T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BALANS SAYILARI VE CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Meltem Esra ERAŞIK

Doç. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2014

TEZ ONAYI

Meltem Esra ERAŞIK tarafından hazırlanan "Balans Sayıları ve Cebirsel Özellikleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan **:** Prof.Dr. Osman BİZİM
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İmza
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof.Dr. Orhan GÜRLER
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İmza
Fizik Anabilim Dalı

Üye **:** Doç.Dr. Ahmet TEKCAN
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İmza
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
28/05/2014

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07/05/2014

Meltem Esra ERAŞIK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BALANS SAYILARI VE CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Meltem Esra ERAŞIK

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada tamsayı dizilerinde yeni bir kavram olan balans sayıları ele alınmış ve bu sayıların bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu sayıların Pell, Pell-Lucas ve oblong sayıları ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, oblong sayıları ele alınmış ve bu sayıların Pell formu ve Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde ise, balans sayıları geniş bir şekilde ele alınmış ve bu sayıların bazı cebirsel özellikleri ile bu sayıların Pell, Pell-Lucas ve $t-$balans sayılar ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Balans, Pell, Pell-Lucas ve oblong sayılar, Pell denklemleri.

2014, vii + 57 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

BALANCING NUMBERS AND ALGEBRAIC PROPERTIES

Meltem Esra ERAŞIK

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this work, some algebraic properties of balancing numbers and their relationships with Pell, Pell-Lucas and oblong numbers are considered.

In the first section, the preliminary notations, definitions and theorems which are to be used in later sections are given.

In the second section, oblong numbers are considered. Some properties of oblong numbers are derived. Also the connection with Pell form and integer solutions of some specific Pell equations is discussed.

In the third section, balancing numbers are considered widely. Some properties of balancing numbers are given. Further, the connection with oblong, Pell, Pell-Lucas and $t-$balancing numbers are considered.

Key words: Balancing, Pell, Pell-Lucas and oblong numbers, Pell equations.

2014, vii + 57 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın her aşamasında bilgisiyle beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsüyle her zaman yanımda olan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Ahmet TEKCAN'a, teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca bana her türlü manevi desteği veren eşim Burhan Eraşık' a da teşekkürü bir borç bilirim.

Meltem Esra ERAŞIK

07/05/2014

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$B_m^{(a,b)}$	$(a,b)-$balans sayısı
B_n	n. balans sayısı
$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_l]$	basit sürekli kesirli açılım
$[a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_l}]$	basit sürekli kesirli devirli açılım
b_n	n. cobalans sayısı
o_k	k. cooblong sayısı
F_n	n. Fibonacci sayısı
$\Delta(F) = b^2 - 4ac$	F formunun diskriminantı
$x^2 - dy^2 = \pm 1$	Klasik Pell denklemi
$F = (a, b, c)$	kuadratik form
L_n	n. Lucas sayısı
C_n	n. Lucas-balans sayısı
c_n	n. Lucas-cobalans sayısı
O_k	k. oblong sayısı
$F_\Delta(x, y)$	Pell form
$x^2 - dy^2 = \pm N$	Pell denklemi
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
(x_1, y_1)	temel çözüm
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$	üreteç fonksiyonu
B_n^t	n. $t-$balans sayısı
b_n^t	n. $t-$cobalans sayısı
C_n^t	n. $t-$Lucas-balans sayısı
c_n^t	n. $t-$Lucas-cobalans sayısı

Kısaltmalar	Açıklama
OEIS	Tamsayı dizileri on-line ansiklopedisi

1. GİRİŞ

Bu bölümde tezin daha sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tamsayı dizileri denilince ilk akla gelen dizi Fibonacci dizisidir (A000045 OEIS). Bu diziye ismini veren Leonardo Fibonacci (1170-1250) orta çağda yaşamış olup bu dizi ile ilgili ilk temel bağıntıları elde etmiştir. Fibonacci dizisinin bu kadar meşhur olması belki de bu dizinin doğada birçok yerde karşımıza çıkmasıdır. Örneğin, ayçiçeğinin merkezinden dışarıya doğru sağdan sola ve soldan sağa doğru taneler sayıldığında çıkan sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir, papatya çiçeğinde de ayçiçeğinde olduğu gibi bir Fibonacci dizisi mevcuttur. Ömer Hayyam üçgenindeki tüm katsayılar veya terimler yazılıp çapraz toplamları alındığında Fibonacci dizisi ortaya çıkar. Tavşan çiftlerinin yavrusunun sayısı yine Fibonacci dizisi ile alakalıdır. Ayrıca tütün bitkisinin yapraklarının dizilişinde de yine bir Fibonacci dizisi söz konusudur.

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran olup bu oranın da Fibonacci dizisi ile yakın bir ilişkisi vardır. Altın oran, eski Mısırlılar ve Yunanlılar tarafından keşfedilmiş, mimaride ve sanatta kullanılmıştır. Altın oran bir irrasyonel sayı olup $1{,}61803398874\cdots$ şeklindedir. Bu sayının gerçek değeri ise $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir ve bu sayı, Fibonacci dizisinin karakteristik denkleminin köklerinden birisidir.

Fibonacci dizisi, ilk iki terimi $F_0 = 0, F_1 = 1$ olup diğer tüm terimleri kendisinden önce gelen iki terimin toplamı ile elde edilen bir dizidir. Buna göre dizinin genel terimi $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dir. Bu dizinin terimleri arasında şimdiye kadar birçok cebirsel bağıntı bulunmuş olup bu bağıntılardan bazıları aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \\
&= F_n(F_n + 2F_{n-1}) = 3F_{2n-2} - F_{2n-4} \\
F_{2n+1} &= F_{n+1}^2 + F_n^2 = 3F_{2n-1} - F_{2n-3} \\
F_{2n-1} &= F_n^2 + F_{n-1}^2 \\
F_{3n} &= F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = 4F_{3n-3} + F_{3n-6} \\
F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 &= F_n F_{n+3} \\
F_{n+1}^2 &= 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \\
F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} &= F_{m+n}
\end{aligned}
$$

Diğer bir önemli tamsayı dizisi Lucas dizisi (A000032 OEIS) olup bu dizide esasında Fibonacci dizisine benzemekle birlikte sadece başlangıç değerleri farklıdır. Dizinin başlangıç değerleri $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ ve genel terimi $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

şeklindedir. Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri arasındaki en önemli bağıntı

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

olup diğer bazı bağıntılar aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
&F_{m+n} = \frac{F_m L_n + L_m F_n}{2},\ F_{2n} = F_n L_n,\ L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n \\
&2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) = (F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 \\
&\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2 = \frac{3F_{2n+1}^2 + 2F_{2n+2}^2 - 6F_{2n}F_{2n+2} - 2n - 5}{5} \\
&\left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right)^m = \frac{L_{mn} + \sqrt{5}F_{mn}}{2} \\
&L_{2m}L_{2n} = L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2 \\
&F_n F_{n+3}^2 - F_{n+2}^3 = (-1)^{n+1} F_{n+1} \\
&L_{(2m+1)(4n+1)} - L_{2m+1} = 5F_{2n(2m+1)} F_{(2m+1)(2n+1)}
\end{aligned}
$$

Fibonacci ve Lucas dizilerinin genel terimleri aynı tipte olduğundan karakteristik denklemleri de aynıdır. Fibonacci dizisinin genel teriminin $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde olduğu dikkate alınırsa, $F_n = x^n$ olmak üzere dizinin karakteristik denklemi

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \Leftrightarrow x^{n-2}x^2 = x^{n-2}(x+1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Bunlardan α_1 olanı altın orana karşılık gelmektedir. Karakteristik denklemin bu kökleri yardımıyla Fibonacci ve Lucas tamsayı dizilerinin genel terimleri

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{ve} \quad L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$$

olarak ifade edilir ki bu formüller Binet (Jacques Phillipe Marie Binet, 1786-1856) formülü olarak bilinir.

Fibonacci ve Lucas tamsayı dizisinden başka iki tamsayı dizisi daha vardır. Bunlar Pell (A000129 OEIS) ve Pell-Lucas (A122075 OEIS) tamsayı dizileridir. Bu dizilerin de genel terimleri birbirine benzemekle birlikte sadece başlangıç değerleri farklıdır. Bu dizilerinin başlangıç terimleri $P_0 = 0, P_1 = 1, Q_0 = 2, Q_1 = 2$ olup genel terimleri $n \geq 2$ için sırasıyla

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \quad \text{ve} \quad Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

dir. Bu dizilerinin karakteristik denklemi $x^2 - 2x - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \quad \text{ve} \quad \beta = 1 - \sqrt{2}$$

dir. Bu diziler için Binet formülleri ise sırasıyla

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas tamsayı dizilerinin terimleri arasındaki bağıntılara benzer şekilde Pell ve Pell-Lucas tamsayı dizilerinin terimleri arasında da birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan bazıları aşağıdaki gibidir: ($n \geq m$)

$$P_n Q_m = P_{n+m} + (-1)^m P_{n-m}\ ,\ P_{2n} = P_n Q_n,\ \ P_{2n+1} = P_n + Q_{n+1} + (-1)^n,$$

$$P_n = \frac{Q_{n+1} + Q_{n-1}}{8},\ P_n^2 = \frac{Q_{2n} + (-1)^{n+1}}{8}\ ,\ P_{2n+1} = \frac{P_n Q_{n+1} + Q_n P_{n+1}}{2},$$

$$Q_{2n+1} = \frac{8P_n P_{n+1} + Q_n Q_{n+1}}{2}.$$

Esasında yukarıda ele alınan tüm tamsayı dizileri, p ve q, $p^2-4q>0$ özelliğinde iki tamsayı olmak üzere başlangıç değerleri $U_0=0, U_1=1$, $V_0=2, V_1=p$ ve genel terimleri $n\geq 2$ için

$$U_n=U_n(p,q)=pU_{n-1}-qU_{n-2} \text{ ve } V_n=V_n(p,q)=pV_{n-1}-qV_{n-2}$$

olarak tanımlanan U_n ve V_n tamsayı dizilerinin özel halleridir. Gerçekten de

$$U_n=U_n(1,-1)=F_n, \quad U_n=U_n(2,-1)=P_n,$$

$$V_n=V_n(1,-1)=L_n, \quad V_n=V_n(2,-1)=Q_n$$

dir. Bu tamsayı dizilerin karakteristik denklemi

$$x^2-px+q=0$$

olup bu denklemin kökleri

$$x_{1,2}=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

dir. Bu dizilerin Binet formülleri ise sırasıyla

$$U_n=\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2} \text{ ve } V_n=x_1^n+x_2^n$$

dir. Bu dizilerin kompanion (katsayılar) matrisi

$$M=\begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $n\geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix}=M^{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix}=M^{n-1}\begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir.

Belli bir a_n tamsayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$a(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

şeklinde bir seri açılıma sahiptir. Bu fonksiyon, a_n dizisinin karakteristik denklemi yardımıyla elde edilir. Örneğin, U_n dizisinin karakteristik denklemi $x^2-px+q=0$ olduğundan bu dizinin üreteç fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
(1-px+qx^2)\sum_{i=0}^{\infty}U_i x^i &= (1-px+qx^2)(U_0+U_1x+U_2x^2+\cdots+U_nx^n+\cdots) \\
&= U_0+(U_1-pU_0)x+(U_2-pU_1+qU_0)x^2+\cdots \\
&\quad +(U_n-pU_{n-1}+qU_{n-2})x^n+\cdots \\
&= x
\end{aligned}
$$

dir. Diğer yandan $U_0=0, U_1=1$ ve $U_n=pU_{n-1}-qU_{n-2}$ olduğundan yukarıdaki eşitlikten

$$U(x)(p,q)=\frac{x}{1-px+qx^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde V_n dizisinin üreteç fonksiyonu ise

$$V(x)(p,q)=\frac{2-px}{1-px+qx^2}$$

dir (Ribenboim 2000).

Son yıllarda tamsayı dizilerinde yeni bir kavram olan balans sayıları, ilk defa Behera ve Panda (1999) tarafından birinci dereceden

$$1+2+\cdots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r) \tag{1.1}$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümlerini elde ederken ortaya çıkmıştır. Bu denklemi gerçekleyen pozitif *n* tamsayısına balans sayısı, denklemdeki pozitif *r* tamsayısına ise cobalans sayısı denir. Örneğin 6, 35, 204, 1189, 6930, cobalans sayıları sırasıyla 2, 14, 84, 492, 2870 olan birer balans sayılarıdır.

(1.1) eşitliği sırasıyla *r* ve *n* ye göre çözülürse

$$r=\frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2} \quad \text{ve} \quad n=\frac{2r+1+\sqrt{8r^2+8r+1}}{2} \tag{1.2}$$

elde edilir. (1.2) eşitliğine göre, “n bir balans sayısı $\Leftrightarrow 8n^2+1$ bir tam kare” ve “r bir cobalans sayısı $\Leftrightarrow 8r^2+8r+1$ bir tam kare” olduğu görülür.

Balans sayıları B_n ve cobalans sayıları b_n ile gösterilirse bu dizilerin başlangıç terimleri $B_1=1,\ B_2=6, b_1=0,\ b_2=2$ olup genel terimleri $n\geq 3$ için sırasıyla

$$B_{n+1}=6B_n-B_{n-1} \quad \text{ve} \quad b_{n+1}=6b_n-b_{n-1}+2$$

şeklindedir. Balans sayılarının karakteristik denklemi $x^2-6x+1=0$ olup bu denklemin kökleri

$$\gamma_1=3+\sqrt{8} \text{ ve } \gamma_2=3-\sqrt{8}$$

dir. Balans ve cobalans sayıları için üreteç fonksiyonları ise sırasıyla

$$B(x)=\frac{x}{1-6x+x^2} \text{ ve } b(x)=\frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

şeklindedir.

