

**\mathbb{R}^n ÖKLİT UZAYINDA ξ -ALTMANİFOLDLARININ BİR
KARAKTERİZASYONU**

Yılmaz AYDIN



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**\mathbb{R}^n ÖKLİT UZAYINDA ξ -ALTMANİFOLDLARININ BİR
KARAKTERİZASYONU**

Yılmaz AYDIN
0000-0003-4292-5880

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2022
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Eray DEMİRBAŞ tarafından hazırlanan “ \mathbb{R}^n ÖKLİT UZAYINDA ξ -ALTMANİFOLDLARININ BİR KARAKTERİZASYONU” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. KadriARSLAN

Başkan : Prof. Dr. KadriARSLAN imza
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
MatematikAnabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ imza
0000-0001-8619-8334
Bursa Uludağ Üniversitesi,
EğitimFakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY imza
000-0002-01713876
İstanbul Teknik Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Müh. Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Bengü BAYRAM imza
0000-0002-1237-5892
Balıkesir Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Betül BULCA imza
0000-0001-5861-0184
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-EdebiyatFakültesi,
MatematikAnabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

.././.....

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.../.../.....

Yılmaz AYDIN

TEZ YAYINLANMA FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan “**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**” kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
01.07.2022

Yılmaz AYDIN
01.07.2022

İmza

Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum
anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

İmza

Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum
anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Doktora Tezi

\mathbb{R}^n ÖKLİT UZAYINDA ξ -ALTMANİFOLDLARININ BİR KARAKTERİZASYONU

Yılmaz AYDIN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

\mathbb{R}^n Öklit uzayındaki altmanifoldlar diferansiyel geometrinin önemli konularından birini teşkil etmektedir. Alan olarak, eğriler, yüzeyler ve tüm hiperyüzeyleri kapsamaktadır. Altmanifoldlar bir x izometrik daldırma fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Bu fonksiyon \mathbb{R}^n nin vektör değerli fonksiyon olup altmanifoldun konum vektörü olarak bilinir. Konum vektörünün özellikleri ile ilgili bugüne kadar çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu vektör teğet ve normal bileşenlerine ayrıştırıldığında herbir bileşenin farklı geometrik özellikleri ortaya çıkmaktadır. Altmanifoldların önemli bir vektörü de ortalama eğrilik vektörüdür. Bu vektör sayesinde altmanifoldları karakterize etmek mümkündür. Konum vektörünün normal bileşeni ile ortalama eğrilik vektörü lineer bağımlı ise bu altmanifoldlar kendisi büzüşen (self shrinker) olarak adlandırılır. Bu tür altmanifoldlar fizikte soliton teori için oldukça önemlidir. Eğer bu iki vektör alanının toplamı bir ksi vektör alanı olarak ifade edilirse bu tür altmanifold ksi-altmanifoldu olarak ifade edilir.

Rotasyon ve toroidal altmanifoldları modern diferansiyel geometride önemli bir yere sahiptir. Özellikle \mathbb{R}^3 de rotasyon yüzeyleri bilgisayar destekli geometrik tasarımda oldukça önemlidir. 4-boyutlu Öklit uzayında rotasyon yüzeyleri zengin bir sınıf oluşturmaktadır. Bu çalışmada \mathbb{R}^n Öklit uzayındaki rotasyon altmanifoldlarının ksi-altmanifoldu olmaları durumu ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dönel yüzey, λ -hiperyüzeyi, ξ -altmanifoldu, ortalama eğrilik akısı
2022, xi+65 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

A CHARACTERIZATION OF ξ -SUBMANIFOLDS IN EUCLIDEAN SPACE

Yılmaz AYDIN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Submanifolds in \mathbb{R}^n Euclidean space constitute one of the important topics of differential geometry. In this area, it includes curves, surfaces, and all hypersurfaces. Submanifolds are defined with the aid of an isometric immersion x . This function is a vector valued function on \mathbb{R}^n and is known as the position vector of the submanifold. Various studies have been carried out on the properties of the position vector. When this vector is decomposed into its tangent and normal components, different geometric properties of each component emerge. An important vector of submanifolds is the mean curvature vector. Thanks to this vector, it is possible to characterize submanifolds. If the normal component of the position vector and the mean curvature vector are linear dependent, these submanifolds are called self-shrinking. Such submanifolds are very important for soliton theory in physics. If the sum of these two vector fields is expressed as a ξ vector field then the submanifold is expressed as the ξ -submanifold.

Rotation and toroidal submanifolds have an important place in modern differential geometry. Especially in \mathbb{R}^3 , rotation surfaces are very important in computer aided geometric design. In 4-dimensional Euclidean space, rotation surfaces form a rich class. In this study, the case of rotation submanifolds in \mathbb{R}^n Euclidean space as ξ -submanifolds is discussed.

Key words: Rotational surfaces, λ -hypersurface, ξ -hypersurface, mean curvature flow.

2022, xi + 65 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Lisans ve Lisansüstü eğitimim boyunca sağlam bir bilgi birikimine sahip olmamı sağlayan, doktora tez konusunun belirlenmesinde ve kayda değer sonuçlar elde edebileceğimiz problemlerin ortaya atılmasında çok büyük katkıları olan ve bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek de manevi desteğiyle yanımda olduğunu hep gösteren hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma alanımda bilgi birikimiyle bana birçok konuda yardımcı olan, Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bilgi birikimiyle bana birçok konuda yardımcı olan, her zaman fikirlerine başvurduğum Doç. Dr. Betül BULCA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne, babama ve eşime ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Yılmaz AYDIN

.../.../.....

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
3.1.Ortalama eğrilik akısı.....	6
3.1.1.Ters Ortalama eğrilik akısı.....	8
3.1.2. Ağırlıklı Hacim Koruyan Ortalama eğrilik akısı.....	11
3.2. Ricci ve Yamabe solitonları.....	14
3.2.1. Ricci solitonları.....	14
3.2.2.Yamabe solitonları.....	19
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	20
4.1. \mathbb{R}^{n+1} de rotasyonel yüzeyler.....	20
4.2. \mathbb{R}^{n+d} de rotasyonel yüzeyler.....	26
4.3. \mathbb{R}^{n+d} de rotasyonel altmanifoldlar.....	46
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	60
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ.....	65

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
U_α	Alt küme
B_r^{n+1}	Açık yuvar
M	Altmanifold
x_α	Dönüşüm
∇f	f fonksiyonunun gradienti
df_p	f fonksiyonunun yöne göre türevi
K	Gauss eğriliği
M_t	Hiperyüzey ailesi
\langle, \rangle	İç çarpım
h	İkinci temel form
h_{ij}^α	İkinci temel form katsayıları
x	Konum vektörü
Δ	Laplacian
$[,]$	Lie parantez operatörü
L_v	Lie türev
∇M	M nin koneksiyonu
\mathbb{R}^{n+d}	$(n + d)$ -boyutlu Öklit uzayı
$\ \cdot \ $	Norm
x^N	Normal bileşen
∇^\perp	Normal koneksiyon
N_α	Normal vektör alanı
$\chi^\perp(M)$	Normal vektör alanları kümesi
H	Ortalama eğrilik
\vec{H}	Ortalama vektör alanı
ξ	Paralel vektör alanı
$S^n(r)$	r -yarıçaplı küre
Ric	Ricci eğrilik
$\vec{\nabla}$	\mathbb{R}^{n+d} nin koneksiyonu
λ	Sabit fonksiyon
A	Şekil operatörü
$div(x^T)$	Tanjant bileşenin divergenti
x^T	Teğet bileşen
$\chi(M)$	Teğet vektör alanları kümesi
ϕ^{-1}	Ters fonksiyon
dx_p	Türev dönüşümü
k	Türevlenebilir fonksiyon

\vec{F}	Vektör alanı
\tilde{M}	Variş uzayı
\mathcal{H}	Yarı düzlem

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Bir çembere büzüşen tor yüzeyi.....	19
Şekil 4.1. Büzüşen hiperküreler	20
Şekil 4.2. Büzüşen hipersilindir	22

1. GİRİŞ

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ n -boyutlu türevlenebilir bir altmanifold olsun. M nin konum vektörü x olmak üzere bu vektör

$$x = x^T + x^N \quad (1.1)$$

tanjant ve normal bileşenlerine ayrışabilir (Chen, 2016).

Ortalama eğrilik vektör alanı \vec{H} , M altmanifoldun en önemli değişmezlerinden biridir. Fizikte, ortalama eğrilik vektör alanı, varış uzayından kaynaklanan altmanifoldta uygulanan burulma alanıdır. Eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\vec{H} + \lambda x^N = 0 \quad (1.2)$$

eşitliği sağlanırsa M ye *kendine benzerdir* denir (Halldorsson, 2013). Burada $\lambda = 1$ için daralan (Joyse vd., 2010), $\lambda = -1$ için genişleyendir (Ecker ve Huisken, 1989).

