta bulunur. Her gelişimsel ilerleme, bir öncekinden daha karmaşıktır, bu da matematiksel hedefe hâkim olmayı sağlar. Örneğin, öğrenciler cebiri öğrenmeden önce bile geometrik olarak örüntülerle ilgili (geometrik artış miktarını bulma gibi) belirli matematiksel yeterliliklere sahiptirler. Öğrenci karmaşık bir inşa görevini gerçekleştirebilmesi için öncelikle temel inşa becerilerine hakim olması gerekir.

(c) Bir öğrenme yörüngesinin üçüncü kısmı, gelişimsel ilerlemelerdeki her bir düşünme düzeyine karşılık gelen bir dizi öğrenme faaliyetinden oluşur. Bu etkinlikler, çocukların kendi gelişimsel ilerlemelerine ulaşmak için ihtiyaç duydukları fikirleri ve becerileri öğrenmelerine yardımcı olmak için tasarlanmıştır. Bu, öğretmenlerin bu görevleri öğrencilerin ustalığını bir seviyeden diğerine geliştirmek için kullanabileceği anlamına gelir.

Bu çalışmada, öğrencilerin geometrik muhakeme sürecinde geometrik inşaları nasıl kurduklarını anlamak ve düşüncelerindeki ilerlemeleri sistematik olarak karakterize etmek için bir öğrenme yörüngesi temele alınmıştır. Bu çalışmada öğrenme yörüngesi, öğrenci ve öğretmenin temel geometri kavramlarının inşasına ilişkin yorumlarına dayalı olarak şekillendirilmiştir. Bu bağlamda, öğrenme yörüngesinin öğrencilerin öğrenmesi ve zihinsel gelişimi için pratik sonuçları ortaya konulmaktadır. Öğrencilerin soyut düşüncelerini daha görünür ve anlaşılır kılmak için geometrik muhakeme süreçleri bir öğrenme yörüngesi ile tasarlanmıştır. Bu süreçte temel geometri kavramlarını ilk kez inşa edecek öğrencilerin handikapları ortadan kaldırılmak istenmiştir. Öğrencilerin pek çok zorlukla karşılaştıklarını göz önünde bulundurarak, bu çalışmada geometrik muhakemeyi nasıl oluşturduklarını ortaya koymak ve öğrenme sürecinde onlara yardımcı olacak bir öğretim tasarımı geliştirmek amaçlanmıştır.

Araştırmanın ilk aşaması öğrencilerin temel geometrik kavramlarını anlama düzeylerini belirlemeye yöneliktir. Öğrencilere yönelik literatür kullanılarak geometri kavramlarına hazırbulunuşlukları ve temel geometri kavramlarını bilme düzeyleri belirlenmiştir. Katılımcıların geometrik düşünme seviyelerini belirlemek amacıyla Van Hiele tarafından literatüre kazandırılan geometrik düşünme düzeylerine yönelik geliştirilmiş testten yararlanılmıştır. Yine literatür temele alınarak öğrencilerin gereksinimlerini karşılayabilecek öğretim materyal ve etkinlikleri öğrenme yörüngesi çerçevesinde geliştirilmiştir. Burada öğrenme yörüngesinin öncelikli amacı öğrencilerin muhakeme becerilerinin gözlemlenmesinin daha anlaşılır hale getirilmesidir.

Araştırmanın ikinci aşamasında tasarımın uygulanabilirliği, eksiklikleri, öğrencilerin muhakeme becerileri, sınıf içi gözlemler ve yarı- yapılandırılmış öğrenci görüşmeleri sonucunda elde edilen veriler bir durum çalışması olarak değerlendirilmiştir. Durum çalışması, güncel bir olguyu (geometrik muhakeme) kendi gerçek yaşam çerçevesi (temel geometri kavramlarının inşası) içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı (temel geometri kavramlarının nasıl muhakeme edildiği) ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının (literatür, gözlem ve mülakat) mevcut olduğu durumlarda kullanılan bir araştırma yöntemi olarak tanımlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Çalışmada tasarlanan öğretim tasarımının öğrenme yörüngesine göre incelenmesi neticesinde ortaya çıkan veriler ve sonuçlar “BULGULAR” başlığı altında detaylı olarak yer almaktadır.

3. 1. 4. Öğretim Tasarımı Süreci

Eğitim-öğretim bir süreçtir ve sistematik bir döngünün ürünüdür. Süreç planlaması, uygulama, değerlendirme ve değerlendirmeye göre tekrardan düzenleme basamakları bu döngüyü oluşturur (Gürbüz, 2021). Bir bütün içindeki döngü basamaklarından planlama her süreç içerisinde yer alır. Öğretim programının uygulandığı bir öğrenme-öğretme etkinliğinde öğrencilerin genel ve özel kazanımlar edinerek gündelik, sosyal, duygusal ve akademik yaşamlarını kolaylaştırması amaç edinilmiştir. Öğrenci için kazanımlar eğitim-öğretim süreci içinde süreklilik arz eder.

Çalışmada MEB tarafından ifade edilen öğretim programı kazanımlarında herhangi bir değişikliğe gidilmemiştir. Ancak ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakeme sürecinin ortaya çıkarılmasında yarar sağlayacağı düşünülen materyaller ve öğretim yöntem-teknikler öğrenme yörüngesinin basamaklarına dâhil edilerek yeni bir öğretim tasarımı hazırlanmıştır. Öğretim tasarımı sürecinin sağlıklı yürütülebilmesi için sınıf özellikleri, kazanımlar, öğretim etkinlikleri ve değerlendirmeyle ilgili Anderson ve Krathwohl (2001) tarafından tavsiye edilen ve bu çalışma için araştırmacı tarafından adapte edilen aşağıdaki hususlara dikkat edilmiştir.

Öğrenme alanına ait kazanımların belirlenmesi, öğrenme alanına ait geometri kavramlarının tespit edilmesi, öğrenme alanının öğretimi için ne kadar süre ayrılacağının bulunması ve öğretim sürecinde kullanılacak materyallerin belirlenmesidir.

Bu kapsamda çalışma konu alanında geometri öğrenme alanında yer alan aslında tüm ortaokul seviyelerine yayılmış 13 adet kazanım bulunmaktadır (bkz. Tablo 1). Genel olarak ifade edersek temel geometrik kavramların (doğru parçası, açı, kenar orta dikme, açıortay, yükseklik, kenarortay, üçgenler vb.) inşasının öğrencilere kazandırılması amaçlanmaktadır. Hem alanyazında ifade edildiği gibi (bkz 1. bölüm) hem de ihtiyaç analizinde tespit edildiği üzere bahsi geçen kavramların inşasının ortaokuldaki her sınıf düzeyinde olmasına rağmen 8. sınıf öğrencilerinin bu oluşumların nasıl gerçekleştirildiğini genel olarak bilmedikleri görülmektedir. Bu yüzden temel geometri kavramlarının en baştan inşası ile başlanmıştır. Bu kavramların inşasında pergel ve çizgeç materyalleri kullanılmıştır. Yine bu matematiksel araçları öğretmen ve öğretmen adaylarının geometrik kavramların inşasında etkin bir şekilde öğretimde kullanmadıkları, hatta bu geometrik inşaları gerçekleştirmekte zorlandıkları görülmüştür (Deniz ve Kabael, 2021).

Öğretim sürecinin içeriği belirlenirken öncelikle öğretilecek kazanım ve kavramlar için ön koşul olup olmadığına bakılmıştır. Öğrenme alanının nasıl tanıtılacağı belirlenip, öğrencilere kazandırılması gereken bilgi, beceri ve kavramlar tespit edilmiştir. Öğrencilerin belirlenen bilgi, beceri ve kavramlara ulaşmaları için yapılacak olan etkinlikler geliştirilmiştir. Etkinlikler geliştirilirken inşa sürecinde öğretmenin talimatlarıyla sürekli yönlendirdiği değil öğrencilerin bilgiyi kendilerinin yapılandıracakları şekilde bir öğretim dizisi hazırlanmıştır. Ayrıca bağlama dayalı etkinlikler tasarlanarak öğrencinin problem çözme isteği, merak ve motivasyonunun canlı tutulması amaçlanmıştır. Geliştirilen etkinlikler alan uzmanları ve deneyimli bir matematik öğretmeni tarafından kontrol edilmiştir. Öğretim sürecinde öğrencilere verilmesi planlanan ödevler ve geri dönüt kriterleri belirlenmiştir.

Öğretim tasarımına başlamadan önce geometrik inşaya yönelik programdaki kazanımlar araştırmacı tarafından incelenerek öğrenme yörüngesinde ifade edildiği gibi öğrenme hedefleri belirlenmiştir (bkz Tablo 8). Ayrıca öğrencilerin öğrendiklerini pekiştirmesi amacıyla çeşitli ödevler verilmiştir.

Öğrencilerin ilgili beceri, kazanım ve kavramlara ilişkin öğrenme durumlarını belirlemek amacıyla farklı düzey gruplarına göre belirlenen öğrencilerle bireysel olarak görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere verilen ödevler değerlendirilmiş, öğrencilerin ders içinde gözlemlenmesi ile bu veriler desteklenmeye çalışılmıştır.

Öğretim tasarımı öğrenme hedeflerinin belirlenmesi ile başlamıştır. Etkinlikleri ön plana alan bir öğretim planı ise etkinliklerin tasarlanması ile devam etmiştir. Öğretim planında değerlendirme ön plana çıkarılması düşünüldüğü için değerlendirme konuları üzerinde durulması (Anderson ve Krathwohl, 2001) gerektiğinden etkinlikler değerlendirme odaklı planlanmıştır. Ancak öğretim tasarımının hangi bileşenden başlandığına bakılmaksızın diğer bileşenler ile bir bütün oluşturmasına özen gösterilmiştir. Bu sebeple, öğretim planının etkinliğini artırmak için kazanımlar, etkinlik ve değerlendirme basamakları arasında uyum korunmaya çalışılmıştır. Öğretim planı, bütünsel olarak değerlendirileceği ve kavramların öğrenciye kazandırılmasında uyumun önemli olduğu düşünüldüğünden kazanım-etkinlik-değerlendirme basamakları bir bütün oluşturacak şekilde tasarlanmıştır.

Öğretim tasarımı öğrenme yörüngesinin b maddesi dikkate alınarak analizler gerçekleştirilmiştir. Bu sayede öğrenme yörüngesinin doğası gereği retrospektif analizlerin dönütleri ile gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Analiz sonuçları, bulgular kısmında öğrenme yörüngesinin analizi başlığı altında verilmiştir. Kazanım, öğretim etkinliği ve değerlendirme bileşenlerinin uyumlu olma süreci tasarımın uygulanabilirliği ve kazanımların öğrenci tarafından gerçekleştirilmesi hakkında dönütler vermektedir (Anderson ve Krathwohl, 2001).

3. 1. 5. Öğretim Planı Uygulama Süreci

Uygulama araştırmacı tarafından yürütülmüştür. Uygulamaya başlamadan önce hazırlanan öğretim planı ile ilgili alan uzmanları ve tez çalışmasının danışmanı olan uzman ile araştırmacı öğretim planı hakkında toplantılar gerçekleştirmiştir. Temel geometri kavramlarının inşası için geliştirilen etkinliklerin uygulanması öncesinde derslerin nasıl işleneceği, öğrenme yörüngesi ve uygulanışı, ortaokul öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerinin nasıl belirleneceği, derste nelere dikkat edilmesi gerektiği ve program dâhilinde geliştirilen materyallerin nasıl kullanılacağı ile ilgili bilgiler sunulmuştur.

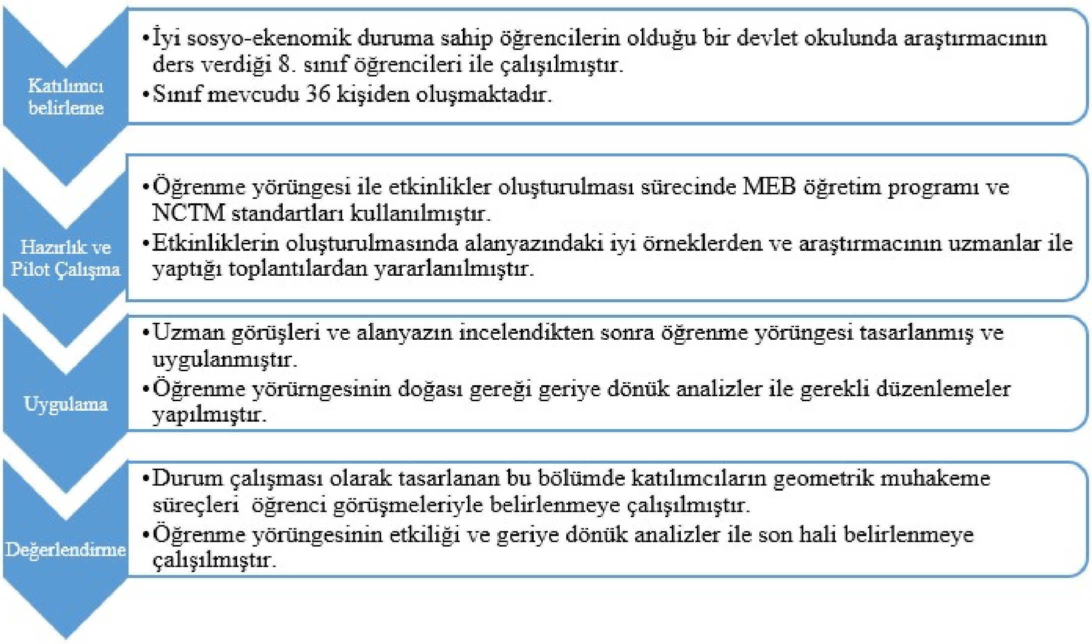
Araştırmacı öğrenme yörüngesinin üç basamağına uygun olarak etkinlikleri geliştirmiştir. Uzman görüşü almak amacıyla yapılan toplantılarda etkinliklerin her bir basamağında nelere dikkat edilmesi gerektiği hakkında değerlendirmeler yapılarak etkinlikler yeniden düzenlenmiştir. Öğrenme yörüngesinin doğası gereği ve de yapılandırmacı yaklaşıma uygun olarak (MEB öğretim programının da tavsiyesi buna paraleldir) dikkat edilmesi gereken hususlarından biri olan öğrenciye kavramların keşfettirilmesi gerektiği özellikle vurgulanmıştır. Etkinliklerin ilk analizi bu kıstasa uygun olup olmadığı yönünde gerçekleşmiştir.

3. 2. Araştırma Süreci

Araştırmanın geçirdiği süreçler izlenen metodolojinin bütüncül bir görüntüsünü ifade etmek amacıyla ele alınmaktadır. Araştırma süreci, özetlenmiş bir biçimde Şekil 11'de gösterilmektedir.

Şekil 11

. *Araştırma süreci özeti*



Yukarıdaki araştırma sürecinin daha iyi anlaşılması amacıyla aşağıdaki Tablo 5 hazırlanmıştır.

Tablo 5

Araştırma sürecinin aşamaları

Aşama	Yapılan İş
HAZIRLIK	Araştırma fikrinin belirlenmesi ve araştırma probleminin ortaya konması
	Araştırmanın yönünü belirleyecek alanyazın taraması
	Araştırma desen ve yönteminin tespiti
	Araştırmaya katılacak çalışma grubunun belirlenmesi
	Araştırma içinde MEB kazanımlarının tespiti
	Araştırmada geliştirilecek yörüngelerin belirlenmesi
	Kullanılacak veri toplama araçlarının tespiti
	Veri toplama araçlarının güvenirlik ve geçerliklerinin yapılması
PİLOT	Veri toplama araçları için uzman görüşü alınması
	Testlerin pilot uygulaması ve analiz süreci
	Öğrenme yörüngelerinin pilot uygulaması
İLK	Öğrenme yörüngelerinin geliştirilmesi
	Öğrenme yörüngelerinin esas uygulaması
İKİNCİ	Bilişsel ve duyuşsal testlerin uygulanması ve analizi
	Öğrencilerle geometrik muhakemeye yönelik görüşmelerin yapılması ve analizi
	Öğrenme yörüngelerinin geriye dönük analizi ve revize edilmesi
	Bulgu ve sonuçların raporlaştırılması

Hazırlık sürecinde araştırma probleminin ortaya koyulması ile ortaokul öğrencilerinin zihninde geometrik muhakemenin nasıl gerçekleştiğinin belirlenmesi ve bu geometri kavramlarının inşasının öğretim sürecinin desteklenmesi amaçlanmıştır.

Araştırmanın yörüngesinin belirlenmesi amacıyla alanyazın incelemesi yapılmış, özellikle de literatürde kullanılan etkinlik ve değerlendirme araçları incelenmiştir. Kuramsal çerçevenin belirlenmesi ve ilgili kavramların ilişkisinin belirlenmesi de bu aşamada yapılmıştır.

Araştırmanın yöntemi iki aşamalı olarak belirlenmiş ve ilk aşama öğrenme yörüngesinin tasarım tabanlı araştırma olarak inşa edilmesi, ikinci aşama ise öğrencilerin muhakeme süreçlerinin durum çalışması olarak ele alınması olmuştur. Araştırmanın katılımcıları belirlenirken, öncelikle sosyo-ekonomik açıdan okul ve ortam incelenmiş, araştırma sürecinin kontrolü ve ilerlemesinde rehberlik edecek uzmanlar belirlenmiş ve araştırmada uygulanacak veri toplama araçları için gerekli izinler alınmıştır. Araştırma sürecinde uygulama yapılacak öğrenme hedefleri belirlenirken MEB Ortaokul Matematik Öğretim Programı (2013) geometri öğrenme alanında yer alan geometrik inşaya yönelik hedeflere ilişkin kazanımlarının listelenmiştir.

Araştırma için öğrenme yörüngesi oluşturulurken, literatür incelenerek öğretimde kullanılacak yörüngelerin basamakları ve temel geometri kavramları hakkındaki yanılgılar belirlenmiş ve yörünge içerisine dahil edilmiştir. Öğrenme yörüngesi içerisine bağlama dayalı etkinlikler ve ödevler yerleştirilmiş, öğrenme yörüngesi temelinde öğretim tasarımının gelişimine yönelik somut manipülatifler belirlenmiş ve yerleştirilmiştir. Araştırma sürecinde kullanılacak veri toplama araçları olarak, muhakeme becerilerini belirlemeye yönelik görüşme soruları hazırlanmış ve araştırmacı alan notları kullanılmıştır. Geçerlik ve güvenirlik prosedürleri belirlenmiş ve uygulamaları yapılmıştır

Pilot uygulama aşamasında esas uygulamada karşılaşılabilecek aksaklıkların giderilmesi amaçlanmıştır. Bu aksaklıkları giderecek müdahaleler gerçekleştirilmiştir.

Veri toplama araçları (testler ve görüşme soruları) uzman görüşüne sunulmuş ve pilot uygulamaları yapılmış, uzman görüşü ve pilot uygulama sonrasında gerekli düzeltmeler gerçekleştirilmiştir. Testlerin uygulamasının yapılması ve analizi, çalışma gruplarına testlerin uygulanması ve gerekli analizlerin yapılmasıdır; bu ön uygulamada öğrencilerin hazırbulunuşluklarını incelemek ve onların geometrik düşünme seviyelerini belirlemek amaçlanmıştır. Bu süreç öğrenme yörüngesinin gelişimi bakımından önemlidir.

Araştırmanın ilk aşamasında, tasarım tabanlı araştırmanın varsayımlarına uygun olarak öğrenme yörüngesi geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Bu süreç tasarım tamamlanana kadar devam etmiştir. Öğrenme yörüngesinin doğası gereği etkinlikler sürekli olarak incelenmiş ve geliştirilmiştir. Öğrenci ve sınıf düzeyine uygun olarak öğrenme yörüngesi oluşturulurken, her bir kazanıma ulaşma durumuna göre öğrenme yörüngesi sürekli düzenlenmiştir. Bu düzenlemeler literatür temele alınarak ve uzmanlar ile araştırmacı birlikte değerlendirmeler yapılmasıyla gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın ikinci aşamasında, öğrencilerin muhakeme süreçleri ve gerekli testlerin analiz sürecinin değerlendirilmesi yer almaktadır. Testlerin uygulanması ve analizi sonucunda elde edilen verilere göre çalışma grubundan seçilen öğrencilerle görüşmeler yapılarak öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Öğrenme yörüngelerinin geriye dönük analizi yapılarak öğretim esnasında yaşanan sıkıntıların giderilmesi yönünde bazen ara etkinlik görevleri eklenerek bazen de öğretim yönteminde değişikliğe gidilerek daha işlevsel ve amacına uygun olacak şekilde revize edilmesi sağlanmıştır.

Bulgular ve Sonuçlar kısmında ise testlerin analiz edilmesi ve öğrenme yörüngesinin değerlendirilmesi yer almaktadır. Bu aşamada öğrencilerin geometrik inşa ve geometrik muhakeme süreçleri irdelenmiş ve raporlaştırılmıştır.

3. 3. Katılımcılar

Araştırmalarda örneklemeler belirli bir amaca hizmet etmektedir (Lincoln ve Guba, 1985). Nitel araştırmalar, genellikle amaçlı bir şekilde seçilmiş zengin bilgi içeren küçük örneklemlerle detaylı bir şekilde yapılır (Patton, 2014). Öğrencilerin bilgi yapılarını ve düşünme süreçlerini ortaya çıkarmadaki etkililiğinin belirlenmesi ve öğrenme yörüngesi vasıtasıyla geliştirilen etkinliklerin kullanışlılığının ve gerçek sınıf ortamında veya durumlarında uygulanabilirliğinin ortaya çıkarılması amacıyla gerçekleştirilen pilot uygulama için çalışma grubu oluşturulmuştur. Araştırmanın pilot uygulaması kapsamında etkinliklere katılacak öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir. Yıldırım ve Şimşek (2018)'a göre amaçlı örnekleme, zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına olanak sağlayan bir örnekleme yöntemidir. Ölçüt örnekleme ise araştırmanın örneklemine belli bir kıstasın getirilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Araştırmacının görev yaptığı okulda yaz kursunda bir sınıfta bulunan öğrenci sayısının az oluşu bir kıstas olarak belirlenmiştir. Böyle bir kıstasın uygulanması yapılacak etkinliklere optimum geri bildirim alabilmek ve esas uygulamada eksiklerin giderilmesini sağlamaktır. Bu doğrultuda araştırmanın pilot uygulamalarının gerçekleştirilmesinde yaz kursunda yer alan 8. sınıfın mevcudu 10 kişidir. Esas uygulamanın çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemi ile oluşturulmuştur. Çalışmaya katılan öğrencilere ait gerekli bilgiler Tablo 6'da yer almaktadır.

Tablo 6

Katılımcılara ait bilgiler

Öğrenci Sayısı	Sınıf Düzeyi	Uygulama Türü	Çalışma Grubu
10	8. sınıf	Grup etkinliği	Pilot
36	8. sınıf	Yüz yüze	Esas
3	8. sınıf	Görüşme	Esas

Öğrenme yörüngelerinin geliştirilmesi ve uygulaması 2018-2019 Eğitim- Öğretim yılı boyunca gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma için gerekli olan izinler Milli Eğitim Müdürlüğü, Kaymakamlık (Ek 1) ve velilerden (Ek 2) sözlü ve yazılı olarak temin edilmiştir.

Bu çalışmada öğretim tasarımı olarak geliştirilen öğrenme yörüngeleri doğrultusunda gerçekleştirilen öğretim deneyleri bir devlet okulunda öğrenim gören 8. sınıf öğrencileriyle yürütülmüştür. 36 kişiden oluşan bu sınıfın velilerinden de onay alınarak öğrencilerin araştırmaya katılmaları sağlanmıştır. Çalışma grubundaki öğrenciler 13 ile 14 yaşları arasındadır. Öğrencilerin çoğunluğu iyi sosyo-ekonomik düzeyden oluşmuştur. Öğrenciler, öğretmen tarafından atanan iki kişilik gruplar halinde oturmuşlardır.

Temel geometri kavramlarının inşası sürecinde katılımcıların geometrik muhakemelerine yönelik ayrıntılı veri toplanabilmesi için öğretim deneyleri arasında ve sonunda öğrencilerle görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Bu görüşmelerin yapılacağı odak katılımcılar ise ölçüt örnekleme yoluyla belirlenmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Öğretim deneyleri öncesinde öğrencilere Van Hiele Geometrik düşünme düzeyleri testi uygulanmış her bir düzeyde yer alan birer öğrenci odak katılımcı olarak seçilmiştir. Öğrencilere uygulanan geometrik düşünme seviyelerini belirleyici testlerden aldıkları puanlara göre düşük, orta ve yüksek şeklinde kategorilere ayrılmıştır. Bu sınıflamadan sonra farklı öğretmenlerin öğrenciler hakkındaki görüşleri de alınarak üç farklı düzeyden belirlenen öğrencilerle görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmelere katılan öğrencilerin betimsel özellikleri Tablo 7'de görülmektedir.

Tablo 7

Görüşmeye katılan öğrencilerin betimsel özellikleri

Öğrenci Adı	Okul	Cinsiyet	Düzey
Ayşe	Uygulama Okulu	Kız	Düşük
Merve	Uygulama Okulu	Kız	Orta
Kaan	Uygulama Okulu	Erkek	Yüksek

Araştırmacı çalışmanın öğretim aşamasında, öğrenme yörüngesinin hazırlanmasında, geriye dönük analizler ile revize edilmesinde aktif olarak süreci yönetmiştir. Dersin tasarlanmasında araştırmacı, dersin öğretimi sürecinde öğretmen olarak çalışmıştır. Araştırmacı, öğrenme yörüngesinin uygulamasına ilişkin uzmanlar ile yapılan pazarlık süreçlerinde bilimsel kanıt arayışı içinde olmuştur. Araştırmacı 10 yıllık öğretmenlik deneyimine sahip bir matematik öğretmeni olarak kendi dersine girdiği sınıfı öğrencileri bilişsel ve duyuşsal olarak tanıdığından katılımcı olarak belirlemiştir.

3. 4. Öğrenme Yörüngeleri Oluşturulma Süreci

Öğrenme yörüngeleri hazırlanırken MEB Ortaokul Matematik Öğretim Programı (MEB, 2013) temel alınarak geometri öğrenme alanına ait kazanımlar listelenmiştir. Geometri öğrenme alanına ait kazanımlar 5. sınıftan itibaren her sınıf düzeyinde yer almaktadır. Temel geometrik kavramların inşasına yönelik kazanımlar da yine bütün sınıf düzeylerinde yer almaktadır. Öğrenme yörüngeleri bu kazanımların öğretilmesine yönelik tasarlanmıştır.

Öğrencilerin zihninde gerçekleşen geometrik muhakeme süreçlerinin daha iyi irdelenebilmesi adına 8. sınıf düzeyi uygulama için seçilmiştir.

3. 4. 1. Geometrik İnşa Öğrenme Hedefleri

Tablo 1'de yer alan kazanımlar ışığında temel geometrik kavramların inşasına yönelik tasarlanan öğrenme hedefleri ve bu hedeflere yönelik planlanan ders süresi Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8

Öğrenme hedefleri ve uygulama süreleri

Öğrenme Hedefi	Ders saati
1. Pergel ve çizgeç yardımıyla eş doğru parçaları ve eş açılar inşa eder.	2
2. Bir doğru parçasının orta noktasını bulur ve orta dikmesini inşa eder.	2
3. Farklı üçgen sınıflamasına ait üçgenler (eşkenar, ikizkenar, çeşitkenar vb.) inşa eder.	3
4. Bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme çizer.	2
5. Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme çizer.	2
6. Bir doğruya paralel bir doğru inşa eder.	2
7. Bir açıyı iki eş açıya ayırarak açıortayı inşa eder.	2
8. Üçgenin yüksekliklerini inşa eder.	2
9. Üçgenin açıortaylarını inşa eder.	2
10. Üçgenin kenarortaylarını inşa eder.	2
11. Yeterli sayıda elemanı verilen üçgenleri inşa eder.	3

Tablo 8 incelendiğinde temel geometrik kavramların inşasına yönelik tasarlanan öğrenme yörüngesinde 11 öğrenme hedefi için öğretim süresi olarak toplam 24 ders saati olduğu görülmektedir. Toplam 8 hafta olarak planlanan öğrenme yörüngesi Matematik Uygulamaları ve Matematik derslerinde uygulanmıştır.

3. 4. 2. Hazırlık Aşaması

Hazırlık aşaması, öğrenme hedeflerinin belirlenmesi ve bu hedeflerin tasarlanan düşünsel deneylerle bütünleştirilmesi ile başlamaktadır. Öncelikle literatür taramasıyla geometrik inşaya yönelik öğrencilerde var olan kavram yanılgıları belirlenmeye çalışılmıştır. Literatür incelendiğinde genel olarak öğrencilerin geometrik inşa adımlarını ezberledikleri bu yüzden geometrik düşünmeyi harekete geçiremediği görülmüştür (Erduran ve Yeşildere, 2010).

Ayrıca bağlam temelli içeriklerin öğrencilerin anlamlı öğrenmeler gerçekleştirmesine olanak sağladığı ve kavram yanılgılarını en aza indirdiği görülmüştür (Drijvers ve diğerleri, 2011). Buna ek olarak inşa adımlarını gerçekleştirirken öğrencinin keşfederek ilerlemesini sağlamak ve her bir adımda gerekçeleri üzerine konuşarak geometrik düşünme harekete geçirilebileceği düşünülmektedir.

Öğrenme yörüngeleri; (a) öğrenme hedefleri, araştırmanın amacı doğrultusunda temel geometrik kavramların inşasına yönelik kazanımlar çalışmaya dahil edilmiş ve öğrenme hedefleri bu çerçevede belirlenmiştir, (b) etkinliklerin tasarlanması, bu aşamada öğrenme hedeflerine yönelik kavramsal çerçevede yer alan kavramlardan yararlanarak bağlam temelli etkinlikler tasarlanmıştır ve (c) sınıfta uygulanacak öğretim etkinliklerinin öğrencilerin geometrik düşünmelerine ve öğrenmelerine nasıl etki edeceği ve sürecin nasıl ilerleyeceğinin tahmin edilmesini içeren gelişimsel ilerlemeler olmak üzere üç aşamadan oluşmaktadır.

3. 4. 3. Öğretim Etkinliklerinin Tasarlanması

Öğrencilerin temel geometrik kavramları inşasına yönelik muhakeme süreçlerinin ortaya çıkarılması amacıyla tasarlanan öğrenme yörüngeleri doğrultusunda öğretim etkinlikleri ve bu etkinliklerde yer alacak materyaller geliştirilmiştir. Geliştirilen etkinlikler uygulama sürecinde yeniden düzenlenebilir. Geliştirilen etkinliklerin uygulanabilirliğini ve geçerliğini görebilmek için pilot uygulama yapılmıştır. Pilot uygulama video veya ses kaydına alınmış, incelenmiş ve analizleri yapılmıştır. Öğrenme hedeflerine ulaşmada yetersiz kaldığı düşünülen etkinlikler uzman ekip tarafından değerlendirilmiş ve revize edilmiştir.

3. 4. 4. Öğretim Deneyi Aşaması

Tasarım araştırması olan öğretim deneyinin temel amacı, öğrencilerin öğrenme ve muhakeme süreçlerinin araştırmacılar tarafından gözlemlenmesidir (Steffe ve Thompson, 2000). Öğretim ortamı tasarımı araştırmasının çekirdeğini oluşturan öğretim deneyi, birkaç ders saati olabileceği gibi öğretim yılı boyunca da gerçekleştirilebilir (Moss, 2014). Öğretim deneyinde öğretmen, öğrenci grubu ve gözlemci yer alabileceği gibi öğretmen-araştırmacı deney sürecinde gözlemci olarak da yerini alabilir (Molina ve diğerleri, 2007). Öğretim deneyleri, öğretim etkinliklerini geliştirme ve test etme döngüsü içerisinde öğrencilerin öğrenmelerinin analizine olanak sağlar.

Araştırmada tasarlanan öğretim deneyi ile amaçlanan öğrencilerin temel geometrik kavramların inşasına yönelik geliştirdikleri muhakeme süreçlerini daha iyi açıklayabilmek için ihtiyaç duyulan verilerin toplanmasına iyi bir zemin oluşturulmasına olanak sağlamaktır.

Öğretim deneylerinin hazırlık aşamasında öğretmen ve araştırmacı matematiksel fikirlerin öğrenme ortamına nasıl uyarlanabileceğine ilişkin değerlendirmeler yaparak uygulanacak etkinlikleri tasarlarlar. Bu değerlendirme neticesinde öğretmen etkinlikleri iyi bir şekilde özümsemiş olarak sınıfta uygulayabilecek düzeyde olur. Ayrıca her etkinlik sonrasında öğretmen, araştırmacı ve uzman ekip uygulamanın değerlendirmesini yaparlar.

Bir kavramın öğretiminde planlı bir öğretim müdahalesi olarak tanımlanan öğretim deneyi, bağlamına ve öğrenci tepkilerine göre şekillendiğinden net bir çerçeve belirtilmemiştir (Steffe ve Thompson, 2000; Confrey ve Lachance, 2000). Belirli bir süreci inceleyen öğretim deneyinde araştırmacı öğrenci davranışlarının altındaki anlamı sürekli sorgulamalı ve değerlendirmelidir (Moss, 2014)

Öğretim deneyi, yani öğrenme yörüngesi çerçevesinde geliştirilen etkinliklerin uygulaması toplam 8 haftayı kapsamaktadır. Uygulama ses veya video kaydına alınmış ve sonrasında araştırmacı-öğretmen ve uzman ekip tarafından incelenerek değerlendirmeler yapılmıştır. Bu değerlendirmeler ışığında öğrenme yörüngesi revize edilmiştir. Araştırmada tasarlanan etkinlikler yinelemeli tasarım kapsamında düzenlenmiştir.

Bir öğretim deneyinde, etkinliklerin geliştirilmesi ve denenmesi, müdahalelerin tasarlanması, veri toplanması, analiz edilmesi ve tasarımın revize edilmesi yinelemeli bir süreçtir. Bu süreçte öncelikle öğrenme yörüngesini temel alan, araştırmacının önceki deneyimleri ve teorik varsayımlarına dayanan deneysel bir model oluşturulur. Sonrasında sınıf içerisinde öğretim gerçekleştirilerek veri toplanır ve bu veriler ışığında ilk varsayımlar onaylanarak, reddedilerek veya revize edilerek öğrenme yörüngesi düzenlenir. Süreç bu döngü içerisinde devam ederek nihai tasarım ortaya konur. Araştırmacı bu süreçte tasarlanan modelin beklendiği şekilde çalışıp çalışmadığını kontrol eder ve eldeki verilere dayanarak öğrenme yörüngesini revize eder.

Bu araştırmada temel geometrik kavramların inşasına yönelik öğrenme yörüngeleri tasarlanmıştır. Bu öğrenme yörüngelerinde öğrenme hedefleri ifade edilmiş, bu hedeflere yönelik etkinlikler tasarlanmıştır. Öğretim esnasında beklenen hatalar ve öğretim sürecinde öngörülen gelişimsel ilerlemeler belirlenmiştir. Ayrıca öğrenme hedeflerine ulaşmada öğrenciler tarafından sergileneceği öngörülen kritik eylemler ifade edilmiştir. Öğretim öncesinde tasarlanan olası öğrenme yörüngeleri Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 9

Uygulama öncesinde tasarlanan olası öğrenme yörüngeleri

Bu öğrenme hedefinde elde edilmek istenen asıl kazanım, pergelin öğrenci zihninde var olan çember çizme işlevinin açı ve uzunluk ölçmeyi de kapsayacak şekilde genişlemesini sağlamaktır. Pergele matematiksel olarak anlam yüklemek temel hedef olmuştur.

Öğrenme Hedefi1: Pergel ve çizgeç ile eş doğru parçaları inşa eder.

Etkinlik 1: Farklı Olanı Bul! (doğru parçası)

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Etkinlikte verilen bağlamı anlama
2. Doğru parçalarının uzunluğu pergelin açıklığını kullanarak ölçme
3. Eşit uzunluktaki doğru parçalarını eşleştirme
4. Farklı uzunlukta olan doğru parçasını bulma
5. Bir başlangıç noktası belirleyip aynı açıklığı ölçerek yeni doğru parçasını oluşturma

Etkinlik 2: Farklı Olanı Bul! (açı)

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Açıyı ölçebilmek için herhangi bir yarıçapa sahip bir yay çizme
2. Ölçülmek istenen bütün açılara aynı yarıçapa sahip yaylar çizme
3. Pergel açıklığını kullanarak çizilen bu yayların uzunluğunu ölçme ve diğer yaylarla karşılaştırma
4. Eş açıları eşleştirme ve farklı olan açıyı belirleme
5. Bu açıya eş bir açı çizmek için herhangi bir uzunlukta bir doğru parçası çizerek açının köşesini belirleme ve belirlenen yayı bu doğru parçasının üzerine aktarma yayın uzunluğunu diğer açıyla eş olacak şekilde işaretleme
6. İşaretlenen yerden geçecek şekilde açının diğer kolunu inşa etme

Beklenen hatalar

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- Pergel yerine çizgeç üzerinde işaretleme yaparak doğru parçasının uzunluğunu ölçmeye çalışma
- Yanlış ölçüm yapma

Kritik Eylemler

1. Çemberin uzunluk ölçme işlevini keşfetme

2. Çemberin bir noktaya eşit uzaklıktaki olası tüm noktaların geometrik yeri olduğunu kavrama
3. Açı ölçmenin aslında açıklığı ifade eden yay uzunluğu ölçme olduğunu fark etme

Öğrenme hedefi 2: Bir doğru parçasının orta noktasını bulur ve orta dikmesini inşa eder.

Etkinlik 3: Terazi Dayanağı

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Dayanak noktasının terazi kolunun tam ortasında olması gerektiğinin farkına varma
2. Terazi kefelerinin dayanak notasına eşit uzaklıkta olduğunun farkına varma.
3. Uç noktaları merkez kabul eden herhangi bir yarıçapta eş çemberler çizerek o uzaklıktaki olası noktaları belirleme
4. Çizilen çemberlerin kesim noktalarının tam orta noktaya dik şekilde sıralandığını fark etme
5. Kesim noktalarını birleştirdiğinde orta dikme olduğunu ifade etme

Beklenen hatalar

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- Rasgele göz kararı bir nokta belirleme
- Çizim esnasında kayma vs gibi hatalar yapma

Kritik Eylemler

1. Doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktaki noktalar birleştirildiğinde orta noktadan geçtiğini fark etme
2. Uç noktalardan çember çizerken açıklığın doğru parçasının uzunluğunun yarısından biraz fazla olması gerektiğini ifade etme.
3. Farklı yarıçapta çemberler çizilse bile kesişim noktalarının birleşiminin daima orta dikme doğrusu üzerinde olacağını fark etme

Öğrenme hedefi 3: Farklı üçgen sınıflamalarına ait üçgenler (eş kenar, ikiz kenar, dik vb.) inşa eder.

Etkinlik 4: Eşkenar üçgen inşa ediyoruz.

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Eşkenar üçgenin tanımlanması ve özelliklerini ifade etme
2. Herhangi bir uzunlukta bir doğru parçası inşa etme (üçgenin herhangi bir kenarı)
3. Doğru parçasının iki ucundan aynı pergel açıklığı ile çemberler çizerek diğer iki kenarın olası durumlarının belirleneceğinin farkına varma

4. Çizilen çemberlerin kesişim noktasını üçüncü köşe olarak belirleme
5. Köşeleri birleştirerek eşkenar üçgeni inşa etme

Etkinlik 5: İkizkenar üçgen inşa ediyoruz

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. İkizkenar üçgenin tanımlanması ve özelliklerini ifade etme
2. Bir çember çizip merkez tepe noktası ve diğer köşeler çember üzerinde herhangi iki nokta olacak şekilde ikizkenar üçgen inşa etme
3. Bu ikizkenar üçgende ikiz olan kenarların yarıçapa eşit olacağını ifade ederek matematiksel olarak doğrulama
4. Bir doğru parçası inşa etme ve uç noktalardan eş çemberler çizerek bu çemberlerin kesişim noktasını tepe noktası olarak belirleme
5. Tepe noktasını uç noktalarla birleştirerek ikizkenar üçgeni inşa etme

Etkinlik 6: Çeşitkenar üçgen inşa ediyoruz.

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Verilen doğru parçalarının uç uca eklenerek üçgen inşa edilmesi gerektiğini fark etme
2. Uzunlukların herhangi birini pergel açıklığı ile belirlenen yere taşıma
3. Diğer iki doğru parçasını da aktarılan doğru parçasının uçlarına taşıma
4. Pergel ile belirlenen yarıçaplarda uç noktalara çemberler çizip kesiştirme
5. Kesişim noktasını üçüncü köşe olarak belirleyip üçgeni inşa etme

Beklenen hatalar

- Önceki kazanımlarda elde edilen becerileri hatırlayıp yeni duruma yansıtamama
- Üçgenlerle ilgili bilgi eksikliğinden kaynaklı ilerleyememe

Kritik Eylemler

1. Doğru parçalarının aktarırken olası tüm durumları düşünerek ifade etme
2. Eşkenar üçgen inşa ederken kenar uzunluklarının değişebilecekken açıların hep aynı kalacağını fark etme
3. Eşkenar üçgen inşasında açıölçer kullanmadan 60’lık açının pergelle çizilebildiğini fark etme
4. İkizkenar üçgen inşasında tepe noktası merkez ve ikiz olan kenarlar yarıçap olacak şekilde çember çizerek inşa edilebileceğini ifade etme
5. Orta nokta etkinliğinde kullanılan ikizkenar üçgeni hatırlama ve ikizkenar üçgenin orta noktasını bulup yüksekliğini inşa etme

Öğrenme hedefi 4: Bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme inşa eder.

Etkinlik 7: Füze fırlatma

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Fırlatma güzergahının fırlatma noktasından çizilen bir dikme olduğunu ifade etme
2. Orta dikme inşa etme sürecinde ortaya çıkan ikizkenar üçgen ile ilişkilendirerek bir doğruya üzerindeki bir noktadan (B noktası) çizilecek dikmenin burada inşa edilecek bir ikizkenar üçgenin yüksekliği olacağının farkına varma
3. B noktasına eşit uzaklıkta iki nokta belirleyerek bu noktaları ikizkenar üçgenin taban köşeleri olarak ifade etme
4. Taban köşelerinden eşit yarıçaplı çemberler çizerek bu çemberlerin kesiştikleri noktayı ikizkenar üçgenin tepe noktası olarak belirleme
5. B noktası ile tepe noktasını birleştirerek dikmeyi inşa etme

Beklenen hatalar

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- İkizkenar üçgenin özelliklerini fark edememe ve yeni duruma yansıtılamaması
- Araçları işlevine uygun kullanamama

Kritik Eylemler

1. Orta dikme inşasındaki ikizkenar üçgen oluşumunu bu noktadan çizilebilecek dikme ile ilişkilendirme
2. Dikmeyi çizdikten sonra matematiksel gerekçelendirme ve genel bir çözüm olduğunu doğrulama

Öğrenme hedefi 5: Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa eder.

Etkinlik 8: Ağaçtaki elma

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Elmanın düşüş güzergahının bulunduğu noktadan (C noktası) çizilen bir dikme olduğunu ifade etme
2. Etkinlik 7'ye benzer şekilde inşa edilen ikizkenar üçgen ile ilişkilendirerek bir doğruya dışındaki bir noktadan (C noktası) çizilecek dikmenin, tepe noktası C noktası ve tabanı doğru üzerinde olacak şekilde inşa edilecek bir ikizkenar üçgenin yüksekliği olacağının farkına varma
3. Doğru üzerinde C noktasına eşit uzaklıkta iki nokta belirleyerek (C merkezli doğruyu kesen bir çember çizdiğimizde çember ile doğrunun kesiştiği noktalar) bu noktaları ikizkenar üçgenin taban köşeleri olarak ifade etme

4. Taban köşelerinden C noktasından geçecek şekilde çemberler çizip bu çemberlerin kesiştikleri noktayı birleştirerek dikmeyi inşa etme

Beklenen hatalar

- İkizkenar üçgenin özelliklerini fark edememe ve yeni duruma yansıtılamaması
- Araçları işlevine uygun kullanamama

Kritik Eylemler

1. Orta dikme inşasındaki ikizkenar üçgen oluşumunu bu noktadan çizilebilecek dikme ile ilişkilendirme
2. Dikmeyi çizdikten sonra matematiksel gerekçelendirme ve genel bir çözüm olduğunu doğrulama

Öğrenme hedefi 6: Bir doğruya paralel bir doğru inşa eder.

Etkinlik 9: Ok çizelim

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Bağlamı okuma ve anlama
2. Etkinlikte verilen ok ile aynı yönde gidecek okun paralel olması gerektiğinin farkına varma ve paralellik kavramını sorgulama
3. Oku kesen herhangi bir doğru çizme
4. Okun bu doğru ile oluşturduğu açıyı doğrunun üzerinde yöndeş açı olacak şekilde herhangi bir yere taşıması gerektiğinin farkına varma
5. Doğru ile okun arasında oluşan açıyı pergel ile ölçme
6. Doğru üzerinde herhangi bir nokta belirleme ve açıyı buraya taşıma
7. Paralel doğruyu bu açıya uygun şekilde inşa etme

Beklenen hatalar

- Paralel kavramı fikrine ulaşamama
- Ok ile açı oluşturacak şekilde bir doğru çizme ve bu açıyı taşıma fikrine ulaşamama
- Açıyı taşıyamama veya yanlış taşıma

Kritik eylemler

1. Yöndeş açı paralellik ilişkisini fark etme
2. Açı taşıma becerisini yansıtma
3. Paralellik durumunu matematiksel olarak ifade etme

Öğrenme hedefi 7: Bir açıyı iki eş açıya ayırarak açıortayı inşa eder.

Etkinlik 10: Pizzayı paylaşalım.

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Bağlamı doğru anlama
2. Eşit bir şekilde paylaşabilmek için daire diliminin yay kısmının orta noktasını bulmak gerektiğinin farkına varma
3. Pergelle doğrunun orta noktasını bulma oluşumunu yay üzerine de benzer şekilde yansıtma
4. Yay kısmın iki ucundan eş çemberler çizerek kesiştirme
5. Kesişim noktasını çizgeç yardımıyla köşe ile birleştirerek pizza dilimini eşit iki parçaya ayırma
6. İnşa edilen bu doğru parçasının açıortay olduğunu ve açıyı ikiye böldüğünü ifade etme

Beklenen hatalar

- Pizzayı rastgele ikiye bölmeye çalışma
- Pizza diliminin yay kısmını eşit iki parçaya bölmesi gerektiği fikrine ulaşamama
- Doğrunun orta noktası bulma inşasını yeni duruma yansıtamama

Kritik eylemler

1. Yeni bir durum için önceden elde edilen inşa becerilerini gözden geçirme
2. Orta nokta bulma becerisinin yeni durumla benzerliğini fark etme ve yansıtma
3. Pizza dilimi eş iki parçaya ayrıldığında açıların da eş iki parçaya ayrıldığını ifade etme
4. Ortaya çıkan yeni doğrunun açıortay doğrusu olduğunu ifade etme
5. Açıortay kavramını matematiksel olarak ifade etme
6. Açıortay doğrusunun üzerindeki noktaların açının kollarına eşit uzaklıkta olacağını ifade etme ve ölçümler yaparak doğrulama

Öğrenme hedefi 9: Üçgenin açıortaylarını inşa eder.

Etkinlik 11: Açıortayları çizelim.

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Üçgenin bir iç açısına bir yay çizme ve yayın uç noktalarından eş çemberler çizme
2. Bu çemberlerin kesişim noktalarını köşe ile birleştirerek açıortayı inşa etme
3. Benzer şekilde diğer köşelerin açıortaylarını inşa etme
4. Açıortayların kesim noktasını bulma ve ifade etme
5. Kesim noktasından çizilen çemberin iç teğet çemberi olduğunu ifade etme

6. Geniş açılı ve dik üçgenin de benzer şekilde açıortaylarını inşa etme

Beklenen hatalar

- Açıortay inşasını yeni duruma yansıtamama
- Çizim kaynaklı hatalardan dolayı açıortayların tek bir noktada kesişmemesi

Kritik eylemler

1. Açıortay kavramını matematiksel olarak ifade etme
2. Açıortayların her zaman bir noktada kesiştiğini uygulamalı gösterme ve ifade etme

Öğrenme hedefi 10: Üçgenin kenarortaylarını inşa eder.

Etkinlik 12: Kenarortayları çizelim.

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Üçgenin her bir kenarının orta noktasını bulma
2. Bu orta noktaları karşısındaki köşe ile birleştirerek kenarortayları inşa etme
3. Kenarortayların kesim noktasını bulma ve ifade etme
4. Kenarortayların kesim noktasının ağırlık merkezi olduğunu ifade etme
5. Geniş açılı ve dik üçgenin de benzer şekilde kenarortaylarını inşa etme

Beklenen hatalar

- Bir doğru parçasının orta noktasını bulma inşasını yeni duruma yansıtamama
- Çizim kaynaklı hatalardan dolayı kenarortayların tek bir noktada kesişmemesi

Kritik eylemler

1. Kenarortay kavramını matematiksel olarak ifade etme
2. Kenarortayların her zaman bir noktada kesiştiğini uygulamalı gösterme ve ifade etme

Öğrenme hedefi 11: Üçgenin yüksekliklerini inşa eder.

Etkinlik 13: Yükseklikleri çizelim.

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Etkinlikte verilen üçgenlerin boylarını karşılaştırma
2. Dik üçgende dik kenarın aynı zamanda yükseklik olduğunu fark etme
3. Geniş açılı üçgende bazı yüksekliklerin dış bölgede olduğunu fark etme
4. Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşasını her bir kenar için uygulama
5. Yüksekliklerin kesim noktasını bulma ve ifade etme
6. Geniş açılı üçgende yüksekliklerin uzantılarının bir noktada kesiştiğini fark etme

7. Her bir üçgen sınıflamasına ait (dar açılı, geniş açılı, eşkenar, ikizkenar üçgen vs.) yükseklikleri inşa etme

Beklenen hatalar

- Önceden elde ettiği dikme inşa becerisini yeni duruma yansıtamama
- Çizim kaynaklı hatalardan dolayı yüksekliklerin tek bir noktada kesişmemesi
- Geniş açılı üçgende bazı yükseklikler üçgen dışında olacağından yüksekliği çizememe

Kritik eylemler

1. Bir üçgende yüksekliklerin daima bir noktada kesiştiğini uygulamalı gösterme ve ifade etme
2. Yüksekliklerin kesim noktasının dar açılı üçgende üçgenin iç bölgesinde, dik açılı üçgende ise dik olan köşede yer aldığını uygulamalı gösterme ve ifade etme
3. Geniş açılı üçgende yüksekliklerin uzantılarının tek noktada kesiştiğini uygulamalı olarak gösterme ve ifade etme

---

Öğrenme hedefi 12: Yeterli sayıda elemanı verilen üçgeni inşa eder.

Etkinlik 14: Üçgenin kopyasını çiz!

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Etkinlikte verilen bağlamı anlama

(Bu adımdan sonra 3 farklı yol izlenebilir. Hatta sınıf ortamında bütün yolların gruplar tarafından tercih edilmesi istenen bir durumdur. Tercih edilmediği durumlarda alternatif başka hangi yollar kullanılabileceği konusunda öğrencilerin düşünmesi teşvik edilmelidir.)

