t-BALANSIRLAR VE t-BALANS SAYILARI

Samet AYDIN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

t-BALANSIRLAR VE t-BALANS SAYILARI

Samet AYDIN
0000-0002-6502-0251

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANSTEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2022

TEZ ONAYI

Samet AYDIN tarafından hazırlanan "t-BALANSIRLAR VE t-BALANS SAYILARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan : Prof. Dr. Osman BİZİM — İmza
0000-0001-5236-4023
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN — İmza
0000-0002-5341-0009
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İrem KÜPELİ ERKEN — İmza
0000-0003-4471-3291
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../2022

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

16/05/2022

Samet AYDIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

t-BALANSIRLAR VE t-BALANS SAYILARI

Samet AYDIN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu tezde $t \geq 1$ tam sayısı için balans sayılarının genelleştirilmişi olan t-balans sayıları ele alınmış ve t-balans sayılarının, t-balansırların ve Lucas t-balans sayılarının genel terimleri, balans ve Lucas-balans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir.

Birinci bölümde Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, balans, kobalans ve genelleştirilmiş balans sayıları hakkında genel bir bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde materyal ve yöntem belirtilmiştir.

Üçüncü bölüm tezin orijinal kısmı olup bu bölümde, $t \geq 1$ tam sayısı için t-balans sayıları ele alınmıştır. t-balans, t-balansır ve Lucas t-balans sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için ilk olarak $2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$ Pell denkleminin tüm pozitif (x_n, y_n) tam sayı çözümleri kümesi belirlenmiş ve bu küme yardımıyla t-balans, t-balansır ve Lucas t-balans sayılarının genel terimleri, balans ve Lucas-balans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir. Tüm bu işlemler $t \geq 2$ tam sayısı için $2t^2 + 4t + 1$ in tam kare olup olmamasına göre iki durumda ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Balans Sayıları, Kobalans Sayıları, t-Balans Sayıları, Pell Denklemleri, Çözüm Sınıfı, Kuadratik Form.

2022, vi + 56 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

t-BALANCERS AND t-BALANCING NUMBERS

Samet AYDIN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this thesis, the general terms of t-balancing numbers, t-balancers and Lucas t-balancing numbers for an integer $t \geq 1$ are determined in terms of balancing and Lucas-balancing numbers.

In the first section, some notations and definitions on Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, balancing, cobalancing and generalized balancing numbers are given.

In the second section, the material and method are given.

In the third section, which is the original part of the thesis, the general terms of t-balancing numbers, t-balancers and Lucas t-balancing numbers are given. For this reason, first the set of all positive integer solutions (x_n, y_n) of the Pell equation $2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$ is determined by using its set of representatives. Later the general terms of t-balancing numbers, t-balancers and Lucas t-balancing numbers are determined in terms of balancing and Lucas-balancing numbers by using the set of integer solutions. Here the problem is considered in two cases: $2t^2 + 4t + 1$ is a perfect square or not for an integer $t \geq 2$.

In the last section, result is given.

Keywords: Balancing Numbers, Cobalancing Numbers, t-Balancing Numbers, Pell Equations, Set of Representatives, Quadratic form.

2022, vi + 56 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında, yaptığım çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren araştırmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek gelişimime katkıda bulunan, çalışmalarım süresince her anlamda bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet TEKCAN' a saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Bana hiçbir desteğini esirgemeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Samet AYDIN

19/04/2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
F_n	Fibonacci sayısı
L_n	Lucas sayısı
P_n	Pell sayısı
Q_n	Pell-Lucas sayısı
B_n	Balans sayısı
b_n	Kobalans sayısı
C_n	Lucas balans sayısı
c_n	Lucas kobalans sayısı
R_n	Balansır
r_n	Kobalansır
B_n^t	t-balans Sayısı
C_n^t	Lucas t-balans sayısı
R_n^t	t-balansır
α, β	Pell sayılarının karakteristik denkleminin kökleri
Rep	Çözüm temsilcileri kümesi
M	Çözüm matrisi
F	Kuadratik form
$M(F)$	F formunun modülü
$\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$	Kuadratik sayı cismi
$x^2 - dy^2 = \pm n$	Pell denklemi
(x_1, y_1)	Pell denkleminin temel çözümü
ε_Δ	Temel birim

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu bölümde Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, balans, kobalans ve balans sayılarının genelleştirilmişi olan diğer balans sayıları hakkında temel bilgiler ve gösterimler verilecektir.

1.1 Tam sayı Dizileri

Sayılar teorisinde en önemli tam sayı dizisi Fibonacci tam sayı dizisidir. Bu dizi F_n ile gösterilir ve bu dizinin indirgeme bağıntısı $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1$$

dir.

Dizinin genel terimi

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\alpha_1 - \beta_1}$$

olarak da verilebilir. Üstelik

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha_1$$

dir.

Bu tam sayı dizisinin ilk n-terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

olup katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa, Cassini özdeşliği olarak bilinen

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

eşitliği elde edilir.

Fibonacci tam sayı dizisinin üreteç fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

dir.

Lucas tam sayı dizisi ise L_n ile gösterilir ve bu dizinin indirgeme bağıntısı $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, L_0 = 2, L_1 = 1$$

dir. α_1 ve β_1 yukarıdaki sayılar olmak üzere dizinin genel terimi $n \geq 0$ için

$$L_n = \alpha_1^n + \beta_1^n$$

olarak da verilebilir.

Bu tam sayı dizisinin ilk n-terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

olup üreteç fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n\, x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

dir.

Fibonacci ve Lucas tam sayı dizileri arasındaki en önemli cebirsel eşitlik $n \geq 1$ için

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \text{ ve } F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}$$

dir. Üstelik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5} \quad \text{ve} \quad \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} = \alpha_1^n$$

dir.

Pell tam sayı dizisi ise P_n ile gösterilir ve bu dizinin indirgeme bağıntısı $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, P_0 = 0, P_1 = 1$$

dir.

Dizinin genel terimi

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \beta = 1 - \sqrt{2}$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir.

Pell tam sayı dizisinin ilk n-terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \frac{P_{n+1} + P_n - 1}{2}$$

olup üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n\, x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

dir.

Pell tam sayı dizisinin katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

dir. Yine bu eşitliğin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

olduğu görülür.

Pell-Lucas tam sayı dizisi ise Q_n ile gösterilir ve bu tam sayı dizisinin indirgeme bağıntısı $n \geq 2$ için

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, Q_0 = Q_1 = 2$$

dir. α ve β yukarıdaki sayılar olmak üzere dizinin genel terimi $n \geq 0$ için

$$Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

Pell-Lucas tam sayı dizisinin ilk n-terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{Q_{n+2} - Q_{n+1} - 4}{2}$$

olup üreteç fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n\, x^n = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

dir.

Bu iki tam sayı dizisi arasındaki en önemli bağıntı $n \geq 1$ için

$$Q_n = P_{n-1} + P_{n+1} \quad \text{ve} \quad Q_n = \frac{P_{2n}}{P_n}$$

dir. Üstelik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n} = 2\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad \frac{Q_n + 2\sqrt{2}P_n}{2} = \alpha^n$$

dir.

p ve q, $p^2 - 4q > 0$ ve $p \neq q + 1$ özelliğinde herhangi iki tam sayı olmak üzere, $n \geq 2$ için indirgeme bağıntıları

$$U_n = U_n(p,q) = pU_{n-1} - qU_{n-2}, U_0 = 0, U_1 = 1$$

ve

$$V_n = V_n(p,q) = pV_{n-1} - qV_{n-2}, V_0 = 2, V_1 = p$$

olan tam sayı dizileri için kolayca görüleceği üzere

$$U_n(1,-1) = F_n \text{ ve } U_n(2,-1) = P_n$$

ve

$$V_n(1,-1) = L_n \text{ ve } V_n(2,-1) = Q_n$$

dir, yani yukarıda bahsedilen dört tam sayı dizisi, esasında U_n ve V_n tam sayı dizilerinde p ve q nun özel halleridir.

Bu tam sayı dizilerinin genel terimleri ise

$$x_1 = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ ve } x_2 = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$U_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \text{ ve } V_n = x_1^n + x_2^n$$

dir.

Bu tam sayı dizilerinin katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} & U_n \\ U_n & U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

dir. Dolayısıyla

$$U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = q^n$$

dir. Üstelik bu matris yardımıyla

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir. Bu tam sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = \frac{x}{1 - px + qx^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n = \frac{2 - px}{1 - px + qx^2}$$

dir.

1.2 Balans ve Kobalans Sayıları

Behera ve Panda (1999) tarafından ilk defa tanımlanan balans sayıları

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \qquad (1.1)$$

denklemini gerçekleyen $n \geq 1$ tam sayılarına denir. Buradaki $r \geq 1$ tam sayılarına ise balansır denir. Örneğin $6, 35, 204$ birer balans sayısı iken, bu sayıların balansırları sırasıyla $2, 14, 84$ dür.

(1.1) eşitliğinden

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 1}}{2} \qquad (1.2)$$

olur. (1.2) eşitliğine göre n bir balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8n^2 + 1$ bir tam karedir.

Balans sayıları B_n ile gösterilir ve bu sayıların indirgeme formülü $n \geq 1$ için

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, B_0 = 0, B_1 = 1, B_2 = 6$$

dir.

Dikkat edilirse balans sayılarının karakteristik denklemi

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\gamma = 3 + 2\sqrt{2} \text{ ve } \delta = 3 - 2\sqrt{2}$$

dir.

Belli λ_1 ve λ_2 sabitleri için balans sayılarının genel terimi

$$B_n = \lambda_1 \gamma^n + \lambda_2 \delta^n$$

olsun. Bu takdirde $n = 2$ ve $n = 3$ için

$$B_2 = \lambda_1 \gamma^2 + \lambda_2 \delta^2 \quad \text{ve} \quad B_3 = \lambda_1 \gamma^3 + \lambda_2 \delta^3$$

denklem sisteminden

$$\lambda_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{8} \text{ ve } \lambda_2 = \tfrac{-\sqrt{2}}{8}$$

olarak elde edilir. O halde balans sayılarının genel terimi $n \geq 0$ için

$$B_n = \frac{\sqrt{2}}{8}\gamma^n - \frac{\sqrt{2}}{8}\delta^n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{4\sqrt{2}}$$

dir.

Balans sayılarının ilk n-terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} B_{\mathrm{i}} = \frac{5B_n - B_{n-1} - 1}{4}$$

olup, negatif indisli balans sayıları ise $n \geq 1$ için

$$B_{-n} = 6B_{-n+1} - B_{-n+2} = -B_n$$

dir.