Eğer $c \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$\langle \vec{H}, x \rangle = -\frac{1}{c} \quad (1.3)$$

eşitliği sağlanırsa M ye *homotetik soliton* adı verilir (Kim ve Pyo, 2019).

Verilen bir $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ türevlenebilir altmanifoldu için M nin \vec{H} ortalama eğrilik vektörü için bir ξ paralel vektör alan bulunabilir öyleki

$$\vec{H} + x^N = \xi$$

şartı sağlanırsa M^n ye ξ -*altmanifoldu* adı verilir (Li ve Chang, 2016), (Li ve Li, 2020).

Bu tez dört bölümden oluşur. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde kuramsal temeller ve kaynak araştırmasına dönük tanım ve sonuçlar verilmiştir. Özellikle diferansiyellenebilir manifold, diferansiyellenebilir dönüşüm, Levi-civita koneksiyonu, türev dönüşümü ve difeomorfizm ile ilgili temel tanımlar ve eşitlikler tanıtılmıştır. Bölümün ilerleyen kısımlarında imersiyonlar, altmanifoldlar, 2. temel form, şekil operatörü, Gauss ve Weingarten eşitlikleri ve bunlar yardımıyla tanımlanan ortalama eğrilik vektör alanı ve Ricci skaler eğriliği ile ilgili eşitlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde materyal ve yöntem yer verilmiştir. Bu bölüm dört kısımdan ibarettir. Birinci kısımda ortalama eğrilik akısına yer verilmiştir. Bu akının etkisi altındaki bir altmanifoldun kendine benzer olması ile ilgili eşitlik verilmiş, altmanifoldun genişleyen ve büzüşen olması durumu incelenmiştir. Daha sonra kendisi büzüşen hiperyüzeyler ile ilgili temel sonuçlara yer verilmiştir. Bu tür hiperyüzeylerin bir genellemesi ξ -altmanifoldlarıdır. Bu kısımda ξ -altmanifoldu olma koşulu incelenmiştir. İkinci kısımda ters ortalama eğrilik akısına yer verilmiştir. Bu akının tesiri altındaki bir altmanifoldun homotetik soliton olması ile ilgili temel özelliklere yer verilmiştir. Bununla birlikte bir altmanifoldunun konum vektörünün sıkıştırılmaz olması o altmanifoldun homotetik soliton olmasını gerektirdiği ile ilgili sonuca yer verilmiştir. Üçüncü kısımda ağırlıklı hacim koruyan ortalama eğrilik akısına yer verilmiştir. Bu akının etkisi altında kalan bir hiperyüzeyin λ -hiperyüzeyi olması durumu incelenmiştir. Dördüncü kısımda solitonlara yer verilmiştir. Özellikle altmanifoldların Ricci solitonu ve Yamabe solitonu olmaları durumunda oluşan eşitlikler irdelenmiştir.

Dördüncü bölüm bulgulardan ibaret olup tezin orijinal sonuçlarını içermektedir. Bu bölüm üç kısımdan oluşur. İlk kısımda \mathbb{R}^{n+1} de dönel hiperyüzeyler ele alınmıştır. İkinci kısımda \mathbb{R}^{n+d} de rotasyonel yüzeyler incelenmiştir. Özellikle \mathbb{R}^4 de genel rotasyonel yüzeyleri, \mathbb{R}^4 de küresel çarpım yüzeyleri ve \mathbb{R}^4 de meridyen yüzeylerinin homotetik soliton ve ξ -yüzeyi olma koşulları ele alınmıştır. Son kısımda ise \mathbb{R}^{n+d} de rotasyonel altmanifoldlar incelenmiştir. Özellikle \mathbb{R}^5 deki rotasyonel altmanifoldların ξ -altmanifoldu olması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde tezin içeriğinde kullanılan temel tanım ve kavramlar ağırlıklı olarak (do Carmo, 1976; Chen, 1973) çalışmalarından yararlanılarak verilmiştir.

Tanım 2.1. M boş kümeden farklı bir küme ve $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi için $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow M$ dönüşümleri bire bir olacak şekilde verilsin.

i) $x_\alpha(U_\alpha)$ ların sonlu birleşimleri M kümesini örter.

ii) $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ şartını sağlayan herhangi α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$ kümeleri \mathbb{R}^n nin açık alt kümeleridir. Bununla birlikte $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ koordinat değişimi fonksiyonları türevlenebilirdir.

iii) (U_α, x_α) ailesi (atlası) i) ve ii) şartlarıyla birlikte maksimaldir.

Yukarıdaki üç şart sağlandığında M kümesine *n-boyutlu türevlenebilir manifold* adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.2. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu türevlenebilir manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü verilsin. Eğer x dönüşümü diferansiyellenebilir, örten ve x^{-1} de diferansiyellenebilir ise x dönüşümüne bir *difeomorfizm* adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.3. \mathbb{R}^3 , n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold olmak üzere

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlı ∇ dönüşümü $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $f, g \in D(M)$ için aşağıdaki şartları sağlar ise ∇ ya M üzerinde bir *afin koneksiyon* denir (do Carmo, 1976);

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ dir.

2) $\nabla_X (fY + Z) = X(f)Y + f\nabla_X Y + \nabla_X Z$ dir.

∇ da M nin bir afin koneksiyonu olsun.

3) $\forall X, Y \in \chi(M^n)$ için $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ise ∇ simetriktir.

4) $\forall X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$

şartı sağlanırsa afin koneksiyonuna M üzerinde bir *Levi-Civita koneksiyonu* adı verilir (do Carmo, 1976). Bu durumda (M, \langle, \rangle) *Riemann manifoldu* yapısına kavuşur.

Tanım 2.4. M ve \tilde{M} türevlenebilir manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ bir difeomorfizm olsun. Her $p \in M$ ve $X, Y \in T_p M$ tanjant vektörleri için

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle dx_p(X), dx_p(Y) \rangle_{x(p)}$$

şartı sağlanırsa x dönüşümüne bir *izometri* adı verilir. Burada $dx_p: T_p M \rightarrow T_{x(p)} \tilde{M}$ türev dönüşümüdür (do Carmo, 1976).

Tanım 2.5. $x: M \rightarrow \tilde{M}$ türevlenebilir dönüşümü verilsin. Bu takdirde dx_p türev dönüşümü her $p \in M$ için birebir ise x e bir *daldırma (immersion)* M ye de \tilde{M} nin *daldırılan altmanifoldu* adı verilir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.6. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ bir izometrik daldırma olsun. \mathbb{R}^{n+d} de Levi-Civita koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $X_i, X_j \in T_p M$ lokal vektör alanları için M altmanifoldunun \mathbb{R}^{n+d} den indirgenmiş Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin 2. temel form dönüşümü

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^1(M); h(X_i, X_j) = \tilde{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.1) eşitliği *Gauss formülü* olarak bilinir (Chen, 1973).

Tanım 2.7. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ bir izometrik daldırma olsun. Böylece M nin N_α ya karşılık gelen *şekil operatörü dönüşümü*

$$A: \chi^1(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); A_{N_\alpha} X_i = -\tilde{\nabla}_{X_i} N_\alpha + D_{X_i} N_\alpha \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. (2.2) eşitliği *Weingarten formülü* olarak bilinir (Chen, 1973).

Herhangi $X_i, X_j \in T_p M^n$ birim teğet vektörleri için M^n nin 2. temel form katsayıları

$$h_{ij}^\alpha = \langle A_{N_\alpha} X_i, X_j \rangle = \langle h(X_i, X_j), N_\alpha \rangle; 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \alpha \leq d \quad (2.3)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 2.8. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması verilsin. Bu takdirde M nin *ortalama eğrilik vektör alanı*

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_i, X_j) \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır.

Bununla birlikte $H = \|\vec{H}\|$ ifadesine M nin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Eğer $H = 0$ ise M ye minimaldir denir (Chen, 1973).