- Yol: (Açı-Kenar-Açı)

1) Verilen üçgenin kopyasını oluşturmak için bir kenarı ve bu kenara komşu olan açıları taşıması gerektiğinin farkına varma
2) Üçgenin herhangi bir kenarını pergel ile ölçerek herhangi bir yere taşıma
3) Pergelin açıklığını kullanarak bu kenara komşu olan açıları sırayla ölçme ve yeni üçgen kenarının uçlarına taşıma
4) Bu açıların kollarının kesiştiği noktayı üçüncü köşe olarak belirleyerek kopya üçgeni oluşturma

- Yol: (Kenar-Kenar-Kenar)

1) Verilen üçgenin kopyasını oluşturmak için kenarları uç uca ekleyerek taşıması gerektiğinin farkına varma

2) Üçgenin herhangi bir kenarını pergel ile ölçerek herhangi bir yere taşıma
3) Diğer kenarın uzunluğunu pergel açıklığı ile ölçme
4) Bu açıklıktaki olası doğru parçalarının yerini belirlemek için ilk taşınan doğru parçasının uç noktası merkez olacak şekilde belirlenen açıklıkta çember çizme
5) Benzer şekilde diğer uca noktasına da üçüncü kenar açıklığında çember çizme
6) Çemberlerin kesiştiği noktanın üçüncü köşe olacağını fark etme
7) Çemberler iki noktada kesiştiğinden üçüncü köşe için iki olası durum olduğunu ifade etme

- Yol: (Kenar-Açı-Kenar)

1) Verilen üçgenin kopyasını oluşturmak için bir açıyı ve bu açının kollarını oluşturan kenarların taşınması gerektiğinin farkına varma
2) Üçgenin herhangi bir kenarını pergel ile ölçerek herhangi bir yere taşıma
3) Bu kenarın oluşturduğu açıyı pergel açıklığı ile ölçme ve ilk taşınan doğru parçasının uç noktasına taşıma
4) Bu açının diğer kolunu oluşturan kenarı pergel açıklığıyla ölçme ve taşıma

Beklenen hatalar

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- Eş üçgenlerde açıların da taşınması gerektiği fikrine ulaşamama
- Pergel ile açıyı ölçme girişiminde bulunamama
- Alternatif çözüm yollarını fark edememe

Kritik Eylemler

1) Eş üçgenler oluşturmak için hem açıların hem kenarların eş olması gerektiğinin farkına varma
2) Deneme yanılma ile üçgenin herhangi bir köşesini veya açısını bulmanın mümkün olmadığını fark etme
3) Ötelenmiş veya dönmüş üçgenin de eş üçgen olacağını ifade etme
4) Yeni üçgeni inşa ederken asgari düzeyde eleman kullanılmasında üç farklı alternatif çözüm yolunu ifade etme
5) Pergel ile açıyı taşıma ve eş açı inşa etme
6) Üçgenin herhangi bir kenarının rastgele taşındıktan sonra komşu açı veya kenarları ilk aktarılan kenarın uç noktalarına pergelle ölçülerek taşınması gerektiğini fark etme

3. 5. Veri Toplama Araçları

Tasarım araştırmasının sağladığı esneklik ile bu öğretim deneyi sürecine ilişkin analizleri gerçekleştirmek için çeşitli veri kaynaklarına başvurulmuştur. Araştırma sürecinde veri toplama araçları olarak döküman, gözlem, mülakat gibi nitel araştırmayla uyumlu araçlara başvurulmuştur. Nitel araştırmanın doğasıyla uyumlu olarak veri çeşitlemesi yapılmıştır. Araştırılan fenomenler ile (geometrik muhakeme ve geometrik inşa süreci) ilgili kaynak toplanmıştır (Cobb ve diğerleri, 2003). Nitel verileri desteklemek için nicel veri toplama aracından faydalanılmıştır. Bu doğrultuda başarı testleri kullanılmıştır. Araştırma verileri, yarı-yapılandırılmış gözlemler, yarı-yapılandırılmış öğrenci mülakatları, başarı testi ve video-ses kayıtlarından oluşmaktadır. Kavramsal çerçeve, veri toplama araçlarının belirlenmesinde etkili olmuştur. Sınıf içi müdahale sürecinin düzeni araştırmacı notları olarak derlenmiştir. Araştırma sürecinin kalitesi arttırmak için tüm veri toplama süreci bütünsel olarak ele alınmaya dikkat edilmiştir.

Bu araştırmada veri toplama üç adım olarak planlanmıştır. Veri toplama yinelemeli bir süreçtir. İlk adım gözlem ve ön testten oluşurken, ikinci adım, öğrenme yörüngesinin planlaması/ uygulaması/ düzenlemesi ve ileriye dönük analiz sürecinin oluşturulmasıdır. Üçüncü adımda katılımcıların geometrik muhakeme süreçleri ortaya çıkarılmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları aşağıdaki başlıklarda açıklanmıştır.

3. 5. 1. Gözlem

Nitel araştırmada veri toplama tekniklerinden gözlem, davranışları doğal ortamında ayrıntılı olarak araştırmak için kullanışlı bir yöntemdir (Glesne, 2013). Bu araştırmada yarı-yapılandırılmış gözlem kullanılmıştır. Araştırmanın pilot uygulama sürecinde katılımcıların ihtiyaçlarını belirlemek amacıyla yapılandırılmamış gözlemlerden faydalanılmıştır. Araştırmacı katılımcı gözlemci olarak sınıfta meydana gelen olayları ve öğretim deneyi hakkında bilgi verebileceğini düşündüğü her şeyin alan notlarını (Maxwell, 2005) kaydetmiştir. Böylece araştırmacı sınıf tartışmaları ve küçük grup aktiviteleri sırasında sınıfın sosyal normlarını yakından takip edebilmiştir (Cobb ve diğerleri, 2001). Bu gözlemler araştırmacının, katılımcıların geometrik muhakemelerine ilişkin öğrenme yörüngesi bağlamlarını belirleyebilmesini kolaylaştırmıştır.

Araştırmanın uygulama sürecinde öğrenme yörüngesi hakkında bilgi toplamak amacıyla yarı-yapılandırılmış gözlem formları oluşturulmuştur (Ek 4). Çeşitli aşamalar sonrasında uzman görüşleri de alınarak, gözlem formlarına son hali verilmiştir. Öğretim tasarımının ana ürünü öğrenme yörüngesi, materyal ve etkinliklerin uygulanabilirliği ve kullanışlılığını belirlemeye yönelik yapılandırılmış gözlemlerden yararlanılmıştır.

3. 5. 2. Görüşme

Görüşme, araştırma konusu hakkında bilgi edinebilmek veya hemen görünmeyen durumlar hakkında alternatif açıklama fırsatı oluşturması sebebiyle sıklıkla tercih edilen bir tekniktir (Glesne, 2013). Görüşme, öğrencilerin sorgulanması veya ikili tartışmadan ziyade bu manalardan daha derin olarak bireyin iç dünyasına girerek sözel bilgiler dışında davranışsal bilgilerin de elde edilmesini sağlayan karşılıklı ve etkileşimli bir iletişim sürecidir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu araştırma kapsamında yarı-yapılandırılmış görüşmeler kullanılmıştır.

Belli bir amaca yönelik (geometrik muhakeme) sorulardan oluşan görüşme formu (Denscombe, 1998) kullanılmıştır. Bu görüşme sürecinde katılımcıların yarı yapılandırılmış sorulara verdikleri cevaplara göre süreçte değişiklikler olabilir. Yarı-yapılandırılmış görüşme, mülakat süresince farklı sorular yardımıyla yeni durumların ortaya çıkmasına ve yeni fikirlere ulaşılmasına fırsatlar oluşturmaktadır (Merriam, 2009). Araştırma sürecinde yapılan görüşmelerde amaca yönelik görüşme formları kullanılmış ve katılımcıların izni alınarak görüşmelerin ses ve video kayıtları alınmıştır. Araştırmada kullanılan görüşme formları, katılımcıların geometrik muhakeme süreçlerini belirleyebilmek amacıyla hazırlanmıştır. Araştırma süresince 8. sınıf düzeyinde temel geometrik kavramların inşasına yönelik görüşme gerçekleştirilmiştir.

Görüşme formunun geliştirilmesinde Yıldırım ve Şimşek (2018) önerileri dikkate alınmıştır; görüşme formunun geliştirilmesi- hazırlanması, test edilmesi, görüşme için gerekli hazırlıkların yapılması ve görüşmelerin gerçekleştirilmesi aşamalarından oluşmaktadır. Görüşme formu hazırlanırken dikkat edilmesi gereken hususlar (Patton, 2014); kolay anlaşılır sorular sorma, amaca yönelik sorular hazırlama, açık uçlu sorular sorabilme, yönlendirmekten uzak durma, çok boyutlu sorulardan ziyade tek amaca yönelik sorular sorma, alternatif sorular (sonda) hazırlama, soruların geliştirilmesinden oluşmaktadır. Ayrıca, katılımcının motivasyonunu artırmak ve araştırma problemi doğrultusunda öğrencilerin muhakeme süreçlerini inceleyebilmek için araştırmacı; öğrencilerin düşünsel süreçlerini ortaya çıkarabilmek adına, cevapları derinlemesine inceleyebileceği "Soruyla ilgili ne düşündüğünü söyleyebilir misin?", "Şu an ne yaptığını yüksek sesle anlatabilir misin?", "Bu şekilde çözüme nasıl karar verdin? Neden bu şekilde düşünüyorsun?" gibi sorular yöneltmiştir (Hunting, 1997).

Görüşme öncesinde; görüşmenin amacı, görüşmenin betimsel bilgileri (tarih, saat ve sayısı) ve araştırmacının kendini tanıttığı bir açıklama yapılmıştır. Görüşmenin amacını açıkladıktan sonra katılımcılara merak ettikleri herhangi bir sorusu olup olmadığı sorulmuş ve görüşmeye gönüllü olarak katılıp katılmadıkları sorulmuş, gönüllü olarak katıldıkları teyit edilmiştir. Görüşmeyi kaydetmek için izin alınmış, görüşmenin yaklaşık olarak ne kadar süreceği hakkında bilgi verilmiştir. Görüşme ortamının sessiz olmasına özen gösterilmiştir. Görüşmeler katılımcıların bilgisi dâhilinde kaydedilmiştir. Katılımcılar, görüşlerini rahat aktarabilmeleri için, gerçek isimlerinin herhangi bir zaman ve yerde kullanılmayacağı hakkında bilgilendirilmiştir. Görüşmenin kayıt altına alınması ve gerekli açıklamaların yapılması ile araştırmacının yanlı düşüncelerinin azaltılması amaçlanmıştır.

Yukarıda ifade edilen süreçler sonunda görüşme formu, uzman görüşüne tabi tutulmuştur. Uzmanların geri bildirimleri sonrasında formda gerekli düzeltmeler yapılarak form son halini almıştır (Ek 5). Bu yöntemle katılımcıların geometrik inşa süreçlerini içeren problemlerde kullandıkları çözüm stratejileri ve bu çözüm stratejilerini nasıl kullandıkları belirlenmekte; öğrencilerin bu süreçteki geometrik muhakemeleri analiz edilmektedir. Görüşmelerde araştırma problemine uygun olarak öğrencilerin temel geometrik kavramlara yönelik inşa süreçlerinde kavramlar; eş doğru parçası ve eş açılar oluşturma, orta nokta bulma, orta dikme çizebilme, bir doğruya üzerindeki veya dışındaki bir noktadan dikme çizebilme, bir doğruya paralel çizebilme, üçgen inşası ve üçgenin yardımcı elemanları olan yükseklik, kenarortay, açıortay inşası ve bu kavramların inşa süreçlerinde nasıl kullanıldığını kapsamaktadır.

Görüşme sorularının tasarımı yarı-yapılandırılmış bir formdadır. Araştırmacı açısından bu durum öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerini daha ayrıntılı analiz edebilmek için ek sorular da sorma imkânı sağlamıştır. Özellikle geometrik inşa sırasında öğrencilerin süreçte birden fazla metod kullanmalarını teşvik etmek üzerine geliştirilmiştir. Ayrıca bu geometrik inşa etkinlikleri ve soruları Duval'in geometrik muhakeme eylemlerini açığa çıkaracak niteliktedir. Aşağıda Tablo 10'da görüşmelerde yer alan sorular, soruların ilgili oldukları kavram ve hazırlanmasındaki amaçlar ifade edilmiştir.

Tablo 10

Görüşme sorularının bilişsel kapsamı

Soru No	Kavramsal Yönü	Amaç	Beklenen Akıl Yürütme Süreçleri
1	Açıyı ikiye bölme Açıyı taşıma	Eşkenar üçgen inşasından yararlanarak bilinen açıyı (60º) inşa ettikten sonra ikiye bölüp istenen açıyı oluşturmak.	Yansıtma İnşa Etme Görselleştirme Gerekçelendirme

		Açıyı kendi üzerine taşıyarak iki katına çıkarmak. Bilinen açıları bir araya taşıyarak istenen açıyı inşa etmek	
2	Çemberin merkezini bulma	Çember içine ikizkenar üçgen inşa ederek çapını inşa etme ve çapın orta noktasını bularak merkezi belirlemek	Muhakeme İnşa etme Görselleştirme
3	Kare ve çemberin özelliklerini ilişkilendirme	Çizilebilecek en büyük karenin kenarlara teğet olacağını ifade etme Karenin köşegen özelliklerini kullanarak çemberin merkezini bulma Kenarların orta noktasının teğetin değme noktası olduğunu görmek ve çemberi inşa etmek	Muhakeme İnşa etme Görselleştirme
4	Belirli özelliklere sahip kare inşa etme	Bir kenarı bu kenara komşu olmayan bir köşesi üçgenin üzerinde olan kareyi inşa etme. Bu kareyi perspektif özelliklerini kullanarak büyütme	Muhakeme Görselleştirme İnşa etme
5	Eşkenar dörtgen ve dikdörtgenin özelliklerini ilişkilendirme	Ortak köşegeni inşa etme ve eşkenar dörtgenin köşegenlerinin dik kesişeceğini görerek bu köşegenin orta dikmesinin diğer köşegen olacağını ifade etme Köşegenler üzerine eşkenar dörtgeni inşa etme	İlişkilendirme İnşa etme Muhakeme
6	Çevrel çember inşa etme Kenar orta dikme inşa etme	Verilen noktaları birleştirip üçgen oluşturma Bu üç noktaya eşit uzaklıkta olan noktanın bu noktalardan geçen	Görselleştirme muhakeme İnşa etme Gerekçelendirme

	(çevrel) çemberin merkezi olacağını ifade etme Bu merkezi köşelerle birleştirdiğinde ikizkenar üçgenler oluştuğunu görme bu ikizkenar üçgenlerin yüksekliklerinin büyük üçgenin kenar orta dikmeleri olduğunu ifade etme

Sekizinci sınıf düzeyinde yapılan görüşmelerde öğrenme yörüngesinin doğasına uygun olarak çeşitli aşamalardan geçilmiştir. Tüm görüşmeler için öğrencilerin gelişimi ve geometrik muhakeme süreçleri Duval'in teorisinin bilişsel ve algısal süreçleri bakımından test edilmiştir. Tablo 10'da görüşme sorularının muhakeme süreçleri ve soruların amaçları ilişkilendirilmektedir. Görüşme sorularında geriye dönük analizler ile revize edilen etkinliklerle benzer kavramlar sorgulanarak öğrencilerin derste öğrendiklerini yansıtma becerileri açığa çıkarmaya çalışılmaktadır.

Görüşme sorularına nihai uygulama kararı verebilmek için ilköğretim matematik eğitimi anabilim dalında görev yapan iki öğretim üyesinden ve matematik eğitimi alanında doktora derecesine sahip bir matematik öğretmeninden ve uygulamayı gerçekleştiren matematik öğretmeninden uzman görüşü alınmıştır. Alınan uzman görüşleri doğrultusunda görüşme soruları yeniden düzenlenerek son haline karar verilmiştir. Görüşme sorularının etkililiği pilot uygulamada denenmiştir. Görüşme yapılacak öğrencilerin seçimi için uygulama öğrencileri geometrik düşünme düzeyi testinden aldıkları puanlara göre kategorilere ayrılmış ve iyi-orta-düşük olmak üzere her kategoriden bir öğrenci uzmanlar ile birlikte belirlenmiştir.

3. 5. 3. Ölçekler

Araştırma sürecinde veri analizini üçgenlemek ve çeşitlemek amacıyla iki ölçek kullanılmıştır.

-Van Hiele Geometrik Düşünme Testi (VHGDT)

-Geometriye yönelik tutum ölçeği (GYTÖ)

Her bir ölçeğin nasıl hazırlandığı, veri toplama aracına duyulan ihtiyaç, geçerlik ve güvenirlik çalışmaları ile pilot uygulama süreçleri ayrıntılı olarak ilgili başlıklarda açıklanmıştır.

3. 5. 3. 1. Van Hiele Geometrik Düşünme Testi

Araştırmada öğrencilerin geometrik düşünme seviyesini belirleyebilmek amacıyla VHGDT kullanılmıştır. Ayrıca görüşme yapılacak katılımcıları seviye bakımından kategorilere ayırmada da bu teste ihtiyaç duyulmuştur. VHGDT bir düzey belirleme testidir. Araştırmada kullanılan VHGDT öğrencilerdeki Van Hiele geometri düşünme düzeylerini nicel olarak tespit etmek amacıyla Usiskin (1982) tarafından geliştirilmiştir. Bu testin Türkçeye çevirisi ve geçerlik-güvenirlik çalışmaları Duatepe (2000) tarafından yapılmıştır. VHGDT toplam 25 soru içermektedir. Bu testte Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin her birine karşılık gelen 5 çoktan seçmeli soruya yer verilmiştir. Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine karşılık gelen soruların dağılımı Tablo 11'de ifade edilmiştir.

Tablo 11

VHGDT sorularının düzeyleri

Sorular	Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyi
1-5	1
6-10	2
11-15	3
16-20	4
21-25	5

VHGDT'nin her bir düzeyinde farklı ve özgün özellikleri mevcuttur. Anlama düzeyleri arası geçişte hiyerarşik bir yapı vardır. Bu çalışmada düzeyler arası hiyerarşik geçişin sağlanması için öğrencilerin her düzeyde bulunan 5 sorudan en az 3 soruyu doğru cevaplaması öğrencinin o düzeye ulaştığının göstergesi olarak kabul edilmiştir. Özetle, 1-düzeyinde 5 sorudan 3'ünü doğru cevaplayan öğrenci 1. düzeye (görsel dönem), 1. düzeye ulaşan öğrenci 6-10 soruları arasından en az 3 tanesini doğru cevaplayabilirse 2. düzeye (analiz) ulaşır. Herhangi alt bir düzeye ulaşılmadan bir üst düzeydeki sorular yeteri kadar doğru yanıtlansa bile üst düzeye ulaşılamaz. İlk beş sorudan en az 3 soru cevaplayamayan öğrencilerin düzeyi sıfır olarak kabul edilmiştir, bu diğer düzeyler için de geçerli bir durumdur. Bu test Ek 6'ya eklenmiştir.

3. 5. 3. 2. Geometriye Yönelik Tutum Ölçeği

Geometriye Yönelik Tutum Ölçeği (GYTÖ) ise öğrencilerin geometriye yönelik tutumlarını belirlemek için Bindak (2004) tarafından geliştirilen dokuzu olumlu ve on altısı olumsuz olmak üzere yirmi beş maddeden ve dört alt faktörden oluşmaktadır. Bu alt faktörler zevk-hoşlanma, kaygı, kaçınma ve ilgidir. GYTÖ beşli derecelendirme ölçeği üzerinden (1-Hiç katılmıyorum; 5- Tamamen katılıyorum) değerlendirilmektedir. Toplam puan olarak ölçekten alınabilecek en düşük puan 25, en yüksek puan ise 125‘tir. Bindak tarafından 773 öğrenciye uygulanan ölçeğin madde faktör yük değerleri 0.25 ile 0.80 arasında iken; Cronbach Alpha güvenirlik katsayısı 0.70 ile 0.91 arasında değişmektedir. Toplam varyansın % 59.26‘sını açıklayan bu dört alt ölçeğin tamamına ilişkin Cronbach alfa iç tutarlık katsayısı ise .94 ve Kaiser–Meyer–Olkin örneklem yeterliliği değeri de .88‘tir. Bu araştırmada kullanılan ölçeğin Cronbach alfa iç tutarlılık katsayısı .91 ile. 97 arasında değişmektedir. Ölçek maddelerinin aldıkları minimum ve maksimumlar değerleri ise 3.28 ile 4.17 arasında değişmektedir. Ölçeğin tamamı için Cronbach Alpha güvenirlik katsayısı .98‘tir.

3. 6. Verilerin Toplanması ve Çözümlenmesi

Veri toplama ile başlayan süreç, verileri azaltma, verileri görselleştirme, sonuç çıkarma ya da doğrulama aşamalarından sonra rapor yazımı ile sonuçlandırılır (Miles ve Huberman, 1994). Veri analizi süreci; verileri tanımlamayı, birbirleriyle ilişkilendirerek açıklamalarda bulunmayı gerektiren bir süreçtir, ayrıca bazı durumlarda ilişkilendirme ürünü olarak kuram geliştirmeyi kapsar (Glesne, 2013). Bu bölümde veri toplama araçları olarak kullanılan gözlem, görüşme ve başarı testleri aracılığıyla verilerin toplanması ve analizi incelenmektedir. Gözlem ve görüşme verileri içerik analizi ile çözümlenmiştir. İçerik analizi, birbirine benzer verileri belirli kavram ve temalar etrafında bir araya getirerek okuyucunun anlayacağı şekilde düzenleyip yorumlama sürecidir. Bunun için öncelikle veriler kavramsallaştırılır ve ilişkiler ortaya çıkarılır. Diğer aşamada ise kategori ya da tema gibi daha soyut ve genel terimlere ulaşılmaya çalışılır. Analizler yapılırken kuramsal çerçeve, araştırma soruları ve verilerin toplanması bir bütün olarak ele alınmaktadır (Glesne, 2013).

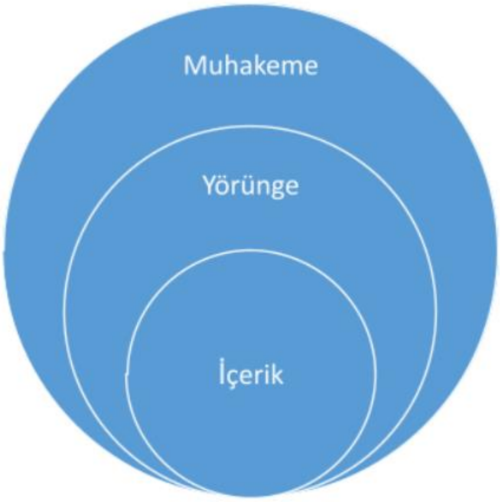
Araştırmanın verileri iki aşamalı olarak analiz edilmiştir. İlk aşamada öğrenme yörüngesinin etkililiği, gözlem ve ders içi araştırmacı notları çözümlenerek açıklanmaya çalışılmıştır. İkinci aşamada ise öğrencilerin geometrinin temel kavramlarını muhakeme etme süreçleri ve bu süreçte ortaya koydukları bilişsel ve algısal süreçleri neler olduğu açıklanmaya çalışılmıştır. Geometrik muhakemenin ortaya çıkarılmasında öğrencilerle yapılan görüşmeler ön plana çıkmaktadır. Öğrencilerin geometrik muhakeme süreçleri analiz edilirken kuramsal çerçevede ifade edilen Duval’in teorisinden faydalanılmıştır. Son olarak öğrenme yörüngesinin etkililiği araştırmanın modeline uygun olarak analiz edilmiştir. Araştırmacının veri kaynakları, uygulamanın yapıldığı derslerde alınan ses kayıtları, araştırmacı alan notları ve gözlemleri, öğrenci görüşmeleri ve ses-video kayıtları, öğrencilere uygulanan ölçekleri içermektedir.

3. 6. 1. Uygulama Derslerinin Analizi

Verilerin analizi, her öğretim uygulaması sonunda gerçekleştirilmiştir. Bu analizler sırasında öğrencinin öğrenmesini belgelemek için bir kontrol listesi hazırlanmış ve uygulanmıştır. Sınıf ortamında yazılan günlükler, kavram yanılgıları, öğrenci düşüncesindeki sapmanın temel mekanizmaları, ders planlarında yapılan değişiklikler ve öğretmen görüşleri arşivlenmiştir. İlerleyen aşamalarda bu gözlem arşivleri, her bir öğretim bölümünde ne olduğunu belgeleyen anlık görüntü çerçeveleri kullanılarak analiz edilmiş ve yoğunlaştırılmıştır. Aşağıdaki Şekil 12 dersin uygulamasından sonra gerçekleşen öğretim için yapılan analiz sürecinin bir örneğini göstermektedir.

Şekil 12

Uygulama derslerinin analizi için yorumlayıcı çerçeve



Şekil 12’ de katılımcıların öğretim sürecinde geometri inşa etkinliklerindeki performanslarını yorumlamalarına göre sınıf ortamında etkinlik katmanlarını inceleyerek geometrik muhakemenin analiz edilmesine yönelik bir yorumlayıcı çerçeve (Lamberg, 2001'den uyarlanmıştır) sunulmuştur. İçerik, etkinliğin gerçekleşeceği ilgili kavramı (örneğin, açı taşıma) ifade etmektedir. Yörünge, öğrenme yörüngesini ifade etmektedir ve geometri kavramlarının inşa süreçlerinden söz edilmektedir. Muhakeme, öğrencilerin öğretim sürecindeki geometrik inşa süreçleri anlamına gelmektedir. Aşağıdaki yer alan Tablo 12’de gerçekleşen örnek bir öğretim analizi yer almaktadır.

Tablo 12

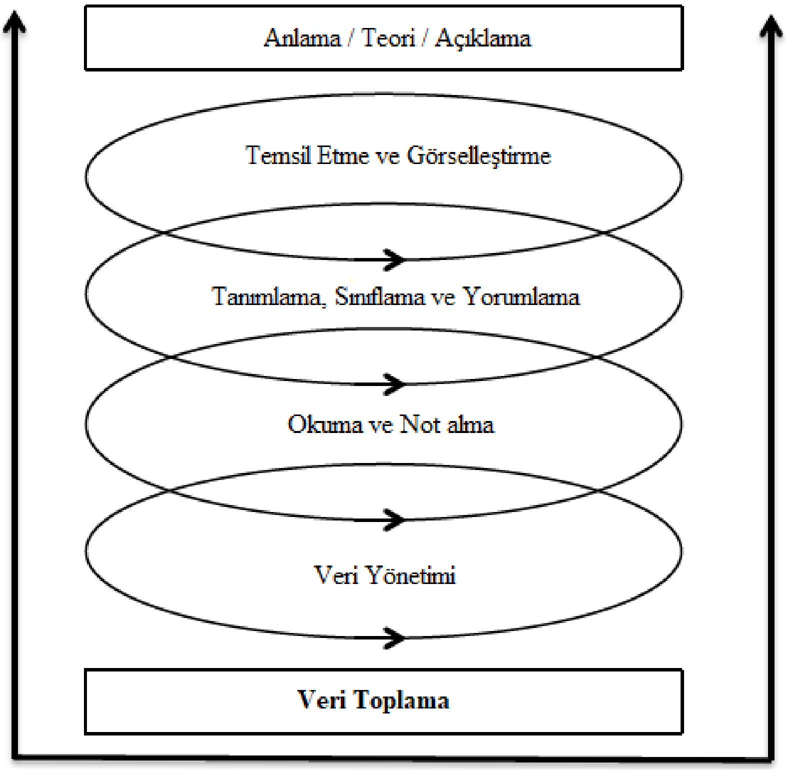
Orta nokta inşası için analiz sürecinin özeti

Etkinlik/ Gün	Anlam	Yanılgı	İçerik	Rehberlik	Değişim
Denge noktasını bul!	Bir doğru parçasının orta noktasını bulma	Doğru parçasının uç noktalarından eş çemberler çizme fikrine ulaşamama	Uç noktalardan eş çemberler çizerek ikizkenar üçgen özelliklerin den yararlanma	Öğrencilere su damlama ara etkinliği verildi.	Su damlama etkinliğindeki simetrik görüntü sayesinde çizilen çemberlerin orta nokta hizasında kesiştiği görüldü. İkizkenar üçgenlerin özellikleri fark edildi ve orta nokta bulundu.

Retrospektif analiz (geriye dönük analiz), öğretim deneyi sırasında toplanan tüm verilerin analizini içermesi nedeniyle geriye dönüktür. Bu analiz sürecinde ürün, öğretim deneyinden çıkan sonuçları ayrıntılandırmaktadır ve geriye dönük bir açıklamadır (Cobb ve diğerleri, 2003). Yukarıda verilen Tablo 12 örnek olarak ifade edilmiştir ve analiz sürecini görselleştirmek ve özetlemek için gösterilmektedir. Ayrıca verilerin geriye dönük analizi, deney sırasında öğrencinin öğrenmesi ile öğretiminin ilişkilendirilmesidir. Bu son analiz, öğretim deneyi sırasında olanların tarafsız olarak açıklanmasıdır (Cobb ve diğerleri, 2003). Özetle geriye dönük analiz, video- ses kayıtlarının, öğrenci çalışmasının (geometrik inşalar) ve alan notlarının analizinden oluşmaktadır. Bu verilerin nitel analizinde Veri Analizi Spiral uyarlanması (Creswell, 2007) kullanılmıştır. Veri analizi spiral uyarlanması Creswell (2007) tarafından sabit bir doğrusal yaklaşım yerine analitik olarak hareketli olmak şeklinde tanımlanmaktadır. Şekil 13' te tasarım tabanlı araştırmada bir öğretim deneyi için Creswell'in (2007) Veri Analizi Spiral uyarlaması görülmektedir.

Şekil 13

Verilerin geriye dönük analiz şeması



Veriler düzenlenmiştir ve analiz döngüsü Creswell (2007)'den uyarlanmıştır. Verileri temalara ayırmadan önce bir bütün olarak algılamak için tüm veriler okunmuş ve notlar çıkarılmıştır. Sonrasında ise yorumlama aşaması için uygun sınıflandırmalar yapılmıştır. Bu döngü, verileri kodlamayı, kategorilere ve temalara ayırmayı gerektirir. Analizin son aşaması verilerin sunulması ve açıklanması şeklindedir. Creswell (2007) son aşamayı "şekil biçiminde ambalajlama" olarak tanımlamaktadır (ss. 154). Bu tasarım araştırmasında öğretim deneyi sırasında meydana gelen olaylardan ve verilerden ortaya çıkan bir öğrenme teorisi sunulmuştur (Cobb ve diğerleri, 2003). Ayrıca, test edilmiş ve geriye dönük analizlerin sonucu olarak nihai öğrenme yörüngesi ortaya çıkmıştır.

3. 6. 2. Görüşmelerin Analizi

Katılımcılar ile yapılan görüşmelerin analizinde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. İçerik analizi, toplanan verilerin derinlemesine analiz edilmesi sürecidir. Bu bağlamda içerik analizi ile veriler tanımlanmakta ve verilerin içinde saklı olabilecek gerçekler, belirlenen kavram ve temalar çerçevesinde ortaya konulmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu araştırmada Duval'in bilişsel modeli aracılığıyla katılımcıların geometrik inşa süreçlerinde temel geometri kavramlarına yönelik olarak bilişsel ve algısal süreçlerine yönelik eylemlerinin ortaya koyulması amaçlanmaktadır. Bu bakımdan geometrik muhakeme sürecinin analizi verilerin sistematik olarak düzenlenmesi ve ardından bilişsel açıdan yorumlanması ile gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada, görüşmelerde katılımcılardan kayıt altına alınan ses ve görüntüler transkript edilmiştir. Araştırmanın kavramsal çerçevesinden hareketle bir analiz çerçevesi tasarlanmıştır. Duval'in bilişsel modeli geometrik muhakeme sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve algısal süreçlere yönelik epistemik eylemleri gözlemlerken bir araç olarak kullanıldığından bu çerçeveye göre verilerin hangi temalar altında düzenleneceği ve sunulacağı ifade edilmiştir. Transkriptleri çıkarılan metinlerin analizi, bu çerçeveye göre gerçekleştirilmiştir. Kuramsal çerçeve içerisinde yer alan Duval'in bilişsel ve algısal süreçlerinin her bir basamağı detaylı olarak açıklanmıştır (bkz. 2.4.3. Duval'in Bilişsel Modeli). Özellikle öğrencilerin geometrik inşa yolları ve yapmış oldukları inşalar için göstergeler bu başlık altında sunulmuştur. Özellikle literatürden derlenen ve sentezlenen bu tablolar öğrencilerin göstermiş olduğu geometrik muhakeme becerilerinin açıklanmasını ve verilerin analizini kolaylaştırmıştır.

3. 6. 3. Ölçeklerin Analizi.

Araştırmada VHGDT ve GYTÖ olmak üzere iki adet ölçek kullanılmıştır.

Katılımcıların Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin belirlenmesi amacıyla Usiskin (1982) tarafından geliştirilen puanlama sistemi tercih edilmiştir. Her bir Van Hiele geometrik düşünme düzeyinden alınacak ağırlıklı puan;

0. düzey hiçbir düzeydeki sorulardan 3 ya da daha fazla soruya doğru cevap vermeyen öğrencilere 0 puan,

1. düzeye ait 1- 5 arasındaki soruların cevapları için 5 sorunun en az 3 tanesine doğru cevap öğrenciler için 1 puan,

2. düzeye ait 6- 10 arasındaki soruların cevapları için 5 sorunun en az 3 tanesine doğru cevap öğrenciler için 2 puan,

3. düzeye ait 11- 15 arasındaki soruların cevapları için 5 sorunun en az 3 tanesine doğru cevap öğrenciler için 4 puan,

4. düzeye ait 16- 20 arasındaki soruların cevapları için 5 sorunun en az 3 tanesine doğru cevap öğrenciler için 8 puan,

5. düzeye ait 21- 25 arasındaki soruların cevapları için 5 sorunun en az 3 tanesine doğru cevap öğrenciler için 16 puan verilmiştir. Sonuç olarak bu puanlama sisteminde belirlenen düzeydeki sorulardan 3 ya da daha fazla soruya doğru cevap veren öğrenciler için düzey belirleyicidir. 1 puana ulaşan öğrenci 1. Düzeye, 1+2=3 puana ulaşan öğrenci 2. Düzeye, 1+2+4=7 puana ulaşan öğrenci 3. Düzeye, 1+2+4+8=15 puana ulaşan öğrenci 4. Düzeye, 1+2+4+8+16=31 puana ulaşan öğrenci 5. Düzeye ulaşmaktadır (Usiskin, 1982).

Öğrencilerin uygulanan ön – son testlere verdikleri cevaplar incelenmiştir. Bu sayede her bir öğrencinin gelişimi kontrol altında tutulmuştur ve gerçek çalışma grubu öğrencilerinin gelişim süreci karşılaştırılmıştır. Öğrencilerin başarı testlerine verdikleri cevaplar arasında anlamlı farklılık olup olmadığı incelemek için SPSS 25,0 (Statistical Package for Social Sciences) programından yararlanılmıştır. Analiz sürecinde öğrencilerin testlerden aldıkları toplam puanların fark puanları dizileri elde edilmiş ve bu dizilerin normal dağılım sergileyip sergilemediği belirlenmiştir. Normal dağılım testi için Kolmogorov-Smirnov Testi tercih edilmiştir (Can, 2019). Test sonucunda normal dağılım sergileyen durumlar için parametrik testlerden ilişkili örneklemler için t testi, normal dağılım sergilemeyen durumlar için ise parametrik olmayan testlerden Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi uygulanmıştır.

3. 7. Geçerlik, Güvenirlik ve Nesnellik

Tasarım tabanlı araştırmalarda bilimsel olarak güçlü kabul görebilmesi için nesnellik, güvenilirlik ve geçerlilik gereklidir. Ancak, tasarım araştırmasındaki bu nitelikler deneysel araştırma tasarımından farklı bir şekilde kontrol edilir (Barab ve Kirshner, 2001). Geleneksel deneysel araştırmaların aksine, tasarım araştırmasının amacı yeni ve faydalı teoriler üretmektir (Edelson, 2002). Bu nedenle, tasarım araştırmasındaki sonuçların nesnelliği, güvenilirliği ve geçerliliği geleneksel deneysel yaklaşımda olduğundan farklı tanımlanmıştır.

3. 7. 1. Nesnellik

Nesnellik, analizlerin güvenilirliği ile doğrudan ilgilidir (Cobb ve Gravemeijer, 2008). Araştırmada nesnellik, verilerin geçerli ve güvenilir olmasını gerekli kılar (Çepni, 2014). Bir ölçeğin nesnel olması için güvenilir olması gerekir. Güvenilirliğin sağlanması için ise verilerin toplanma süreci, verilerin analizi sistematik olmalı ve dış gözlemciler tarafından eleştiriye açık olmalıdır. Tasarım tabanlı bir araştırma yürütenler, müdahaleleri kolaylaştırırken nesnelliği teşvik etmeye çalıştıkları için deneysel araştırmacılardan farklıdır (Gürbüz, 2021). DBRC (2003) [Design Based Research Center], "tasarım tabanlı araştırmacıların, eleştirmenleri ile ikili tartışmaları içinde bulduklarını" belirtmiştir (s. 7). Bu araştırmada uzmanlardan oluşan bir danışma ve düzenleme kuruluna hep müracaat edilmiştir. Bu nedenle, tasarım araştırmacıları, retrospektif analiz sonuçlarının olabilecek önyargıları azaltmak için birden fazla kaynak ve veri türünü çeşitlendirebilirler, verilerin üçgenleştirilmesini (triangulation) sağlamalıdırlar (Maxwell, 2005). Bu çalışmanın verileri video-ses kayıtları, sınıf tartışmaları, öğrencilerin çalışmaları, ders planları ve alan notlarından oluşmaktadır. Verilerin üçgenleştirilmesi ve sabit karşılaştırma yöntemi ile analiz edilmesiyle nihai sonuçlar açıklanmıştır. Ayrıca, iddialar veri kaynaklarına geriye dönük analizlerde olmak üzere analiz aşamalarını desteklemektedir (Cobb ve Gravemeijer, 2008).

3. 7. 2. Güvenirlik

Tasarım araştırmasını kullanan bir öğretim deneyi, öğretmen, araştırmacının danışmanı ve uzman ekibin diğer üyeleri tarafından verilen pek çok kararı içerir. Her bir öğrenme planlaması özgün olduğundan, bir tasarım araştırmasının tamamının tam olarak kopyalanması çok zordur. Bunun yerine, bulguların güvenilirliğini arttırmak için analizlerin tekrarlanması, döngü boyunca tek bir tasarım deneyinde gerçekleşmiştir (DBRC, 2003). Ek olarak, araştırmacı birden fazla veri kaynağını üçgenleştirme yoluna başvurmuştur.

3. 7. 3. Geçerlik

Yinelemeli döngü ve araştırmanın işbirlikçi doğası sonuçların geçerli olmasını sağlamıştır. Tasarım tabanlı araştırmada; teori, tasarım, uygulama ve analiz arasında uyumun olmasına izin verilir (DBRC, 2003). Messick (1992), bir iddianın sonucunun geçerliliğini ürettiği değişikliklere dayandırır. Bu araştırmada model, öğrencilerin öğrenme sürecinde oluşturduğu geçerliliği refere etmektedir (Barab ve Squire, 2004). Bu nedenle, bir öğretim deneyinde bir model tarafından tetiklenen öğrenci öğreniminin örnekleri sonuçların geçerliliğinin bir kanıtı olarak kabul edilir. Geçerlik aynı sonuçlar alınsa bile sonuçların doğru olmasını gerektirir (Payne ve Payne, 2004). Güvenirlik ise farklı deneylerde uyumlu sonuçlar alınmasıdır. Nicel ve nitel araştırmalarda geçerlik, iç geçerlik ve dış geçerlik olmak üzere iki çeşittir. İç geçerlik, ölçme sonucunun doğruluğunu inceler. Dış geçerlik sonuçların farklı yer ve zamanda genellenebilirliğidir (Scott ve Morrison, 2006). İç güvenirlik araştırmanın tekrarlanmasında yine benzer sonuçların çıkması, dış güvenirlik ise nesnel bir bakış açısıyla bulguların yorumlanmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

Tablo 13

Güvenirlik geçerlik çalışmaları

Güvenirlik ve Geçerlik		Seçim	Uygulama
Geçerlik (Dış)	Genelleme	Örneklem Seçimi	Etkinliklere katılacak öğrenciler ölçüt örnekleme yöntemine göre belirlenmiştir. Etkinliklerden optimum geri bildirim alınması ve eksiklerin giderilmesi amaçlanmıştır.
Geçerlik (İç)	Doğruluk	Değişkenleri kontrol etme	Katılımcıları etkileyebilecek diğer bağımsız değişkenleri kontrol altında tutmak için çalışma grubuna mevcut

			öğretmen, ders saati ve aynı kazanımlar ile uygulamalar yapılmıştır.
Güvenirlik (İç)	Tutarlılık	İç tutarlılığın ölçülmesi	Ölçeklerin (VHGDT, GYTÖ) iç tutarlılığını ölçmek için Cronbach Alpha katsayılarına bakılmış ve güvenirlik katsayıları “ .88 ve .85” şeklinde bulunmuştur. Bu değerlerin “.70’den” büyük olması ölçeğin iç tutarlılığı sağlamaktadır.
Güvenirlik (Dış)	Nesnellik	Puanlayıcılar arası güvenirlik	Çalışmada ölçeklere verilen yanıtlar araştırmacı tarafından puanlandırıldıktan sonra başka bir uzman tarafından da kontrol edilmiştir. Sorular için iki puanlayıcının puanları arasında herhangi bir farklılık olmamıştır.

3. 7. 4. Durum Çalışması için Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Nicel ve nitel araştırmaların süreçleri birbirinden farklıdır, bu sebeple geçerlik ve güvenirlik kavramları da nitel araştırmalarda özelleşmektedir. Lincoln ve Guba (1985) "iç geçerlik" yerine "inandırıcılık"; "dış geçerlik" yerine "aktarılabilirlik"; "iç güvenirlik" yerine "tutarlılık" ve "dış güvenirlik" yerine "teyit edilebilirlik" kavramlarının daha uygun olduğunu ifade etmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

Tablo 14

Durum çalışması için geçerlik güvenirlik çalışmaları

Güvenirlik ve Geçerlik		Seçim	Uygulama
Geçerlik (İç)	İnandırıcılık	Katılımcı teyidi	Araştırmada görüşme transkriptleri katılımcılar ile teyit edilmiştir. Özellikle yinelemeli tasarım süreci ile uyumludur.
Geçerlik (İç)	İnandırıcılık	Çeşitleme (Üçgenleme)	Derinlemesine bilgi alabilmek amacıyla birden fazla veri toplama

			aracından faydalanılmıştır ve inandırıcılığına katkı sağlanmıştır.
Geçerlik (İç)	Tutarlılık	Uzun süreli gözlem	Araştırmacı katılımcıların uzun süreden beri matematik öğretmenidir.
Geçerlik (İç)		Araştırmacının önyargıları	Araştırmanın sınırlılıkları ve varsayımları ayrıntılı olarak açıklanmıştır.
Geçerlik (İç)	Nesnellik	Uzman incelemesi	Veri toplama araçlarının geliştirilmesinde ve yorumlanmasında uzman akademisyenlerin görüşlerine başvurulmuştur ve düzenlenmeler yapılmıştır.
Geçerlik (Dış)	Aktarabilirlik	Ayrıntılı betimleme	Katılımcıların belirlenmesi, veri toplama araçları, araştırmacının rolü, uygulanan etkinlikler, uygulama süreci ve verileri analiz süreci araştırmacı tarafından ayrıntılı bir şekilde ilgili başlıklarda tanımlanmıştır.
Güvenirlik (İç)	Tutarlılık	Uzman görüşü	Transkript için iki araştırmacının yorumlarının tutarlık yüzdesi %88 olarak belirlenmiştir. Kodlama güvenilir kabul edilmiştir.
Güvenirlik (Dış)	Teyit etme	Kanıtlama	Dış gözlemcinin güvenilirliği teyit etmesi için görüşmelerde ve uygulama sürecinde öğrencilerden elde edilen dokümanlar, sınıf içi görüntüler ve gözlem notları bulgular kısmında sunulmuştur.

4. BÖLÜM

BULGULAR VE YORUM

Bu çalışmanın ana odak noktası, geometrik inşaya yönelik tasarlanan öğrenme yörüngeleri ışığında ortaokul öğrencilerinin muhakeme süreçlerini açığa çıkarmaktır. Bu öğretim deneyinde, öğrencilerin temel geometrik kavramların inşasını anlamlandırmalarını kolaylaştırmak amacıyla öğretimi desteklemek için tartışmacı bir sınıf ortamı oluşturulmuş ve günlük yaşam örnekleri ile pergel ve çizgeçe (ölçüsüz cetvel) dayalı öğretim etkinlikleriyle desteklenmiş öğrenme yörüngeleri tasarlanmıştır. Bu bölümde araştırmanın alt problemlerine ilişkin bulgular sunulmuştur.

4. 1. Öğrencilerin Geometrik Düşünme Düzeylerine ve Geometriye Yönelik Tutum Ölçeğine İlişkin Bulgular

Bu bölümde araştırmanın 1. alt problemi olan "Öğrencilerin uygulama öncesinde ve sonrasında geometrik düşünme düzeyleri nasıldır?" ve 2. alt problemi olan "Öğrencilerinin geometrik inşa etkinlikleri öncesinde ve sonrasında geometriye yönelik tutumları arasında anlamlı bir fark var mıdır?" sorularına ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Bu kapsamda öğrencilerin VHGDT ve GYTÖ'ye verdikleri cevaplar incelenmiş ve veri analizi başlığı altında belirtilen kodlamaya göre puanlanmıştır. Yapılan puanlama sonuçlarına göre hangi testin uygulanacağına karar verebilmek için öncelikle öğrencilerin her bir ölçeğe ait cevapları SPSS 25.0 programına girilerek, aldıkları toplam puanların fark puanları dizileri elde edilmiş ve bu dizilerin normal dağılım sergileyip sergilemediği incelenmiştir. Gözlem sayısının 30 ve üzerinde olması durumunda Kolmogorov-Smirnov testi önerilmektedir (Can, 2019, s. 89). Dolayısıyla katılımcı sayısı 36 olduğundan testlerin normallik sonuçları incelenirken Kolmogorov-Smirnov testi sonuçları dikkate alınmıştır. Bir dağılımın normal dağılım sergilemesi için normallik testi sonuçlarının (Kolmogorov-Smirnov Testi) sonuçlarının $p > 0.05$ olması gerekmektedir (Can, 2019). Aşağıdaki Tablo 15'de normallik testine ilişkin analizler sonucunda elde edilen verilere göre VHGDT verilerinin normal dağılım gösterdiği, GYTÖ verilerinin ise normal dağılım sergilemediği görülmektedir.

Tablo 15

Ölçeklere ilişkin normallik testi sonuçları

Test	Test Türü	*N*	$\bar{x}$	*ss*	Normallik Testi
VHGDT	Ön test	36	18.78	8	.20
	Son test	36	23.5	10	.20

GYTÖ	Ön test	36	17.6	3.4	.01
	Son test	36	58.6	4.3	.03

Katılımcılar hem uygulama öncesinde hem de uygulama sonrasında verdikleri cevaplar incelendiğinde VHGDT sonuçlarının fark puanları dizisinin normal dağılım sergilediği Tablo 15'de gösterilmiştir. Bu sebeple test sonuçlarına ilişkili örneklemler için t-testi (paired samples t test) uygulanmıştır. Bu teste ilişkin sonuçlar ise Tablo 16'da görülmektedir.

Tablo 16

VHGDT'ye ilişkin t- testi sonuçları

Test	N	$\overline{x}$	ss	sd	t	p
Ön	36	18.78	8	35	-7.356	.00
Son	36	23.5	10	35		

Öğrenme yörüngesinin, geometrik düşünmenin gelişimine etkisinin araştırıldığı 36 kişilik bir grupta, uygulama öncesi ve sonrasında uygulanan VHGDT puanlarının ortalamaları arasında bir fark olup olmadığını belirlemek için yapılan ilişkili örneklemler için t testi neticesinde uygulama öncesi yapılan Van Hiele geometrik düşünme test puanları ortalaması ile (VHGDT Ön test $\overline{x}$ =18.78) ile uygulama sonrası yapılan VHGDT puanları ortalaması (VHGDT Son test $\overline{x}$ =23,53) arasında anlamlı bir fark bulunmuştur [t35 = -7.356, p < .05]. Bulunan farkın son test lehine olduğu görülmektedir. Test sonucu etki büyüklüğü ise d = .50 olarak hesaplanmıştır. Bu durum bulunan farkın orta düzeyde olduğunu göstermektedir. Test sonuçları, uygulanan öğrenme yörüngesinin katılımcıların geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine olumlu etkisi olduğunu göstermektedir.

Tablo 16'da görüldüğü gibi, t-testi sonucuna göre katılımcıların uygulama öncesinde ve sonrasındaki cevapları dikkate alındığında Van Hiele Geometrik düşünme düzeyindeki soru kümelerinde düzeyini yükseltmeyen ancak doğru yanıtladığı madde sayısında artış kaydeden öğrencilerin oranı %52.6'dir. Uygulama sonrasında sınıflandırılan öğrencilerin %66,7'si ağırlıklı toplamlarını iyileştirmiştir. Her küme üzerinde, VHGDT'nin her bir kümesinde uygulama öncesinde ve sonrasında Seviye 2 ve Seviye 3 kümelerinde aralarında istatistiksel olarak anlamlı bir fark gösteren daha detaylı bir analiz yapılmıştır. Tüm geometrik düşünme düzeyleri katılımcıların uygulama öncesi ve sonrası şeklinde karşılaştırılmıştır. Geometrik düşünme düzeylerine göre katılımcıların cevapları puanlandığında ve normal dağılım kontrol edildiğinde küme bazında verilerin normal dağılmadığı görülmüştür. Aşağıdaki Tablo 17'de VHGDT'ye ilişkin Mann-Whitney U-testinin sonuçları görülmektedir.

Tablo 17

VHGDT'ye ilişkin Mann-Whitney U-testi sonuçları

Test	*N*	Sıralar	Sıra Ortalamaları	*U*	*p*
Seviye 1					
Ön	36	32.11	899	493	.60
Son	36	34.5	1312		
Seviye 2					
Ön	36	26.8	750	344.5	.01
Son	36	38.4	1460		
Seviye 3					
Ön	36	28.00	784.00	378	.03
Son	36	37.55	1427.00		
Seviye 4					
Ön	36	32.30	1227.50	486.500	.53
Son	36	35.13	983.50		
Seviye 5					
Ön	36	30.54	855.00	449	.25
Son	36	35.68	1356.00		

Tablo 17 incelendiğinde test sonuçlarına göre VHGDT düzeyleri arasında sadece 2. ve 3. düzeylerde istatistiki olarak anlamlı bir fark gözlenmiştir. Gözlenen bu fark son test lehinedir. Üst bölümlerde de ifade edildiği gibi tüm düzeylerde bir gelişim gözlenmemekle birlikte genel olarak VHGDT puanlarında istatistiki olarak son test lehine anlamlı bir fark gözlenmiştir. Bu bakımdan öğrenme yörüngeleri ile geometrik inşa öğretiminin VHGDT düzeylerinde olumlu etki yaptığı görülmektedir.

Katılımcılar uygulama öncesinde ve sonrasında GYTÖ'yü cevaplamışlardır. Katılımcıların ölçeğe verdiği cevaplar analiz edildiğinde katılımcıların ön test puanlarının dağılımının normal olmaması ve tutum düzeylerinin sıralı tip olması nedeniyle katılımcıların hem ön test puanları hem de son test puanları parametrik olmayan testler ile karşılaştırılmıştır. Normal dağılım sergilemeyen durumlar için kullanılan parametrik olmayan testlerden Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi uygulanmıştır. Katılımcıların öğrenme yörüngesi ile tasarlanan geometrik inşa öğretimi sonrasında yapılan izleme çalışmasında katılımcıların geometriye yönelik tutumlarına ilişkin gelişimini gözlemlemek için kullanılan Wilcoxon İşaretli Sıralar Testine ilişkin sonuçlar Tablo 18'de görülmektedir.

Tablo 18

Geometriye yönelik tutumlarına ilişkin Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonuçları

Test	Sıralar	*N*	Sıra Ortalamaları		*z*	p
Ön	Negatif	8	13.2	106	-2.95	.003
Son	Pozitif	24	17.6	422		
	Eşit	4				
	Toplam	36				

Tablo 18'de katılımcıların GYTÖ ön testi ve son testi puanları arasında anlamlı bir fark bulunup bulunmadığını test etmek için yapılan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonucuna göre sıra ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu ($p < .05$) görülmüştür. Söz konusu farklılık son test lehine gerçekleşmiştir. Başka bir ifade ile öğrenme yörüngesi temelli geometrik inşa etkinlikleri katılımcıların geometriye karşı tutumlarını olumlu etkilemiştir. Öğrenme yörüngesi ile tasarlanan geometri derslerinin ve araştırmada uygulanan metotların katılımcıların geometriye karşı tutumlarına olumlu katkılar yaptığı ve geliştirdiği söylenebilir.

4. 2. Öğrenme Yörüngelerinden Elde Edilen Bulgular

Bu bölümde araştırmanın 3. alt problemi olan "Temel geometrik inşa becerilerini kazandırmak için tasarlanan öğrenme yörüngelerinin (learning trajectories) etkililiği nasıldır?" sorusuna yönelik bulgular yer almaktadır.

Tasarlanan öğrenme yörüngeleri, uygulanması esnasında yaşanan aksaklıklar ve öğrenci davranışları ışığında geriye dönük analizleri yapılarak gerekli hallerde revize edilmiştir. Bu analiz sayesinde yerel bir öğretim teorisi oluşturma adına yorumlayıcı bir çerçeve sunulmaya çalışılmıştır. Temel geometrik kavramların inşasına yönelik elde edilen bulgular her bir öğrenme hedefi başlığı altında ayrı ayrı ele alınarak yapılan revize işlemleri bu başlıklar altında sunulacaktır.

Öğretim öncesinde öğrencilerin tüm inşa süreçlerinde matematiksel araç olarak sadece pergel ve çizgeç kullanılacağı ifade edilmiştir.