Balansırlar ise R_n ile gösterilir ve bu sayıların indirgeme formülü $n \geq 1$ için

$$R_{n+1} = 6R_n - R_{n-1} + 2, R_0 = R_1 = 0, R_2 = 2$$

dir.

γ ve δ yukarıdaki sayılar olmak üzere balansırların genel terimi $n \geq 1$ için

$$R_n = \frac{\gamma^n(-1+\sqrt{2}) + \delta^n(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

dir.

(1.2) eşitliğine dikkat edilirse B_n bir balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8B_n^2 + 1$ bir tam karedir. Buna göre

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

bir tam sayı olup bu tam sayıya Lucas-balans sayısı denir. Örneğin, $3, 17, 99$ birer Lucas-balans sayısıdır.

Lucas-balans sayılarının indirgeme formülü $n \geq 1$ için

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}, C_0 = 1, C_1 = 3, C_2 = 17$$

olup genel terimi $n \geq 0$ için

$$C_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

dir.

Lucas-balans sayılarının ilk n-terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = \frac{5C_n - C_{n-1} - 2}{4}$$

olup negatif indisli Lucas-balans sayıları ise $n \geq 1$ için

$$C_{-n} = 6C_{-n+1} - C_{-n+2} = C_n$$

olarak tanımlanır.

Balans ve Lucas-balans sayıları arasındaki belki de en önemli bağıntı

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad \text{ve} \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

trigonometrik bağıntılarına benzeyen

$$B_{m\pm n} = B_m C_n \pm C_m B_n \quad \text{ve} \quad B_{2n} = 2B_n C_n$$

bağıntılarıdır.

Panda ve ark. (2005) ise

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{1.3}$$

denklemini gerçekleyen $n \geq 1$ tam sayılarına kobalans sayısı, $r \geq 1$ tam sayılarına ise kobalansır demişlerdir. Örneğin $2,\ 14, 84$ birer kobalans sayısı iken, bu sayıların kobalansırları sırasıyla $1, 6, 35$ dir.

(1.3) eşitliğinden

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \tag{1.4}$$

olur. Bu son eşitliğe göre n bir kobalans sayısıdır ⇔ $8n^2 + 8n + 1$ bir tam karedir.

Kobalans sayıları b_n ile gösterilir ve bu sayıların indirgeme formülü $n \geq 1$ için

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2, b_0 = b_1 = 0, b_2 = 2$$

dir.

Yukarıda tanımlanan γ ve δ için bu sayıların genel terimi $n \geq 0$ için

$$b_n = \frac{\gamma^n(-1 + \sqrt{2}) + \delta^n(1 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

olup ilk n-terim toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{i}} = \frac{5b_n - b_{n-1} + 2 - 2n}{4}$$

dır.

Kobalansırlar ise r_n ile gösterilir ve bu sayıların indirgeme formülü $n \geq 1$ için

$$r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1}, r_0 = r_1 = 0, r_2 = 1$$

dir. Kobalansırların genel terimi ise $n \geq 0$ için

$$r_n = \frac{\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}}{4\sqrt{2}}$$

dir.

(1.3) eşitliğine göre b_n bir kobalans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8b_n^2 + 8b_n + 1$ bir tam karedir. Buna göre

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

bir tam sayı olup bu tam sayıya Lucas-kobalans sayısı denir. Örneğin, $7, 41, 239$ birer Lucas-kobalans sayısıdır.

Lucas-kobalans sayılarının indirgeme formülü $n \geq 1$ için

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}, c_0 = c_1 = 1, c_2 = 7$$

olup genel terimi $n \geq 0$ için

$$c_n = \frac{\gamma^n(-1+\sqrt{2}) - \delta^n(1+\sqrt{2})}{2}$$

dir. Lucas-kobalans sayılarının ilk n-terim toplamı ise

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\mathrm{i}} = \frac{5c_n - c_{n-1} - 2}{4}$$

dir.

Balans, balansır, kobalans ve kobalansır sayıları arasında $n \geq 1$ için

$$B_n = r_{n+1} \text{ ve } R_n = b_n$$

şeklinde bir ilişki vardır. Dolayısıyla (1.1) ve (1.3) den

$$B_n = \frac{2b_n + 1 + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}}{2} \quad \text{ve} \quad b_n = \frac{-2B_n - 1 + \sqrt{8B_n^2 + 1}}{2}$$

dir.

Aşağıda Çizelge 1.1. de tüm bu balans sayıların ilk on terimi verilmiştir.

Çizelge 1.1. Tüm balans sayılarının ilk on terimi

	B_n	b_n	C_n	c_n
1	1	0	3	1
2	6	2	17	7
3	35	14	99	41
4	204	84	577	239
5	1189	492	3363	1393
6	6930	2870	19601	8119
7	40391	16730	114243	47321
8	235416	97512	665857	275807
9	1372105	568344	3880899	1607521
10	7997214	3312554	22619537	9369319

(1.2) eşitliğine göre

“x bir balans sayısı $\Leftrightarrow 8x^2 + 1$ bir tam kare”

olduğundan $y \geq 1$ tam sayısı için $8x^2 + 1 = y^2$ denilirse buradan

$$y^2 - 8x^2 = 1$$

Pell denklemi elde edilir. (Barbeau (2003) ve Mollin (1996)). Bu denklemin tam sayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$y_n + x_n\sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^n \tag{1.5}$$

olmak üzere (y_n, x_n) şeklindedir. Benzer şekilde

$$y_n - x_n\sqrt{8} = (3 - \sqrt{8})^n \tag{1.6}$$

olup (1.5) ve (1.6) dan

$$x_n = \frac{(3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n}{4\sqrt{2}} \tag{1.7}$$

elde edilir ki bu balans sayılarının genel terimidir. Diğer yandan

$$\alpha^2 = 3 + 2\sqrt{2} = \gamma \quad \text{ve} \quad \beta^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \delta$$

olduğundan (1.7) den balans sayılarının genel terimi $n \geq 1$ için

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Pell sayılarının genel teriminin

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{2}}$$

olduğuna dikkat edilirse, bu son iki eşitlikten

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde diğer balans sayılarının genel terimleri

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \quad \text{ve} \quad c_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2}$$

dir. Üstelik $B_n = \frac{P_{2n}}{2}$ eşitliğine benzer şekilde

$$b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2},\ C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \quad \text{ve} \quad c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

dir. (Ray (2009)).

1.3 Üçgensel Sayılar

$n \geq 1$ tam sayı olmak üzere

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

şeklindeki sayılara üçgensel sayılar denir. Örneğin, $1, 3, 6$ birer üçgensel sayıdır.

Yukarıda tanımlanan B_n balans sayıları ile T_n üçgensel sayıları arasında bir ilişki vardır. Gerçekten de (1.1) eşitliği

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2$$

olarak yeniden düzenlenirse

$$T_{B_n+R_n} = B_n^2$$

olduğu görülür, yani "n bir balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ n^2 bir üçgensel sayıdır."

Benzer şekilde yine yukarıda tanımlanan b_n kobalans sayıları ile T_n üçgensel sayıları arasında da bir ilişki vardır. (1.3) eşitliği yeniden düzenlenirse

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2 + n$$

olur. Buna göre

$$T_{b_n + r_n} = b_n^2 + b_n$$

dir, yani “n bir kobalans sayısıdır ⇔ $n^2 + n$ bir üçgensel sayıdır.”

Kare üçgensel sayılar ise hem üçgensel hem de tam kare olan sayılardır. Örneğin, $1, 36$, 1225 birer kare üçgensel sayıdır.

Kare üçgensel sayılar S_n ile gösterilir ve t_n ve s_n tam sayıları için bu sayılar

$$S_n = \frac{t_n(t_n+1)}{2} = s_n^2$$

formundadır. Üstelik bu t_n ve s_n tam sayıları ile B_n ve b_n sayıları arasında

$$s_n = B_n \quad \text{ve} \quad t_n = B_n + b_n$$

şeklinde bir ilişki vardır. Buna göre

$$S_n = B_n^2$$

dir, yani kare üçgensel sayılar aslında balans sayılarını kareleridir.

Üstelik kolayca görüleceği üzere $n \geq 1$ için

$$S_n = \frac{P_{2n}^2}{4}, \; s_n = \frac{P_{2n}}{2} \quad \text{ve} \quad t_n = \frac{P_{2n} + P_{2n-1} - 1}{2}$$

olup

$$S_n = (\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}})^2, s_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad t_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4}$$

dir.

1.4. Genelleştirilmiş Balans Sayıları

Balans sayıları günümüzde birçok matematikçi tarafından ele alınmış ve bu sayılar değişik balans sayılarına genişletilmişlerdir.

Liptai (2004 ve 2006), F_n ve L_n sayıları ile B_n sayıları arasındaki ilişkiyi ele alarak sadece 1 sayısının hem balans hem de Fibonacci ve Lucas sayısı olduğunu ifade etmişlerdir.

Kovacs ve ark. (2010) ise $a > 0$ ve $b \geq 0$ sayıları için

$$(a + b) + (2a + b) + \cdots + (a(n-1) + b) = (a(n+1) + b) + \cdots + (a(n+r) + b)$$

denklemini gerçekleyen $n \geq 1$ tam sayısı için $an + b$ ye (a, b)-balans, $r \geq 1$ tam sayısı için $ar + b$ ye ise (a, b)-balansır demişlerdir ve bu sayıların genel terimlerini elde etmişledir.

Liptai ve ark. (2009) ise $y, k, l \geq 4$ özelliğindeki sayılar için

$$1^k + \cdots + (x-1)^k = (x+1)^l + \cdots + (y-1)^l$$

denklemini ele almışlar ve bu denklemin tam sayı çözümlerini incelemişlerdir.

Tengely (2013) ise B_n bir balans sayısı olmak üzere

$$B_n = u(u+1)(u+2)(u+3)(u+4)$$

eşitliğini gerçekleyen u tam sayısının olamayacağını ispatlamıştır.