B_n balans ve b_n cobalans sayılar olmak üzere, $8B_n^2+1$ ve $8b_n^2+8b_n+1$ tam kare olduğundan

$$C_n=\sqrt{8B_n^2+1} \text{ ve } c_n=\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}$$

birer tamsayıdır. Bu sayılara sırasıyla *n*. Lucas-balans ve *n*. Lucas-cobalans sayıları denir. Bu dizilerin başlangıç terimleri $C_1=3, C_2=17, c_1=1, c_2=7$ olup genel terimleri $n\geq 3$ için sırasıyla

$$C_{n+1}=6C_n-C_{n-1} \text{ ve } c_{n+1}=6c_n-c_{n-1}$$

dir. Üreteç fonksiyonları ise sırasıyla

$$C(x)=\frac{1-3x}{1-6x+x^2} \text{ ve } c(x)=\frac{1-5x}{1-6x+x^2}$$

dir.

Balans sayılarının en önemli özelliği, bu sayıların Pell sayıları ile olan ilişkisidir. Bu ilişki ilk defa Ray (2009) tarafından ortaya çıkartılmıştır. Esasında bu ilişki, Pell denklemine dayanır ki Pell denklemi, *d* tam kare olmayan pozitif bir tamsayı ve $n\neq 0$ tamsayısı için

$$x^2-dy^2=\pm n$$

şeklindeki denklemdir. $x^2-dy^2=n$ denklemine pozitif, $x^2-dy^2=-n$ denklemine ise negatif Pell denklemi denir. $(x_{n,}\, y_n)$ bu denklemin bir çözümü ise $(x_{n,}-y_n),(-x_{n,}\, y_n)$ ve $(-x_{n,}-y_n)$ de denklemin birer çözümüdür. Ancak Pell denklemlerinin sadece pozitif tamsayı çözümleri dikkate alınır.

Yukarıdaki denklemin özel hali olan

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

denklemine ise klasik Pell denklemi denir. Klasik Pell denklemi gerçekleyen en küçük pozitif (x_1, y_1) tamsayı ikilisine, denklemin temel çözümü denir ki denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri bu temel çözüme bağlı olarak elde edilir. Bu nedenle denklemin temel çözümünün bulunması çok önemlidir ki bu temel çözüm $\sqrt{d}$ nin basit sürekli kesirli açılımına bağlı olarak elde edilir.

1.1 Teorem. *d* tam kare olmayan pozitif tamsayı ve $k = 0,1,2,3,\cdots$ olmak üzere a_j ler

$$\alpha_0 = \sqrt{d} \text{ ve } a_k = \lfloor \alpha_k \rfloor, \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $\sqrt{d} = [a_0 ; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, 2a_0}]$ dır (Mollin 2008).

1.2 Teorem. $\sqrt{d} = [a_0 ; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, 2a_0}]$ olmak üzere $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, B_{-2} = 1, B_{-1} = 0$ ve $k \geq 0$ tamsayısı için $A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2}$, $B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}$ olarak tanımlanırsa

$$C_k = \frac{A_k}{B_k} = \frac{a_k A_{k-1} + A_{k-2}}{a_k B_{k-1} + B_{k-2}}$$

dir (Mollin 2008).

Yukarıdaki iki teoreme göre $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denkleminin temel çözümü aşağıdaki gibidir.

1.3 Teorem. $\sqrt{d}$ nin basit sürekli kesirli açılımı $\sqrt{d} = [a_0 ; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, 2a_0}]$ olsun. Bu takdirde $x^2 - dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (A_{l-1}, B_{l-1}) & l \text{ çift ise} \\ (A_{2l-1}, B_{2l-1}) & l \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir. *l* çift iken negatif Pell denkleminin çözümü yoktur. *l* tek iken negatif Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (A_{l-1}, B_{l-1})$ dir (Mollin 2008).

$x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denkleminin temel çözümü biliniyorsa denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri, bu temel çözüme bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

1.4 Teorem. $x^2 - dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_n + y_n \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir. Eğer (x_1, y_1), $x^2 - dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} + y_{2n-1} \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^{2n-1}$$

olmak üzere (x_{2n-1}, y_{2n-1}) şeklindedir (Mollin 2008).

Örneğin, $d = 13$ olsun. Bu takdirde

$$\sqrt{13} = 3 + (\sqrt{13} - 3) = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + (\sqrt{13} - 3)}}}}$$

olduğundan $\sqrt{13} = [3; \overline{1,1,1,1,6}]$ dir. Buna göre $x^2 - 13y^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (A_9, B_9) = (649, 180)$ dir. Diğer tüm tamsayı çözümleri ise $n \geq 1$ için

$$x_n + y_n \sqrt{13} = (649 + 180\sqrt{13})^n$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir. Buradan denklemin pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_2, y_2) = (842401,\ 233640)$$
$$(x_3, y_3) = (1093435849, 303264540)$$
$$(x_4, y_4) = (1419278889601,\ 393637139280)$$
$$(x_5, y_5) = (1842222905266249,\ 510940703520900)$$
$$\ldots$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $x^2 - 13y^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (A_4, B_4) = (18, 5)$ olup denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1}+\sqrt{13}y_{2n-1}=(18+5\sqrt{13})^{2n-1}$$

olmak üzere (x_{2n-1}, y_{2n-1}) şeklindedir. Buradan denklemin pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_3, y_3)=(23382,\ 6485)$$
$$(x_5, y_5)=(30349818,\ 8417525)$$
$$(x_7, y_7)=(39394040382, 10925940965)$$
$$(x_9, y_9)=(51133434066018, 14181862955045)$$
$$\ldots$$

olarak elde edilir.

Ray (2009), balans sayıları için

"x bir balans sayısıdır $\Leftrightarrow 8x^2+1$ bir tam karedir"

ifadesini dikkate alarak, balans sayılarının Pell sayıları ile olan ilişkisini şu şekilde ortaya çıkarmıştır. Belli bir $y \neq 0$ için $8x^2+1=y^2$ olsun. Bu takdirde

$$y^2-8x^2=1$$

pozitif Pell denklemi elde edilir. Bu denklemin temel çözümü $(y_1, x_1)=(3, 1)$ olduğundan denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri

$$y_n+x_n\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^n$$

olmak üzere (y_n, x_n) şeklindedir. Benzer şekilde

$$y_n-x_n\sqrt{8}=(3-\sqrt{8})^n$$

olduğu görülür. Bu son iki eşitlikten

$$x_n=\frac{(3+\sqrt{8})^n-(3-\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

elde edilir. Bu ise balans sayıları için Binet formülüdür. Diğer yandan Pell dizisinin karakteristik denkleminin kökleri olan $\alpha=1+\sqrt{2}$ ve $\beta=1-\sqrt{2}$ sayıları için $\alpha^2=3+\sqrt{8}$ ve $\beta^2=3-\sqrt{8}$ olduğundan yukarıdaki eşitlik $x_n=\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$ olarak elde edilir. O halde balans sayılarının Binet formülü

$$B_n=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

dir. Benzer şekilde cobalans, Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının Binet formülleri ise sırasıyla

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \text{ ve } c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

şeklindedir. Böylece balans sayıları ile Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Ayrıca balans sayılarının genel terimleri Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2},\ b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2},\ C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \text{ ve } c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

şeklinde de verilebilir.

Oblong sayıları da sayılar teorisinde önemli bir yere sahip olup bu sayıların balans, Pell sayıları ve Pell denklemlerinin çözümleri ile yakın bir ilişkisi vardır. $k \geq 0$ tamsayı olmak üzere oblong sayıları (A002378 OEIS)

$$O_k = k(k+1)$$

şeklindeki sayılardır. Oblong sayılarının yarısı bir üçgensel sayı (A00217 OEIS), yani

$$T_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

dir. Üstelik ardışık iki oblong sayısının çarpımı, yine bir oblong sayıdır. Gerçekten de O_{k-1} ve O_k herhangi iki ardışık oblong sayısı olmak üzere bu iki sayının çarpımı

$$O_{k-1}O_k = [(k-1)k]\,[k(k+1)] = (k^2-1)k^2 = O_{k^2-1}$$

dır. Oblong sayılarının Pell formu ve Pell denklemlerinin çözümleri ile olan ilişkisi bir sonraki bölümde ele alınmıştır. Oblong sayılarının balans sayıları ile olan ilişkisi ise 3.5 kısmında ele alınmıştır.

2. OBLONG SAYILARI, PELL FORMU VE PELL DENKLEMİ

Bu bölümde oblong sayıları, bu sayıların bazı cebirsel özellikleri, terimleri arasında in-dirgeme bağıntıları, üreteç fonksiyonu ele alınacak ve bu sayıların Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri ile olan ilişkisi verilecektir.

2.1 Oblong ve Cooblong Sayıları

Ön bilgiler kısmında oblong sayılarının $k \geq 0$ tamsayısı için $O_k = k(k+1)$ şeklindeki sayılar olduğu belirtilmişti. Oblong sayılarının üreteç fonksiyonunu bulmak için dizinin terimleri arasında ikinci veya üçüncü dereceden bir indirgeme bağıntısına ihtiyaç vardır ki bu bağıntı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

2.1.1 Teorem. Oblong sayı dizisinin genel terimi $k \geq 3$ için

$$O_k = 3O_{k-1} - 3O_{k-2} + O_{k-3}$$

şeklindedir (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. $k \geq 1$ tamsayısı için

$$k^2 + k = k^2 - k + 2k$$

olduğundan dizinin terimleri arasında

$$O_k = O_{k-1} + 2k$$

şeklinde bir bağıntı vardır. Buradan $O_{k+1} = O_k + 2(k+1)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$O_{k+1} - O_k = O_k - O_{k-1} + 2(k+1) - 2k$$

ve böylece $O_{k+1} = 2O_k - O_{k-1} + 2$ olur. Buna göre $O_k = 2O_{k-1} - O_{k-2} + 2$ dir. Yukarıdaki son iki eşitlikten

$$O_{k+1} - O_k = 2O_k - O_{k-1} + 2 - 2O_{k-1} + O_{k-2} - 2 \Leftrightarrow O_{k+1} = 3O_k - 3O_{k-1} + O_{k-2}$$

ve böylece

$$O_k = 3O_{k-1} - 3O_{k-2} + O_{k-3}$$

elde edilir.

2.1.2 Teorem. Oblong sayılarının üreteç fonksiyonu

$$O(x)=\frac{2x}{1-3x+3x^2-x^3}$$

dır (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. Yukarıdaki teoreme göre, oblong sayılarının karakteristik denklemi

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

olduğundan dizinin üreteç fonksiyonu

$$O(x)=\sum_{n=0}^{\infty}O_nx^n=O_0+O_1x+O_2x^2+\cdots+O_nx^n+\cdots$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}(1-3x+3x^2-x^3)O(x)=O_0&+(O_1-3O_0)x\\&+(O_2-3O_1+3O_0)x^2\\&+(O_3-3O_2+3O_1-O_0)x^3\\&+\cdots\\&+(O_n-3O_{n-1}+3O_{n-2}-O_{n-3})x^n+\cdots\end{aligned}$$

elde edilir. $O_0=0, O_1=2, O_2=6,\ O_k=3O_{k-1}-3O_{k-2}+O_{k-3}$ olduğundan yukarıdaki eşitlik $(1-3x+3x^2-x^3)O(x)=2x$ haline gelir. O halde

$$O(x)=\frac{2x}{1-3x+3x^2-x^3}$$

dir.

Oblong sayılarının genel terimi $O_k=k^2+k$ olduğundan dizinin ilk k teriminin toplamı

$$\sum_{i=1}^{k}O_i=\sum_{i=1}^{k}(i^2+i)=\frac{k^3+3k^2+2k}{3}$$

dır. Bu toplam oblong sayılarına bağlı olarak

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}O_i&=\frac{k^3+3k^2+2k}{3}=\frac{2k^3+6k^2+4k}{6}\\&=\frac{k^4+2k^3+k^2-k^4+k^2+4k^2 4k}{6}\\&=\frac{(k^2+k)^2-(k^2-1)k^2+4(k^2+k)}{6}=\frac{O_k^2-O_{k^2-1}+4O_k}{6}\end{aligned}$$

şeklinde de verilebilir.

Oblong sayıların terimleri arasındaki indirgeme bağıntısı ise aşağıdaki gibidir.

2.1.3 Teorem. Oblong sayılarının terimleri arasında $k \geq 3$ tamsayısı için

$$O_{2k} = 3O_{2k-2} - 3O_{2k-4} + O_{2k-6}$$
$$O_{2k+1} = 3O_{2k-1} - 3O_{2k-3} + O_{2k-5}$$

şeklinde indirgeme bağıntısı vardır (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. $O_{2k} = 3O_{2k-1} - 3O_{2k-2} + O_{2k-3}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
O_{2k} &= 3O_{2k-1} - 3O_{2k-2} + O_{2k-3} \\
&= 3(3O_{2k-2} - 3O_{2k-3} + O_{2k-4}) - 3O_{2k-2} + O_{2k-3} \\
&= 9O_{2k-2} - 9O_{2k-3} + 3O_{2k-4} - 3O_{2k-2} + O_{2k-3} \\
&= 6O_{2k-2} - 8(3O_{2k-4} - 3O_{2k-5} + O_{2k-6}) + 3O_{2k-4} \\
&= 6O_{2k-2} - 21O_{2k-4} + 24O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 6O_{2k-2} - 3O_{2k-2} + 3O_{2k-2} - 21O_{2k-4} + 24O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 3O_{2k-2} + 3(3O_{2k-3} - 3O_{2k-4} + O_{2k-5}) - 21O_{2k-4} + 24O_{2k-5} - 8O_{2k-6} \\
&= 3O_{2k-2} - 3O_{2k-4} + O_{2k-6}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

A ve $B \neq 0$ herhangi iki tamsayı olmak üzere

$$\frac{A}{B} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{l-2} + \cfrac{1}{a_{l-1} + \cfrac{1}{a_l}}}}$$

açılımına basit sürekli kesirli açılım denir ve kısaca $\frac{A}{B} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_l]$ ile gösterilir. Buradaki l sayısına peryot uzunluğu denir. Örneğin,

$$\frac{158}{17} = 9 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

olduğundan $\frac{158}{17} = [9; 3, 2, 2]$ dir.