M altmanifoldunun ∇ ve D koneksiyonlarına göre R ve R^\perp eğrilik tensörleri her $X_i, X_j, X_k \in TM$ ve $N_\alpha \in T^\perp M$ için

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{[X_i, X_j]} X_k, (2.5)$$

$$R^\perp(X_i, X_j)N_\alpha = h(X_i, A_{N_\alpha} X_j) - h(X_j, A_{N_\alpha} X_i) (2.6)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece M altmanifoldunun Gauss ve Ricci denklemleri sırasıyla

$$R_{ijkl} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_l \rangle = \langle h(X_i, X_l), h(X_j, X_k) \rangle - \langle h(X_i, X_k), h(X_j, X_l) \rangle (2.7)$$

ve

$$\langle R^\perp(X_i, X_j)N_\alpha, N_\beta \rangle = \langle [A_{N_\alpha}, A_{N_\beta}]X_i, X_j \rangle (2.8)$$

dir. Buradan M altmanifoldunun ∇^\perp koneksiyonunun düz olması için gerek ve yeter koşul A_{N_α} şekil operatörü matrislerinin aynı anda köşegenleştirilebilir olmasıdır (Chen, 1973). Böylece, M^n nin R_{ij} Ricci ve r skaler eğrilikleri sırasıyla

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ikjk}, (2.9)$$

$$r = \sum_{i=1}^n R_{ii} (2.10)$$

dir. Gauss denklemi yardımıyla M nin skaler eğriliği

$$r = n^2 \|\vec{H}\|^2 - S (2.11)$$

ile hesaplanır, burada S ikinci temel formun karesi olup

$$S = \sum_{\alpha=1}^d \sum_{i,j=1}^n (h_{ij}^\alpha)^2 (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde sonuçların elde edilmesinde uygulanan materyal ve yöntemlere yer verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda ortalama eğrilik akısı, ters ortalama eğrilik akısı ve ağırlıklı hacmi koruyan ortalama eğrilik akısı ile ilgili temel özelliklere yer verilmiştir. İkinci kısımda ise solitonlar incelenmiş, özellikle Ricci soliton ile Yamabe soliton olma koşulları ele alınmıştır.

3.1. Ortalama Eğrilik Akısı

Tanım 3.1. n -boyutlu $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu için $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ ve

$$x(p, t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}, x(p, 0) = x(p)$$

verilsin. Bu durumda $M_t = x(M^n, t)$ nin $x(p, t)$ noktasındaki ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}(t) = \vec{H}(p, t)$ olmak üzere

$$\frac{\partial x(p, t)}{\partial t} = \vec{H}(p, t), \quad x(p, 0) = x(p) \quad (3.1)$$

eşitliğini sağlayan M_t ailesine *ortalama eğrilik akısı* adı verilir (Brakke, 1978), (Joyse ve ark. 2010).

(3.1) eşitliği(Ecker ve Huisken, 1989; Montegazza, 2011; Cooper, 2011; Smoczyk, 2012; Sigal, 2014; Schulze, 2017) deki çalışmalarda incelenmiştir.

n -boyutlu $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi için $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırmasının alan fonksiyoneli

$$A(x) = \int_M d\mu \quad (3.2)$$

ile hesaplanır. Burada μ, \mathbb{R}^{n+1} den indirgenen g metriğine göre kanonik ölçümdür.

A fonksiyonelinin 1. varyasyonu

$$\frac{\partial}{\partial t} A(x(p, t)) = \frac{\partial}{\partial t} \int_M d\mu_t = - \int_M H^2 d\mu_t \quad (3.3)$$

olduğundan alandaki değişim artmayandır. Diğer bir deyişle M_t ailesi ortalama eğrilik akısı boyunca yüzey alanında artış olmayacaktır, fakat azalma mümkün olabilecektir.

Örnek 3.2. \mathbb{R}^{n+1} de bir yuvar

$$B_r^{n+1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1}: |y - x| < r\}$$

açık kümesi şeklinde tanımlanır. Ayrıca üzere $M_t = \partial B_{r(t)}^{n+1}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, \mathbb{R}^{n+1} de $r(t)$ yarıçaplı iç içe geçmiş (konsantrik) n-kürelerinin bir ailesi olsun. Bilindiği üzere \mathbb{R}^{n+1} nin izometrilere altında ortalama eğrilik değişmez (invariant) kalacağından (3.1) eşitliği $r(t)$ yarıçap fonksiyonunun bir adi diferansiyel denklemi olarak

$$r'(t) = -\frac{n}{r(t)} \quad (3.4)$$

biçimine dönüşür. Bu takdirde $r(0) = \rho$, $M_0 = \partial B_\rho$ olmak üzere $t \in \left(-\infty, \frac{\rho^2}{2n}\right)$ için (3.4) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü

$$r(t) = \sqrt{\rho^2 - 2nt} \quad (3.5)$$

olupt $\mapsto \frac{\rho^2}{2n}$ için hiperküre bir noktaya büzülür (Ecker, 2004), (bakınız Şekil 4.1).□

Örnek 3.3. \mathbb{R}^{n+1} de

$$M_t = \partial B_{r(t)}^{n+1-k} \times \mathbb{R}^k, t \in I \subset \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n,$$

hiper silindiri verilsin. Bu takdirde (3.1) denklemi $r(t)$ yarıçap fonksiyonunun bir adi diferansiyel denklemi

$$r' = -\frac{n-k}{r} \quad (3.6)$$

biçimine dönüşür. Bu takdirde

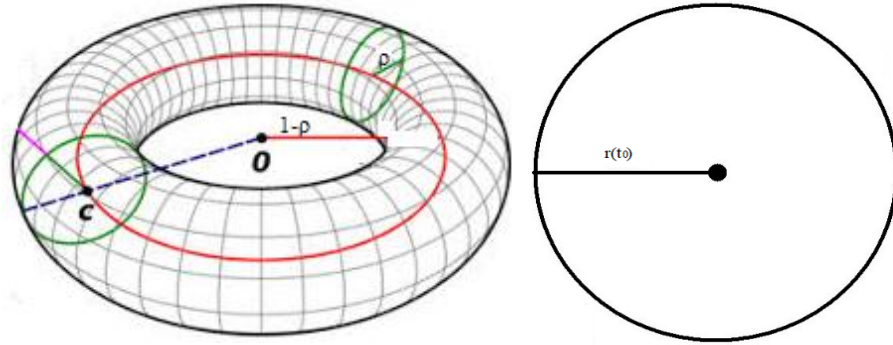
$$r(0) = \rho, \quad t \in \left(-\infty, \frac{\rho^2}{2(n-k)}\right)$$

için (3.6) denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü

$$r(t) = \sqrt{\rho^2 - 2(n-k)t} \quad (3.7)$$

dir (Ecker, 2004). Burada hipersilindir bir doğruya büzüşecektir (bakınız Şekil 4.2).□

Örnek 3.4. $M_0 \subset \mathbb{R}^3$ dairesel tor yüzeyi birim çemberden ρ birim uzaklıktaki noktaların geometrik yeri olarak tanımlansın. Bu takdirde $\rho < \frac{1}{2}$ için M_0 ın ortalama eğriliği H_0 pozitifdir. Farzedelim ki M_t nin oluşturduğu bölge Ω_t olsun. Böylece maksimum prensibine göre t arttıkça M_t nin ortalama eğriliği H_t artacaktır (Ecker, 2004). Burada tor yüzeyi bir çembere büzüşecektir (bakınız Şekil 3.1).□



Şekil 3.1. Bir çembere büzüşen tor yüzeyi

3.1.1. Ters Ortalama Eğrilik Akısı

Tanım 3.5. n -boyutlu $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $F_0: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ türevlenebilir daldırma ile verilsin. Türevlenebilir daldırmaların bir ailesi

$$F(p, t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}, F(p, 0) = F(p) \quad (3.8)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $M_t = F(M^n, t)$ altmanifoldunun $F(p, t)$ noktasındaki ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}(t) = \vec{H}(p, t)$ olmak üzere

$$\left(\frac{\partial F(p, t)}{\partial t}\right)^\perp = -\frac{\vec{H}(p, t)}{\|\vec{H}(p, t)\|^2}, \quad F(p, 0) = x(p) \quad (3.9)$$

eşitliği sağlanırsa bu aileye *ters ortalama eğrilik akısı* adı verilir (Castro ve Lerma, 2014).

M nin hiper yüzey olması durumunda ters ortalama eğrilik akısı ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır, örneğin, bakınız (Gerhardt, 1990; Huisken ve Ilmanen, 1997; Huisken ve Ilmanen, 2008).

$x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ daldırmasının ters ortalama eğrilik akısı altında homotetilere göre akının değişimi

$$F(p, t) = e^{ct} x(p), \quad c \neq 0, \quad t < 0, \quad (3.10)$$

biçiminde olacaktır, burada $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ daldırması

$$-\frac{\vec{H}}{\|\vec{H}\|^2} = cx^\perp, \quad \|\vec{H}\| \neq 0 \quad (3.11)$$

eşitliğini sağlar. Burada (3.11) denkleminin çözümleri sabit $c \neq 0$ hızlı ters ortalama eğrilik akısı için *homotetik solitonlar* oluşturur. Eğer $c < 0$ ise ters ortalama eğrilik akısının büzüşen çözümleri vardır, $c > 0$ durumunda ise genişleyen çözümleri vardır denir (Castro ve Lerma, 2017).