Panda ve ark. (2015) hemen hemen balans sayılarını, Panda (2017) ise hemen hemen kobalans sayılarını ele almışlardır. Daha sonra ise Tekcan (2019) bu sayıların genel terimlerinin

$$B_n^* = 3B_n,\quad b_{2n}^* = 2b_{n+1} - b_n,\quad b_{2n-1} = 4b_n - b_{n-1} + 1,$$
$$C_n^* = 3C_n,\quad c_{2n} = c_{n+2} - 4c_{n+1},\quad c_{2n-1}^* = c_{n+1} - 2c_n$$

ve

$$B_{2n-1}^{**} = B_{n-1} + C_{n-1},\ B_{2n}^{**} = -B_n + C_n,\quad b_n^{**} = 3b_n + 1,$$
$$C_{2n-1}^{**} = 8B_{n-1} + C_{n-1}, C_{2n}^{**} = 8B_n - C_n, c_n^{**} = 3c_n$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Tersine tüm balans sayılarının genel terimlerinin ise

$$B_n = \frac{B_n^*}{3}, b_n = \frac{b_{2n-1}^* - b_{2n-2}^* - 1}{2}, C_n = \frac{C_n^*}{3},\quad c_n = \frac{c_{2n-1}^* - c_{2n-2}^*}{2}$$

ve

$$B_n = \frac{B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**}}{3}, b_n = \frac{b_n^{**} - 1}{3}, C_n = \frac{C_{2n+1}^{**} - C_{2n}^{**}}{2},\quad c_n = \frac{c_n^{**}}{3}$$

şeklinde olduğunu ve ayrıca

$$P_{2n} = \frac{2B_n^*}{3}, P_{2n-1} = b_{2n-1}^* - b_{2n-2}^*$$

veya

$$P_{2n} = B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**}, P_{2n-1} = \frac{2b_n^{**} + 1}{3}$$

olduğunu göstermiştir.

Özkoç ve Tekcan (2017) ise $k \geq 1$ tam sayı için

$$B_0^k = 0,\ B_1^k = 1,\ B_{n+1}^k = 6kB_n^k - B_{n-1}^k,\ \ n \geq 1$$

$$b_1^k = 0,\ b_2^k = 2,\ b_{n+1}^k = 6kb_n^k - b_{n-1}^k + 2,\ \ n \geq 2$$

$$C_0^k = 1,\ C_1^k = 3,\ C_{n+1}^k = 6kC_n^k - C_{n-1}^k,\ \ n \geq 1$$

$$c_1^k = 1,\ c_2^k = 7,\ c_{n+1}^k = 6kc_n^k - c_{n-1}^k,\ \ n \geq 2$$

k-balans sayılarını ele almışlar ve bu sayıların genel terimlerini elde etmişlerdir.

Tekcan ve Erdem (2020) ise $t \geq 1$ tam sayısı için t-kobalans sayılarını ele almışlar ve bu sayıların genel terimlerini elde etmişlerdir. (1.2) eşitliğinde, eşitliğin sağ tarafındaki her bir terime t eklemek suretiyle elde edilen

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1 + t) + (n + 2 + t) + \cdots + (n + r + t)$$

eşitliğini sağlayan $n \geq 1$ tam sayısına t-kobalans, $r \geq 1$ tam sayısına ise t-kobalansır demişlerdir ve bu sayıları sırasıyla b_n^t ve r_n^t ile göstermişlerdir. Üstelik "b_n^t bir t-kobalans sayısıdır ⇔ $8(b_n^t)^2 + 8(t + 1)b_n^t + (2t + 1)^2$ bir tam karedir" gerçeğini dikkate alarak

$$c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t + 1)b_n^t + (2t + 1)^2}$$

tam sayısına Lucas t-kobalans sayısı diyerek, tüm bu sayıların genel terimlerini elde etmişlerdir.

Yine Szalay (2007), Panda ve ark. (2018), Patel ve ark. (2018), Ray (2015), Gözeri ve ark. (2017), Olajos 2010, Panda ve ark. (2011) ve Panda (2017) de yine balans sayılarını değişik durumlarda ele alarak incelemişlerdir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

t-balans sayıları, balans sayılarının daha genel halidir. Şöyle ki $t \geq 1$ tam sayı olmak üzere (1.1) eşitliğinin sağ tarafındaki her bir terime t eklemek suretiyle elde edilen

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = (n + 1 + t) + (n + 2 + t) + \cdots + (n + r + t) \quad (2.1)$$

denklemini sağlayan $n \geq 1$ tam sayısına t-balans, $r \geq 1$ tam sayısına ise t-balansır denir.

Örneğin,

1. $1, 4, 9, 26, 55, 154, \cdots$ 1-balans sayısıdır ve 1-balansırları $1, 3, 10, 22, 63, \cdots$ dür.
2. $7, 12, 46, 75, 273, \cdots$ 2-balans sayısıdır ve 2-balansırları $2, 4, 18, 30, 112, \cdots$ dir.
3. $10, 15, 66, 95, 392, \cdots$ 3-balans sayısıdır ve 3-balansırları $3, 5, 26, 38, 161, \cdots$ dir.

t-balans sayıları B_n^t ve t-balansırlar da R_n^t ile gösterilirse (2.1) den

$$R_n^t = \frac{-2B_n^t - 2t - 1 + \sqrt{8(B_n^t)^2 + 8tB_n^t + (2t+1)^2}}{2} \quad (2.2)$$

ve

$$B_n^t = \frac{2R_n^t + 1 + \sqrt{8(R_n^t)^2 + 8(t+1)R_n^t + 1}}{2} \quad (2.3)$$

dir.

(2.2) eşitliğine dikkat edilirse, “B_n^t bir t-balans sayısıdır $\Leftrightarrow 8(B_n^t)^2 + 8tB_n^t + (2t+1)^2$ bir tam karedir”. Buna göre

$$C_n^t = \sqrt{8(B_n^t)^2 + 8tB_n^t + (2t+1)^2} \quad (2.4)$$

bir tam sayı olup bu tam sayıya Lucas t-balans sayısı denir.

(2.3) eşitliğine göre, "R_n^t bir t-balansırdır $\Leftrightarrow 8(R_n^t)^2 + 8(t+1)R_n^t + 1$ bir tam karedir". Şu halde $y \geq 1$ tam sayısı için

$$8(R_n^t)^2 + 8(t+1)R_n^t + 1 = y^2$$

denilirse, denklem

$$2(2R_n^t + t + 1)^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$$

denklemine dönüşmüş olur. Bu son eşitlikte

$$x = 2R_n^t + t + 1 \tag{2.5}$$

olarak alınırsa

$$2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1 \tag{2.6}$$

Pell denklemi elde edilmiş olur.

t-balans sayılarının, t-balansırların ve Lucas t-balans sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için şu yol izlenecektir:

1. İlk olarak (2.6) daki Pell denkleminin tüm (x_n, y_n) tam sayı çözümleri kümesi belirlenecektir.
2. x_n ler belirlendikten sonra (2.5) den R_n^t lerin genel terimleri belirlenecektir.
3. R_n^t ler belirlendikten sonra (2.3) den B_n^t lerin genel terimleri belirlenecektir.
4. B_n^t ler belirlendikten sonra (2.4) den C_n^t lerin genel terimleri belirlenecektir.

Böylelikle B_n^t, C_n^t ve R_n^t lerin genel terimleri elde edilmiş olacaktır.

3. t-BALANS SAYILARI

Bu bölümde $t \geq 1$ tamsayı olmak üzere t-balansır, t-balans ve Lucas t-balans sayıları ele alınacak ve bu sayıların genel terimleri balans ve Lucas-balans sayılarına bağlı olarak elde edilecektir.

3.1 $x^2 - dy^2 = \pm n$ Pell Denklemi

d pozitif tam kare olmayan bir tam sayı ve n de pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm n$$

tipindeki denklemlere Pell denklemi denir. $x^2 - dy^2 = n$ denklemine pozitif Pell denklemi, $x^2 - dy^2 = -n$ denklemine ise negatif Pell denklemi denir.

$x^2 - dy^2 = \pm n$ Pell denklemine dikkat edilirse, (x, y) bu denklemin bir tam sayı çözümü ise

$$(-x, y), (-x, -y) \text{ ve } (x, -y)$$

de denklemin birer tam sayı çözümü olur. Ancak genelde pozitif olan (x, y) tam sayı çözümleri dikkate alınır. Örneğin, $x^2 - 7y^2 = 2$ pozitif Pell denkleminin tam sayı çözümleri

$$(3, 1), (45, 17), (717, 271), (11427, 4319), (182115, 68833), \cdots$$

iken, $x^2 - 5y^2 = -4$ negatif Pell denkleminin tam sayı çözümleri

$$(1, 1), (4, 2), (11, 5), (29, 13), (76, 34), (199, 89), (521, 233), \cdots$$

dir.

$x^2 - dy^2 = \pm n$ Pell denkleminde, d nin pozitif tam kare olmayan bir tam sayı olması gerekir. Aksi halde denklem lineer iki denklemin çarpımı alarak yazılabileceğinden denklemin (varsa) sonlu sayıda tam sayı çözümü vardır veya yoktur. Gerçekten de belli bir $k \geq 1$ tam sayısı için, $d = k^2$ denilirse denklem

$$x^2 - dy^2 = \pm n \Leftrightarrow (x - ky)(x + ky) = \pm n$$

olarak yazılabilir. Bu durumda n nin çarpanlarına göre ihtimaller dikkate alınırsa denklemin (varsa) sonlu sayıda tam sayı çözümü elde edilmiş olur. Örneğin, $x^2 - 9y^2 = 7$ pozitif Pell denklemi ele alınsın. Bu denklem

$$x^2 - 9y^2 = 7 \Leftrightarrow (x - 3y)(x + 3y) = 7$$

olarak yazılır ve 7 nin çarpanlarına göre durumlar incelenirse, denklemin tam sayı çözümünün $(4, 1)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $x^2 - 16y^2 = -10$ negatif Pell denklemi

$$x^2 - 16y^2 = -10 \Leftrightarrow (x - 4y)(x + 4y) = -10$$

olarak yazılır ve yine -10 un çarpanlarına göre durumlar incelenirse, denklemin tam sayı çözümünün olmadığı görülür.

$x^2 - dy^2 = \pm n$ Pell denkleminde, özel olarak $n = 1$ alınırsa elde edilen

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

denklemine klasik Pell denklemi denir. Her $d > 0$ için $x^2 - dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin bir tam sayı çözümü $(\pm 1, 0)$ dır. Bu çözüme aşikâr çözüm denir.

Her d için $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin tam sayı çözümleri varken, $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin tam sayı çözümleri yoktur. Bu durum $\sqrt{d}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımının periyot uzunluğunun tek veya çift olmasına bağlıdır.