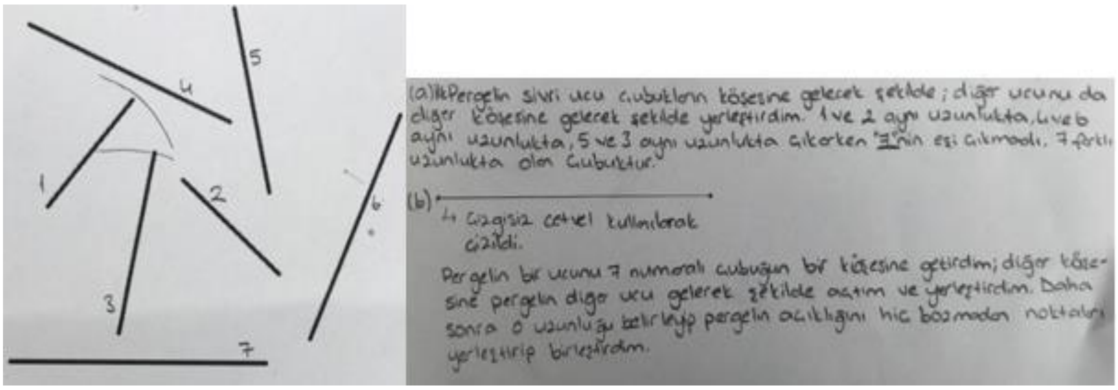
4. 2. 1. Eş Doğru Parçaları ve Eş Açılar İnşa Etme

Matematiğin geliştiği eski çağlardan beri önemli bir matematiksel araç olarak kullanılan pergelin günümüz öğretim ortamlarında öğrencilerin zihninde sadece 'çember çizmeye yarayan bir alet'ten ibaret olduğu görülmektedir. Geometrik inşa sürecinde kullandığımız en önemli araç olan pergelin uzunluk ve açı ölçme işlevini öğrenciye kazandırmak öncelikli hedef olmuştur. Bu bağlamda bu öğrenme hedefinin temel amacı öğrencilerin zihninde pergelin ölçme işlevini oluşturmak ve bu işlevi kullanarak eş doğru parçaları ve eş açılar inşa etmesini sağlamak olmuştur.

Etkinlik 1'de verilen doğru parçalarından eşit uzunlukta olanları eşleştirip farklı uzunlukta olan doğru parçasına eş bir doğru parçası çizilmesi istenmiştir. Öğrenciler bu etkinlikle ilk karşılaştıklarında öncelikle göz kararı karşılaştırmalar yaparak tahminde bulunmuşlar, daha sonra çizgeç üzerinde işaretlemeler yaparak ölçmeye çalışıp uzunlukları karşılaştırmışlardır. Hiçbir öğrenci pergel açıklığını kullanarak ölçmeye yönelmemiştir. Öğretmenin pergele dikkat çekerek "Acaba bununla uzunlukları ölçebilir misiniz?" şeklindeki yönlendirmesi öğrenciler tarafından şaşkınlıkla karşılanmıştır. Gruplara ölçme yapmaları için süre verilmiş, süre sonunda tüm gruplarda farklı olan doğru parçası bulunmuştur. Etkinlikteki ikinci adım yeni bir doğru parçası inşa etmedir. Öğrencilerin bu aşamada "aynısını mı çizeceğiz", "nereye çizelim" soruları üzerine "eşlik" kavramı gruplar içinde tartışılmış "eşit uzunlukta çizilmesi gerektiği" sonucuna ulaşılmıştır. Bazı öğrencilerin göz kararı başlangıç ve bitiş noktalarını aşağıya taşıyarak sadece çizgeçle çizdikleri görülürken, çoğunun ölçmede pergel açıklığını kullandıkları görülmüştür. Burada çizgeç üzerine işaretlemeler yapılmayacağı ve artık pergel açıklığı ile ölçme yapılacağı ifade edilmiştir. Öğrencilerin tamamının paralel ve eşit uzunlukta doğru parçası çizdikleri görülmüştür. Sadece iki öğrenci paralel doğruya alternatif farklı doğrultuda eş bir doğru parçası daha çizdiği görülmüştür. Aşağıdaki şekil 14'te Etkinlik 1'e ait öğrenci çizimlerinden örnek sunulmuştur.

Şekil 14

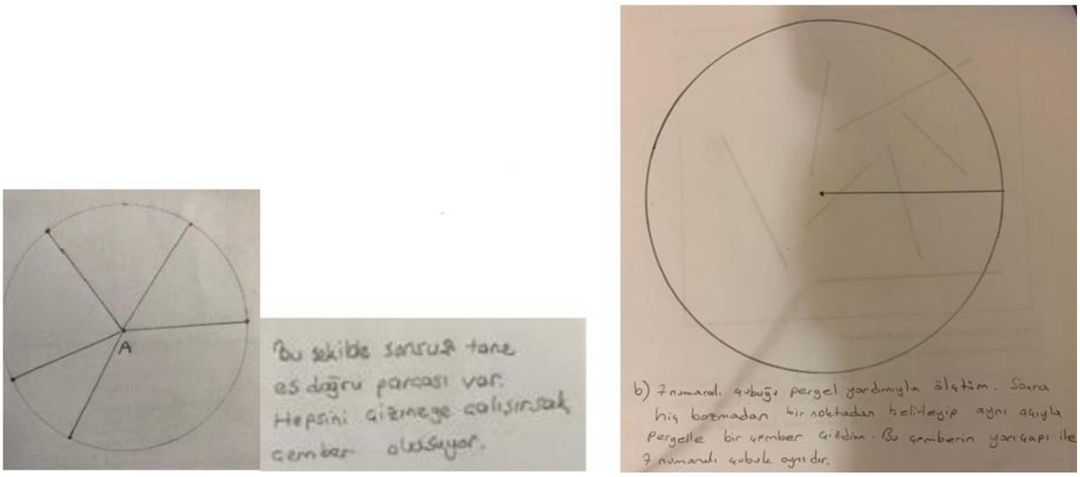
Etkinlik 1'e ait öğrenci cevabı



Burada alternatif başka çözüm yolları sorgulanarak farklı yön ve doğrultuda da olası eş doğru parçaları çizilebileceği konuşulmuş, bu durumda sonsuz olası eş doğru parçası oluşacağı öğrenciler tarafından ifade edilmiştir. Etkinlik sonunda öğrencilere kazandırılması düşünülen kritik eylem olan "Çemberin bir noktaya eşit uzaklıktaki olası noktaların geometrik yeri olduğunu kavrama" hedefine ulaşılamadığı görüldüğünden etkinliğe ek maddeler eklenerek olası bütün eş doğru parçalarını inşa edebilme (veya farkına varma) hedefine ulaşılacağı görülmüştür. Öğrenme yörüngesinin bir ürünü olarak etkinlik 1'den sonra öğrencilerin seviyesine uygun ve gelişimsel süreçlerini tetikleyeceği düşünülen ek göreve ilişkin öğrenci cevaplarından bir örnek şekil 15'te verilmiştir.

Şekil 15

Etkinlik 1 ek göreve ilişkin öğrenci cevapları

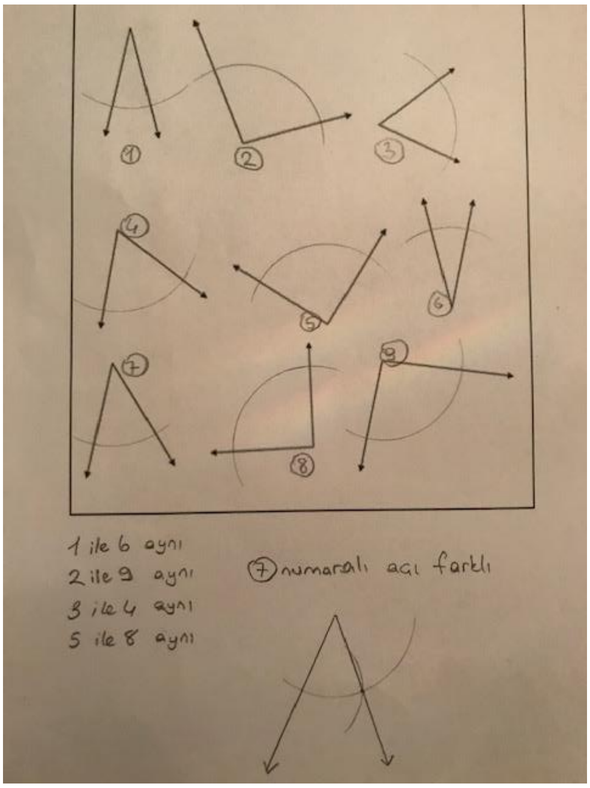


Bu ek görevler Etkinlik 1'e ve öğrenme yörüngesine gelişim basamakları olarak eklenerek Tablo 19'da görüldüğü gibi revize edilmiştir.

Etkinlik 2'de verilen açıların ölçülerini karşılaştırarak eş olanları eşleştirip farklı olan açıya eş olacak yeni bir açı inşa etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin elinde açı ölçmek için kullandıkları açıölçer olmadığı için öncelikle açıyı nasıl ölçmeleri gerektiğini sorgulamışlar ve kendi aralarında tartışmışlardır. Öğrenciler önceki ölçme aşamasında pergel kullandıkları için "bunu da pergelle mi ölçeceğiz?", açının doğru parçası gibi sınırları olmadığı için "ama nereden ölçeceğiz açıklık gitgide artıyor?" gibi sorular yöneltmişlerdir. Burada yine öğrenciler tarafından "o zaman açıyı çizelim" şeklinde açıklığı ölçebilmek için sınırlar oluşturma fikri öne sürülmüştür. Bir öğrenci her bir açıya gelişigüzel yaylar çizmiş, fakat birkaç öğrenci bu noktada itiraz ederek açıların kolları eşit uzunlukta olacak şekilde yaylar çizilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir ve bu durum tüm sınıf tarafından kabul görmüştür. Yine burada alternatif çözümlerin öğrenciler tarafından tartışılması etkinlikte derinleşme sağlamış, öğrencileri eş açıların farklı görünümlerini zihinde canlandırma düşüncesine yöneltmiştir. Etkinlik 2'ye ilişkin öğrenci çözümlerinden bir örnek Şekil 16'daki gibidir.

Şekil 16

Eş açılar inşa etme görevi etkinlik kâğıdı



Bu bulgular ışığında öğrenme yörüngesindeki gelişim basamakları ve beklenen hatalar revize edilmiştir. Ayrıca öğrenciler bu inşaları gerçekleştirdikten sonra inşa adımlarını tarif etmeleri ve bunu matematiksel olarak açıklamaları istenmiş, inşa sürecindeki kritik eylem olarak belirlenerek öğrenme yörüngesine eklenmiştir. Burada öğrencilerin derste elde ettikleri kazanımları ifade etmeleri, hem öğrenme hedefine ulaşma durumunu değerlendirmek için bir kıstas hem de anlamlı öğrenme gerçekleşme durumunu ve bunun doğru bir muhakemeye sebep olup olmadığının göstergesi olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin bazı açıklamaları aşağıda verilmiştir:

Arda: Açının bir kenarını (kolunu) çiziyorum, sonra köşeden ilk açıya pergelle dilim (yay) çiziyorum, pergeli bozmadan aynı dilimi yeni kenara çiziyorum.

Öğretmen: Yay demek istiyorsun sanırım.

Arda: Evet. Sonra ilk yayı ölçüyorum, yeni yayı aynısı olacak şekilde işaretliyorum, diğer kenarını köşeyle birleştiriyorum.

Öğretmen: Eş oldular mı sence? Nereden anladın?

Arda: Pergelle ölçtüm her yerini, aynısı olmuş. Aslında pizza dilimi gibi kopyalamış oldum.

Burada öğrenci açıklamaları matematiksel dilden ziyade günlük dille olmuştur.

Geriye dönük analiz sonucunda öğrenme yörüngesinin ilk öğrenme hedefi için düzenlenmiş hali aşağıda Tablo 19'da verilmiştir.

Tablo 19

Öğrenme hedefi 1'e ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

<u>Öğrenme Hedefi 1</u>: Pergel ve çizgeç ile eş doğru parçaları ve eş açılar inşa eder.

<u>Etkinlik 1</u>: Farklı Olanı Bul! (Doğru parçası)

<u>Öngörülen Gelişim basamakları (Development Progression)</u>

1. Etkinlikte verilen bağlamı anlama
2. Doğru parçalarının uzunluğu pergelin açıklığını kullanarak ölçme
3. Eşit uzunluktaki doğru parçalarını eşleştirme
4. Farklı uzunlukta olan doğru parçasını bulma
5. **<u>A noktası başlangıç noktası olacak şekilde eş bir doğru parçası inşa etme</u>**
6. **<u>A noktası başlangıç noktası olacak şekilde olası farklı eş doğru parçaları inşa etme</u>**
7. **<u>A noktası başlangıç noktası olacak şekilde olası eş doğru parçalarının bir çember oluşturduğunu fark etme</u>**
8. Bir başlangıç noktası belirleyip aynı açıklığı ölçerek yeni bir eş doğru parçası oluşturma
9. **<u>Alternatif çözüm yollarını tartışma ve olası diğer eş doğru parçaları inşa etme</u>**

<u>Etkinlik 2</u>: Farklı Olanı Bul! (Açı)

<u>Öngörülen Gelişim basamakları (Development Progression)</u>

1. **<u>Açı kavramının tanımını düşünme, açıklığı ölçmesi gerektiğinin farkına varma</u>**
2. Açıklığı ölçebilmek için herhangi bir yarıçapa sahip bir yay çizme
3. Ölçülmek istenen bütün açılara aynı yarıçapa sahip yaylar çizme
4. Pergel açıklığını kullanarak çizilen bu yayların uzunluğunu ölçme ve diğer yaylarla karşılaştırma
5. Eş açıları eşleştirme ve farklı olan açıyı belirleme
6. Bu açıya eş bir açı çizmek için herhangi bir uzunlukta bir doğru parçası çizerek açının köşesini belirleme ve belirlenen yayı bu doğru parçasının üzerine aktarma yayın uzunluğunu diğer açıyla eş olacak şekilde işaretleme
7. İşaretlenen yerden geçecek şekilde açının diğer kolunu inşa etme

8. <u>Alternatif çözümlerin sorgulanması ve olası eş açıları inşa etme</u>

<u>Beklenen hatalar</u>

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- Pergel yerine çizgeç üzerinde işaretleme yaparak doğru parçasının uzunluğunu ölçmeye çalışma
- **<u>Açıyı ölçmek ve karşılaştırmak için rastgele yaylar çizme ve eşit yarıçapta yaylar çizilmesi fikrine varamama</u>**
- Yanlış ölçüm yapma

<u>Kritik Eylemler</u>

1. Çemberin uzunluk ölçme işlevini keşfetme
2. Bir noktaya eşit uzaklıktaki olası tüm noktaların geometrik yerinin çember olduğunu kavrama
3. **<u>Eş doğru parçalarının farklı doğrultuda olabileceğini anlama</u>**
4. Açı ölçmenin aslında açıklığı ifade eden yay uzunluğu ölçme olduğunu fark etme
5. **<u>İnşa adımlarını tarif etme ve matematiksel olarak açıklama</u>**

4. 2. 2. Orta Nokta Bulma ve Orta Dikme İnşa Etme

Etkinlik 3'te bir terazinin kefeleri ve kolları yer almakta ve öğrencilerden bu terazinin dengede kalması için dayanak noktasının bulmaları istenmektedir. Öğrenciler bağlamı incelediklerinde dayanak noktası hakkında fikirlerini ifade etmişlerdir. Tüm öğrenciler dayanak noktasının tam orta noktada olması gerektiği fikrine ulaşmışlardır. Bir sonraki adım orta noktanın nasıl bulunacağının sorgulanması olmuştur. Burada öğrencilerin ilk yaptıkları göz kararı bir nokta belirlemek olmuş, belirledikleri noktanın uçlara olan uzaklıklarını pergelle ölçerek karar vermeye çalışmışlardır. Bu şekilde deneme yanılma veya göz kararı nokta bulma yöntemi sınıf içi tartışmaya açılmış, birçok öğrenci "iyi de orda aslında bir sürü nokta var, hangisi olduğunu kesin olarak nerden bileceğiz?" gibi ifadelerle bunun kabul edilemeyeceğini dile getirmiş ve tüm sınıf bunu onaylamıştır. Burada bazı öğrenciler arasında aşağıdaki diyaloglar yaşanmıştır:

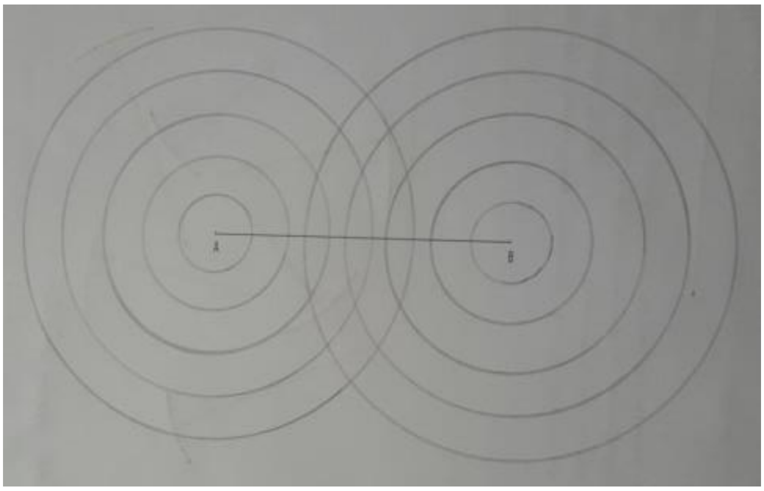
Merve: İki noktadan da adım adım ilerlediğimizi düşünürsek buluştukları nokta tam orta nokta olur.

Kaan: Yani orta nokta iki uca da eşit uzaklıkta.

Bu esnada doğru parçasının uç noktalarından eş çemberler çizme fikrine ulaşılamamış etkinlik yarıda kalmıştır. Öğretmen "Tahtayı bir havuz olarak düşünün, (iki nokta belirliyor) bu noktalara aynı anda su damlatan iki özdeş musluk var. Su yüzeyinde oluşan dalgaların desenini elinizdeki pergelle defterinize çizer misiniz?" şeklinde bir ara etkinlik gerçekleştirmiştir. Tüm öğrenciler dalgaların oluşturduğu deseni merakla çizmişlerdir. Öğretmen iki noktayı birleştirerek "Bu çizginin orta noktasını bulabilir misiniz?" sorusunu yöneltmiş ve tüm öğrenciler kesişim noktalarını birleştirerek orta noktayı rahatlıkla görebilmişlerdir. Şekil 17'de örnek öğrenci çizimine ilişkin görsel paylaşılmıştır.

Şekil 17

Damlayan musluklar etkinliği öğrenci çizimi



İlk etkinliğe geri dönüldüğünde artık öğrenciler uç noktalardan çemberler çizmeye başlamışlar ve aşağıdaki konuşmalar gerçekleşmiştir:

Arda: Bu aslında iki uç noktadan adım adım ilerleyerek birbirine yaklaşmak gibi öğretmenim. Kesiştikleri yer orta noktaya denk geliyor.

Öğretmen: Evet o şekilde de düşünebiliriz.

Merve: peki öğretmenim kaç tane çember çizeceğiz?

Arda: Kesişene kadar.

Kaan: O zaman büyük çember çizelim hemen kesişsin. (Arkadaşları onaylar)

Öğretmen: Büyük derken ne kadar büyük?

Merve: Zaten yarısından küçük olunca kesişmiyor, kesiştirmemiz lazım, yarısını geçmesi lazım.

Defne: Doğru parçası kadar da olabilir.

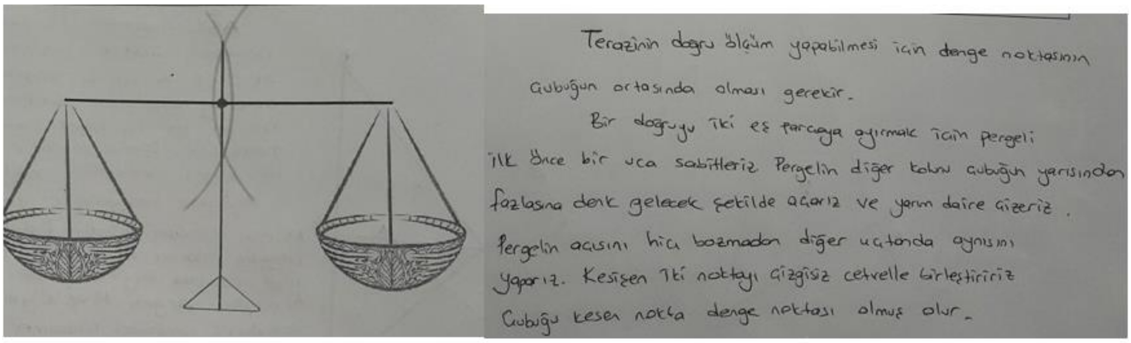
Kaan: Aslında çemberin arka taraflarını çizmesek de olur kesişen yerler birleşince ortadan geçiyor.

Arda: Hem de dik oluyor. (Tüm sınıf onaylıyor)

Şekil 18'de "Terazi dayanağı" etkinliğine ait öğrenci çizimi ve açıklamaları yer almaktadır.

Şekil 18

Etkinlik 3 için öğrenci cevabı



Burada gerçekleşen inşa adımları öğrenciler tarafından ifade edilmiş ve herkesçe kabul edilmiştir. Arda'nın dik olduğunu ifade etmesi üzerine,

Öğretmen: Bu noktanın orta nokta olduğunu, ayrıca bu çizginin orta dikme olduğunu nasıl açıklayabiliriz? Genel kabul görecek matematiksel açıklamalarımız olmalı.

Nisa: İşte ölçüyoruz hocam. (Pergel açıklığıyla dayanak noktasının sol ve sağ tarafını ölçüp karşılaştırıyor.) Dik olduğu da açıkça görünüyor zaten.

Öğretmen: Görünüşe göre doğrulayamayız. Bunun matematiksel bir dayanağı olmalı.

Defne: Hocam bakın bu doğru simetri doğrusu. Sol taraf ve sağ taraf bu çizgiye göre simetrik. Üzerindeki bütün noktalar da uçlara eşit uzaklıkta. Bakın (Pergelle ölçerek gösteriyor)

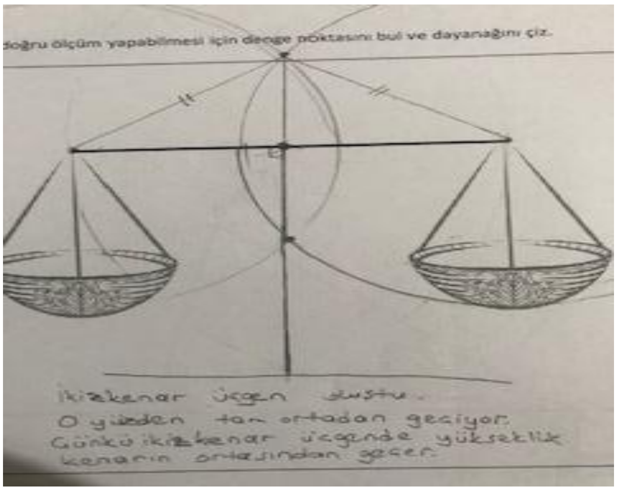
Kaan: (kesişim noktalarını uçlara birleştiriyor) Bir de burada ikizkenar üçgenler oluşuyor, (orta dikmeyi göstererek) bu da yüksekliği hem de uç noktalara eşit uzaklıkta.

Bu açıklamalar tüm sınıfta kabul görüyor.

Üst düzey bir öğrencinin Terazi dayanağı etkinliğine ait matematiksel açıklaması Şekil 19'da verilmiştir.

Şekil 19

Kaan'ın orta noktaya ilişkin çizimi ve matematiksel açıklaması



Hem Kaan’ın hem de Defne’nin matematiksel açıklamaları diğer öğrenciler tarafından takdir görerek kabul edilmiştir. Sınıf içi yapılan bu sorgulamalar öğrenciler tarafından anlamlı öğrenmelere sebep olmuş, tüm sınıfın merak ve ilgisini celbetmiştir.

Yapılan analiz sonucunda öğrenme yörüngesi aşağıdaki Tablo 20’deki gibi revize edilmiştir:

Tablo 20

Öğrenme hedefi 2'ye ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

Öğrenme hedefi 2: Bir doğru parçasının orta noktasını bulur ve orta dikmesini inşa eder.

Hazırlık etkinliği: Belirlenmiş iki noktaya düzenli aralıklarla damlayan iki eş musluk düşünelim. Bu iki noktada oluşan su dalgalarının oluşturduğu deseni çiziniz.

Etkinlik 3: Terazi Dayanağı

Gelişim basamakları (Development Progression)

1. Dayanak noktasının terazi kolunun tam ortasında olması gerektiğinin farkına varma
2. Terazi kefelerinin dayanak notasına eşit uzaklıkta olduğunun farkına varma.
3. Uç noktaları merkez kabul eden herhangi bir yarıçapta eş çemberler çizerek o uzaklıktaki olası noktaları belirleme
4. **Doğru parçasının yarısından küçük yarıçaptaki eş çemberlerin kesişmediğini fark etme ve yarıçapın yarısından büyük olması gerektiğini ifade etme**
5. Çizilen çemberlerin kesim noktalarının tam orta noktaya dik şekilde sıralandığını fark etme
6. Kesim noktalarını birleştirdiğinde orta dikme olduğunu ifade etme
7. **İnşa adımlarını tarif etme ve matematiksel olarak açıklama**

Beklenen hatalar

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- Rasgele göz kararı bir nokta belirleme
- **Doğru parçasının uç noktalarından çember çizme fikrine ulaşamama**
- Çizim esnasında kayma vs gibi hatalar yapma

Kritik Eylemler

1. Doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktaki noktalar birleştirildiğinde orta noktadan geçtiğini fark etme

2. **<u>Uç noktalardan çizilen eş çemberlerin kesim noktasının uç noktalarla birleştirildiğinde bir ikizkenar üçgen oluşturduğunu fark etme</u>**
3. **<u>Orta dikmenin bu ikizkenar üçgenin yüksekliği olduğunu ifade etme</u>**
4. **<u>Farklı yarıçapta çemberler çizilse bile kesişim noktalarının birleşiminin daima orta dikme doğrusu üzerinde olacağını fark etme</u>**

4. 2. 3. Üçgen İnşa Etme

Bu aşamadan sonraki inşa görevlerinde matematiksel gerekçelendirme olarak üçgen özelliklerinden yararlanılacağı için öncelikle üçgen inşa becerilerinin öğrencilere kazandırılması hedeflenmektedir. Burada üçgenlerin özelliklerinin hatırlanması, bir sonraki hedef olan dikme inşa etme görevinde kolaylaştırıcı rol oynayacaktır.

Bu öğrenme hedefinde sırasıyla eşkenar, ikizkenar ve çeşitkenar üçgenler inşa edilmesi hedeflenmektedir. İlk olarak öğrencilerden kenar uzunluğunu kendilerinin belirledikleri bir eş kenar üçgen inşa etmeleri istenmektedir. Önce eşkenar üçgenin özellikleri öğrenciler tarafından ifade ediliyor ve bu inşanın nasıl gerçekleşeceği hakkında fikirler ortaya atılıyor:

Kaan: Üç kenarı da eşit olan üçgendir. Açıları da 60 derece.

Arda: Eşit doğru parçalarını uç uca ekleyeceğiz.

Nisa: 60 dereceyi nasıl ölçeceğiz?

Burada önce bir doğru parçası inşa edilip doğru parçasının uç noktalarından eş uzunlukta doğru parçaları rasgele çizildiğinde, açı göz ardı edildiğinden üçgenin kapanmadığı görülüyor ve aşağıdaki tartışma gerçekleşiyor:

Defne: İki doğru parçasını biraz aşağıya doğru döndürsek birleşecek aslında. (Biraz döndürülüyor fakat yine açık kalıyor. İki girişimde de tam kapanmıyor.)

Arda: Bakın bu çizgiler daire çiziyor gibi. Pergelle çizersek birleştikleri yeri buluruz.

Yukarıdaki gibi bir öğrenci, uç noktalara inşa edilen doğru parçalarının hareket ettiğini düşünürsek orada bir çember oluştuğunu ifade ediyor ve benzer şekilde diğer uca da aynı çemberi çizmeye çalışınca kesim noktasını bulup eşkenar üçgeni inşa ediyor. Burada bir öğrenci ile öğretmen arasında aşağıdaki konuşma gerçekleşmektedir.

Kaan: Aa eğer bir çizginin hareket ettiğini düşünüyorsak oraya pergelle bir yay çizeriz. Nasıl hareket ettiğini görmüş oluruz.

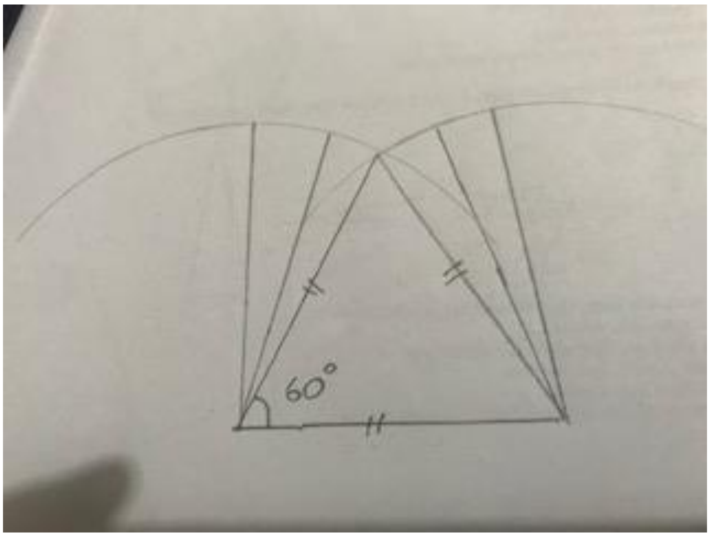
Öğretmen: Nasıl yani hareket etmesi ne demek?

Kaan: Yani mesela açısını bilmiyoruz ya o yüzden doğru parçasını hareket ettirip diğer (olası) durumlarını görebiliriz. O çizdiğimiz çembere göre hareket edebilir. Çemberlerin kesiştiği yer aradığımız nokta olur.

Eşkenar üçgen inşası sürecinde gerçekleşen çizim süreci Şekil 20'de görülmektedir.

Şekil 20

Eşkenar üçgen inşasına ait öğrenci çizimi



Öğrencinin bu ifadesi ve bunu tahtada göstermesi, diğer öğrenciler tarafından onaylanıyor. Bu ifade, öğrenci zihninde geometrik inşa sürecinin dinamik geçişinin önemli bir göstergesidir. Bu yüzden kritik eylem olarak öğrenme yörüngesine eklenmiştir. Ayrıca burada öğrenciler açıölçer kullanmadan 60 dereceyi çizdiklerini, tüm eşkenar üçgenlerde kenar uzunlukları farklı olsa da açıların hep 60 derece olduğunu ifade etmişlerdir.

Yine burada bir öğrenci kesişen yaylar uzatıldığında başka bir noktada daha kesiştiğini ifade etmiş, kesişim noktasını uç noktalarla birleştirdiğinde aynı eşkenar üçgenin simetrisinin oluştuğunu göstermiştir. Hatta burada bir öğrenci kesişim noktalarını birleştirerek yüksekliği inşa etmiş ve aşağıdaki gibi açıklamıştır:

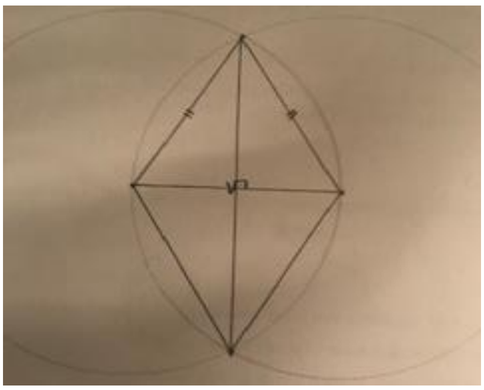
Arda: Hocam önceki ders öğrendiğimiz gibi şu noktaları (kesişim noktalarını) birleştirirsek hem orta noktayı buluruz hem de dik olduğu için yüksekliğini çizmiş oluruz.

Öğretmen: Evet haklısın.

Şekil 21'de Arda'nın eşkenar üçgenin yüksekliğini çizimine dair görsel verilmiştir.

Şekil 21

Eşkenar üçgen inşasına dair öğrenci çizimi 2



Bu öngörülmeyen gelişim basamağı da öğrenme yörüngesine eklenmiştir.

Ayrıca öğrencilerden inşa ettikleri üçgenin eşkenar olup olmadığını doğrulamaları ve matematiksel olarak açıklamaları istenmiştir. Burada, bir öğrencinin “Öğretmenim bu kenarların hepsi eş çemberlerin yarıçapı bakın köşeler merkez, kenarlar da yarıçap. (gösteriyor)” açıklaması tüm sınıf tarafından kabul ediliyor. Son olarak bir önceki etkinlikten yararlanarak öğrencilerden bir kenarın orta noktasını bulup kenar orta dikmesini de inşa etmeleri isteniyor.

Bir sonraki etkinlikte öğrencilerden ikizkenar üçgen oluşturmaları beklenmektedir. Öncelikle ikizkenar üçgenin ne olduğu sınıf tartışmasına açılıyor:

Merve: İki kenarı eşit uzunlukta olan üçgendir.

Nisa: Evet iki kenarı eşit diğeri farklı olan üçgendir.

Öğretmen: Hepsi eşit olsa ikizkenar üçgen olmaz mı?

Nisa: Hayır eşkenar olur.

Merve: İki kenarı eşit olması yeterli. Eş kenar üçgenin de iki kenarı eşit sonuçta. Bence eş kenar üçgen de aynı zamanda ikizkenar olabilir.

Öğretmen: Evet çocuklar iki kenarı eşit olması yeterli şart. Üçüncü kenar farklı da olabilir eşit de olabilir. Bu yüzden eş kenar üçgen aynı zamanda ikizkenar üçgendir.

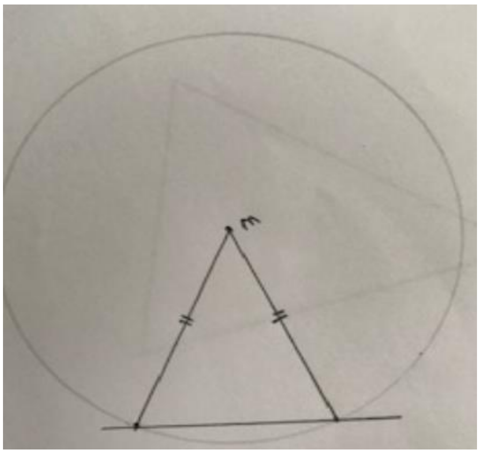
Bu tartışma üzerine ikizkenar üçgenin tanımı “en az iki kenarı eşit olan üçgen” olarak tüm sınıfta kabul görmüştür.

Etkinlik 5’te öğrencilere hiçbir koşul sunmadan kenar uzunluklarını da kendileri belirledikleri bir ikizkenar üçgen inşa etmeleri istenmektedir. İkizkenar üçgen inşasında bazı öğrenciler yine rasgele denemeler yoluyla çizmeye çalışsalar da iki farklı başarılı girişim ön plana çıkmıştır:

- Bir çember çiziliyor. Çemberin merkezi tepe noktası ve diğer köşeler çemberin üzerinde olacak şekilde ikizkenar üçgen inşa ediliyor. Ayrıca bu şekilde sonsuz sayıda ikizkenar üçgen inşa edilebileceği gösteriliyor.

Şekil 22

Çemberin içine ikizkenar üçgen inşasına dair öğrenci çizimi

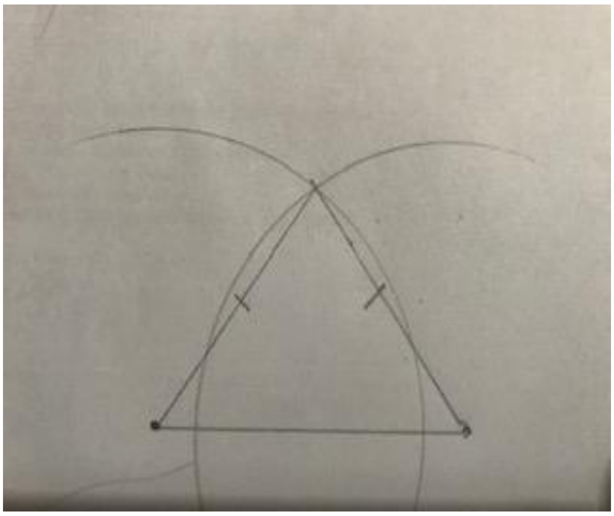


Şekil 22'de gerçekleştirilen inşa, çemberin bir noktaya eşit uzaklıktaki tüm noktaların geometrik yeri olduğu fikrine dayandığından çemberin tanımının içselleştirildiği ve yeni bir durumda kullanıldığının önemli bir göstergesidir. İnşa gerçekleştirildikten sonra öğrenciler inşa adımlarını açıklayarak ikizkenarların çemberin yarıçapı olduğundan eşit olduklarını ifade ederek matematiksel olarak doğruladıkları görülmüştür.

- Bir doğru parçası inşa ediliyor. Uç noktalara pergel daha fazla veya daha az açılarak eş yaylar çizilip kesiştiriliyor. Kesişim noktası uç noktalarla birleştiriliyor.

Şekil 23

İkizkenar üçgen inşasına dair öğrenci çizimi 1

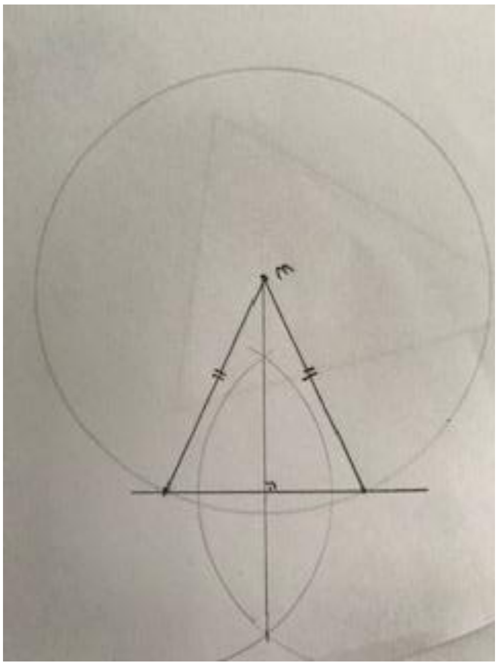


Şekil 23'te öğrencilerin eşkenar üçgen inşasında zihinlerinde oluşan uç noktalardan doğru parçası çizmek için yaylar oluşturma fikrini bu inşa girişiminde uyarladıkları görülmektedir. Bu açıdan daha önce edinilmiş bir bilgiyi yansıtması açısından değerlidir. Burada da yine öğrenciler inşa adımlarını tarif ederek, uç noktalardan eş çemberler çizildiğinden bunların yarıçaplarının da eş olup ikizkenar üçgen oluşturduğunu ifade etmişler, gerekli matematiksel doğrulamayı gerçekleştirmişlerdir.

Bunlara ek olarak bu çizilen yayların başka kesişim noktası olup olmadığı sorulmuş, öğrenciler eşkenar üçgendeki duruma benzer şekilde diğer kesişim noktasını bulmuşlar ve tabanları ortak olan diğer simetrik eş ikizkenar üçgeni de inşa etmişlerdir. Ayrıca orta dikme inşasını da burada kullanarak kesişim noktalarını birleştirdiklerinde orta dikme ve aynı zamanda yükseklik oluştuğunu göstermişlerdir. Bu düşünce bir sonraki dikme inşasında kullanacağından öğrencilerin keşfetmesi sağlanmıştır. Şekil 24'te bu ikizkenar üçgen inşasına dair öğrenci çizim örneği yer almaktadır.

Şekil 24

İkizkenar üçgen inşasına dair öğrenci çizimi 2

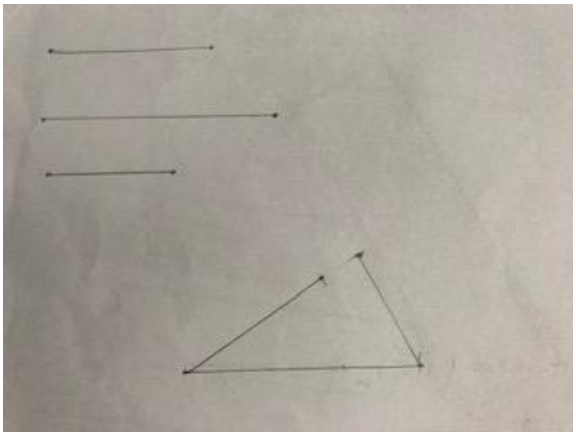


Etkinlik 6'da ise öğrencilerden verilen doğru parçaları ile bir çeşitkenar üçgen inşa etmeleri istenmiştir. Burada biri başarısız biri başarılı olmak üzere iki yaklaşım ortaya çıkmıştır:

- Kenarlardan biri pergelle ölçülerek aktarılıyor. Diğer kenarlar da pergel ile ölçülüyor fakat aktarım sırasında bir yay çizilmeden rasgele aktarıldığından uzunluklar eş olsa da uç noktalara aktarılan doğru parçaları kesişmiyor. Ortaya çıkan bu sorunun kaynağı öğrenciler tarafından tartışmaya açılıyor. Burada problemin aktarılan doğru parçalarının olası durumlarını görebilmek için bir yay ya da çember çizilmesi gerektiği ifade ediliyor. Bu başarısız girişime dair öğrenci çizimi Şekil 25'te gösterilmektedir.

Şekil 25

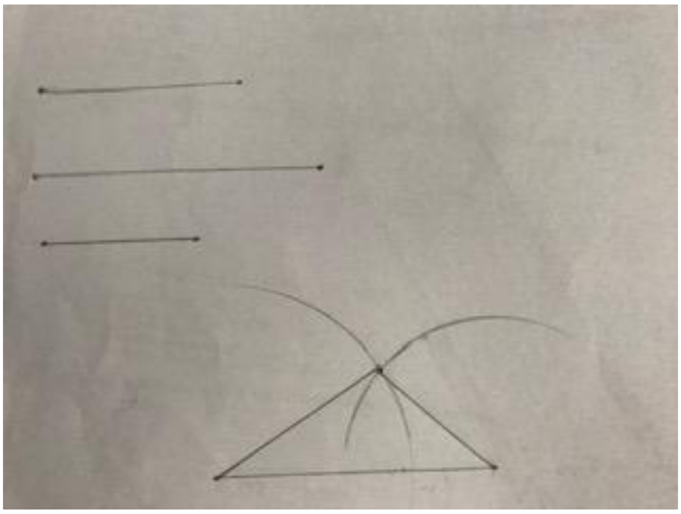
Çeşitkenar üçgen inşasına dair başarısız öğrenci çizimi



- Aşağıda şekil 26'da başarılı bir çeşitkenar üçgen inşa girişimi yer almaktadır. Bu girişimde öncelikle kenarlardan biri pergelle ölçülerek aktarılıyor. Bu doğru parçasının uç noktalarına aktarılacak diğer kenarlar kadar pergeli sırasıyla açarak olası durumlarını görebilmek için uç noktalardan çemberler veya yetecek kadar yaylar çizip kesiştiriliyor.

Şekil 26

Çeşitkenar üçgen inşasına dair başarılı öğrenci çizimi



Etkinlik sonunda yine inşa adımları öğrenciler tarafında tarif edilmesi istendiğinde bir öğrenci eline üç tane kalemi alarak "Öğretmenim bakın kalemin birini koydum. Diğer uçlara koyduğum kalemleri böyle hareket ettirdiğimde kesiştikleri yerde üçgen oluşuyor. İşte o yüzden yay çiziyoruz. Bakın kalemler de hareket ederken yay çiziyor." şeklinde modelleme yaparak açıklama yapması tüm sınıf tarafından takdir ediliyor. Bu açıklamada öğrenci zihninde gerçekleşen geometrik muhakemenin önemli bir göstergesidir.

Yapılan analizler sonucunda üçgen inşasına ilişkin öğrenme yörüngesi aşağıdaki Tablo 21'de revize edilmiştir.

Tablo 21

Öğrenme hedefi 3'e ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

Öğrenme hedefi 3: Farklı üçgen sınıflamalarına ait üçgenler (eşkenar, ikizkenar, çeşitkenar) inşa eder.

Etkinlik 4: Eşkenar üçgen inşa ediyoruz.

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Eşkenar üçgenin tanımlanması ve özelliklerini ifade etme
2. Herhangi bir uzunlukta bir doğru parçası inşa etme (üçgenin bir kenarı)
3. Doğru parçasının iki ucundan aynı pergel açıklığı ile çemberler **veya yetecek kadar yaylar** çizerek diğer iki kenarın olası durumlarının belirleneceğinin farkına varma ve çizme
4. Çizilen çemberlerin kesişim noktasını üçüncü köşe olarak belirleme
5. Köşeleri uç noktalara birleştirerek eşkenar üçgeni inşa etme
6. **Çemberlerin ikinci bir kesişim noktası olduğunu fark etme ve ilk üçgene eş ve simetrik bir eşkenar üçgen inşa etme**
7. **İnşa adımlarını tarif etme ve matematiksel olarak açıklama**
8. **İnşa edilen eş kenar üçgenin kenar orta dikmesini inşa etme ve bunun aynı zamanda yükseklik olduğunu ifade etme**

Etkinlik 5: İkizkenar üçgen inşa ediyoruz

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. İkizkenar üçgenin tanımlanması ve özelliklerini ifade etme
2. Bir çember çizip merkez tepe noktası ve diğer köşeler çember üzerinde herhangi iki nokta olacak şekilde ikizkenar üçgen inşa etme
3. Bu ikizkenar üçgende ikiz olan kenarların yarıçapa eşit olacağını ifade ederek matematiksel olarak doğrulama
4. Bir doğru parçası inşa etme ve uç noktalardan eş çemberler **veya yetecek kadar yaylar** çizerek bu çemberlerin kesişim noktasını tepe noktası olarak belirleme
5. Tepe noktasını uç noktalarla birleştirerek ikizkenar üçgeni inşa etme
6. **Uç noktalarda çizilen eş çemberlerin ikinci bir kesişim noktaları olduğunu fark etme ve bu noktayı uç noktalarla birleştirerek simetrik ve eş bir ikizkenar üçgen inşa etme**
7. **Orta nokta bulma inşasını buraya yansıtarak ikizkenar üçgenin kenar ota dikmesini bulma ve bunun üçgenin yüksekliği olduğunu ifade etme**

<u>Etkinlik 6:</u> Çeşitkenar üçgen inşa ediyoruz.

<u>Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)</u>

1. Verilen doğru parçalarının uç uca eklenerek üçgen inşa edilmesi gerektiğini fark etme
2. Uzunlukların herhangi birini pergel açıklığı ile belirlenen yere taşıma
3. Diğer iki doğru parçasını da aktarılan doğru parçasının uçlarına taşıma
4. **<u>Uç noktalara aktarılacak doğru parçaları kadar pergeli sırasıyla açarak bu doğru parçalarının olası durumlarını görebilmek için uç noktalardan çemberler veya yetecek kadar yaylar çizip kesiştirme</u>**
5. Kesişim noktasını üçüncü köşe olarak belirleyip üçgeni inşa etme

<u>Beklenen hatalar</u>

- Önceki kazanımlarda elde edilen becerileri hatırlayıp yeni duruma yansıtamama
- Üçgenlerle ilgili bilgi eksikliğinden kaynaklı ilerleyememe
- **<u>Üçgen sınıflamalarının ve özelliklerinin yanlış tanımlanması</u>**

<u>Kritik Eylemler</u>

1. **<u>Uç noktalara aktarılan doğru parçasının nasıl hareket edeceğini (o doğru parçasının olası durumlarını) görmek için pergel ile o noktadan çember veya bir yay çizmek gerektiğini fark etme</u>**
2. Eşkenar üçgenler inşa ederken kenar uzunluklarının değişebilecekken açıların hep aynı kalacağını fark etme
3. Eşkenar üçgen inşasında açıölçer kullanmadan 60'lık açının pergelle çizilebildiğini fark etme
4. İkizkenar üçgen inşasında tüm ikizkenar üçgenlerin tepe noktası merkez ve ikizkenarlar yarıçap olacak şekilde çember çizerek inşa edilebileceğini ifade etme

4. 2. 4. Bir Doğruya Üzerindeki Bir Noktadan Dikme İnşa Etme

Bir önceki inşa görevinde öğrencilerin zihninde geliştirilen kritik noktalardan çember çizerek ilişkilendirme fikri, bundan sonraki inşa görevlerinde öğrenciler tarafından tercih edilen bir yol olmuştur. Bu noktadan sonra öğrencilerin büyük çoğunluğu istenen inşa görevini gerçekleştirirken artık rasgele denemeler yapmak yerine pergel kullanarak mantıklı adımlarla denemeler yapmışlardır.

Etkinlik 7'de öğrencilerden bir füzenin dik bir şekilde fırlatılacağından fırlatma güzergahını çizmeleri istenmektedir. Burada ilk olarak öne çıkan girişim deneme yoluyla göz kararı bir çizgi çizip dik olduğunu iddia etme olsa da bu şekilde bir girişim dikliği ispatlama anlamında bir matematiksel gerekçeye dayanmadığından artık tüm sınıf tarafından kolaylıkla reddedilmiştir. Sonrasında sınıfta geçen konuşmalardan bir alıntı aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: Biz önceki etkinliklerde dikme oluşturmuştuk hatırladınız mı?

Merve: Evet orta noktayı bulurken orta dikme çizmiştik.

Öğretmen: Bunu burada kullanabilir miyiz?

Kaan: O zaman bu noktanın orta nokta olması lazım. Orta dikme orta noktadan geçmişti.

Öğretmen: Çok güzel! Nasıl orta nokta yaparız bu noktayı (B noktası)?

Arda: Bu noktadan çember çizersek çemberin merkezi olur yani orta nokta. (B merkezli bir çember çiziliyor.)

Kaan: Şimdi de uçlardan eş yaylar çizip kesiştirirsek tamamdır. (Uç noktalardan eş yaylar çizilip kesiştiriliyor ve kesişim noktası B noktası ile birleştiriliyor.)

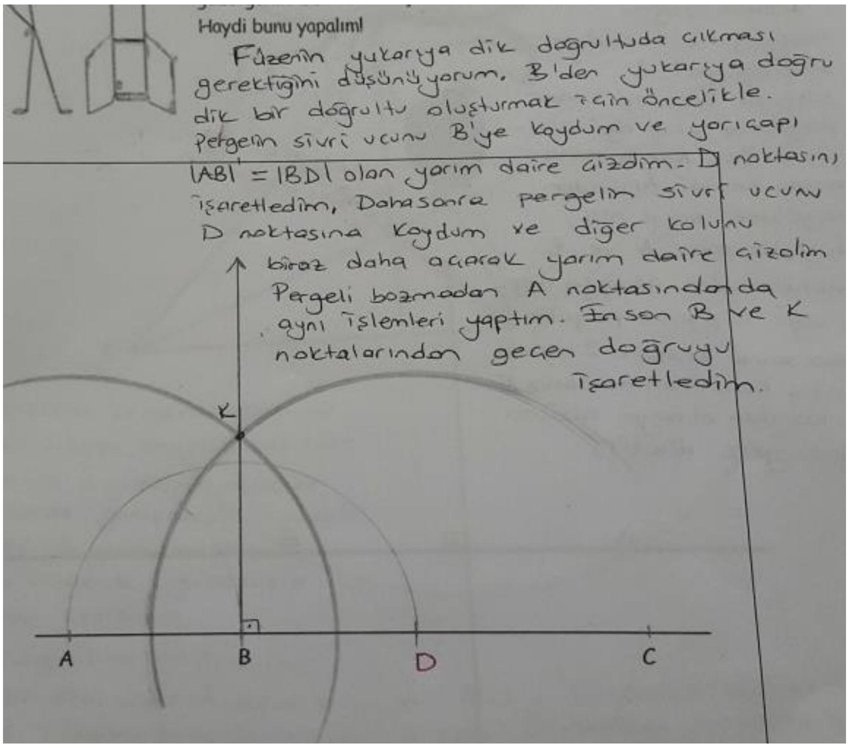
Öğretmen: Çizdiğimiz doğrunun dikme olduğuna hepimiz ikna olduk. Peki bunu matematiksel olarak nasıl açıklayıp doğrulayabiliriz?

Defne: Öğretmenim orta dikme inşa ettiğimizdeki ilk etkinlik gibi ikizkenar üçgen oluşuyor işte bunlar eşit yarıçaplar (eş yayların yarıçaplarını gösteriyor) ikiz olan kenarlar. Çizdiğimiz çizgi de (inşa edilen dikme) orta noktadan geçtiği için orta dikme hem de yükseklik olmuş oluyor o da dik işte.

Şekil 27'de bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşasına yönelik orta düzey öğrenci olan Defne'ye ait çizim ve açıklamaları verilmiştir.

Şekil 27

Bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme inşası dair Defne'nin çizimi



Önceki inşa görevlerinden öğrenciler üçgen inşalarına hâkim olduklarından burada dikme inşasında ikizkenar üçgen oluşturma fikri öğrencilerin çoğu tarafından kullanılmıştır. Yapılan açıklamalar tüm sınıf tarafından kabul görmüştür. Defne'nin açıklaması da artık öğrencilerin geometrik muhakeme esnasında rahatlıkla matematiksel savunmalar yapabildiğini göstermiştir.