(3.11) denkleminin düzlemsel eğriler için çözümü (Drugan vd., 2018) da verilmiştir. Özellikle, klasik logaritmik spiral ve çemberin involütleri ters ortalama eğrilik akısının genişleyen çözümleri olduğu gösterilmiştir. Kapalı olanlar ise merkezci çemberden ibaret olduğu sonucu (Andrews, 2003) de verilmiştir.

Açıklama 3.6. Bir $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ homotetik soliton için (3.11) şartı

$$\|\vec{H}\|^2 = \langle \vec{H}, \vec{H} \rangle = -\langle c\|\vec{H}\|^2 x^\perp, \vec{H} \rangle = -c\|\vec{H}\|^2 \langle x, \vec{H} \rangle \quad (3.12)$$

biçimine dönüşür. Bununla birlikte $\|\vec{H}\| \neq 0$ olduğundan (3.12) eşitliği yardımıyla

$$-\langle x, \vec{H} \rangle = \frac{1}{c}, \text{ veya } -\langle \Delta_g x, x \rangle = \frac{1}{c}, \text{ veya } \Delta_g \|x\|^2 = 2 \left(n - \frac{1}{c} \right)$$

elde edilir. Burada g , M nin \mathbb{R}^{n+d} den indirgenmiş metriğidir (Dugan vd., 2016).

Önerme 3.7. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi $\vec{H} \neq \vec{0}$ olacak şekilde verilsin. Bu takdirde M hiperyüzeyinin ters ortalama eğrilik akısının bir homotetik soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle x, \vec{H} \rangle = -\frac{1}{c} \quad (3.13)$$

olacak şekilde bir $0 \neq c \in \mathbb{R}$ sabiti olmasıdır.

İspat. Detaylı ispat için bakınız (Dugan vd., 2016). \square

Tanım 3.8. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $\vec{H} \neq \vec{0}$ olacak şekilde verilsin. Bu takdirde M üzerinde

$$-\frac{\vec{H}}{\|\vec{H}\|^2} = \xi^\perp \quad (3.14)$$

şartı sağlayan bir sabit ξ vektör alanı bulunabilir ise M ye ters ortalama eğrilik akısının bir *translatörü* adı verilir. Burada ξ^\perp vektör alanı ξ nin normal bileşenidir. ξ ye M translatörünün hızı denir (Dugan vd., 2016).

Önerme 3.9. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi $\vec{H} \neq \vec{0}$ olacak şekilde verilsin. Bu takdirde M hiperyüzeyi ters ortalama eğrilik akısının bir translatörü olması için gerek ve yeter koşul

dür $\Leftrightarrow \exists$ bir sabit ξ vektör alanı bulunabilir öyleki

$$\langle \vec{H}, \xi \rangle = -1 \quad (3.15)$$

olacak şekilde sabit bir ξ vektör alanı olmasıdır.

İspat. Detaylı ispat için bakınız (Dugan vd.,2016). \square

Teorem 3.10. $C \subset \mathbb{R}^2$ eğrisi $x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regüler parametrizasyonu ile verilen birim hızlı regüler bir eğri olsun. Eğer C eğrisi ters ortalama eğrilik akısının bir translatörü ise bu takdirde C eğrisi $\frac{1}{4}$ yarıçaplı çember ile üretilen bir sikloid eğrisine kongruentdir.

İspat. Detaylı ispat için bakınız (Dugan vd., 2016). \square

Teorem 3.11. (Kompakt soliton olan kürelerin tekliği) $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi ters ortalama eğrilik akısının bir homotetik solitonu olsun. Eğer M hiperyüzeyi kapalı ise bu takdirde M orijin merkezli bir küredir.

İspat. Detaylı ispat için bakınız (Dugan vd., 2016). \square

3.1.2. Ağırlıklı Hacim Koruyan Ortalama Eğrilik Akısı

Tanım 3.12. Türevlenebilir daldırmaların bir ailesi $x(\cdot, t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x(\cdot, 0) = x(\cdot)$ biçiminde tanımlansın.

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -\alpha(t)\vec{N}(t) + \vec{H}(t), \quad x(t) = x(\cdot, t) \quad (3.16)$$

biçiminde tanımlanan ortalama eğrilik akısına *ağırlıklı hacmi koruyan ortalama eğrilik akısı* denir. Burada

$$\alpha(t) = \frac{\int_M H(t) \langle N(t), N \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu}{\int_M \langle N(t), N \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu} \quad (3.17)$$

ve $\vec{H}(t) = \vec{H}(\cdot, t)$ ve $\vec{N}(t)$ sırasıyla $M_t = x(M^n, t)$ nin ortalama eğrilik vektörü ve birim normal vektörü, \vec{N} ise M nin birim normal vektörüdür.

(3.17) eşitliği ile verilen ağırlıklı hacmi koruyan ortalama eğrilik akısı

$$V(t) = \int_M \langle x(t), \vec{N} \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanan *ağırlıklı hacmi korur* (Cheng ve Wei, 2015). Burada $d\mu$ hacim elamanı olup

$$d\mu = \sqrt{\det g_{ij}}, \quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial x_i}, \frac{\partial x}{\partial x_j} \right\rangle \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte ağırlıklı alan fonksiyoneli

$$A(t) = \int_M e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu_t \quad (3.20)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $d\mu_t$ fonksiyonu M nin $x(., t)$ yardımıyla indirgenen metriğe göre alan elamanıdır. Böylece $x(., t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x(., 0) = x(.)$ biçiminde tanımlanan türevlenebilir daldırmaların bir ailesi (varyasyonu) olmak üzere, her t için $V(t)$ sabit oluyor ise $x(., t)$ ailesi $x(.)$ in *ağırlıklı hacmi koruyan bir ailesidir* denir.

Ağırlıklı hacmi koruyan her bir $x(.)$ ailesi ağırlıklı alan fonksiyoneli $A(t)$ nin bir kritik noktası olması için gerek ve yeter şart

$$H + \langle x, \vec{N} \rangle = \lambda \quad (3.21)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $H = \|\vec{H}\|$, M nin ortalama eğriliği ve λ bir reel sabittir.

(3.21) şartı sağlanırsa M ye λ -hiperyüzeyi adı verilir. Eğer $\lambda = 0$ ise M kendisi *büzüşendir* (Cheng and Wei, 2015).

Öklit uzayındaki kompakt λ -hiperyüzey örnekleri için (Cheng and Wei, 2019), (Cheng and Wei, 2015) ve ağırlıklı hacim koruyan ortalama eğrilikli λ -hiperyüzeylerin bir sınıflandırması için bakınız (Zhu ve Chen, 2019). Bununla birlikte, \mathbb{R}^4 deki rotasyonel hiperyüzeylerin λ -hiperyüzeyi olma şartını sağlaması ile ilgili sonuçlar (Arslan vd., 2021) de verilmiştir.

Kendisi-büzüşen hiperyüzeyler ile λ -hiperyüzeylerin bir genellemesi ξ -altmanifoldlardır.

Tanım 3.13. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilsin. M nin \vec{H} ortalama eğrilik vektör alanı için

$$\vec{H} + x^N = \xi \quad (3.22)$$

şartını sağlayan bir ξ paralel vektör alanı bulunabilirse M ye ξ -altmanifoldu adı verilir (Li ve Chang, 2016; Li ve Li, 2020).

