T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# EULER SAYILARI, POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

**Hatice ÖZBAY**

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

BURSA – 2010

**EULER SAYILARI, POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ**

**Hatice ÖZBAY**

## TEZ ONAYI

Hatice ÖZBAY tarafından hazırlanan "Euler Sayıları, Polinomları ve Özellikleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

**Başkan :** Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

**Üye :** Doç. Dr. Basri ÇELİK
Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

**Üye :** Prof. Dr. Cevdet DEMİR
Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Kimya Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Cengiz ELMACI**
**Enstitü Müdürü**
**…/…/2010**

**İÇİNDEKİLER**

**ÖZET**

Yüksek Lisans Tezi

EULER SAYILARI, POLİNOMLARI ve ÖZELLİKLERİ

**Hatice ÖZBAY**

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Bu tezde Euler sayıları ve polinomları tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ele alınarak, kullanım alanları gösterilmiştir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın diğer bölümlerine temel oluşturacak kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde Euler sayıları ve polinomları tanımlanmış ve bunları hesaplamaya yarayan bağıntılar ele alınmıştır. Ayrıca Euler sayıları ve polinomlarının bazı özellikleri ile bu sayılar ve polinomlar arasındaki ilişki gösterilmiştir. Son olarak da bu sayıların zeta fonksiyonları çalışılmış ve Euler sayıları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Euler sayıları ve polinomlarının özellikleri verilmeye devam edilmiş, özellikle de ikinin kuvveti şeklindeki modlarda bu sayıların kongrüansları ele alınmış ve çalışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Euler sayıları, Bernoulli sayıları, Özel sayılar

**2010, v + 39 sayfa.**

# ABSTRACT

MSc Thesis

EULER NUMBERS, POLYNOMALS AND PROPERTİES

**Hatice ÖZBAY**

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

**Supervisor:** Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

In this thesis, several properties and usage areas of Euler numbers and polynomials are given.

The thesis consists of three chapters. In the first chapter, the preliminary notions which are to be used in later chapters are given.

In the second chapter Euler numbers and polynomials are defined and relations to calculate them are considered. Also some properties of Euler numbers and polynomials and the relations between these numbers and polynomials are given. Finally the zeta functions of these numbers are studied and the relation between Euler numbers and Bernoulli numbers is given.

In the third chapter, some further properties of Euler numbers and polynomials are given and especially, their congruences in the moduli powers of two are studied.

**Key words:** Euler numbers, Bernoulli numbers, Special numbers

**2010, v + 39 pages.**

# 1. GİRİŞ

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan teoremler, tanımlar ve bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

**Tanım 1.1.** $s > 1$ için

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Riemann-zeta fonksiyonu denir.

**Tanım 1.2.** Riemann-zeta fonksiyonunun genelleştirilmesi olarak düşünülebilen Hurwitz-zeta fonksiyonu,

$$\varsigma(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak $a = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \varsigma(s,1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots \\ &= \varsigma(s) \end{aligned} \tag{1.3}$$

olduğu görülür.

**Tanım 1.3.** $f(x), (-L, L)$ aralığında tanımlı ve $2L$ periyotlu bir fonksiyon, yani

$$f(x + 2L) = f(x) \tag{1.4}$$

olsun. $n = 0,1,2,3,...$ için

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \tag{1.5}$$

ve

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{1.6}$$

olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier seri açılımı

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.7}$$

dir.

Tek fonksiyonların Fourier seri açılımlarında sadece $\sin$ terimleri, çift fonksiyonların açılımında ise sadece $\cos$ terimleri bulunur. O halde katsayılar,

$$f(x) \text{ tekse } a_n = 0, b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{1.8}$$

ve

$$f(x) \text{ çiftse } b_n = 0, a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \tag{1.9}$$

şeklindedir.

# 2. EULER SAYILARI VE POLİNOMLARI İLE BUNLARIN ZETA FONKSİYONLARI

## 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.** $\sec u = \dfrac{2}{e^{iu} + e^{-iu}}$ fonksiyonun Taylor serisi açılımındaki katsayılara Euler sayıları denir ve n-inci Euler sayısı $E_n$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \sec u &= \frac{2}{e^{iu} + e^{-iu}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} u^{2n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir.

$s \in \mathbf{C}$ için Euler-Zeta fonksiyonu ve Hurwitz-tipi Euler-zeta fonksiyonu

$$\zeta_E(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n / n^s) \tag{2.2}$$

ve

$$\zeta_E(s,x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n / (n+x)^s) \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır. Buna göre, Euler-zeta fonksiyonları, bütün $s$-düzleminde tam fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar, negatif sayılarda Euler sayıları ve Euler polinomlarının değerlerini alırlar. Bunlar

$$\zeta(-k) = E_k^* \text{ ve } \zeta(-k,x) = E_k^*(x) \tag{2.4}$$

şeklindedir.

Bu çalışmada Euler sayıları ile zeta fonksiyonları arasında ilginç bağıntılar verilecektir. Ayrıca Euler zeta fonksiyonun pozitif çift tamsayı değerleri için yeni değerler elde edilecektir.

Bu tez içinde **Z, Q**, **C**, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{C}_p$ sırasıyla rasyonel tamsayılar halkasını, rasyonel sayılar cismini, kompleks sayılar cismini, p-adik rasyonel tamsayılar halkasını, p-adik rasyonel tamsayılar cismini gösterecektir. $\upsilon_p$,

$$|p|_p = p^{-\upsilon_p(p)} = p^{-1} \tag{2.5}$$

olmak üzere $\mathbf{C}_p$ 'nin normalize edilmiş hesaplama fonksiyonudur. Eğer $q \in C_p$ ise $|q-1|<1$ olduğu farz edilecektir.

$$[x]_{-q} = \frac{1-(-q)^x}{1+q}, \qquad [x]_q = \frac{1-q^x}{1-q} \tag{2.6}$$

notasyonu kullanılacaktır. Bunun sonucu olarak $|x|_p \leq 1$ olacak şekildeki x değerleri için p-adik durumda $\lim_{q\to 1}[x]_q = 1$ 'dir.

$p$ tek asal olsun. d, $(p,d)=1$ olacak şekilde belli bir pozitif tamsayı olsun. Ayrıca

$$\begin{gathered} X = X_d = \varprojlim_N \frac{\mathbb{Z}}{dp^N\mathbb{Z}}, \quad X_1 = \mathbb{Z}_p, \quad X^* = \bigcup_{\substack{0<a<dp \\ (a,p)=1}} (a + dp\mathbb{Z}) \\ a + dp^N\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in X \,\middle|\, x \equiv a \left(\bmod dp^N\right) \right\} \end{gathered} \tag{2.7}$$

olsun. Burada $a \in \mathbf{Z},\ 0 \leq a < dp^N$ şeklinde tanımlıdır.