$x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemini sağlayan, aşikâr çözümden farklı en küçük (x_1, y_1) tam sayı çözümüne denklemin temel çözümü denir. Denklemin temel çözümü varsa, diğer tüm tam sayı çözümleri bu temel çözüm yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

Teorem 3.1.1. $d > 0$ tam kare olmayan bir tam sayı olmak üzere $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2 \cdots, a_l}]$ olsun. $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, B_{-2} = 1, B_{-1} = 0$ ve $n \geq 0$ için

$$A_n = a_n A_{n-1} + A_{n-2} \quad \text{ve} \quad B_n = a_n B_{n-1} + B_{n-2}$$

tanımlansın. Bu takdirde

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \quad \text{ve} \quad A_n B_{n-2} - A_{n-2} B_n = (-1)^n a_n$$

dir. Üstelik $C_n = \frac{A_n}{B_n}$ için

$$C_n - C_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}}, \; C_n - C_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{B_n B_{n-2}} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} C_n = \sqrt{d}$$

dir. (Mollin 2008)

İspat. A_n ve B_n nin tanımlarına dikkat edilirse

$$\begin{vmatrix} A_n & A_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

olduğundan

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1}$$

dir. İkinci eşitlik için $n = 1$ olsun. Bu takdirde

$$A_n B_{n-2} - A_{n-2} B_n = A_1 B_{-1} - A_{-1} B_1 = -B_1 = a_1 = (-1)^1 a_1$$

olduğundan eşitlik $n = 1$ için doğrudur. Eşitliğin $n - 1$ için gerçeklendiği kabul edilsin, yani

$$A_{n-1}B_{n-3} - A_{n-3}B_{n-1} = (-1)^{n-1}a_{n-1}$$

olsun. Bu takdirde

$$A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1} = (-1)^{n-2}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} A_nB_{n-2} - A_{n-2}B_n &= (a_nA_{n-1} + A_{n-2})B_{n-2} - A_{n-2}(a_nB_{n-1} + B_{n-2}) \\ &= (A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1})a_n \\ &= (-1)^{n-2}a_n \\ &= (-1)^n a_n \end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

$d > 0$ pozitif tam kare olmayan bir tam sayı, P ve Q ise $Q \neq 0$ özelliğindeki tam sayılar olmak üzere

$$\gamma = \frac{P + \sqrt{d}}{Q}$$

kuadratik irrasyoneli ele alınsın. A_n ve B_n ler Teorem 3.1.1 gibi olmak üzere aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. Her $j \geq 1$ tam sayısı için $A_j^2 - dB_j^2 = (-1)^{j-1}Q_{j+1}$ dir. (Mollin 2008)

İspat. $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2 \cdots, a_l}]$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sqrt{d} = \frac{\gamma_{j+1}A_j + A_{j-1}}{\gamma_{j+1}B_j + B_{j-1}} \tag{3.1}$$

dir. Üstelik

$$\gamma_{j+1} = \frac{P_{j+1} + \sqrt{d}}{Q_{j+1}}$$

olduğundan (3.1) eşitliği

$$\sqrt{d} = \frac{A_j(P_{j+1} + \sqrt{d}) + Q_{j+1}A_{j-1}}{B_j(P_{j+1} + \sqrt{d}) + Q_{j+1}B_{j-1}}$$

haline gelir. Bu son eşitlikten

$$A_jP_{j+1} + Q_{j+1}A_{j-1} - dB_j = (B_jP_{j+1} + Q_{j+1}B_{j-1} - A_j)\sqrt{d}$$

elde edilir. $\sqrt{d}$ irrasyonel olduğundan

$$A_jP_{j+1} + Q_{j+1}A_{j-1} - dB_j = 0$$
$$B_jP_{j+1} + Q_{j+1}B_{j-1} - A_j = 0$$

denklem sistemi elde edilir. İlk denklem B_j ve ikinci denklem A_j ile çarpılır ve ilk denklemden ikinci denklem çıkartılırsa

$$A_j^2 - dB_j^2 = Q_{j+1}(A_jB_{j-1} - B_jA_{j-1}) = Q_{j+1}(-1)^{j-1}$$

olur.

Teorem 3.1.3. $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2 \cdots, a_l}]$ olsun. $j \geq 1$ tam sayısı için

$$(x, y) = \begin{cases} (A_{jl-1}, B_{jl-1}) & l \text{ çift} \\ (A_{2jl-1}, B_{2jl-1}) & l \text{ tek} \end{cases}$$

$x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin tam sayı çözümleridir. l çift iken $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin tam sayı çözümleri yoktur. l tek iken denklemin tam sayı çözümleri

$$(x, y) = (A_{(2j-1)l-1}, B_{(2j-1)l-1})$$

dir. (Mollin 2008)

İspat. Teorem 3.1.2 gereği $j \geq 1$ tam sayısı için

$$A_j^2 - dB_j^2 = (-1)^{j-1}Q_{j+1}$$

dir. Diğer yandan $Q_{jl} = Q_0 = 1$ dir. Dolayısıyla

$$A_{jl-1}^2 - dB_{jl-1}^2 = (-1)^{jl}Q_{jl} = (-1)^{jl} \tag{3.2}$$

dir. l çift olduğunda $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tam sayı çözümleri (A_{jl-1}, B_{jl-1}) olur. Benzer şekilde

$$A_{2jl-1}^2 - dB_{2jl-1}^2 = (-1)^{2j} \tag{3.3}$$

olduğundan, l nin tek olması durumunda bu pozitif Pell denkleminin tam sayı çözümleri (A_{2jl-1}, B_{2jl-1}) dir. l çift iken (3.2) den

$$A_{jl-1}^2 - dB_{jl-1}^2 = (-1)^{jl} = 1$$

olduğundan, $x^2 - dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin tam sayı çözümleri yoktur, ancak l tek ise denklemin tam sayı çözümleri (3.3) den $(A_{(2j-1)l-1}, B_{(2j-1)l-1})$ olarak elde edilir.

Sonuç 3.1.4. $x^2 - dy^2 = 1$ denklemi için

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (A_{l-1}, B_{l-1}) & l \text{ çift ise} \\ (A_{2l-1}, B_{2l-1}) & l \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir. l nin çift olması durumunda $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin temel çözümü yoktur, ancak l nin tek olması durumunda ise $(x_1, y_1) = (A_{l-1}, B_{l-1})$ dir. (Mollin 2008)

Teorem 3.1.5. (x_1, y_1), $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü ise denklemin tüm tam sayı çözümleri

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

olmak üzere (x_n, y_n) dir. (x_1, y_1), $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin temel çözümü ise denklemin tüm tam sayı çözümleri

$$x_{2n+1} + y_{2n+1}\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{2n+1}$$

olmak üzere (x_{2n+1}, y_{2n+1}) dir. (Mollin 2008)

İspat. $x^2 - dy^2 = 1$ denklemi için

$$N(x_n + y_n\sqrt{d}) = x_n^2 - dy_n^2 = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = (x_1^2 - dy_1^2)^n = 1$$

olduğundan, (x_n, y_n) bu denklemin tam sayı çözümleridir. Şimdi denklemin bu (x_n, y_n) tam sayı çözümünden farklı bir (r, s) tam sayı çözümünün olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$x_n + y_n\sqrt{d} > x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{d} > 1$$

olduğundan, n ler büyüdükçe denklemin tam sayı çözümleri de büyür. Dolayısıyla

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n < r + s\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1}$$

olacak şekilde bir n değeri vardır. Buradan

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n < r + s\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

olup

$$1 < (x_1 - y_1\sqrt{d})(r + s\sqrt{d}) < x_1 + y_1\sqrt{d}$$

dir. Eğer $u = rx_n - sdy_n$ ve $v = sx_n - ry_n$ olarak alınırsa

$$u^2 - dv^2 = (x_n^2 - dy_n^2)(r^2 - ds^2) = 1,$$

yani denklemin

$$1 < u + v\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d} \tag{3.4}$$

özelliğinde yeni bir (u, v) tam sayı çözümü elde edilmiş olur. Diğer yandan

$$u + v\sqrt{d} > 1 \text{ ve } (u + v\sqrt{d})(u - v\sqrt{d}) = 1$$

olduğundan $0 < u - v\sqrt{d} < 1$ dir. Dolayısıyla

$$2u = (u + v\sqrt{d}) + (u + v\sqrt{d}) > 1 + 0 > 1$$
$$2v\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d}) - (u - v\sqrt{d}) > 1 - 1 = 0$$

olur ki bu (u, v) nin denklemin bir tam sayı çözümü olması demektir. (x_1, y_1) denklemin temel çözümü olduğundan $x_1 < u$ ve $y_1 < v$ ve böylece $x_1 + y_1\sqrt{d} < u + v\sqrt{d}$ olması demektir ki bu ise (3.4) ile çelişir. O halde denklemin (x_n, y_n) den farklı bir tam sayı çözümü yoktur. Negatif Pell denklemi için de benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 3.1.6. $d = 13$ için $\sqrt{13} = [3; \overline{1,1,1,6}]$ olup $l = 5$ dir. Buna göre Teorem 3.1.1 den

$$A_0 = 3,\ B_0 = 1, A_1 = 4,\ B_1 = 1, A_2 = 7,\ B_2 = 2, A_3 = 11, B_3 = 3A_4 = 18,$$
$$B_4 = 5, A_5 = 119,\ B_5 = 33, A_6 = 137, B_6 = 38, A_7 = 256,$$
$$B_7 = 71, A_8 = 393,\ B_8 = 109, A_9 = 649,\ B_9 = 180$$

dir. Dolayısıyla Sonuç 3.1.4 gereği $x^2 - 13y^2 = 1$ denklemi için

$$(x_1, y_1) = (A_9, B_9) = (649, 180)$$

dir. Buna göre Teorem 3.1.5 gereği

$$x_2 + y_2\sqrt{13} = 842401 + 233640\sqrt{13}$$
$$x_3 + y_3\sqrt{13} = 1093435849 + 303264540\sqrt{13}$$
$$x_4 + y_4\sqrt{13} = 1419278889601 + 393637139280\sqrt{13}$$

$$x_5 + y_5\sqrt{13} = 1842222905266249 + 510940703520900\sqrt{13}$$
$$x_6 + y_6\sqrt{13} = 2391203911756701601 + 663200639532988920\sqrt{13}$$
$$\dots$$

olduğundan, denklemin diğer tam sayı çözümleri

$$(x_2, y_2) = (842401{,}233640)$$
$$(x_3, y_3) = (1093435849{,}303264540)$$
$$(x_4, y_4) = (1419278889601{,}393637139280)$$
$$(x_5, y_5) = (1842222905266249{,}510940703520900)$$
$$(x_6, y_6) = (2391203911756701601{,}663200639532988920)$$
$$\dots$$

dir. $x^2 - 13y^2 = -1$ denklemi için

$$(x_1, y_1) = (A_4, B_4) = (18, 5)$$

olup

$$x_3 + y_3\sqrt{13} = 23382 + 6485\sqrt{13}$$
$$x_5 + y_5\sqrt{13} = 30349818 + 8417525\sqrt{13}$$
$$x_7 + y_7\sqrt{13} = 39394040382 + 10925940965\sqrt{13}$$
$$x_9 + y_9\sqrt{13} = 51133434066018 + 14181862955045\sqrt{13}$$
$$x_{11} + y_{11}\sqrt{13} = 66371158023650982 + 18408047189707445\sqrt{13}$$
$$\dots$$

olduğundan, denklemin diğer tam sayı çözümleri

$$(x_3, y_3) = (23382{,}6485)$$
$$(x_5, y_5) = (30349818{,}8417525)$$
$$(x_7, y_7) = (39394040382{,}10925940965)$$
$$(x_9, y_9) = (51133434066018{,}14181862955045)$$
$$(x_{11}, y_{11}) = (66371158023650982{,}18408047189707445)$$
$$\dots$$

dir.