Teorem 3.14. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldu $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilsin. Bu takdirde M nin bir ξ -altmanifoldu olması için gerek ve yeter koşul herhangi $Z \in T_p M$, $1 \leq i \leq n$ tanjant vektörü için

$$A_{\vec{H}}Z = A_{\xi}Z + Z - \nabla_Z x^T, \quad (3.23)$$

$$D_Z \vec{H} = h(x^T, Z) \quad (3.24)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ bir ξ -altmanifoldu olsun. Böylece tanım gereği

$$\vec{H} = \xi - x^N$$

şartını sağlayan bir ξ vektör alanı bulunabilir. Buradan Gauss ve Weingarten eşitlikleri yardımıyla herhangi bir $X \in T_p M$, $1 \leq i \leq n$ tanjant vektörü için

$$\begin{aligned} A_{\vec{H}}Z &= -\tilde{\nabla}_Z \vec{H} + D_Z \vec{H} \\ &= -\tilde{\nabla}_Z \xi + \tilde{\nabla}_Z x^\perp + D_Z \vec{H} \\ &= -\tilde{\nabla}_Z \xi + \tilde{\nabla}_Z x - \tilde{\nabla}_Z x^T + D_Z \vec{H} \\ &= -\tilde{\nabla}_Z \xi + \tilde{\nabla}_Z x - \nabla_Z x^T - h(x^T, Z) + D_Z \vec{H} \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_Z x &= Z, \\ \tilde{\nabla}_Z \xi &= -A_{\xi}Z \end{aligned}$$

olduğundan, son eşitlik

$$A_{\vec{H}}X = A_{\xi}Z + Z - \nabla_Z x^T - h(x^T, Z) + D_Z \vec{H}$$

halini alır. Böylece teğet ve normal bileşenlerden istenilen sonuç elde edilir. ■

3.2. Ricci ve Yamabe Solitonlar

3.2.1. Ricci Solitonları

Diferansiyel geometride *Ricci akısı* bir iç (intrinsik) geometrik akıdır. Bu akı, bir (M, g) Riemann manifoldunun Ricci tensörü Ric yardımıyla g Riemann metriğinin

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g) \quad (3.25)$$

deformasyonu ile elde edilir (Qiang Chen, 2013).

Ricci akısı ile ilgili çalışmaların en önemli kısmı Ricci solitonlarıdır.

Tanım 3.15. (M, g) Riemann manifoldu üzerinde türevlenebilir bir vektör alanı ν olmak üzere

$$\frac{1}{2}L_\nu g + Ric = \lambda g \quad (3.26)$$

eşitliği sağlanırsa (M, g) manifoldu bir *Ricci soliton* tanımlar. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ bir skalar, Ric , (M, g) nin Ricci tensörü ve $L_\nu g$, g metriğinin ν vektör alanına göre Lie türevi olup herhangi $X, Y \in TM$ için

$$(L_\nu g)(X, Y) = g(\nabla_X \nu, Y) + g(X, \nabla_Y \nu) \quad (3.27)$$

biçiminde tanımlanır (Chen ve Deshmukh, 2014).

Ricci soliton (M, g, ν, λ) şeklinde ifade edilir. Burada ν vektör alanına *potansiyel vektör alanı* adı verilir. Ricci solitonların metrikleri Ricci akısı altında kendine-benzer kalırlar. Eğer $\lambda > 0$ ise *Ricci solitonu büzüşen*, $\lambda < 0$ ise *genişleyen*, $\lambda = 0$ ise *durağandır* denir. $f = \frac{1}{2} \|\nu\|^2$ fonksiyonuna (M, g, ν, λ) Ricci solitonun *enerji fonksiyonu* adı verilir (Deshmukh ve Alsodais, 2020).

Tanım 3.16. ν potansiyel vektör alanı reel değerlibir $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun gradienti oluyorsa, diğer bir deyişle $\nu = \nabla f$ ise bu solitona *gradyent Ricci soliton* adı verilir ve Ric_f ile gösterilir. Burada f ye *potansiyel fonksiyonu* adı verilir. Bir (M, g, f, λ) gradyent Ricci solitonun denklemi $Ric_f = \lambda g$ olarak ifade edilir, burada

$$Ric_f = Ric + Hess(f); \quad Hess(f) = \nabla \nabla f$$

olup bu eşitliğe *Bakry-Emery eğriliği* adı verilir (Chen, 2015). Eğer $Ric_f = 0$ oluyor ise (M, g, f, λ) *gradyent durağan Ricci soliton* olacaktır (Munteanu ve Wang, 2011).

Önerme 3.17. $(M, g, f, \lambda = 0)$ *gradyent durağan Ricci soliton* olsun. Eğer, bir $D \subset M$ açık kümesi üzerinde $\|\nabla f\|^2 = sbt.$ ise bu takdirde M nin tamamında $f = sbt.$ dir ve g bir Ricci flat metriktir (Chen ve Wang, 2011).

Eğer f potansiyel fonksiyonu sabit ise (M, g, f, λ) ya *aşıkari Ricci solitonu* denir (Chen ve Deshmukh, 2015).

Tanım 3.18. Bir (M, g, ν, λ) Ricci solitonunda ν vektör alanı sifıra eşit, ya da g nin Einstein olması durumunda

$$Ric(g) = \lambda g \tag{3.28}$$

dır. Bu nedenle bu tür manifoldlar birer *aşıkari Ricci solitonudur* (Cao ve Chen, 2013).

Örnek 3.19. i) Einstein manifoldları için (3.28) in aşıkari olmayan bir çözümü

$$g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0, \quad g_0 = g(0)$$

dır.

ii) (S^n, g_0) küresi için $Ric(g_0) = (n - 1)g_0$ dir. Böylece (3.28) in aşıkari olmayan bir çözümü

$$g(t) = (1 - 2(n - 1)t)g_0,$$

dir. Böylece $T = \frac{1}{2(n-1)}$ anında küre yüzeyi bir noktaya büzüşür (Topping, 2006).□

Düşük boyutlu $n \leq 3$ manifoldlarda $n = 2$ için (Hamilton, 1988) ve $n > 2$ için (İvey, 1993) aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Önerme 3.20. Kompakt, büzüşen Ricci soliton içeren düşük boyutlu $n \leq 3$ manifoldlar sadece sabit pozitif kesitsel eğrilikli olanlardır.

Örnek 3.21. $M = \mathbb{R}^2$ de ilk Ricci soliton örneği durağan ($\lambda = 0$) olması durumunda “cigar soliton” olarak bilinir. Bu örnek Hamilton tarafından 1998 yılında verilmiştir. Bu soliton için metrik

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}$$

ve potansiyel fonksiyonu $f = -\ln(1 + x^2 + y^2)$ dir. Cigar solitonun (skalar) eğriliği

$$R = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} > 0$$

dır.□

Açıklama 3.22. İki boyutlu Riemann manifoldlar (yüzeyler) için Ricci eğrilik K Gauss eğriliğine eşit olacağından $Ric(g) = Kg$ dir. Böylece (3.28) Ricci akısı yüzeyin $K < 0$ olduğu bölgeyi genişletmeye, $K > 0$ olduğu bölgeyi ise büzmeye meyillidir. Bu nedenle Ricci akısı 2-küreyi daha yuvarlak hale getirmeye çalışır. Daha genel olarak, Ricci akısı kapalı bir yüzeyin Gauss eğriliğini sabit hale getirmeye zorlar (Topping, 2006).

Aşağıdaki teoremlerin detaylı ispatı için bakınız (Chen ve Deshmukh, 2014)

Teorem 3.23. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bir hiperyüzey olsun. Eğer (M, g, x^T, λ) bir Ricci solitonu ise bu takdirde M aşağıdaki hiperyüzeylerden biridir;

- i) Orijinden geçen hiperdüzlem,
- ii) Orijin merkezli hiperküre,
- iii) \mathbb{R}^{n+1} in orijininden geçen doğruların ürettiği düz bir hiperyüzey,
- iv) $S^1(r) \times \mathbb{R}^{n-1}$, $r > 0$ küresel hipersilindir.
- v) $S^k(k-1) \times \mathbb{R}^{n-k}$, $2 \leq k \leq n-1$ küresel hipersilindir.

Teorem 3.24. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ daldırması ile verilen yönlendirilebilir bir hiperyüzey olsun. Bu takdirde (M, g, x^T, λ) bir Ricci solitondur \Leftrightarrow en azından bir λ sabiti vardır öyleki $A^2 - (\rho nH)A + (\lambda - 1)I = 0$, dir. Burada, H ortalama eğrilik, A şekil operatörü ve $\rho = \langle x, N \rangle$ de destek fonksiyonudur (Al-Sodais vd., 2014).

Aşağıdaki teoremin ispatı için bakınız (Chen ve Deshmukh, 2015).

Teorem 3.25. (M, g) Riemann manifoldu (N, \tilde{g}) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Farz edelim ki N manifoldu bir ν congruent vektör alanı ihtiva

etsin. Bu takdirde (M, g, v^T, λ) bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X, Y \in TM$ için

$$Ric(X, Y) = (\lambda - 1)g(X, Y) - \tilde{g}(h(X, Y), v^\perp) \quad (3.29)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 3.26. (M, g) Riemann manifoldu $M = \mathbb{R}^n, S^n$ veya $(n - 1)$ -boyutlu bir N Riemann manifoldu için $N \times \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde M nin Riemann metriği

$$g = dr^2 + \varphi(r)g_0 \quad (3.30)$$

biçiminde ise bu metriğe *katlı çarpım metriği* ve Riemann manifolduna da *katlı çarpım manifoldu* denir.