Aşağıdaki teoremde $\sqrt{O_k}$ ve $\frac{O_{k+1}}{O_k}$ nın basit sürekli kesirli açılımları verilmiştir.

2.1.4 Teorem. $\sqrt{O_k}$ nın basit sürekli kesirli devirli açılımı

$$\sqrt{O_k}=\begin{cases}[1;\overline{2}] & k=1 \text{ ise}\\ [k;\overline{2,2k}] & k>1 \text{ ise}\end{cases}$$

ve $\frac{O_{k+1}}{O_k}$ nın basit sürekli kesirli açılımı

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=\begin{cases}[1;\frac{k-1}{2},2] & k\geq 3 \text{ tek}\\ [1;\frac{k}{2}] & k\geq 4 \text{ çift}\end{cases}$$

dir (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. $k=1$ olsun. Bu takdirde $O_1=2$ olduğundan $\sqrt{2}=[1;\overline{2}]$ dir. $k>1$ için

$$\begin{aligned}\sqrt{O_k}&=k+(\sqrt{k^2+k}-k)=k+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{k^2+k}-k}}=k+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{k^2+k}+k}{k}}\\ &=k+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{k^2+k}-k}{k}}=k+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{k^2+k}+k}}\\ &=k+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2k+(\sqrt{k^2+k}-k)}}\end{aligned}$$

olduğundan $\sqrt{O_k}=[k;\overline{2,2k}]$ dır.

k tek tamsayı, yani $t\in\mathbb{Z}^+$ için $k=2t+1$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=\frac{k+2}{k}=\frac{2t+3}{2t+1}=1+\cfrac{1}{t+\cfrac{1}{2}}$$

olduğundan

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=[1;t,2]=[1;\frac{k-1}{2},2]$$

dir. k çift, yani $t\in\mathbb{Z}^+$ için $k=2t$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=\frac{k+2}{k}=\frac{t+1}{t}=1+\frac{1}{t}$$

olduğundan

$$\frac{O_{k+1}}{O_k}=[1;t]=[1;\frac{k}{2}]$$

dir.

Oblong sayılarının genel teriminin $O_k = k(k+1)$ olduğu dikkate alınırsa

$$O_k = k(k+1) \Leftrightarrow k=\frac{-1+\sqrt{1+4O_k}}{2}$$

olur. Buna göre, "O_k bir oblong sayısıdır $\Leftrightarrow 1+4O_k$ tam kare" dir. Dolayısıyla

$$o_k=\sqrt{1+4O_k}$$

bir tamsayı olup bu sayıya cooblong sayısı denir. Bu sayı dizisi ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

2.1.5 Teorem. Cooblong sayıları, $o_0=1,\ o_1=3, o_2=5$ ve $k \geq 3$ için

$$o_k=3o_{k-1}-3o_{k-2}+o_{k-3}$$

indirgeme bağıntısını gerçekler (Tekcan ve ark. 2013).

2.1.6 Teorem. Cooblong sayıların üreteç fonksiyonu

$$o(x)=\frac{1-x^2}{1-3x+3x^2-x^3}$$

dır (Tekcan ve ark. 2013).

Cooblong sayılarının terimleri arasında $k \geq 3$ için

$$o_{2k}=3o_{2k-2}-3o_{2k-4}+o_{2k-6}$$
$$o_{2k+1}=3o_{2k-1}-3o_{2k-3}+o_{2k-5}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı vardır. Üstelik $k \geq 1$ için

$$\frac{o_{k+1}}{o_k}=[1;k,2]$$

dir. Ancak $\sqrt{o_k}$ nın basit sürekli kesirli devirli açılımı k ya bağlı olarak tek türlü ifade edilemez. Çünkü belli bir düzen yoktur. Örneğin,

$$\sqrt{o_3}=[2;\overline{1,1,1,4}],\ \sqrt{o_8}=[4;\overline{8}],\ \sqrt{o_{10}}=[4;\overline{1,1,2,1,1,8}] \text{ ve } \sqrt{o_{13}}=[5;\overline{5,10}]$$

dir.

2.2 Pell Formu ve Oblong Sayıları

Bu bölümde Pell formu ve dolayısıyla bu forma karşılık gelen Pell denklemleri ile oblong sayıları arasındaki ilişki ele alınacaktır.

2.2.1 Tanım. $a,b,c\in \mathrm{P}$ olmak üzere

$$ax^2+bxy+cy^2$$

şeklindeki polinomlara kuadratik (ikinci dereceden) form denir ve kısaca $F=(a,b,c)$ ile gösterilir. Bu formun determinantı $\Delta=\Delta(F)$ ile gösterilir ve $\Delta(F)=b^2-4ac$ olarak tanımlanır (Flath 1989).

Determinantı ± 1 ve katsayıları tamsayı olan 2×2 lik matrislerin kümesi

$$\mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})=\left\{\begin{bmatrix} r & s\\ t & u\end{bmatrix}:\ r,s,t,u\in \mathrm{Z},\ ru-st=\pm 1\right\}$$

ile gösterilirse bu küme matrislerin çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup yardımıyla F formunun $g\in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ dönüşümü altındaki resmi

$$\begin{aligned} gF(x,y)= &(ar^2+brs+cs^2)x^2+(2art+bru+bts+2csu)xy\\ &+(at^2+btu+cu^2)y^2\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu tanıma dikkat edilirse

$$gF(x,y)=F(rx+ty,sx+uy)$$

dir. gF de bir kuadratik form olup F ile gF aynı determinantlı, yani

$$\Delta(F)=\Delta(gF)$$

dir.

F ve G herhangi iki kuadratik form olsun. $gF = G$ olacak şekilde en az bir $g \in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ varsa F ve G ye denk form denir. $\det(g)=1$ ise bu formlara has denk, $\det(g)=-1$ ise bu formlara has olmayan denk denir. $gF = F$ olacak şekildeki $g \in \mathrm{GL}(2,\mathrm{Z})$ dönüşümü-ne F nin bir otomorfizmi denir. $\det(g)=1$ ise g ye has otomorfizm, $\det(g)=-1$ ise g ye has olmayan otomorfizm denir. F nin has otomorfizmleri kümesi $\mathrm{Aut}^{+}(F)$ ile, has olmayan otomorfizmleri kümesi ise $\mathrm{Aut}^{-}(F)$ ile gösterilir.

2.2.2 Tanım. $\Delta \neq 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere Pell formu

$$F_{\Delta}(x,y)=\begin{cases} x^2-\dfrac{\Delta}{4}y^2 & \Delta \equiv 0(\mathrm{mod}\,4) \\ x^2+xy-\dfrac{1-\Delta}{4}y^2 & \Delta \equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Flath 1989).

O_k bir oblong sayısı olmak üzere $\Delta_k = 4O_k$ olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$F_{\Delta_k}(x,y)=x^2-O_k y^2$$

bir Pell form olup, bu form yardımıyla elde edilen

$$F_{\Delta_k}(x,y)=x^2-O_k y^2=1$$

denklemi ise bir Pell denklemidir. $o_k=\sqrt{1+4O_k}$ olduğu dikkate alınırsa bu Pell denkleminin tamsayı çözümleri ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

2.2.3 Teorem. $F_{\Delta_k}(x,y)=x^2-O_k y^2=1$ denkleminin temel çözümü $(x_1,y_1)=(o_k,O_1)$ ve diğer tüm tamsayı çözümleri, $n \geq 2$ için

$$\frac{x_n}{y_n}=\left[\frac{o_k-1}{2};\underbrace{O_1,o_k-1,O_1}_{n-1 \text{ tane}}\right]$$

olmak üzere (x_n,y_n) şeklindedir. Denklemin çözümleri arasında $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} x_n &= o_k x_{n-1}+O_1 O_k y_{n-1} \\ y_n &= O_1 x_{n-1}+o_k y_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntı ve $n \geq 4$ için

$$x_n = (2o_k - 1)(x_{n-1} + x_{n-2}) - x_{n-3}$$
$$y_n = (2o_k - 1)(y_{n-1} + y_{n-2}) - y_{n-3}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı vardır (Tekcan ve ark. 2013).

İspat. Teorem 2.1.4 gereği $\sqrt{O_k} = [k; \overline{2,2k}]$ olduğundan bu açılım

$$\sqrt{O_k} = \left[\frac{o_k - 1}{2}; \overline{O_1, o_k - 1}\right]$$

olarak yeniden yazılabilir. Buna göre

$$A_0 = \frac{o_k - 1}{2},\ A_1 = o_k,\ B_0 = 1,\ B_1 = O_1$$

olup denklemin temel çözümü $(x_1, y_1) = (A_1, B_1) = (o_k, O_1)$ dir. (x_{n-1}, y_{n-1}) in bu denklemin bir çözümü, yani $x_{n-1}^2 - O_k y_{n-1}^2 = 1$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{o_k - 1}{2} + \cfrac{1}{O_1 + \cfrac{1}{o_k - 1 + \cfrac{1}{O_1 + \cfrac{1}{\cdots + o_k - 1 + \cfrac{1}{O_1}}}}}$$

$$= \frac{o_k - 1}{2} + \cfrac{1}{O_1 + \cfrac{1}{\frac{o_k - 1}{2} + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}}}$$

$$= \frac{o_k x_{n-1} + O_1 O_k y_{n-1}}{O_1 x_{n-1} + o_k y_{n-1}}$$

dir. Buradan

$$x_n = o_k x_{n-1} + O_1 O_k y_{n-1} \text{ ve } y_n = O_1 x_{n-1} + o_k y_{n-1}$$

olduğu açıktır. Diğer yandan

$$x_n^2 - O_k y_n^2 = [o_k x_{n-1} + O_1 O_k y_{n-1}]^2 - O_k [O_1 x_{n-1} + o_k y_{n-1}]^2 = x_{n-1}^2 - O_k y_{n-1}^2 = 1$$

olduğundan (x_n, y_n) de verilen denklemin bir çözümüdür.

Benzer şekilde denklemin çözümleri arasında ve $n \geq 4$ için

$$x_n = (2o_k - 1)(x_{n-1} + x_{n-2}) - x_{n-3}$$
$$y_n = (2o_k - 1)(y_{n-1} + y_{n-2}) - y_{n-3}$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısı olduğu da gösterilebilir.

Yukarıdaki teoremde $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin $n\geq 2$ için

$$\frac{x_n}{y_n}=\left[\frac{o_k-1}{2};\underbrace{O_1,o_k-1,O_1}_{n-1 \text{ tane}}\right]$$

olmak üzere (x_n,y_n) şeklinde olduğu gösterildi. Bu denklemin tüm tamsayı çözümleri bu eşitlikten farklı olarak, oblong ve cooblong sayılarına bağlı olarak tanımlanan

$$M=\begin{bmatrix} o_k & O_1O_k \\ O_1 & o_k \end{bmatrix}$$

matrisinin *n*. kuvvetine bağlı olarak da verilebilir. Matrisin *n*. kuvveti aşağıdaki teoremde verilmiştir.

2.2.4 Teorem. n çift iken

$$M_{11}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}C(n,2i)o_k^{n-2i}O_1^{2i}O_k^i=M_{22}^n$$

$$M_{12}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}C(n,2i+1)o_k^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i+1}$$

$$M_{21}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}}C(n,2i+1)o_k^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i}$$

ve n tek iken

$$M_{11}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i)o_k^{n-2i}O_1^{2i}O_k^i=M_{22}^n$$

$$M_{12}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i+1)o_k^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i+1}$$

$$M_{21}^n=\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}}C(n,2i+1)o_k^{n-1-2i}O_1^{2i+1}O_k^{i}$$

olmak üzere *M* matrisinin *n*. kuvveti

$$M^n=\begin{bmatrix} M_{11}^n & M_{12}^n \\ M_{21}^n & M_{22}^n \end{bmatrix}$$

dir (Burada $C(n,i), n$ nin *i*-li kombinasyonudur) (Tekcan ve ark. 2013).

Yukarıdaki teorem dikkate alındığında $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri aşağıdaki gibi verilebilir.

2.2.5 Teorem. $n \geq 2$ tamsayısı için

$$x_n = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} C(n,2i) o_k^{n-2i} O_1^{2i} O_k^{i} & n \text{ çift} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C(n,2i) o_k^{n-2i} O_1^{2i} O_k^{i} & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} C(n,2i+1) o_k^{n-1-2i} O_1^{2i+1} O_k^{i} & n \text{ çift} \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C(n,2i+1) o_k^{n-1-2i} O_1^{2i+1} O_k^{i} & n \text{ tek} \end{cases}$$

olmak üzere, $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri (x_n, y_n) şeklindedir (Tekcan ve ark. 2013).

Yukarıdaki matrisin transpozu kullanılarak $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri ve F_{Δ_k} Pell formunun has otomorfizmleri kümesi de elde edilebilir. Buna göre,

$$g_{F_{O_k}} = M^T = \begin{bmatrix} o_k & O_1 \\ O_1 O_k & o_k \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

2.2.6 Teorem. F_{Δ_k} Pell formunun has otomorfizmleri kümesi

$$\mathrm{Aut}^+(F_{\Delta_k}) = \{\pm g_{F_{\Delta_k}}^n : n \in \mathrm{Z}\}$$

ve $F_{\Delta_k}(x,y)=1$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = (g_{F_{\Delta_k}}^n)^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir (Tekcan ve ark. 2013).