Δ tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \{x + y\sqrt{\Delta} : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

sayı cisminde bir $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ elemanının eşleniği ve normu sırasıyla $\bar{\alpha}$ ve $N(\alpha)$ ile gösterilir ve

$$\bar{\alpha} = x - y\sqrt{\Delta} \text{ ve } N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$$

olarak tanımlanır.

Yine aynı Δ için

$$\rho_\Delta = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} & \Delta \equiv 0 (\text{mod } 4) \text{ ise} \\ \\ \dfrac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} & \Delta \equiv 1 (\text{mod } 4) \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$O_\Delta = \{x + y\rho_\Delta : x, y \in \mathbb{Z}\}$$

halkasındaki herhangi bir α elemanın normu bir

$$F_\Delta(x, y) = \begin{cases} x^2 - \frac{\Delta}{4}y^2 & \Delta \equiv 0 (\text{mod } 4) \text{ ise} \\ \\ x^2 + xy - \frac{\Delta - 1}{4}y^2 & \Delta \equiv 1 (\text{mod } 4) \text{ ise} \end{cases}$$

Pell formu belirtir, yani

$$N(\alpha) = F_\Delta(x, y)$$

dir. Gerçekten de $\Delta \equiv 0$ (mod 4) olsun. Bu takdirde belli bir d tam sayısı için $\Delta = 4d$ olup $\rho_\Delta = \sqrt{d}$ ve böylece $\alpha = x + y\sqrt{d}$ elemanının normu

$$N(\alpha) = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = F_\Delta(x, y)$$

dir. Benzer şekilde $\Delta \equiv 1 \pmod 4$ olsun. Bu takdirde $\rho_\Delta = \frac{1+\sqrt{1+4d}}{2}$ olup

$$\alpha = x + y(\frac{1 + \sqrt{1 + 4d}}{2}) = \frac{2x + y + y\sqrt{1 + 4d}}{2}$$

elemanının normu

$$N(\alpha) = \left(\frac{2x+y+y\sqrt{1+4d}}{2}\right)\left(\frac{2x+y-y\sqrt{1+4d}}{2}\right) = x^2 + xy - dy^2 = F_\Delta(x, y)$$

dir. Şu halde her iki durumda da $N(\alpha) = F_\Delta(x, y)$ dir. (Flath 1989)

O_Δ daki herhangi bir α elemanı için $N(\alpha) = \pm 1$ ise α ya birim denir. O_Δ halkasının birimlerinin kümesi

$$O_\Delta^* = \{\alpha \in O_\Delta : N(\alpha) = \pm 1\}$$

olsun. Bu takdirde

$$\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : F_\Delta(x, y) = \pm 1\}$$

ve O_Δ^* kümeleri arasında

$$\Psi : \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) \to O_\Delta^*, \ \ \Psi(x, y) = x + y\rho_\Delta$$

şeklinde birebir bir dönüşüm vardır. Üstelik $\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)$ kümesinde herhangi iki (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) elemanının çarpımı (ikili işlem)

$$x + y\rho_\Delta = (x_1 + y_1\rho_\Delta)(x_2 + y_2\rho_\Delta)$$

için $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x, y)$ dir. Kolayca görüleceği üzere

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \begin{cases} \left(x_1x_2 + \frac{\Delta}{4}y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2\right) & \Delta \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4) \\ \left(x_1x_2 + \frac{\Delta - 1}{4}y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2\right) & \Delta \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \end{cases}$$

dir. Bu işleme göre $\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta)$ bir grup olup

$$\Psi: \mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) \to O_\Delta^*$$

bir grup izomorfizmidir. Benzer şekilde

$$O_{\Delta,1}^* = \{\alpha \in O_\Delta : N(\alpha) = 1\} \quad \text{ve} \quad \mathrm{Pell}^{+}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : F_\Delta(x, y) = 1\}$$

kümeleri için

$$\Psi^{+} : \mathrm{Pell}^{+}(\Delta) \to O_{\Delta,1}^*$$

bir grup izomorfizmidir.

En küçük $\alpha > 1$ birimine O_Δ halkasının temel birim denir ve ε_Δ ile gösterilir. Bu ε_Δ için

$$\tau_\Delta = \begin{cases} \varepsilon_\Delta & N(\varepsilon_\Delta) = 1 \quad \text{ise} \\ \varepsilon_\Delta^2 & N(\varepsilon_\Delta) = -1 \ \text{ise} \end{cases}$$

tanımlansın. Bu takdirde

$$\mathrm{Pell}^{\pm}(\Delta) \cong O_\Delta^* = \{\pm\varepsilon_\Delta^n : n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ve} \quad \mathrm{Pell}^{+}(\Delta) \cong O_{\Delta,1}^* = \{\pm\tau_\Delta^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

a, b, c tam sayılar olmak üzere

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ olan bir form olsun. Bu takdirde bu form

$$F(x,y) = \frac{\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(ax + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)}{a}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$M_F = \left\{ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} : x, y \in \mathbb{Z}\right\}$$

kümesine F nin modülü denir. (Flath 1989)

F nin M_F modülü ile

$$ax^2 + bxy + cy^2 = n$$

denkleminin tam sayı çözümleri arasında yakın bir ilişki vardır. Şöyle ki $x_1 + y_1\rho_\Delta \in O_\Delta$ ve $ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y \in M_F$ için

$$[x' \quad y'] = \begin{cases} [x \quad y]\begin{bmatrix} x_1 - \frac{b}{2}y_1 & ay_1 \\ -cy_1 & x_1 + \frac{b}{2}y_1 \end{bmatrix} & \Delta \equiv 0(\text{mod } 4) \text{ ise} \\ \\ [x \quad y]\begin{bmatrix} x_1 + \frac{1-b}{2}y_1 & ay_1 \\ -cy_1 & x_1 + \frac{1+b}{2}y_1 \end{bmatrix} & \Delta \equiv 1(\text{mod } 4) \text{ ise} \end{cases} \tag{3.5}$$

olmak üzere

$$(x_1 + y_1\rho_\Delta)\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right) = ax' + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y' \in M_F$$

dir. Buna göre

$$\Psi = \{(x,y) : F(x,y) = n\} \to \{\alpha \in M_F : N(\alpha) = an\}$$

olarak tanımlanan dönüşüm için

$$\Psi(x, y) = ax + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2} y$$

dir.

$ax^2 + bxy + cy^2 = n$ denklemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} n = ax^2 + bxy + cy^2 &\Leftrightarrow 4an = 4a^2x^2 + 4abxy + 4acy^2 \\ &\Leftrightarrow 4an - 4acy^2 = 4a^2x^2 + 4abxy \\ &\Leftrightarrow 4an - 4acy^2 + b^2y^2 = 4a^2x^2 + 4abxy + b^2y^2 \\ &\Leftrightarrow (b^2 - 4ac)y^2 + 4an = 4a^2x^2 + 4abxy + b^2y^2 \\ &\Leftrightarrow \Delta y^2 + 4an = (2ax + by)^2 \qquad (3.6) \end{aligned}$$

olur. Yukarıda tanımlanan τ_Δ için

$$0 \le y \le h = \begin{cases} \left|\frac{an\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_\Delta - 1}{\tau_\Delta}\right) & an > 0 \quad \text{ise} \\ \left|\frac{an\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_\Delta + 1}{\tau_\Delta}\right) & an < 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde $\Delta y^2 + 4an$ nin tam kare olup olmadığı dikkate alınır. Eğer bu aralıktaki bir y_0 değeri için bu ifade tam kare ise (3.6) dan

$$\Delta y_0^2 + 4an = (2ax_0 + by_0)^2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-by_0 \pm \sqrt{\Delta y_0^2 + 4an}}{2a}$$

elde edilir ve böylece denklem için bir

$$\text{Rep} = \{[x_0 \quad y_0]\}$$

çözüm temsilcileri kümesi elde edilmiş olur. M, (3.5) deki matris olmak üzere, denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{\pm(x,y)\colon\ [x\ \ y] = [x_0\ \ y_0]M^m,\ m \in \mathbb{Z}\}$$

dir. Aksi halde denklemin tam sayı çözümleri yoktur. Örneğin, $5x^2 + 14xy + 7y^2 = 10$ denklemi için, indefinite form $F = (5, 14, 7)$ olup $\Delta = 56$ dır.

$$F_{56}(x,y) = x^2 - 14y^2 = 1$$

pozitif Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (15, 4)$ olduğundan O_{56} halkasının temel birimi $\varepsilon_{56} = 15 + 4\sqrt{14}$ dür. $N(\varepsilon_{56}) = 1$ olduğundan

$$\tau_{56} = 15 + 4\sqrt{14}$$

dir. O halde

$$0 \le y \le h = \left|\frac{5 \cdot 10 \cdot \left(15 + 4\sqrt{14}\right)}{56}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{14 + 4\sqrt{14}}{15 + 4\sqrt{14}}\right) \cong 5.002$$

olarak elde edilir. Buna göre $0 \le y \le 5$ aralığındaki y değerlerinden $y_0 = 1$ ve $y_1 = 5$ için $\Delta y^2 + 4an = 56y^2 + 200$ bir tam karedir ve $y_0 = 1$ için $x_0 = -3$ ve $y_1 = 5$ için $x_1 = -11, -3$ dür. O halde

$$\mathrm{Rep} = \{[-3\ \ 1], [-11\ \ 5], [-3\ \ 5]\}$$

ve

$$M = \begin{bmatrix} -13 & 20 \\ -28 & 43 \end{bmatrix}$$

olup, denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{\pm(x,y)\colon\ [x\ \ y] = [-3\ \ 1]M^m,\ m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm(x,y)\colon\ [x\ \ y] = [-11\ \ 5]M^m,\ m \in \mathbb{Z}\}$$
$$\cup \{\pm(x,y)\colon\ [x\ \ y] = [-3\ \ 5]M^m,\ m \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

3.2 $2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$ Pell Denklemi

t-balans sayılarının, t-balansırların ve Lucas t-balans sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için

$$2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$$

Pell denkleminin tüm pozitif (x_n, y_n) tam sayı çözümleri kümesinin belirlenmesi gerekiyordu. Bu denklem için kuadratik form $F = (2, 0, -1)$ olup $\tau_8 = 3 + 2\sqrt{2}$ ve

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

dir.