Aşağıdaki sonuç H.W. Brinkmann tarafından 1925 de verilmiştir.

Teorem 3.27. (M, g) Riemann manifoldu bir katlı çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter koşul bir f fonksiyonu ve $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $Hess(f) = \rho g$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Aşağıdaki sonucun detaylı ispatı için bakınız (He vd., 2012)

Sonuç 3.28. Herhangi bir yüzeyin gradient Ricci solitonu bir katlı çarpımdır.

Tanım 3.29. (M, g) Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir v vektör alanı ve herhangi bir $Z \in TM$ vektör alanı için

$$\nabla_Z v = \mu Z \quad (3.31)$$

şartı sağlanırsa v ye *konsörküler vektör alanı* adı verilir. Burada ∇ , M nin Levi-Civita koneksiyonu ve $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$ sıfırdan farklı reel değerli fonksiyondur (Fialkov, 1939). Eğer $\mu = 1$ ise v ye *kongruent vektör alanı* adı verilir (Yano, 1943; Yano ve Chen, 1973).

Örnek 3.30. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık ve (\tilde{M}, \tilde{g}) Riemann manifoldu verilsin. Her $s \in I$ yay-parametresi için $0 \neq \varphi(s)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu takdirde $M := I \times_{\varphi(s)} \tilde{M}$ katlı çarpım manifoldu ve M üzerinde bir

$$g = ds^2 + \varphi^2(s)\tilde{g}$$

katlı çarpımın metriği tanımlanmış olur. Böylece M üzerinde bir $\nu = \varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}$ vektör alanı tanımlandığında herhangi bir $Z \in TM$ için $\mu = \varphi'(s)$ olup ν nin konsörküler vektör alanı olduğu görülür (Chen, 2011). \square

Aşağıdaki teoremlerin detaylı ispatları (Chen, 2017) de verilmiştir.

Teorem 3.31. (M, g) n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M manifoldu sıfırdan farklı bir konsörküler ν vektör alanı ihtiva ediyorsa bu takdirde M lokal olarak $I \times_{\varphi(s)} \tilde{M}$ biçiminde bir katlı çarpım manifoldudur. Burada $0 \neq \varphi(s)$ bir fonksiyonu ve \tilde{M} da $(n - 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldudur.

Teorem 3.32. (M, g) n -boyutlu Riemann manifoldu ($n \geq 3$) olsun. Eğer M manifoldu üzerindeki bir (M, g, ν, λ) Ricci solitonu sıfırdan farklı bir konsörküler ν vektör alanı içermesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır;

i) (3.31) deki μ fonksiyonu sıfırdan farklı bir a sabittir,

ii) $\lambda = a$ dır,

iii) M manifoldu lokal olarak $I \times_{as+b} \tilde{M}$ biçiminde bir katlı çarpım manifoldunun açık bir parçasıdır. Burada s yay-parametresi, $b \in \mathbb{R}$ ve \tilde{M} de $(n - 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldudur.

Teorem 3.32 nin bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.33. (M, g) n -boyutlu Riemann manifoldu ($n \geq 3$) olsun. Eğer M manifoldu üzerindeki bir (M, g, ν, λ) Ricci solitonu sıfırdan farklı bir ν kongrüent vektör alanı içermesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır;

i) (3.31) deki μ fonksiyonu $\mu = 1$ dir,

ii) $\lambda = 1$ dır,

iii) M manifoldu lokal olarak $I \times_s \tilde{M}$ biçiminde bir katlı çarpım manifoldunun açık bir parçasıdır. Burada s yay-parametresi, $b \in \mathbb{R}$ ve \tilde{M} de $(n - 1)$ -boyutlu bir Einstein manifoldu olup $Ric_{\tilde{M}} = (n - 2)\tilde{g}$ şartını sağlar.

3.2.2. Yamabe Solitonları

Tanım 3.34. (M, g) Riemann manifoldu üzerinde türevlenebilir bir vektör alanı ν olmak üzere

$$\frac{1}{2}L_\nu g = (R - \lambda)g \quad (3.32)$$

eşitliği sağlanırsa (M, g) manifoldu bir *Yamabe soliton* tanımlar. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ bir skaler, R , (M, g) nin eğrilik tensörü ve $L_\nu g$, g metriğinin ν vektör alanına göre Lie türevi olup (3.27) eşitliği ile tanımlanır (Chen ve Deshmukh, 2017).

Aşağıdaki sonuçların detaylı ispatı için bakınız (Chen ve Deshmukh, 2018).

Önerme 3.35. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi olmak üzere (M, g, x^T, λ) bir Yamabe soliton olması için gerek ve yeter koşul

i) $\lambda = -1$ ve M , \mathbb{R}^{n+1} nin bir hiper düzleminin açık parçası veya

ii) $\lambda = R > 0$ ve M , \mathbb{R}^{n+1} nin orijin merkezli bir hiper küresinin açık parçası olmasıdır.

Teorem 3.36. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ bir altmanifold olmak üzere (M, g, x^T, λ) bir Yamabe soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$\tilde{g}(h(X, Y), x^\perp) = (r - \lambda - 1)g(X, Y) \quad (3.33)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada r , M altmanifoldunun skaler eğriliğidir.

4. BULGULAR

Bu bölüm üç kısımdan oluşmakta olup tezin orijinal sonuçlarını içermektedir. İlk kısımda \mathbb{R}^{n+1} de dönel hiperyüzeyler ele alınmıştır. İkinci kısımda \mathbb{R}^{n+d} de rotasyonel yüzeyleri incelenmiştir. Özellikle \mathbb{R}^4 de genel rotasyonel yüzeyleri, \mathbb{R}^4 de küresel çarpım yüzeyleri ve \mathbb{R}^4 de meridyen yüzeyleri ele alınmıştır. Son kısımda ise \mathbb{R}^{n+d} de rotasyonel altmanifoldlar incelenmiştir. Özellikle \mathbb{R}^5 deki rotasyonel altmanifoldların ξ –altmanifoldu olması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. \mathbb{R}^{n+1} de Rotasyonel Hiperyüzeyler

Tanım 4.1 \mathbb{R}^2 nin alt kümesi olan yarı düzlemi

$$\mathcal{H} = \{(f, g) \in \mathbb{R}^2 : f \in \mathbb{R}, g > 0\}$$

şeklinde tanımlansın. Bir $C \subset \mathbb{R}^2$ eğrisi

$$\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{H}; \gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (4.1)$$

biçiminde tanımlansın. Bununla birlikte $S^{n-1}(1)$ birim küresi

$$\rho = \rho(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\rho_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \rho_2(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \rho_n(t_1, \dots, t_{n-1})) \quad (4.2)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde C eğrisinin $S^{n-1}(1)$ etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel hiperyüzeyi M ,

$$x : (a, b) \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}; \quad (4.3)$$

$$x(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = f(s), g(s)(\rho_1(t_1, \dots, t_{n-1}), g(s)\rho_2(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, g(s)\rho_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$$

parametrizasyonu ile tanımlanır (do Carmo ve Dajczer, 1993).

Böylece M nin ortonormal çatı alanı

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial x}{\partial s},$$

$$\vec{e}_j = \frac{1}{g} \frac{\partial x}{\partial t_j}, 2 \leq j \leq n, \quad (4.4)$$

$$\vec{e}_{n+1} = \frac{1}{\eta} (g', -f' \rho_1, -f' \rho_2, \dots, -f' \rho_n)$$

vektörleri tarafından gerilir. Burada

$$\eta = \sqrt{(f')^2 + (g')^2} \quad (4.5)$$

türevlenebilir fonksiyondur. Böylece (4.3) ün s ve t_j ye göre ikinci mertebeden kısmi türevlerinden

$$x_{ss} = (f''(s), g''(s)\rho), \quad x_{ii} = (0, g(s)\rho_{ii}), \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada

$$x_{ss} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, x_{ii} = \frac{\partial^2 x}{\partial t_i^2}, \rho_{ii} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t_i^2}$$

dir. Böylece M nin ikinci temel form katsayıları

$$h_{11} = \frac{k}{\eta^2}, h_{ii} = \frac{f'}{\eta g}, \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (4.7)$$

olarak bulunur. Burada k fonksiyonu

$$k = f''g' - f'g'' \quad (4.8)$$

eşitliği ile verilmiştir (Arslan vd., 2021).