Örneğin, $k=3$ olsun. Bu takdirde $O_3=12$, $o_3=7$ olup $F_{\Delta_3}(x,y)=x^2-12y^2=1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1,y_1)=(7,2)$ dir. Denklemin diğer tamsayı çözümleri ise

$$\frac{x_2}{y_2}=[3;2,6,2]=\frac{97}{28}$$
$$\frac{x_3}{y_3}=[3;2,6,2,6,2]=\frac{1351}{390}$$
$$\frac{x_4}{y_4}=[3;2,6,2,6,2,6,2]=\frac{18817}{5432}$$
$$\frac{x_5}{y_5}=[3;2,6,2,6,2,6,2,6,2]=\frac{362087}{75658}$$
$$\frac{x_6}{y_6}=[3;2,6,2,6,2,6,2,6,2,6,2]=\frac{3650401}{2107560}$$
$$\ldots$$

şeklindedir. Diğer yandan

$$g_{F_{\Delta_3}}=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 24 & 7\end{bmatrix}$$

olduğundan F_{Δ_3} ün has otomorfizmleri kümesi

$$\mathrm{Aut}^+(F_{\Delta_3})=\{\pm g_{F_{\Delta_3}}^n : n\in Z\}$$

dir. Benzer şekilde $F_{\Delta_3}(x,y)=x^2-12y^2=1$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri

$$\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=(g_{F_{\Delta_3}}^2)^T\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}97\\ 28\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\end{bmatrix}=(g_{F_{\Delta_3}}^3)^T\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1351\\ 390\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_4\\ y_4\end{bmatrix}=(g_{F_{\Delta_3}}^4)^T\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18817\\ 5432\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_5\\ y_5\end{bmatrix}=(g_{F_{\Delta_3}}^5)^T\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}262087\\ 75658\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_6\\ y_6\end{bmatrix}=(g_{F_{\Delta_3}}^6)^T\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3650401\\ 2107560\end{bmatrix}$$
$$\ldots$$

şeklindedir.

3. BALANS SAYILARI

Bu bölümde balans sayıları ve bu sayıların bazı temel özellikleri, bu sayıların Pell ve Pell-Lucas sayıları ve Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri ile olan ilişkisi üzerinde durulacaktır.

3.1 Balans Sayıları

Balans sayıları ve bu sayıların özelikle de Pell ve Pell-Lucas sayıları ile olan ilişkisi son yıllarda birçok kişi tarafından çalışılmış ve halen de çalışılmaya devam etmektedir. Behera ve Panda (1999) balans sayıları için aşağıdaki özellikleri elde etmişlerdir.

3.1.1 Teorem. B_n balans sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 3+\sqrt{8}$$

dir (Behera ve Panda 1999).

3.1.2 Teorem. Her bir $n>1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} B_{n+1}B_{n-1} &= (B_n+1)(B_n-1) \\ B_n &= B_k B_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1} \\ B_{2n} &= B_n^2 - B_{n-1}^2 \\ B_{2n+1} &= B_n(B_{n+1}-B_{n-1}) \end{aligned}$$

dir (Behera ve Panda 1999).

Daha sonra Panda (2009) aşağıdaki iki teoremi elde etmiştir.

3.1.3 Teorem. m ve k, $k<m$ özelliğinde doğal sayılar olmak üzere

$$(B_m+B_k)(B_m-B_k) = B_{m+k}B_{m-k}$$

dır (Panda 2009).

3.1.4 Teorem. B_m balans sayı için

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_{2m-1} = B_m^2$$
$$B_2 + B_4 + \cdots + B_{2m} = B_m B_{m+1}$$
$$B_1 + B_2 + \cdots + B_{2m} = B_m (B_m B_{m+1})$$

dir (Panda 2009).

Ray (2012), balans sayılarına bağlı olarak tanımladığı

$$M_B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kompanion matrisini ele alarak bu matrisin *n*. kuvveti ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi vermiştir.

3.1.5 Teorem. M_B matrisinin *n*. kuvveti

$$M_B^n = \begin{bmatrix} B_{n+1} & -B_n \\ B_n & -B_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir (Ray 2012).

Üstelik bu eşitlik yardımıyla aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

3.1.6 Sonuç. Her $k,l \geq 1$ tamsayıları için

$$B_k^2 - B_{k-1}B_{k+1} = 1 \text{ ve } B_{k+l} = B_k B_{l+1} - B_{k-1} B_l$$

dir (Ray 2012).

Ray (2012), balans sayılarının terimleri arasında aşağıdaki gibi bağıntılar elde etmiştir.

3.1.7 Teorem. $k,m,n,s\,(m>0)$ özelliğinde tamsayılar olmak üzere

$$B_s^m B_{km+n} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} B_k^j B_{k-s}^{m-j} B_{js+n}$$
$$B_s^m C_{km+n} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} B_k^j B_{k-s}^{m-j} C_{js+n}$$

dir (Ray 2012).

3.1.8 Sonuç. $k > l \geq 1$ özelliğindeki her k ve l tamsayıları için

$$B_{k-n}B_{k+n} = B_k^2 - B_n^2,\ B_{2n} = 2B_nC_n \text{ ve } C_{2n} = C_n^2 + 8B_n^2$$

dir (Ray 2012).

3.1.9 Teorem. Her $n, k \neq 0$ tamsayıları için

$$\frac{B_{kn}}{B_k} \equiv \begin{cases} 2m+1\ (\bmod 8B_k^2) & n = 2m+1 \text{ ise} \\ 2mC_k\ (\bmod 8B_k^2) & n = 2m \text{ ise} \end{cases}$$

dir (Ray 2012).

3.1.10 Teorem. Her $m, n \geq 1$ tamsayısı için

$$B_{mn} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} B_m^i B_{m-1}^{n-i} B_i \equiv 0 (\bmod B_m)$$

dir (Ray 2012).

3.1.11 Tanım. p asal ve $(a, p) = 1$ olmak üzere, Legendre sembolü $\left(\frac{a}{p}\right)$ ile gösterilir ve

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & x^2 \equiv a (\bmod p) \text{ çözümü var} \\ 0 & p \mid a \\ -1 & x^2 \equiv a (\bmod p) \text{ çözümü yok} \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Mollin 2008).

Legendre sembolünü kullanarak Ray (2012), aşağıdaki iki teoremi elde etmiştir.

3.1.12 Teorem. Her p tek asal sayısı için

$$C_p \equiv 3 (\bmod p) \text{ ve } B_p \equiv \left(\frac{p}{8}\right) (\bmod p)$$

dir (Ray 2012).

3.1.13 Teorem. Her p tek asal sayısı için

$$B_{p-1} \equiv 3\left(\left(\frac{p}{8}\right) - 1\right) (\bmod p)$$

ve

$$B_{p+1} \equiv 3\left(\left(\frac{p}{8}\right)+1\right)(\mathrm{mod}\ p)$$

dir (Ray 2012).

Ray (2012), herhangi iki B_m, B_n balans sayılarının obebini (B_m, B_n) ile göstermiş ve

$$(B_m, B_n) = B_{(m,n)}$$

olduğunu ispatlamıştır. Üstelik balans sayıları arasındaki bölünebilme özelliğinin

$$B_m \mid B_n \Leftrightarrow m \mid n$$

şeklinde olduğunu göstermiştir.

Ayrıca Ray (2013), aşağıdaki bağıntıları elde etmiştir.

3.1.14 Teorem. Her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned}
&B_{4n} - 6 = 2B_{2n-1}C_{2n+1}\\
&B_{4n+1} + 1 = 2B_{2n+1}C_{2n}\\
&B_{4n+2} + 6 = 2B_{2n+2}C_{2n}\\
&B_{4n+3} - 1 = 2B_{2n+1}C_{2n+2}\\
&B_{2n} = 2B_nC_n\\
&B_{4n+1} - 1 = 2B_{2n}C_{2n+1}\\
&B_{4n+3} + 1 = 2B_{2n+2}C_{2n+1}\\
&B_{4n+3} + 1 = 4B_{n+1}C_{n+1}C_{2n+1}\\
&C_{4n+1} - 3 = 16B_{2n}B_{2n+1}\\
&C_{4n+1} + 3 = 2C_{2n}C_{2n+1}\\
&C_{4n+3} + 3 = 2C_{2n+1}C_{2n+2}\\
&C_{4n+3} - 3 = 16B_{2n+1}B_{2n+2}\\
&C_{4n+3} - 3 = 32B_{n+1}C_{n+1}B_{2n+1}
\end{aligned}$$

dir (Ray 2013)

Ray (2013a), balans ve Lucas-balans sayılarının negatiflerini

$$B_{-n} = 6B_{-n+1} - B_{-n+2} = -B_n \quad \text{ve} \quad C_{-n} = 6C_{-n+1} - C_{-n+2} = C_n$$

olarak tanımlamış ve aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

3.1.15 Teorem. B_{-n} ve C_{-n} negatif balans sayıları için

$$B_{-(n+1)} = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left[-6 - 2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right]$$

ve

$$C_{-n} = \frac{(-1)^{n-2}}{2} \prod_{k=1}^{n} \left[-6 - 2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n} \right) \right]$$

dir (Ray 2013a)

Yukarıda verilen teoremlerden farklı olarak Gözeri ve ark. (2013) ise balans sayıları ve bu sayıların Pell sayıları ile olan ilişkisi üzerine aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

3.1.16 Teorem. Balans sayıları için

(1) Balans sayılarının genel terimleri

$$B_n = P_n^2 + P_n P_{n-1}$$
$$b_n = \begin{cases} P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} & n \geq 1 \text{ tek} \\ P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} - 1 & n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

dir.

(2) Ardışık iki balans ve cobalans sayılarının toplamı

$$B_n + B_{n-1} = P_{2n-1} + P_{2n-2}, \ \ n \geq 1$$
$$b_n + b_{n-1} = P_{2n-2} + P_{2n-3} - 1, \ n \geq 2$$

ve farkı

$$B_n - B_{n-1} = P_n^2 + P_{n-1}^2, \ n \geq 1$$
$$b_n - b_{n-1} = P_{2n-2}, \ n \geq 1$$

dir.

(3) $n \geq 1$ tek tamsayısı için *n*. balans ve cobalans sayılarının toplamı tam karedir ve

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2$$

dir. Farkları ise iki kare farkıdır ve

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2$$

dir. $n \geq 2$ çift tamsayısı için *n*. balans ve cobalans sayılarının toplamı tam karenin 1 eksiğidir ve

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2 - 1$$

dir. Farkları ise iki kare farkının 1 fazlasıdır ve

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2 + 1$$

dir. Esasında tüm $n \geq 1$ için n. balans ve cobalans sayılarının toplamı

$$B_n + b_n = \frac{P_{2n} + P_{2n-1} - 1}{2}$$

ve farkı

$$B_n - b_n = \frac{P_{2n} - P_{2n-1} + 1}{2}$$

dır.

(4) n. balans sayısının cobalans sayısına oranı

$$\frac{B_n}{b_n} = \begin{cases} \dfrac{P_n}{P_{n-1}} & n \geq 3 \text{ tek} \\ \dfrac{P_n + P_{n-1}}{P_{n-1} + P_{n-2}} & n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

dir. Tüm $n \geq 1$ için bu oran $\dfrac{B_n}{b_n} = \dfrac{P_{2n}}{P_{2n-1} - 1}$ dir.

(5) $n \geq 1$ tamsayısı için n. balans ve cobalans sayılarının kareleri toplamı

$$B_n^2 + b_n^2 = 5b_n^2 + (B_{n-1} + 1)(B_{n-1} + 4b_n + 1)$$

ve kareleri farkı

$$B_n^2 - b_n^2 = B_n + 2B_n b_n + b_n$$

dır.

(6) $n \geq 1$ tamsayısı için n. Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının genel terimleri

$$C_n = 2B_n + 2b_n + 1 \text{ ve } c_n = 2B_n - 2b_n - 1$$

dır.

(7) $n \geq 1$ tamsayısı için n. Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının toplamı ve farkı

$$C_n + c_n = 4B_n \text{ ve } C_n - c_n = 4b_n + 2$$

dir.

(8) $n \geq 1$ tamsayısı için *n*. Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının kareleri toplamı

$$C_n^2 + c_n^2 = 2C_n(C_n - c_n) - 2$$

ve kareleri farkı

$$C_n^2 - c_n^2 = 2C_n c_n + 2$$

dir.

(9) Ardışık iki Pell sayısının toplamı

$$P_n + P_{n+1} = 1 + 2\begin{cases} B_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n+1}{2}} & n \geq 1 \text{ tek} \\ B_{\frac{n+2}{2}} - b_{\frac{n+2}{2}} - 1 & n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

ve ardışık iki Pell sayısının kareleri farkı

$$P_n^2 - P_{n-1}^2 = \begin{cases} b_n + B_{n-1} + 1 & n \geq 1 \text{ tek} \\ b_n + B_{n-1} & n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

dır (Gözeri ve ark, 2013).

3.2 Balans ve Cobalans Fonksiyonları

Bu alt bölümde balans ve cobalans sayılarına bağlı olarak tanımlanan fonksiyonlar ele alınacaktır.

Behera ve Panda (1999) verilen herhangi bir *x* balans sayısı için

$$F(x) = 2x\sqrt{8x^2+1},\ G(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1} \text{ ve } H(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2+1}$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve bu fonksiyonlarla ilgili olarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

3.2.1 Teorem. Verilen *x* balans sayısı için $F(x)$, $G(x)$ ve $H(x)$ değerleri de birer balans sayısıdır (Behera ve Panda 1999).