Bu etkinlikte ikizkenar üçgen özellikleri öngörüldüğü gibi hem inşa esnasında hem de doğrulama aşamasında kullanılmıştır. Buna ilaveten orta dikme inşasının kullanılması için B noktasının orta nokta olacağı bir çember çizme fikri ilk aşama olduğundan bu doğrultuda gelişim basamakları güncellenmiştir. Revize edilmiş öğrenme yörüngesi Tablo 22'de verilmiştir.

Tablo 22

Öğrenme hedefi 4'e ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

<u>Öğrenme hedefi 4:</u> Bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme inşa eder.
<u>Etkinlik 7:</u> Füze fırlatma
<u>Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)</u>
1. Fırlatma güzergahının fırlatma noktasından çizilen bir dikme olduğunu ifade etme
2. **<u>Çizilecek dikmeyi önceden edinilmiş orta dikme inşası ile ilişkilendirme ve B noktasının orta nokta olması gerektiğini fark etme</u>**

3. **B noktası merkez olacak şekilde bir çember çizme**
4. Orta dikme inşa etme sürecinde ortaya çıkan ikizkenar üçgen ile ilişkilendirerek bir doğruya üzerindeki bir noktadan (B noktası) çizilecek dikmenin burada inşa edilecek bir ikizkenar üçgenin yüksekliği olacağının farkına varma
5. **B merkezli çemberin doğruyla kesiştiği noktaları** ikizkenar üçgenin taban köşeleri olarak ifade etme
6. Taban köşelerinden eşit yarıçaplı çemberler çizerek bu çemberlerin kesiştikleri noktayı ikizkenar üçgenin tepe noktası olarak belirleme
7. B noktası ile tepe noktasını birleştirerek dikmeyi inşa etme
8. **İnşa adımlarını tarif etme ve matematiksel olarak doğrulama**

Beklenen hatalar

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- **Orta dikme inşasıyla bağlantı kuramama**
- İkizkenar üçgenin özelliklerini fark edememe ve yeni duruma yansıtılamaması
- Araçları işlevine uygun kullanamama

Kritik Eylemler

1. Orta dikme inşasındaki ikizkenar üçgen oluşumunu bu noktadan çizilebilecek dikme ile ilişkilendirme
2. Dikmeyi çizdikten sonra matematiksel gerekçelendirme ve genel bir çözüm olduğunu doğrulama

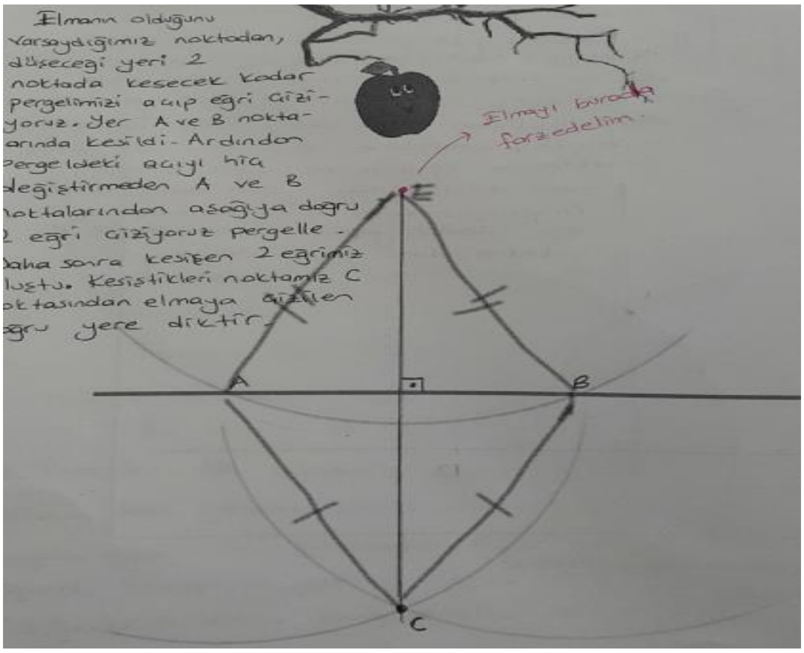
4. 2. 5. Bir Doğruya Dışındaki Bir Noktadan Dikme İnşa Etme

Etkinlik 8'de öğrencilerden ağaçtaki bir elmanın düştüğü yeri bulmak için düşme yolunun çizilmesi istenmektedir. Buradaki temel maksat bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa etmeye çalışmaktır. Öncelikle öğrenciler elmanın bulunduğu noktadan (E noktası) dik bir şekilde düşeceğini ifade etmişlerdir. E noktasından çizilecek bir dikme için burada biri öngörülen diğeri öngörülemeyen iki farklı inşa girişimi ortaya çıkmıştır:

- E noktası tepe noktası olacak şekilde tabanı yer düzleminde yer alan bir ikizkenar üçgen inşa etme. Bu girişime ait öğrenci çizimi şekil 28 de verilmiştir.

Şekil 28

Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşasına dair öğrenci çizimi 1

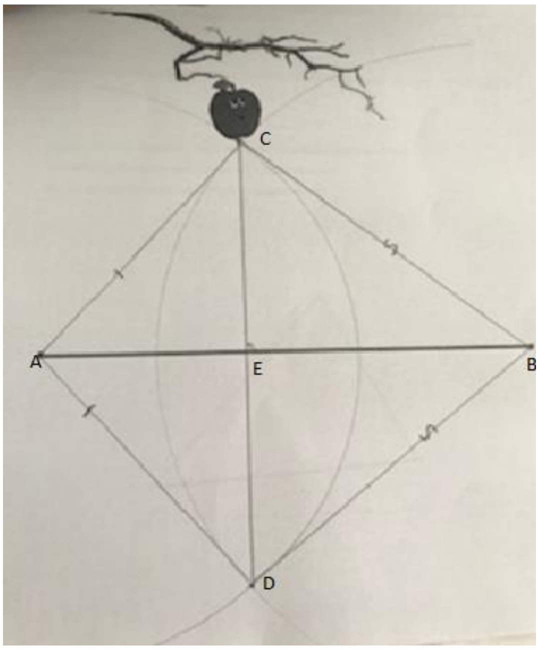


Bu inşa girişimi gelişim basamaklarında öngörülen bir inşa olmuştur. Tepe noktası merkez ve diğer iki köşesi çember üzerinde olacak şekilde bir çember çizerek ikizkenar üçgen inşası kullanılmıştır. E noktasını merkez kabul eden ve yer düzlemi doğrusunu kesen bir çember çizilmiştir. Burada ikizkenar üçgen oluştuğu öğrenciler tarafından rahatlıkla görülmüştür. Orta nokta bulma oluşumu kullanılarak taban köşelerinden eş yaylar çizilerek kesiştirilip dikme inşa ediliyor. Her inşa sürecinde olduğu gibi burada da öğrencilerden inşa adımlarını tarif etmeleri ve matematiksel olarak doğrulamaları isteniyor. Burada E merkezli çember çizince ikizkenar üçgen oluştuğu ve devamında orta nokta inşasının kullanıldığı ifade ediliyor.

- A merkezli C noktasından geçen bir çember çiziliyor. Benzer şekilde B merkezli C noktasından geçen bir çember çiziliyor. Bu çemberlerin kesişim noktaları birleştiriliyor. Elde edilen doğru parçası dikme oluyor. Şekil 29’da bu girişime ait öğrenci çizimi görülmektedir.

Şekil 29

Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşasına dair öğrenci çizimi 2



Buradaki önemli kısım öğrencilerin matematiksel doğrulama aşamasında sergiledikleri üst düzey geometrik muhakeme olmuştur. İki şekilde ispatlanmıştır:

Çemberlerin kesişim noktaları C ve D olsun.

Birincisi; "Burada tabanları (CD doğru parçası ortak taban) yapışık iki tane ikiz kenar üçgen (ACD ve BCD) oluşmuş. Şu iki çizgi (AE ve BE) ikiz kenar üçgenlerin tepe noktasından inen yükseklikleri olduğundan yükseklik tabana dik olur. Böylece burası (CD) dikme olmuş olur." şeklinde savunma yapılmıştır.

İkincisi; "Burada (ACBD) deltoid oluşuyor hocam. Şu iki çizgi (AC ve AD) birbirine eşit şunlar da (BC ve BD) birbirine. Karşı köşeler birleşince (AB ve CD) köşegen oluyor. Deltoidin köşegenleri de dik kesişir. O zaman burası (CD) dikme olur."

Bu inşa girişimi temel geometrik inşa çizimlerinde kullanılmayan fakat öğrenciler tarafından ortaya konmuş matematiksel olarak da doğrulanmış bir yol olmuştur. Öğrencilerin ortaya koydukları davranışlar incelenerek yapılan geriye dönük analiz sonrasında öngörülemeyen gelişim basamakları öğrenme yörüngesine eklenerek Tablo 23'teki gibi revize edilmiştir.

Tablo 23

Öğrenme hedefi 5'e ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

<u>Öğrenme hedefi 5:</u> Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa eder.
<u>Etkinlik 8:</u> Ağaçtaki elma

Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)

1. Elmanın düşüş güzergahının bulunduğu noktadan (C noktası) çizilen bir dikme olduğunu ifade etme

(Burada C noktasından dikme inşasında iki farklı yol tercih edilmektedir.)

1. Yol:

2. Etkinlik 7'ye benzer şekilde inşa edilen ikizkenar üçgen ile ilişkilendirerek bir doğruya dışındaki bir noktadan (C noktası) çizilecek dikmenin, tepe noktası C noktası ve tabanı doğru üzerinde olacak şekilde inşa edilecek bir ikizkenar üçgenin yüksekliği olacağının farkına varma
3. **C merkezli ve yer düzlemi doğrusunu kesen bir çember çizme ve çemberin doğruyu kesen noktaları taban köşeleri ve C noktası tepe noktası olacak şekilde ikiz kenar üçgen oluşturma**
4. Taban köşelerinden eş çemberler **veya yetecek kadar yaylar** çizip bu çemberlerin kesiştikleri noktayı birleştirerek dikmeyi inşa etme
5. **İnşa adımlarını tarif etme ve matematiksel olarak doğrulama**

2. Yol:

2. **A merkezli C noktasından geçen bir çember çizme**
3. **B merkezli C noktasından geçen bir çember çizme**
4. **Çizilen çemberlerin kesişim noktalarını (biri C noktası) birleştirme**
5. **İnşa adımlarını tarif etme**
6. **Tabanları ortak ve tepe noktaları A ve B noktaları olan iki ikiz kenar üçgenin özelliklerini kullanarak matematiksel doğrulama yapma**
7. **ACBD deltoid oluşturma ve deltoidin köşegenlerinin dik olma özelliğine dayanarak matematiksel savunma yapma**

Beklenen hatalar

- İkizkenar üçgenin özelliklerini fark edememe ve yeni duruma yansıtılamaması
- Araçları işlevine uygun kullanamama

Kritik Eylemler

1. Orta dikme inşasındaki ikizkenar üçgen oluşumunu bu noktadan çizilebilecek dikme ile ilişkilendirme
2. Dikmeyi çizdikten sonra matematiksel gerekçelendirme ve genel bir çözüm olduğunu doğrulama

3.	**<u>Dikmeyi oluştururken ve matematiksel doğrulamada deltoidin özelliklerinden yararlanma</u>**

4. 2. 6. Paralel Doğrular İnşa Etme

Etkinlik 9'da bir ok verilmiş ve bu ok ile aynı yönde giden bir ok inşa etmeleri istenmiştir. Öncelikle öğrencilerden beklendiği gibi "Yani paralel olması gerekiyor." şeklinde bir ifade dile getirilmiştir. Paralellik kavramının ne olduğu sınıf tartılmasına açılmıştır.

Defne: Aynı yönde giden oklar paralel olur.

Kaan: Paralel olursa hiç kesişmezler. Tren rayları gibi.

Arda: Uzaklıkları da aynı olur hep.

Paralellik kavramının özellikleri sınıf tarafından kabul edildikten sonra paralel doğru inşasında iki şekilde girişim olmuştur:

- Ok üzerinde bir nokta belirlenip bu noktadan herhangi bir uzunlukta bir dikme çiziliyor. Benzer şekilde ok üzerinde farklı bir nokta seçilip bu noktadan da eş bir dikme çiziliyor. Dikmelerin uç noktaları birleştiriliyor.

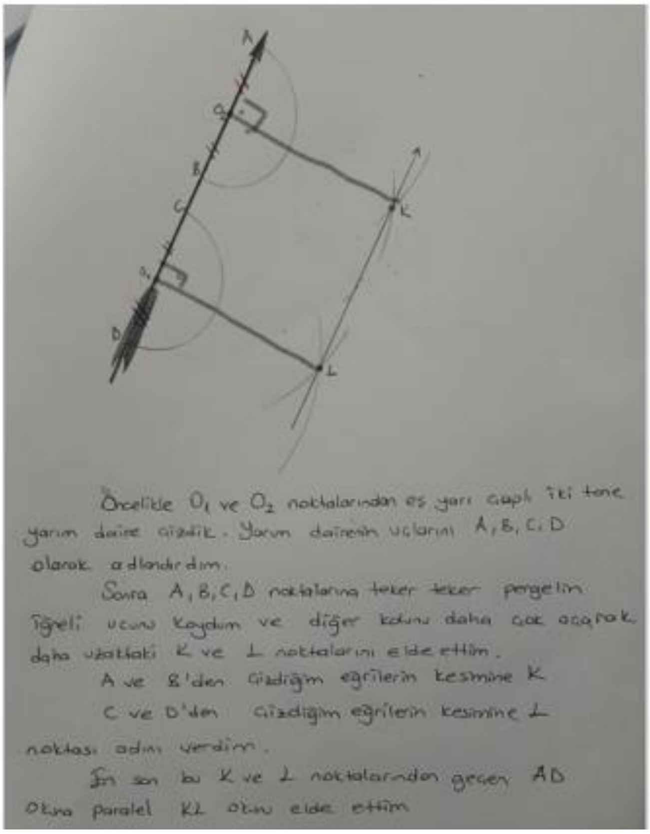
Kaan: Paralel doğrularda hep aralarındaki uzaklık eşit olur. Okun iki ucundan aynı (eş) dikme çizelim. Dikmelerin uçlarını birleştirirsek paralel olur.

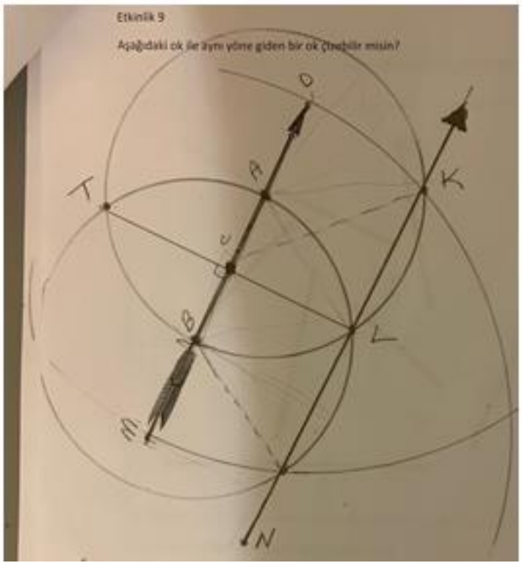
Öğrenci söylediği gibi okun başlangıç noktasına bir dikme çiziyor. Aynı uzunlukta dikmeyi uç noktasına da çiziyor ve dikmelerin uç noktalarını birleştiriyor. Bunu da matematiksel olarak "paralel doğruların birbirine uzaklıkları eşittir" ilkesine dayandırmaktadır. Burada "Peki illa uç noktalar mı olması gerekiyor? Çizdiğimiz ok daha uzun ya da kısa olabilir mi?" sorusu öğrenci nezdinde tüm sınıfa yöneltiliyor. Tartışmalar sonucunda önemli olan aynı yönde olması ve boyunun farklı olabileceği ifade edilip, bu yüzden okun üzerinde herhangi iki nokta da belirlenebileceği fikrine ulaşılıyor.

Paralel inşası sırasında öğrencilerin gerçekleştirdiği çizimlerden bazi örnekler Şekil 30'da görülmektedir.

Şekil 30

Paralel inşasına dair öğrenci çizimleri





- Okun eğrilik durumunun açı ile gösterilebileceği ifade ediliyor. Okun ucuna bir doğru parçası çiziliyor. Doğru parçasının üzerinde herhangi bir nokta belirlenip aynı açı oraya taşınıyor.

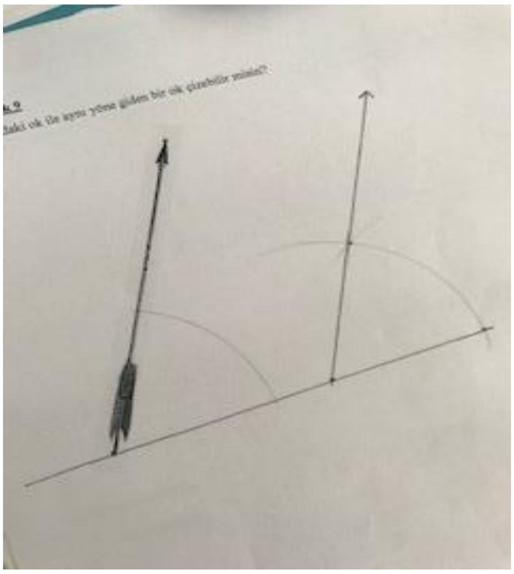
Merve: Okun bir eğriliği var bununla aynı eğiklikte olması gerekir.

Arda: Aslında açısı var. (Okun ucundan bir doğru çiziyor) Bu açı onun eğriliği işte. Ayni açıyı ileriye (doğrunun üzerinde herhangi bir noktaya) taşırsak paralel olur.

Şekil 31'de Arda'nın paralel inşasına yönelik çizimi yer almaktadır.

Şekil 31

Paralel inşasına dair Arda'nın çizimi



Konuşmada önceki inşa görevlerinde elde ettikleri açı taşıma becerisini öğrencinin buraya yansıttığı görülmektedir. Öğrenci çizilen doğrunun üzerinde herhangi bir nokta belirliyor. Okun oluşturduğu açıya bir yay çiziyor. Bu yaya eş bir yayı belirlediği diğer noktaya aktararak yeni oku inşa ediyor. Bu inşa ettiği okun paralel olduğunu da doğrulamak için "Hocam burada yöndeş açılar var bunlar eşit ve paraleller arasında oluşur." matematiksel ifadesinden yararlandığı görülmektedir.

Öğrenci ifadeleri ve inşa girişimleri doğrultusunda öğrenme yörüngesi aşağıdaki Tablo 24'teki gibi düzenlenmiştir:

Tablo 24

Öğrenme hedefi 6'ya ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

<u>Öğrenme hedefi 6:</u> Bir doğruya paralel bir doğru inşa eder.

<u>Etkinlik 9:</u> Ok çizelim

<u>Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)</u>

1. Bağlamı okuma ve anlama
2. Etkinlikte verilen ok ile aynı yönde gidecek okun paralel olması gerektiğinin farkına varma ve paralellik kavramını sorgulama

(Burada yapılan uygulama sonrasında öğrencilerin iki farklı yol izledikleri görülmüştür.)

<u>1.Yol:</u>

1. **<u>Okun ucuna bir dikme inşa etme</u>**
2. **<u>Aynı uzunlukta dikmeyi okun diğer ucuna inşa etme</u>**

3. **Dikmelerin uç noktalarını birleştirip paralel oku inşa etme**
4. **İnşa adımlarını tarif etme ve matematiksel olarak doğrulama**
5. **İnşa edilen paralel okun daha kısa ya da uzun olabileceğini fark etme**

2.Yol:

1. **Okun ucuna bir doğru parçası çizme**
2. Okun bu doğru parçası ile oluşturduğu açıyı doğrunun üzerinde yöndeş açı olacak şekilde herhangi bir yere taşıması gerektiğinin farkına varma
3. Doğru parçası ile okun arasında oluşan açıyı pergel ile ölçme
4. Doğru parçası üzerinde herhangi bir nokta belirleme ve açıyı buraya taşıma
5. Paralel doğruyu bu açıya uygun şekilde inşa etme

Beklenen hatalar

- Paralel kavramı fikrine ulaşamama
- Ok ile açı oluşturacak şekilde bir doğru çizme ve bu açıyı taşıma fikrine ulaşamama
- Açıyı taşıyamama veya yanlış taşıma

Kritik eylemler

- Paralellik durumunu matematiksel olarak ifade etme
- **Okun eğimini açı kavramı ile ifade etme**
- Yöndeş açı paralellik ilişkisini fark etme
- Açı taşıma becerisini yansıtma
- **Paralel iki doğru arasındaki mesafenin her zaman eşit olacağını ve hiçbir zaman kesişmeyeceğini ifade etme ve bu durumu inşa ettiği durum için doğrulama**

4. 2. 7. Açıortay İnşa Etme

Etkinlik 10'da öğrenciye verilen pizza dilimini iki eş parçaya ayırması istenmektedir. Pizza dilimini açıya benzeterek bir açının açıortay doğrusunu inşa etmesi hedeflenmektedir. Öğrenciler öncelikle bağlamı kendi cümleleriyle ifade etmişler ve iki eş parçaya ayırmanın sadece açıortay doğrusuyla mümkün olduğu bu yüzden yay kısmının orta noktasının bulunması gerektiği konusunda fikir birliğine varmışlardır. Artık öğrencilerin hiçbiri bu noktayı deneyerek rasgele belirleme yoluna gitmemiş, bu durum geometrik inşa mantığının öğrenciler tarafından içselleştirdiğinin bir göstergesi olmuştur. Orta nokta bulma inşasını burada kullanma girişimi akla ilk gelen deneme olmuştur. Sınıfta geçen konuşmalardan bir alıntı aşağıda verilmiştir:

Nisa: Önceden orta noktayı bulduğumuz gibi bulalım mı?

Öğretmen: Nasıl bulacağız?

Merve: Uçlardan çember çizerek. (Yayın uç noktalarını gösteriyor)

Öğretmen: Çiz bakalım.

Öğrenci yayın uç noktalarından eş çemberler çizip kesiştiriyor, sonrasında bu kesişim noktasını köşe noktasıyla birleştiriyor. Öğrencinin zihnindeki doğru parçasının orta noktasını bulma inşası bilgisini burada yeni bir duruma yansıttığı görülmektedir.

Öğretmen: Pizza dilimini bir açı olarak düşünebilir miyiz? Bakın köşede oluşan açıyı da iki eş parçaya ayırmış olduk. Bu doğruya biz açıortay doğrusu diyoruz.

Defne: Tam ortada olduğu için açının kollarına da eşit uzaklıkta.

Öğretmen: Çok doğru. Açıortay doğrusu üzerindeki her nokta açının kollarına eşit uzaklıktadır. (Burada açının kollarına dikmeler indirilip ölçümler yapılıyor.)

Öğrencilerin pergelle ölçümler yaparak öğretmenin verdiği bilgiyi ölçümlerle kontrol ettikleri sonrasında öğretmeni onayladıkları görülmektedir. Öğrencilerden son olarak açıortay inşa adımlarını tarif etmeleri isteniyor.

Arda: Açıya bir yay çiziyoruz. Bu yayın uç noktalarından (eş) çemberler çiziyoruz.

Kaan: Tamamını çizmesek de olur sadece kesişecekleri yeri çizsek yeter.

Arda: Evet, kesiştikleri nokta açıortayın noktası oluyor. Çünkü açının kolları açıortaya eşit uzaklıkta.

Yukarıdaki konuşma hem inşa adımlarını tarif etmiş hem de “Açıortay doğrusu üzerindeki tüm noktaların açının kollarına uzaklıkları eşittir.” bilgisine dayandırıldığından gerekli matematiksel doğrulamanın da yapıldığı görülmüştür.

Analizler sonucunda revize edilen öğrenme yörüngesi aşağıda Tablo 25’te verilmiştir.

Tablo 25

Öğrenme hedefi 7'ye ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

<u>Öğrenme hedefi 7:</u> Bir açıyı iki eş açıya ayırarak açıortayı inşa eder. <u>Etkinlik 10:</u> Pizzayı paylaşalım. <u>Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression)</u> 1. Bağlamı doğru anlama 2. Eşit bir şekilde paylaşabilmek için daire diliminin yay kısmının orta noktasını bulmak gerektiğinin farkına varma 3. Pergelle doğru parçasının orta noktasını bulma oluşumunu yay üzerine de benzer şekilde yansıtma

4. Yay kısmın iki ucundan eş çemberler **veya yetecek kadar yaylar** çizerek kesiştirme
5. Kesişim noktasını çizgeç yardımıyla köşe ile birleştirerek pizza dilimini eşit iki parçaya ayırma
6. İnşa edilen bu doğru parçasının açıortay olduğunu ve açıyı ikiye böldüğünü ifade etme
7. **İnşa adımlarını tarif etme ve matematiksel doğrulama**

Beklenen hatalar

- Pizzayı rastgele ikiye bölmeye çalışma
- Pizza diliminin yay kısmını eşit iki parçaya bölmesi gerektiği fikrine ulaşamama
- Doğrunun orta noktası bulma inşasını yeni duruma yansıtamama

Kritik eylemler

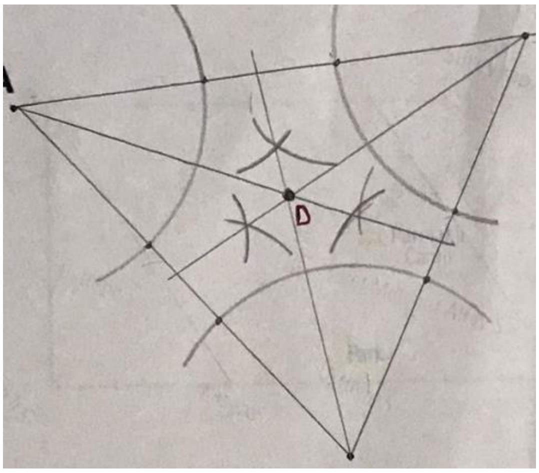
1. Yeni bir durum için önceden elde edilen inşa becerilerini gözden geçirme
2. Orta nokta bulma becerisinin yeni durumla benzerliğini fark etme ve yansıtma
3. Pizza dilimi eş iki parçaya ayrıldığında açıların da eş iki parçaya ayrıldığını ifade etme
4. Ortaya çıkan yeni doğrunun açıortay doğrusu olduğunu ifade etme
5. Açıortay kavramını matematiksel olarak ifade etme
6. Açıortay doğrusunun üzerindeki noktaların açının kollarına eşit uzaklıkta olacağını ifade etme ve ölçümler yaparak doğrulama

4. 2. 8. Üçgenin Yardımcı Elemanlarını İnşa Etme

Üçgenin açıortaylarını inşa etme: Bu inşa görevinde üçgenin açıortaylarını inşa etmeleri istenmiştir. Öncelikle dar açılı üçgenin açıortayları inşa edilmesi beklenmektedir. Şekil 32’de bu inşa görevine yönelik bir örnek öğrenci çizimi verilmiştir. Sonuç olarak öğrenciler her bir açı için bu oluşumu gerçekleştirilmiş ve açıortayların tek bir noktada kesiştiklerini ifade etmişlerdir.

Şekil 32

Üçgenin açıortaylarına dair öğrenci çizimi



Ayrıca kesişim noktası üç açıortayın da üzerinde yer aldığından üçgenin tüm kenarlarına eşit uzaklıkta olduğu, dolayısıyla bu noktadan kenarlara çizilen dikmelerin de eşit olacağı ifade edilmiştir. Bunun üzerine aşağıdaki konuşma gerçekleşmiştir:

Öğretmen: Peki bu (kesişim noktası) noktadan dikme yarıçapında bir çember çizsek ne olur?

Defne: (Çiziyor.) Üçgenin tam içine sığdı hocam.

Merve: Kenarlara değiyor.

Öğretmen: İşte biz bu çembere iç teğet çemberi diyoruz. Üçgenin kenarlarına içten değiyor yani teğet geçiyor.

Benzer şekilde dik ve geniş açılı üçgenlerin de açıortaylar inşa edilmiş ve kesişim noktaları bulunmuştur.

Üçgenin kenarortaylarını inşa etme: Bu görevde sırasıyla dar, dik ve geniş açılı üçgenlerin kenarortaylarının inşa edilmesi beklenmektedir. Öncelikle kenarortay kavramının ne olduğu konuşulmuştur. Bir önceki etkinlikte açıortayı öğrendikleri için bir öğrenci benzetme yaparak "Açıortay açıyı ikiye bölüyor, kenarortay da kenarı ikiye böler." şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bu ifade öğretmen tarafından onaylanmış ve kenarortay kavramı açıklanmıştır. Gruplar kendi içlerinde tartışarak önceden öğrendikleri orta nokta bulma inşası kullanılarak sırasıyla bütün kenarların orta noktasını bulup karşı köşeyle birleştirerek kenarortay doğrularını elde etmeleri beklemektedir. Burada bazı gruplar kenarların orta noktasını bulurken inşa ettikleri kenar orta dikmeleri kenarortay olarak ifade etmişlerdir. Buradaki yanılgı sınıf içi tartışmalarla giderilmeye çalışılmıştır. Ayrıca kenarortayların tek noktada kesiştiği de öğrenciler tarafından uygulamalı olarak gösterilmiştir. Bu kesişim noktasının üçgenin ağırlık merkezi olduğu ifade edilmiştir.

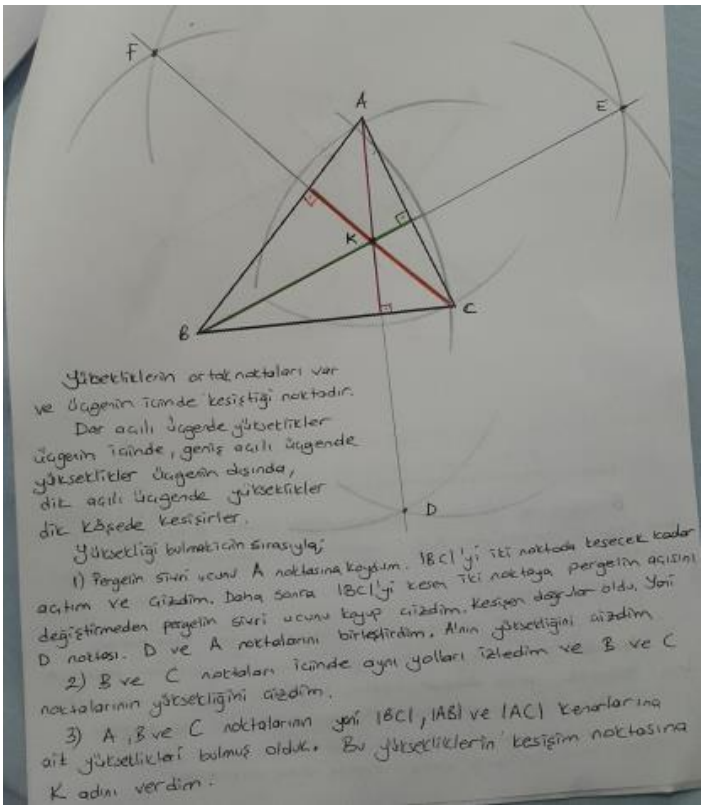
Benzer şekilde dik ve geniş açılı üçgenlerde de kenarortaylar inşa edilmiş ve kesişim noktaları bulunmuştur.

Üçgenin yüksekliklerini inşa etme: Öncelikle tahtaya farklı üçgenler çizilmiş ve öğrencilerin incelemeleri, boylarını ölçmeleri ve boy uzunluklarını çizmeleri istenmiştir. Burada üçgenlerin boylarının aynı zamanda yükseklik olduğu ifade edilmiştir. Üçgenlerin boylarının eşit olduğu, dar açılı üçgende kenara karşı köşeden çizilen dikmenin, dik üçgende dik kenarın, geniş açılı üçgende ise kenarın uzantısına çizilen dikmenin yükseklik olduğu fark edilmiş ve öğrenciler tarafından dile getirilmiştir. İkinci etkinlikte ilk olarak dar açılı üçgende bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme çizme inşası kullanılarak sırasıyla tüm yükseklikler bulunmuş ve bu yüksekliklerin tek noktada kesiştiği görülmüştür. Daha sonra dik üçgenin yükseklikleri benzer şekilde çizilmiştir, burada bazı öğrenciler dik kenarların aynı zamanda yükseklik olduğunu ifade edememişler, yüksekliğin sadece bir tane olduğunu söylemişlerdir. Bir öğrenci ilk etkinliğe atıfta bulunarak “Boyu dik kenar çıkmıştı ya, işte yükseklik aynı zamanda dik kenar olacak.” şeklinde düzeltme yapmış ve bu düzeltme sınıf tarafından onaylanmıştır. Dik üçgende yüksekliklerin dik olan köşede kesiştiği tüm sınıf tarafından kabul edilmiştir. Geniş açılı üçgende bazı yükseklikler üçgenin dış bölgesinde yer aldığından inşa edilemediği görülmüş, bu durum üzerine bazı öğrenciler yüksekliğin geniş açılı üçgende inşa edilemeyeceğini ifade etmişlerdir. Yine ilk etkinliğe atıfta bulunularak kenara değil uzantısına dikme çizilebileceği öğrenciler tarafından ifade edilmiştir. Ek olarak sınıftaki öğrencilerin tamamı geniş açılı üçgende yüksekliklerin tek noktada kesişemeyeceği ifade etmişler öğretmenin yükseklikleri biraz uzatmalarını istemesinin üzerine uzantılarının tek noktada kesiştiği görülmüştür.

Üçgen yüksekliği inşasına yönelik örnek öğrenci çizimi ve açıklamaları Şekil 33’te verilmiştir.

Şekil 33

Üçgen yüksekliklerine dair öğrenci çizimi



Bu öğrenme yörüngelerinin uygulanmasında öngörülemeyen yeni bir durum olmadığından bir değişiklik yapılmamıştır.

4. 2. 9. Eş Üçgenler İnşa Etme

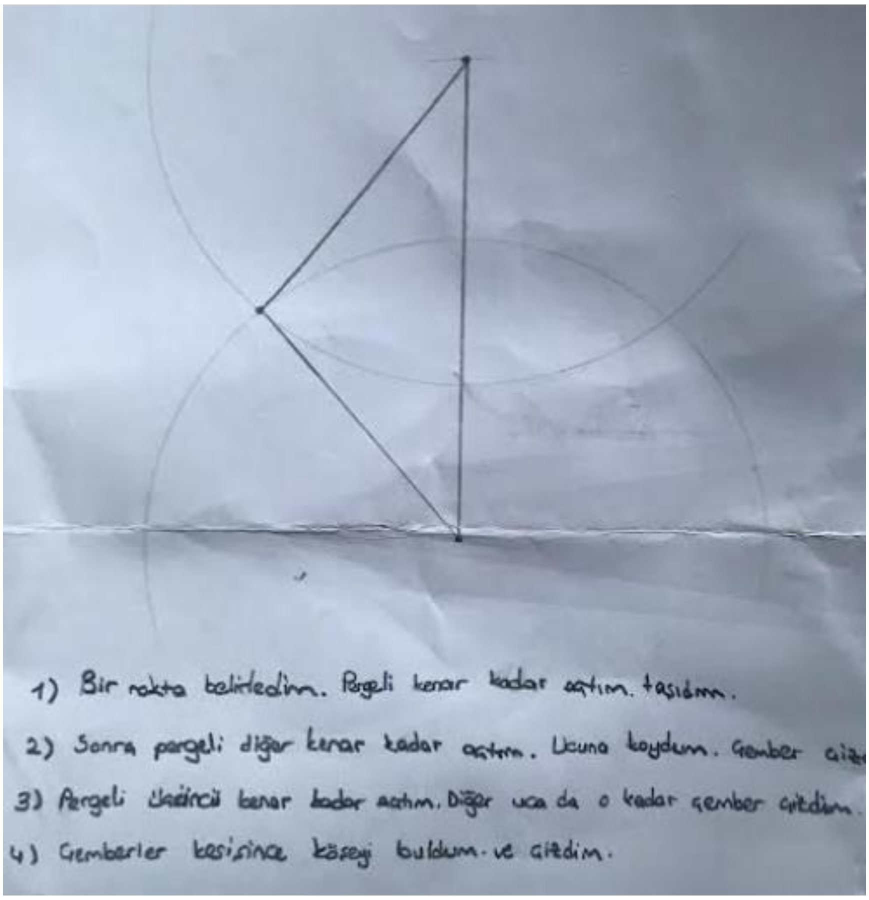
Bu inşa görevinde yeteri kadar elemanı verilen üçgenin inşa edilmesi hedeflenmektedir. Burada öncelikle öğrencilerden üçgenlerin eşlik durumları ve eş üçgenlerin özellikleri ile ilgili açıklama yapmaları istenmektedir. Burada “Eş üçgenler birbirinin aynısıdır.”, “Eş üçgenler her şeyi eşit üçgenlerdir. Açıları da kenarları da”, gibi tanımlamalar ilk öne çıkan cevaplar olmuştur. Etkinlik 14’te bir üçgen verilmiş ve bu üçgene eş bir üçgen oluşturulması için en az kaç bilgi ve hangi ölçüleri kullanacakları sorulmuş, belli bir süre verilerek gruplar içinde tartışmaları istenmiştir. Süre sonunda ilk grup temsilcisi açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır:

Arda: Kenarları pergelle ölçeriz, daha önce yaptığımız gibi pergelle birbirinin ucuna ekleriz. Yani üç kenarı da kullanmış oluruz.

Açıklama sonrasında Arda üçgenin kenarlarını pergelle uç uca aktararak inşayı gerçekleştirmiş, aktarım esnasında iki olası eş üçgen ortaya çıktığı ifade edilmiştir. Elde edilen üçgenin açıları da pergelle ölçüm yapılarak karşılaştırılmış, eş olduğu doğrulanmıştır. Bu inşa sürecini kenar-kenar-kenar diye adlandırmışlardır. Arda’nın KKK yöntemiyle eş üçgen çizimi ve açıklaması aşağıda Şekil 34’de verilmiştir.

Şekil 34

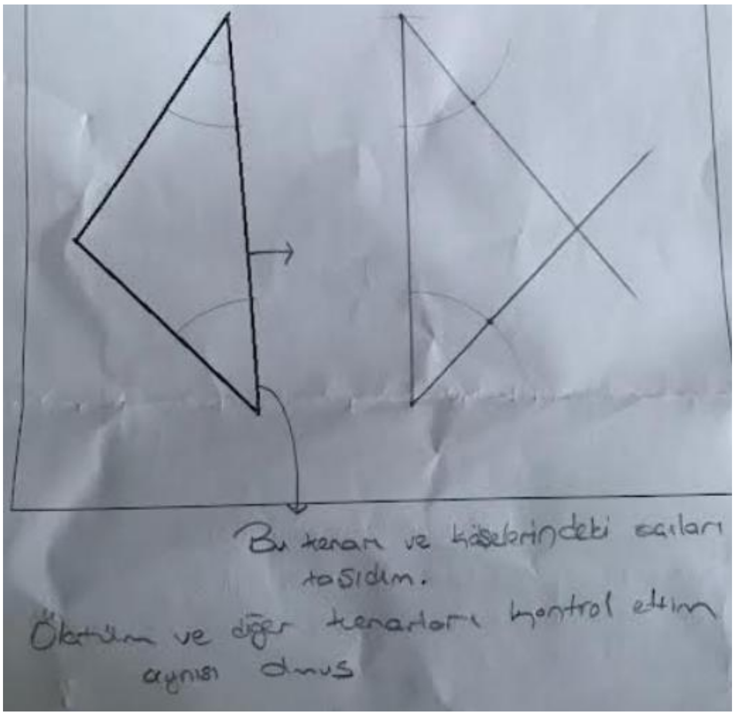
KKK yöntemi ile eş üçgen inşası



Daha sonra başka alternatif yolların neler olabileceği tartışılmış, diğer bir grup temsilcisi “Bir kenarı ve bu kenarın uçlarındaki açıları taşırız.” şeklinde açıklama yaparak bir kenarı ve bu kenarın komşu açılarını taşıyarak üçgeni inşa etmiştir. Benzer şekilde burada da ölçüm yapılarak doğrulama gerçekleşmiştir. Bu inşa sürecini de açı-kenar-açı şeklinde isimlendirmişlerdir. Şekil 35’te bu alternatif yol sonucunda AKA yöntemi ile eş üçgen çizime örnek görsel verilmiştir.

Şekil 35

AKA yöntemi ile eş üçgen inşası



Yine başka bir alternatif inşa süreci olarak bir öğrenci "İki kenar ile bu kenarlar arasındaki açıyı taşırız." şeklinde açıklama yapmış ve ifade edildiği şekilde iki kenar ve aralarındaki açı aktarılarak inşa gerçekleştirilmiş ve ölçüm yapılarak doğrulanmıştır. Bu inşa süreci de kenar-açı-kenar olarak adlandırılmıştır. Burada sadece ölçüm yapılıp karşılaştırılarak sadece deneysel doğrulama gerçekleştirilmiştir.

İnşa sürecinde öğrenme yörüngesinde öngörüldüğü gibi gelişim sergilenmiş, sadece eş üçgenler inşa edildikten sonra doğrulama için bütün açı ve kenarlar pergelle ölçüm yapılarak karşılaştırılmıştır. Öğrenme yörüngesine ölçüm yaparak doğrulama adımı eklenmiştir.

Tablo 26

Öğrenme hedefi 11'e ilişkin revize edilmiş öğrenme yörüngesi

Öğrenme hedefi 11: Eş üçgenler inşa eder. Etkinlik 14: Üçgenin kopyasını çiz! Öngörülen gelişim basamakları (Development Progression) 1. Etkinlikte verilen bağlamı anlama 2. Üçgenlerde eşlik durumunu tanımlama (Bu adımdan sonra 3 farklı yol izlenebilir. Hatta sınıf ortamında bütün yolların gruplar tarafından tercih edilmesi istenen bir durumdur. Tercih edilmediği durumlarda

alternatif başka hangi yollar kullanılabileceği konusunda öğrencilerin düşünmesi teşvik edilmelidir.)

<u>1. Yol: (Açı-Kenar-Açı)</u>

1. Verilen üçgenin kopyasını oluşturmak için bir kenarı ve bu kenara komşu olan açıları taşıması gerektiğinin farkına varma
2. Üçgenin herhangi bir kenarını pergel ile ölçerek herhangi bir yere taşıma
3. Pergelin açıklığını kullanarak bu kenara komşu olan açıları sırayla ölçme ve yeni üçgen kenarının uçlarına taşıma
4. Bu açıların kollarının kesiştiği noktayı üçüncü köşe olarak belirleyerek kopya üçgeni oluşturma
5. **<u>Oluşturulan üçgenin diğer kenar ve açılarını pergelle ölçüm yaparak karşılaştırma</u>**

<u>2. Yol: (Kenar-Kenar-Kenar)</u>

1. Verilen üçgenin kopyasını oluşturmak için kenarları uç uca ekleyerek taşıması gerektiğinin farkına varma
2. Üçgenin herhangi bir kenarını pergel ile ölçerek herhangi bir yere taşıma
3. Diğer kenarın uzunluğunu pergel açıklığı ile ölçme
4. Bu açıklıktaki olası doğru parçalarının yerini belirlemek için ilk taşınan doğru parçasının uç noktası merkez olacak şekilde belirlenen açıklıkta çember çizme
5. Benzer şekilde diğer uç noktasına da üçüncü kenar açıklığında çember çizme
6. Çemberlerin kesiştiği noktanın üçüncü köşe olacağını fark etme
7. Çemberler iki noktada kesiştiğinden üçüncü köşe için iki olası durum olduğunu ifade etme
8. **<u>Oluşturulan üçgenin diğer kenar ve açılarını pergelle ölçüm yaparak karşılaştırma</u>**

<u>3.Yol: (Kenar-Açı-Kenar)</u>

- Verilen üçgenin kopyasını oluşturmak için bir açıyı ve bu açının kollarını oluşturan kenarların taşınması gerektiğinin farkına varma
- Üçgenin herhangi bir kenarını pergel ile ölçerek herhangi bir yere taşıma
- Bu kenarın oluşturduğu açıyı pergel açıklığı ile ölçme ve ilk taşınan doğru parçasının uç noktasına taşıma
- Bu açının diğer kolunu oluşturan kenarı pergel açıklığıyla ölçme ve taşıma
- Kenarların uç noktalarını birleştirerek kopya üçgeni inşa etme

- **<u>Oluşturulan üçgenin diğer kenar ve açılarını pergelle ölçüm yaparak karşılaştırma</u>**

<u>Beklenen hatalar</u>

- Bağlamı eksik veya yanlış anlama
- Eş üçgenlerde açıların da taşınabileceği fikrine ulaşamama
- Pergel ile açıyı ölçme girişiminde bulunamama
- Alternatif çözüm yollarını fark edememe
- **<u>Asgari eleman kullanarak inşa etme yolunu fark etmeyip tüm açı ve kenarları taşımaya çalışma</u>**

<u>Kritik Eylemler</u>

1. Eş üçgenler oluşturmak için hem açıların hem kenarların eş olması gerektiğinin farkına varma
2. Deneme yanılma ile üçgenin herhangi bir köşesini veya açısını bulmanın mümkün olmadığını fark etme
3. Ötelenmiş veya dönmüş üçgenin de eş üçgen olacağını ifade etme
4. Yeni üçgeni inşa ederken asgari düzeyde eleman kullanılmasında üç farklı alternatif çözüm yolunu ifade etme
5. Pergel ile açıyı taşıma ve eş açı inşa etme
6. Üçgenin herhangi bir kenarının rastgele taşındıktan sonra komşu açı veya kenarları ilk aktarılan kenarın uç noktalarına pergelle ölçülerek taşınması gerektiğini fark etme

4. 3. Bilişsel ve Algısal Süreçlere Dair Bulgular

Bu bölümde araştırmanın 4. alt problemi olan "Öğrencilerin geometrik inşa etkinliklerinde gözlenen bilişsel ve algısal süreçler ve bu süreçler arasındaki ilişki nasıldır?" sorusuna yönelik hem öğrenme yörüngelerinin uygulanması esnasında hem de öğrenci görüşmelerinde ortaya çıkan bilişsel ve algısal süreçler ve bu süreçlerin etkileşimine dair bulgular sunulacaktır.

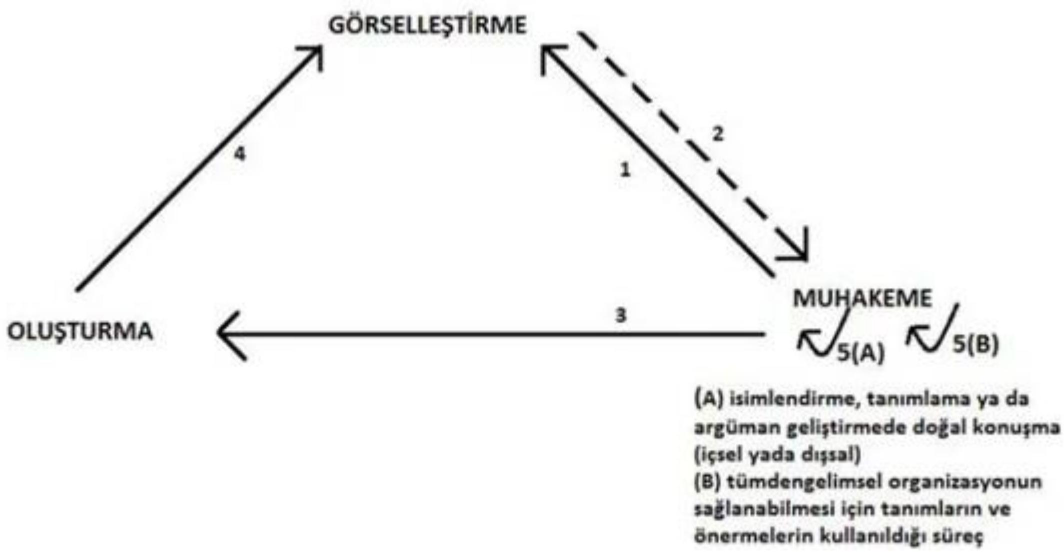
Öğrenme hedeflerinin çoğunda öncelikle öğrencilerden ilgili kavrama ait tanımlamalar yapmaları istenmiş, öğrencilerin bu konuda sahip oldukları imajların ve kavram yanılgılarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Yapılan tanımlara bakıldığında ilk ön plana çıkan görsel algıya yönelik tanımlar olmuştur. Bazı öğrencilerin zihninde canlandırdığı şekli tarif ederken, birçoğunda prototip tanımların ön plana çıktığı, prototip şekil algısının baskın geldiği ifade edilebilir. Örneğin ikiz kenar üçgen tanımlanırken "İki kenarı eşit diğer kenarı farklı olan üçgendir" şeklindeki tanımlamada öğrencilerin zihnindeki prototip şekil algısının kapsayıcı tanım yapmasına engel olduğu görülmektedir. Bunun gibi tanımlamalar yapıldıktan sonra o kavrama ait özellikler, örnek olan ve örnek olmayan durumlar, kavrama ait temel ve yardımcı elemanlarının özellikleri öğrenciler arasında tartışılarak kapsayıcı tanıma ulaşılmıştır.

4. 3. 1. Öğrenme Yörüngeleri

Öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerini ortaya çıkarmak için öğrenme yörüngeleri tasarlanmış ve uygulanmıştır. Bu öğretim deneyi esnasında öğrencilerin ortaya koyduğu bilişsel ve algısal süreçler bu başlık altında ele alınacaktır. Bilişsel süreçler Şekil 36'daki ilişkiler çerçevesinde değerlendirilecektir (Şekildeki ilişkilerle ilgili açıklamalara giriş bölümünde ayrıntılı yer verilmiştir):

Şekil 36

Duval'in geometrik muhakeme süreci döngüsü



Eş doğru parçaları ve eş açılar inşa etme: İlk inşa görevi olan eş doğru parçaları ve eş açılar inşa etme görevinde öncelikle öğrencilerden eşlik ve açı kavramlarını tanımlamaları istenmiştir. Burada öne çıkan tanımlamalar ve kavrama türleri Tablo 27'de verilmiştir.

Tablo 27

Eşlik kavramına ilişkin tanımlamalar ve kavrama türleri

Tanımlama	Algısal süreç
Eş doğru parçaları aynıdır. Birbirinin kopyasıdır yani.	Görsel algı
Eşit uzunluktaki doğru parçaları eştir.	Sözel algı

Pergel açıklığıyla ölçerek eşit uzunlukta herhangi bir doğrultuda oluşturduğumuz doğru parçaları eş olur.	Sıralı algı
Açı, iki çizgi arasındaki bölgedir.	Görsel algı
İki ışının kesişmesiyle arada oluşan açıklığa açı denir.	Sözel algı
Eş açılar inşasını tarif etme	Sıralı algı

Bu inşa etkinlikleriyle öğrencilerin doğru parçası, açı, ışın, eşlik vb. kavramlarıyla ilgili sözel bilgiyi görsel bilgiye, görsel bilgiyi de sözel bilgiye çevirebilmesi beklenmektedir. Bu iki tanımlamada da öğrencilerin çoğunluğu önce görsel algı türünde tanımlamalara yönelmiş, sınıf içi tartışmalar sonrasında görselden sözele geçiş gerçekleşmiştir. İnşa görevlerinden sonra sıralı algı gerçekleşmiştir. Bu inşa görevleri sonucunda öğrencilerin zihninde pergelin hem açı hem de uzunluk ölçme işlevi kazanması bir bilgi genişlemesi olarak ifade edilebilir ve bu anlamda geometrik muhakeme sürecinde önemli bir adım olmuştur. Tablo 28'de bu öğrenme hedefine ilişkin öğretim ortamının odağı ve ortaya çıkan bilişsel v ealgısal süreçler verilmiştir.