Bununla birlikte $i \neq j$ için $h_{ij} = 0$ dır. Böylece M nin şekil operatörü matrisi (4.7) yardımıyla

$$A_{\tilde{e}_{n+1}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\eta^2} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{f'}{\eta g} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{f'}{\eta g} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Bu durumda (4.9) da elde edilen şekil operatörü bize (4.3) parametrizasyonu ile verilen dönele hiperyüzeyin en çok iki farklı asli eğriliğe sahip olduğu sonucunu verir (Arslan vd., 2021).

Bununla birlikte M nin pozisyon vektörü x ile \vec{e}_{n+1} nin iç çarpımından

$$\langle x, \vec{e}_{n+1} \rangle = \frac{\delta}{\eta} \quad (4.10)$$

bulunur. Burada δ destek fonksiyonu olup

$$\delta = fg' - f'g \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Buradan (4.9) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dönel hiperyüzeyi (4.3) parametrizasyonu ile verilsin. M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{n} iz(A_{\vec{e}_{n+1}}) = \frac{kg + (n-1)\eta f'}{ng\eta^2} \quad (4.12)$$

dır.

Aşağıdaki teoremlerin detaylı ispatları için bakınız (Chen ve Deshmukh, 2015)

Teorem 4.3. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ farklı iki asli eğrilikli bir hiperyüzey olsun. O halde (M^n, g, ν^T, λ) bir *Ricci soliton* ise bu takdirde M nin $k_i, i = 1, 2$ asli eğrilikleri

$$k_i^2 - (nH + \delta)k_i + \lambda - 1 = 0 \quad (4.13)$$

eşitliğini sağlar. Burada δ destek fonksiyonu ve H da ortalama eğriliktir.

Aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.3) parametrizasyonu ile verilsin. O halde (M^n, g, x^T, λ) bir *Ricci soliton* ise $k_1 = k_2$ yada $(n-2)k_2 + \delta = 0$ dir. Burada δ destek fonksiyonu olup (4.11) de tanımlanmıştır.

İspat. M rotasyonel hiperyüzeyi k_1, k_2 farklı iki asli eğriliğe sahiptir. (M^n, g, ν^T, λ) bir *Ricci soliton* olduğunu kabul edelim. Böylece (Teorem 4.3) den

$$(n-1)k_1k_2 + \delta k_1 = \lambda - 1,$$

$$(n-2)k_2^2 + k_1k_2 + \delta k_2 = \lambda - 1$$

eşitlikleri sağlanır. Burada δ destek fonksiyonu olup (4.11) de tanımlanmıştır. Burada

$$(n-1)k_1k_2 + \delta k_1 = (n-2)k_2^2 + k_1k_2 + \delta k_2$$

olduğu görülür. Bu eşitlik düzenlenirse

$$(k_1 - k_2)((n-2)k_2 + \delta) = 0$$

elde edilir.

Homotetik soliton ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.5. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.3) parametrizasyonu ile verilsin. M nin ters ortalama eğrilik akısının bir homotetik soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$-\frac{gk\delta + (n-1)\eta^2\delta f'}{ng\eta^4} = \frac{1}{c} \quad (4.14)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. (4.12) eşitliğindeki H değeri (3.14) eşitliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Örnek 4.6. Meridyen eğrisi $\gamma(t) = (rcost, rsint)$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, r -yarıçaplı bir çember olsun. Bu durumda dönele hiperyüzeyi bir hiperküre belirtir. Buradan

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{(f')^2 + (g')^2} = r, \\ k &= f''g' - f'g'' = -r^2, \\ \delta &= fg' - f'g = r^2 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Böylece bu değerler (4.14) de yerine yazılırsa $c = 1 > 0$ elde edilir.

Bununla birlikte

$$\lambda \langle x^N, x^N \rangle = \frac{1}{c} = 1$$

olduğundan $\lambda > 0$ dır. Böylece hiperküre daralan kendine benzer olup bir noktaya büzüşür, (bakınız Şekil 4.1). □

Örnek 4.7. Meridyen eğrisi $\gamma(t) = (f(t), a)$ doğrusu olsun. Bu durumda dönelel hiperyüzey bir hipersilindir belirtir. Buradan $\eta = f'(t)$, $\delta = -af'(t)$, $k = 0$ bulunur. Böylece bu değerler (4.14) denkleminde yerine yazılırsa $c = \frac{n}{n-1} > 0$ elde edilir. Böylece

$$c\langle x^N, x^N \rangle = \frac{1}{\lambda}$$

olduğundan $\lambda > 0$ dır. Böylece hipersilindir daralan kendine benzer olup bir doğruya büzüşür, (bakınız Şekil 4.2).

(4.14) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü (Drugan vd., 2006) çalışmasında

$$f(t) = \sigma'(t)\cos t + \sigma(t)\sin t$$

$$g(t) = \sigma'(t)\cos t - \sigma(t)\sin t$$

ve

$$\sigma(t) = \begin{cases} a\cos(\sqrt{1-ct}) + b\sin(\sqrt{1-ct}); & c < 1 \\ a\cosh(\sqrt{c-1}t) + b\sinh(\sqrt{c-1}t); & c > 1 \\ a + bt & c = 1 \end{cases}$$

olarak bulunmuştur. Burada $a, b \in \mathbb{R}$ reel sabitler ve $t \in \mathbb{R}$ parametredir. Yine aynı çalışmada aşağıdaki sınıflandırma verilmiştir;

- i) $c = 1$ ve $b = 0$ ise eğri $|a|$ -yarıçaplı çemberdir.
- ii) $c = 1$ ve $b \neq 0$ ise eğri $|b|$ -yarıçaplı çemberin involütüdür
- iii) $c > 1$ ve $a = b = 1$ ise eğri klasik logaritmik spiraldir.
- iv) $c < 1$ ve $a = 1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$, $\lambda \neq \mu$ ise eğri episikloid,
- v) $\lambda < \mu$ ve $0 < c < 1$ ise eğri hiposikloid

belirtir. \square

Teorem 4.8. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.3) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$kg + n\eta^2\delta + (n-1)\eta^2f' - n\lambda g\eta^3 = 0 \quad (4.15)$$

eşitliğin sağlanmasıdır.

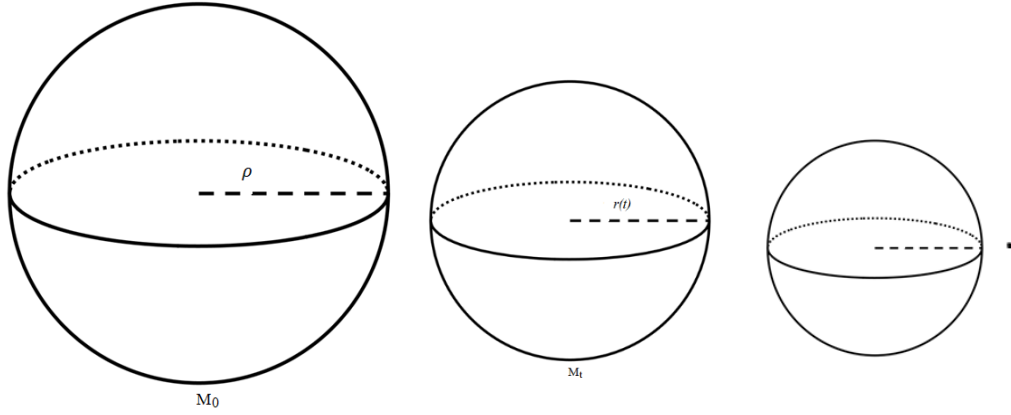
Sonuç. 4.9. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.3) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$kg + n\eta^2\delta + (n-1)\eta^2f' = 0 \quad (4.16)$$

olmasıdır.