(Kim 2007a) gereği

$$\mu_{-q}\left(a+dp^N\mathbb{Z}_p\right)=\left(1+p\right)\frac{\left(-1\right)^a q^a}{1+q^{dp^N}}=\frac{\left(-q\right)^a}{\left[dp^N\right]_{-q}} \tag{2.8}$$

ifadesi $|1-q|<1$ durumunda $q\in Z_p$ için $X$ üzerinde bir dağılımdır. Bu dağılım aşağıdaki gibi bir integral ifadesine karşılık gelir:

$$I_{-q}\left(f\right)=\int_{\mathbb{Z}_p} f\left(x\right)d\mu_{-q}\left(x\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left[p^N\right]_{-q}}\sum_{x=0}^{p^N-1} f\left(x\right)\left(-q\right)^x \tag{2.9}$$

Bu integralin tanımında geçen limitin yakınsak olduğu kolayca görülebilir, (Kim 2007c). $q=1$ olsun. O zaman $Z_p$ üzerinde aşağıdaki gibi bir fermiyonik $p$-adik integral mevcut olur, (Kim 2007a, Ozden ve Simsek 2007):

$$I_{-1}\left(f\right)=\int_{\mathbb{Z}_p} f\left(x\right)d\mu_{-1}\left(x\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{x=0}^{p^N-1} f\left(x\right)\left(-1\right)^x. \tag{2.10}$$

Herhangi bir $N$ pozitif tamsayısı için

$$\mu_q\left(a+lp^N\mathbb{Z}_p\right)=\frac{q^N}{\left[lp^N\right]_q} \tag{2.11}$$

dir ve bu $X$ üzerinde bir dağılım olarak da ifade edilebilir. Bu dağılım $p$-adik bosonik $q$-integralini aşağıdaki şekilde indirger:

$$I_q\left(f\right)=\int_{\mathbb{Z}_p} f\left(x\right)d\mu_q\left(x\right)=\int_X f\left(x\right)d\mu_q\left(x\right). \tag{2.12}$$

Burada $f\in UD(Z_p)$ = $C_p$’dir; yani f düzgün diferansiyellenebilir bir fonksiyondur, (Cangül ve ark. 2007, Kim 2002, Simsek 2007, Simsek 2006c). Notasyon açısından, $I_{-1}$ ifadesi sembolik olarak $I_{-1}(f)=\lim_{q\to-1} I_q(f)$ şeklinde yazılabilir. Eğer $f(x)=q^{-x}\left[x\right]_q^n$ alırsak, o zaman Bernoulli sayılarının ve polinomlarının $q$-açılımını $Z_p$ üzerinde $p$-

adik $q$-integrallerinin türünden aşağıdaki gibi elde edebiliriz (Kim 2002, Simsek 2006b):

$$\beta_{n,q} = \int_{\mathbb{Z}_p} q^{-x} [x]_q^n \, d\mu_q(x), \beta_{n,q}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} q^{-y} [y+x]_q \, d\mu_q(y). \tag{2.13}$$

Böylece özel olarak n = 0 için ve genelde

$$\beta_{0,q} = \frac{q-1}{\log q}, \beta_{m,q} = \frac{1}{(q-1)^m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \frac{i}{[i]_q} \tag{2.14}$$

elde edilir (Kim 2002, Kim 2005, Simsek 2006a).

Kompleks düzlemde klasik Bernoulli sayıları işaretli rasyonel sayılardır ve aşağıdaki özdeşlikle tanımlanabilirler (Kim 2007d):

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, |t| < 2\pi . \tag{2.15}$$

Bu sayılar trigonometrik fonksiyonların seri dağılımları şeklinde artar ve sayılar teorisinde ve analizde oldukça önemlidir. Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{gathered} B_0 = 1,\ B_1 = -1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42, \\ B_8 = -1/30,\ B_{10} = 5/66,\ B_{12} = -691/2730,\ B_{14} = 7/6, \\ B_{16} = -3617/510,\ B_{18} = 43867/798,\ B_{20} = -174611/330 \end{gathered} \tag{2.16}$$

ve $k \in \mathbf{N}$ için

$$B_{2k+1} = 0 \tag{2.17}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Riemann-zeta fonksiyonu

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}},s\in C \tag{2.18}$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca Riemann-zeta fonksiyonu, Bernoulli sayıları ile kompleks düzlemdeki pozitif ve negatif tamsayılarla yoğun bir şekilde ilişkilidir. Riemann, analitik devam için $\zeta(s)$'in $s\in C-\{0\}$ değerleri için iyi tanımlı olması gerektiğini göstermiştir ve bu sayede zeta fonksiyonundan aşağıdaki formülü türetmiştir:

$$\zeta(-n)=-\frac{B_{n+1}}{n+1},n\in N=\{1,2,3,...\}\ . \tag{2.19}$$

Böylece, $n$ pozitif bir çift tamsayı olmak üzere $\zeta(-n)=0$ olduğu görülür. Bunlar zeta fonksiyonunun adi sıfırları olarak adlandırılır. 1859'da Euler, zeta fonksiyonunu

$$\zeta(s)=\prod_{p\ asal}\frac{1}{1-p^{-s}} \tag{2.20}$$

olarak bir sonsuz çarpım biçiminde ifade etmiştir. Ayrıca Euler, Riemann hipotezini ortaya atmıştır:

$\zeta(z)=0$ olacak şekildeki her bir $z$ değeri, bir adi sıfırdır veya $\mathrm{Re}(z)=1/2$ kritik doğrusu üzerinde bulunur.

$$\frac{\sin z}{z}=\left(1-\frac{z^{2}}{\pi^{2}}\right)\left(1-\frac{z^{2}}{(2\pi)^{2}}\right)\left(1-\frac{z^{3}}{(3\pi)^{2}}\right)... \tag{2.21}$$

olduğu iyi bilinir. Böylece

$$1-z\cot z=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}z^{2m} \tag{2.22}$$

ve buradan aşağıdaki meşhur formül türetilebilir

**Lemma 2.1.2.** $n \in \mathbf{N}$ için

$$\begin{aligned}\zeta(2n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}\end{aligned} \tag{2.23}$$

dir.

Kolaylıkla görülebilir ki,

$$\begin{aligned} z\cot z &= \frac{2iz}{e^{2iz}-1} + iz \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}\end{aligned} \tag{2.24}$$

dir. Buna karşı $k \in \mathbf{N}$ için $\zeta(2k+1)$'in değerleri bilinmemektedir. $k=1$ olduğu durumda Apery, $\zeta(3)$'ün irrasyonel olduğunu ispatlamıştır, (Apery 1979).