Tablo 28

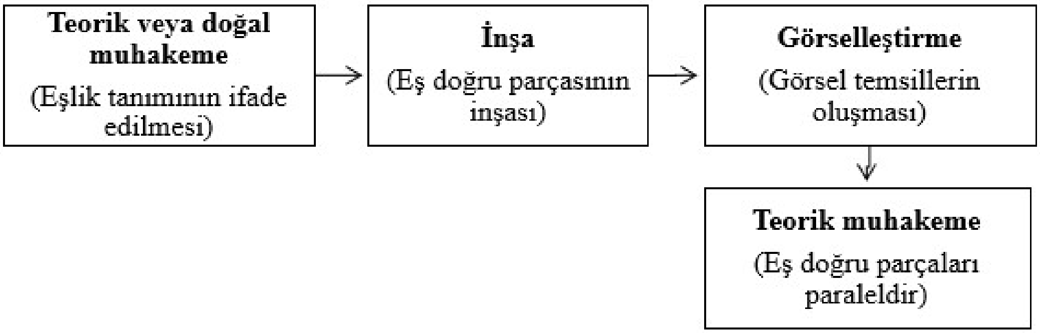
Öğrenme hedefi 1'e ilişkin öğretim ve muhakeme süreci

Öğrenme Hedefi	Etkinliğin odağı	Tartışmaların odağı	Bilişsel süreçler	Algısal süreçler
Eş doğru parçaları inşa etme	Pergelle uzunluk ölçme	Pergelin ölçme işlevini keşfetme	Muhakeme İnşa Görselleştirme	Görselden sözele geçiş Sözelden görsele geçiş Sıralı algı
Eş açılar inşa etme	Pergelle açı ölçme	Eş yaylar çizme		

Tablo 28' incelendiğinde eş doğru parçaları inşa etmede "Eşit uzunlukta doğru parçaları eştir" ifadesinden sonra ölçüm yaparak eş doğru parçalarını deneysel doğrulama ile eşleştirme sözelden görsele geçiş olarak değerlendirilebilir. Yeni bir eş doğru parçası inşa etme sıralı algıya örnektir. Bilişsel süreçler açısından ifade ettiğimizde eşlik tanımının ifade edilmesi (ifade ediliş şekline göre teorik veya doğal söylemsel) muhakeme, bu muhakeme inşayı, inşa süreci de görselleştirmeyi desteklemektedir (5A veya 5B-3-4). Görselleştirme sonucunda hep paralel doğrular inşa edildiği görülünce öğrencilerde "eş doğru parçaları paraleldir" yanlış muhakemesinin gerçekleştiği ifade edilebilir (2-5A). Yani Duval (1995)'in de ifade ettiği gibi görselleştirme bazen yanlış veya eksik muhakemelere sebep olabilmektedir. Ayrıca burada yanlış muhakemenin prototip şekil algısından kaynaklandığı açıkça görülmektedir. Muhakeme süreci Şekil 37'deki gibi şemalandırılmıştır.

Şekil 37

Eş doğru parçaları inşası muhakeme şeması



Şekil 37'yi incelediğimizde ilk aşamada matematiksel bir durumu önerme şeklinde ifade edildiğinde teorik muhakeme yapılmış, sonrasında eş doğru parçası inşa edilerek görsel temsil oluşturulmuş, görsel temsilden yanlış çıkarımda bulunarak yanlış bir muhakeme gerçekleşmiştir. Bu durum öğretmen müdahalesiyle açıklığa kavuşturulmuş ve yanılgılar giderilmiştir.

Orta nokta bulma ve orta dikme inşası: Bu öğrenme hedefine ilişkin ortaya çıkan bilişsel ve algısal süreçler Tablo 29'da verilmiştir.

Tablo 29

Öğrenme hedefi 2'ye ilişkin öğretim ve muhakeme süreci

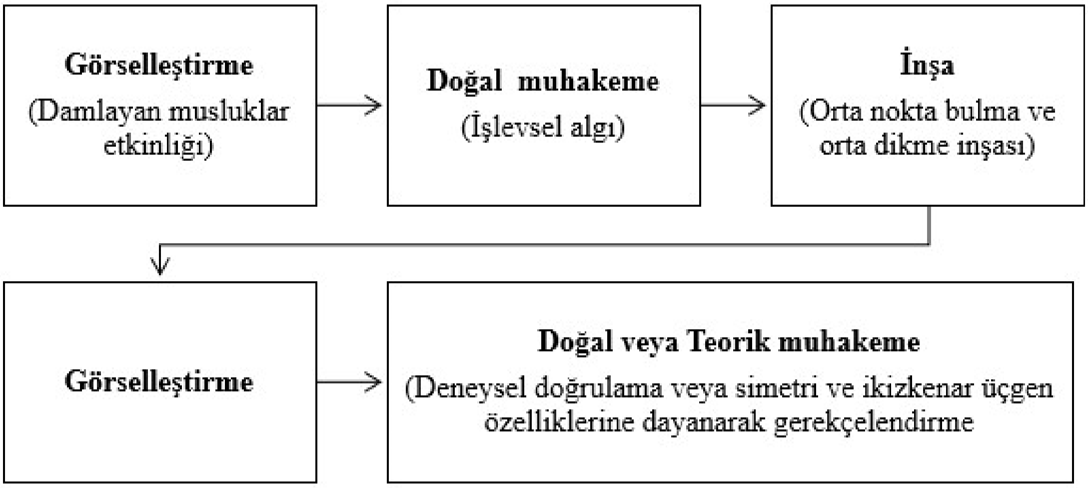
Öğrenme Hedefi	Etkinliğin odağı	Tartışmaların odağı	Bilişsel süreçler	Algısal süreçler
Bir doğru parçasının orta noktasını bulma ve orta dikme inşası	Uç noktalardan eş çemberler çizerek ikizkenar üçgen özelliklerinden yararlanma	Bir noktaya eşit uzaklıktaki olası noktaların yerini çember veya yay olarak inşa etme	Görselleştirme Muhakeme İnşa	Görselden sözele geçiş Sıralı algı İşlevsel algı

Orta nokta bulma ve orta dikme inşa etme görevinde beklenen bilişsel süreçler Muhakeme-İnşa- Görselleştirme şeklinde olmuştur. Fakat burada öğrencilerin uç noktalardan çember çizme fikrine ulaşamaması yeniden bir rota oluşturmaya sevk etmiştir. Yapılan değişiklik sonucunda damlayan musluklar etkinliğiyle etkili bir görselleştirme gerçekleştirilmiştir. Görselleştirme orta dikmenin geometrik yeri konusunda yeterince fikir vermiş ve muhakeme sürecini desteklemiştir. Burada uç noktalardan çizilen eş çemberlerin kesişim noktasının orta noktadan geçeceği fark edilmiş, görsel temsilden bir çıkarımda bulunularak doğal muhakeme gerçekleşmiştir. Görsel temsil üzerinde şekilsel değişiklikler yapma, yeni çizimler ekleme yoluyla işlevsel algı devreye girmiş ve terazi etkinliğinde inşa gerçekleşmiştir. Burada görsel temsilden yararlanarak tekrar bir çıkarımda bulunulmuş ve bu da matematiksel teorilerle desteklenmiştir. Bilişsel süreçlerin ilişkisi bakımından incelendiğinde görselleştirme muhakemeyi, muhakeme de inşayı desteklemektedir (2-5A-3). İnşa gerçekleştikten sonra yeni bir görsel temsil oluşmuş, öğrencilerin çoğunluğu ölçüm yaparak, yani bu görsel temsilden çıkarımda bulunarak deneysel doğrulamaya yönelmişlerdir. Bu durumu da doğal bir muhakeme süreci olarak ifade edebiliriz.

Muhakeme sürecinde öğrenci ifadelerinden "Çizeceğimiz doğruya göre simetrik görüntü oluştuğu için bu doğru orta dikme olur" ifadesi doğal söylemsel süreç (5A); "Burada oluşan ikizkenar üçgenin yüksekliği kenarı ortaladığından aynı zamanda orta dikme olur." ifadesi de matematiksel tanımlara dayandırıldığından teorik söylemsel süreç (5B) olur. Muhakeme süreci şeması Şekil 38'de verilmiştir.

Şekil 38

Orta nokta bulma ve orta dikme inşası muhakeme şeması



İnşa adımlarını tarif etme sürecinde bazı öğrenciler simetrik görüntüye dayanarak orta dikmeyi açıklamaya çalışmış, bazı öğrenciler ikizkenar üçgen özelliklerinden yararlanarak matematiksel doğrulama yaparak görselden sözele geçiş gerçekleşmiştir.

Burada öğrencilerin orta noktayı bulacağı yere bir ikizkenar üçgen inşa ederek amacına uygun bir görsel değişiklik gerçekleştirdiğinden işlevsel algıya örnek olarak gösterilebilir.

Üçgen inşa etme: Üçgen inşa etme görevinde de öncelikle üçgen tanımlamaları üzerinde durulmuştur. Tanımlamalar esnasında yine kavram imajlarında prototip şekillerin hakim olduğu dikkat çekmektedir. Örneğin ikizkenar üçgen için "en az iki kenarı eşit olan üçgene ikiz kenar üçgen denir" tanımını yapmaları gerekirken öğrencilerin tamamı "iki kenarı eşit diğer kenarı bunlardan farklı üçgendir" tanımlamasına yönelmişlerdir. Bir diğer ifadeyle görsel algı ön plana çıkmış, hatta görsel temsil üzerinden yanlış çıkarımda bulunarak yanlış tanımlama yapılmış dolayısıyla görselleştirme yanlış muhakemeye sebep olmuştur. Öğretmen tarafından gerekli düzeltme yapılmasının ardından aslında eşkenar üçgenin de bir ikizkenar üçgen olduğu fikri şaşkınlıkla karşılanmıştır.

Buradaki temel maksat bu üçgenlerin özellikleriyle ilgili hem var olan algıları açığa çıkarmak, hem de yanlış imajları düzeltmektir. Çünkü diğer inşa görevlerinin tamamı üçgen inşalarına dayanmaktadır. Tablo 30'da bu inşalarla ilgili ortaya çıkan bilişsel ve algısal süreçler verilmiştir.

Tablo 30

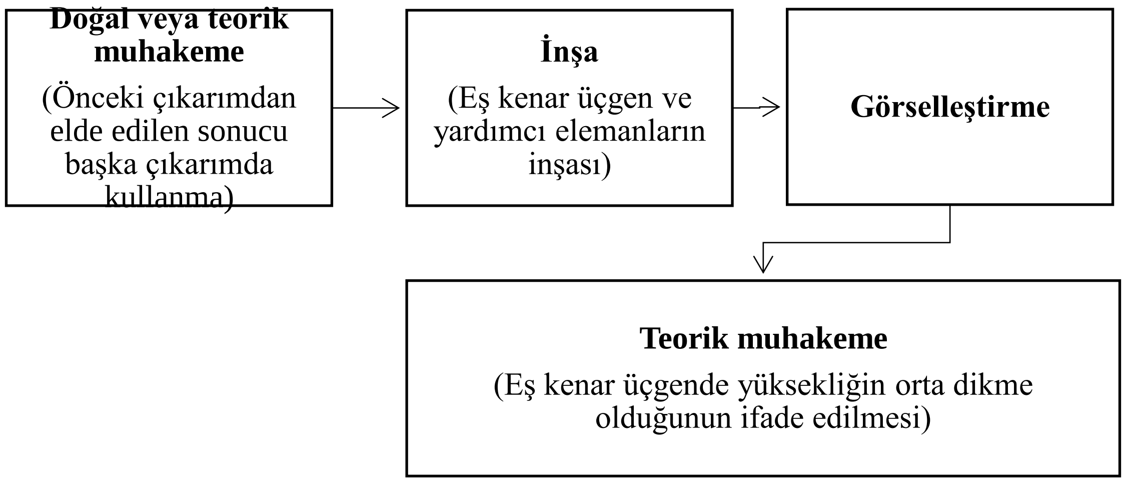
Öğrenme hedefi 3'e ilişkin öğretim ve muhakeme süreci

<table>
<tr><th>Öğrenme Hedefi</th><th>Etkinliğin odağı</th><th>Tartışmaların odağı</th><th>Bilişsel süreçler</th><th>Algısal süreçler</th></tr>
<tr><td>Eşkenar üçgen inşa etme</td><td>Tanımlama
Uç noktalardan eş çemberler çizme
Yardımcı elemanların inşası</td><td rowspan="3">Açı ve kenar özellikleri ve yardımcı elemanlarının özelliklerini ifade etme</td><td>Muhakeme
İnşa
Görselleştirme</td><td rowspan="3">Görselden sözele geçiş
İşlevsel algı
Sıralı algı</td></tr>
<tr><td>İkizkenar üçgen inşa etme</td><td>Tanımlama
Bir çemberin içine ikiz kenar üçgen inşa etme
Yardımcı elemanların inşası</td><td>Muhakeme
İnşa
Görselleştirme</td></tr>
<tr><td>Çeşitkenar üçgen inşa etme</td><td>Tanımlama
Doğru parçalarını uç uca taşıma yoluyla inşa etme</td><td>Görselleştirme
muhakeme
İnşa</td></tr>
</table>

Burada önceki inşa görevindeki çıkarımdan elde ettiği sonucu bu çıkarımda kullanmış ve eşkenar üçgen inşasında uç noktalardan eş çemberler çizilerek inşa gerçekleşmiş, dolayısıyla muhakeme inşa sürecini, inşa süreci de görselleştirmeyi desteklemiştir. Görsel üzerinde açı, kenar ve yardımcı elemanların özellikleri hakkında fikir yürütülmüş ve görselleştirme muhakemeyi desteklemiştir. Burada görsel temsil üzerinde çıkarımda bulunarak eşkenar üçgenin yüksekliğinin aynı zamanda orta dikme olduğu fikrine ulaşılmış teorik muhakeme süreci gerçekleşmiştir. Başka bir deyişle Karpuz'un (2018) da ifade ettiği gibi teorik muhakemenin bir göstergesi olarak matematiksel bir durum önerme olarak ifade edilmiştir. Bilişsel süreçler açısından ifade edersek 5A-3-4-2-5B şeklinde aşağıdaki gibi bir şemadan bahsedebiliriz. Şekil 39'da eşkenar üçgen inşasında gerçekleşen muhakeme süreci şemalandırılmıştır.

Şekil 39

Eşkenar üçgen inşasında muhakeme süreci

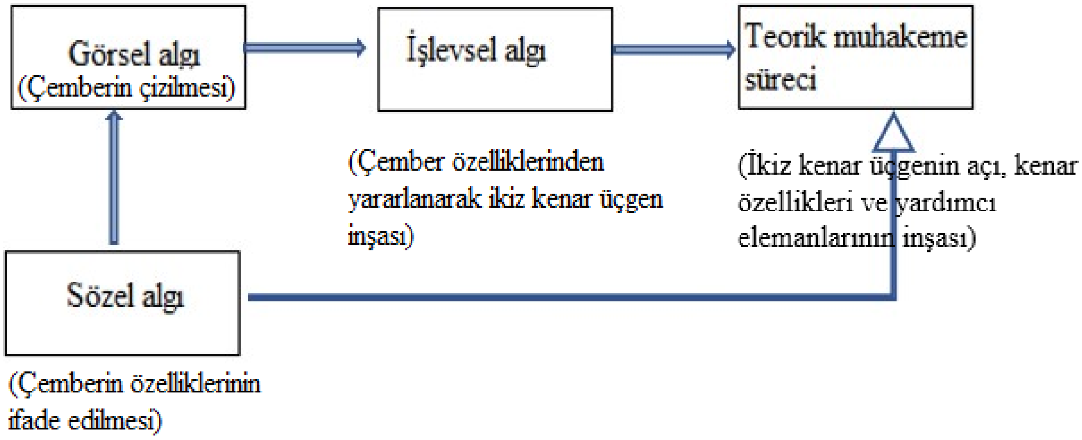


Burada inşa edilen şekille elde edilen çıkarım kanıt için fikir verse de teorik muhakemeye geçiş için yeterli destek sağlayamaz. Duval'in de söylediği gibi tamamen yapılandırmacı bir öğretim süreci öğrenciyi teorik muhakemeye geçiremez. Öğretmenin bu noktada devreye girerek matematiksel ilkelerle bu muhakeme sürecini destekleyerek teorik muhakemeye geçişteki boşluğu doldurması gerekmektedir. Öğrenci algılarını incelediğimizde ilk başta sıralı algı süreci işleyerek eşkenar üçgen inşa edilmiş, görselleştirme gerçekleşmiştir. Görsel üzerinde yardımcı elemanlar ve açı, kenar özellikleri ifade edilerek sözele geçiş sağlanmıştır.

İkizkenar üçgen inşasında iki farklı yol izlendiği öğrenme yörüngelerinde ifade edilmişti. İlk yol yukarıdaki eşkenar üçgen inşasına benzer şekilde uç noktalardan eş çemberlerin kesiştirilmesiyle elde edilmiştir. Diğer yol ise dikme inşasına geçişi sağlayacak önemli bir yol olmuştur. Tepe noktası merkez olacak şekilde çizilen bir çemberin üzerinde iki nokta belirlenerek ikizkenar üçgen inşa edilmiştir. Burada çember özelliklerine dayanarak bir muhakeme yapılıyor, bu muhakemeyi teorik muhakeme olarak nitelendirebiliriz. Öncelikle çember çizilirken burada görsel algı söz konusudur. Çember özelliklerinden yararlanarak Karpuz'un (2018) da ifade ettiği gibi sözel algı sürecine uygun işlemler gerçekleştirilerek işlevsel algı süreci işlemiş, tepe noktası merkez diğer iki köşesi çember üzerinde olacak şekilde ikizkenar üçgen inşa edilmiştir. Şekil 40 üzerinde bu durum açıklanmıştır.

Şekil 40

İkizkenar üçgen inşasında muhakeme süreci



Şekil 40'da şemalandırılan matematiksel davranışta olduğu gibi işlevsel algı şeklin kavramsal tanımına uygun gerçekleştirilerek sözel algı süreci teorik muhakeme sonucuna ulaştırılmıştır. Çember çizildiğinde görsel algı süreci başlamıştır. Çemberin yarıçaplarının eşit olması özelliğine dayanarak çember üzerinde ikizkenar üçgen inşa edilmesi ise işlevsel algı sürecini ifade etmektedir. Bu davranışta işlevsel algı teorik muhakemeye dolaylı olarak etki etse de teorik muhakeme sürecinde yararlanılacak tanım, teorem vs. seçme eylemi işlevsel algının görevidir. Bu da muhakeme sürecinde işlevsel algının kritik rolünü göstermektedir. Bilişsel süreçler açısından değerlendirdiğimizde çember özelliklerinden yararlanarak ikizkenar üçgen inşa edilmesi düşüncesi bir teorik muhakeme süreci olarak ifade edilirken, bu muhakeme ikizkenar üçgen inşasını desteklemiştir. İkizkenar üçgen inşası görselleştirme sağlamış ve bu görselleştirme yeni bir muhakeme sürecini desteklemiş, tepe noktadan inen orta dikmenin yükseklik inşasına götüreceği çıkarımında bulunulmuştur ve son olarak yeniden inşa (yüksekliğin inşası) ile süreç tamamlanmıştır (5B-3-4-2-5B-3). Buradaki yansıtma becerisi muhakeme döngüsünü tekrarlatmıştır.

Çeşitkenar üçgen inşasında da eş kenar üçgen inşasına benzer şekilde doğru parçalarının uç uca taşınmasıyla elde edilmiş, bilişsel ve algısal süreçleri de yine benzer şekilde gerçekleşmiştir.

Dikme inşası: Bir doğruya üzerindeki veya dışındaki bir noktadan dikme inşa etme sürecinde ikizkenar üçgen ve orta dikme inşasından faydalanılmıştır Önceki inşa görevinde bahsedildiği gibi işlevsel algının kritik rolü açıkça görülmektedir. Buna ek olarak inşa sürecinin adım adım yürütülmesi de sıralı algıyı açıkça göstermektedir. Dikme inşasında inşa adımları şeklin matematiksel özelliklerine dayanılarak yapıldığından sözelden görsele geçiş görülmekte, bu da yine matematiksel davranış olarak nitelendirilmektedir. Bundan sonraki inşa görevlerinin tamamında öğrencilerin çoğunluğu artık inşa mantığını kavradıklarından benzer şekilde sözelden görsele geçiş gerçekleşmiştir. Tablo 31'de dikme inşası sürecinde ortaya çıkan bilişsel ve algısal süreçler verilmiştir:

Tablo 31

Dikme inşasına ilişkin öğrenme ve muhakeme süreci

Öğrenme Hedefi	Etkinliğin odağı	Tartışmaların odağı	Bilişsel süreçler	Algısal süreçler
Bir doğruya üzerindeki bir noktadan dikme inşa etme	Önceki inşa becerilerini (ikizkenar üçgen ve orta dikme inşası) yeni duruma yansıtma	Dikme inşasını ikizkenar üçgen inşasıyla ilişkilendirme	Muhakeme İnşa Görselleştirme	Sözelden görsele geçiş İşlevsel algı Sıralı algı
Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşa etme		Deltoid veya ikizkenar üçgen özelliklerinden yararlanarak dikme inşası		

Tablo 31'de de ifade edildiği gibi inşa görevleri birbirini destekleyecek sıraya göre planlandığından dikme inşa görevlerinin ana odağı önceki inşa becerilerini yeni durumlara yansıtmaktır. Sınıf içi tartışmalarının odağı ise ikizkenar üçgenin yüksekliğinden yararlanarak dikme inşasını gerçekleştirmek olmuştur. Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşasında öğrencilerin bulduğu yolda ise önceki inşa görevlerine benzer adımlar atılmış, yani önceki çıkarımdan elde edilen sonucu yeni bir çıkarımda kullanarak teorik muhakeme desteğiyle inşayı gerçekleştirmişlerdir. Böylece inşa da görselleştirmeyi desteklemiştir. Fakat çizilen doğru parçasının dikme olduğunun matematiksel olarak doğrulanması gerekmektedir. Burada çizilen çemberlerin yarıçaplarının birleştirilmesiyle deltoid oluştuğu görülmüştür. "Deltoidin köşegenleri birbirini dik keser." teoremine dayanarak dikme olduğu kanıtlanmış ve teorik muhakeme gerçekleşmiştir. Dolayısıyla görselleştirme de teorik muhakemeyi desteklemiştir (5B-3-4-2-5B).

Paralel inşası:

Paralel inşasında sınıf içi atmosfer ve bilişsel ve algısal süreçler Tablo 32'de verilmiştir:

Tablo 32

Paralel inşasına ilişkin öğrenme ve muhakeme süreci

Öğrenme Hedefi	Etkinliğin odağı	Tartışmaların odağı	Bilişsel süreçler	Algısal süreçler
Bir doğruya paralel inşa etme	Önceki inşa becerilerini (açı taşıma veya dikme inşası) yeni duruma yansıtma	Açı taşıyarak veya eş uzaklıktaki noktaları belirleyerek paralel oluşturma	Muhakeme İnşa Görselleştirme	Sözelden görsele geçiş Sıralı algı

Tablo 32'yi incelediğimizde paralel inşasında tartışmaların ana odağı iki ilkeye dayanmaktadır:

- İki paralel doğrunun bir kesenle yaptığı açılar eşittir.
- İki paralel doğru arasındaki uzaklık her zaman eşittir.

Yapılan inşalar da bu iki ilkeye dayanarak gerçekleştirilmiştir. Yani teorik muhakeme süreci inşayı desteklemiştir. İnşa da görselleştirme sağlamıştır. Fakat burada görselleştirme yanlış bir muhakemeye sebep olmuştur. İnşa edilen paralel doğruların tamamı eş uzunlukta olduğundan öğrenciler görsel temsile dayanarak yanlış bir çıkarımda bulunmuşlar, "paralel doğru parçaları eş uzunlukta olur" sonucunu yansıtmışlardır. Bilişsel süreç döngüsü de 5B-3-4-2-5A şeklinde olmuştur. Burada tamamen yapılandırmacı sürecin her zaman doğru muhakemeye götüremeyeceği görülmektedir. Öğretmenin yerinde müdahalesi öğrencilerin kavram yanılgılarını ve yanlış öğrenmeleri düzeltmelerinde etkili bir yol olmuştur.

Açıortay inşası: Açıortay inşa sürecine dair bilişsel ve algısal süreçler Tablo 33'te verilmiştir.

Tablo 33

Açıortay inşasına ilişkin öğrenme ve muhakeme süreci

Öğrenme Hedefi	Etkinliğin odağı	Tartışmaların odağı	Bilişsel süreçler	Algısal süreçler

Açıortay doğrusu inşa etme	Orta nokta bulma inşasını yeni duruma yansıtma	Açının kollarına eşit uzaklıktaki noktaları bulma	Muhakeme İnşa Görselleştirme	Sözelden görsele geçiş Sıralı algı

Tablo 33'te de ifade edildiği gibi açıyı ortalayan doğruyu inşaya geçişteki en önemli fikir açıortay doğrusunun açının kollarına eşit uzaklıkta olacağıdır. Bu muhakemenin gerçekleştirilmesi inşa sürecini desteklemiştir. Orta nokta bulma inşasındaki uç noktalardan eşit uzaklıktaki noktaları belirleme fikrinin benzeri bir yaklaşım başarılı olmuş, inşa gerçekleştirilmiş ve görselleştirme sağlanmıştır. Bilişsel süreç döngüsü değerlendirildiğinde ise 5B-3-4 şeklinde olduğu görülmüştür.

Eş üçgenler inşa etme: Bu inşa görevindeki temel amaç eş üçgen inşa ederken gerekli olan asgari elemanları belirlemektir.

Tablo 34

Üçgen inşasına ilişkin öğrenme ve muhakeme süreci

Öğrenme Hedefi	Etkinliğin odağı	Tartışmaların odağı	Bilişsel süreçler	Algısal süreçler
Eş üçgen inşa etme	Eş üçgen inşa etmede yeterli elemanları bulma	AKA, KKK, KAK yöntemlerini keşfetmek	İnşa Görselleştirme muhakeme	Görselden sözele geçiş Sıralı algı

Tablo 34'te yeteri kadar elemanı kullanarak eş üçgen inşa etmenin yolları belirlenirken gerçekleşen muhakeme süreci ifade edilmiştir. Etkinliğin odak noktası eş üçgen inşa edebilmek için gerekli ve yeterli elemanları belirlemek iken sınıf içi tartışmaların odak noktası ise AKA, KKK ve KAK yöntemlerini keşfetmek olmuştur. Öğrencilerin çoğu eş üçgen inşa etmeye çalışırken ilk etapta açıları göz ardı etmişler, yani çubukları rastgele uç uca ekleyerek kapalı olmayan bir şekil elde etmişler bu yüzden başarısız olmuşlardır. Burada dikkat çeken bir diyalog aşağıda verilmiştir:

Arda: O zaman açıları da taşımalıyız.

Öğretmen: Bütün açıları mı?

Arda: Önce bir kenarı taşıyalım, sonra bu kenarın iki ucundaki açıları taşıyınca üçgen otomatik çıktı. (Açı-Kenar-Açı yöntemi)

Öğrenciler üç farklı yöntemle de inşalar gerçekleştirmişler, inşa sayesinde görsel temsiller oluşturulmuş ve görsel temsiller üzerinden ölçmeler yaparak matematiksel doğrulama gerçekleştirilmiştir. Bu da doğal muhakeme olarak ifade edilebilir. Burada da bilişsel süreçler açısından döngü 4-2-5A şeklinde ifade edilebilir. Algısal süreçler açısından değerlendirdiğimizde de inşa adımlarının tarif edilmesi sıralı algı sürecini gerçekleştirirken görsel temsille üzerinden sözel algıya geçiş gerçekleşmiştir.

4. 3. 2. Öğrenci Görüşmeleri

Tasarlanan öğrenme yörüngeleri ile öğrencilere temel geometrik kavramların inşasına yönelik öğretim gerçekleştirilmiştir. Temel inşa becerilerinin kazandırılmasının ardından öğrencilerin üst düzey düşünme becerilerinin desteklenmesi ve geometrik muhakeme süreçlerinin ortaya çıkarılması için karmaşık inşa problemlerinden oluşan görüşme soruları geliştirilmiştir. Geometrik düşünme testi uygulaması sonucunda düşük, orta ve yüksek düzeyde olmak üzere sınıflandırılmış öğrencilerden her bir gruptan bir öğrenci seçilerek görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu şekilde belirlenen öğrenciler düşük, orta ve iyi düzeyde olmak üzere sırasıyla Ayşe, Merve ve Kaan olarak isimlendirilmiştir. Öncelikle öğrencilerin problemleri çözmeleri için süre verilerek bireysel olarak çözmeleri beklenmiş, daha sonra düşüncelerini ve çözüm adımlarını gerekçeleriyle beraber sesli olarak ifade etmeleri için görüşmeler yapılmıştır.

4. 3. 2. 1. Birinci Soruya İlişkin Bulgular:

Birinci görüşme sorusunda öğrencilerden inşa etkinliklerinde kullandıkları kavramları hatırlamaları, sözel algıdan hareketle görsele geçişin sağlanması amaçlanmaktadır. Örneğin 60^o'lik açının çizilebilmesi için eş kenar üçgen inşa edilmesi ile görselleştirme gerçekleştirilecektir. Burada eş kenar üçgenin açı ve kenar özellikleri ifade edilerek sözelden görsele geçiş gerçekleşmesi beklenmektedir. Sonrasında 30^o'lik açının çizilebilmesi için açıortay doğrusu inşa edilerek 60^o'lik açının ikiye bölünmesi beklenmektedir. Benzer şekilde sırasıyla 15^o ve 45^o'lik açıların çizilebilmesi içinde 30^o ve 90^o'lik (bir dikme inşa edilmesi) açıların ikiye bölünmesi beklenmektedir.

Burada düşük düzeyde belirlediğimiz öğrenci olan Ayşe verilen açılardan sadece 60 ^{o}'lik açıyı eş kenar üçgen çizerek bulabileceğimizi ifade etmiş, fakat eş kenar üçgenin pergel ve çizgeçle nasıl çizileceğini hatırlayamamış dolayısıyla inşayı gerçekleştirememiştir. Burada görüşme esnasında yaşanan diyalogdan bir alıntı aşağıdaki gibidir:

Ayşe: Bu açıları açıölçer olmadan çizemem.

Öğretmen: Hangi açıları çizebilirsin?

Ayşe: Dik açıyı ve 60 ^{o}'yi aslında derste çizmiştik hatırlıyorum ama ben tek başıma çizemem.

Öğretmen: Nasıl çizmiştiniz?

Ayşe: Eşkenar üçgen çizmiştik mesela açısı 60 ^{o} idi. Bir de dikme çizmiştik o da 90^o.

Öğretmen: Bu söylediğin açıları kullanarak 30º'lik ve 45º'lik açıya ulaşabilir misin sence?

Ayşe: Aaaa evet ikiye bölersek yarısı olur bu açılar.

Öğretmen: Nasıl ikiye böleriz açıları peki?

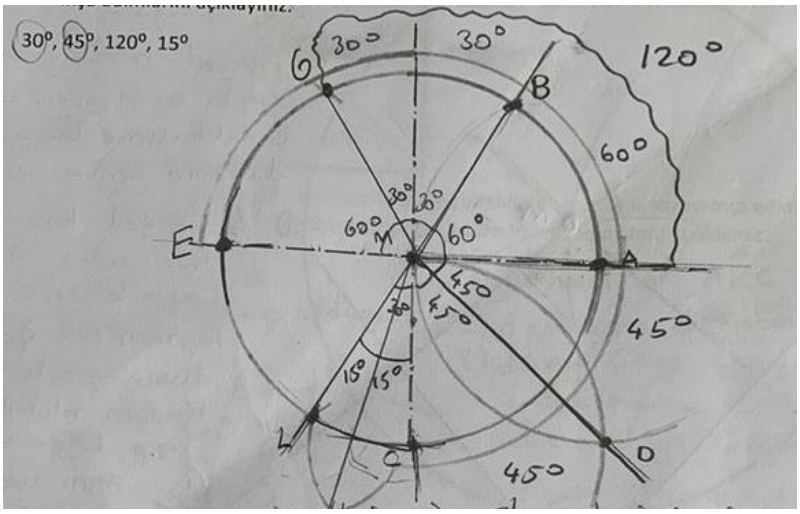
Ayşe: Açıortay çizerek. Ama nasıl çizeceğimi hatırlamıyorum.

Bu öğrenci derste işlenen kavramların bazılarını hatırlamasına rağmen inşayı gerçekleştirememiştir. Bir durumla ilgili bazı matematiksel kavramların ve ilişkilerin farkına varmış ve günlük konuşma diliyle çıkarımlarda bulunmuş, fakat inşa sürecini yeteri kadar destekleyecek muhakemeyi gerçekleştirememiştir. Ayrıca sözel algı noktasında belli bir düzeyde bilgisi olmasına rağmen bunu görsel bilgiye dönüştürememiştir.

Orta düzeydeki öğrenci olan Merve'nin bu soruya verdiği cevabı incelediğimizde ilk olarak bir çember çizmiş, çemberin yarıçapı ile aynı açıklık kadar yayı işaretleyerek 60º'lik açılar oluşturduğu görülmektedir. Yine çemberin çapını çizdikten sonra A ve E noktalarından eş çemberler çizerek C noktasından yarıçapı çizerek 90º'lik açıyı oluşturmuş, sonrasında açıortayları inşa ederek istenen açıları kolaylıkla çizebilmiştir. Öğrencinin çizimi Şekil 41'de verilmiştir.

Şekil 41

Merve'nin birinci soruya ilişkin çözümü



Öğrencinin çözümüne ilişkin yapılan görüşmeden bir alıntı aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: Çözümünü nasıl yaptın açıklayabilir misin?

Merve: Bir çember çizdim. Çapını çizince 180º'lik açı çizmiş oldum. A ve C noktalarından eş çemberler çizip kesiştirdim ve dik açıyı çizmiş oldum. AC açısının açıortayını çizdim ve 45º'lik açı oluştu.

Öğretmen: 60º'lik açıyı nasıl çizdin?

Merve: Eşkenar üçgen oluşturdum aslında, yarıçapın açıklığı kadar pergeli açıp AC yayını işaretledim. Böylece iç açısı 60^{o} oldu. Tamamı 180 ^{o} olduğu için 180^{o}'den 60 çıkınca 120^{o} olur.

Öğretmen: Peki 30^{o}'lik açıyı nasıl çizdin?

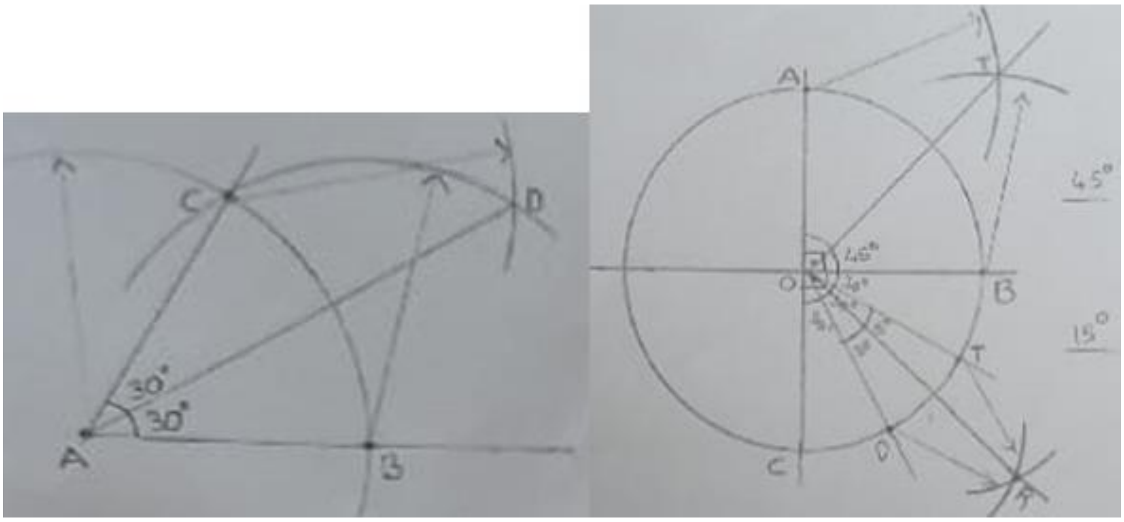
Merve: 60 ^{o}'lik açının açıortayını çizince 30^{o}'lik açıyı, 30^{o}'lik açının açıortayını çizince 15^{o}'lik açı çizmiş oldum.

Burada öğrencinin matematiksel kavramları amacına uygun şekilde kullanarak çözüme götürecek önermeler şeklinde ifade ettiği, çıkarımda bulunurken tanım, teorem ve matematiksel ilkelerden yararlandığı görülmektedir. Bilişsel süreçler açısından değerlendirirsek çember üzerine eşkenar üçgen inşa ederek görselleştirme sağlanmıştır. Ayrıca görsel temsil üzerinde eş kenar üçgen oluşturma ve açıortayları çizme gibi şekilsel değişiklikler yaparak işlevsel algıyı teorik muhakeme sürecinde etkili bir şekilde kullanmıştır. Burada "açıortay açıyı ikiye böler" ifadesi doğal söylemsel süreç (5A) olarak teorik muhakemeye geçişi desteklemektedir. Oluşturulan açıları matematiksel tanım ve teoremler sunarak gerekçelendirme süreci de teorik muhakeme olarak değerlendirilebilir. Böylece İnşa-Görselleştirme-Doğal muhakeme-Teorik muhakeme (4-2-5A-5B) şeklinde bir süreç ilerlemiştir. Yine algısal süreçlerden sıralı algı, işlevsel algı ve sözelden görsele geçiş ön plana çıkmaktadır.

Bu soruya ilişkin iyi düzeydeki öğrenci olan Kaan'ın çözümü şekil 42'de verilmiştir.

Şekil 42

Kaan'ın birinci soruya ilişkin çözümü

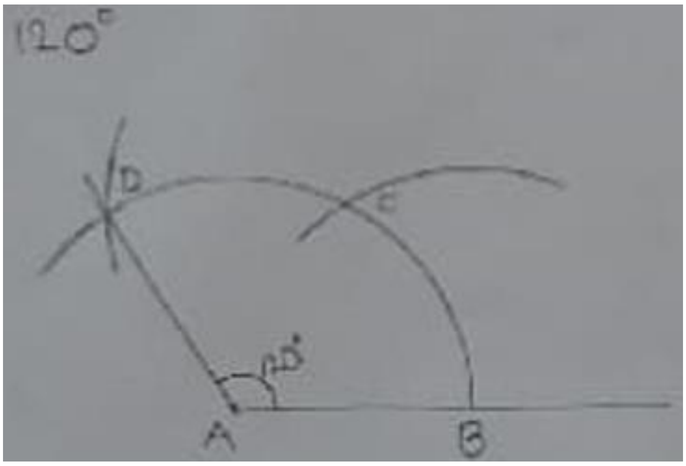


Kaan'ın 30^{o}'lik açıyı çizerken eşkenar üçgen inşa etmiş ve açıortayla ikiye bölmüş ve 30^{o}'lik açıyı elde etmiş, tekrar açıortay çizerek 15^{o}'lik açıyı çizmiştir. Benzer şekilde dik açı inşa ederek açıortayla 45^{o}'lik açıyı çizmiştir ve bu açılarla ilgili çözüm sürecini şu şekilde ifade etmiştir: "Pergelle eş kenar üçgen inşa edersem 60^{o} açı çizmiş olurum diye düşündüm. Çünkü eş kenar üçgenin iç açısı 60^{o}'dir. Sonra bu açıyı açıortayla ikiye bölersem 30^{o} olur diye düşündüm. Derste öğrendiğimiz gibi eş kenar üçgen çizdim ve açıortayını çizdim. 30^{o}'lik açı oluşmuş oldu. Yine açıortayı çizince 15^{o} oldu. Aynı şekilde dik açı çizdim ve açıortayla ikiye böldüm, 45^{o}'lik açı oldu."

Kaan'ın cevabını ve açıklamalarını incelediğimizde öncelikle problemi eş kenar üçgenle ilişkilendirdiği görülmekte, "Eşkenar üçgenin iç açısı 60 derecedir." ve "Açıortay açıyı ikiye böler." gibi matematiksel ilkelere dayanarak bir inşa sürecine girmiştir. Burada teorik muhakemenin inşa sürecini desteklediği görülmektedir. İnşa süreciyle görselleştirme sağlanmış ve açıortay çizilerek işlevsel algı devreye sokularak doğal muhakeme gerçekleşmiştir. O halde bilişsel süreç döngüsünü 5B-3-4-5A şeklinde ifade edebiliriz.

Şekil 43

Kaan'ın 120^{o}'lik açı çizimi (Birinci soruya ilişkin çözümün devamı)



Şekil 43'te Kaan'ın 120^{o}'lik açı çizimi görülmektedir. Bu çizime ilişkin Kaan'ın açıklaması ve öğretmen ile konuşmalarından bir alıntı aşağıda verilmiştir:

Kaan: 60^{o}'lik açıyı zaten çizebiliyorum, iki tane 60^{o}'lik açıyı uç uca eklersem 120^{o}'lik açı olur diye düşündüm. Ve pergelle A merkezli bir yay çizdim. Aynı açıklıkla (yarıçap kadar) B noktasından bir yay çizince C'de kesti. Şimdi 60 ^{o}'lik açıyı belirlemiş oldum. Aynı açıklıkla C noktasından bir yay daha çizince D noktasında kesti çemberi. Böylelikle bir 60^{o}'lik açı daha eklemiş oldum. Birleşince 120^{o}'lik açı olmuş oldu.

Öğretmen: Peki bu açının 120^{o}'lik bir açı olduğunu nasıl doğrulayabilirsin?

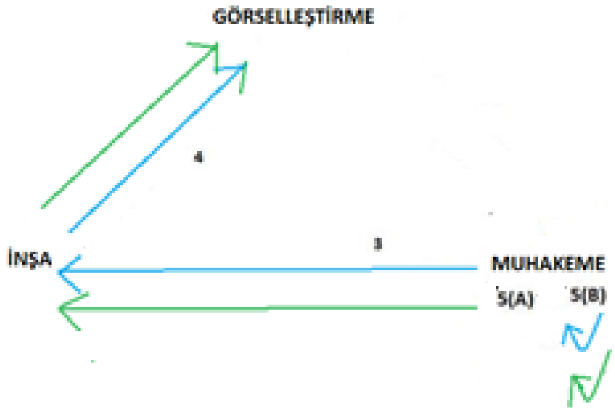
Kaan: ABC üçgenini çizersek bir eş kenar üçgen oluyor aynı açıklıkla çizdik çünkü. Bu yüzden CAB açısı 60^{o} olur. Benzer şekilde DAC üçgeni de eş kenar olduğundan DAC açısı da 60^{o} olur. Toplamı da 120^{o} olur.

Kaan'ın 120^{o}'lik açı çizimine ve açıklamasına baktığımızda önceki inşa becerilerini yeni bir problem durumunda kullanabildiği, başka bir deyişle teorik muhakemenin göstergelerinden biri olan çıkarımların birinden elde ettiği bir sonucu başka bir basamakta kullandığı görülmektedir. Ayrıca Kaan'ın bu soruya ilişkin çözümüne algısal süreçler açısından bakıldığında inşa sırasında sözelden görsele, gerekçelendirme esnasında da görselden sözele kolaylıkla geçiş sağladığı söylenebilir. Bu da yine algısal süreçlerin gelişiminin bir göstergesi olan sözel bilgiyi görsele, görsel bilgiyi de sözele çevirebilme ve bu şekilde çıkarımda bulunma davranışı açıkça görülmektedir.

Farklı geometrik düşünme düzeyindeki bu öğrencilerin yukarıda özetlenen geometrik muhakemelerini ortaya koyan bilişsel süreç döngüsü Şekil 44'te şemalaştırılmıştır. (Kırmızı, mavi ve yeşil renk oklar sırasıyla düşük, orta, ileri düzey öğrencileri temsil etmektedir.) Şemada düşük düzeydeki öğrenci soruyu cevaplayamadığı için şemada yer almamaktadır.

Şekil 44

Birinci soruya ilişkin öğrencilerin bilişsel süreç döngüsü



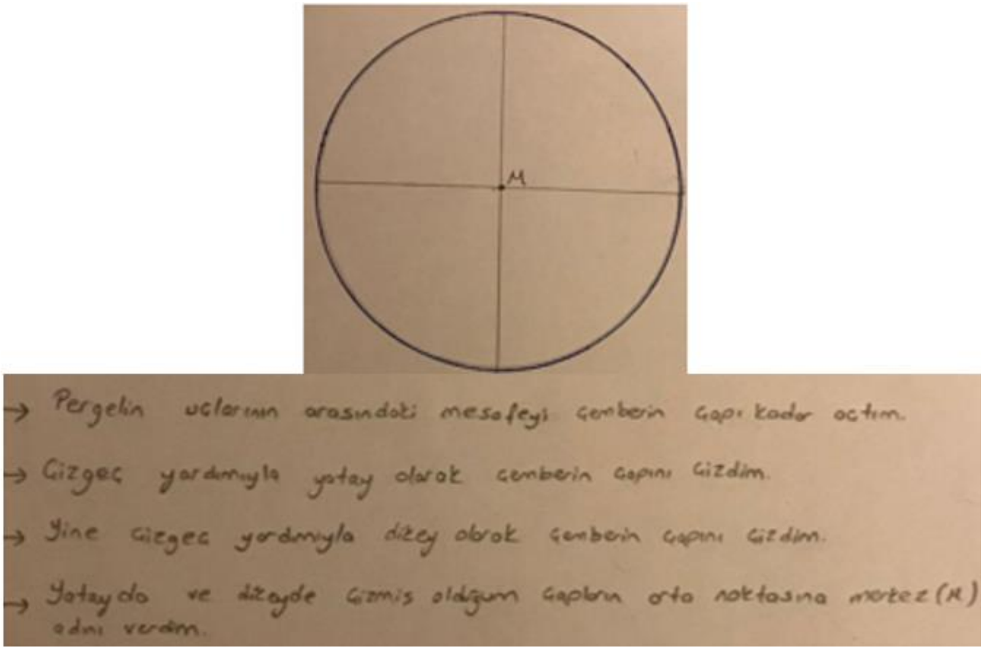
4. 3. 2. 2. İkinci Soruya İlişkin Bulgular:

İkinci soruda bir çember verilmiş ve bu çemberin merkezinin pergel ve çizgeç yardımıyla bulunması istenmektedir. Merkezin bulunabilmesi için önceki inşa becerilerinin gözden geçirilmesi gerekmektedir. İkizkenar üçgen inşasının burada öğrenciler tarafından hatırlanması ve çemberin merkeziyle ilişkilendirilmesi beklenmektedir. Bu soru ileri düzeyde bir teorik muhakeme sürecini harekete geçirmeyi gerektirmektedir.

Düşük seviyedeki öğrenci olan Ayşe'nin çemberin merkezini bulma girişimi ve çözümüne dair açıklaması Şekil 45'te verilmiştir.

Şekil 45

Ayşe'nin ikinci soruya cevabı ve açıklaması



Ayşe’nin çözümüne dair öğretmen ile gerçekleşen konuşmalarından bir alıntı aşağıda verilmiştir.

Öğretmen: Çemberin çapını nasıl belirledin?

Ayşe: Çemberin tam ortasına gelecek şekilde pergeli açtım.

Öğretmen: Ama tam ortasını bilmiyorsun ki! Nasıl ayarlayabildin?

Ayşe: Yani tahmin ettim. Ama ölçünce denk geliyor tam.

Öğretmen: Çemberin merkezini nasıl tanımlarsın?

Ayşe: Çemberin her yerine eşit mesafede olan nokta merkez olur.

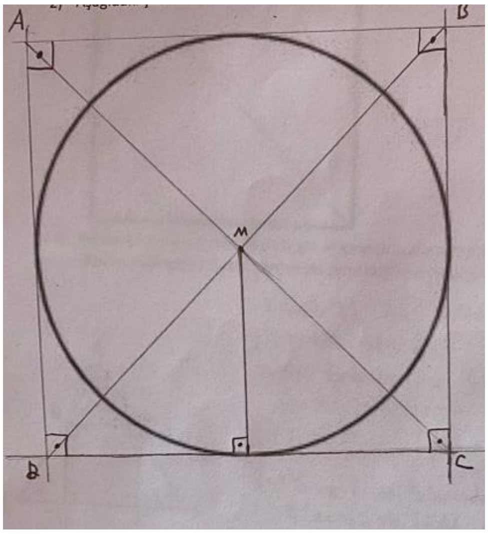
Ayşe’nin çözümüne ve açıklamasına bakıldığında matematiksel bir dayanak sunduğu, merkezin çemberin tam ortasında olacağını ifade ettiği, fakat merkezi tahminen bulduğu görülmektedir. Öğrencinin görsel üzerinde sözel algı sürecine uygun olarak göz kararı tam ortayı belirleyecek şekilde bir yol izlediği ifade edilebilir. Oysa ki inşa sürecinde bu tarz girişimlerin kabul edilemez olduğu açıkça ifade edilmişti. Burada gerekli ilişkilendirme yapılamadığından beklenen inşa gerçekleştirilememiştir. Algısal süreçler açısından bakıldığında ise öğrenci görselden sözele geçiş yapmış, hatta şeklin temel elemanlarına odaklanmaya başlamış ve merkezin çembere eşit uzaklıkta olacağı bilgisini görsele dönüştürmüştür. Fakat inşaya götürmek için gerekli işlevsel ve sıralı algı süreçleri eksik kaldığı için çözüme ulaşamamıştır.

Ayrıca matematiksel doğrulama noktasında da ölçüm yoluyla doğrulama girişimi olduğu, fakat gerekçelendirme noktasında yetersiz kalındığı söylenebilir. Bilişsel süreçler açısından değerlendirirsek "Merkezin çember üzerindeki noktalara eşit uzaklıkta olduğu" şeklindeki muhakeme görselleştirmeyi desteklemiş, fakat bu görselleştirmeyi inşaya götürecek muhakeme gerçekleşmediğinden bilişsel süreç sekteye uğramış, dolayısıyla inşa gerçekleşememiştir.

Orta düzeyde öğrencimiz olan Merve'nin bu soruya ilişkin çözümü Şekil 46'da verilmiştir.

Şekil 46

Merve'nin ikinci soruya ilişkin çizimi



Öğretmen: Neden kare çizme yolunu tercih ettin?

Merve: Yani aslında ilk başta bu soruyu çözememiştim. Bir sonraki soruda kare çizimini görünce aklıma geldi. Kareyi teğet çizersek köşegenlerin merkezden geçeceğini düşündüm.

Öğretmen: Peki kenarların teğet olacağı noktayı nasıl belirledin.

Merve: Tahmin etmeye çalıştım.

Öğretmen: Kareyi nasıl çizdin peki?

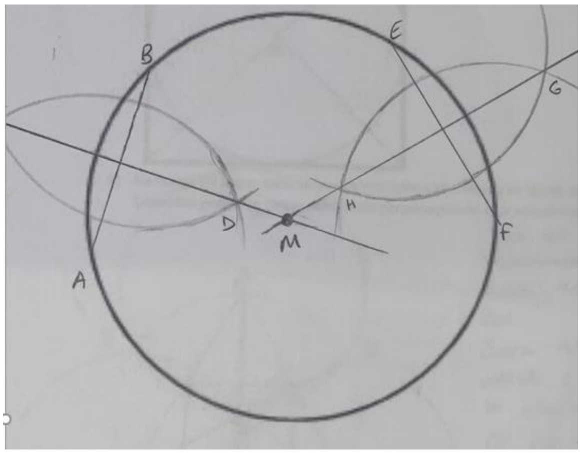
Merve: Yani aslında onu da ölçerek eşit yapmaya çalıştım.

Merve'nin çözümü ve açıklamasını analiz ettiğimizde geçerli bir teorik muhakeme süreci yürüttüğü söylenebilir. "Kenarları teğet olacak şekilde çemberin dışına bir kare çizildiğinde köşegenlerin kesim noktası çemberin merkeziyle çakışır." ilkesine dayanarak işlevsel algı süreci yürütmüş, ayrıca bu ilkeyi görsel üzerine taşıyarak doğru bir şekilde sözelden görsele geçiş sağlamıştır. Burada öğrencinin inşa sürecine geçiş yapmasını engelleyen en büyük sorun sıralı algı sürecinde problem yaşaması olmuştur. Dolayısıyla inşa doğru bir şekilde gerçekleşememiştir. Burada da Ayşe'nin bilişsel sürecine benzer şekilde ilk muhakeme süreci geçerli olup görselleştirmeyi desteklemesine rağmen inşa sürecine götürecek muhakemeyi gerçekleştiremediğinden doğru inşa adımları atılamamış ve bunun sonucu olarak inşa süreci tamamlanamamıştır. Yine doğrulama noktasında da Merve'nin "Ölçerek eşit yapmaya çalıştım." ifadesi ölçüm yoluyla doğrulama yapmaya çalıştığını göstermektedir.

İyi düzeydeki öğrenci olan Kaan'ın bu soruya yönelik çizimi Şekil 47'de verilmiştir.

Şekil 47

Kaan'ın ikinci soruya ilişkin çizimi



Kaan'ın çizimine yönelik öğretmen ile konuşmalarından bir alıntı aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: Çizimini nasıl yaptığını anlatır mısın?

Kaan: Önce merkezi nasıl bulacağımı düşündüm biraz. Çemberi kesen bir doğru parçası (AB) çizdim. Bunu çemberin merkeziyle nasıl birleştirebilirim (ilişkilendirebilirim) diye düşünürken ikizkenar üçgen inşasını düşündüm. Sonra dikme inşası üzerine odaklandım. Eğer orta dikmeyi çizersem merkezden geçer diye düşündüm. Yine (benzer şekilde) EF doğru parçasını çizdim ve orta dikmesini buldum. İkisinin kesiştikleri yer çemberin merkezi oldu.

Öğretmen: Doğru çizmişsin. Peki neden kesiştikleri yer merkez oldu?

Kaan: İki çizgiyi de uzattığımızda merkezden geçmesi gerekiyor. O yüzden kesişimleri merkez olur.

Öğretmen: Neden merkezden geçmesi gerekiyor? Biraz daha açıklar mısın?