Üstelik *x* balans sayısı için $F(x)$ daima çifttir. Ancak *x* tek iken $G(x)$ çift ve *x* çift iken $G(x)$ tektir.

Behera ve Panda (1999), ayrıca verilen herhangi iki x ve y balans sayısı için

$$f(x,y)=x\sqrt{8y^2+1}+y\sqrt{8x^2+1}$$

fonksiyonunu tanımlayarak aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

3.2.2 Teorem. Verilen herhangi iki x ve y balans sayısı için $f(x,y)$ değeri de bir balans sayısıdır (Behera ve Panda 1999).

Benzer düşünce ile Ray (2009), verilen herhangi iki x ve y cobalans sayıları için

$$f(x)=3x+\sqrt{8x^2+8x+1}+1$$
$$g(x)=17x+6\sqrt{8x^2+8x+1}+8$$
$$h(x)=8x^2+8x+1+(2x+1)\sqrt{8x^2+8x+1}+1$$
$$t(x,y)=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}2(2x+1)(2y+1)+(2x+1)\sqrt{8y^2+8y+1}\\+(2y+1)\sqrt{8x^2+8x+1}+\sqrt{8x^2+8x+1}\sqrt{8y^2+8y+1}-1\end{array}\right]$$

fonksiyonlarını tanımlamış ve aşağıdaki iki teoremi elde etmiştir.

3.2.3 Teorem. Verilen herhangi iki x, y cobalans sayıları için $f(x), g(x), h(x)$ ve $t(x,y)$ değerleri de birer cobalans sayısıdır (Ray 2009).

3.2.4 Teorem. Eğer x bir cobalans sayısı ise, x den sonraki cobalans sayısı $f(x)$ ve x den önceki cobalans sayısı

$$\tilde{f}(x)=3x-\sqrt{8x^2+8x+1}+1$$

dir (Ray 2009).

3.3 Balans, Pell ve Pell-Lucas Sayılarının Toplamları

Bu alt bölümde balans, Pell ve Pell-Lucas sayılarının toplamları ele alınacak ve bu toplamlar arasında bazı cebirsel bağıntılar verilecektir. Ayrıca bu bölümde Pell ve Pell-Lucas sayılarının bazı toplamlarının, balans sayılarına bağlı olarak ifade edilebileceği gösterilecektir.

Balans sayılarının ilk $n-$terim toplamları

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = \frac{5B_n - B_{n-1} - 1}{4}, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{B_n - n}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} C_i = \frac{7B_n - B_{n-1} - 1}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{3B_n - B_{n-1} - 1}{2}$$

dır. Benzer şekilde tek ve çift terimleri toplamları ise

$$\sum_{i=1}^{n} B_{2i} = \frac{33B_{2n} - B_{2n-2} - 6}{32} \qquad \sum_{i=0}^{n} B_{2i+1} = \frac{33B_{2n+1} - B_{2n-1} - 2}{32}$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_{2i} = \frac{33b_{2n} - b_{2n-2} - 16n + 14}{32} \qquad \sum_{i=0}^{n} b_{2i+1} = \frac{33b_{2n+1} - b_{2n-1} - 16n + 2}{32}$$
$$\sum_{i=1}^{n} C_{2i} = \frac{33C_{2n} - C_{2n-2} - 16}{32} \qquad \sum_{i=0}^{n} C_{2i+1} = \frac{33C_{2n+1} - C_{2n-1}}{32}$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_{2i} = \frac{33c_{2n} - c_{2n-2} - 8}{32} \qquad \sum_{i=0}^{n} c_{2i+1} = \frac{33c_{2n+1} - c_{2n-1} - 8}{32}$$

dir.

Pell sayılarının toplamı ile balans sayıları arasındaki belki de en önemli bağıntı, Panda ve Ray (2011) tarafından elde edilmiş olup bu bağıntı aşağıdaki gibidir.

3.3.1 Teorem. İlk $2n-1$Pell sayısının toplamı, n.balans ve n.cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + b_n$$

dir (Panda ve Ray 2011).

Üstelik Panda ve Ray (2011), yukarıdaki teoremden farklı olarak aşağıdaki bağıntıları elde etmişlerdir.

3.3.2 Teorem. P_n Pell sayısı olmak üzere,

(1) İlk $2n$ Pell sayısının toplamı, n. balans ve $(n+1)$. cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} P_i = B_n + b_{n+1}$$

dir.

(2) 1 den n ye kadar çift Pell sayılarının toplamı $(n+1).$ cobalans sayısı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} = b_{n+1}$$

dir.

(3) 1 den n ye kadar tek Pell sayılarının toplamı n. balans sayısı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} = B_n$$

dir (Panda ve Ray 2011).

Benzer şekilde, Gözeri ve ark. (2013) aşağıdaki iki teoremi elde etmişlerdir.

3.3.3 Teorem. P_n Pell sayısı olmak üzere,

(1) 0 dan $2n$ ye kadar $(2i+1).$ ve $(2i+2).$ Pell sayılarının toplamı, $(n+1).$ Lucas-balans ve $(n+1).$ Lucas-cobalans sayılarının çarpımı, yani

$$\sum_{i=0}^{2n} (P_{2i+1} + P_{2i+2}) = C_{n+1} c_{n+1}$$

dir.

(2) 0 dan $2n$ ye kadar $(2i+1).$ Pell sayılarının toplamı, $(n+1).$ Lucas-cobalans ve $(2n+1).$ Pell sayılarının çarpımı, yani

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = c_{n+1} P_{2n+1}$$

dir.

(3) 1 den $2n$ ye kadar $(2i).$ Pell sayılarının toplamının yarısı, $n.$ balans sayısı ile $(n+1).$ Lucas-cobalans sayılarının çarpımı, yani

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n} P_{2i}}{2} = B_n c_{n+1}$$

dir.

(4) 1 den $2n$ ye kadar $(2i+1)$. Pell sayılarının toplamının yarısı, $n.$ balans sayısı ile $(n+1)$. Lucas-balans sayılarının çarpımı, yani

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n} P_{2i+1}}{2} = B_n C_{n+1}$$

dır.

(5) 1 den $2n$ ye kadar $(2i-1)$. Pell sayılarının toplamının yarısı, $n.$ balans sayısı ile $n.$ Lucas-balans sayılarının çarpımı, yani

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1}}{2} = B_n C_n$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

3.3.4 Teorem. B_n balans sayısı olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{2n} B_i = B_n c_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} B_i = B_{n+1} c_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} B_{2i} = C_n c_{n+1} P_{2n} P_{2n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n} (B_i + B_{i+1}) = 8 B_n B_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (B_i + B_{i+1}) = c_{n+1} c_{n+2} \qquad \sum_{i=0}^{2n} (B_{2i+1} + B_{2i+2}) = c_{n+1} c_{2n+2} P_{2n+1}$$

dir (Gözeri ve ark, 2013).

3.3.1 Teoremine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.5 Teorem. İlk $2n-1$ Pell-Lucas sayısının toplamı, n.Lucas-balans ve n.Lucas-co-balans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n-1} Q_i = C_n + c_n$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

Yukarıdaki teoreme ilave olarak Pell-Lucas sayılarının toplamları ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.6 Teorem. Q_n Pell-Lucas sayısı olmak,

(1) 1 den $2n$ ye kadar Pell-Lucas sayılarının toplamı, $(n+1)$. cobalans sayısının dört katı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_i = 4b_{n+1}$$

dir.

(2) 1 den n ye kadar $(2i-1)$. Pell-Lucas sayılarının toplamı, n. balans, n. cobalans ve 1 den n ye kadar Lucas-cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{2i-1} = B_n + b_n + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

dir.

(3) 1 den n ye kadar $(2i)$. Pell-Lucas sayılarının toplamı, $(n+1)$. balans, n. cobalans ve 1 den $(n-1)$ e kadar Lucas-balans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{2i} = B_{n+1} + b_n + \sum_{i=1}^{n-1} C_i$$

dir.

(4) Üstelik

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i} = 8B_n(2b_{n+1}+1)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} Q_i = 2(2B_{n+1}-1)$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

Santana ve Diaz Barrero (2006), Pell sayılarının toplamını ele almışlar ve ilk $4n+1$ Pell sayılarının toplamının bir tam kare, yani

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i \right)^2$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu bağıntıya benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.7 Teorem. P_n Pell, Q_n Pell-Lucas ve B_n balans sayıları olmak üzere,

(1) 1 den $4n-3$ e kadar Pell sayılarının toplamı, $n.$ Lucas-cobalans sayısının karesi, yani

$$\sum_{i=1}^{4n-3} P_i = c_n^2$$

dir.

(2) 1 den $4n-1$ e kadar Pell sayılarının toplamının 1 fazlası, $n.$ Lucas-balans sayısının karesi, yani

$$1+\sum_{i=1}^{4n-1} P_i = C_n^2$$

dir.

(3) 1 den $2n$ ye kadar $(2i-1).$ Pell-Lucas sayılarının toplamı, $n.$ balans sayısının 4 katının karesi, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = (4B_n)^2$$

dir.

(4) 0 dan $2n$ ye kadar $(2i+1).$ Pell-Lucas sayılarının toplamının yarısı, $(n+1).$ Lucas-cobalans sayısının karesi, yani

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = c_{n+1}^2$$

dir.

(5) 1 den $2n$ ye kadar $(2i-1).$ balans sayılarının toplamı, $(2n).$ balans sayısının karesi, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} = B_{2n}^2$$

dir.

(6) 0 dan $2n$ ye kadar $(2i+1).$ balans sayılarının toplamı, $(2n).$ ve $(2n+1).$ Pell sayılarının toplamının, $(2n+1).$ Pell sayısı ile çarpımının karesi, yani

$$\sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1} = [P_{2n+1}(P_{2n}+P_{2n+1})]^2$$

dir.

(7) 1 den $2n$ ye kadar $(2i-1)$. balans sayılarının toplamı, n. Lucas-balans ve $(2n)$. Pell sayılarının çarpımının karesi, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} = (C_n P_{2n})^2$$

dir (Gözeri ve ark, 2013).

Santana ve Diaz Barrero (2006), ayrıca Pell sayılarının toplamları ile ilgili olarak, P_{2n+1} Pell sayısının, 0 dan $(2n)$ ye kadar $(2i+1)$. Pell sayılarının toplamını böldüğünü ve P_{2n} Pell sayısının da 1 den $(2n)$ ye kadar $(2i-1)$. Pell sayılarının toplamını böldüğünü, yani

$$P_{2n+1} \left| \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \right. \quad \text{ve} \quad P_{2n} \left| \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} \right.$$

olduğunu göstermişlerdir. Aslında yukarıdaki toplamlar daha açık bir şekilde yazılmak istenirse

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = P_{2n+1}(P_{2n} + P_{2n+1}) \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} = P_{2n}(P_{2n} + P_{2n-1})$$

olduğu görülür. Dolayısıyla da

$$(P_{2n} + P_{2n+1}) \left| \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \right. \quad \text{ve} \quad (P_{2n} + P_{2n-1}) \left| \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} \right.$$

dir. Yukarıda verilen teoremler dikkate alındığında bölünebilme ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

3.3.8 Teorem. P_n Pell, Q_n Pell-Lucas ve B_n balans sayıları olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

$$B_n \left| \sum_{i=1}^{2n} B_i \right. \qquad c_n \left| \sum_{i=1}^{4n-3} P_i \right. \qquad c_{n+1} \left| \sum_{i=1}^{2n} B_i \right. \qquad c_{n+1} \left| \sum_{i=1}^{2n+1} B_i \right.$$

$$C_n \left| \sum_{i=1}^{2n} B_{2i} \right. \qquad c_{n+1} \left| \sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1} \right. \qquad P_{2n} \left| \sum_{i=1}^{2n} B_{2i} \right. \qquad P_{2n+1} \left| \sum_{i=1}^{2n} B_{2i} \right.$$

$$P_{2n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \qquad c_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} B_{2i} \qquad B_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n+1} B_{i} \qquad B_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} (B_{i} + B_{i+1})$$

$$C_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} P_{2i+1} \qquad B_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} P_{2i} \qquad B_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} P_{2i+1} \qquad B_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} (B_{i} + B_{i+1})$$

$$B_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} \qquad c_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} P_{2i} \qquad B_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} \qquad C_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} (P_{2i+1} + P_{2i+2})$$

$$c_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \qquad P_{2n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} \qquad C_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} \qquad c_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} (B_{2i+1} + B_{2i+2})$$

$$b_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} Q_{i} \qquad B_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} Q_{2i} \qquad C_{n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} \qquad c_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} (P_{2i+1} + P_{2i+2})$$

$$B_{2n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} \qquad P_{2n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1} \qquad P_{2n} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} \qquad P_{2n+1} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} (B_{2i+1} + B_{2i+2})$$

$$P_{2n} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} P_{2i-1} \qquad c_{2n+2} \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2n} (B_{2i+1} + B_{2i+2}) \qquad c_{n+1} \,\Big|\, \sum_{i=1}^{2n+1} (B_{i} + B_{i+1})$$

(Gözeri ve ark, 2013).

3.4 Tam Kareler, Pisagor Üçlüleri ve Kongruent Sayılar

Bu kısımda balans, Pell ve Pell-Lucas sayıları ile ilgili tam kareler ele alınacak ve balans sayılarına bağlı olarak Pisagor üçlüleri elde edilecektir. Elde edilen bu Pisagor üçlüleri yardımıyla balans sayılarına bağlı olarak kongruent sayıları verilecektir.

3.4.1 Teorem. P_n Pell ve b_n cobalans sayılar olmak üzere,

(1) Her $n \geq 1$ tek tamsayısı için $P_n^2 + 4b_n$ tam karedir ve

$$P_n^2 + 4b_n = (P_n + 2P_{n-1})^2$$

dir.