Aşağıda verilen Taylor serisi açılımındaki $E_k^{*}$ sabitleri birinci-çeşit Euler sayıları olarak bilinirler (Cenkci 2007, Kim 2002, Ozden ve ark. 2007):

$$\frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^* \frac{t^n}{n!}, \ |t| < \pi . \tag{2.25}$$

Birinci çeşit Euler sayılarının üreteç fonksiyonlarından faydalanılarak

$$E_0^* = 1, E_n^* = -\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{1} E_1^* \tag{2.26}$$

olduğu görülür. Bazı başlangıç değerleri $E_0^* = 1$, $E_1^* = -1/2$, $E_2^* = 0$, $E_3^* = 1/4$, … ve $k = 1, 2, \ldots$ için $E_{2k}^{*} = 0$ şeklinde bulunabilir. Euler polinomları da

$$\begin{aligned}\frac{2}{e^t+1}e^{xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^*(x)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k^* x^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned} \tag{2.27}$$

olarak tanımlıdır. $s \in \mathbf{C}$ için Euler-zeta fonksiyonları ve Hurwitz tipi Euler-zeta fonksiyonları

$$\zeta_E(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s} \quad ve \quad \zeta_E(s,x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+x)^s} \tag{2.28}$$

olarak tanımlıdır (Cangül ve ark. 2007, Ozden ve ark. 2007, Kim 2002, Kim ve ark. 2007). Böylece bütün kompleks s-düzleminde Euler-zeta fonksiyonları tam fonksiyonlardır ve bu fonksiyonlar negatif tamsayılarda Euler sayıları veya Euler polinomlarının değerlerini alırlar (Cangül ve ark. 2007, Ozden ve ark. 2007, Kim 2002, Kim ve ark. 2007). Yani

$$\zeta_E(-k) = E_k^*,\ \zeta_E(-k,x) = E_k^*(x) \tag{2.29}$$

dir.

Bu çalışmada Euler sayıları ile zeta fonksiyonları arasındaki bazı ilginç bağıntılar verilecektir. Sonuçta da pozitif çift tamsayı değerlerinde Euler zeta fonksiyonunun değerleri verilecektir.

### 2.2. p-adik fermionik integrallere karşılık gelen Euler sayıları

$f_1(x)$, $f_1(x) = f(x+1)$ olarak tanımlanan dönüşüm olsun. Bu durumda

$$I_{-1}(f_1) = -I_{-1}(f) + 2f(0) \tag{2.30}$$

bağıntısı gerçekleşir. Eğer $f(x)=e^{(x+y)t}$ alınırsa birinci çeşit Euler polinomlarını $I_{-1}(f)$ integral denkleminden aşağıdaki gibi türetilebilir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{(x+y)t} d\mu_{-1}(y) = e^{xt}\frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n^*(x)t^n}{n!}. \tag{2.31}$$

Yani,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} y^n d\mu_{-1}(y) = E_n^*, \int_{\mathbb{Z}_p} (x+y)^n d\mu_{-1}(y) = E_n^*(x) \tag{2.32}$$

bağıntıları sağlanır.

$n \in \mathbf{N}$ için aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+n) d\mu_{-1}(x) + (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu_{-1}(x) = 2\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{n-1+l} f(1) \tag{2.33}$$

Bu ifadeden

$$E_k^*(n) - E_k^* = 2\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l-1} l^k, n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2), \tag{2.34}$$

$$E_k^*(n) + E_k^* = 2\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l} l^k, n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2) \tag{2.35}$$

olduğu görülür. $f(x)=\sin ax$ (veya $f(x)=\cos ax$) olsun. $Z_p$ üzerinde fermionik p-adik q-integrali kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{Z}_p} \sin axd\mu_{-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \sin axd\mu_{-1}(x) \\ &= (\cos a + 1) \int_{\mathbb{Z}_p} \sin axd\mu_{-1}(x) + \sin a \int_{\mathbb{Z}_p} \cos axd\mu_{-1}(x) \end{aligned} \tag{2.36}$$

olduğu görülür (Kim 2007c).

$$2 = (\cos a + 1) \int_{\mathbb{Z}_p} \cos axd\mu_{-1}(x) - \sin a \int_{\mathbb{Z}_p} \sin axd\mu_{-1}(x) \tag{2.37}$$

Böylece,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos axd\mu_{-1}(x) = 1, \int_{\mathbb{Z}_p} \sin axd\mu_{-1}(x) = -\frac{\sin a}{\cos a + 1} \tag{2.38}$$

elde edilir (Kim 2007c). Bundan yola çıkarak

$$\tan \frac{a}{2} = -\int_{\mathbb{Z}_p} \sin axd\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+1}}{(2n+1)!} E_{2n+1}^{*} \tag{2.39}$$

olduğu görülür. Aynı düşünce kullanılarak

$$\frac{a}{2} \cot \frac{a}{2} = \int_{\mathbb{Z}_p} \cos axd\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!} a^{2n} \tag{2.40}$$

olduğu gözlemlenir (Kim 2007c). Bu formül bir sonraki kısımda da kullanılacaktır.

$f(x) = e^{t(2x+1)}$ olsun. O zaman ikinci çeşit Euler sayılarının üreteç fonksiyonu fermionik p-adik integral denkleminden aşağıdaki gibi türetilebilir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{t(2x+1)} d\mu_{-1}(x) = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{1}{\cosh t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}. \tag{2.41}$$

Böylece

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 2\delta_{0,n} \tag{2.42}$$

elde edilir. Burada $E^n$ yerine $E_n$ sembolik notasyonu kullanılmıştır. $k \in \mathbf{N}$ için ilk birkaç sayı

$$E_0 = 1\,,\ E_1 = 0\,,\ E_2 = -1\,,\ E_3 = 0\,,\ E_4 = 5\,,\ \ldots,\ E_{2k+1} = 0\,. \tag{2.43}$$

Özel olarak

$$E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k} \tag{2.44}$$

dir. Son zamanlarda Şimşek, Özden, Cangül, Cenkci, Kurt ve diğerleri fermionik p-adik invaryant q-integralini kullanarak Euler sayılarının farklı dağılımlarını incelemişlerdir. Ayrıca Şimşek ve arkadaşları gibi ikinci çeşit Euler sayılarının q-dağılımlarını da incelemek ilginç olabilir.

### 2.3. İkinci çeşit Euler sayıları ve zeta fonksiyonları arasındaki bazı bağıntılar

Bu bölümde ikinci çeşit Euler sayıları kompleks düzlemde incelenecektir.

$E_k$ ile gösterilecek olan ikinci çeşit Euler sayıları aşağıdaki dağılımla tanımlanır (Kim ve ark. 2007):

$$\begin{aligned} \sec hx &= \frac{1}{\cosh x} \\ &= \frac{2e^x}{e^{2x}+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E_k \frac{x^k}{k!}, \quad |x|<\frac{\pi}{2} \end{aligned} \qquad . \tag{2.45}$$

(2.26) ve (2.45) ifadelerinden aşağıdaki denklem türetilebilir:

$$E_k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} 2^l E_l^* . \tag{2.46}$$

(2.46) ve (2.26) ifadelerinden kolayca görülür ki $k = 1,2,3,...$ için

$$E_0 = 1,\ E_1 = 0,\ E_2 = -1,\ E_3 = 0,\ E_4 = 5,\ E_6 = 61,\ \dots \text{ ve } E_{2k+1} = 0 \tag{2.47}$$

dır. Euler formülü

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, i = (-1)^{\frac{1}{2}} \tag{2.48}$$

şeklindedir. (2.48) denkleminden

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \tag{2.49}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
\sec x &= \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}} \\
&= \sec h(ix) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n E_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

elde edilir. (2.50) ifadesinden

$$x \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n+1}, |x| < \frac{\pi}{2} \tag{2.51}$$

türetilir. $(-p, p)$ aralığında tek fonksiyonun Fourier serisi sinüs serisidir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) \tag{2.52}$$