Bu kısımda problem $2t^2 + 4t + 1$ tam kare olup olmamasına göre iki durumda ele alınacaktır.

1. Durum: $2t^2 + 4t + 1$ in tam kare olması durumu.

$2t^2 + 4t + 1$ in hangi t değerleri için bir tam kare ve hangi tam sayının karesi olduğu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.1. $h \geq 1$ tam sayısı için $2t^2 + 4t + 1 = h^2$ denklemi, $t = P_{2n-1}$ ve $h = c_n$ için gerçeklenir (Tekcan ve Aydın 2022).
İspat. $2t^2 + 4t + 1 = h^2$ eşitliği yeniden düzenlenirse $2(t + 1)^2 - h^2 = 1$ olur. Burada $t + 1 = w$ değişken değişimi yapılırsa $2w^2 - h^2 = 1$ denklemi elde edilmiş olur. Bu denklem için $\mathrm{Rep} = \{[\pm 1 \quad 1]\}$ dir. $F = (2, 0, -1)$ olduğundan çözüm matrisi (3.7) deki M matrisidir. $n \geq 1$ için denklemin tüm (w_n, h_n) tam sayı çözümleri $[1 \quad -1]M^n$ den elde edilir. M nin n. kuvveti

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$[w_n \quad h_n] = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = [-2B_n + C_n \quad 4B_n - C_n]$$

dir. Şu halde $2w^2 - h^2 = 1$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri $w = -2B_n + C_n$ ve $h = 4B_n - C_n$ dir. $t + 1 = w$ olduğundan $2t^2 + 4t + 1 = h^2$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri $t = -2B_n + C_n - 1$ ve $h = 4B_n - C_n$ dir. Ancak burada

$$-2B_n + C_n = P_{2n-1} \text{ ve } 4B_n - C_n = c_n$$

olduğundan $2t^2 + 4t + 1 = h^2$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri $t = P_{2n-1}$ ve $h = c_n$ dir.

Aşağıda Çizelge 3.1 de $2t^2 + 4t + 1 = h^2$ denkleminin ilk on tam sayı çözümü verilmiştir.

Çizelge 3.1. $2t^2 + 4t + 1 = h^2$ denkleminin tam sayı çözümleri

n	t	h
1	1	1
2	4	7
3	28	41
4	168	239
5	984	1393
6	5740	8119
7	33460	47321
8	195024	275807
9	1136688	1607521
10	6625108	9369319

$2t^2+4t+1$ tam kare iken iki durum vardır: #Rep $=4$ veya #Rep >4.

Teorem 3.2.2. #Rep $=4$ ise

$$\begin{aligned}(x_{3n+1}, y_{3n+1}) &= (2B_n+(t+1)C_n, (4t+4)B_n+C_n)\\ (x_{3n-1}, y_{3n-1}) &= (-2hB_n+hC_n, 4hB_n-hC_n)\\ (x_{3n}, y_{3n}) &= (-2B_n+(t+1)C_n, (4t+4)B_n-C_n)\end{aligned}$$

olmak üzere (2.6) daki denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(x_{3n+1}, y_{3n+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{3n-1}, y_{3n-1}), (x_{3n}, y_{3n}) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. #Rep $=4$ ise

$$\mathrm{Rep} = \{[\pm(t+1) \quad 1], [\pm h \quad h]\}$$

olup

1. $n \geq 0$ için (x_{3n+1}, y_{3n+1}) tam sayı çözümleri $[t+1 \quad 1]M^n$ den
2. $n \geq 1$ için (x_{3n}, y_{3n}) tam sayı çözümleri $[t+1 \quad -1]M^n$ den
3. $n \geq 1$ için (x_{3n-1}, y_{3n-1}) tam sayı çözümleri $[h \quad -h]M^n$ den

elde edilir. Buna göre

$$[x_{3n+1} \quad y_{3n+1}] = [t+1 \quad 1]\begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = [(t+1)C_n+2B_n \quad (4t+4)B_n+C_n]$$

$$[x_{3n} \quad y_{3n}] = [t+1 \quad -1]\begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = [(t+1)C_n-2B_n \quad (4t+4)B_n-C_n]$$

ve

$$[x_{3n-1} \quad y_{3n-1}] = [h \quad -h]\begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = [-2hB_n + hC_n \qquad 4hB_n - hC_n]$$

olduğundan

$$\{(2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n + C_n) : n \geq 0\} \cup$$

$$\{(-2hB_n + hC_n, 4hB_n - hC_n), (-2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n - C_n) : n \geq 1\}$$

dir.

Örnek 3.2.3 $t = 4$ olsun. Bu takdirde $2x^2 - y^2 = 7^2$ pozitif Pell denklemi için

$$\text{Rep} = \{[\pm 5 \quad 1], [\pm 7 \quad 7]\}$$

olup

$$\{(5,1), (7,7), (13,17), (17,23), (35,49), (73,103), (97,137), \ldots\}$$

dir.

Teorem 3.2.4. $\#\text{Rep} = 2k > 4$ ise $1 \leq i \leq k-2$ için t_{2i-1} ve t_{2i}

$$t+1 < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-5} < h, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-4} < h$$

ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 + 4t + 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar ve

$$\begin{aligned}
(x_{(2k-1)n+1}, y_{(2k-1)n+1}) &= (2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n + C_n) \\
(x_{(2k-1)n+i+1}, y_{(2k-1)n+i+1}) &= (2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n + t_{2i}C_n) \\
(x_{(2k-1)n+k}, y_{(2k-1)n+k}) &= (2hB_n + hC_n, 4hB_n + hC_n) \\
(x_{(2k-1)n}, y_{(2k-1)n}) &= (-2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n - C_n) \\
(x_{(2k-1)n-i}, y_{(2k-1)n-i}) &= (-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n - t_{2i}C_n)
\end{aligned}$$

olmak üzere (2.6) daki denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(x_{(2k-1)n+1}, y_{(2k-1)n+1}), (x_{(2k-1)n+i+1}, y_{(2k-1)n+i+1}), (x_{(2k-1)n+k}, y_{(2k-1)n+k}) :$$

$$n \geq 0\} \cup \{(x_{(2k-1)n}, y_{(2k-1)n}), (x_{(2k-1)n-i}, y_{(2k-1)n-i}) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. $\#\mathrm{Rep} = 2k > 4$ ise $1 \leq i \leq k-2$ için t_{2i-1} ve t_{2i}

$$t+1 < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-5} < h, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-4} < h$$

ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 + 4t + 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\mathrm{Rep} = \{[\pm(t+1) \quad 1], [\pm t_{2i-1} \quad t_{2i}], [\pm h \quad h]\}$$

dir. Burada

1. $n \geq 0$ için $(x_{(2k-1)n+1}, y_{(2k-1)n+1})$ tam sayı çözümleri $[t+1 \quad 1]M^n$ den
2. $n \geq 0$ için $(x_{(2k-1)n+i+1}, y_{(2k-1)n+i+1})$ tam sayı çözümleri $[t_{2i-1} \quad t_{2i}]M^n$ den
3. $n \geq 0$ için $(x_{(2k-1)n+k}, y_{(2k-1)n+k})$ tam sayı çözümleri $[h \quad h]M^n$ den
4. $n \geq 1$ için $(x_{(2k-1)n}, y_{(2k-1)n})$ tam sayı çözümleri $[t+1 \quad -1]M^n$ den
5. $n \geq 1$ için $(x_{(2k-1)n-i}, y_{(2k-1)n-i})$ tam sayı çözümleri $[t_{2i-1} \quad -t_{2i}]M^n$ den

elde edilir. Buna göre

$$\begin{gathered}\{(2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n + C_n), (2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n + t_{2i}C_n),\\ (2hB_n + hC_n, 4hB_n + hC_n) : n \geq 0\} \cup\\ \{(-2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n - C_n),\\ (-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n - t_{2i}C_n) : n \geq 1\}\end{gathered}$$

dir.

Aşağıda Çizelge 3.2 de bazı t değerleri için çözüm temsilcileri kümesi verilmiştir.

Çizelge 3.2 $2t^2 + 4t + 1$ tam kare

t	Rep
984	$\{[\pm 985 \quad 1], [\pm 995 \quad 199], [\pm 1025 \quad 401], [\pm 1267 \quad 1127], [\pm 1393 \quad 1393]\}$
5740	$\{[\pm 5741 \quad 1], [\pm 6001 \quad 2471], [\pm 6739 \quad 4991], [\pm 6805 \quad 5167], [\pm 8119 \quad 8119]\}$
33460	$\{[\pm 33461 \quad 1], [\pm 35155 \quad 15247], [\pm 38935 \quad 28153], [\pm 40409 \quad 32039], [\pm 47321 \quad 47321]\}$
195024	$\{[\pm 195025 \quad 1], [\pm 195083 \quad 6767], [\pm 195257 \quad 13457], [\pm 197005 \quad 39401], [\pm 197743 \quad 46207], [\pm 199547 \quad 59737], [\pm 202985 \quad 79601], [\pm 205933 \quad 93527], [\pm 205973 \quad 93703], [\pm 207607 \quad 100657], [\pm 209405 \quad 107849], [\pm 211327 \quad 115103], [\pm 219883 \quad 143623], [\pm 222425 \quad 151249], [\pm 227837 \quad 166583], [\pm 236623 \quad 189503], [\pm 243355 \quad 205849], [\pm 243443 \quad 206057], [\pm 246977 \quad 214303], [\pm 250747 \quad 222887], [\pm 254665 \quad 231601], [\pm 271133 \quad 266377], [\pm 275807 \quad 275807]\}$

2. Durum. $2t^2 + 4t + 1$ in tam kare olmaması hâli. Yine burada iki durum vardır: $\#\mathrm{Rep} = 2$ veya $\#\mathrm{Rep} > 2$.