(2) Her $n \geq 2$ çift tamsayısı ise $P_n^2 + 4b_n + 4$ tam karedir ve

$$P_n^2 + 4b_n + 4 = (P_n + 2P_{n-1})^2$$

dir (Gözeri ve ark, 2013).

İspat. (1) $n = 2k+1$ olsun. Pell ve cobalans sayılarının Binet formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
P_n^2 + 4b_n &= \left(\frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{\alpha^{4k+1} - \beta^{4k+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\alpha^{4k+2} - 2(\alpha\beta)^{2k+1} + \beta^{4k+2}}{8} + \frac{\alpha^{4k+1} - \beta^{4k+1} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\alpha^{4k+2}(9 - 4\sqrt{2}) + \beta^{4k+2}(9 + 4\sqrt{2}) - 14}{8} \\
&= \left[\frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{2\sqrt{2}} + 2\left(\frac{\alpha^{2k} - \beta^{2k}}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2 \\
&= (P_n + 2P_{n-1})^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

3.4.2 Teorem. B_n balans, b_n cobalans, C_n Lucas-balans, c_n Lucas-cobalans, P_n Pell ve Q_n Pell-Lucas sayılar olmak üzere,

(1) Her $n \geq 1$ tamsayısı için $b_n^2 + B_n + b_n + 2B_n b_n$ tam karedir ve

$$b_n^2 + B_n + b_n + 2B_n b_n = B_n^2$$

dir. Benzer şekilde $B_n^2 - B_n - b_n - 2B_n b_n$ de tam karedir ve

$$B_n^2 - B_n - b_n - 2B_n b_n = b_n^2$$

dir.

(2) Her $n \geq 1$ tamsayısı için $2P_{2n}^2 + 1$ tam karedir ve

$$2P_{2n}^2 + 1 = C_n^2$$

dir. Benzer şekilde $2P_{2n-1}^2 - 1$ de tam karedir ve

$$2P_{2n-1}^2 - 1 = c_n^2$$

dir.

(3) Her $n \geq 0$ tamsayısı için $P_{n+1}^2 + P_n P_{n+2}$ tam karedir ve

$$P_{n+1}^2 + P_n P_{n+2} = (P_n + P_{n+1})^2$$

dir.

(4) $n \geq 1$ tek tamsayısı için $2(P_{n+1}^2 + P_n P_{n+2} - 1)$ tam karedir ve

$$2(P_{n+1}^2 + P_n P_{n+2} - 1) = (P_{n+2} - P_n)^2$$

dir.

(5) Her $n \geq 0$ tamsayısı için $P_{2n+1}^2 + P_{2n} P_{2n+2}$ tam karedir ve

$$P_{2n+1}^2 + P_{2n} P_{2n+2} = (B_n + B_{n+1})^2$$

dir.

(6) Her $n \geq 1$ tamsayısı için $Q_{4n+2} - 2$ tam karedir ve

$$4Q_{4n+2} - 2 = (4B_n + 4b_{n+1} + 2)^2$$

dir (Gözeri ve ark, 2013).

a, b, c pozitif tamsayılar olmak üzere

$$a^2 + b^2 = c^2$$

özelliğindeki (a, b, c) üçlüsüne Pisagor (Pythagorean) üçlüsü denir. Tamsayı dizileri ile Pisagor üçlüleri arasında bir ilişki vardır. Örneğin, P_n Pell tamsayıları için

$$(2P_n P_{n+1}, P_{n+1}^2 - P_n^2, P_{n+1}^2 + P_n^2)$$

bir Pisagor üçlüsüdür.

a, b, c bir dik üçgenin kenarlarını göstermek üzere, üçgenin alanı olan $\frac{ab}{2}$ tamsayı ise bu tamsayıya bir kongruent (OEIS A003273) sayı denir. Örneğin, kenar uzunlukları

$$\frac{20}{3}, \frac{3}{2} \text{ ve } \frac{41}{6}$$

olan dik üçgenin alanı 5 olduğundan 5 bir kongruent sayıdır. Üstelik (a, b, c) bir Pisagor üçlüsü ise $\frac{ab}{2}$ bir kongruent sayıdır. Pell tamsayılarının yukarıdaki Pisagor üçlülerine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.4.3 Teorem. B_n balans ve b_n cobalans sayılar olmak üzere,

(1) Her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$(B_{n+1} - b_{n+1},\ B_{n+1} - b_{n+1} - 1,\ 2b_{n+1} + 1)$$

bir Pisagor üçlüsüdür.

(2) Her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$x = 4(-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^n B_i,\ y = (-1)^n \left[1 + 4\sum_{i=1}^{n} (-1)^n B_i\right],\ z = B_{n+1} - B_n$$

olmak üzere (x, y, z) bir Pisagor üçlüsüdür.

(3) Her $n \geq 1$ tek tamsayısı için

$$a_1 = (b_{\frac{n+3}{2}} - b_{\frac{n+1}{2}})(b_{\frac{n+3}{2}} - 2b_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n-1}{2}})$$
$$b_1 = 3B^2_{\frac{n+1}{2}} + 2B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n-1}{2}} - B^2_{\frac{n-1}{2}}$$
$$c_1 = 5B^2_{\frac{n+1}{2}} - 2B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n-1}{2}} + B^2_{\frac{n-1}{2}}$$

olmak üzere (a_1, b_1, c_1) bir Pisagor üçlüsü ve her $n \geq 2$ çift tamsayısı için

$$a_2 = (b_{\frac{n+2}{2}} - b_{\frac{n}{2}})(b_{\frac{n+4}{2}} - 2b_{\frac{n+2}{2}} + b_{\frac{n}{2}})$$
$$b_2 = B^2_{\frac{n+2}{2}} - 2B_{\frac{n+2}{2}} B_{\frac{n}{2}} - 3B^2_{\frac{n}{2}}$$
$$c_2 = B^2_{\frac{n+2}{2}} - 2B_{\frac{n+2}{2}} B_{\frac{n}{2}} + 5B^2_{\frac{n}{2}}$$

olmak üzere (a_2, b_2, c_2) bir Pisagor üçlüsüdür (Gözeri ve ark. 2013).

İspat. (1) Balans ve cobalans sayılarının Binet formüllerinin

$$B_n = \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}} \text{ ve } b_n = \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

şeklinde olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
(B_{n+1} - b_{n+1})^2 + (B_{n+1} - b_{n+1} - 1)^2 &= \left(\frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}} - \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}} - \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - 1 \right)^2 \\
&= \frac{2\begin{bmatrix} (\alpha^{2n+2} - \alpha^{2n+1})^2 - 2(\alpha^{2n+2} - \alpha^{2n+1}) \\ (\beta^{2n+2} - \beta^{2n+1}) + (\beta^{2n+2} - \beta^{2n+1})^2 \end{bmatrix} + 16}{32} \\
&= \left[2\left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) + 1 \right]^2 \\
&= (2b_{n+1} + 1)^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.4.4 Sonuç. B_n balans ve b_n cobalans sayılar olmak üzere,

(1) Her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$\frac{(B_{n+1} - b_{n+1})(B_{n+1} - b_{n+1} - 1)}{2}$$

ve

$$\left(2(-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^n B_i\right)\left((-1)^n \left[1 + 4\sum_{i=1}^{n} (-1)^n B_i\right]\right)$$

kongruent sayılardır.

(2) Her $n \geq 1$ tek tamsayısı için

$$\frac{[(b_{\frac{n+3}{2}} - b_{\frac{n+1}{2}})(b_{\frac{n+3}{2}} - 2b_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n-1}{2}})][3B^2_{\frac{n+1}{2}} + 2B_{\frac{n+1}{2}}B_{\frac{n-1}{2}} - B^2_{\frac{n-1}{2}}]}{2}$$

ve her $n \geq 2$ çift tamsayısı için

$$\frac{[(b_{\frac{n+2}{2}} - b_{\frac{n}{2}})(b_{\frac{n+4}{2}} - 2b_{\frac{n+2}{2}} + b_{\frac{n}{2}})][B^2_{\frac{n+2}{2}} - 2B_{\frac{n+2}{2}}B_{\frac{n}{2}} - 3B^2_{\frac{n}{2}}]}{2}$$

de birer kongruent sayıdır (Gözeri ve ark 2013).

3.5 Balans Sayıların Oblong Sayılar İle İlişkisi

Bir önceki bölümde balans sayılarının kendi aralarında ve Pell, Pell-Lucas sayıları ile olan ilişkisi ele alındı. Bu kısımda ise balans sayılarının oblong sayıları ile olan ilişkisi üzerinde durulacaktır.

3.5.1 Teorem. B_n balans, b_n cobalans, C_n Lucas-balans ve c_n Lucas-cobalans sayılar olmak üzere, her $n \geq 1$ tamsayısı için

(1) $(B_n + b_n)$. oblong sayısının yarısı, n. balans sayının karesi, yani

$$\frac{O_{B_n+b_n}}{2} = B_n^2$$

dir.

(2) $(B_n - b_n - 1)$. oblong sayısının yarısı, n. cobalans sayının karesi ile kendisinin toplamı, yani

$$\frac{O_{B_n - b_n - 1}}{2} = b_n^2 + b_n$$

dir.

(3) $\left(\frac{C_n - 1}{2}\right)$. oblong sayısının 4 katının 1 fazlası, n. Lucas-balans sayının karesi, yani

$$1 + 4O_{\frac{C_n - 1}{2}} = C_n^2$$

dir.

(4) $\left(\frac{c_n - 1}{2}\right)$. oblong sayısının 4 katının 1 fazlası, n. Lucas-cobalans sayının karesi, yani

$$1 + 4O_{\frac{c_n - 1}{2}} = c_n^2$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

İspat. (1) O_k oblong ve B_n balans sayı olmak üzere

$$\frac{O_k}{2} = B_n^2$$

eşitliğinin hangi k değeri için gerçeklendiğinin gösterilmesi gerekir. Oblong sayılarının $O_k = k(k+1)$ şeklinde olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki eşitlikten

$$k^2 + k - 2B_n^2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8B_n^2}}{2}$$

elde edilir. Diğer yandan (1.2) eşitliği gereği cobalans sayılarının

$$b_n = \frac{-(2B_n + 1) + \sqrt{1 + 8B_n^2}}{2}$$

şeklinde olduğuna dikkat edilirse

$$b_n = \frac{-(2B_n + 1) + \sqrt{1 + 8B_n^2}}{2} = -B_n + \frac{-1 + \sqrt{1 + 8B_n^2}}{2} = -B_n + k$$

elde edilir. Bu son eşitliğe göre, $k = B_n + b_n$ dir. O halde

$$\frac{O_{B_n+b_n}}{2} = B_n^2$$

dir. Diğer ifadeler de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoremin (3) ve (4) şıklarındaki k değerleri sırasıyla Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir. Ancak (1) ve (2) de bu durum söz konusu değildir. Yine de aşağıda da görüleceği üzere, balans ve cobalans sayıları için k değerleri sadece bu sayılara bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

(1)' $(\frac{3B_n - B_{n-1} - 1}{2})$. oblong sayısının yarısı, n. balans sayının karesi, yani,

$$\frac{O_{(\frac{3B_n - B_{n-1} - 1}{2})}}{2} = B_n^2$$

dir.

(2)' $(\frac{b_{n+1} - 3b_n - 2}{2})$. oblong sayısının yarısı, n. cobalans sayının karesi ile kendisinin toplamı, yani,

$$\frac{O_{(\frac{b_{n+1} - 3b_n - 2}{2})}}{2} = b_n^2 + b_n$$

dir.

3.6 Balans Sayıları ve Pell Denklemleri

Bu kısımda balans sayıları ve bu sayıların Pell denklemlerinin tamsayı çözümlerindeki önemi üzerinde durulacaktır. Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri ile bazı tamsayı dizilerinin terimleri arasında yakın bir ilişki vardır. Örneğin, Olajas (2010),

$$x^2 - 5y^2 = \pm 4$$

Pell denklemini ele almış ve bu denklemin tamsayı çözümleri ile Fibonacci ve Lucas dizileri arasında aşağıdaki gibi bir ilişkinin olduğunu göstermiştir.

3.6.1 Teorem. F_n Fibonacci ve L_n Lucas tamsayı dizisi olmak üzere, $x^2-5y^2=4$ pozitif Pell denkleminin tamsayı çözümleri $(x_n, y_n)=(L_{2n}, F_{2n})$ ve $x^2-5y^2=-4$ negatif Pell denkleminin tamsayı çözümlerinin $(x_n, y_n)=(L_{2n-1}, F_{2n-1})$ dir (Olajas 2010).

Liptai (2004) ise, başlangıç değerleri R_0, R_1 ve genel terimi $R_n = AR_{n-1}+BR_{n-2}$ olan $R=R(A,B,R_0,R_1)$ tamsayı dizisini ele alarak aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

3.6.2 Teorem. Belli bir z tamsayısı için, $z^2-8y^2=1$ Pell denkleminin tamsayı çözümleri $R(6,-1,1,6)$ dizisinin terimleridir (Liptai 2004).

Yukarıdaki teoremde Liptai (2004), $z^2-8y^2=1$ Pell denkleminin tamsayı çözümlerini tam olarak belirleyememiştir. Sadece denklemi sağlayan y lerin $R(6,-1,1,6)$ dizisinin terimleri olduğunu, fakat denklemi sağlayan z değerleri için bir şey söylememiştir. B_n bir balans sayısı olmak üzere $1+8B_n^2$ bir tam kare ve üstelik $1+8B_n^2=C_n^2$ olduğundan

$$C_n^2-8B_n^2=1$$

dir. O halde $z^2-8y^2=1$ denkleminin tamsayı çözümleri $n\geq 1$ için $(z_n, y_n)=(C_n, B_n)$ şeklindedir. Dolayısıyla $z^2-8y^2=1$denklemini gerçekleyen z tamsayıları esasında Lucas-balans sayılarıdır.