Kaan: Şimdi çizdiğimiz orta dikmeler aslında görünmeyen ikizkenar üçgenlerin yüksekliği olmuş oluyor, derste çizmiştik.

Öğretmen: Hangi ikizkenar üçgenler gösterir misin?

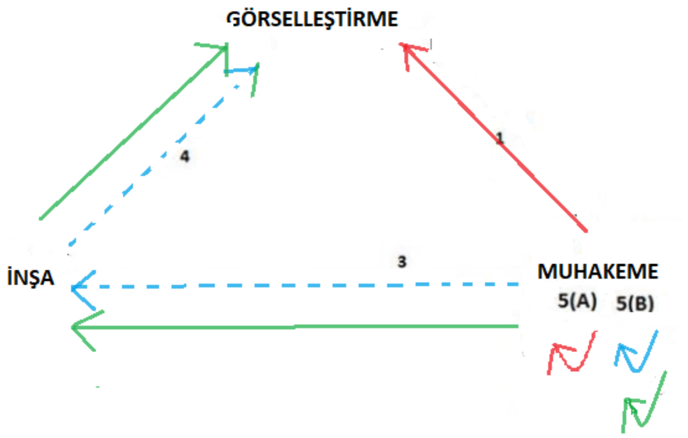
Kaan: İşte burada. (İkizkenar üçgenleri oluşturuyor ve açıklıyor)

Kaan'ın çözümü ve açıklaması incelendiğinde başarılı bir muhakeme süreci gerçekleştirdiği ifade edilebilir. Çözüme götüren yolda öncelikle elde ettiği inşa becerilerini gözden geçirmiş, karşılaştığı yeni durumla nasıl ilişkilendirebileceğini analiz etmiştir Bu durum öğrencinin analiz etme, değerlendirme gibi üst düzey düşünme becerilerini kullanmasını sağlamıştır. Öncelikle çember üzerinde bir kiriş çizerek görselleştirme sağlanmış, aslında çembere bu kirişi çizerken nasıl kullanacağını tam olarak bilemezken, muhakeme sürecinde işlevsel algı devreye sokularak bu kirişi merkez ile ilişkilendirme süreci gerçekleşmiştir. Burada görselleştirmenin muhakemeyi desteklediği ifade edilebilir. Bir sonraki adımda muhakemenin de inşayı desteklediği, sonuç olarak başarılı bir bilişsel sürecin gerçekleştiği söylenebilir. Algısal süreçler açısından da ilk olarak görsel algının işlediği, devamında sözel algı sürecine uygun işlemler yapılarak etkili bir işlevsel algının gerçekleştiği ve bu durumun teorik muhakemeyi desteklediği görülmektedir.

Farklı geometrik düşünme düzeyindeki bu öğrencilerin yukarıda ifade edilen geometrik muhakemelerini ortaya koyan bilişsel süreç döngüsü Şekil48'de şemalaştırılmıştır. (Kırmızı, mavi ve yeşil renk oklar sırasıyla düşük, orta, ileri düzey öğrencileri temsil etmektedir.) Şemadaki kesikli oklar sorunun çözümünde eksik noktalar olduğunu ifade etmektedir. Örneğin; mavi okları incelersek Merve'nin yürüttüğü geçerli doğal muhakemenin inşa sürecini yeterince destekleyemediği eksik inşa nedeniyle beklenen görselleştirmenin de sağlanamadığı ifade edilebilir.

Şekil 48

İkinci soruya ilişkin öğrencilerin bilişsel süreç döngüsü



4. 3. 2. 3. Üçüncü Soruya İlişkin Bulgular:

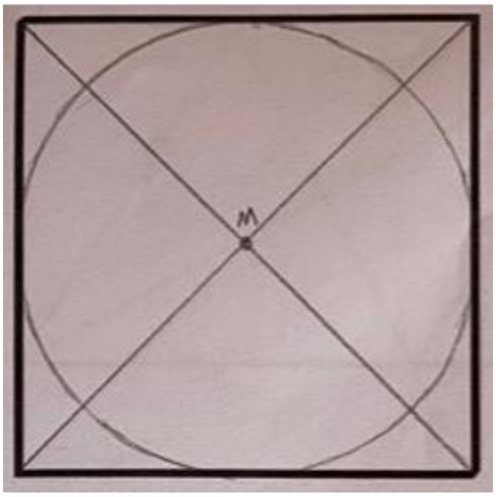
Üçüncü soruda bir taslak ve bir kare verilmiş ve taslaktaki gibi bu karenin içine çizilebilecek en büyük çemberin pergel aracılığıyla inşa edilmesi beklenmektedir. Burada ilk önce karenin köşegenlerin veya kenar orta dikmelerinin kesim noktasının aynı zamanda çemberin içine çizilecek teğet çemberin merkezi olduğunun fark edilmesi, sonrasında çemberin teğet noktasının karenin kenarlarının tam orta noktası olarak belirlenmesi ve sonuç olarak çemberin inşa edilmesi gerekmektedir.

Öğrencilerin verdikleri cevaplara baktığımızda tüm öğrencilerin köşegenleri kesiştirerek merkezin konumunu doğru bir şekilde belirledikleri, fakat Ayşe ve Merve'nin çemberin inşasında problem yaşadıkları görülmüştür.

İlk olarak düşük seviyedeki öğrenci olan Ayşe'nin çizimi Şekil 49'da ve açıklamaları aşağıda verilmiştir.

Şekil 49

Ayşe'nin üçüncü soruya ilişkin çizimi



Öğretmen: Çizimini nasıl yaptığını anlatır mısın?

Ayşe: Karenin köşegenlerini çizdim. Çemberin merkezi burası (kesişim noktası M'yi gösteriyor.) olur. Çünkü karenin de tam orta noktası burası.

Öğretmen: Peki sonra?

Ayşe: Sonra pergelin ucunu merkeze koydum. Kenara değecek şekilde açtım ve çemberi çizdim.

Öğretmen: Kenara değeceği noktayı nasıl belirledin?

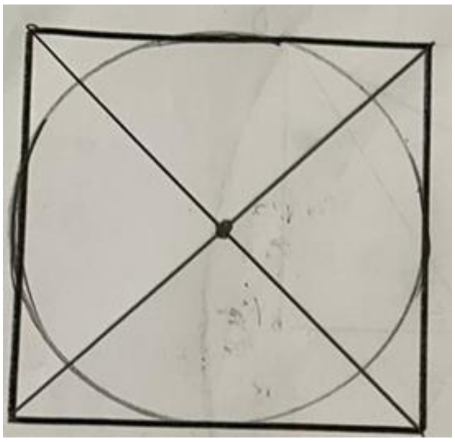
Ayşe: Yani açtım pergeli ölçtüm işte.

Ayşe köşegenlerin kesişim noktasının karenin tam ortasında yer aldığını, bu yüzden bu noktanın çemberin merkezi de olması gerektiğini ifade etmiştir. Burada günlük dil kullanıldığından doğal bir muhakeme süreci görülmektedir. Köşegenleri çizerek kesişim noktasını merkez olarak belirlemiştir. Merkezi doğru bir şekilde belirlemesine rağmen teğet noktasını belirleyemediği için muhakeme yetersiz kalmış, inşa doğru bir şekilde tamamlanamamıştır. "Köşegenlerin kesim noktasının çemberin merkezidir" sözel algısına dayanarak görselleştirme sağlandığından sözelden görsele geçiş olmuştur. İnşa adımlarında eksiklik olduğundan sıralı algı süreci gerektiği gibi çalışamamış, inşa gerçekleşememiştir.

Şekil 50’de bu soruya ilişkin Merve’nin çözümüne bakıldığında onun da aynı şekilde çizim yaptığı, dolayısıyla aynı hataya düştüğü görülmüştür. Merve’nin kenarın orta noktasını teğet noktası olarak belirlemeden çember çiziminde tahmini bir yol izlemeye çalıştığı görülmektedir.

Şekil 50

Merve'nin üçüncü soruya ilişkin çizimi



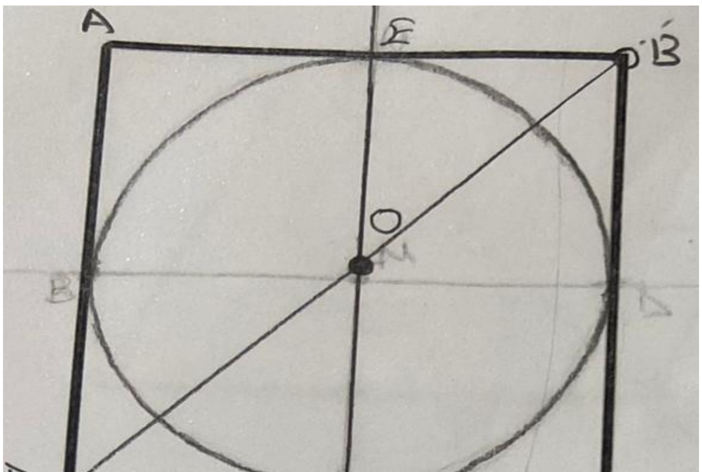
Şekil 50 incelendiğinde Merve’nin çiziminde teğet noktasını tahmini olarak belirlediğinden kayma yaşadığı görülmektedir. Merve’ye bu durum ifade edildiğinde “Zaten tam ayarlayamadım değeceği noktayı. Olmadı galiba.” diye cevap vermiştir.

Ayşe ve Merve’nin bu soruda yürüttükleri eksik muhakeme inşa adımlarında hataya sebep olmuş dolayısıyla hatalı inşa gerçekleşmiştir.

Şekil 51’deki Kaan’ın üçüncü soruya ilişkin çizimine ve açıklamalarına bakıldığında geçerli bir inşa görülmektedir.

Şekil 51

Kaan’ın üçüncü soruya ilişkin çizimi



Öğretmen: Çizimini açıklar mısın?

Kaan: Karenin içine teğet çember çizilirse ikisinin de merkezlerinin aynı olması gerekir. Bu yüzden karenin merkezini bulmak için orta dikmeleri çizdim. Köşegeni de çizince kesiştikleri nokta merkez oldu.

Öğretmen: Neden aynı zamanda çemberin merkezi olur peki?

Kaan: Çember orta dikmelerin uç noktalarından değecek kenarlara. O noktası da orta dikmelerin kesiştiği noktalar olduğu için merkez olması lazım. Çünkü teğet olacak noktalara eşit uzaklıkta.

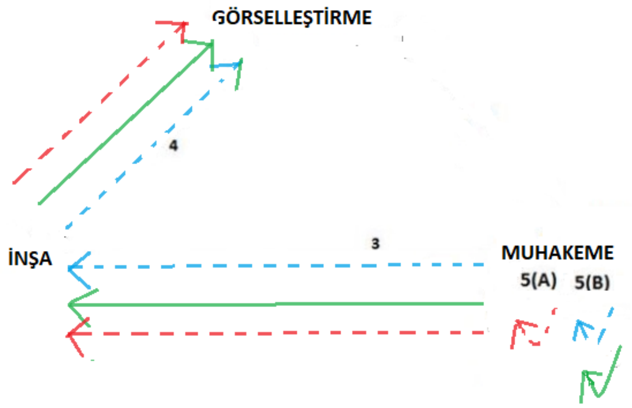
Kaan önce geometrik şekillerin özelliklerini ilişkilendirerek teorik muhakeme süreci gerçekleştirmiştir. Bu muhakeme sürecine dayanarak kenar orta dikmeleri çizmiş, teğet noktalarını belirlemiş ve orta dikmelerin kesim noktası da merkez olarak ortaya çıkmıştır. Şekil üzerinde gerekli düzenlemeleri yaparak işlevsel algı sürecini amacına uygun bir şekilde yürütmüş ve inşa gerçekleşmiştir. Kaan önce muhakeme yaparak çemberin yerini zihninde canlandırmış ve inşayı gerçekleştirmiş, bu bilgiyi sözelden görsele dönüştürerek inşa sayesinde görselleştirme gerçekleşmiştir. Sonuç olarak bilişsel süreç döngüsü teorik muhakeme-inşa-görselleştirme (5B-3-4) şeklinde gerçekleşmiştir. Algısal süreçler açısından baktığımızda da sözel, görsel işlevsel ve sıralı algı süreçleri etkileşim içinde doğru bir şekilde yürütülmüş bilişsel süreçlerin gerçekleşmesine katkıda bulunmuştur.

Genel olarak ifade edilirse bu soruda Ayşe ve Merve'nin eksik muhakemelerinden kaynaklı olarak sıralı algı sürecinde bazı adımlar yetersiz kalmış, dolayısıyla inşa istenilen şekilde tamamlanamamıştır.

Farklı geometrik düşünme düzeyindeki bu öğrencilerin yukarıda ifade edilen geometrik muhakemelerini ortaya koyan bilişsel süreç döngüsü Şekil 52'de şemalaştırılmıştır. (Kırmızı, mavi ve yeşil renk oklar sırasıyla düşük, orta, ileri düzey öğrencileri temsil etmektedir.)

Şekil 52

Üçüncü soruya ilişkin öğrencilerin bilişsel süreç döngüsü



4. 3. 2. 4. Dördüncü Soruya İlişkin Bulgular:

Dördüncü soruda Polya (1945)'nın meşhur problemlerinden bir üçgenin içine çizilebilecek en büyük karenin inşası sorulmuştur. Bu soruda öğrencilerden beklenen, kenar üzerine bir kare inşa edip bu kareyi büyüterek veya küçülterek bütün köşeleri üçgenin kenarları üzerinde olacak şekilde en büyük kareyi inşa etmeleridir.

Ayşe bu soruyu boş bırakmıştır. Öğretmen ile konuşmalarından bir alıntı aşağıda verilmiştir:

Öğretmen: Neden yapmadın bu soruyu?

Ayşe: Soruyu anlayamadım. Daha doğrusu nasıl yapacağımı bilmiyorum.

Öğretmen: Peki bir üçgen düşün, sence içine çizilebilecek en büyük kare nasıl görünür?

Ayşe: Şöyle yani. (Şekil üzerinde gösteriyor) Karenin köşeleri üçgenin kenarlarına değecek galiba.

Öğretmen: Evet doğru söylüyorsun.

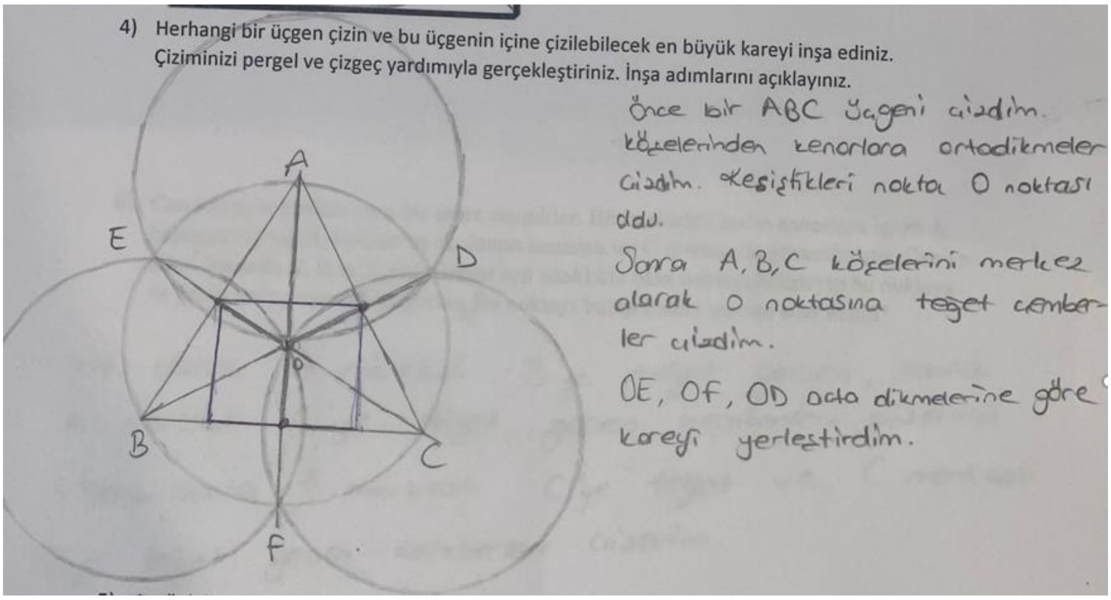
Ayşe: Ama bunu da çizemem ben.

Ayşe soruyu ilk okuduğunda soruda ifade edilmek isteneni anlamamış, fakat öğretmenin yönlendirmeleriyle taslağı zihninde canlandırabilmiştir. Taslağı zihninde canlandırması görselleştirme sağlasa da inşa adımlarını sıralayacak yeterli muhakeme gerçekleşemediğinden inşaya geçilememiştir. Algısal süreçler açısından bakılırsa görsel algı süreci harekete geçirilmiş olsa bile şekillerin özelliklerine odaklanarak yeteri kadar sözel bilgi devreye sokulamadığından yani görselden sözele geçiş olmadığından muhakeme desteklenmemiştir.

Orta düzeydeki öğrencimiz Merve'nin soruya ilişkin çizimi ve açıklaması Şekil 53'te verilmiştir.

Şekil 53

Merve'nin dördüncü soruya ilişkin çizimi ve açıklaması



Şekil 53 incelendiğinde Merve’nin üçgenin kenar orta dikmelerine odaklandığı görülmektedir. Kenar orta dikmelerin kenarları kestikleri noktalar baz alınarak bir kare oluşturma yoluna gitmiştir. Açıklama kısmında doğrulama açısından yeterli bir gerekçe sunulmadığından öğretmen Merve’den çiziminin dayanaklarını açıklamasını istemiş ve aşağıdaki konuşma gerçekleşmiştir:

Öğretmen: Orta dikmelere göre kareyi nasıl yerleştirdin?

Merve: Yani orta dikmeler kenarı ikiye böldüğü için orta noktaları karenin köşeleri olarak düşündüm.

Öğretmen: Peki kenar uzunluklarını kontrol ettin mi kare mi gerçekten bu şekil?

Merve: (Kenar uzunluklarını pergelle karşılaştırıyor) Yani birazcık fark oluşuyor onu da tam çizemedim o yüzden galiba.

Öğretmen: Bunun kare olduğunu nasıl matematiksel olarak doğrularız peki?

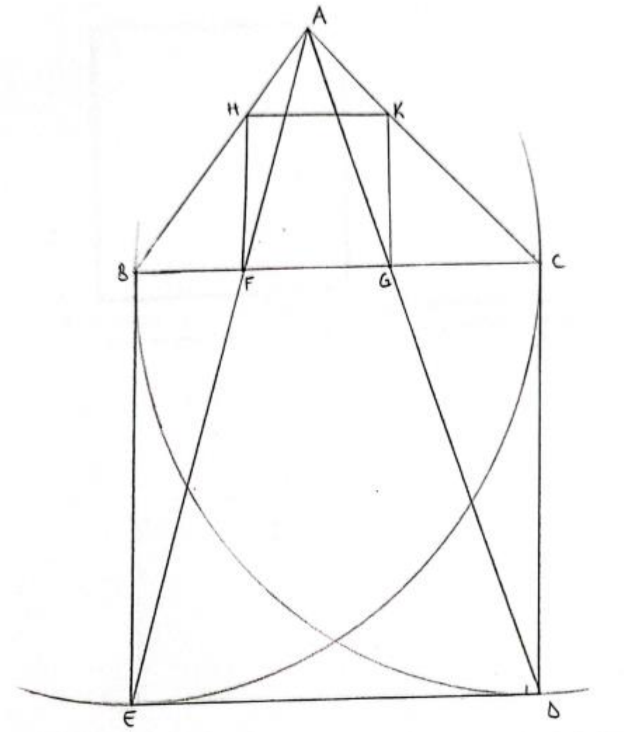
Merve: Bilmiyorum. Sanırım bu dikdörtgen oldu.

Merve önceki inşa bilgilerine dayanarak bir inşa gerçekleştirmiş, fakat bu görselleştirme ihtiyacı olan muhakemeyi destekleyememiştir. Çünkü dayandırılmak istenen bilgi hedefe ulaşmada geçersiz kalmaktadır. Burada bilişsel süreç sekteye uğramış, istenen inşa gerçekleştirilememiştir. Burada Merve şeklin bazı geometrik özelliklerine odaklansa da bu özellikler çözüme götürecek yolu açmamıştır.

Kaan’ın bu soruya ilişkin çizimi aşağıda Şekil 54’te verilmiştir.

Şekil 54

Kaan'ın dördüncü soruya ilişkin çizimi



Öğretmen: Çizimini açıklar mısın Kaan?

Kaan: ABC üçgenini çizdim. Bir kenari BC olan (BCDE karesini) kareyi çizdim. Karenin köşelerini sırayla A noktasına birleştirdim. ED kenarının küçülmüşü FG kenarı oldu, aynı şekilde BE kenarının küçülmüşü HF kenari, DC'nin küçülmüş hali de GK kenarı olmuş oldu. Bu üç üçgende de benzerlik oranı aynı olduğu için tüm kenarlar aynı oranda küçülmüş oldu. Bu şekilde FGKH de kare oldu. Ölçtüğümüzde de kare olduğunu görüyoruz.

Öğretmen: Peki bu çözümü nasıl düşündün?

Kaan: Önce çizmem gereken kareyi zihnimde canlandırdım. Şuranın (BC kenarı) kenar olduğu bir kare çizsem ne olur diye sordum. Kareyi çizince zihnimde üçgenin içine doğru kareyi nasıl küçültebilirim diye düşündüm. A noktasını odak olarak seçtim ve o noktaya göre küçülttüm.

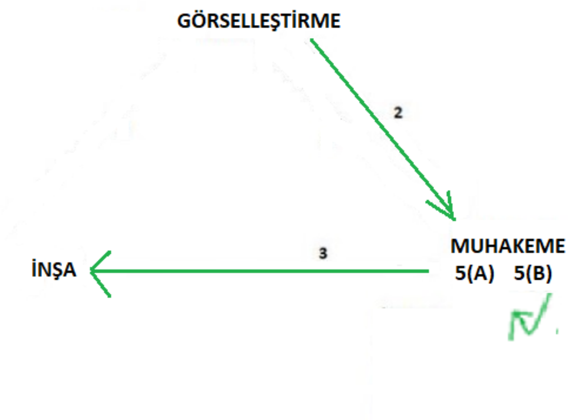
Kaan önce taslağı zihninde canlandırarak görselleştirme yapmış, bu durum muhakemeyi desteklemiştir. Bu muhakeme sürecinde BC kenarı üzerinde üçgenin içine inşa edilecek kareye odaklanmıştır. Burada Kaan problem çözme stratejilerinden birini kullanarak şartlardan sadece birini sağlayan bir çözüm üretmiş, BC kenarı üzerinde fakat üçgenin dışında bir kare inşa etmiştir. Polya'nın çözüm stratejisine benzer bir stratejiyle bu kareyi A noktasına odaklanarak küçültmüş ve çözüme ulaşmıştır. Burada etkili bir işlevsel algı süreci gerçekleşmiştir ve bu sayede başarılı bir teorik muhakeme geçerli bir inşa sürecine ulaştırmıştır.

Buradaki bilişsel süreç döngüsü görselleştirme-teorik muhakeme-inşa (1-5B-3) şeklinde gerçekleşmiştir. Algısal süreçlerde işlevsel algı sürecinin problemin çözümündeki kritik rolü açıkça görülmektedir. Doğrulama esnasında da görsel temsil üzerinde benzerlik prensiplerinin kullanılması görselden sözele geçişi sağlamış ayrıca sıralı algı süreci de etkili biçimde yürütülmüştür.

Farklı geometrik düşünme düzeyindeki bu öğrencilerin geometrik muhakemelerini ortaya koyan bilişsel süreç döngüsü Şekil 55'te şemalaştırılmıştır. (Kırmızı, mavi ve yeşil renk oklar sırasıyla düşük, orta, ileri düzey öğrencileri temsil etmektedir.) Düşük ve orta düzeydeki öğrenciler bu soruyu cevaplayamadığı için kırmızı ve mavi oklar yer almamaktadır.

Şekil 55

Dördüncü soruya ilişkin öğrencilerin bilişsel süreç döngüsü



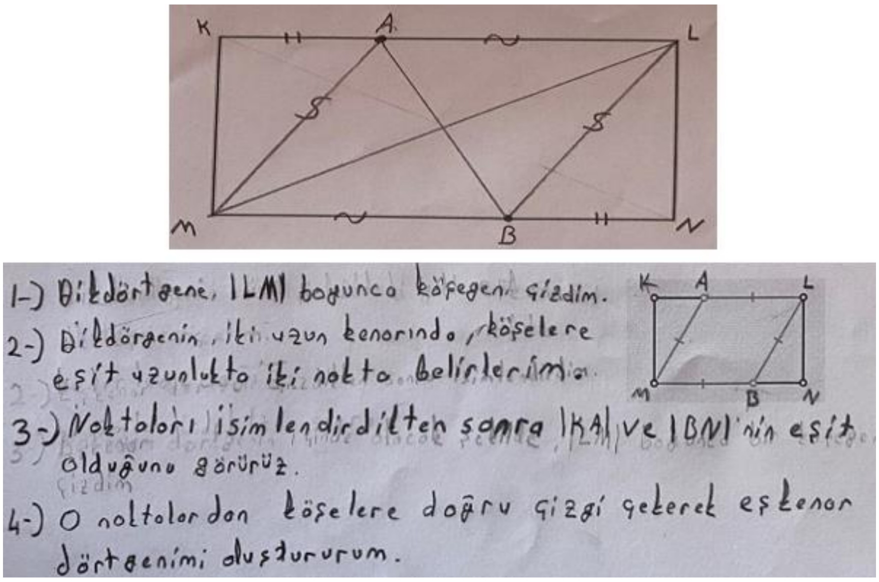
4. 3. 2. 5. Beşinci Soruya İlişkin Bulgular:

Bu soruda öğrencilerden bir köşegeni ortak olacak şekilde bir dikdörtgenin içine eş kenar dörtgen inşa etmeleri istenmektedir. Burada öğrencilerin ortak köşegeni çizdikten sonra eşkenar dörtgenin köşegen özelliklerine odaklanmaları ve "Eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirini dik ortalar." sözel bilgisini görsele taşıyarak sözelden görsele geçiş sağlamaları beklenmektedir. Bilinen köşegenin orta dikmesini inşa ederek eşkenar dörtgenin diğer köşegeninin belirlenip köşegenler üzerine eşkenar dörtgen inşa edilmesi öngörülmektedir.

Ayşe'nin bu soruya ilişkin çizimine ve açıklamasına bakıldığında AK ve BN uzunluklarını rastgele belirlendiği, yanlış bir muhakeme sonucunda eşkenar dörtgen inşa ettiğini ifade etse de bu durumda eşkenar dörtgen değil herhangi bir paralelkenar inşa ettiği görülmektedir. Şekil 56'da düşük düzeydeki öğrenci olan Ayşe'nin çizimi ve açıklamalarıyer almaktadır.

Şekil 56

Ayşe'nin beşinci soruya ilişkin çizimi ve açıklaması



Öğretmen: │AK│ ve │BN│ doğru parçalarının uzunluklarının eşitliğini sağladın. Fakat │MA│ ve │BL│ doğru parçaları bunlarla eşit uzunlukta mı?

Ayşe: Zaten otomatik eşit olmaz mı onlar da?

Öğretmen: Neden? Ölç pergelle. Eşit mi bakalım?

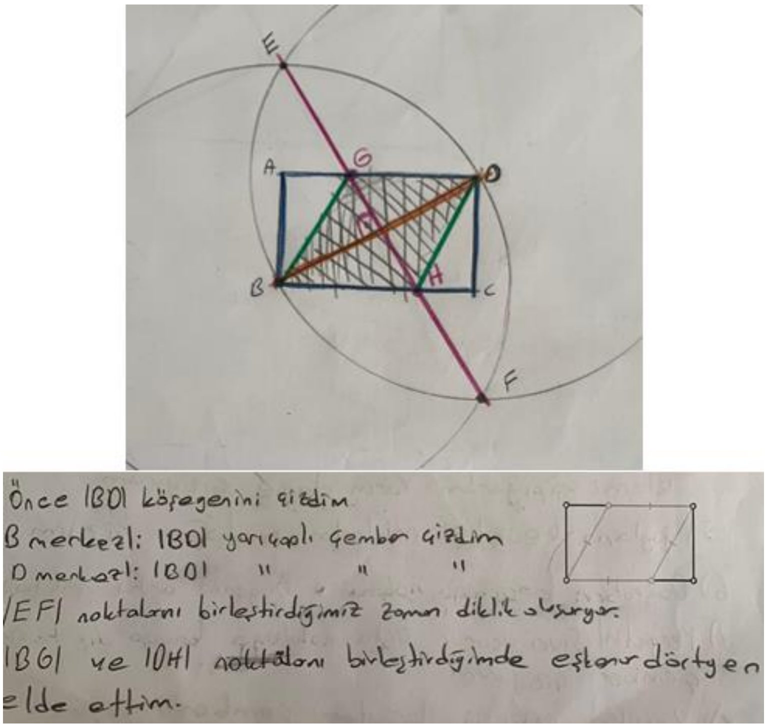
Ayşe: Aa evet. Bu ikisi de paralel ama tam eşit değil. Paralelkenar olmuş.

Ayşe verilen taslağı incelediğinde eş kenar dörtgenin köşegen özelliklerine odaklanmak yerine sadece iki kenarın eşit olması yönünde adımlar atmış, hatalı bir akıl yürütme gerçekleştirmiştir. Dolayısıyla burada Duval'in bilişsel süreç döngüsünde kesik çizgiyle belirttiği 2 numaralı ok gibi görselleştirme yanlış bir muhakemeye sebep olmuştur. Ayşe yürüttüğü stratejiyle │AL│ ve │MB│ kenarlarının eşitliğini sağlasa da tüm kenarlar için bu geçerli olmamış, sadece karşılıklı kenarların eşitliğini sağlayabilmiş, eşkenar dörtgen inşa etmeye çalışırken paralelkenar inşa etmiştir. Sonuç olarak istenen inşa sağlanamamıştır. Algısal süreçler açısından baktığımızda işlevsel algı kapsamında yapılan şekilsel değişiklikler etkili olamamış, bilişsel süreç tamamlanamamıştır

Merve'nin bu soruya ilişkin çizimine bakıldığında doğru inşa gerçekleştirdiği görülmektedir. Merve'nin çizimi ve açıklamaları Şekil 57'de verilmiştir.

Şekil 57

Merve'nin beşinci soruya ilişkin çizimi ve açıklaması



Öğretmen: Çizimini anlatır mısın Merve?

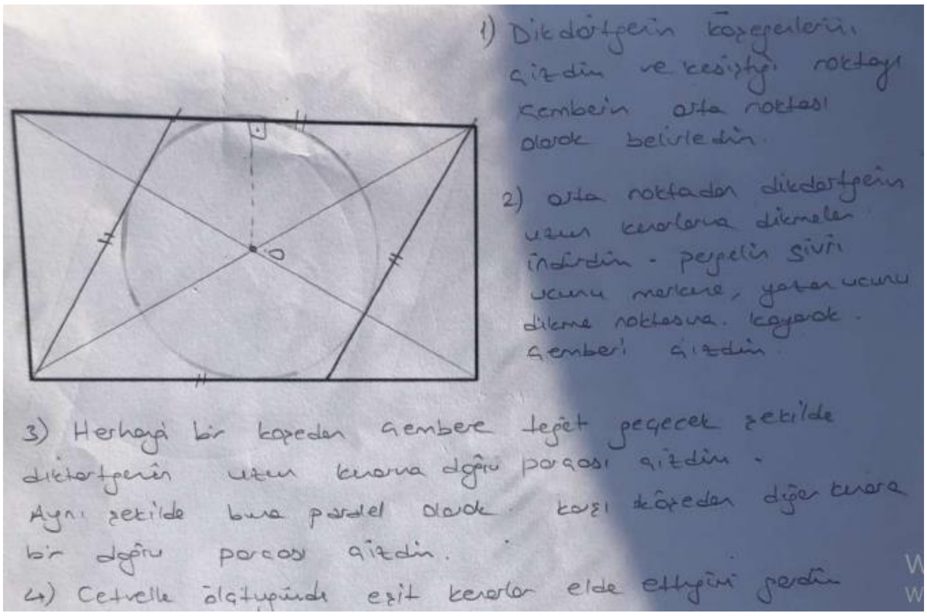
Merve: Önce ortak köşegeni çizdim. Eşkenar dörtgenin sadece köşegenini bildiğim için köşegen özelliklerini düşündüm. Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortaladığı için orta dikme inşa ederek diğer köşegeni buldum. Sonra köşeleri birleştirdim.

Merve verilen bilgilerden hareketle eşkenar dörtgenin köşegen özelliklerine odaklanmıştır. Sözel algı sürecini harekete geçirmiş, “Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini ortalar” bilgisine dayanarak işlevsel algıyı devreye sokmuş ve orta dikme inşa ederek diğer köşegeni bulmuştur. Bu algısal süreçler başarıyla yürütülerek inşa gerçekleştirilmiş, inşa adımlarının açıklamalarda tarif edilmesiyle sıralı algı sürecinin de sağlıklı bir şekilde yürütüldüğü gözlenmiştir. Bilişsel süreç döngüsüne bakıldığında ortak köşegen çizilerek görselleştirme sağlanmış, eşkenar dörtgenin köşegen özelliklerinin orta dikme inşası ile ilişkilendirilmesiyle teorik muhakeme gerçekleşmiş, bu muhakeme süreci de inşayı desteklemiştir. Bu durumda bilişsel süreç döngüsünün görselleştirme-teorik muhakeme-inşa (1-5B-3) şeklinde olduğu görülmektedir.

Kaan’ın bu soruya ilişkin çizimine baktığımızda beklenenden farklı ama geçerli bir yol izlediği görülmektedir. Fakat inşa adımlarındaki bazı eksikliklerden dolayı inşa süreci istenen şekilde tamamlanamamıştır. Kaan’ın çizimi ve açıklamaları Şekil 58’de verilmiştir.

Şekil 58

Kaan'ın beşinci soruya ilişkin çizimi ve açıklamaları



Öğretmen: Bu çözümünü bulmak için nasıl akıl yürüttün?

Kaan: Taslağı inceleyince orta noktadan uzun kenarlara teğet çember çizersem eşkenar dörtgenin kenarlarına da teğet olur diye düşündüm. Teğet çemberi çizdim. Sonra çembere değecek (teğet olacak) şekilde diğer kenarları çizdim.

Öğretmen: Teğet noktalarını nasıl belirledin peki?

Kaan: (Düşünüyor) Diğer köşegenin çemberi kestiği noktalardan çizdim.

Kaan: Aslında eşkenar dörtgenin diğer köşegeni de çizebilirim. O noktasından dikme çizsem olur. Şimdi fark ettim.

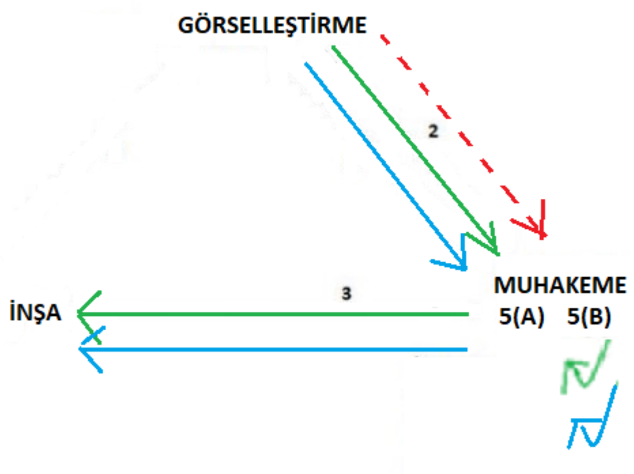
Öğretmen: Evet doğru söylüyorsun.

Kaan’ın taslağı incelerken karmaşık ilişkilere odaklanması basit olan inşa yolunu görememesine sebep olmuştur. Fakat tercih ettiği inşa yolu da geçerli olduğundan görsel temsilin muhakeme sürecine engel olduğunu söylenemez. Bir problemin çözümünde öğrencinin kendi yolunda ilerlemesi başkası tarafından yönlendirilen yoldan daha değerlidir. Kaan öncelikle köşegenlerin kesim noktasının uzun kenarlara teğet çemberin merkezi olacağını ifade ederek görsel üzerinden muhakeme gerçekleştirmiştir. Bu teorik muhakeme inşa sürecini başlatmıştır. Kaan dikdörtgenin köşegenlerini çizmiş, köşegenlerin kesişim noktası merkez olacak şekilde uzun kenarlara teğet bir çember inşa etmiştir. Köşegenin bu teğet çemberini kestiği noktaların köşelerle birleştirilmesiyle diğer kenarlar da bu çembere teğet olacak şekilde eşkenar dörtgeni oluşturmuş ve görselleştirme sağlanmıştır. Sonuç olarak bilişsel süreç döngüsü teorik muhakeme-inşa-görselleştirme (5B-3-4) şeklinde gerçekleşmiştir. Yine görüşme sırasında öğrenci şekil üzerinde açıklama yaparken alternatif çözüm yollarını da fark etmiştir. İnşa sonrasında da ölçüm yaparak doğrulama sağlanmıştır.

Farklı geometrik düşünme düzeyindeki bu öğrencilerin yukarıda ifade edilen geometrik muhakemelerini ortaya koyan bilişsel süreç döngüsü Şekil 59'da şemalaştırılmıştır. (Kırmızı, mavi ve yeşil renk oklar sırasıyla düşük, orta, ileri düzey öğrencileri temsil etmektedir.)

Şekil 59

Beşinci soruya ilişkin öğrencilerin bilişsel süreç döngüsü



4. 3. 2. 6. Altıncı Soruya İlişkin Bulgular:

Görüşme sorularının sonuncusu olan bu soruda bağlam içinde üç farklı noktaya eşit uzaklıkta bir noktanın bulunması istenmiştir. Özellikle bu noktanın geometrik yeri konusunda çevrel çemberin merkezi ya da kenar orta dikmelerin kesim noktası şeklinde fikir yürütülmesi beklenmektedir.

Düşük düzeydeki öğrenci olan Ayşe'nin soruyu boş bıraktığı görülmüştür. Yapılan görüşmede öğretmen ile konuşmaları aşağıdaki gibidir:

Öğretmen: Ayşe neden soruyu boş bıraktın?

Ayşe: Nasıl yapacağımı bilmiyorum.

Öğretmen: Soruyu okuyunca ne anladığını söyler misin?

Ayşe: Bir nokta belirlememiz isteniyor. Bu üç noktaya da eşit uzaklıkta olacak. (Biraz düşünüyor.) Aslında bu noktalardan çember çizsek (çemberleri çiziyor).

Öğretmen: Neden çember çizdin?

Ayşe: Derste öyle yapıyorduk. Bir noktadan bir uzaklıktaki yerleri bulmak için çember çiziyorduk. Aaa işte buralarda bir yerde olacak. (üç çemberin de kesiştikleri noktaların orta bölgesini gösteriyor) Durun bir şey denemek istiyorum. (Çemberlerin kesim noktasını birleştiriyor) İşte hepsi tek noktada kesişti. Bence burası.

Öğretmen: Ölç bakalım doğru mu?

Ayşe: (Pergelle ölçüyor) Evet gerçekten eşit çıktı.

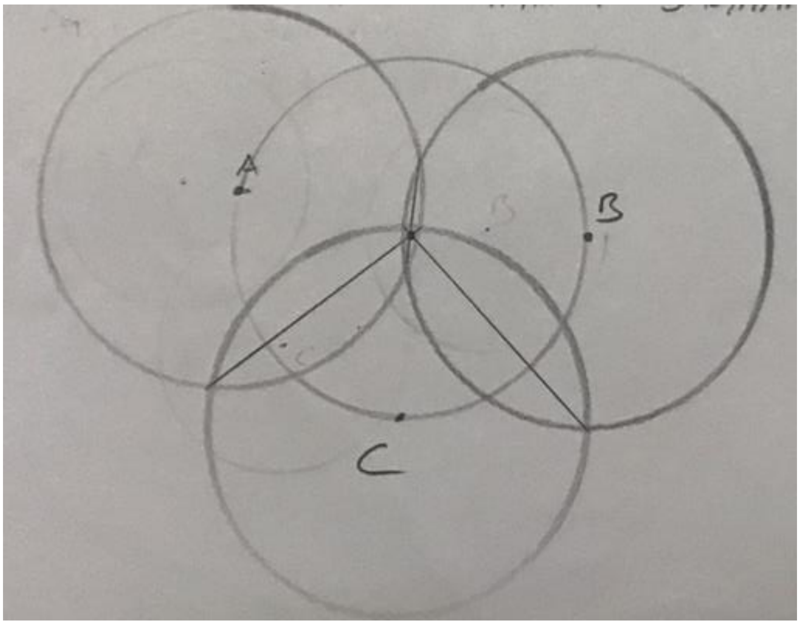
Öğretmen: Peki bu noktayı matematiksel olarak nasıl doğrulayabiliriz?

Ayşe: Maalesef bilmiyorum.

Ayşe'nin görüşme esnasında yapmış olduğu çizim Şekil 60'ta verilmiştir.

Şekil 60

Ayşe'nin altıncı soruya ilişkin çizimi



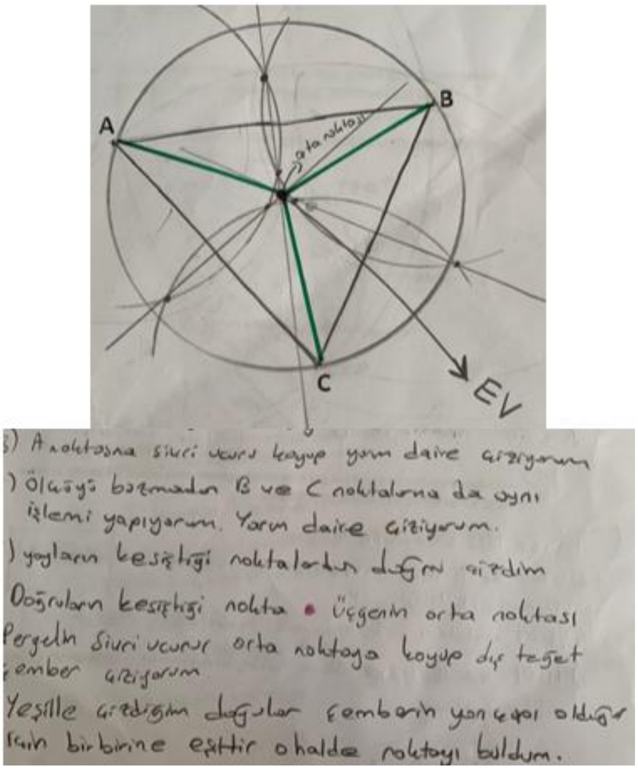
Bazen öğrencinin soruyu sesli okuyarak kendi sesiyle dinlemesi, anlama yolunda etkili bir adım olmaktadır. Burada da benzer şekilde öğretmenin öğrencinin soruyu kendi cümleleriyle ifade etmesini istemesi, soruyu anlamada etkili bir adım olmuştur. Sonrasında öğrencinin derste elde ettiği inşa becerilerini yansıtma noktasında oldukça başarılı olduğu gözlenmiştir. İlk inşa görevlerinde kazandırılması hedeflenen "çemberin bir noktaya belli bir uzaklıktaki olası noktaların geometrik yeri olduğu" düşüncesinin burada başka bir inşa görevinde doğru adımlar atması yoluyla harekete geçirilmesi inşa öğretiminin düşük düzeydeki öğrenciler de dahil olmak üzere tüm öğrencilerin zihnindeki bazı kavramsal yapıların gelişmesine katkı sağladığını göstermektedir.

Ayşe'nin geometrik muhakeme sürecini incelediğimizde önceki inşa deneyimlerine dayanarak bir inşa gerçekleştirdiği görülmektedir. İnşa süreci görselleştirme sağlamış ve görsel temsil üzerinden akıl yürüterek çemberlerin kesim noktalarını birleştirerek oluşan doğruların kesim noktasının A, B ve C noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu ölçerek doğrulamıştır. Burada Ayşe'nin yeterli muhakeme sürecine girdiği söylenemese de önceki deneyimleri sayesinde inşayı gerçekleştirmiş, fakat inşa adımlarının arkasındaki matematiksel özellikleri görememiştir. Bundan dolayı bu muhakeme süreci doğal muhakeme olarak değerlendirilmiş ve bilişsel süreç döngüsü inşa-görselleştirme-doğal muhakeme- (3-1-5A) şeklinde ifade edilmiştir. Ayrıca davranış biçimine baktığımızda Duval'in "acemi davranış" olarak ifade ettiği gibi görsel algı süreciyle başlayarak, sözel algı sürecine dayandırılmadan, şekille ilgili görünür işlemler yapılarak işlevsel algı süreci gerçekleşmiş ve doğal bir muhakeme sürecine varılmıştır.

Şekil 61'de orta düzeydeki öğrenci olan Merve'nin bu soruya yönelik çizimi ve açıklamaları görülmektedir.

Şekil 61

Merve'nin altıncı soruya ilişkin çizimi ve açıklaması



Öğretmen: Merve çizimini anlatabilir misin?

Merve: Önce noktaları birleştirip üçgen oluşturdum. Derste bir noktanın etrafındaki noktaları bulmak için bir çember çizip o uzaklıktaki noktaları buluyorduk. Ben de aynısını denedim.

Öğretmen: Çemberlerin kesişim noktalarından çizdiğin doğru parçaları nedir peki?

Merve: Orta dikmeleri çizmiş olduk. Orta dikmeler bir noktada kesişti. İşte burası merkez. Sonra bu noktanın üstüne pergelin ucunu koydum çember çizince gerçekten A, B ve C noktalarından geçti. Yani doğru çizmişim.

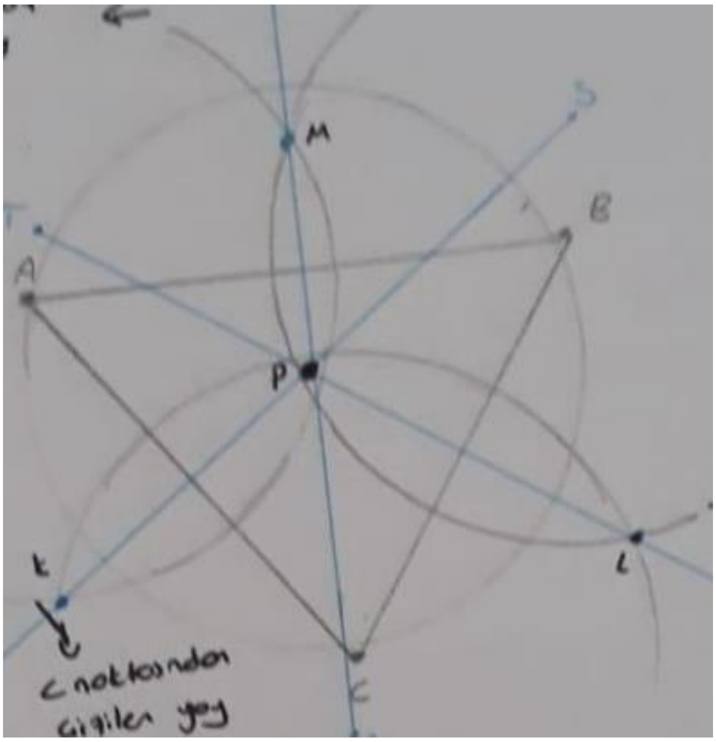
Merve'nin öncelikle bir noktaya belli mesafedeki noktaları belirlemek için inşa etkinliklerindeki girişimlerini burada yansıtarak benzer bir yol bulmaya çalıştığı görülmektedir. Bunun için üç noktadan eş çemberler inşa ederek bir görselleştirme gerçekleştirmiştir.

Devamında çemberlerin kesişim noktaları üzerinden akıl yürüterek bir muhakeme gerçekleştirmiştir Kenar orta dikmelerin kesişim noktasının çevrel çemberin merkezi olduğu matematiksel ilkesine deneysel olarak ulaşmış olsa da bunu matematiksel dil ile ifade etmediği için bu süreç doğal muhakeme olarak değerlendirilmektedir. O halde bilişsel süreç döngüsü inşa-görselleştirme-doğal muhakeme (4-1-5A) şeklinde gerçekleşmiştir.

İyi düzeydeki öğrenci olan Kaan'ın bu soruya yönelik çizimi Şekil 62'de görülmektedir.

Şekil 62

Kaan'ın altıncı soruya ilişkin çizimi



Öğretmen: Nasıl çizdiğini anlatabilir misin?

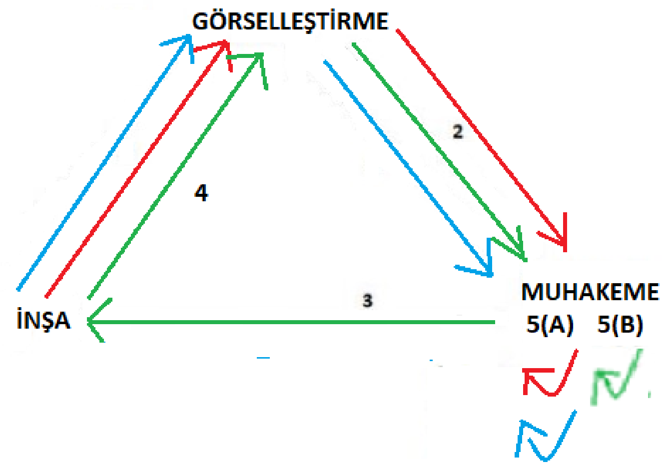
Kaan: Önce noktaları birleştirerek üçgen oluşturdum. Sonra bu üç noktanın geçtiği (çevrel) çemberin merkezini aradığımı farkettim. Bu merkez A, B ve C noktalarından eşit uzaklıkta olduğu için bu noktalardan eş çemberler çizersem kesişim noktalarının bana yol göstereceğini düşündüm. Derste bu düşünce bizi çözüme götürmüştü çoğu zaman. Kesişim noktalarını birleştirince orta dikmeleri inşa etmiş olduk ve bu orta dikmelerin kesişim noktasına pergelin ucunu koyunca çizdiğim çember A, B ve C'den geçti. Yani kenar orta dikmelerin kesişim noktası dıştan çizilen bu çemberin merkezi olur.

Kaan'ın çizimini ve açıklamalarını incelediğimizde, verilen noktalardan bir üçgen oluşturup bu üçgenin çevrel çemberinin merkezinin bulunması gerektiğini ifade ederek öncelikle aranan noktanın geometrik yeri konusunda akıl yürütüp bir muhakeme süreci gerçekleştirdiği ifade edilebilir. Bu merkezin bulunabilmesi için üçgenin kenar orta dikmelerinin inşa edilmesiyle görsel üzerinde amaca uygun şekilsel değişiklikler yaparak sözel algı sürecine uygun şekilde işlevsel algı süreci yürüttüğü görülmektedir. Kaan'ın bu davranış biçimi matematiksel davranış olarak nitelendirilebilir. Bilişsel süreç döngüsü değerlendirildiğinde muhakemenin inşaya geçişi desteklediği ve inşanın da görselleştirmeyi sağladığı görülmektedir. Sonuç olarak "Çevrel çemberin merkezi kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır" matematiksel ilkesine ulaşarak bir teorik muhakeme gerçekleşmiştir. O halde bilişsel süreç döngüsü muhakeme-inşa-görselleştirme-muhakeme (5B-3-4-5B) şeklinde olduğu söylenebilir.

Farklı geometrik düşünme düzeyindeki bu öğrencilerin geometrik muhakemelerini ortaya koyan bilişsel süreç döngüsü Şekil 63'te şemalaştırılmıştır. (Kırmızı, mavi ve yeşil renk oklar sırasıyla düşük, orta, ileri düzey öğrencileri temsil etmektedir.)

Şekil 63

Altıncı soruya ilişkin öğrencilerin bilişsel süreç döngüsü



5. BÖLÜM
SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu bölümde araştırmada elde edilen sonuçlar ile öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine, tutumlarına ve tasarlanan öğrenme yörüngelerine ilişkin tartışmalara yer verilmiştir. Ayrıca öğrencilerin bilişsel ve algısal süreçlerinin analiz sonuçları yer almaktadır.

5. 1. Öğrencilerin Geometrik Düşünme Düzeylerine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Öğrencilerin uygulama öncesinde ve sonrasında geometrik düşünme düzeylerini belirlemeye yönelik VHGDT uygulanmıştır. Yapılan istatistiksel analizler sonucunda uygulama öncesi yapılan Van Hiele geometrik düşünme test puanları ortalaması ile (VHGDT Ön test $\bar{x}$ =18.78) ile uygulama sonrası yapılan VHGDT puanları ortalaması (VHGDT Son test $\bar{x}$ =23,53) arasında son test lehine anlamlı bir fark bulunmuştur [$t_{35} = -7.356$, $p < .05$]. Test sonuçlarına göre, uygulanan öğrenme yörüngesinin katılımcıların geometrik düşünme düzeylerinin gelişimine olumlu etkisi olduğunu göstermektedir. Ayrıca Van Hiele Geometrik düşünme düzeyindeki soru kümelerinde düzeyini yükseltmeyen ancak doğru yanıtladığı madde sayısında artış kaydeden öğrencilerin oranı %52.6’dir. Bu da demektir ki uygulama sonrasında öğrencilerin çoğunluğu geometrik düşünme düzeyini yükseltmese de her bir düzeyde doğru sayısını artırmış, dolayısıyla testten aldığı puanı yükseltmiştir. Sonuç olarak geometrik inşa öğretimi için tasarlanan öğrenme yörüngesinin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini geliştirdiği söylenebilir.