Burada

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx \tag{2.53}$$

olarak tanımlıdır. $[-\pi, \pi]$ aralığında $f(x) = \sin ax$ fonksiyonunu ele alalım. (2.52) ve (2.53) ifadelerinden

$$\sin ax = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{2.54}$$

olduğu görülür. Burada

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ax \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\cos(n-a)x-\cos(n+a)x}{2}\right]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-a)x}{n-a}-\frac{\sin(n+a)}{n+a}\right]_0^{\pi} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{2}{\pi}\sin a\pi\left(\frac{n}{n^2-a^2}\right) \end{aligned} \tag{2.55}$$

olarak tanımlıdır. (2.54) ifadesinde $x=\pi/2$ alınırsa

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi a}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n-1}\left(-1\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{2n-1}{\left(2n-1\right)^2-a^2} \\ &= \frac{2}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2n-1\right)\left(-1\right)^{n-1}}{\left(2n-1\right)^2\left(1-\left(\frac{a}{\left(2n-1\right)}\right)^2\right)} \\ &= \frac{2}{\pi}\sin a\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{\left(2n-1\right)^{2k}} \end{aligned} \tag{2.56}$$

elde edilir. (2.56) bağıntısından

$$\frac{\pi a}{2}\sec\left(\frac{\pi a}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n E_{2n}}{\left(2n\right)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} a^{2n+1} \tag{2.57}$$

olduğu görülür. (2.51) ifadesinde

$$\frac{\pi a}{2}\sec\left(\frac{\pi a}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}a^{2n+1} \tag{2.58}$$

olduğu kolaylıkla görülür. (2.57) ve (2.58) kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

**Teorem 2.3.1.** $n\in\mathbf{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}=(-1)^n\frac{E_{2n}}{2(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \tag{2.59}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)^{2k+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{2k+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}}-1$$

$$=\frac{1}{2^{4k+1}}\zeta\left(2k+1,\frac{1}{4}\right)-\frac{2^{2k+1}-1}{2^{2k+1}}\zeta(2k+1)-1 \tag{2.60}$$

olduğu görülür. (2.59) ve (2.60) ifadelerinden aşağıdaki formül elde edilebilir:

**Sonuç 2.3.2.** $n\in\mathbf{N}$ için

$$\zeta\left(2n+1,\frac{1}{4}\right)+2^{2n}\left(1-2^{2n+1}\right)\zeta(2n+1)=(-1)^n\frac{E_{2n}}{2(2n)!}\pi^{2n+1}2^{2n} \tag{2.61}$$

Basit hesaplamalarla

$$i\tan x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}=1-\frac{2}{e^{2ix}-1}+\frac{4}{e^{4ix}-1} \tag{2.62}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Böylece

$$x\tan x=-xi+\frac{2xi}{e^{2xi}-1}-\frac{4xi}{e^{4xi}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n B_{2n}4^n\left(1-4^n\right)}{(2n)!}x^{2n} \tag{2.63}$$

elde edilir. (2.63) bağıntısından

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1} \left(1-4^{n+1}\right) B_{2n+2}}{(2n+2)!} x^{2n+1} \tag{2.64}$$

kolaylıkla elde edilir. (2.49) yardımıyla da

$$i \tan x = 1 - \frac{2}{e^{2ix}+1} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n+1}^{*}}{(2n+1)!} 2^{2n+1} (-1)^{n+1} x^{2n+1} \tag{2.65}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n+1}^{*}}{(2n+1)!} 2^{2n+1} (-1)^{n+1} x^{2n+1} \tag{2.66}$$

elde edilir. (2.64) ve (2.66) bağıntılarından aşağıdaki ifade elde edilir:

**Teorem 2.3.3.** $n \in \mathbf{N}$ için

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n} E_{2n-1}^{*}}{4(2n-1)!\left(1-4^{n}\right)} \tag{2.67}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}} = \left(1 - \frac{1}{4^{n}}\right) \zeta(2n) = \frac{(-1)^{n} (2\pi)^{2n}}{4^{n+1}(2n-1)!} E_{2n-1}^{*} \tag{2.68}$$

olduğunu görmek kolaydır. Bunun sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir:

**Sonuç 2.3.4.** $n \in \mathbf{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{4^{n+1}(2n-1)!} E_{2n-1}^{*} \tag{2.69}$$

Şimdi Euler zeta fonksiyonunun pozitif tamsayılardaki yeni değeri verilecektir. Euler zeta fonksiyonunun tanımından,

$$\zeta_E(s) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} + \frac{1}{2^{s-1}} \zeta(s), s \in C \tag{2.70}$$

olduğu görülür. (2.70) ile Teorem 2.3.3 ve Sonuç 2.3.4'den aşağıdaki teorem elde edilir:

**Teorem 2.3.5.** $n \in \mathbf{N}$

$$\zeta_E(2n) = \frac{(-1)^{n-1} \pi^{2n} (2-4^n)}{2(2n-1)!(1-4^n)} E_{2n-1}^{*} \tag{2.71}$$

**Uyarı 2.3.6.** $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta_E(2) = -\pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ ve $\zeta_E(4) = -7\pi^4/360$'dir.
$q \in C$ ve $|q| < 1$ için $s \in C$, $q$-$\zeta$ -fonksiyonu

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{[n]_q^s} - \frac{1}{s-1} \frac{(1-q)^s}{\log q} \tag{2.72}$$

olarak tanımlanır (Kim ve ark. 2007, Kim 2005). $\zeta_q(s)$ fonksiyonunun, $s = 1$'de bir basit kutbu vardır ve analitik devama sahiptir. Ayrıca

$$\zeta_q(1-k) = -\frac{\beta_{k,q}}{k} \tag{2.73}$$

olduğu görülür (Kim 2005). Basit bir hesaplama ile

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{[n]_q^{2k+1}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta^{2j+1}[n]_q^{2j+1}}{(2j+1)!}+\frac{1}{\log q}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(1-q)^{2k-2j}}{(2k-2j-1)(2j+1)!}-\frac{1}{\log q}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(1-q)^{2k-2j}}{(2k-2j-1)(2j+1)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}\left(-\zeta_q(2k-2j)+\zeta_{q^2}(2k-2j)\frac{2}{[2]_q^{2k-2j}}\right)-\frac{q}{1+q}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k \tag{2.74}$$

$$+\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{\theta^{2j+1}(-1)^j}{(2j+1)!}\frac{H_{2j-2k,q}(-q^{-1})}{1+q}$$

olduğu görülür. Burada $H_{n,q}(-q)$ değerleri, $\lim_{q\to 1}H_{n,q}(-q)=E_n^{\square}$ olduğu durumda Carlitz q-Euler sayılarıdır (Cenkci ve ark. 2004, Carlitz 1948, Carlitz 1958]). Eğer $q\to 1$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2k+1}}\sin(n\theta)$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1}\left(\frac{2}{2^{2k-2j}}-1\right)(-1)^{k-j+1}\frac{(2\pi)^{2k-2j}}{2(2k-2j)!}B_{2k-2j}-\frac{1}{2}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k \tag{2.75}$$

bağıntısı elde edilir. $k\in Q$ ve $\theta=\pi/2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^{2k+1}}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^k\pi^{2k+1}\left(2^{2k-2j}-2\right)B_{2k-2j}}{(2j+1)!(2k-2j)!2^{2j+2}}-\frac{\pi^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!2^{2k+2}} \tag{2.76}$$

olduğu görülebilir. (2.76) ve Teorem 2.3.1’den aşağıdaki denklem de türetilebilir:

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1}\pi^{2k+1}\left(2^{2k-2j}-2\right)B_{2k-2j}}{(2j+1)!(2k-2j)!2^{2j+2}}+\frac{\pi^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!2^{2k+2}}=(-1)^k\frac{E_{2k}}{2(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}. \tag{2.77}$$

Böylece

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\left(2^{2k-2j}-2\right)B_{2k-2j}}{(2j+1)!(2k-2j)!2^{2j+2}}=\frac{1}{(2k+1)!2^{2k+2}}-\frac{E_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!} \tag{2.78}$$

elde edilir.

## 2.4. Euler sayılarının Bernoulli sayıları ile ilişkisi

Euler sayıları ile Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi göstermek için (2.1) bağıntısında $x=\frac{3}{4}$ ve $x=\frac{1}{4}$ alınırsa

$$t\frac{e^{\frac{3}{4}t}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{3}{4})\frac{t^n}{n!} \tag{2.79}$$

ve

$$t\frac{e^{\frac{1}{4}t}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\frac{1}{4})\frac{t^n}{n!} \tag{2.80}$$

elde edilir. Tarafa tarafa çıkarma yapılırsa,

$$t\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n\left(\frac{3}{4}\right)-B_n\left(\frac{1}{4}\right)\right]\frac{t^n}{n!} \tag{2.81}$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n\left(\frac{3}{4}\right)-B_n\left(\frac{1}{4}\right)\right]\frac{t^{n-1}}{n!} \tag{2.82}$$

elde edilir. Basit işlemlerden sonra

$$\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n B_n\left(\frac{1}{4}\right)-B_n\left(\frac{1}{4}\right)\right]\frac{t^{n-1}}{n!} \tag{2.83}$$

olduğu görülür. $n=2k+1$ alınırsa,

$$\frac{e^{\frac{3}{4}t}-e^{\frac{1}{4}t}}{e^t-1}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)t^{2k} \tag{2.84}$$

elde edilir. Burada $t=4iu$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{e^{3iu}-e^{iu}}{e^{4iu}-1}=-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)(4iu)^{2k} \tag{2.85}$$

ve buradan da

$$\frac{e^{3iu}-e^{iu}}{e^{4iu}-1}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k} \tag{2.86}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\sec u &= \frac{2}{e^{iu}+e^{-iu}}\\ &= 2\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{e^{2iu}-e^{-2iu}}\\ &= 2\frac{e^{3iu}-e^{iu}}{e^{4iu}-1}\end{aligned} \tag{2.87}$$

olduğundan (2.79) düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\sec u=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k} \tag{2.88}$$

ve dolayısıyla da

$$\sec u=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k} \tag{2.89}$$

elde edilir. Sekant fonksiyonunun seri açılımı yerine konulursa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{E_k}{(2k)!}u^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)u^{2k} \tag{2.90}$$

şeklinde iki serinin eşitliği elde edilir. $u^{2k}$ 'lı terimlerin katsayıları kıyaslanırsa,

$$\frac{E_k}{(2k)!}=\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right) \tag{2.91}$$

ve sonuç olarak da

$$E_k=\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{2k+1}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right) \tag{2.92}$$

bulunur ki bu Euler ve Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi veren bağıntıdır. Başka bir bağıntı da (2.92) denkleminden aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$E_k=\frac{(-1)^{k+1}4^{2k+1}}{2k+1}\sum_{j=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1-j}B_j \tag{2.93}$$

ve gerekli düzenleme ve sadeleştirmelerden sonra

$$E_k=\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sum_{j=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{j}4^{j}B_j \tag{2.94}$$

bulunur.

## 3. EULER SAYILARININ İKİNİN KUVVETLERİ ŞEKLİNDEKİ MODÜLLERDEKİ KONGRÜANSLARI

**3.1. Giriş.** Reel veya kompleks bir $x$ parametresi için genelleştirilmiş $E_{2n}^{(x)}$ Euler sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$\left(\frac{2}{e^t+e^{-t}}\right)^x=\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}^{(x)}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\left(|t|<\frac{\pi}{2};1^x:=1\right) \tag{3.1}$$

veya

$$(\sec t)^x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n E_{2n}^{(x)}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\left(|t|<\frac{\pi}{2};1^x:=1\right) \tag{3.2}$$

Eğer $x$ negatif olmayan bir tamsayı ise $E_{2n}^{(x)}$, x. mertebeden Euler sayıları olarak adlandırılır (Liu 2001, Liu 2004b, Liu 2006).

$$E_{2n}^{(k)}=(2n)!\sum_{\substack{\upsilon_1\geq 0,\ldots\upsilon_{k\geq 0}\\ \upsilon_1+\ldots+\upsilon_k=n}}\frac{E_{2\upsilon_1}\ldots E_{2\upsilon_k}}{(2\upsilon_1)!\ldots(2\upsilon_k)!} \tag{3.3}$$

Burada $E_{2n}^{(1)}=E_{2n}$ sayıları klasik Euler sayılarıdır.

Bernoulli sayılarının (Frobenius 1968, Liu 2004a) ve Euler sayılarının çarpımlarının toplamı bir çok matematikçi tarafından verilmiştir (Ozden ve ark. 2007, Ozden ve ark. 2008). $E_{2n}$ Euler sayıları aşağıdaki indirgenme bağıntısını sağlar:

$$E_0=1,\ E_{2n}=-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k}E_{2k} \tag{3.4}$$

Böylece $E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6=-61$, $E_8=1385$, $E_{10}=-50521$, $E_{12}=2702765$, … bulunur. Tümevarım kullanılarak $E_0$, $E_2$, $E_4$, … sayılarının tamsayı oldukları kolayca söylenebilir. (3.3)'den $E_{2n}^{(k)}$ 'nın tamsayı olduğu bilinmektedir.

Tek modüle göre olan Euler sayıları için farklı konguranslar birçok kitapta bulunur. Bunlardan bazıları Liu 2004-2005a-2006, Liu ve Zhang 2008, Yuan 2004, Zhang 1998 ve Zhang ve Xu 2007 şeklindedir.

$$E_{2n} \equiv E_{2m}\left(\bmod 2^k\right) \Leftrightarrow 2n \equiv 2m\left(\bmod 2^k\right) \tag{3.5}$$

1875'te Stern (3.5)'in ispatının kısa bir yolunu vermiş, ondan sonra Frobenious 1910'da Stern'in yöntemini geliştirmiştir. Ernvall, 1979'da Frobenius'un ispatının anlaşılır olmadığını söyleyip umbral hesabı kullanarak kendi ispatını vermiştir. 2000'de (3.5)'in indirgenmiş ispatı Wagstaff tarafından verilmiştir. Son zamanlarda Sun (3.5)'e yeni bir ispat vermek için Euler sayılarının sayı kuvveti şeklindeki modüller için kongrüanslar elde etmiştir.