Gözeri ve ark. (2013) bazı özel Pell denklemlerinin tamsayı çözümlerini, balans ve Pell sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

3.6.3 Teorem. (1) $x^2-2y^2=1$ pozitif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n)=(C_n,\, P_{2n})$$

ve $x^2-2y^2=-1$ negatif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n)=(c_n,\, P_{2n-1})$$

dir.

(2) $x^2 - 2y^2 = 2$ pozitif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (4b_n + 2, B_n + B_{n-1})$$

ve $x^2 - 2y^2 = -2$ negatif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (B_n + B_{n-1} + C_n,\ 3B_n - B_{n-1})$$

dir.

(3) $x^2 - 2y^2 = 4$ pozitif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (2b_n + 2b_{n+1} + 2,\ 4B_n)$$

ve $x^2 - 2y^2 = -4$ negatif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (8B_n - 2C_n,\ 4B_{n-1} + 2C_{n-1})$$

dir.

(4) $x^2 - 8y^2 = 4$ pozitif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (c_{n+1} - c_n, 2b_{n+1} - 2b_n - 2B_n)$$

ve $x^2 - 8y^2 = -4$ negatif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (2c_n,\ B_n - B_{n-1})$$

dir.

(5) $x^2 - 32y^2 = 4$ pozitif Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (3C_n - 6b_n - 2B_{n-1} - 3,\ c_{n+1} - B_{n+1})$$

dir (Gözeri ve ark. 2013).

3.7 Genelleştirilmiş Balans Sayıları

Balans sayıları ilk defa Behara ve Panda tarafından tanımlandıktan sonra üzerinde birçok çalışma yapılmış ve bu sayıların daha genel halleri ele alınarak benzer çalışmalar yapılmaya devam edilmiştir. Örneğin, Kovacs ve ark. (2010), balans sayılarını genişleterek $(a,b)-$balans sayılarını tanımlamışlar ve bu sayılar ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde etmişlerdir. $a > 0$ ve $b \geq 0$ aralarında asal sayılar olmak üzere, belli pozitif *n* ve *r* tamsayıları için

$$(a+b)+\cdots+(a(n-1)+b)=(a(n+1)+b)+\cdots+(a(n+r)+b)$$

eşitliğinin sağlaması halinde $an+b$ toplamına bir $(a,b)-$balans sayısı, $ar+b$ toplamına ise bir $(a,b)-$cobalans sayısı denir. $(a,b)-$balans sayıları $B_n^{(a,b)}$ ve $(a,b)-$cobalans sayıları $b_n^{(a,b)}$ ile gösterilir. $a=1$ ve $b=0$ için $B_n^{(1,0)}$ bilinen balans sayıları, yani

$$B_n^{(1,0)}=B_n$$

dir. Kovacs ve ark. (2010) tanımladıkları bu $(a,b)-$balans sayısı için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

3.7.1 Teorem. Eğer $a^2-4ab-4b^2=1$ ise $B_n^{(a,b)}$ balans sayısı tam kare değildir (Kovacs ve ark. 2010).

3.7.2 Teorem. $B_n^{(a,b)}$ balans sayısı olmak üzere belli bir *y* tamsayısı için

$$y^2-8(B_n^{(a,b)})^2=a^2-4ab-4b^2$$

dir (Kovacs ve ark. 2010).

Daha sonra Dash ve ark. (2012), balans sayılarını, $t-$balans sayılarına genişletmişler ve bu sayılar ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde etmişlerdir. $t\geq 0$ bir tamsayı olmak üzere belli bir pozitif *r* tamsayısı için

$$1+2+\cdots+n=(n+1+t)+(n+2+t)+\cdots+(n+r+t) \tag{3.1}$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif *n* tamsayısına $t-$balans sayısı denir. Bu durumda *r* ye ise $t-$cobalans sayısı denir. *n*. $t-$balans ve $t-$cobalans sayıları sırasıyla B_n^t ve b_n^t ile gösterilir.

$t-$balans sayıları genel olarak $t\geq 2$ tamsayısı için ele alınır. Çünkü $0-$ve $1-$balans sayıları, daha önce ele alınan balans sayılarına bağlı olarak ifade edilebilir. Gerçekten de

$$B_n^0=b_{n+1},\ b_n^0=B_n,\ C_n^0=c_{n+1},\ c_n^0=C_n$$

ve

$$B_n^1=B_{n+1}-1,\ b_n^1=b_{n+1},\ C_n^1=C_{n+1},\ c_n^1=c_{n+1}$$

dir.

(3.1) eşitliği r ve n ye göre yeniden düzenlenirse

$$r = \frac{-(2n+2t+1)+\sqrt{8n^2+8n(1+t)+(2t+1)^2}}{2}$$

ve

$$n = \frac{(2r-1)+\sqrt{8r^2+8rt+1}}{2}$$

elde edilir. Buna göre

(i) "B_n^t bir $t-$balans sayısıdır $\Leftrightarrow 8(B_n^t)^2+8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2$ bir tam kare"

(ii) "b_n^t bir $t-$cobalans sayısıdır $\Leftrightarrow 8(b_n^t)^2+8tb_n^t+1$bir tam kare"

dir. Dolayısıyla

$$C_n^t = \sqrt{8(B_n^t)^2+8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2} \text{ ve } c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2+8tb_n^t+1} \tag{3.2}$$

olarak tanımlanan sayılara sırasıyla *n*. Lucas $t-$balans ve *n*. Lucas $t-$cobalans sayıları denir.

Dash ve ark. (2012), $t-$balans ve $t-$cobalans sayılarının genel terimlerinin

$$B_n^t = 6B_{n-2}^t - B_{n-4}^t + 2(t+1) \text{ ve } b_{n+2}^t = 6b_n^t - b_{n-2}^t + 2t$$

şeklinde olduğunu göstermişler ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

3.7.3 Teorem. B_n^t, $t-$balans sayıları

$$[B_n^t-(t+1)]^2 - B_{n+2}^t B_{n-2}^t = (2t+1)^2$$

indirgeme bağıntısını gerçekler (Dash ve ark. 2012).

3.7.4 Teorem. Lucas $t-$balans sayıları

$$C_{n+2}^t = 6C_n^t - C_{n-2}^t$$

indirgeme bağıntısını gerçekler (Dash ve ark. 2012).

3.2.1 Teoreminde olduğu gibi Dash ve ark. (2012), verilen herhangi bir *x*, $t-$balans sayısı için

$$f(x) = 3x+(t+1)+\sqrt{8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2}$$

ve

$$\tilde{f}(x)=3x+(t+1)-\sqrt{8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2}$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve bu fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki teoremleri elde etmişlerdir.

3.7.5 Teorem. x bir $t-$balans sayısı ise $f(x)$ değeri de bir $t-$balans sayısıdır (Dash ve ark. 2012).

3.7.6 Teorem. Eğer x, n. $t-$balans sayısı ise $(n+2)$. $t-$balans sayısı $f(x)$, ve $(n-2)$. $t-$balans sayısı ise $\tilde{f}(x)$ değeridir (Dash ve ark. 2012).

Esasında $t-$balans sayılarının belirlenmesi bazı özel Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerinin elde edilmesine bağlıdır. Şöyle ki, yukarıda x in bir $t-$balans sayısı olması için gerek ve yeter şartın $8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2$ ifadesinin bir tam kare olması gerektiği belirtilmiştir. Buna göre belli bir $y\neq 0$ tamsayısı için

$$8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2=y^2$$

denilirse

$$D^t:8x^2-y^2+8x(1+t)+(2t+1)^2=0$$

Diophantine denklemi elde edilmiş olur. Bu denklemde h ve k sabitleri için

$$x=v+h,\ y=u+k$$

değişken değişimi yapılırsa denklem

$$\tilde{D}^t:8(v+h)^2-(u+k)^2+8(v+h)(1+t)+(2t+1)^2=0$$

haline gelir. Bu son denkleme göre

$$k=0 \text{ ve } h=-\frac{t+1}{2}$$

olduğundan denklem

$$\tilde{D}^t:u^2-8v^2=2t^2-1$$

Pell denklemine indirgenmiş olur. Bu Pell denkleminin tamsayı çözümlerini elde etmek için ilk olarak bazı tanımlara ve notasyonlara ihtiyaç vardır.

Δ pozitif tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$\Theta(\sqrt{\Delta}) = \{x + y\sqrt{\Delta} : x, y \in \Theta\}$$

kümesine kuadratik sayı cismi denir. Bu sayı cisminin herhangi bir $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ elemanın eşleniği $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{\Delta}$ ve normu $N(\alpha) = x^2 - \Delta y^2$ dir. Bu Δ sayısı için

$$\rho_\Delta = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}} & \Delta \equiv 0(\text{mod}\,4) \text{ ise} \\[2ex] \dfrac{1+\sqrt{\Delta}}{2} & \Delta \equiv 1(\text{mod}\,4) \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $O_\Delta = \{x + y\rho_\Delta : x, y \in Z\}$ olarak tanımlanan küme, $\Theta(\sqrt{\Delta})$ sayı cisminin bir alt halkasıdır. Bu O_Δ halkasının birimleri, normu ± 1 olan elemanlardır ve birimlerin kümesi O_Δ^* ile gösterilir, yani $O_\Delta^* = \{\alpha \in O_\Delta : N(\alpha) = \pm 1\}$ dır. O_Δ^* nın normu 1 olan birimlerinin kümesi ise $O_{\Delta,1}^*$ ile gösterilir. Buna göre $O_{\Delta,1}^* = \{\alpha \in O_\Delta^* : N(\alpha) = 1\}$ dir. O_Δ nın 1 den büyük en küçük birimine temel birim denir ve ε_Δ ile gösterilir.

$F = (a,b,c)$ indefinite formu

$$F(x,y) = \frac{\left(ax + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(ax + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)}{a}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$M_F = \left\{ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y : x, y \in Z\right\}$$

kümesi üzerinde

$$[x' \;\; y'] = \begin{cases} [x \;\; y]\begin{bmatrix} u - \dfrac{b}{2}v & av \\ -cv & u + \dfrac{b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 0(\text{mod}\,4) \\[4ex] [x \;\; y]\begin{bmatrix} u + \dfrac{1-b}{2}v & av \\ -cv & u + \dfrac{1+b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 1(\text{mod}\,4) \end{cases} \tag{3.3}$$

olmak üzere

$$(u+v\rho_\Delta)\left(ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)=ax'+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y'$$

dir. Dolayısıyla $\psi(x,y)=ax+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y$ olarak tanımlanan dönüşüm için

$$\psi:\{(x,y):F(x,y)=m\}\to\{\gamma\in M_F : N(\gamma)=am\}$$

dir, yani $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denklemini çözmek demek, M_F nin normu am olan elemanlarını bulmak demektir.

$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denklemi yeniden düzenlenirse

$$\Delta y^2+4am=(2ax+by)^2$$

haline gelir. Buna göre,

$$\tau_\Delta=\begin{cases}\varepsilon_\Delta & N(\varepsilon_\Delta)=1 \text{ ise}\\ \varepsilon_\Delta^2 & N(\varepsilon_\Delta)=-1 \text{ ise}\end{cases}$$

olmak üzere

$$0\le y\le U=\begin{cases}\left|\dfrac{am\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{1/2}\left(\dfrac{\tau_\Delta-1}{\tau_\Delta}\right) & am>0 \text{ ise}\\ \\ \left|\dfrac{am\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{1/2}\left(\dfrac{\tau_\Delta+1}{\tau_\Delta}\right) & am<0 \text{ ise}\end{cases} \tag{3.4}$$

aralığındaki *y* değerleri için, Δy^2+4am ifadesinin tam kare olup olmadığı kontrol edilir. Eğer tam kare ise yukarıdaki eşitlikten *x* değeri (veya değerleri) elde edilir. Şu halde $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denklemi için bir $\{[\,x\ \ y]\}$ çözüm sınıfı elde edilmiş olur. Bu çözüm sınıfı kullanılarak (3.3) eşitliğinden $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=m$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri elde edilmiş olur.