Benzer şekilde Napitupulu (2001), Cheung, (2011), Uygun (2016) ve Gür ve Kobak Demir (2017) de yaptıkları çalışmalarında geometrik inşa öğretiminin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine olumlu yönde katkı sağladığını ifade etmişlerdir. Yapılan birçok çalışmada da geometrik inşa etkinliklerinin sadece şekillerin görselleştirilmesini değil, aynı zamanda geometrik yapıların analiz edilmesini ve bu yapılar arasında ilişkiler kurulmasını da gerektirdiğinden öğrencilerde geometrik düşünme, problem çözme ve üst düzey düşünme becerilerini geliştireceği ifade edilmiştir (Ameis, 2005; Deniz ve Kabael, 2021; Fujita ve Jones, 2003; Güven, 2006; Kuzle, 2013; Posamentier, 2000).

Bulgular elde edilen kritik bir sonuç olarak geometrik düşünme seviyelerinin daha detayına inildiğinde VHGDT düzeyleri arasında sadece 2. ve 3. düzeylerde son test lehine istatistiki olarak anlamlı bir fark gözlenmiştir. Bu sonuca göre geometrik inşa çalışmalarının öğrencilerin 2. seviyeden 3. seviyeye geçişinde etkili olduğu görülmüştür. Elde edilen bu sonucu destekleyecek şekilde De Villiers (2003), inşa faaliyetlerinin bir öncül ile sonuç arasındaki farkı ve bunların nedensel ilişkisini anlamaya yardımcı oldukları için öğrencilerin

Seviye 2'den Seviye 3'e geçişlerinde psikolojik olarak son derece gerekli olduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde Cheung (2011) öğrencilerin geometrik ispatları ortaya koymada zayıf olmalarının nedenlerinden birinin, Van Hiele'nin modelinde Seviye 2'den Seviye 3'e geçerken zorluklarla karşılaşmaları olduğunu ifade etmiş, geometrik inşa çalışmalarının bu geçişte yardımcı olacağını belirtmiştir.

5. 2. Öğrencilerin Geometriye Yönelik Tutumlarına İlişkin Sonuç ve Tartışma

Araştırmada tasarlanan öğrenme yörüngelerinin öğrencilerin geometriye yönelik tutumlarına etkisini incelemek için uygulama öncesinde ve sonrasında GYTÖ uygulanmıştır. Yapılan analizler neticesinde son test lehine anlamlı bir fark olduğu ortaya çıkmıştır. Bu sonuca göre tasarlanan öğrenme yörüngelerinin öğrencilerin geometriye yönelik tutumlarına olumlu katkı sağladığı ifade edilebilir.

Güven (2006) çalışmasında geometrik inşa öğretiminde öğretmenin yönerge vermesi ve öğrencilerin inşa adımlarını ezberlemesi gerektiği gibi olumsuzluklardan dolayı öğrenci tutumlarını olumsuz etkilediğini ifade etmiştir. Erduran ve Yeşildere (2010) ise çalışmalarında geometrik inşa öğretiminde öğretmen merkezli dersler işlense de derslerin öğrenciler tarafından eğlenceli bulunduğunu ifade etmişlerdir. Birçok çalışmada da bu çalışmayı destekler nitelikte pergel ve çizgeçle geometrik inşa öğretiminin hem öğretmenler hem öğrenciler tarafından kolay ve zevkli bulunduğu, ayrıca dersleri eğlenceli hale getirerek öğrencilerin tutumlarını olumlu yönde etkilediği ifade edilmiştir (Cheung, 2011; Çiftçi ve Tatar, 2014; Gür ve Kobak Demir, 2017; Napitupulu, 2001). Güven'in (2006) çalışmasında ifade ettiği olumsuzlukları gidermek adına öğrencilerin ezbere dayalı öğrenme yerine, atılan adımların gerekçelerini öğrenerek ilerlemesi ve anlamlı öğrenmeler gerçekleştirerek geometrik düşünmelerine ve ilgilerine olumlu katkı sağlaması için öğrenme yörüngeleri tasarlanmış ve uygulanmıştır. Test sonuçlarına göre hem geometrik düşünmeyi hem de öğrenci tutumlarını artırdığı ifade edilebilir. Ayrıca öğrencilerin dersteki tutumları ve ifadeleri göz önüne alındığında öğrenciler geometrik inşa faaliyetlerini ilginç bulduklarını ifade etmişler, inşa görevlerinde çözümün ya da gidilecek yol açıkça görülmediği için aşina olmadıkları denemeler yaparak bir nevi konfor alanının dışına çıkmaları öğrencilerin hoşuna gitmiş, bu tarzda geometrik deneyim tüm düzeydeki öğrenciler için çekici gelmiştir. Buna ek olarak inşa görevlerini gerçekleştirirken öğrencilerin grup içinde kendilerini ifade etmeleri ve fikirlerini savunmaları hem matematikteki iletişim becerilerini artırmış, hem de öğrendiklerini yansıtma noktasında öğrencileri geliştirmiştir.

5. 3. Öğrenme Yörüngelerine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Bu araştırmada öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerini açığa çıkarmak amacıyla temel geometrik kavramların inşasına yönelik kavramsal alt yapı güçlü bir şekilde desteklenmiş, uygulama sürecine göre geliştirilebilir bir öğrenme yörüngesi ortaya koyulmuştur. Bu öğrenme yörüngesinde öğrencilerin temel geometrik kavramların inşası sürecinde gösterdikleri gelişim basamakları, karşılaşılabilecek zorluklar ve sergilenecek kritik bilişsel eylemler açığa çıkarılmış ve etkili öğrenme ortamı için etkinlikler tasarlanmıştır. Öğrenme yörüngesinde öğrenme hedeflerinin ve etkinliklerin sırası öğrenci zihninde kavramların ilişkilerine göre düzenlenmiş, etkinliklere uygulamada yaşanan güçlüklere göre yeni maddeler eklenmiş buna göre tüm gelişim basamakları revize edilmiştir. Buradaki temel gaye bütün inşa adımlarında arka planda yer alan kavramsal alt yapının net bir şekilde oturmasını sağlamak, bir sonraki inşa için gerekli zihinsel olgunluğu sağlamaktır. Örneğin dikme ve sonrasındaki inşa görevlerinde öğrencilerin atılan adımları anlamlandırabilmeleri için üçgen özelliklerine ve inşalarına hakim olmaları gerekmektedir. Bu yüzden öğrenme yörüngeleri bu şekilde düzenlenmiş ve bu düzenin başarılı olduğu öğretim esnasında görülmüştür. Uygulama esnasında benimsenen anlayış öğretmenin inşa adımlarını tarif etmesinden ziyade etkinlikleri etkili bir kurgu ve sırayla öğrenciye sunarak inşa süreçlerini kendilerinin gerçekleştirmelerini ve bu adımları matematiksel olarak dayanaklarıyla savunabilmelerini sağlamak olmuştur. Bu anlayış öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerine önemli katkılar sağlamış, özellikle kendi fikirlerini savunmada matematiksel dayanaklar kullanmaya teşvik ederek lise ve sonrasında gelişecek olan ispat yapabilme becerisi için önemli bir adım olmuştur.

Geometrik inşa sürecinde öğrencilerin çoğu özellikle ilk etkinliklerde göz kararı bir nokta belirleme ya da deneme yanılma yoluyla sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Ancak bu girişimlerin genel bir sonuca ulaştıramayacağı zamanla anlaşılarak yok olduğu gözlemlenmiştir. Bu farkındalık öğrencilere matematikte bir dayanak olmadan adım atılamayacağı fikrini kazandırması açısından oldukça değerli bir kazanım olmuştur.

Geometrik inşa sürecinden önce öğrencilerin zihninde pergelin işlevi hakkında sadece çember çizmeye yarayan bir araç olduğu algısı tamamen değişmiş, bunun yerine uzunluk ve açı ölçme işlevi pergele daha etkili bir anlam ve kritik bir rol kazandırmıştır. Temel geometrik kavramların inşasını gerçekleştirmede pergelin ölçme aracı olarak deneysel doğrulamada oldukça fazla kullanıldığı görülmektedir. Benzer şekilde Tapan ve Arslan (2009) ve Deniz ve Kabael'in (2021) çalışmalarında da bu sonucu destekler nitelikte, öğrencilerin deneysel doğrulamalara sıklıkla başvurdukları ifade edilmektedir. Her ne kadar geometrik muhakemede ulaşılması hedeflenen nihai konum öğrencilerin matematiksel tanım ve teoremlere dayanarak doğrulamalar yapmaları olsa da öğrencilerin çoğunluğunun deneysel doğrulamaları ve doğal söylemsel dille muhakemeler yapmaları ortaokul seviyesinde oldukça değerli deneyimler olarak görülmektedir. İspat yapma becerisini geliştirme yolunda ortaokul düzeyinde öğrencilerin geçerli varsayımlarda bulunmalarının, geometri bilgilerini herhangi bir dayanakla doğrulamalarının ve geçerli muhakemeler yapabilmelerinin önemli kazanımlar olduğu ifade edilmektedir (Fujita ve diğerleri, 2014; Janicic, 2006).

Öğrenciler farklı doğrultudaki eşit uzunlukta doğru parçalarını eşleştirirken sorun yaşamazken, eş doğru parçası inşa ederken öğrencilerin tamamı paralel ve eşit uzunlukta doğru parçası inşa etmişlerdir. Benzer sonuçlar Deniz ve Kabael'in (2021) çalışmasında da ortaya çıkmıştır. Burada öğrenci zihnindeki prototip şekil dikkat çekmektedir. Öğrencilerin karşılaştıkları benzer örnekler eş doğru parçalarının paralel olması gerektiği düşüncesini doğurarak kısıtlı eylemler ortaya koymasına sebep olmuştur. Alternatif çözüm yollarının sorgulanması dinamik düşünme yolları geliştirme noktasında önemli bir destek olmuştur.

Ayrıca istenen şartları sağlayan olası tüm çözümlerin sorgulanması, çember tanımıyla ilgili bir noktaya eşit uzaklıktaki tüm noktaların geometrik yeri olduğu ve pergelin çemberle ilgili kullandığımız en önemli işlevinin fark edilmesi konusunda etkili bir yol olmuştur. Bu noktadan sonra öğrenciler bir noktadan belirli bir uzaklıktaki noktaların yerini görmek için artık çember çizmesi gerektiği fikrini benimsemişlerdir. Bu fikir geometrik inşa mantığında oldukça önemli bir adımdır. Ayrıca inşa esnasında çemberin tamamının çizilmesinin her zaman kullanışlı olmadığı anlaşıldığından bu fikir zamanla sadece ihtiyaç duyulan kısmı olan yayın çizilmesine evrilmiştir. Yine çemberin hangi kısmının yeterli olacağına karar verme noktasında da öğrenciler süreç içerisinde olgunlaşmıştır. Benzer sonuçlar Deniz ve Kabael (2021) tarafından da ifade edilmiştir.

Orta nokta bulma inşasında öğrencilerin yönelmeleri gereken en önemli adım uç noktalardan eşit uzaklıktaki noktaların bulunması gerektiği fikridir. Bu noktaları belirlemek için yukarıda öğrencilerin benimsediği çember çizme girişimi etkili bir adım olmuştur. Burada öğrencilere sunulan damlayan musluklar etkinliğinde git gide büyüyen çemberler çizilmesi bir anlamda orta noktaya adım adım yaklaşma olarak algılanmış, çemberlerin kesiştikleri noktalarda artık orta noktaya ulaşıldığı fikri kolayca açığa çıkmıştır. Yine bu etkinlik sayesinde geometrik inşaları gerçekleştirmede çember ve doğruların kesişim noktalarının öğrenciler tarafından kritik noktalar olarak görülmesi sağlanmıştır. Janicic (2006)'in de ifade ettiği gibi bu bakış açısı geometrik inşada kritik noktaları belirlemede önemli bir adımdır. Uç noktalardan çizilen eş çemberlerin kesiştirilmesiyle ikizkenar üçgen elde edildiği ve bu üçgenin özelliklerinden yararlanarak orta dikmenin oluştuğu fikrinin matematiksel doğrulama için kullanıldığı görülmüştür.

Bütün inşa görevlerinde inşa adımlarının tarif edilmesi ve matematiksel olarak doğrulanmasının istenmesinin öğrencilerde matematiksel bilgiyi dayanak olarak kullanma ve basit ispat yapma becerisinin gelişmesine katkı sağladığı görülmektedir. Bu da geometrik inşa öğretiminin en önemli kazanımlarından biri olmuştur. Fujita ve diğerleri (2010) çalışmalarında da öğrencilerin çoğunluğunun deneysel doğrulamanın geometrik bir ifadenin doğru olduğunu göstermek için yeterli olduğunu düşündüklerini belirmişlerdir. Bu yüzden inşa çalışmalarında matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapılmasının istenmesi gerektiğini, deneysel doğrulama sayesinde ölçmeye dayalı muhakemenin gerçekleştiğini, matematiksel ilişkilendirme sonucunda teorik muhakemeye geçişte önemli bir destek sağlayacağını ifade etmişlerdir.

Geometrik inşa görevlerinin sıralanmasında öğrencinin elde ettiği kazanımı bir sonraki inşa görevinde yansıtma ihtiyacı duyması kriterine özellikle dikkat edilmiştir. Öğrencinin hem sahip olduğu bir geometrik inşa becerisini içselleştirerek diğer inşa görevine yansıtmasına hem de Lim (1997), Kondratieva (2011) ve Deniz ve Kabael'in (2021) de ifade ettiği gibi elde ettiği temel geometrik inşa becerileriyle karmaşık inşaların gerçekleşmesine olanak sağlayacak öğretim etkinliklerinin tasarlanmasıyla üst düzey düşünme becerilerinin desteklenmesi öncelikli hedef olmuştur. Örneğin üçgen inşalarından sonra bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşası gerçekleştirilirken öğrencilerin hem ikizkenar üçgen inşasından hem de orta nokta bulmadan yararlanarak bu inşaları yansıtmasına olanak sağlanmaktadır. Ayrıca yapılan inşaların adımları tartışılarak bu yapıların diğer geometrik yapılarla ilişkilerinin ortaya çıkarılması var olan geometri bilgileriyle öğrencilerin savunma süreçleri de üst düzey muhakeme becerilerinin gelişmesine katkı sağladığı ifade edilebilir. Bunlara ek olarak hem öğretim deneyi hem de görüşmeler esnasında öğrencilerin geometrik inşa bilgilerini yeni durumlara yansıtması ve ilişkilendirmeler yoluyla matematiksel gerekçelerle savunma yapmaları muhakeme süreçlerini açığa çıkarmada önemli dayanak olmuştur.

Üçgen inşaları görevinde ikizkenar, eşkenar ve çeşitkenar üçgen inşa etmeleri beklenen öğrenciler bu inşaları başarıyla gerçekleştirmiş, ayrıca orta nokta bulma oluşumunu kullanarak eşkenar ve ikizkenar üçgenlerin yüksekliklerini de belirleyebilmişlerdir. Bir noktadan eşit uzaklıktaki olası tüm noktaların geometrik yerinin çember ya da yeteri kadar yay çizilerek kesişim noktalarının kritik noktalar olarak belirlenmesi düşüncesi öğrencilerin çoğunluğu tarafından benimsenmiştir. Üçgenlerin inşası öğrencilerin zihninde hem üçgenlerle ilgili var olan yanılgıların ortaya çıkarıp düzeltilmesine, hem de kritik bilgilerin hatırlanarak bir sonraki inşa görevinde kullanılmasına olanak sağlamıştır. Burada ikiz kenar üçgen inşasında benimsenen inşa adımları, bir sonraki görev olan dikme inşasında öğrencilere rehber olmuştur.

Bir doğruya dışındaki bir noktadan dikme inşasında o noktadan geçen çemberler çizerek kesiştirilmesi düşüncesi öğrenciler tarafından özgün bir inşa yolu ortaya konmasında etkili olmuştur. Bu inşayı gerçekleştirdikten sonra öğrenciler ilk olarak ölçmeye dayalı muhakemeyle deneysel doğrulama yapmışlar, fakat bunun yeterli olmayacağı bilindiğinden arka planda oluşan geometrik şekiller ilişkilendirilerek deltoid oluştuğunu fark etmişlerdir. Sonuç olarak deltoidin köşegen özelliklerinden faydalanılarak geçerli matematiksel doğrulama gerçekleşmiştir.

Öğrenciler paralellik ve diklikle ilgili durumları yatay ve düşey doğrultuda daha kolay oluşturmuşlardır. Ancak eğimli durumlarda başarı oranı düşmüştür. Bu durum öğrencilerin kavram imajlarında prototip şekillerin hakim olduğunun göstergesidir (Fischbein, 1993). Öğrencilerin çoğunluğunda paralel doğru parçaları inşa ederken aynı uzunlukta olmaları gerektiği ve uç noktalarının da aynı hizada olması gerektiği düşüncesi hakimdir. Bazı öğrenciler de üçgenin yüksekliklerini inşa ederken geniş açılı üçgende kenarın uzantısına dikme çizme fikrine ulaşamamışlardır. Yani doğruların uzantılarının dik kesişme durumu diklik için öğrenci zihninde örnek teşkil etmemektedir. Burada da prototip şeklin hakim olması öğrenciyi yanlış bir düşünceye sevk etmiştir. Benzer şekilde Ulusoy (2014, 2019) ve Duatepe Paksu ve Bayram'ın (2019) çalışmalarında bu durumu destekleyen sonuçlar elde edilmiştir. Ulusoy (2019) çalışmasında öğrencilerin diklik ile ilgili kavram imajlarının dik doğruların birbirini her zaman ortalayacağı, diklik durumunun sadece yatay ve dikey durumda olabileceği, dik doğruların eşit uzunlukta olduğu düşüncelerini içerdiğini ifade etmiştir Duatepe Paksu ve Bayram'ın (2019) çalışmasında da öğrenciler kesişmeyen fakat uzantıları dik olan doğruların dik olacağı fikrine ulaşmada güçlük çekmişlerdir.

Bu iki durumda da ders kaynaklarında paralellik ve diklik kavramlarına dair genel olarak tek tip örneklere yer verilmesinin ve prototip olmayan örneklerin göz ardı edilmesinin öğrencilerin yaşadıkları zorluğun temel sebebi olduğu düşünülmektedir. Deniz ve Kabael'in (2021) de ifade ettiği gibi bu sonuçlar öğrenci zihnindeki kavram imajlarının dinamikleşmediğinin göstergesi olarak yorumlanabilir. Bu bağlamda öğrencilerin zihnindeki kavram imajlarını zenginleştirmek adına çeşitli örneklerin öğrencilere sunulması ve karmaşık inşa görevleriyle geometrik bilgileri ilişkilendirmelerini sağlayacak öğrenme ortamlarının sağlanması gerektiği ifade edilebilir.

Öğrencilerin tanım yapma becerileri incelendiğinde Kızıltoprak'ın (2020) da ifade ettiği gibi genel olarak görsel algıya yönelik tanımların ön plana çıktığı, sözel algıya yönelik tanımlamaların da şekli tarif etme olarak gerçekleştiği, sınıf içi tartışmalar sonucunda kapsayıcı tanım oluşturulabildiği görülmüştür. Görsel algıya yönelik tanımlamalarda prototip şekil imajının baskın olduğu görülmüş, bu durum birçok öğrencinin kapsayıcı tanım yapmasına engel oluşturmuştur.

Üçgenlerin açıortay, kenarortay ve yüksekliklerini inşa etme görevlerinde farklı üçgen sınıflamalarına ait üçgenlerin yardımcı elemanlarının inşa edilmesi istenmiştir. Açıortay inşasında tüm gruplar açıyı pergelle ortalamaya çalışmışlar ve başarılı olmuşlardır. Kenarortay inşasında bazı gruplar kenarların orta noktasını bulup kenarortayları inşa ederken bazı gruplardaki öğrenciler kenarların orta noktasını bulurken çizdikleri kenar orta dikmeyi kenarortay olarak algılamışlardır. Şengün ve Yılmaz (2021) yaptıkları çalışmada öğrencilerin açıortay ve kenarortay çizme durumlarını incelemiş ve benzer şekilde öğrencilerin zorluk yaşadıklarını ifade etmişlerdir. Blanco (2001) ve Hızarcı, Ada ve Elmas (2006) da benzer sonuçlara ulaşmışlar, özellikle pergelle inşa noktasında zorluk yaşadıklarını ifade etmişlerdir.

Yükseklik inşasında ise dar açılı üçgende tüm gruplar başarılı inşalar gerçekleştirirken bazı gruplar dik ve geniş açılı üçgende üçgenin iç bölgesinde yer almayan yükseklikleri inşa edememişler, bu yüksekliklerin olmadığını iddia etmişlerdir. Yine burada ders kitaplarında ve sınıf içi uygulamalarda yaygın olarak verilen örneklerden hareketle böyle bir yanılgı gerçekleştiği ifade edilebilir. Benzer şekilde Mukaddes ve diğerleri (2015) yaptıkları çalışmada yükseklik kavramıyla ilgili ortaokul öğrencilerinin kavram imajlarının prototip şekillerin etkisinde geliştiğini ve prototip olmayan geniş ve dik açılı üçgenlerde yükseklik belirlemede sorun yaşadıklarını ifade etmişlerdir.

Genel olarak üçgenin yardımcı elemanlarının inşasında bazı öğrencilerin hem kavramı tanımlamada hem de inşayı gerçekleştirmede ilk aşamada zorluk çektikleri görülmüştür. Burada yaşanan zorlukların aşılmasında sınıf içi tartışmalar yoluyla inşa adımlarının analiz edilmesi etkili olmuştur.

Eş üçgenler inşasında yeterli elemanların belirlenmesinde öğrenci gruplarının ilk yöneldikleri yol tüm kenarların uç uca eklenmesiyle yani KKK yöntemi ile inşa olmuştur. Alternatif yolların da olabileceği konuşulduğunda en az bir kenar uzunluğunun mutlaka kullanılması gerektiği ifade edilmiştir. Sonrasında AKA ve KAK yöntemleri de öğrenciler tarafından ifade edilmiştir.

Sonuç olarak uygulamada öğrencilerin ihtiyaçları ve davranışları doğrultusunda öğrenme yörüngeleri yeniden düzenlenmiş, öğrencilerin hataları, gelişim basamakları ve kritik davranışları yorumlayıcı bir çerçevede ifade edilmiştir. Yeniden düzenlenmiş öğrenme yörüngesi ışığında temel geometrik kavramların inşasında öğrencilere kazandırılması gereken önemli anlayışlar şunlardır:

1. Pergelin ölçme işlevinin fark edilmesi
2. Bir noktadan belli uzaklıktaki tüm olası noktaların yerini görmek için o noktadan çember veya yeteri kadar yay çizmek
3. Çemberlerin veya yayların birbirleriyle veya bir doğru ile kesim noktalarının kritik nokta olarak benimsenmesi
4. Olası farklı çözüm yollarının irdelenmesi
5. İnşa adımlarının arkasındaki geometrik özelliklerin fark edilmesi
6. İnşayı doğrulama ve matematiksel dayanaklarla gerekçelendirme

5. 4. Öğrencilerin Geometrik Muhakeme Süreçlerine İlişkin Sonuç ve Tartışma

Geometrik muhakeme süreci inşa, görselleştirme ve muhakeme olmak üzere üç tür bilişsel süreci içermektedir. Hershkowitz'in (1998) de ifade ettiği gibi bu üç bilişsel süreç arasındaki döngünün, bu süreçlerdeki öğrenci davranışlarının irdelenmesi geometrik muhakeme süreçlerinin analiz edilmesinde bir model olarak çalışmaktadır. Bu bakımdan çalışmada öğrencilerin geometri muhakeme süreçlerinin incelenmesi için bu bilişsel süreç döngüleri analiz edilmiştir.

Ayşe'nin görüşme sorularındaki inşa görevlerinden birini tam, birini eksik gerçekleştirdiği, geri kalanını ise gerçekleştiremediği görülmektedir. İlk iki soruda derste yaptıkları inşa girişimlerinin katkı sağladığı doğal muhakeme süreçleri yaşansa da birçok temel geometrik kavramlarla ilgili eksik veya yanlış ön bilgiler yüzünden bu doğal muhakeme öğrenciyi inşaya götürecek kadar yeterli olamamıştır. Ayrıca hiçbir soruda teorik muhakeme sürecini gerçekleştiremediği görülmektedir. Ayşe'nin geometrik düşünme düzeyini göz önüne alırsak inşa öğretimi sorasında sergilediği bu doğal muhakeme süreçleri bile öğrenci için önemli bir adım olduğu söylenebilir. Van Hiele düşünme düzeyinde birinci basamakta yer alan bir öğrencinin sorularda görsel de olsa bir çıkarıma yönelmesi bile seviyesinin ilerlediğini göstermektedir. Fakat henüz şekilleri özelliklerine odaklanarak çıkarımda bulunma ve bu yönde değişiklikler yapabilmesi mümkün olmamıştır.

Algısal süreçler açısından değerlendirirsek birçok soruda görsel algı sürecini gerçekleştirerek zihninde bir canlandırma yapmış olsa da sözel algı sürecini harekete geçirecek kavramsal altyapısı olmaması, işlevsel ve sıralı algıyı destekleyecek akıl yürütme becerisinin sergilenememesi inşa sürecini sekteye uğratmış, hedeflenen geometrik muhakeme süreci gerçekleştirilememiştir. Dolayısıyla tüm süreçlerin görsel algının yönetiminde gerçekleştiği açıkça görülmektedir.

Geometrik inşa çalışmalarının Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine uygunluğu ile ilgili De Villiers (2003), 1. düzeyde (görsel düzey) olan öğrencilerin şekillerin görüntüsü ile ilgilendiği ve geometrik özelliklerine odaklanmadığı için inşa çalışmalarına hazır olmadıklarını ifade etmektedir. Yapılan çalışmada da benzer sonuçla elde edilmiş, görsel düzeyde olan öğrencinin inşa görevlerini gerçekleştiremediği görülmüştür.

Merve'nin görüşme sorularındaki performansına baktığımızda inşa görevlerinden birini gerçekleştiremediği, ikisini eksik, geri kalanını ise tam gerçekleştirdiği görülmektedir. 1., 2. ve 5. sorularda probleme uygun matematiksel ilkelere dayanarak inşa sürecini başlatmış, fakat çıkarımda bulunurken yapılan değişiklikleri birçok soruda matematiksel tanım ve teoremlere dayanarak gerekçelendirememiştir. Bu da Merve'nin çoğunlukla doğal muhakeme göstergelerine yönelik davranışlar sergilediği, bazen çıkarım yaparken matematiksel ilkeler kullansa da bunu çoğu zaman gerekçelendiremediği görülmüştür.

Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinden 2. düzeyde yer alan Merve'nin seviyesine uygun şekilde geometrik şekillerin özelliklerine odaklandığı, dolayısıyla çoğunlukla problem çözme sürecini sözel algı sürecinin yönettiğini ifade edebiliriz. Ayrıca geometrik şekillerin özelliklerini çözüme götürecek şekilde değişiklikler yaparak işlevsel algıyı etkili bir şekilde kullanmıştır. Bazı sorularda görsel temsillerden yararlanarak şekilleri görüntüsünden hareketle sonuca ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. İnşa etkinlikleri sayesinde attığı adımların mantıksal dayanaklarını düşünmekle beraber genellikle gerekçe gösterirken sadece ölçmeye dayalı doğrulamayı yeterli görmektedir. Ayrıca geometrik inşa öğretimi sırasında öğrendiği girişimleri yeni problemler üzerinde uygulamaya çalıştığı da görülmüştür. Sonuç olarak Merve'de çoğunlukla doğal muhakeme davranışları gözlendiği ve inşa görevlerini yerine getirebildiği ifade edilebilir. Merve birçok inşayı başarıyla tamamladığında doğrulama aşamasında ölçmeye dayalı muhakeme gerçekleştirmiştir. Geometrik muhakemenin ilk aşaması olarak ifade edilen ölçmeye dayalı muhakeme, sadece bir şekil inşa edildiğinde gerçekleşebildiği için burada geometrik inşa çalışmalarının öğrenciyi mantıksal çıkarım yapmaya yönelmesini sağladığı ifade edilebilir. Bu da öğrencinin 3. düzeye geçişini kolaylaştıracağı söylenebilir.

Bu çalışmayı destekler nitelikte De Villiers (2003) çalışmasında Van Hiele'nin geometrik düşünme düzeylerinden 2. düzeydeki (analiz) öğrencilerin inşa çalışmalarına hazır oldukları, geometrik inşa sürecinde oluşturdukları tanımlama veya açıklamaları mantıksal olarak denetleyemeseler de başarılı inşalar gerçekleştirebileceklerini ifade etmiştir. Ayrıca inşa çalışmalarının öğrencilerin 2. düzeyden 3. düzeye geçmelerine yardımcı olacağı belirtilmiştir.

Kaan'ın performansını değerlendirirsek problem çözmede öncelikle şekillerin özelliklerine odaklandığı matematiksel ilkelerle hareket ederek muhakeme yaptığı ve muhakeme neticesinde inşaya yöneldiği görülmektedir. Kaan'ın geometrik düşünme düzeyinin 3. seviyede olduğu baz alındığında geometrik şekillerle ilişkilendirmeler yaparken mantıksal çıkarımlar yaptığı görülmektedir. Bir çıkarımda bulunurken tanım ve teoremleri kullanabildiği, ayrıca önceki inşa deneyimlerini yansıtarak yeni duruma aktarabildiği görülmektedir.

Birçok problemde tanım ve teoremleri kullanarak şekil üzerinde değişiklikler yapmış, yani teorik muhakeme sürecinde işlevsel algıyı oldukça etkili kullandığı ifade edilebilir. Özellikle 6. Soruda geometrik inşadan yararlanarak matematiksel bir ilkeye ulaştığı, teorik muhakeme yolunda başarılı adımlar attığı ve üst düzey düşünme becerileri sergilediği görülmüştür. Bazı problemlerde görsel temsillerden yararlansa da bunu matematiksel bilgilerle desteklemiştir. Henüz tümdengelimsel bir çıkarım seviyesine gelmemiş olsa da seviyesine göre uygun mantıksal çıkarımlar yaptığı ifade edilebilir. Ayrıca inşa çalışmalarının bu düzeydeki öğrencileri tümdengelimli çıkarım seviyesine ulaştırmada önemli bir destek olacağı düşünülmektedir. Benzer şekilde Wong (2005) da, öğrencilerden inşa sürecini açıklamalarını istemenin tümdengelimli kanıtların ilk adımı olduğunu ve bu tür sözlü sunumların nedenler ve argümanlarla desteklendiğini, aynı zamanda öğrencilerin organizasyon ve sunum becerilerinin bir eğitimi olarak hizmet ettiğini ifade etmiştir.

Bu çalışmaya benzer sonuçlara ulaşmış bir diğer çalışmada Mutluoğlu ve Erdoğan (2020) 6. sınıf öğrencilerinin geometrik muhakeme süreçlerini Şekilsel Kavram Teorisi çerçevesinde incelemesi sonucunda başarı düzeyi düşük olan öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerinin prototip şekil etkisi altında gerçekleştirdiklerini ifade etmişlerdir. Başarı düzeyi orta ve iyi olan öğrencilerin ise genellikle kavram kontrolünde muhakemelerini yürüttükleri, fakat zaman zaman prototip şekil etkisi altında kaldıklarını gözlemlemişlerdir. Ayrıca öğrencilerin cevaplarını açıklarken gerekçelendirme noktasında orta ve iyi düzeydeki öğrencilerin şekillerin kavramsal yönüne odaklanarak üst düzey muhakeme sergiledikleri belirtilmiştir.

6. BÖLÜM
ÖNERİLER

Bu bölümde araştırma sonuçlarına göre öğretim uygulamalarına ve ileriki araştırmalara yönelik olmak üzere iki başlık halinde öneriler sunulacaktır.

6. 1. Öğretim Uygulamalarına Yönelik Öneriler

Okullarda geometri öğretimi bireylerin mantıksal düşünme ve muhakeme becerilerinin gelişimi için hayati bir öneme sahiptir. Öğrencilerin sadece akademik başarı için değil üst düzey düşünme becerilerinin geliştirilmesi açısından etkili geometri öğretimi oldukça değerlidir. Geometrik inşa çalışmalarının bu mantıksal düşünme biçimini kazandırmada öğrencilere önemli deneyimler sağladığı literatürde birçok çalışmada ifade edilmiştir. Okul seviyelerinde öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerini inceleyen çalışmalarda ortaokul öğrencilerin 6. sınıfa kadar çoğunlukla Düzey 0 ve Düzey 1'de yer aldıkları 7. sınıfta çoğunluğun Düzey 1'de olduğu az bir kısmın Düzey 2'ye ulaştığı, 8. sınıfta ise çoğunluğun Düzey 1 ve 2'de yer aldığı az bir kısmının mantıksal çıkarım düzeyi olan Düzey 3'e çıkabildiği belirtilmiştir. Öğretim programı incelendiğinde de 8. sınıfta öğrencilerin çoğunluğunun Düzey 2'ye ulaşması beklenmektedir. Yapılan bu çalışmada Düzey 2'deki öğrencilerin geometrik inşa çalışmaları için artık hazır olduğu görülmüştür. Ayrıca geometrik inşa çalışmalarının lise düzeyinde geometri derslerinde genel olarak gerçekleştirildiği, ortaokulda öğretim programında geometrik inşaya yönelik kazanımlar yer almasına rağmen uygulamada pek yer verilmediği görülmektedir.

Yine bu çalışmada 8. sınıf öğrencilerinin geometrik düşünmelerinin 2. düzeyden 3. düzeye geçişlerinde geometrik inşa çalışmalarının etkili olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin geometri öğrenme deneyimlerini zenginleştirmek ve geometrik düşünme düzeylerini geliştirmek için ortaokul 8. sınıf düzeyinde ya günlük öğretim programının bir parçası olarak ya da bir zenginleştirme programı olarak geometrik inşa çalışmalarının yapılması önerilmektedir.

Tasarlanan öğrenme yörüngeleriyle 8. sınıf öğrencilerinin geometrik inşa etkinliklerinde sergiledikleri düşünme biçimleri, yaşadıkları zorluklar, ve açığa çıkan bilişsel eylemler ifade edilmiştir. Ayrıca bağlam temelli inşa görevleri tasarlanarak etkili bir öğretim planı hazırlanmış, çalışmanın değerli bir ürünü olarak ortaya konmuştur. Bu öğrenme yörüngeleri ortaokulda geometri inşa öğretiminde uygulayıcılara etkili bir yol olarak tavsiye edilmektedir.

Öğretim esnasında alternatif çözüm yollarının sorgulanması, öğrencilerin zihnindeki prototip şekil algılarının değişmesini sağlayacağından farklı çözüm şekillerinin, örnek ve örnek olmayan durumların öğrencilere sunulması gerektiği düşünülmektedir. Bu durum öğrencide sözel algının yönettiği bir muhakeme süreci gerçekleşmesine olanak sağlayacaktır.

Çalışmada öğrencilerin inşa adımlarını sorguladığı ve arka planda gerçekleşen geometrik ilişkilerin ortaya çıkarıldığı bir öğrenme biçiminin geometrik düşünmeyi harekete geçirdiği görülmüştür. Bu bağlamda öğrencilerin inşa adımlarını keşfedebilecekleri öğrenme ortamının oluşturulması, inşa sürecindeki davranışlarını açıklamada matematiksel argümanlar geliştirmelerine fırsat tanımaya dikkat edilmesi önerilmektedir.

Geometrik şekillerin tanımlamalarının yapılması sırasında öğrencilerin yaygın olarak günlük konuşma dili kullandıkları, şekilleri tanımlamadan ziyade özelliklerini tarif etme şeklinde bir süreç gerçekleştiği görülmüştür. Bu noktada öğretmenin matematiksel dil kullanımı ve kapsayıcı tanımlar konusunda rehber olması gerektiği düşünülmektedir.

Ayrıca araştırmada ölçmeye dayalı muhakemenin teorik muhakemeye geçişin ilk adımı olduğu düşünülmektedir. Bu açıdan inşa çalışmalarında yapılan çizimlerle ilgili gerek deneysel gerek matematiksel doğrulamaya yönelik sorgulamaların yapılması teorik muhakeme sürecine geçişe yardımcı olacağından öğrencilerin bu noktada teşvik edilmesi gerektiği düşünülmektedir.

Geometrik inşa etkinliklerinin grup çalışması şeklinde yapılması hem öğrencilerin iletişim becerilerini desteklemiş hem de akran öğretimini sağlayarak özellikle düşük düzeydeki öğrencilerin derse karşı ilgisini artırdığı görülmüştür. Öğrencilerin genel olarak matematik ve geometriye karşı olumsuz tutum içinde oldukları dikkate alındığında bu tarz grup çalışmalarının zihinlerdeki olumsuz yargıyı kırmada etkili olacağı düşünülmektedir.

Bazı geometrik inşa etkinliklerinde öğrencilerin hedeflenen fikre ulaşamadıkları görülmüş, bu kapsamda ara etkinlikler tasarlanarak öğrenme yörüngeleri geliştirilmiştir. Her sınıf ortamı kendine özgüdür ve öğretim planında farklı düzenlemeler yapmayı gerektirebilir. Öğrenme yörüngesinin doğası gereği sürekli geliştirilebilir nitelikte olması, bu anlamda öğretim sürecine dinamiklik katmakta, öğrencilerin gelişim düzeylerine göre ders tasarımının özelleştirilmesine katkı sağlamaktadır. Öğretmenlerin geometrik inşa çalışmaları sırasında öğrencilerin öğrenme sürecini önceden tasarlayarak, yaşanabilecek olumsuz durumları göz önünde bulundurarak ara etkinlikler hazırlaması ve ihtiyaç halinde öğretime sunması gerektiği düşünülmektedir. Öğrenme yörüngesinin buradaki kritik rolü bir kez daha göze çarpmaktadır.

Araştırma sonuçlarına bakıldığında 8. sınıf düzeyinde geometrik inşa çalışmalarında öğrencilerin çoğunluğunun doğal muhakeme davranışları sergilediği, teorik muhakeme sürecine geçemedikleri görülmüştür. Bu sonuç öğrencilerin ortaokul düzeyinde geometrik inşa çalışmalarıyla tanışmalarının doğal muhakeme süreçlerini geliştireceğini göstermektedir. Çocukların erken yaşta varsayımda bulunma, günlük dilde de olsa argüman geliştirme, çıkarımda bulunma gibi çabalara girmeleri üst düzey düşünme süreçlerinin gelişiminde değerli girişimlerdir.

6. 2. İleriki Araştırmalara Yönelik Öneriler

Bu çalışmada temel geometrik kavramların inşasına yönelik öğrenme yörüngeleri tasarlanmış ve uygulanmıştır. Tasarlanan bu öğrenme yörüngeleri bir sınıfta uygulanmış ve bu sınıftaki öğrenci davranışlarına göre düzenlenmiştir. Farklı sınıflarda da uygulanarak geliştirilmesine ihtiyaç olduğu açıktır. Bunun yanında lise düzeyinde de geometrik inşa becerilerini yansıtmaya yönelik öğrenme yörüngeleri tasarlanarak daha üst düzey düşünme gerektiren inşa görevlerinde öğrencilerin bilişsel eylemlerini açığa çıkarmak gerektiği düşünülmektedir.

Ayrıca bu çalışmanın sonucunda öğrenme yörüngelerinin öğrencilerin geometrik muhakeme süreçlerini ortaya koymada etkili olduğu görülmüştür. Farklı geometri konu alanlarında da öğrencilerin geometrik muhakemelerinin gelişimini incelemek için öğrenme yörüngeleri tasarlanması önerilmektedir.

Kaynakça

Aktas, M. C. ve Mumcu, H. Y. (2019). Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Views on Geometric Constructions: Building on the Paper or Interactive Whiteboard?. *Online Submission, 6*(3), 598-611.

Alias, M. B., Black, T. R., & Gray, D. E. (2002). *Effect of instructions on spatial visualization ability in civil engineering students. International Education Journal, 3(*1), 1–12.

Altun, M. (2018). *Ortaokullarda (5, 6, 7, 8. sınıflarda) matematik öğretimi. (11. Baskı).* Aktüel.

Ameis, J. A. (2005). Spatial Thinking Tasks Can Change Students' Attitudes. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10(*6), 304-308.

Amiel, T., & Reeves, T. C. (2008). Design-based research and educational technology: Rethinking technology and the research agenda. *Journal of educational technology & society, 11*(4), 29-40.

Anderson, L.W., & Krathwohl, D. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Longman.

Arıcı, S. ve Aslan Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 179-200.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Derya.

Barab, S. A., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14. doi: 10.1207/s15327809jls1301_1

Barab, S. A.; & Kirshner, D. (2001). Guest editors' introduction: Rethinking methodology in the learning sciences. *The journal of the learning sciences, 10*(1-2), 5-15.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Drawing instruments: Theories and practices from history to didactics. In Louis, A. K., Rehmann, U., & Schneider, P. (Eds.) *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 735-746). Geronimo.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2,* (843-908).

Bindak, R. (2004). *Geometri Tutum Ölçeği Güvenirlik Geçerlik Çalışması ve Bir Uygulama* [Yayımlanmamış Doktora Tezi]. Dicle Üniversitesi, Diyarbakır.

Blanco, L. J. (2001). Errors in the teaching/learning of the basic concepts of geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 24,* (1-11).

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The journal of the learning sciences, 2*(2), 141-178.

Brown, A. L., & Campione, J. C. (1996). *Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems*. Erlbaum.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education, 17*(1), 31-48.

Can, A. (2019). *SPSS ile Bilimsel Araştırma Sürecinde Veri Analizi. (5. Baskı)*. Pegem Akademi.

Catley, K., Lehrer, R., & Reiser, B. (2004). *Tracing a prospective learning progression for developing understanding of evolution.* National Academy.

Chan, Y. C. (2013). GeoGebra as a tool to explore, conjecture, verify, justify, and prove: The case of a circle. *North American GeoGebra Journal*, *2*(1).

Cheung, L. H. (2011). *Enhancing students' ability and interest in geometry learning through geometric constructions* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. The University of Hong Kong, Hong Kong.

Chikwere, P., & Ayama, K. (2016). Teaching of geometric construction in junior high school: An intervention. *Journal of Elementary Education*, *26*(1), 139-146.

Clements, D. H., & Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Macmillan.

Clements, D. H. (2004). *Geometric and spatial thinking in early childhood education. Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education.* Erlbaum.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach (2nd ed.).* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203520574

Coad, L. (2006). Paper folding in the middle school classroom and beyond. *The Australian Mathematics Teacher, 62*(1), 6–13.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education* (pp. 68–95). Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. Educational Researcher, 32(1), 9-13.

Cobb, P., Stephan, M., Mc Clain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of The Learning Sciences, 10*(1-2), 113-163.

Cohen, D., Kouropatov, A., Ovodenko, R., Hoch, M., & Hershkovitz, S. (2017). Geometric constructions in a dynamic environment (GeoGebra): The case of in-service teachers. In Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.) *Proceedings of CERME 10* (pp.579-587*)*. DCU.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In E. Scanlon & T. O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology* (pp. 15–22). Springer.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42. doi: 10.1207/s15327809jls1301_2

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture drivenresearch design. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.*), Handbook of research design in mathematicsand science education (pp. 231–265)*. Erlbaum.

Confrey, J., Maloney, A. A (2015). Design research study of a curriculum and diagnostic assessment system for a learning trajectory on equipartitioning. *ZDM Mathematics Education 47*, 919–932. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0699-y

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., & Corley, D. (2012). *A design study of a wireless interactive diagnostic system based on a mathematics learning trajectory*. Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, Vancouver, Canada.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). *Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories*. Paper Presented at the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece.

Corcoran, T. B., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). Learning Progressions in Science: An Evidence-Based Approach to Reform. *CPRE Research Reports*. Retrieved from https://repository.upenn.edu/cpre_researchreports/53

Council, N. R. (2007). *Taking science to school: Learning and teaching science in grades K-8*. National Academies.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design. Choosing among five approaches.* Sage

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.

Çepni, S. (2014). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş.* Celepler.

Çiftçi, O. ve Tatar, E. (2014). Pergel-cetvel ve dinamik bir yazılım kullanımının başarıya etkilerinin karşılaştırılması. *Journal of Computer Education Research, 2*(4), 111-133.

Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. B. (2011). Learning Trajectories in Mathematics: A Foundation for Standards, Curriculum, Assessment, and Instruction. *CPRE Research Reports.*

De Villiers, M. D. (2003). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Key Curriculum.

Dedeoğlu, N. Ç. (2016). Geometrik paradigmalar. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (ss. 291-305). Pegem Akademi.

Delice, A. ve Taşova, H. (2011). Bireysel ve Grup Çalışmasının Modelleme Etkinliklerindeki Sürece ve Performansa Etkisi. *Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, *34*(34), 71-97.

Deniz, Ö. ve Kabael, T. (2021). Altıncı sınıf öğrencilerinin temel geometrik oluşumları gerçekleştirmelerine yönelik tasarlanan bir öğrenme yörüngesinde bilişsel süreçlerinin incelenmesi. *Eğitim ve Bilim*, *46*(206), 47-90.

Denscombe, M. (1998). *The good research guide. Buckingham*. Open University.

Design-Based Research Collective [DBRC]. (2003). Designbased research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5–8.

Dingman, S., Teuscher, D., Newton, J. A., & Kasmer, L. (2013). Common mathematics standards in the United States: A comparison of K–8 state and Common Core Standards. *The Elementary School Journal, 113*(4), 541-564.

Donovan, J. L. (2019). *An Examination Of Preservice Teachers' Use Of Learning Trajectories To Guide Instruction* [Doctoral dissertation]. Wayne State University, Michigan.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In Furinhetti, F. (Ed.) *Proceedings 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1),* (pp. 33-48). Istituto di Matematica, Università di Genova.

Duatepe, A. (2000). *An investigation on the relationship between Van Hiele geometric level of thinking and demographic variables for preservice elementary school teachers* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Duatepe Paksu, A. (2016). Kâğıt katlama yöntemiyle dörtgenlerin incelenmesi. *Journal of Inquiry Based Activities, 6*(2), 80-88.

Duatepe Paksu, A. ve Bayram, G. (2019). Altıncı sınıf öğrencilerinin paralel ve dik doğru/doğru parçalarını belirleme ve çizme durumları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 39*(1), 115-145.

Duncan, R. G., & Hmelo-Silver, C. E. (2009). Learning progressions: Aligning curriculum, instruction, and assessment. *Journal of the National Association for Research in Science Teaching, 46*(6), 606-609.

Duval R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp.37-51). Kluwer Academic.

Duval, R. (1995), Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), T*heorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp.137-162). Sense.

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 105-121. doi: 10.1207/S15327809JLS1101_4

Erdoğan, E. Ö. ve Dur, Z. (2014). Preservice mathematics teachers' personal figural concepts and classifications about quadrilaterals. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(6), 107-133. doi:10.14221/ajte.2014v39n6.1

Erduran, A. ve Yeşildere, S. (2010). The use of a compass and straightedge to construct geometric structures. *Elementary Education Online, 9*(1), 331-345.

Fer, S. (2009). *Öğretim tasarımı*. Anı.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20*(10), 1193-1211.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*, 60-72.

Fujita, T., & Jones, K. (2003). The place of experimental tasks in geometry teaching. *Research in Mathematics Education, 5*(1&2), 57-62.

Fujita, T., Jones, K., & Kunimune, S. (2010). Students' geometrical constructions and proving activities: A case of cognitive unity?. In Pinto, Márcia M. F., & Kawasaki, T. F. (Eds.) *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education vol. 3* (pp. 9-16). Genova.

Fujita, T., Kunimune, S., & Jones, K. (2014). The value of geometrical constructions: Discovering, reasoning and proving in geometry. In Oesterle, S., Nicol, C., L., P., & Allan, D. (Eds.*). Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education. vol. 6,* (pp. 75). Genova.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 3,* 180-196.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2007). Collecting research data with questionnaires and interviews. *Educational Research: An İntroduction, 12*(10), 227-261.

Girotto, V. (2016). Collective creativity through a micro-tasks crowdsourcing approach. In Cosley, D., Forte, A., Ciolfi, L., & McDonald, D. (Eds.) *Proceedings of the 19th ACM Conference on Computer Supported Cooperative Work and Social Computing Companion* (pp. 143-146). ACM.

Glesne, C. (2013). *Introduction to qualitative research. (Çev. Ersoy, A. ve Yalçınoğlu, P.)*. Anı.

Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. PNA. *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1*(2), 79-98.

González, G. (2013). A geometry teacher's use of a metaphor in relation to a prototypical image to help students remember a set of theorems. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 397-414.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.

Gür, H. ve Kobak Demir, M. (2017). Pergel-cetvel kullanarak temel geometrik çizimlerin öğretmen adaylarının geometrik düşünme düzeyleri. *Eğitimde Kuram ve Uygulama, 13*(1), 88-110.

Gürbüz, M. Ç. (2021). *Ortaokul öğrencilerinin cebirsel kavramları soyutlama süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Güven, B. ve Karpuz, Y. (2016). Geometrik muhakeme: Bilişsel perspektifler. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (ss. 245-263). Pegem Akademi.

Güven, Y. (2006). *Farklı geometrik çizim yöntemleri kullanımının öğrencilerin başarı, tutum ve van Hiele geometri anlama düzeylerine etkisi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Güzeller, G. (2018). *5 ve 6. sınıf öğrencilerinin şekilsel kavram teorisi çerçevesinde temel geometrik kavramları anlamlandırmasının incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Hartshorne, R. (2013). *Geometry: Euclid and beyond.* Springer.

Hershkowitz, R. (1998). Epilogue: Organization and freedom in geometry learning and teaching. In Lehrer, R., & Chazan, D. (Eds.) *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.* Routledge.

Hızarcı, S., Ada, Ş. ve Elmas, S. (2006). Geometride Temel Kavramların Öğretilmesi ve Öğrenilmesindeki Hatalar. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, (13), 337-342.

Hodara, M. (2011). Improving pedagogy in the developmental mathematics classroom. *CCRC Brief, 51*, 1–4.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

Horzum, T. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının dörtgenler hakkındaki anlamalarının kavram haritası aracılığıyla incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 9*(1), 1–30. doi:10.16949/turkbilmat.333678

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In Mariotti, M. A. (Ed.) *Proceedings of CERME 3*.(pp. 1-9). UP.

Hoyles, C., & Noss, R. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 18*(4), 581-595.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

Janičić, P. (2006). GCLC—A tool for constructive euclidean geometry and more than that. In Iglesias, A., & Takayama, N. (Eds.) *Mathematical Software—ICMS 2006* (pp. 58-73). Springer. doi:10.1007/11832225_6

Janičić, P. (2010). Geometry constructions language. *Journal of Automated Reasoning, 44*(1), 3-24.

Johnson, R. B., & Christensen, L. B. (2004). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches.* Allyn and Bacon.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). Developing thinking in geometry. Sage.

Jones, K. (1998). Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18*(1-2), 29-34.

Jones, K. (2002). Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom. *MicroMath, 18*(3), 18-20.

Karakoca, A. G. (2020). *Ortaokul Öğrencilerinin Orantısal Akıl Yürütme Becerilerinin Gelişiminin Varsayıma Dayalı Öğrenme Rotası Kapsamında İncelenmesi* [Yayınlanmamış Doktora Tezi]. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Karakuş, F. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik inşa etkinliklerine yönelik görüşleri. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi, 7*(4), 408-435.

Karpuz, Y. (2018). *Duval'in bilişsel modeline uygun tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* [Yayımlanmamış Doktora Tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Karpuz, Y. ve Atasoy, E. (2019). Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension. *European Journal of Educational Research, 8*(1), 285-300. doi: 10.12973/eu-jer.8.1.285

Karpuz, Y., Koparan, T. ve Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi kullanımı. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 5*(2), 108–118.

Kelly, A. E. (2003). The role of design in educational research: Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4. doi:10.3102/0013189X032001003

Kızıltoprak, A. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin geometrik muhakemelerinin gelişimi* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Kondratieva, M. (2013). Geometrical constructions in dynamic and interactive mathematics learning environment. *Online Submission, 3*(3), 50-63.

Kozaklı Ülger, T. ve Tapan Broutin, M. S. (2017). Pre-service mathematics teachers' understanding of quadrilaterals and the internal relationships between quadrilaterals: The case of parallelograms. *European Journal of Educational Research, 6*(3), 331–345. doi:10.12973/eu-jer.6.3.331

Köse, N. Y., Tanışlı, D., Erdoğan, E. Ö. ve Ada, T. Y. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarinin teknoloji destekli geometri dersindeki geometrik oluşum edinimleri. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 8*(3), 102-121.