**Tanım 3.1.1.** Merkezi faktöryel sayılar $T(n,k)$ aşağıdaki dağılım formülü ile tanımlanır (Riordan 1968):

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} T(n,k)x\left(x-1^2\right)\left(x-2^2\right)...\left(x-(k-1)^2\right) \tag{3.6}$$

veya

$$\left(e^x + e^{-x} - 2\right)^k = (2k)!\sum_{n=k}^{\infty} T(n,k)\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.7}$$

Burada $n \geq 1$, $k \geq 1$ ve $(n,k) \neq (1,1)$'dir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} T(n,k)x^n = \frac{x^k}{\left(1-1^2x\right)\left(1-2^2x\right)...\left(1-k^2x\right)} \tag{3.8}$$

için (3.6) ve (3.7)'den

$$\begin{aligned} &T(n,0) = T(0,k) = 0, \\ &T(1,1) = 1, \\ &T(n,k) = T(n-1,k-1) + k^2 T(n-1,k) \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir.

**Tanım 3.1.2.** $B_n$ Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu, aşağıdaki gibi tanımlanır (Liu ve ark. 2006):

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!},|t|<2\pi \tag{3.10}$$

$B_n$ Bernoulli sayıları aşağıdaki indirgeme bağıntısını sağlar:

$$B_0=1,B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k \tag{3.11}$$

Bu bağıntıdan faydalanarak $B_{2n+1}=0 \quad (n>0)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca

$$B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},B_{10}=\frac{5}{66},\ B_{12}=-\frac{691}{2730},... \tag{3.12}$$

bulunur.

**Lemma 3.1.3.** $x<1$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. O zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}=\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) \tag{3.13}$$

dır.

**İspat.** $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n((n-1)!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n-1},|x|<1$$

şeklinde gösterirsek

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f\left(x\right)&=\sum_{n=!}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(\left(n-1\right)!\right)^{2}}{\left(2n\right)!}\left(2n\right)\left(2n-1\right)\left(2x\right)^{2n-2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\left(n!\right)^{2}}{\left(2n\right)!}\left(2x\right)^{2n}\end{aligned}\tag{3.14}$$

ve

$$\left(1+x^{2}\right)\frac{d}{dx}f\left(x\right)+xf\left(x\right)=1\tag{3.15}$$

bağıntısı elde edilir. Buradan

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}\log\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\tag{3.16}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak da

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\left(n!\right)^{2}}{\left(2n\right)!}\left(2x\right)^{2n}&=\frac{d}{dx}f\left(x\right)\\&=\frac{1}{1+x^{2}}\left(1-xf\left(x\right)\right)\\&=\frac{1}{1+x^{2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\log\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\right)\end{aligned}\tag{3.17}$$

elde edilir. Bu Lemma 3.1.3’ün ispatını tamamlar.

**Lemma 3.1.4.** $n\geq 1$ bir tamsayı olsun. O zaman

$$2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}=2nE_{2n-2}^{(2)}\tag{3.18}$$

dir.

**İspat.** (3.2) bağıntısında x = 2 için

$$\left(\sec t\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n E_{2n}^{(2)}\frac{t^{2n}}{\left(2n\right)!} \tag{3.19}$$

elde edilir. Terim terime integral alınarak

$$\tan t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1} E_{2n-2}^{(2)}\frac{t^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!} \tag{3.20}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{2z}{e^{2z}-1}-\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{z}{2}\frac{e^z-1}{e^z+1} \tag{3.21}$$

olduğu göz önüne alınırsa ve $z=it$ konulursa (burada $i^2=-1$)

$$\tan\frac{t}{2}=-i\frac{e^{it}-1}{e^{it}+1} \tag{3.22}$$

olacağından

$$\begin{aligned}\frac{2it}{e^{2it}-1}-\frac{it}{e^{it}-1}+\frac{it}{2}&=-\frac{t}{2}\left(-i\frac{e^{it}-1}{e^{it}+1}\right)\\&=-\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}\end{aligned} \tag{3.23}$$

yazılabilir. (3.18) ve (3.23)'den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\left(\left(2it\right)^n-\left(it\right)^n\right)+\frac{it}{2}=-\frac{t}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1} E_{2n-2}^{(2)}\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!} \tag{3.24}$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n B_{2n}}{\left(2n\right)!}\left(2^{2n}-1\right)t^{2n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1} E_{2n-2}^{(2)}\frac{\left(t/2\right)^{2n}}{\left(2n-1\right)!} \tag{3.25}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\frac{2n}{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}E_{2n-2}^{(2)}=B_{2n} \tag{3.26}$$

dir. Böylece Lemma 3.1.4'ün ispatı tamamlanmış olur.

## 3.2. Temel sonuçlar

**Teorem 3.2.1.** $n\geq 1$ bir tamsayı olsun. O zaman

$$E_{2n}^{(2)}=\frac{2^{2n}}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (k!)^2 T(n,k) \tag{3.27}$$

**İspat.** Lemma 3.1.3'de $x=\dfrac{e^{t/2}-e^{-t/2}}{2}$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\left(e^t+e^{-t}-2\right)^n=\frac{4}{e^t+e^{-t}+2}\left(1-\frac{t\left(e^t-1\right)}{2\left(e^t+1\right)}\right) \tag{3.28}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{2n}}E_{2n}^{(2)}\frac{t^{2n}}{(2n)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)E_{2n}^{(2)}\frac{(t/2)^{2n}}{(2n)!}\\&=\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}^{(2)}\frac{(t/2)^{2n}}{(2n)!}\right)+\left(\frac{2}{e^{t/2}+e^{-t/2}}\right)^2\\&=\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{e^{t/2}+e^{-t/2}}\right)^2+\left(\frac{2}{e^{t/2}+e^{-t/2}}\right)^2\\&=\frac{4}{e^t+e^{-t}+2}-\frac{2t\left(e^t-1\right)}{\left(e^t+1\right)\left(e^t+e^{-t}+2\right)}\end{aligned} \tag{3.29}$$

olur. (3.28) ve (3.29) bağıntılarından

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{2n}}E_{2n}^{(2)}\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k!)^2}{(2k)!}\left(e^t+e^{-t}-2\right)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k!)^2\sum_{n=k}^{\infty}T(n,k)\frac{t^{2n}}{(2n)!} \tag{3.30}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k!)^2\,T(n,k)\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

elde edilir. (3.30)'un her iki tarafında katsayılar karşılaştırılırsa

$$E_{2n}^{(2)}=\frac{2^{2n}}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k!)^2T(n,k) \tag{3.31}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.1'in ispatı da tamamlanmış olur.

**Sonuç 3.2.2.** $n\geq 1$ bir tamsayı olsun. O zaman

$$(2n+2)E_{2n}^{(2)}\equiv 0(\operatorname{mod}2^{2n+1}) \tag{3.32}$$

dir.