Bu açıklamalardan sonra

$$\widetilde{D}^t : u^2-8v^2=2t^2-1$$

Pell denkleminin tamsayı çözümleri ele alınabilir. Ancak burada bazı *t* değerleri için bir, bazı *t* değerleri için iki ve bazı *t* değerleri için ise üç veya daha fazla çözüm sınıfı vardır. Örneğin,

(i) $t=3$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 5\ \ 1]\}$

(ii) $t=9$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 13\ 1], [\pm 17\ \ 4]\}$

(iii) $t=89$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 127\ \ 6], [\pm 129\ \ 10], [\pm 143\ \ \ 24], [\pm 177\ 44]\}$

(iv) $t=93$ için çözüm sınıfı $\{[\pm 133\ \ 7], [\pm 155\ \ 29], [\pm 186\ \ 46]\}$

şeklindedir. Dolayısıyla da, çözüm sınıfını ve bu sınıfındaki elemanları *t* ye bağlı olarak tek türlü ifade etmek mümkün değildir. Bu nedende *t* üzerinde bazı kısıtlamalar yapılması gerekir. Bunun için, *t*, $2t^2-1$ ifadesi bir asal sayı olacak şekilde tek tamsayı olarak seçilirse, çözüm sınıfı ve bu sınıftaki elemanlar *t* ye bağlı olarak tek türlü ifade edilebilir. $\widetilde{D}^t$ Pell denklemi için $\varepsilon_{32}=3+\sqrt{8}$ olduğundan $\tau_{32}=3+\sqrt{8}$ dir. $0\le y\le U$ aralığında $32y^2+8t^2-4$ ifadesi sadece $y=\dfrac{t-1}{2}$ değeri için bir tam karedir ve *y* nin bu değeri için $x=\pm(2t-1)$ dir. Şu halde verilen Pell denklemi için çözüm sınıfı

$$\left\{\begin{bmatrix}\pm(2t-1) & \dfrac{t-1}{2}\end{bmatrix}\right\}$$

ve çözüm matrisi

$$M=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\end{bmatrix}$$

dır. Buna göre $n\ge 0$ olmak üzere

(1) $[2t-1\ \ \dfrac{t-1}{2}]M^n$ denklemin (u_{2n+1}, v_{2n+1}) çözümlerini üretir,

(2) $[1-2t\ \ \dfrac{1-t}{2}]M^n$ denklemin $(-u_{2n+1}, -v_{2n+1})$ çözümlerini üretir,

(3) $[2t-1\ \ \dfrac{1-t}{2}]M^{-n}$ denklemin $(u_{2n+1}, -v_{2n+1})$ çözümlerini üretir,

(4) $[1-2t\ \ \dfrac{t-1}{2}]M^{-n}$ denklemin $(-u_{2n+1}, v_{2n+1})$ çözümlerini üretir,

ve $n\ge 1$ olmak üzere

(5) $[2t-1\ \dfrac{1-t}{2}]M^n$ denklemin (u_{2n}, v_{2n}) çözümlerini üretir,

(6) $[1-2t\ \ \dfrac{t-1}{2}]M^n$ denklemin $(-u_{2n}, -v_{2n})$ çözümlerini üretir,

(7) $[2t-1 \quad \frac{t-1}{2}]M^{-n}$ denklemin $(u_{2n},-v_{2n})$ çözümlerini üretir,

(8) $[1-2t \quad \frac{1-t}{2}]M^{-n}$ denklemin $(-u_{2n},v_{2n})$ çözümlerini üretir.

Şu halde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.7.7 Teorem. $\widetilde{D}^t : u^2-8v^2=2t^2-1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi,

$$[u_{2n+1} \quad v_{2n+1}]=[2t-1 \quad \frac{t-1}{2}]M^n,\ n\geq 0$$
$$[u_{2n} \quad v_{2n}]=[2t-1 \quad \frac{1-t}{2}]M^n,\ n\geq 1$$

olmak üzere $\psi(\widetilde{D}^t)=\{(u_{2n+1},v_{2n+1}),\ (u_{2n},v_{2n})\}$ dir. (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

Bu teoreme göre denklemin tüm pozitif tamsayı çözümlerini belirlemek için M matrisinin *n*. kuvvetinin bilinmesi gerekmektedir ki bu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

3.7.8 Teorem. M matrisinin *n*. kuvveti

$$M^n=\begin{bmatrix} C_n & B_n \\ 8B_n & C_n \end{bmatrix}$$

dir (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

3.7.9 Teorem. $\widetilde{D}^t : u^2-8v^2=2t^2-1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi, $n\geq 0$ için

$$u_{2n+1}=(2t-1)C_n+4(t-1)B_n$$
$$v_{2n+1}=(2t-1)B_n+\frac{t-1}{2}C_n$$

ve $n\geq 1$ için

$$u_{2n}=(2t-1)C_n+4(1-t)B_n$$
$$v_{2n}=(2t-1)B_n+\frac{1-t}{2}C_n$$

olmak üzere $\psi(\widetilde{D}^t)=\{(u_{2n+1},v_{2n+1}),\ (u_{2n},v_{2n})\}$ dir (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

$\widetilde{D}^t$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri belirlendikten sonra D^t Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri belirlenebilir.

$$x = v - \frac{t+1}{2} \text{ ve } y = u$$

olduğundan yukarıdaki teorem gereği $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (2t-1)B_n + \frac{t-1}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ y_{2n+1} &= (2t-1)C_n + 4(t-1)B_n \end{aligned}$$

ve $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} x_{2n} &= (2t-1)B_n + \frac{1-t}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ y_{2n} &= (2t-1)C_n + 4(1-t)B_n \end{aligned}$$

olmak üzere (x_{2n+1}, y_{2n+1}) ve $(x_{2n}, y_{2n}), D^t$ Diophantine denkleminin tamsayı çözümleridir. Ayrıca simetriden dolayı $(x_{2n+1}, -y_{2n+1})$ ve $(x_{2n}, -y_{2n})$ de, denkleminin tamsayı çözümleridir. Diğer yandan **(2)** den

$$X_{2n} = (1-2t)B_n + \frac{t-1}{2}C_n - \frac{t+1}{2}, \quad n \geq 1$$

ve **(6)** dan

$$X_{2n+1} = (1-2t)B_n + \frac{1-t}{2}C_n - \frac{t+1}{2}, \quad n \geq 0$$

elde edilir. $Y_{2n} = y_{2n}$ ve $Y_{2n+1} = y_{2n+1}$ için $(X_{2n+1}, \pm Y_{2n+1})$ ve $(X_{2n}, \pm Y_{2n})$ de denklemin tamsayı çözümleridir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.7.10 Teorem. D^t Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (2t-1)B_n + \frac{t-1}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ y_{2n+1} &= (2t-1)C_n + 4(t-1)B_n \\ X_{2n+1} &= (1-2t)B_n + \frac{1-t}{2}C_n - \frac{t+1}{2} \\ Y_{2n+1} &= y_{2n+1} \end{aligned}$$

ve $n \geq 1$ için

$$x_{2n}=(2t-1)B_n+\frac{1-t}{2}C_n-\frac{t+1}{2}$$
$$y_{2n}=(2t-1)C_n+4(1-t)B_n$$
$$X_{2n}=(1-2t)B_n+\frac{t-1}{2}C_n-\frac{t+1}{2}$$
$$Y_{2n}=y_{2n}$$

olmak üzere

$$\psi(D^t)=\{(x_{2n},\pm y_{2n}),\ (x_{2n+1},\pm y_{2n+1}),\ (X_{2n},\pm Y_{2n}),\ (X_{2n+1},\pm Y_{2n+1})\}$$

şeklindedir. (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

Örneğin, $t=3$ için

$$x_{2n+1}\in\{-1,6,45,272,1595,\cdots\}$$
$$y_{2n+1}\in\{5,23,133,775,4517,\cdots\}$$
$$X_{2n+1}\in\{-3,-10,-49,-276,-1595,\cdots\}$$
$$x_{2n}\in\{0,11,74,441,2580,\cdots\}$$
$$y_{2n}\in\{7,37,215,1253,7303,\cdots\}$$
$$X_{2n}\in\{-4,-15,-78,-445,-2584,\cdots\}$$

olduğundan $D^3: 8x^2-y^2+32x+49=0$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\psi(D^3)=\left\{\begin{array}{l}\cdots,(-2584,\pm 7303),(-1599,\pm 4517),(-445,\pm 1253),(-276,\pm 775),\\ (-78,\pm 215),(-49,\pm 133),(-15,\pm 37),(-10,\pm 23),(-4,\pm 7),\\ (-3,\pm 5),(-1,\pm 5),(0,\pm 7),(6,\pm 23),(11,\pm 37),(45,\pm 133),\\ (74,\pm 215),(272,\pm 775),(441,\pm 1253),(1595,\pm 4517),\ (2580,\pm 7303),\cdots\end{array}\right\}$$

dir.

D^t Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümlerini belirledikten sonra 3.7.10 Teoremi kullanılarak $t-$balans sayılarının genel terimleri aşağıdaki gibi verilebilir.

3.7.11 Teorem. $t-$balans sayılarının genel terimleri $n\geq 1$ için

$$B^t_{2n-1}=(B_n+b_{n+1})t-(b_{n+1}+1)$$
$$b^t_{2n-1}=(B_n+b_n)t-B_n$$
$$C^t_{2n-1}=(4b_{n+1}+2)t-c_{n+1}$$
$$c^t_{2n-1}=4tB_n-C_n$$

ve $n\geq 2$ için

$$B_{2n-2}^{t}=(B_{n-1}+b_{n})t+b_{n}$$
$$b_{2n-2}^{t}=(B_{n-1}+b_{n-1})t+B_{n-1}$$
$$C_{2n-2}^{t}=(4b_{n}+2)t+c_{n}$$
$$c_{2n-2}^{t}=4tB_{n-1}+C_{n-1}$$

şeklindedir (Tekcan, Tayat ve Özbek 2014).

İspat. $x=B_{n}^{t}$ olduğundan $n\geq 1$ için

$$B_{2n-1}^{t}=(2t-1)B_{n}+\frac{t-1}{2}C_{n}-\frac{t+1}{2}=(B_{n}+b_{n+1})t-(b_{n+1}+1)$$

olarak elde edilir. Buna göre (3.2) eşitliğinden

$$C_{2n-1}^{t}=\sqrt{8(B_{2n-1}^{t})^{2}+8B_{2n-1}^{t}(1+t)+(2t+1)^{2}}=(4b_{n+1}+2)t-c_{n+1}$$

olur. Dolayısıyla

$$b_{2n-1}^{t}=\frac{-(2B_{2n-1}^{t}+2t+1)+C_{2n-1}^{t}}{2}=(B_{n}+b_{n})t-B_{n}$$

olacağından

$$c_{2n-1}^{t}=\sqrt{8(b_{2n-1}^{t})^{2}+8tb_{2n-1}^{t}+1}=4tB_{n}-C_{n}$$

elde edilir. Benzer şekilde $n\geq 2$ için

$$B_{2n-2}^{t}=(B_{n-1}+b_{n})t+b_{n}$$
$$C_{2n-2}^{t}=(4b_{n}+2)t+c_{n}$$
$$b_{2n-2}^{t}=(B_{n-1}+b_{n-1})t+B_{n-1}$$
$$c_{2n-2}^{t}=4tB_{n-1}+C_{n-1}$$

olduğu gösterilebilir.

KAYNAKLAR

Behera A. ve Panda G. K. 1999. On the Square Roots of Triangular Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* **37**(2): 98-105.

Dash K.K., Ota R.S. ve Dash S. 2012. *t*-balancing Numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sci.* **7**(41):199-2012.

Flath D. E. 1989. Introduction to Number Theory. Wiley

Gözeri G. K., Özkoç A. ve Tekcan A. 2013. Some Algebraic Relations on Balancing Numbers. Utilitas Mathematica dergisinde yayına kabul edildi.

Kovacs T., Liptai K. ve Olajas P. 2010. On $(a,b)-$Balancing Numbers. *Publ. Math. Debrecen* **77/3-4:** 485-498.

Liptai K. 2004. Fibonacci Balancing Numbers. *The Fibonacci Quar.* **42**(4): 330-340.

Mollin R.A. 2008. Fundamental Number Theory with Appl. Chapman & Hall/ CRC.

Olajas P. 2010. Properties of Balancing, Cobalancing, and Generalized Balancing Numbers. *Annales Mathematicae et Informaticae* **37:**125-138.

Özkoç A., Gözeri, G.K., Tekcan, A. 2014. Triangular and Square Triangular Numbers Involving Generalized Pell Numbers. Utilitas Math. dergisinde yayına kabul edildi.

Panda G. K. 2009. Some Fascinating Properties of Balancing Numbers. *Proceedings of the Eleventh Int. Conf. on Fibonacci Num. and their App.*, Cong. Numer. **194**:185-189.

Panda G. K. ve Ray P. K. 2011. Some Links of Balancing and Cobalancing Numbers with Pell and Associated Pell Numbers. *Bul. of Inst. of Math. Acad. Sinica* **6**(1):41-72.

Ray P. K. 2009. Balancing and Cobalancing Numbers. PhD thesis, Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Ray P.K. 2012. Certain Matrices Associated with Balancing and Lucas-Balancing Numbers. *Matematika* **28**(1): 15-22.

Ray P.K. 2013. New Identities for the Common Factors of Balancing and Lucas-Balancing Numbers. *Int. Jour. of Pure and App. Maths*. **85**(3): 487-494.

Ray P.K. 2013a. Factorizations of the Negatively Subscripted Balancing and Lucas-Balancing Numbers. *Bol. Soc. Paran. Mat*. **31**(2): 161-173.

Ribenboim P. 2000. My Numbers, My Friends, Popular Lectures on Number Theory, Springer-Verlag, New York, Inc.

Santana S. F., Diaz-Barrero J. L. 2006. Some Properties of Sums Involving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Science* **18**(1): 33-40.

Tekcan A., Özkoç A. 2013. Pell Form and Pell Equation via Oblong Numbers. *Serdica Mathematical Journal*. 39: 37-52.

Tekcan, A., Tayat, M., Özbek, M.E. 2014. The Diophantine Equation $8x^2 - y^2 + 8x(1 + t) + (2t^2 + 1)^2 = 0$ and $t-$Balancing Numbers. ISRN Comb. Volume 2014, Article ID 897834, 5 pages.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Meltem Esra ERAŞIK

Doğum Yeri ve Tarihi: İnegöl, 27.01.1989

Yabancı Dil: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: İnegöl Lisesi

Lisans: Uludağ Üniversitesi

Yüksek Lisans: Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

2010-2011 Rota Bireysel Eğitim Merkezi

2011-2013 Özel Melike Pınar Okulları

2013- Koza Kampüs Eğitim Danışmanlık

İletişim: meltem-ozbek@hotmail.com

Yayınları:

1. A.Tekcan, M.Tayat, M.E.Özbek. *The Diophantine Equation* $8x^2 - y^2 + 8x(1 + t) + (2t + 1)^2 = 0$ *and t-Balancing Numbers*. ISR Comb. **2014** (2014), Article ID 897834, 5 pages.