Kunimune, S. (2000). A Change in Understanding with Demonstration in Geometry, *Journal of Japan Society of Mathematics Education, 82*(3), 66-76.

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2010). Strengthening students' understanding of 'proof'in geometry in lower secondary school. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne ve F. Arzarello (Eds.) *Proceedings of CERME 6* (pp. 756-765). INRP.

Kunkel, P. (2003). *What is Construction?.* Retrieved from http://whistleralley.com/construction/whatis.htm

Kuzle, A. (2013). Constructions with various tools in two geometry didactics courses in the United States and Germany. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the eighth congress of the European society of research in mathematics education* (s. 6-10). Antalya, Turkey.

Kuzle, A., Glasnović Gracin, D., & Klunter, M. (2018). Primary grade students' fundamental ideas of geometry revealed via drawings. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3),* (pp. 283-290). PME.

Kuzu, A., Çankaya, S. ve Mısırlı, Z. A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Journal of Educational Sciences International (AJESI), 1*(1), 19-35.

Kynigos, C., & Argyris, M. (2004). Teacher beliefs and practices formed during an innovation with computer-based exploratory mathematics in the classroom. *Teachers and teaching, 10*(3), 247-273.

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 Year-Olds' Meanings around Intrinsic Curves with a Medium for Symbolic Expression and Dynamic Manipulation. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 165-172.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O., Valero, P. (Eds) *Meaning in Mathematics Education* (pp. 159-179). Springer.

Lai, G., Calandra, B., & Ma, Y. (2009). Leveraging the Potential of Design-Based Research to Improve Reflective Thinking in an Educational Assessment System. *International Journal of Technology in Teaching & Learning, 5*(2), 119-137.

Lamberg, T. D. (2001). *Quotient construct, inscriptional practices and instructional design* [Unpublished doctoral dissertation]. Arizona State University.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge University.

Lehrer, R., & Romberg, T. (1998). Springboards to geometry. *New ICMI Studies Series 5*, 62-70.

Lim, S. K. (1997). Compass constructions: A vehicle for promoting relational understanding and higher order thinking skills. *The Mathematics Educator, 2*(2), 138-147.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Sage.

Llinares, S., & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 234-250.

Lloyd, G., Beckmann, S., Zbiek, R. M., & Cooney, T. (2010). *Developing Essential Understanding of Functions for Teaching Mathematics in Grades 9-12.* National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, Y., & Harmon, S. W. (2009). A case study of design-based research for creating a vision prototype of a technology-based innovative learning environment. *Journal of Interactive Learning Research, 20*(1), 75-93.

Maloney, A., & Confrey, J. (2010). *The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory*. ISLS.

Mammana, C., & Villani, V. (1998). 6. The Evolution of Geometry Education Since 1900. In Mammana, C., & Villani, V. (Eds) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp 193-234). Kluwer Academic.

Mariotti, F. (2007). Learning to share knowledge in the Italian motorsport industry. *Knowledge and Process Management*, *14*(2), 81-94.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 257–281.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219–248. doi:10.1023/A:1002985109323

Martin, G. E. (2012). *Geometric constructions*. Springer.

Maxwell, J. A. (2006). Literature reviews of, and for, educational research: A commentary on Boote and Beile's "Scholars before Researchers". *Educational researcher, 35*(9), 28-31.

McMillan J., & Schumacher, S. (2006) *Research in Education: Evidence-Based Inquiry (6th edn*). Pearson.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education. Revised and Expanded from" Case Study Research in Education."*. Jossey-Bass.

Merriam, S. B. (2009). Qualitative case study research. *Qualitative research: A guide to design and implementation,* 39-54.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

Messick, S. (1992). The interplay of evidence and consequences in the validation of performance assessments. *Educational Researcher, 23*(2), 13-23. doi: 10.3102/0013189X023002013

Michael, P. (2013). *Geometrical figure apprehension: cognitive processes and structure* [Unpublished doctoral dissertation]. The University of Cyprus.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı.* MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *İlkokul ve ortaokul matematik dersi öğretim programı.* MEB.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2*(4), 435-440. Retrieved from http://iji.cgpublisher.com/product/pub.88/prod.308

Moss, D. L. (2014). *An investigation of student learning in beginning algebra using classroom teaching experiment methodology and design research* [Unpublished doctoral dissertation]. University of Nevada, Reno.

Mukaddes, İ., Ulusoy, F. ve Çakıroğlu, E. (16-18 Mayıs 2015). *Ortaokul Öğrencilerinin Üçgende Yükseklik ile ilgili Sahip Oldukları Kavram İmajları.* Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu'nda sunuldu, Ankara.

Mutluoğlu, A. ve Erdoğan, A. (2020). 6. Sınıf Öğrencilerinin Dörtgenler Hakkındaki Geometrik Muhakeme Süreçleri. *OPUS International Journal of Society Researches, 16*(27), 236-265. DOI: 10.26466/opus.673833

Napitupulu, B. (2001). *An exploration of students' understanding and van hiele levels of thinking on geometric constructions* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Simon Fraser University, Indonesia.

National Council for School Mathematics, (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. NCTM.

National Council for School Mathematics, (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. NCTM

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* NCTM.

National Governors Association Center (NGA), (2010). Common core state standards for mathematics. http://www.corestandards.org/thestandards/mathematics adresinden 15. 06. 2017 tarihinde erişilmiştir.

National Governors Association Center. NGA. (2010). Standards for Mathematical Practice.

National Mathematics Advisory Panel (NMP), (2008). Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel, Retrieved from http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-factsheet.html

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). The visibility of meanings: Modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(1), 3-31.

Olivera, Đ., & Zeljić, M. (2017). Theoretical frameworks of development geometrical thinking according to Van Hiele, Fischbein and Houdement-Kuzniak. *TEME, XLI*(3), 623. doi:10.22190/TEME1703623D

Olkun, S. (2003). Making Connections: Improving Spatial Abilities with Engineering Drawing Activities. International Journal of Mathematics Teaching and Learning [Online]: http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijabout.htm ‘den alınmıştır.

Olson, A. T. (1975). *Mathematics Through Paper Folding*. NCTM.

Öçal, M. F. ve Şimşek, M. (2017). Pergel-çizgeç ve Geogebra inşaları üzerine: Öğretmenlerin geometrik inşa süreçleri ve görüşleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 37*(1), 219-262.

Özkan, M. ve Bal, A. P. (2017). Analysis of the misconceptions of 7th grade students on polygons and specific quadrilaterals. *Eurasian Journal of Educational Research, 16*(67), 161-182.

Öztürk T. ve Güven B. (2016). Evaluating students' beliefs in problem solving process: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education, 12*(3), 411-429.

Pandiscio, E. A. (2002). Exploring the link between preservice teachers' conception of proof and the use of dynamic geometry software. *School Science and Mathematics, 102*(5), 216-221.

Parker, J. (2011, August). *A design-based research approach for creating effective online higher education courses.* Paper presented at the 26th Annual Research Forum (Western Australian Institute for Educational Research Inc) Educational Possibilities, Fremantle, Western Australia

Patadia, H. J. (2016). *A strategy for mastery learning in fifth grade geometry* [Unpublished doctoral dissertation]. The Maharaja Sayajirao University of Baroda.

Patton, M. Q. (2014). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice.* Sage.

Payne, G., & Payne, J. (2004). *Key Concepts in Social Research*. Sage.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University.

Posamentier, A. S. (2000). *Making geometry come alive: Student activities and teacher notes*. Corwin.

Pratt, D., & Ainley, J. (1997). The construction of meanings for geometric construction: Two contrasting cases. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(3), 293-322.

Pratt, D., & Davison, I. (2003). Interactive Whiteboards and the Construction of Definitions for the Kite. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 31-38.

Reigeluth, C. M. (1999). What is instructional-design theory and how is it changing. *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory*, *2*, 5-29. Retrieved from https://repository.upenn.edu/cpre_researchreports/60

Scott, D., & Morrison, M. (2006). *Key ideas in educational research.* A&C Black.

Sherin, M. G. (2002). When teaching becomes learning. *Cognition and instruction*, *20*(2), 119-150.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. (2014). Hypothetical learning trajectories in mathematics education. In Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 272-275).Springer. doi:10.1007/978-94-007-4978-8_72

Simpson, A., & Tall, D. (1998), Computers and the Link between Intuition and Formalism. In Goodell, G. (Ed.) *Proceedings of the Tenth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 417–421). Addison-Wesley Longman..

Smart, J. R. (1998). *Modern geometries (5. baskı.)*. Brooks/Cole.

Smith, J. P. (2010). *Variability is the rule: A companion analysis of K-8 state mathematics standards.* IAP.

Stake, R. R. (2005). Case studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research (Third edition)*. Sage.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Erlbaum.

Stupel, M. & Ben-Chaim, D. (2013). A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezium: Geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal, 27*(2), 6-24.

Sunzuma, G., & Maharaj, A. (2019). Teacher-related challenges affecting the Integration of ethnomathematics approaches into the teaching of geometry. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(9), em1744. https://doi.org/10.29333/ejmste/108457

Şengel, E. (2013). Tasarım ve Geliştirme Araştırmaları. Çağıltay, K., Göktaş, Y. (Editörler), *Öğretim Teknolojilerinin Temelleri Teoriler Araştırmalar Eğilimler* (ss. 327- 340). Pegem Akademi.

Şengün, K. Ç. ve Yılmaz, S. (2021). Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Üçgende Açıortay ve Kenarortay Belirleme Durumlarının İncelenmesi. *International Journal of Active Learning, 6*(1), 81-97.

Şimşek, A. (2011). *Öğretim Tasarımı.* Nobel.

Takele, M. (2020). Implementation of active learning methods in mathematics classes of Woliso town primary schools, Ethiopia. *International Journal of Science and Technology Education Research, 11*(1), 1–13.

Tam, H. P., Chen, Y. L., & Tso, T. Y. (2012). A regional survey of Taiwan students' performance in geometric construction. In Tso, T. Y. (Ed.) *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 4,* (pp. 131-38). PME.

Tanışlı, D., Aydın, S., Turgut, M., Köse, N. ve Çamcı, F. (2019). *Öğrenme Yörüngeleri Yoluyla Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Profesyonel Gelişimlerinin Web Tabanlı Sistemle Desteklenmesi.* TÜBİTAK.

Tapan, M. S. & Arslan, C. (2009). Preservice teachers' use of spatio-visual elements and their level of justification dealing with a geometrical construction problem. *US-China Education Review, 6*(3), 54- 60.

Tekin, A. T. (2007). *Dokuzuncu ve on birinci sınıf öğrencilerinin zihinde döndürme ve uzamsal görselleştirme yeteneklerinin karşılaştırmalı olarak* incelenmesi [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Ankara Üniversitesi, Ankara.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2008). The coordination of cognitive processes in solving geometric problems requiring formal proof. In Figueras, O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. Vol. 4,* (pp. 321-328). Cinvestav-UMSNH.

Tosun, N. (2019). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

Türnüklü, E., Gündoğdu Alayli, F. ve Akkaş, E. N. (2013). Investigation of prospective primary mathematics teachers' perceptions and images for quadrilaterals. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri, 13*(2), 1225–1232.

Tzur, R., & Simon, M. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2(*2), 287-304.

Ubuz, B. (2017). Dörtgenler Arasındaki İlişkiler: 7. Sınıf Öğrencilerinin Kavram İmajları. *Yaşadıkça Eğitim Dergisi, 31*(1), 55-68.

Ubuz, B. ve Üstün, I. (2004). Figural and conceptual aspects in defining and identifying polygons. *Eurasian Journal of Educational Research, 16*, 15-26.

Ulusoy, F. (2014). Ortaokul matematiğinde paralellik ve diklik kavramları: öğrencilerin sahip olduğu imgeler ve yaşadığı yanılgılar. P. Fettahlıoğlu (Ed*.), XI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi (XI. UFBMEK) bildiri özetleri kitapçığı* içinde (ss. 1121-1123). Adana: Online.

Ulusoy, F. (2019). Matematik öğretmeni adaylarının pergel-cetvel ve dinamik geometri yazılımı kullanarak yaptıkları geometrik inşalar. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(2), 336-372.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. ERIC.

Uygun, T. (2016). *Developing mathematical practices in a social context: a hypothetical learning trajectory to support preservıce middle school mathematics teachers' learning of triangles* [Yayımlanmamış doktora tezi]. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Uygun, T. ve Akyuz, D. (2017). Preservıce Mıddle School Mathematıcs Teachers'conceptıon Of Auxılıary Elements Of Triangles. *The Eurasia Proceedings of Educational and Social Sciences, 6*, 68-72.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S.; & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics teaching developmentally (7th ed.).* Pearson.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic.

Walcott, C., Mohr, D., & Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior, 28*(1), 30-40.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development, 53*(4), 5- 23.

Waring, S. (2000). *Can you Prove it?-Developing Concepts of Proof in Primary and Secondary Schools*. The Mathematical Association.

Weber, E., Walkington, C., & McGalliard, W. (2015). Expanding notions of "Learning Trajectories" in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(4), 253-272.

Wertsch, J.V., & Stone, C. A. (1985). The Concept of Internalization in Vygotsky's Account of the Genesis of Higher Mental functions. In Wertsch, J.V. (Ed.), *Culture, Communication and Cognition: Vygotskian Perspectives* (pp. 162-366*)* Cambridge University.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(2), 149-175.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Myers, M. (2015). Teachers' Uses of a Learning Trajectory in Student-Centered Instructional Practices. *Journal of Teacher Education,66*(3), 227–244.https://doi.org/10.1177/0022487115574104

Wong, K. L. (2005). Geometric Construction: From Traditional Construction Methods to Alternative Options in Modern Classrooms. *Welcoming the New Century: Re-examining Mathematics Education in Hong Kong*. Hong Kong Association for Mathematics Education.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (11. baskı)*. Seçkin.

Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerindeki Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi* [Yayımlanmamış yüksek lisans tezi]. Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.

Yıldız, A. (2016). The geometric construction abilities of gifted students in solving real-world problems: A case from Turkey. *Malaysian Online Journal of Educational Technology, 4*(4), 53-67.

Yıldız, A. ve Baltacı, S. (2017). Bilim Sanat Merkezi Matematik Öğretmenlerinin Kurdukları Geometrik İnşa Problemlerine Bilişsel Seviye Düzeyleri Açısından Ders İmecesi Çalışmalarının Etkisi. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*,*14*(1), 1481-1516.

Yin, R. K. (2003). Designing case studies. *Qualitative research methods, 5*(14), 359-386.

Yolcu, B. ve Kurtuluş, A. (2010). 6. sınıf öğrencilerinin uzamsal görselleştirme yeteneklerini geliştirme üzerine bir çalışma. *İlköğretim Online, 9*(1), 256-274.

Zembat, İ. Ö. (2016). Piaget'e göre soyutlama ve çeşitleri. E. Bingölbali, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Editörler), *Matematik Eğitiminde Teoriler içinde* (ss. 447- 458). Pegem Akademi.

EKLER

Ek 1. İzin Yazısı

T.C.
BURSA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 86896125-605.01-E.17614590
Konu : Tuba GÜRBÜZ'ün Araştırma İzni

03.12.2020

MÜDÜRLÜK MAKAMINA

İlgi : Milli Eğitim Bakanlığı'nın Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri Yönergesi konulu 21/01/2020 tarih ve 1563891 (2020/2) sayılı Genelgesi.

Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Doktora öğrencisi Tuba GÜRBÜZ'ün *"Ortaokul Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi"* konulu tez çalışması, Bursa Uludağ Üniversitesi Rektörlüğü Genel Sekterliğinin 20/10/2020 tarih ve 32233 sayılı yazıları ile bildirilmektedir.

Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Doktora öğrencisi Tuba GÜRBÜZ'ün *"Ortaokul Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi"* konulu araştırmasını Nilüfer ilçesi Özlüce Aziz Sancar Ortaokulu öğrencilerine uygulama yapma isteği ilimizde oluşturulan "Araştırma Değerlendirme Komisyonu" tarafından incelenerek değerlendirilmiştir. Araştırma ile ilgili çalışmanın **okul/kurumlardaki eğitim öğretim faaliyetleri aksatılmadan, araştırma formlarının aslı okul müdürlüklerince görülerek ve gönüllülük esası ile** okul müdürlüklerinin gözetim ve sorumluluğunda ilgi Genelge çerçevesinde uygulanması ayrıca **araştırma sonuçlarının Müdürlüğümüz ile paylaşılması** komisyonumuzca uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Ahmet UZUN
İl Milli Eğitim Şube Müdürü

OLUR
03.12.2020

Sabahattin DÜLGER
Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

Adres : Hocahasan Mh. İlkbahar Cad No 38
(Yeni Hükümet Konağı A Blok) 16050/Osmangazi/BURSA
Telefon No (0224) 445 16 00 Fax 445 18 10
E-posta: arge16@meb.gov.tr İnternet Adresi: http://bursa.meb.gov.tr

Bilgi İçin : Fatih ALTIN
AR-GE Bilgisayar İşletmeni
(0224) 225 25 78

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 271a-f463-391d-9b06-5961 kodu ile teyit edilebilir

Ek 2. Veli Onam Formu

Sayın Veli;

Öğrencinizin katılacağı bu çalışma, "Ortaokul Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi" adıyla, 2018-2019 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Ortaokul öğrencilerinin Geometrik Muhakeme sürecinde bilişsel perspektiften ele alınarak onların gelişiminin incelenmesidir.

Araştırma Uygulaması: Anket/Görüşme / Gözlem şeklindedir.

Araştırma TC Milli Eğitim Bakanlığı'nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı tamamen sizin isteğinize bağlıdır, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı: Matematik Öğretmeni Tuba Gürbüz

İletişim bilgileri: tubadag25@gmail.com

Ek 3. GİGF Sınıf İçi Gözlem Formu

Okul : ……………………………… Gözlemci : …………………………………

Sınıfı : ……………………………… Tarih : …………………………………

Konu : ……………………………… Öğrenci Sayısı : …………………………………

Bu değerlendirme formundaki maddelerin karşısında bulunan kısaltmaların anlamı:

(E) = Eksiği var (1p) (K) = Kabul edilebilir (2p) (İ) = İyi (3p) Uygun olan seçeneği (+) ile işaretleyiniz.

		E	K	İ	Açıklamalar
1.1. HAZIRLIK					
1.1.1	Soruların ön bilgileri test etmesi				
1.1.2	Hazırlık sorularının konuya ilişkin farkındalık oluşturması				
1.2. ÖĞRENCİ					
1.2.1	Öğrencilerin problem çözmelerini harekete geçirme				
1.2.2	Bağlamı anlama, bağlantılar kurma ve bağlantıları açıklama				
1.2.3	Etkinliğin öğrencilerin bilişsel seviyesine uygunluğu				
1.2.4	Konu ile matematiğin diğer konularını ilişkilendirebilme				
1.2.5	Konunun gerektirdiği sözel ve görsel dili kullanabilme				
2.1 ÖĞRETME-ÖĞRENME SÜRECİ					
2.1.1	Konuyu önceki ve sonraki derslerle ilişkilendirebilme				
2.1.2	Kazanımlara uygun yöntem ve tekniklerin kullanımı				
2.1.3	Öğrencilerin etkin katılımını sağlama				
2.1.4	Derse ilgi ve dikkati çekebilme				
2.1.5	Öğrencilerin çoklu temsil kullanımına olanak sağlanması				
2.2 ÖĞRENME YOL YÖRÜNGESİ					
	KULLANIŞLILIK				
2.2.1	Derse uygun ve ilgi çekici bir giriş yapabilme				
2.2.2.	Kazanımların öğretimi için zaman yeterli mi?				
2.2.3.	Hedefe ulaşmayı sağlamada nitelik yeterli mi?				
	GERÇEKLEŞME				
2.2.4	İyi bir öğrenme ortamı sağlayabilme				
2.2.5	Derse ilginin sürekliliğini sağlayabilme				
2.2.6	Kavram yanılgı ve hatalarına karşı uygun önlemler alabilme				
2.4 GÖZLEMCİ NOTLARI					

Ek 4. Ders Gözlem Formu (Geometrik İnşa Gözlem Formu GİGF)

DERS GÖZLEM FORMU

Gözlem Yapanın Adı Soyadı:
Gözlem Yapılan Okul Adı:
Sınıf Düzeyi / Mevcut:
Gözlem Tarihi:
Gözlem Süresi:

Bu gözlem formu 2018-2019 öğretim yılında sekizinci sınıf düzeyinde temel geometrik inşa etkinlikleri öğretimi süresince sınıfta gözlem yapabilmek amacıyla oluşturulmuştur.

Konu	Kavram	Etkinlik	Öğrenme Alanı	Öğrenme Alanı Alt Maddeleri	Gerçekleşme Durumu
			Bilgi	Olgusal	
				İşlemsel	
				Kavramsal	
				Üstbilişsel	
			Muhakeme Türü	Doğal Muhakeme	
				Teorik Muhakeme	
				Muhakeme YOK	
			Duval'in Bilişsel Modeli	Sözel Algı	
				Görsel Algı	
				Sıralı Algı	
				İşlevsel Algı	
			Duyuşsal Durum	Tutum	
				Motivasyon	
				Derse Katılım	
				Derse ilgi duyma	
			Bilişsel Süreç Döngüsü		

Ek 5. Görüşme Soruları

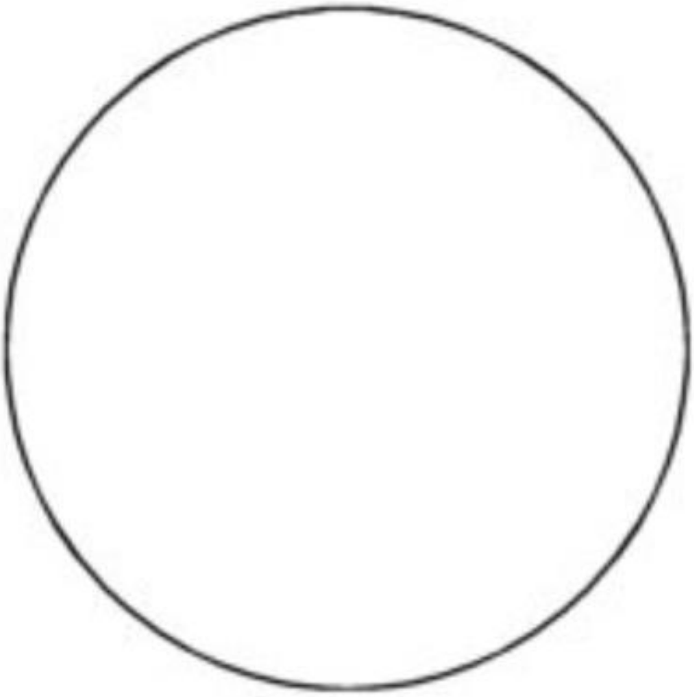
GÖRÜŞME SORULARI

Yönerge: Tüm işlemlerinizi pergel ve cetvel ile gerçekleştiriniz. Ayrıca tüm çözüm adımlarınızı detaylı olarak yazınız.

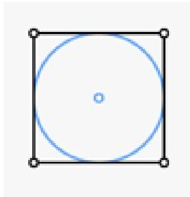
1) Aşağıda ölçüleri verilen açıları açıölçer kullanmadan pergel ve çizgeç yardımıyla inşa ediniz. İnşa adımlarını açıklayınız.

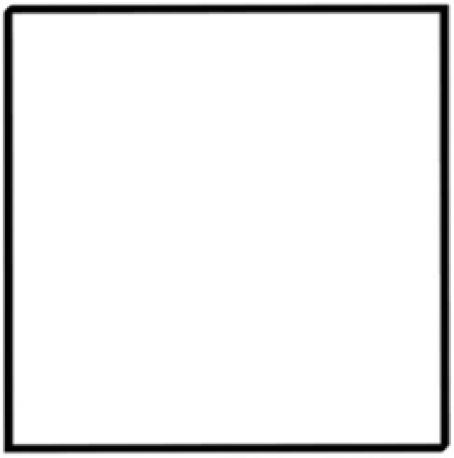
30^{o}, 45^{o}, 120^{o}, 15^{o}

2) Aşağıdaki çemberin merkezini pergel ve çizgeç yardımıyla bulunuz. İnşa adımlarını açıklayınız.



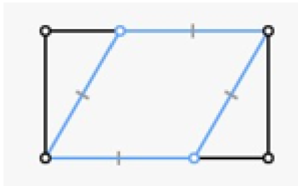
3) Aşağıdaki karenin içine taslaktaki gibi çizilebilecek en büyük çemberi pergel ve çizgeç yardımıyla çiziniz. İnşa adımlarını açıklayınız.



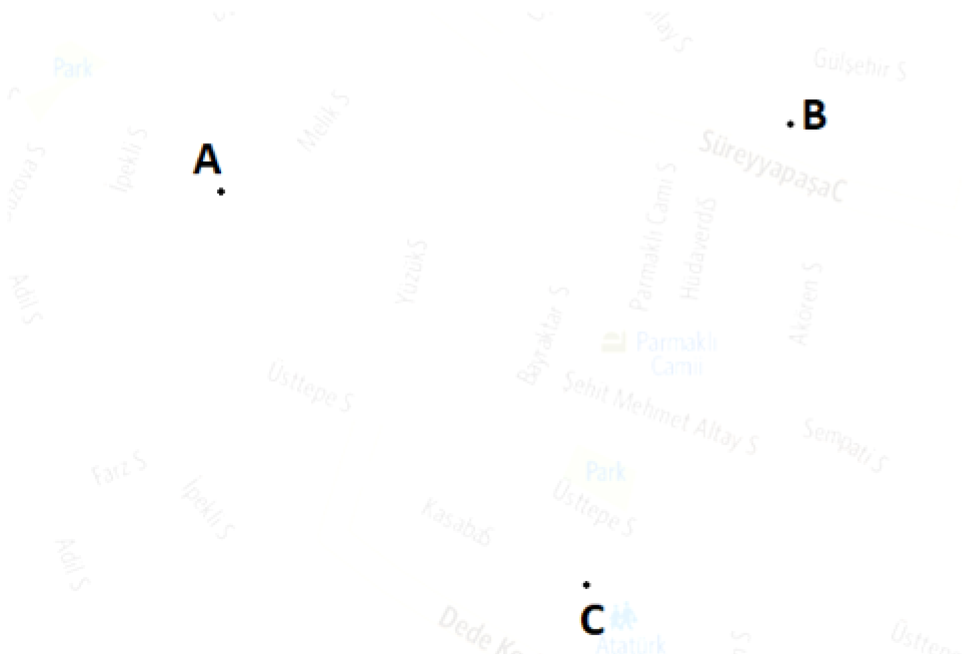


4) Herhangi bir üçgen çizin ve bu üçgenin içine çizilebilecek en büyük kareyi inşa ediniz. Çiziminizi pergel ve çizgeç yardımıyla gerçekleştiriniz. İnşa adımlarını açıklayınız.

5) Aşağıdaki dikdörtgenin taslaktaki gibi içine bir köşegenleri ortak olacak şekilde bir eş kenar dörtgen inşa ediniz. İnşa adımlarını açıklayınız.



6) Can ailesiyle birlikte yeni bir şehre taşındılar. Bir haritada Can'ın annesinin işyeri A, babasının işyeri B, ve Can'ın okulunun konumu ise C noktasıyla gösterilmiştir. Can ve ailesi haritada A, B ve C noktalarına eşit uzaklıkta olan noktayı belirleyip bu noktaya en yakın evde yaşamak istiyorlar. Bu noktayı bulup onlara yardım eder misin?



Bulduğun noktanın geometrik yeri hakkında nasıl bir yorum yapabilirsin? Bunu bize matematiksel olarak ifade et!

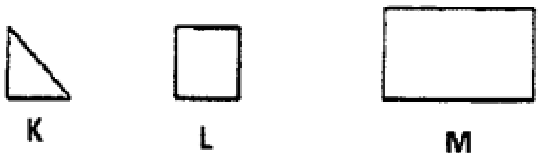
Ek 6. Van Hiele Geometrik Düşünme Testi

VAN HİELE GEOMETRİ TESTİ

Bu ölçek sizin geometrik düşünme düzeylerinizi belirlemeye yardımcı olacaktır. Her sorunun bir doğru cevabı vardır. Tek bir sık seçiniz ve seçimizi değiştirecekseniz ilk seçimizi siliniz. Toplam süre 35 dk dır.

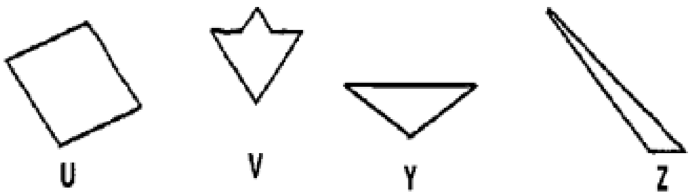
1. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?

a) Yalnız K
b) Yalnız L
c) Yalnız M
d) L ve M
e) Hepsi karedir.



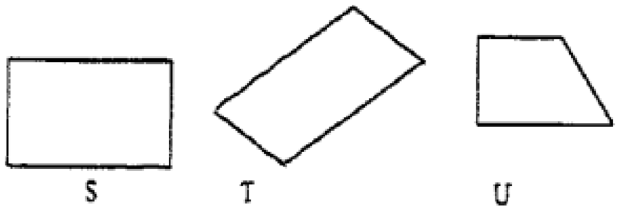
2. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri üçgendir?

a) Hiçbiri üçgen değildir.
b) Yalnız V
c) Yalnız Y
d) Y ve Z
e) V ve Y



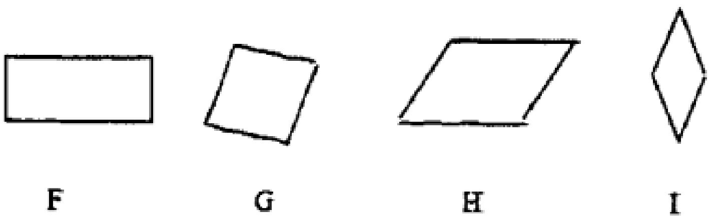
3. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri dikdörtgendir?

a) Yalnız S
b) Yalnız T
c) S ve T
d) S ve U
e) Hepsi dikdörtgendir.



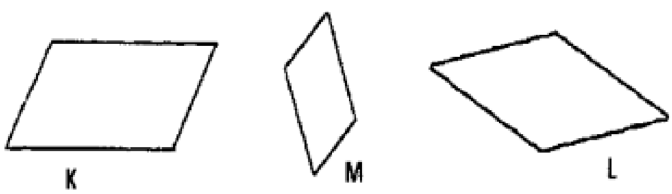
4. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri karedir?

a) Hiçbiri kare değildir.
b) Yalnız G
c) F ve G
d) G ve I
e) Hepsi karedir.

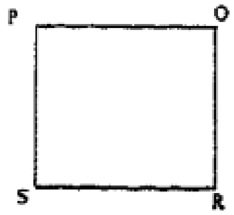


5. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri paralel kenardır?

a) Yalnız K
b) Yalnız L
c) K ve M
d) Hiçbiri paralel kenar değildir.
e) Hepsi paralel kenardır.

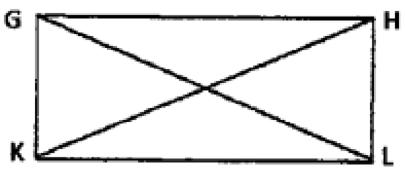


6. PORS bir karedir.
   Aşağıdakilerden hangi özellik her kare için doğrudur?



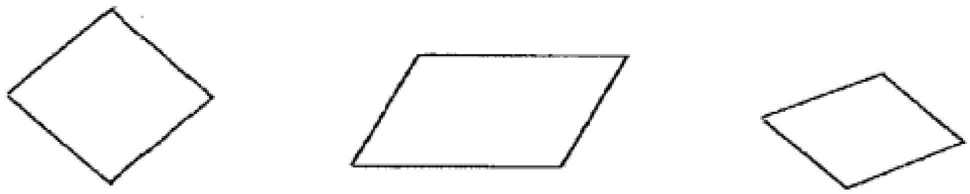
   a) [PR] ve [RS] eşit uzunluktadır.
   b) [OS] ve [PR] diktir.
   c) [PS] ve [OR] diktir.
   d) [PS] ve [OS] eşit uzunluktadır.
   e) O açısı R açısından daha büyüktür.

7. Bir GHLK dikdörtgeninde, [GL] ve [HK] <u>köşegendir</u>. Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>her</u> dikdörtgen için doğru <u>değildir</u>?



   a) 4 dik açısı vardır.
   b) 4 kenarı vardır.
   c) Köşegenlerinin uzunlukları eşittir.
   d) Karşılıklı kenarlarının uzunlukları eşittir.
   e) |GL|, |GH| den kısadır.

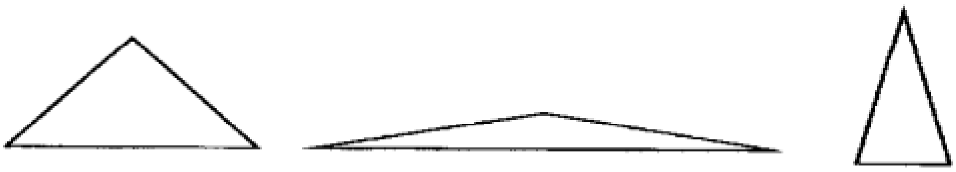
8. <u>Eşkenar dörtgen</u> tüm kenar uzunlukları eşit olan , 4 kenarlı bir şekildir. Aşağıda 3 tane eşkenar dörtgen verilmiştir.



   Aşağıdaki seçeneklerden hangisi <u>her</u> eşkenar dörtgen için doğru <u>değildir</u>?

   a) İki köşegenin uzunlukları eşittir.
   b) Her köşegen, aynı zamanda açıortaydır.
   c) Köşegenleri birbirine diktir.
   d) Karşılıklı açılarının ölçüsü eşittir.
   e) Seçeneklerin hepsi bir eşkenar dörtgen için doğrudur.

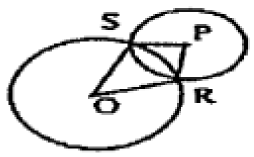
9. İkizkenar üçgen, iki kenarı eşit olan üçgendir. Aşağıda üç ikizkenar üçgen verilmiştir.

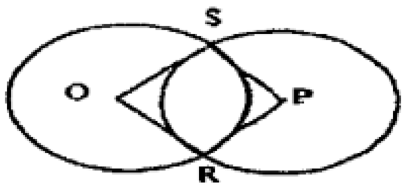


   Aşağıdakilerden hangisi <u>her</u> ikizkenar üçgen için doğrudur?

   a) Üç kenarı eşit uzunlukta olmalıdır.
   b) Bir kenarının uzunluğu, diğerinin iki katı olmalıdır.
   c) Ölçüsü eşit olan en az iki açısı olmalıdır.
   d) Üç açısının da ölçüsü eşit olmalıdır.
   e) Seçeneklerden hiçbiri her ikizkenar üçgen için doğru değildir.

10. Merkezleri P ve O olan iki çember 4 kenarları PROS şeklini oluşturmak üzere R ve S noktalarında kesişirler. Aşağıda iki örnek verilmiştir.





Aşağıdaki seçeneklerden hangisi her zaman doğru değildir?

a) PROS şeklinin iki kenarı eşit uzunlukta olacaktır.
b) PROS şeklinin en az iki açısının ölçüsü eşit olacaktır.
c) [PO] ve [RS] dik olacaktır.
d) P ve O açılarının ölçüleri eşit olacaktır.
e) [PO], [OR] den daha uzundur.

11. Önerme 1: F şekli bir dikdörtgendir.
Önerme 2: F şekli bir üçgendir.
Bu iki önermeye göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

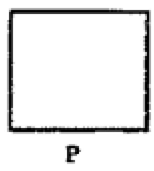
a) Eğer 1 doğruysa, 2 de doğrudur.
b) Eğer 1 yanlışsa, 2 doğrudur.
c) 1 ve 2 aynı anda doğru olamaz.
d) 1 e 2 aynı anda yanlış olamaz.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiç biri doğru değildir.

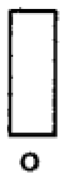
12. Önerme S: ABC üçgeninin üç kenarı eşit uzunluktadır.
Önerme T: ABC üçgeninde, B ve C açılarının ölçüleri eşittir.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

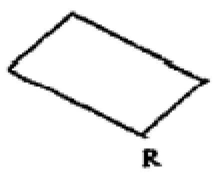
a) S ve T önermeleri ikisi de aynı anda doğru olamaz.
b) Eğer S doğruysa, T de doğrudur.
c) Eğer T doğruysa, S de doğrudur.
d) Eğer S yanlışsa, T de yanlıştır.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

13. Aşağıdaki şekillerden hangisi ya da hangileri dikdörtgen olarak adlandırılabilir?

a) Hepsi
b) Yalnız O
c) Yalnız R
d) P ve O
e) O ve R







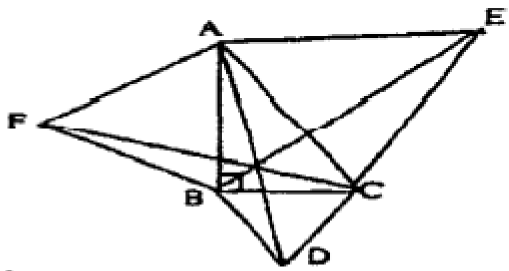
14. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) Dikdörtgenlerin tüm özellikleri, tüm kareler için geçerlidir.
b) Karelerin tüm özellikleri, tüm dikdörtgenler için de geçerlidir.
c) Dikdörtgenlerin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
d) Karelerin tüm özellikleri, tüm paralel kenarlar için geçerlidir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

15. Tüm dikdörtgenlerde olup, bazı paralel kenarlar da olmayan özellik nedir?

a) Karşılıklı kenarları eşittir.
b) Köşegenler eşittir.
c) Karşılıklı kenarlar paraleldir.
d) Karşılıklı açıları eşittir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiç biri doğru değildir.

16. Aşağıda bir ABC dik üçgeni verilmiştir. ABC üçgeninin kenarları üzerinde; ACE, ABF ve BCD eşkenar üçgenleri çizilmiştir.



Bu bilgilerden [AD], [BE] ve [CF] ortak bir noktadan geçtikleri kanıtlanabilir. Bu kanıt size neyi ifade eder?

a) Yalnızca bu üçgen için; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası olduğundan emin olabiliriz.
b) Sadece bazı dik üçgenlerde; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası vardır.
c) Herhangi bir dik üçgende; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası vardır.
d) Herhangi bir üçgende; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası vardır.
e) Herhangi bir eşkenar üçgende; [AD], [BE] ve [CF] nin ortak bir noktası vardır.

17. Aşağıda bir şeklin üç özelliği verilmiştir.
Özellik D: Köşegenleri eşit uzunluktadır.
Özellik S: Bir karedir.
Özellik R: Bir dikdörtgendir.
Bu özellikler dikkate alındığında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) D gerektirir S, o da gerektirir R.
b) D gerektirir R, o da gerektirir S.
c) S gerektirir R, o da gerektirir D.
d) R gerektirir D, o da gerektirir S.
e) R gerektirir S, o da gerektirir D.

18. Aşağıda iki önerme verilmiştir.

I. Eğer bir şekil dikdörtgense, köşegenleri birbirini ortalayarak keser.

II. Eğer bir şeklin köşegenleri birbirini ortalayarak kesiyorsa şekil dikdörtgendir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) I'in doğru olduğunu kanıtlamak için, II'nin doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir.
b) II'nin doğru olduğunu kanıtlamak için, I'in doğru olduğunu kanıtlamak yeterlidir.
c) II'nin doğru olduğunu kanıtlamak için, köşegenleri birbirini ortalayan bir dikdörtgen bulmak yeterlidir.
d) II'nin yanlış olduğunu kanıtlamak için, köşegenleri birbirini ortalayan dikdörtgen olmayan bir şekil bulmak yeterlidir.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiç biri doğru değildir.

19. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

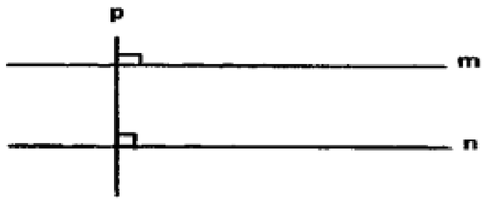
Geometride,
a) Her terim tanımlanabilir ve her doğru önermenin doğru olduğu kanıtlanabilir.
b) Her terim tanımlanabilir ama bazı önermelerin doğru olduğunu varsaymak gerekir.
c) Bazı terimler tanımsız kalmalıdır, ama bütün doğru önermelerin doğruluğu kanıtlanabilir.
d) Bazı terimler tanımsız kalmalıdır ve doğru olduğu varsayılmış bazı önermelere gerek vardır.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

20. Aşağıdaki üç ifadeyi inceleyin.

{1} Aynı doğruya dik olan iki doğru paraleldir.
{2} İki paralel doğrudan birbirine dik olan doğru, diğerine de diktir.
{3} Eğer iki doğru eş uzaklıktaysa paraleldir.

Aşağıdaki şekilde, m ve p, n ve p doğruları birbirine dik olduğu verilmiştir. Buna göre yukarıdaki cümlelerden hangisi ya da hangilerim doğrusunun n doğrusuna paralel olmasının nedeni olabilir?

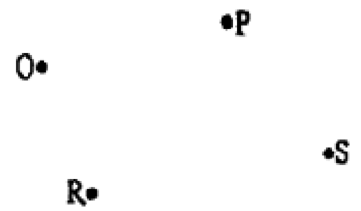
a) Yalnız {1}
b) Yalnız {2}
c) Yalnız {3}
d) {1} ya da {2}
e) {2} ya da {3}



21. Bir açıyı üçlemek demek onu üç eşit parçaya bölmek demektir. 1847 yılında P. L. Wantzel bir açının yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak <u>üçlenemeyeceğini</u> kanıtlamıştır. Bu kanıttan nasıl bir sonuca varabilirsiniz?

a) Açılar yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak <u>iki</u> eş parçaya ayrılamazlar.
b) Açılar yalnızca pergel ve <u>işaretlenmiş</u> cetvel kullanarak üçlenemezler.
c) Açılar herhangi bir çizim aracı kullanarak üçlenemezler.
d) Gelecekte, birinin yalnız pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak açıları üçlemesi mümkün olabilir.
e) Hiç kimse, açıları yalnızca pergel ve işaretlenmemiş cetvel kullanarak üçleyecek genel bir yöntem bulamayacaktır.

22. F geometrisinde, her şey alışık olduklarımızdan farklıdır. Burada sadece dört nokta ve 6 doğru vardır. Her doğru iki nokta içerir. Eğer P, O, R ve S nokta ise, {P,O}, {P,R}, {P,S}, {O,R}, {O,S} ve {R,S} doğrulardır.



Kesişme ve paralel terimlerinin F geometrisindeki kullanımı şöyledir: {P,O} ve {P,R} doğruları P'de kesişirler çünkü {P,O} ve {P,R} in ortak noktasıdır. {P,O} ve {R,S} doğruları paraleldir çünkü ortak hiçbir noktaları yoktur.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) {P,R} ve {O,S} kesişirler.
b) {P,R} ve {O,S} paraleldir.
c) {O,R} ve {R,S} paraleldir.
d) {P,S} ve {O,R} kesişirler.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiçbiri doğru değildir.

23. Ali adlı bir matematikçinin kendi tanımladığı geometriye göre, aşağıdaki önerme doğrudur.
Bir üçgenin iç açılarının ölçüsü toplamı 180 dereceden azdır.
Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Ali üçgenin açılarını ölçerken hata yapmıştır.
b) Ali mantıksal bir hata yapmıştır.
c) Ali doğru sözcüğünün anlamını bilmiyordur.
d) Ali bilinen geometridekilerden farklı varsayımlarla başlamıştır.
e) Yukarıdaki seçeneklerin hiç biri doğru değildir.

24. İki ayrı geometri kitabı 'dikdörtgen' sözcüğünü iki farklı şekilde tanımlamıştır. Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
a) Kitaplardan birinde hata vardır.
b) Tanımlardan biri yanlıştır. Dikdörtgen için iki farklı tanım olamaz.
c) Bir kitapta tanımlanan dikdörtgenin özellikleri diğer kitaplarınkinden farklı olmalıdır.
d) Bir kitapta tanımlanan dikdörtgenin özellikleri diğer kitaptakiyle aynı olmalıdır.
e) Kitaplarda tanımlanan dikdörtgenlerin farklı özellikleri olabilir.

25. Varsayalım aşağıdaki öneme I ve II'yi kanıtladınız.
I. Eğer p ise q dir.
II. Eğer s ise q değildir.

Buna göre önerme I ve II den aşağıdakilerden hangisi çıkartılabilir?

a) Eğer p ise, s dir.
b) Eğer p değil ise, q değildir.
c) Eğer p veya q ise s dir.
d) Eğer s ise p değildir.
e) Eğer s değil ise, p dir.

Ek 7. Van Hiele Geometrik Düşünme Testi İzin Yazısı

Van Hiele testi uygulama izni Gelen Kutusu ×

Tuba Dag 12 Mart Cmt 23:35

Alıcı: aduatepe

Merhaba Hocam,
Ben Tuba GÜRBÜZ. Uludağ Üniversitesi Matematik Eğitimi alanında doktora yapıyorum. "Ortaokul Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı tez çalışmamda Türkçeye uyarladığınız Van Hiele Geometrik Düşünme Testini izniniz doğrultusunda kullanmak istiyorum.
Bilgilerinize sunarım.

Asuman DUATEPE-PAKSU 14 Mart Pzt 14:53

Alıcı: ben

Sayın Tuba Gürbüz,

Ölçeği kullanmanız uygundur.

İyi günler

Asuman Duatepe-Paksu

Ek 8. Geometriye Yönelik Tutum Ölçeği

	Değerli öğrenciler, aşağıda; geometri ile ilgili bazı ifadeler yer almaktadır. Lütfen her bir ifadeyi okuyunuz. Gerek şimdiki , gerekse geçmiş öğrenim yaşantınızda "**geometri**" nin zihninizde uyandırdığı duygu ve düşünceleriniz doğrultusunda her bir ifadeyi okuduktan sonra ifadeye katılma/katılmama derecenize göre, ilgili kutucuğu □ şeklinde işaretleyiniz. Teşekkür ederiz	Kesinlikle Katılmıyorum	Katılmıyorum	Fikrim Yok	Katılıyorum	Tamamen Katılıyorum
1	(1).Geometri bilmece gibidir çözünce zevk alıyorum	□	□	□	□	□
2	(11).Geometri çalışırken uykum gelir	□	□	□	□	□
3	(45).Geometriyi sevmek mümkün değil	□	□	□	□	□
4	(19).Geometrinin gerekli olduğunu pek sanmıyorum	□	□	□	□	□
5	(29).Geometri ile uğraşmaktan asla sıkılmam	□	□	□	□	□
6	(46).Geometriye ayırdığım zamanı boş ve gereksiz bir zaman dilimi olarak görüyorum	□	□	□	□	□
7	(30).Geometri sıkıcı boş ve gereksizdir	□	□	□	□	□
8	(23).Geometrinin günlük yaşamımızda bir önemi yoktur	□	□	□	□	□
9	(5).Geometri dersine girmek istemem	□	□	□	□	□
10	(12).Geometriyi diğer derslerden daha çok severim	□	□	□	□	□
11	(14). Geometri çalışmak beni dinlendirir	□	□	□	□	□
12	(13).Geometri dersi kadar sıkıcı bir ders olamaz	□	□	□	□	□
13	(37).Geometri, bana gereksiz ve anlamsız geliyor	□	□	□	□	□
14	(27).Geometri öncelikle diğer bilim dallarından daha tatlı geliyor	□	□	□	□	□
15	(24).Geometri dersini çalışmaya başladığımda kendimi yorgun hissederim	□	□	□	□	□
16	(18).Geometri hayatı anlamama yardım eden bir derstir	□	□	□	□	□
17	(28).Geometrinin ileriki yıllarda karşıma çıkmasını istemem	□	□	□	□	□
18	(41).Geometri sorusuyla uğraşmak insana zevk verir	□	□	□	□	□
19	(42).Geometri, daima en soğuk olduğum derslerden birisi olmuştur	□	□	□	□	□
20	(36).Geometriden bir şey anlamıyorum	□	□	□	□	□
21	(43).Oldum olası geometriden nefret ederim	□	□	□	□	□
22	(38).Geometriyi gerçekten seviyorum	□	□	□	□	□
23	(31).Geometri benim ilgi alanıma girmiyor	□	□	□	□	□
24	(8).Geometri konularına daha fazla ders saati ayrılmasını isterim	□	□	□	□	□
25	(15).Bir geometri problemi hakkında düşünmek beni sinirlendirir	□	□	□	□	□

Ek 9. Geometriye Yönelik Tutum Ölçeği İzin Yazısı

Geometriye yönelik tutum ölçeği uygulama izni   Gelen Kutusu ×

Tuba Dag
Alıcı: bindak
4 Ağustos Per 01:10 (5 gün önce)

Merhaba Hocam,
Ben Tuba GÜRBÜZ. Uludağ Üniversitesi Matematik Eğitimi alanında doktora yapıyorum. "Ortaokul Öğrencilerinin Geometrik Muhakeme Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı tez çalışmamda geliştirdiğiniz Geometriye Yönelik Tutum ölçeğini izniniz doğrultusunda kullanmak istiyorum.
Bilgilerinize sunarım.

Recep.Bindak
Alıcı: ben
4 Ağustos Per 19:58 (5 gün önce)

Merhaba,
Gelistirmis oldugum Geometri Tutum Olcegi'ni calismalarinizda
elbetteki kullanabilirsiniz.
Iyi calismalar dilerim.

ÖZ GEÇMİŞ			
Adı- Soyadı	Tuba GÜRBÜZ		
Bildiği Yabancı Diller	Almanca (İleri)		İngilizce (İyi)
Eğitim Durumu	**Başlama- Bitirme**		**Kurum Adı**
Lise	**2004**	**2006**	Avusturya Bundesgymnasium Gmünd
Lise	**2006**	**2008**	Hacı Ömer Tarman Anadolu Lisesi
Lisans	**2008**	**2012**	Gazi Üniversitesi
Yüksek Lisans	**2012**	**2015**	Gazi Üniversitesi
Doktora	**2015**	**2022**	Bursa Uludağ Üniversitesi
Çalıştığı Kurum	**Başlama- Bitirme**		**Çalışılan Kurumun Adı**
1.	**2012**	**2014**	Atkaracalar Cumhuriyet Ortaokulu/ ÇANKIRI
2.	**2014**	**2017**	Emine-Hasan Özatav Ortaokulu/ BURSA
3.	**2017**	**2017**	Dilek Özer Ortaokulu/ BURSA
4.	**2017**	**2018**	Ali Kuşçu İmam Hatip Ortaokulu/ BURSA
5.	**2018**	**2020**	Meral Muammer Ağım Ortaokulu/ BURSA
6.	**2020**	**2021**	Özlüce Aziz Sancar Ortaokulu/ BURSA
7.	**2021**		TOKİ Şehit Çağlar Canbaz İmam Hatip Ortaokulu/ İSTANBUL
Katıldığı Proje ve Toplantılar		Gürbüz T., Gürbüz M.Ç. (2018). Geometrik İnşa Sürecinde 5. Sınıf Öğrencileri Tarafından Yaşamsal Bir Problemin İrdelenmesi. International Congress on Science and Education 2018, Afyonkarahisar, Turkey.	

	Gürbüz T. & Gürbüz M.Ç. (2017). 5E Öğrenme Modeline Uygun Etkinliklerin 5.sınıf Öğrencilerinin Kesirler Alt Öğrenme Alanındaki Akademik Başarılarına Etkisi. VII. Uluslararası Eğitimde Araştırmalar Kongresi 2017, Çanakkale, Turkey. Alan Uzmanlarıyla Nitel Temelli Araştırmalara Yolculuk, TÜBİTAK PROJESİ, Yürütücü: ÇEPNİ S. Bursiyer: GÜRBÜZ T. 24/11/2017 - 15/02/2018 (ULUSAL) Daha Güzel Günlerde Öğretmenlik İçin, Diğer kamu kuruluşları (Yükseköğretim Kurumları hariç), Proje Koordinatörü: GÜRBÜZ M.Ç. Araştırmacı: ERSÖZ A.R. Araştırmacı: ARSLAN Ç. Araştırmacı: Gürbüz T., 22/09/2020 (Devam Ediyor) (ULUSAL)	
Yayınlar	Gürbüz, M.Ç., & Gürbüz T. (2022). Interpretation of Covid-19 Data from Mathematical Literacy Perspective. In S. Alabay & G. Günçavdı Alabay (Eds.), *Contemporary Education Issues* (pp. 53-67). Europa: LAP Lambert Academic. Gürbüz, M.Ç., Aydın, B. & Gürbüz, T. (2022). A research on teacher professional law on the basis of teachers' rights and freedoms. *International Journal of Modern Education Studies*, *6*(2), 256-283. https://doi.org/10.51383/ijonmes.2022.203	
Tarih	**10/08/2022**	
İmza		
Adı-Soyadı	**Tuba GÜRBÜZ**	