Teorem 3.2.5. $\#\mathrm{Rep} = 2$ ise

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = (2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n + C_n)$$
$$(x_{2n}, y_{2n}) = (-2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n - C_n)$$

olmak üzere (2.6) daki denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(x_{2n+1}, y_{2n+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{2n}, y_{2n}) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. #Rep $= 2$ ise

$$\text{Rep} = \{[\pm(t+1) \quad 1]\}$$

olup $n \geq 0$ için $[t+1 \quad 1]M^n$ denklemin tüm (x_{2n+1}, y_{2n+1}) tam sayı çözümlerini ve $n \geq 1$ için $[t+1 \quad -1]M^n$ denklemin tüm (x_{2n}, y_{2n}) tam sayı çözümlerini üretir. Dolayısıyla

$$\{(2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n + C_n) : n \geq 0\} \cup$$
$$\{(-2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n - C_n) : n \geq 1\}$$

dir.

Örnek 3.2.6. $t = 9$ olsun. $2x^2 - y^2 = 199$ denklemi için Rep $= \{[\pm 10 \quad 1]\}$ olup

$$\{(10,1), (28,37), (32,43), (158,223), (182,257), (920,1301), \ldots\}$$

dir.

Teorem 3.2.7. #Rep $= 2k > 2$ ise $1 \leq i \leq k-1$ için t_{2i-1} ve t_{2i}

$$t+1 < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-3}, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-2}$$

ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 + 4t + 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar ve

$$(x_{2kn+1}, y_{2kn+1}) = (2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n + C_n)$$
$$(x_{2kn+i+1}, y_{2kn+i+}) = (2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n + t_{2i}C_n)$$

$$(x_{2kn}, y_{2kn}) = (-2B_n + (t+1)C_n, (4t+4)B_n - C_n)$$
$$(x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) = (-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n - t_{2i}C_n)$$

olmak üzere (2.6) daki denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(x_{2kn+1}, y_{2kn+1}), (x_{2kn+i+1}, y_{2kn+i+1}) : n \geq 0\}$$
$$\cup\ \{(x_{2kn}, y_{2k\ \ }), (x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) : n \geq 1\}$$

dir. (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. #Rep $= 2k > 2$ ise $1 \leq i \leq k-1$ için t_{2i-1} ve t_{2i}, $t+1 < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-3}$, $1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-2}$ ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 + 4t + 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\text{Rep} = \{[\pm(t+1) \quad 1], [\pm t_{2i-1} \quad t_{2i}]\}$$

dir. Burada

1. $n \geq 0$ için (x_{2kn+1}, y_{2kn+1}) tam sayı çözümleri $[t+1 \quad 1]M^n$ den
2. $n \geq 1$ için (x_{2kn}, y_{2kn}) tam sayı çözümleri $[t+1 \quad -1]M^n$ den
3. $n \geq 0$ için $(x_{2kn+i+1}, y_{2kn+i+1})$ tam sayı çözümleri $[t_{2i-1} \quad t_{2i}]M^n$ den
4. $n \geq 1$ için (x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) tam sayı çözümleri $[t_{2i-1} \quad -t_{2i}]M^n$ den

elde edilir. Şu halde

$$\{(x_{2kn+1}, y_{2kn+1}), (x_{2kn+i+\ \ }, y_{2kn+i+\ \ }) : n \geq 0\}$$
$$\cup\ \{(x_{2kn}, y_{2kn}), (x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) : n \geq 1\}$$

dir.

Örnek 3.2.8. $t = 53$ olsun. $2x^2 - y^2 = 5831$ Pell denklemi için

$$\text{Rep} = \{[\pm 54 \quad 1], [56 \quad 21], [\pm 60 \quad 37], [\pm 70 \quad 63]\}$$

olup

$$\{(54,1),\ (56,21),\ (60,37),\ (70,63),\ (84,91),\ (106,129),(126,161),\cdots\}$$

dir.

Aşağıda Çizelge 3.3 de bazı t değerleri için çözüm temsilcileri kümesi verilmiştir.

Çizelge 3.3 $2t^2+4t+1$ tam kare değil

t	Rep
53	{[±54 1], [±56 21], [±60 37], [±70 63]}
57	{[±58 1], [±62 31], [±74 65]}
134	{[±13 51], [±137 33], [±173 153], [±187 183]}
141	{[±142 1], [±148 59], [±182 161]}
151	{[±152 1], [±154 35], [±158 61], [±178 131], [±196 175], [±212 209]}
298	{[±299 1], [±301 49], [±311 121], [±359 281], [±385 343], [±415 407]}
274	{[±275 1], [±277 47], [±293 143], [±295 151], [±307 193], [±317 223],[±353 313], [±383 377]}

3.3. t-Balans Sayıları

Bir önceki alt bölümde

$$2x^2-y^2=2t^2+4t+1$$

Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi belirlendi. Bu kısımda ise bu tamsayı çözümleri kümesi yardımıyla, t-balans sayılarının, t-balansırların ve Lucas t-balans sayılarının genel terimleri elde edilecektir.

Yine burada da iki durum söz konusudur:

1. Durum: $2t^2 + 4t + 1$ in tam kare olması durumu.

Teorem 3.3.1. #Rep $= 4$ ise $n \geq 1$ için

$$R_{3n}^t = \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$R_{3n-1}^t = \frac{-2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$R_{3n-2}^t = \frac{-2hB_n + hC_n - t - 1}{2}$$
$$B_{3n}^t = \frac{(4t+6)B_n + (t+2)C_n - t}{2}$$
$$B_{3n-1}^t = \frac{(4t+2)B_n + tC_n - t}{2}$$
$$B_{3n-2}^t = \frac{2hB_n - t}{2}$$
$$C_{3n}^t = \sqrt{8(B_{3n}^t)^2 + 8tB_{3n}^t + (2t+1)^2}$$
$$C_{3n-1}^t = \sqrt{8(B_{3n-1}^t)^2 + 8tB_{3n-1}^t + (2t+1)^2}$$
$$C_{3n-2}^t = \sqrt{8(B_{3n-2}^t)^2 + 8tB_{3n-2}^t + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. 3.2.2 Teoremi ve (2.5) eşitliği dikkate alınırsa $x_n = 2R_n^t + t + 1$ olduğundan

$$R_{3n}^t = \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$

olur. Buna göre (2.3) den

$$B_{3n}^t = \frac{2R_{3n}^t + 1 + \sqrt{8(R_{3n}^t)^2 + 8(t+1)R_{3n}^t + 1}}{2}$$
$$= \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1 + 1 + (4t+4)B_n + C_n}{2}$$
$$= \frac{(4t+6)B_n + (t+2)C_n - t}{2}$$

elde edilir. Böylece (2.4) den

$$C_{3n}^t = \sqrt{8(B_{3n}^t)^2 + 8tB_{3n}^t + (2t+1)^2}$$

olur. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 3.3.2. $t = 4$ için 4-balans, 4-balansır ve Lucas 4-balans sayıları

$$B_n^4: 1, 5, 13, 18, 40, 86, 115, 243, \ldots$$
$$R_n^4: 0, 1, 4, 6, 15, 34, 46, 99, \ldots$$
$$C_n^4: 11, 21, 43, 57, 119, 249, 331, 693, \ldots$$

dir.

Teorem 3.3.3. #Rep $= 2k > 4$ ise $1 \leq i \leq k-2$ için t_{2i-1} ve t_{2i}, $t+1 < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-5} < h, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-4} < h$ ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 + 4t + 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere $n \geq 1$ için

$$R_{(2k-1)n}^t = \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$R_{(2k-1)n-1}^t = \frac{-2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$R_{(2k-1)n-i-1}^t = \frac{-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n - t - 1}{2}$$
$$B_{(2k-1)n}^t = \frac{(4t+6)B_n + (t+2)C_n - t}{2}$$

$$B^t_{(2k-1)n-1} = \frac{(4t+2)B_n + tC_n - t}{2}$$

$$B^t_{(2k-1)n-i-1} = \frac{(-2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} - t_{2i})C_n - t}{2}$$

$$C^t_{(2k-1)n} = \sqrt{8(B^t_{(2k-1)n})^2 + 8tB^t_{(2k-1)n} + (2t+1)^2}$$

$$C^t_{(2k-1)n-1} = \sqrt{8(B^t_{(2k-1)n-1})^2 + 8tB^t_{(2k-1)n-1} + (2t+1)^2}$$

$$C^t_{(2k-1)n-i-1} = \sqrt{8(B^t_{(2k-1)n-i-1})^2 + 8tB^t_{(2k-1)n-i-1} + (2t+1)^2}$$

ve $n \geq 0$ için

$$R^t_{(2k-1)n+i} = \frac{2t_{2i}B_n + 2t_{2i-1}C_n - t - 1}{2}$$

$$R^t_{(2k-1)n+k-1} = \frac{2hB_n + hC_n - t - 1}{2}$$

$$B^t_{(2k-1)n+i} = \frac{(2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} + t_{2i})C_n - t}{2}$$

$$B^t_{(2k-1)n+k-1} = \frac{6hB_n + 2hC_n - t}{2}$$

$$C^t_{(2k-1)n+i} = \sqrt{8\left(B^t_{(2k-1)n+i}\right)^2 + 8tB^t_{(2k-1)n+i} + (2t+1)^2}$$

$$C^t_{(2k-1)n+k-1} = \sqrt{8(B^t_{(2k-1)n+k-1})^2 + 8tB^t_{(2k-1)n+k-1} + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. 3.2.4 Teoreminden elde edilir.

Örnek 3.3.4. 984-balans, 984-balansır ve Lucas 984-balans sayıları aşağıdaki gibidir.

$$B_n^{984} : 1, 105, 221, 705, 901, 1125, 2093, \cdots$$

$$R_n^{984} : 0, 5, 20, 141, 204, 281, 644, \cdots$$

$$C_n^{984} : 1971, 2189, 2451, 3661, 4179, 4781, 7443, \cdots$$

2. Durum: $2t^2 + 4t + 1$ in tam kare olmaması hâli.

Teorem 3.3.5 #Rep $= 2$ ise $n \geq 1$ için

$$R_{2n}^t = \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$R_{2n-1}^t = \frac{-2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$B_{2n}^t = \frac{t(c_{n+1} - 1) + 2B_{n+1}}{2}$$
$$B_{2n-1}^t = \frac{t(c_{n+1} - 1) + 2B_n}{2}$$
$$C_{2n}^t = \sqrt{8(B_{2n}^t)^2 + 8tB_{2n}^t + (2t+1)^2}$$
$$\mathrm{C}_{2n-1}^t = \sqrt{8(B_{2n-1}^t)^2 + 8tB_{2n-1}^t + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. (2.5) eşitliği dikkate alınırsa Teorem 3.2.5 den

$$R_{2n}^t = \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$4B_n + C_n = c_{n+1} \text{ ve } 6B_n + 2C_n = 2B_{n+1}$$

olduğundan (2.3) den

$$\begin{aligned} B_{2n}^t &= \frac{2R_{2n}^t + 1 + \sqrt{8(R_{2n}^t)^2 + 8(t+1)R_{2n}^t + 1}}{2} \\ &= \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1 + 1 + (4t+4)B_n + C_n}{2} \\ &= \frac{t(c_{n+1} - 1) + 2B_{n+1}}{2} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (2.4) den

$$C_{2n}^t = \sqrt{8(B_{2n}^t)^2 + 8tB_{2n}^t + (2t+1)^2}$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 3.3.6. $t = 9$ için 9-balans, 9-balansır ve Lucas 9-balans sayıları

$$B_n^9 : 1, 28, 33, 186, 215, 1106, 1275, \cdots$$

$$R_n^9 : 0, 9, 11{,}74, 86, 455, 525, \cdots$$

$$C_n^9 : 21, 93, 107, 539, 621, 3141, 3619, \cdots$$

dır.