**Teorem 3.2.3.** $n\geq 1$ bir tamsayı olsun. O zaman

$$E_{2n}=1-2n-\sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{2} \tag{3.33}$$

dir.

**İspat.** $$\sec t-\cos t=\sin t\tan t \tag{3.34}$$

olduğu göz önüne alınırsa (3.28) ifadesinden yukarıdaki fonksiyonun bütün kuvvet serileri elde edilir. Sağ tarafı aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\sin t\tan t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{(2)}\frac{t^{2n}}{(2n)!}. \tag{3.35}$$

Burada

$$E_{2n}-1=-\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{(2)} \tag{3.36}$$

dir. Yani

$$E_{2n}=1-2n-\sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{(2)} \tag{3.37}$$

dir. Bu da Teorem 3.2.3'ün ispatını tamamlar:

**Sonuç 3.2.4.** $n \geq m \geq 0$ tamsayılar ve $2n \equiv 2m \pmod{2^k}$ olsun. O zaman

$$E_{2n}-E_{2m} \equiv -(2n-2m)\left(\bmod 2^{k+1}\right) \tag{3.38}$$

dir.

**İspat.** Teorem 3.2.3'den

$$E_{2n}-E_{2m}=-(2n-2m)-\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{2n}{2j+1}-\binom{2m}{2j+1}\right)E_{2j}^{(2)}$$

$$=-(2n-2m)-\sum_{j=1}^{n}\frac{(2j+2)E_{2j}^{(2)}}{(2j+2)!}\left((2n)_{2j+1}-(2m)_{2j+1}\right) \tag{3.39}$$

elde edilir. Burada $(x)_{2j+1}=x(x-1)...(x-2j)$ ve $2n \equiv 2m \pmod{2^k}$'dır. O halde

$$(2n)_{2j+1} \equiv (2m)_{2j+1} (\bmod 2^{k+1})(j \geq 1) \tag{3.40}$$

elde edilir. Şimdi $e_p$ tamsayılarda veya rasyonel sayılarda üstel $p$-adik hesaplama fonksiyonunu göstersin. Yani $p^k \parallel n$ ( $p^k \mid n$ fakat $p^{k+1} \nmid n$ ) ise $e_p(n)=k$'dir. Görüldüğü gibi $e_p(n)$ değeri p asal sayısının n'yi bölen en büyük kuvveti olarak tanımlanmaktadır.

$$e_2((2j+2)E_{2j}^{(2)}) \geq 2j+1$$

bağıntısından

$$e_2\left((2j+2)!\right) < \frac{2j+2}{2} + \frac{2j+2}{2^2} + \frac{2j+2}{2^3} + ... = 2j+2 \tag{3.41}$$

ifadesinden

$$e_2\left(\frac{(2j+2)E_{2j}^{(2)}}{(2j+2)!}\right) = e_2\left((2j+2)E_{2j}^{(2)}\right) - e_2\left((2j+2)!\right) \geq 0 \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.40), (3.41) ve (3.42)'den

$$E_{2n} - E_{2m} \equiv -(2n-2m)\left(\bmod 2^{k+1}\right)$$

elde edilir. Bu da Sonuç 3.2.4'ün ispatını tamamlar.

**Uyarı 3.2.5.** Sonuç 3.2.4'de $2n = 2m + 2^k$ alınırsa

$$E_{2m+2^k} + 2^k \equiv E_{2m}\left(\bmod 2^{k+1}\right) \tag{3.43}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.2.6.** $n \geq 1$ tamsayılar olsun. O zaman

$$E_{2n} \equiv 1 - 2n - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{(2)}\left(\bmod 2^{2k+1}\right) \tag{3.44}$$

**İspat.** Teorem 3.2.2'den

$$E_{2n} = 1 - 2n - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{(2)} - \sum_{j=k}^{n}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{(2)}$$

$$= 1 - 2n - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{2n}{2j+1}E_{2j}^{(2)} - \frac{1}{2n+1}\sum_{j=k}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}(2j+1)E_{2j}^{(2)} \tag{3.45}$$

elde edilir. (3.45) ve (3.36)’dan (3.44) hemen elde edilir. Bu da Sonuç 3.2.6’nın ispatını tamamlar.

**Uyarı 3.2.7.** (3.44)’ün ilginç bir özel durumu vardır:

$$E_{2n} \equiv 1-2n+2\binom{2n}{3} \pmod{32}. \tag{3.46}$$

Bu da Frobenius’un [1968, syf. 477] aşağıdaki iyi bilinen sonucu ile kıyaslanabilir:

$$E_{2n} \equiv 1-2n+8\binom{n}{2} \pmod{16}.$$

## KAYNAKLAR

**Apery, R. 1979.** Irrationalite de ζ2 et ζ3, Asterisque, (61): 11–13.

**Cangul, I. N., Kurt V., Simsek, Y., Pak, H., Rim, S.-H., 2007.** An invariant p-adic q-integral associated with q-Euler numbers and polynomials, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 14(1):8–14.

**Carlitz, L. 1948.** q-Bernoulli numbers and polynomials, Duke Mathematical Journal, 15(4): 987–1000.

**Carlitz, L. 1954.** q-Bernoulli and Eulerian numbers, Transactions of the American Mathematical Society, 76(2):332–350.

**Carlitz, L. 1958.** Expansions of q-Bernoulli numbers, Duke Mathematical Journal, 25(2):355–364.

**Cenkci, M. 2007.** The p-adic generalized twisted h,q-Euler-l-function and its applications, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 15(1): 37–47.

**Cenkci, M., Can, M., Kurt, V. 2004.** p-adic interpolation functions and Kummer-type congruences for q-twisted and q-generalized twisted Euler numbers, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 9(2):203–216.

**Cenkci, M., Can, M. 2006.** Some results on q-analogue of the Lerch zeta function, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 12(2): 213–223.

**Cenkci, M., Simsek, Y., Kurt, V. 2007.** Further remarks onmultiple p-adic q-L-function of two variables, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 14(1):49–68.

**Deeba, E. Y., Rodriguez, D. M. 1991.** Stirling's series and Bernoulli numbers, The American Mathematical Monthly, 98(5): 423–426.

**Ernvall, R. 1979.** Generalized Bernoulli numbers, generalized irregular primes, and class number, Ann. Univ. Turku Ser. A I 178 1–72.

**Frobenius, F. G. 1968.** Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome, in: Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, pp. 809–847; also in: Gesammelte Abhandlungen III, Springer-Verlag, pp. 440–478.

**Hegazi, A. S., Mansour, M. 2007.** A note on q-Bernoulli numbers and polynomials, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, vol. 13, no. 1, pp. 9–18.

**Kim, T. 2002.** q-Volkenborn integration, Russian Journal of Mathematical Physics, 9(3): 288–299.

**Kim, T. 2003.** Non-Archimedean q-integrals associated with multiple Changhee q-Bernoulli polynomials, Russian Journal of Mathematical Physics, 10(1): 91–98.

**Kim, T. 2005.** Power series and asymptotic series associated with the q-analog of the two-variable p-adic L-function, Russian Journal of Mathematical Physics, 12(2): 186–196.

**Kim, T. 2006.** On p-adic q-l-functions and sums of powers, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 329(2): 1472–1481.

**Kim, T. 2007a.** A note on p-adic q-integral on Zp associated with q-Euler numbers. Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 15 (2): 133–137.

**Kim, T. 2007b.** On-p-adic q-l-functions and sums of powers, J. of Mathematical Analysis and Applications, 329(2):1472-1481

**Kim, T. 2007c.** On the analogs of Euler numbers and polynomials associated with p-adic q-integral on Zp at q −1, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 331(2): 779–792.

**Kim, T. 2007d.** q-Extension of the Euler formula and trigonometric functions, Russian Journal ofMathematical Physics, 14(3) 275–278.

**Kim, T., Jang, L. C. Rim, S. H. ve ark. 2007.** Introduction to Non-Archimedean Integrals and Their Applications, .

**Kupershmidt, B. A. 2005.** "Reflection symmetries of q-Bernoulli polynomials," Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 12 ek1 412–422.

**Liu, G.-D. 2001.** The generalized central factorial numbers and higher order Nörlund Euler–Bernoulli polynomials, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 44 (5): 933–946 (in Chinese).

**Liu, G.-D. 2004a.** Summation and recurrence formula involving the central factorial numbers and zeta function, Appl.Math. Comput. 149 (1): 175–186.

**Liu, G.-D. 2004b.** The solution of problem for Euler numbers, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 47 (4): 825–828 (in Chinese).

**Liu, G.-D. 2005.** On congruences of Euler numbers modulo an odd square, Fibonacci Quart. 43(2): 132–136.

**Liu, G.-D. 2006.** Congruences for higher-order Euler numbers, Proc. Japan Acad. Ser. A 82 (3): 30–33.

**Liu, G.-D., Srivastava, H. M. 2006.** Explicit formulas for the Nörlund polynomials B (x) n and b (x) n , Comput. Math. Appl. 51 1377–1384.

**Liu, G.-D., Zhang, W.-P. 2008.** Applications of an explicit formula for the generalized Euler numbers, Acta Math. Sin. (Eng. Ser.) 24 (2): 343–352 (in Chinese).

**Ozden, H., Simsek, Y. 2007.** A new extension of q-Euler numbers and polynomials related to their interpolation functions, Appl. Math. Lett., in press, corrected proof, doi:10.1016/j.aml.2007.10.005.

**Ozden, H., Simsek, Y. Cangul, I. N. 2007.** "Euler polynomials associated with p-adic q-Euler measure,"General Mathematics, 15(2): 24–37.

**Ozden, H., Simsek, Y., Rim, S. H., Cangul, I. N. 2007.** "A note on p-adic q-Euler measure," Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 14(2): 233–239.

**Ozden, H., Cangul, I. N., Simsek, Y. 2008.** Remarks on sum of products of (h, q)-twisted Euler polynomials and numbers, J. Inequal. Appl. article ID 816129, 8.

**Ozden, H., Simsek, Y. 2010.** "A new extension of q-Euler numbers and polynomials related to their interpolation functions," Applied Mathematics Letters. In press.

**Riordan, J. 1968.** Combinatorial Identities, Wiley, New York, 1968. Y. Simsek, Complete sums of products of (h, q)-extension of Euler numbers and polynomials, arXiv:0707.2849v1 [math.NT].

**Ryoo, C. S. 2006.** "The zeros of the generalized twisted Bernoulli polynomials," Advances in Theoretical and Applied Mathematics, 1(2-3):143–148.

**Schork, M. 2006.** "Ward's "calculus of sequences", q-calculus and the limit qarrow − 1," Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 13(2):131–141.

**Schork, M. 2007.** "Combinatorial aspects of normal ordering and its connection to q-calculus," Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 15(1):49–57.

**Shiratani, K., Yamamoto, S. 1985.** "On a p-adic interpolation function for the Euler numbers and its derivatives," Memoirs of the Faculty of Science. Kyushu University. Series A, 39(1): 113–125.

**Simsek, Y. 2005.** "Theorems on twisted L-function and twisted Bernoulli numbers," Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 11 (2): 205–218.

**Simsek, Y. 2006a.** "On p-adic twisted q-L-functions related to generalized twisted Bernoulli numbers," Russian Journal of Mathematical Physics, 13(3): 340–348.

**Simsek, Y. 2006b.** “Twisted h, q-Bernoulli numbers and polynomials related to twisted h, q-zeta function and L-function,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, 324(2): 790–804.

**Simsek, Y. 2006c.** “q-Dedekind type sums related to q-zeta function and basic L-series,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, 318(1): 333–351.

**Simsek, Y. 2007.** “On twisted q-Hurwitz zeta function and q-two-variable L-function,” Applied Mathematics and Computation 187(1): 466–473.

**Srivastava, H. M., Kim, T., Simsek, Y. 2005.** q-Bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series, Russian J. Math. Phys. 12 (2):241–268.

**Stern, M. A., 1875.** Zur Theorie der Eulerschen Zahlen, J. Reine Angew. Math. 79 67–98.

**Sun, Z.-W. 2005.** On Euler numbers modulo powers of two, J. Number Theory 115 (2): 371–380.

**Tuenter, H. J. H. 2001.** “A symmetry of power sum polynomials and Bernoulli numbers,” The American Mathematical Monthly, 108(3): 258–261.

**Wagstaff, S. 2002.** Prime divisors of the Bernoulli and Euler numbers, in: Number Theory for the Millennium, III, Urbana, IL, 2000, A K Peters, Natick, MA, 357–374.

**Yuan, P.-Z. 2004.** A conjecture on Euler numbers, Proc. Japan Acad. Ser. A 80 (9): 180–181.

**Zhang, W.-P. 1998.** Some identities involving the Euler and the central factorial numbers, Fibonacci Quart. 36 (2):154–157.

**Zhang, W.-P., Xu, Z.-F. 2007.** On a conjecture of the Euler numbers, J. Number Theory 127 (2): 283–291.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Hatice Özbay

**Doğum Yeri ve Tarihi:**Kahramanmaraş, 30.01.1984

**Yabancı Dili:**İngilizce

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

**Lise:** Mardin Lisesi

**Lisans:** Uludağ Üniversitesi

**Yüksek Lisans:** Uludağ Üniversitesi

**Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:**

**2006-2007** Zafer Dersanesi

**2007-2008** Fen Bilimleri Dersanesi

**2008-2009** Karacan Akademi

**2009-**Sınav Dergisi Dersanesi(Halen çalışmakta)

**İletişim:** ozbayhatice@hotmail.com

## TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmam boyunca bilgileriyle beni aydınlatan fikirleriyle çalışmalarıma yön veren, tecrübeleriyle desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, kıymetli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e içtenlikle teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen, sorularımı sabırla cevaplayan kendisinden çok şey ögrendigim Araş. Gör. Ömer ZOR'a teşekkür ederim.

Maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olduğunu bildiğim canım anneme sonsuz teşekkürler.

Ve Sevgili Levent'e teşekkürler..

**U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**27.09.2010**

**Hatice ÖZBAY**