Teorem 3.3.7. #Rep $= 2k > 2$ ise $1 \le i \le k-1$ için t_{2i-1} ve $t_{2i}, t+1 < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-3},\ 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-2}$ ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 + 4t + 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere $n \ge 1$ için

$$R_{2kn}^t = \frac{2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$R_{2kn-1}^t = \frac{-2B_n + (t+1)C_n - t - 1}{2}$$
$$R_{2kn-i-}^t = \frac{-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n - t - 1}{2}$$
$$B_{2kn}^t = \frac{t(c_{n+1} - 1) + 2B_{n+1}}{2}$$
$$B_{2kn-1}^t = \frac{t(c_{n+1} - 1) + 2B_n}{2}$$
$$B_{2kn-i-1}^t = \frac{(-2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} - t_{2i})C_n - t}{2}$$
$$C_{2kn}^t = \sqrt{8(B_{2kn}^t)^2 + 8tB_{2kn}^t + (2t+1)^2}$$
$$C_{2kn-1}^t = \sqrt{8(B_{2kn-1}^t)^2 + 8tB_{2kn-1}^t + (2t+1)^2}$$

$$C^t_{2kn-i-} \;\; = \sqrt{8(B^t_{2kn-i-1})^2 + 8tB^t_{2kn-i-1} + (2t+1)^2}$$

ve $n \geq 0$ için

$$R^t_{2kn+i} = \frac{2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n - t - 1}{2}$$

$$B^t_{2kn+i} = \frac{(2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} + t_{2i})C_n - t}{2}$$

$$C^t_{2kn+i} = \sqrt{8(B^t_{2kn+i})^2 + 8tB^t_{2kn+i} + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Aydın 2022).

İspat. Teorem 3.2.7 den elde edilir.

Örnek 3.3.8. 53-balans, 53-balansır ve Lucas 53-balans sayıları aşağıdaki gibidir.

$$B^{53}_n : 1, 12, 22, 40, 61, 91, 117, 160, \cdots$$

$$R^{53}_n : 0, 1, 3, 8, 15, 26, 36, 53, \cdots$$

$$C^{53}_n : 109, 133, 157, 203, 259, 341, 413, 533, \; \cdots$$

4. SONUÇ

Bu tezde $t \geq 1$ tam sayısı için t-balans sayıları ele alınmış ve t-balans, t-balansır ve Lucas t-balans sayıları tanımlanmış ve bu sayıların genel terimleri elde edilmiştir.

Hatırlanacağı üzere

$$1+2+\cdots+n-1=(n+1+t)+(n+2+t)+\cdots+(n+r+t)$$

denklemini sağlayan $n \geq 1$ tam sayısına t-balans, $r \geq 1$ tam sayısına ise t-balansır denildi.

t-balans sayıları B_n^t ve t-balansırlar da R_n^t ile gösterilirse yukarıdaki eşitlikten

$$B_n^t=\frac{2R_n^t+1+\sqrt{8(R_n^t)^2+8(t+1)R_n^t+1}}{2}$$

ve

$$R_n^t=\frac{-2B_n^t-2t-1+\sqrt{8(B_n^t)^2+8tB_n^t+(2t+1)^2}}{2}$$

elde edilir. Bu son eşitliğe göre B_n^t bir t-balans sayısıdır $\Leftrightarrow$ $8(B_n^t)^2+8tB_n^t+(2t+1)^2$ bir tam karedir. Buna göre

$$C_n^t=\sqrt{8(B_n^t)^2+8tB_n^t+(2t+1)^2}$$

bir tam sayı olup bu tam sayıya Lucas t-balans sayısı denir.

Benzer şekilde R_n^t bir t-balansırdır $\Leftrightarrow$ $8(R_n^t)^2+8(t+1)\,R_n^t+1$ bir tam karedir. Buna göre $y \geq 1$ için

$$8(R_n^t)^2 + 8(t+1)R_n^t + 1 = y^2$$

denilirse, bu denklem

$$2(2R_n^t + t + 1)^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$$

denklemine indirgenmiş olur. Bu son denklemde

$$x = 2R_n^t + t + 1$$

değişken değişimi yapılırsa

$$2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$$

denklemi elde edilmiş olur.

Bu tezde ilk olarak $2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$ denkleminin tüm (x_n, y_n) tam sayı çözümleri kümesi belirlendi. x_n ler belirlendikten sonra $x_n = 2R_n^t + t + 1$ eşitliğinden

$$R_n^t = \frac{x_n - t - 1}{2}$$

ler elde edildi. R_n^t ler belirlendikten sonra

$$B_n^t = \frac{2R_n^t + 1 + \sqrt{8(R_n^t)^2 + 8(t+1)R_n^t + 1}}{2}$$

ler elde edildi. B_n^t ler belirlendikten sonra son olarak

$$C_n^t = \sqrt{8(B_n^t)^2 + 8tB_n^t + (2t+1)^2}$$

ler elde edildi.

Burada dikkat edilirse t-balans, t-balansır ve Lucas t-balans sayılarının genel terimlerinin elde edilmesi problemi, esasında $2x^2 - y^2 = 2t^2 + 4t + 1$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesinin belirlenmesine ve dolayısıyla da denklemin çözümleri için çözüm temsilcileri kümesinin belirlenmesine bağlıdır. Eğer denklemi için Rep belli ise denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi kolayca elde edilir. Bu tam sayı çözümleri kullanılarak da t-balans, t-balansır ve Lucas t-balans sayılarının genel terimleri elde edilebilir.

Ancak yukarıda verilen Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3 ten de görüleceği üzere, $t \geq 1$ tam sayısı için, Rep in ve bu kümedeki elemanların t ye bağlı olarak tek türlü ifade edilmesi kolay değildir, çünkü belli bir düzen yoktur.

KAYNAKLAR

Barbeau, E.J. (2003). Pell's equation. Springer-Verlag New York, Inc.

Behera, A. ve Panda, G.K. (1999). On the square roots of triangular numbers. *The Fibonacci Quarterly* 37(2): 98-105.

Flath, D.E. (1989). Introduction to number theory. Wiley.

Gözeri, G.K., Özkoç, A. ve Tekcan, A. (2017). Some algebraic relations on balancing numbers. *Utilitas Mathematica* 103: 217-236.

Kovacs, T., Liptai, K. ve Olajos, P. (2010). On (a, b) balancing numbers. *Publ. Math. Deb.* 77(3-4): 485-498.

Liptai, K., Luca, F., Pinter, A. ve Szalay, L. (2009). Generalized balancing numbers. *Indag. Mathem. N.S.* 20(1): 87-100.

Liptai, K. (2004). Fibonacci balancing numbers. *The Fibonacci Quart.* 42(4): 330-340.

Liptai, K. (2006). Lucas balancing numbers. *Acta Math. Univ. Ostrav.* 14: 43-47.

Mollin, R.A. (1996). Quadratics. CRS Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo.

Mollin, R.A. (2008). Fundamental number theory with appl. Chapman & Hall / CRC.

Olajos, P. (2010). Properties of balancing, cobalancingand generalized balancing numbers. *Annales Mathematicae et Informaticae* 37: 125-138.

Özkoc, A. ve Tekcan, A. (2017). On k-balancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 23(3): 38-52.

Panda, G.K. ve Ray, P.K. (2011). Some links of balancing and cobalancing numbers with Pell and associated Pell numbers. *Bull. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1): 41-72.

Panda, K.G. ve Ray, P.K. (2005). Cobalancing numbers and cobalancers. *International Journal of Math and Math. Sci.* 8: 1189-1200.

Panda, G.K. ve Panda, A.K. (2015). Almost balancing numbers. *Jour. of the Indian Math. Soc.* 82(3-4): 147-156.

Panda, G.K., Komatsu, T. ve Davala, R.K. (2018). Reciprocal sums of sequences involving balancing and Lucas-balancing numbers. *Math. Reports* 20(70): 201-214.

Panda, A.K. (2017). Some variants of the balancing sequences. *Ph.D. dissertation.* National Institute of Technology Rourkela, India.

Patel, B.K., Irmak, N. ve Ray, P.K. (2018). Incomplete balancing and Lucas-balancing numbers. *Mathematical Reports* 20(70): 59-72.

Ray, P.K. (2009). Balancing and cobalancing numbers. *Ph.D. dissertation*. Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Ray, P.K. (2015). Balancing and Lucas-balancing sums by matrix methods. *Math. Rep.* 17(67): 225-233.

Szalay, L. (2007). On the resolution of simultaneous Pell equations. *Annales Mathematics and Informatics* 34: 77-87.

Tekcan, A. (2019). Almost balancing, triangular and square triangular numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths.* 25(1): 108-121.

Tekcan, A. ve Erdem, A. (2020). t-cobalancing numbers and Lucas t-cobalancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 26(1): 45-58.

Tekcan, A. ve Aydın, S. (2022). On t-balancers, t-balancing numbers and Lucas t-balancing numbers. *Libertas Mathematica*. Yayına kabul edildi.

Tengely, S. (2013). Balancing numbers which are product of consecutive integers *Publ. Math. Deb.*83(1-2):197-205.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Samet AYDIN

Doğum Yeri ve Tarihi :Bandırma, 11/02/1996

Yabancı Dil :İngilizce

Eğitim Durumu

Lise :Manyas Anadolu Lisesi, 2010-2014

Lisans :Uludağ Üniversitesi, 2014-2019

Çalıştığı Kurumlar :Bursa Uzman Kariyer Eğitim Kurumları, 2017-2021

İletişim (e-posta) :smtaydin.1996@gmail.com

Yayınlar :

Tekcan, A. ve Aydın, S. (2022). On *t*-balancers, *t*-balancing numbers and Lucas *t*-balancing numbers. *Libertas Mathematica*. Yayına kabul edildi.