Örnek 4.10. $f(s) = \cos s$ ve $g(s) = \sin s$ olsun. Bu takdirde elde edilen hiperyüzey
 $x(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = (\cos s, \sin s \rho_1, \sin s \rho_2, \dots, \sin s \rho_n)$ (4.17)

parametrizasyonu ile verilen $S^n(1)$ hiperküre belirtir. Bununla birlikte $\lambda = 0$ elde edildiğinden hiperküre kendisi-büzüşendir (Şekil 4.1).□



Şekil 4.1. Büzüşen hiperküreler

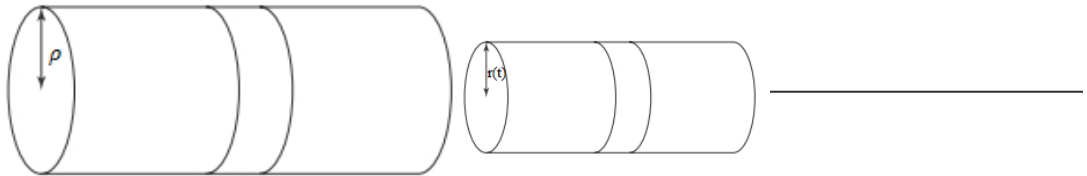
Örnek 4.11 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dönel hiperyüzeyi $f(s) = as + b$ ve $g(s) = r_0$ ve $r_0 \neq 0$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde(4.16) denkleminden

$$\lambda = \frac{n - 1 + nr_0^2}{nr_0}$$

bulunur. Böylece elde edilen λ -hiperyüzeyi

$$x(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = (as + b, r_0 \rho_1, r_0 \rho_2, \dots, r_0 \rho_n) \quad (4.18)$$

parametrizasyona sahip olacaktır. Bu hiperyüzey $S^{n-1}(r_0) \times \mathbb{R}$ dairesel hipersilindiri dir. Bununla birlikte bu hiperyüzeyin kendisi büzüşen (yani, $\lambda = 0$) olması için gerek ve yeter koşul $r_0^2 = \frac{1-n}{n}$ olmasıdır (Şekil 4.2). □



Şekil 4.2.Büzüşen hipersilindirler

4.2. \mathbb{R}^{n+d} de Rotasyonel Yüzeyler

$(n + d)$ -boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^{n+d} nin kartezyen koordinatları x_1, x_2, \dots, x_{n+d} ve ortonormal baz vektörleri

$$\Phi = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+d}\} \quad (4.19)$$

olmak üzere $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ yüzeyi

$$x(u, v) = \phi(u) + f_{n+1}(u)\rho(v) \quad (4.20)$$

yamasıyla tanımlanır. Burada

$$\gamma(u) = (\phi(u), f_{n+1}(u)) \quad (4.21)$$

M yüzeyinin profil eğrisi(yarıçap vektörü) olup birim hızlı parametrelendirmeye sahiptir.

Ayrıca

$$\rho(v) = (0, \dots, 0; g_1(v), \dots, g_d(v)) \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanan $\rho = \rho(v)$ vektör fonksiyonu

$$\|\rho(v)\| = 1, \|\rho'(v)\| = 1 \quad (4.23)$$

olmak üzere $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ birim küresi üzerinde bir eğri belirtir. Böylece γ profil eğrisinin ρ küresel eğrisi etrafında döndürülmesiyle oluşan M yüzeyine \mathbb{R}^{n+d} de *rotasyonel yüzey* adı verilir (Kuiper, 1970; Arslan vd., 2017).

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ rotasyonel yüzeyinin tanjant uzayı,

$$x_u = \phi'(u) + f'_{n+1}(u)\rho(v), \quad (4.24)$$

$$x_v = f_{n+1}(u)\rho'(v)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece, \mathbb{R}^{n+d} deki standart iç çarpım yardımıyla M nin 1. temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle x_u, x_u \rangle = 1, \\ g_{12} &= \langle x_u, x_v \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle x_v, x_v \rangle = f_{n+1}^2(u) \end{aligned} \quad (4.25)$$

olarak bulunur. Bununla birlikte $x(u, v)$ nin 2.mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned}x_{uu} &= \phi''(u) + f_{n+1}''(u)\rho(v), \\x_{uv} &= f_{n+1}'(u)\rho'(v), \\x_{vv} &= f_{n+1}(u)\rho''(v)\end{aligned}\tag{4.26}$$

şeklinde elde edilirken, M nin 2. temel form dönüşümü,

$$\begin{aligned}h(x_u, x_v) &= x_{uv} - \frac{1}{g_{11}} \langle x_{uu}, x_u \rangle x_u - \frac{1}{g_{22}} \langle x_{uv}, x_u \rangle x_v, \\h(x_u, x_v) &= x_{uv} - \frac{1}{g_{11}} \langle x_{uv}, x_u \rangle x_u - \frac{1}{g_{22}} \langle x_{uv}, x_v \rangle x_v, \\h(x_v, x_v) &= x_{vv} + \frac{1}{g_{11}} \langle x_{uv}, x_v \rangle x_u - \frac{1}{g_{22}} \langle x_{vv}, x_v \rangle x_v\end{aligned}\tag{4.27}$$

dir. Böylece (4.25)-(4.27) yardımıyla

$$\begin{aligned}h(x_u, x_u) &= x_{uu}, \\h(x_u, x_v) &= 0, \\h(x_v, x_v) &= x_{vv} + f_{n+1}'f_{n+1}'x_u\end{aligned}\tag{4.28}$$

elde edilir (Arslan ve ark. 2017).

M rotasyonel yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğrilik vektörü \vec{H}

$$K = \frac{1}{g} \{ \langle h(x_u, x_u), h(x_v, x_v) \rangle - \langle h(x_u, x_v), h(x_u, x_v) \rangle \},\tag{4.29}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2g} \{ g_{11}h(x_v, x_v) + g_{22}h(x_u, x_u) - 2g_{12}h(x_u, x_v) \}\tag{4.30}$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Burada

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2\tag{4.31}$$

M nin Riemann metriğidir.

Buradan (4.25) ve (4.28) eşitlikleri (4.29) ve (4.30) de yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği K ve ortalama eğrilik vektörü \vec{H} sırasıyla

$$K = -\frac{f_{n+1}''}{f_{n+1}}, \quad (4.32)$$

$$2\vec{H} = \frac{1}{f_{n+1}^2} \{x_{vv} + f_{n+1}^2 x_{uu} + f_{n+1} f_{n+1}' x_u\} \quad (4.33)$$

olarak bulunur. (4.24), (4.26) denklemleri (4.33) de yerine yazılarak

$$2f_{n+1}\vec{H} = \rho''(v) + ((f_{n+1}')^2 - f_{n+1}^2 K)\rho(v) + f_{n+1}\phi''(u) + f_{n+1}'\phi'(u) \quad (4.34)$$

eşitliği bulunur.

Bu ifadeler yardımıyla (Arslan vd., 2017) da aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.12. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ rotasyonel yüzeyi için

$$f_{n+1}''(u) + Kf_{n+1}(u) = 0 \quad (4.35)$$

eşitliğini sağlar.

Sonuç 4.13. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ rotasyonel yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter koşul

$$f_{n+1}(u) = au + b \quad (4.36)$$

olmasıdır.

Teorem 4.14. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ rotasyonel yüzeyi (4.20) parametrizasyonu ile verilsin. κ_γ ve κ_ρ sırasıyla γ ve ρ eğrilerinin eğrilikleri olmak üzere M nin bir p noktasındaki ortalama eğriliği

$$2H = \frac{1}{f_{n+1}} \{ \kappa_\rho^2 + f_{n+1}^2 (\kappa_\gamma^2 + 2K) - (f_{n+1}')^2 \}^{1/2} \quad (4.37)$$

dir.

Teorem 4.15. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ de rotasyonel yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa_\rho = a, \quad (4.38)$$

$$\kappa_\gamma^2 = \frac{1}{f_{n+1}^2} \{ (f_{n+1}')^2 + 2f_{n+1}f_{n+1}''(u) - a^2 \} \quad (4.39)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada a sabit bir fonksiyondur.

\mathbb{R}^4 deki rotasyonel yüzeyler ile ilgili aşağıdaki özel durumlar ele alınmıştır:

I. Durum. \mathbb{R}^4 de genel rotasyonel yüzeyleri

4-boyutlu Öklit uzayı \mathbb{R}^4 de genel rotasyonel yüzeyi

$$M_1: x(u, v) = (f(u)\cos cv, f(u)\sin cv, g(u)\cos dv, g(u)\sin dv) \quad (4.40)$$

parametizasyonu ile verilir (Ganchev ve Milousheva, 2008; Arslan vd., 2012; Arslan vd., 2017). Burada, $\gamma(u) = (f(u), g(u))$ rotasyonun meridyen eğrisi olarak bilinir.

M_1 in ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial u}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\phi} \frac{\partial}{\partial v}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\eta} (g'(u) \cos cv, g'(u) \sin cv, -f'(u) \cos dv, -f'(u) \sin dv),$$

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{\phi} (-dg(u)\sin cv, dg(u) \cos cv, cf(u) \sin dv, -cf(u) \cos dv)$$

dir. Burada,

$$\eta(u) = \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}, \quad (4.42)$$

$$\phi(u) = \sqrt{c^2 f^2(u) + d^2 g^2(u)} \quad (4.43)$$

türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \frac{\kappa}{\eta^3} \vec{e}_3 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= \frac{\sigma}{\eta \phi^2} \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 = \frac{\psi}{\eta \phi^2} \vec{e}_2 + \frac{\sigma}{\eta \phi^2} \vec{e}_4$$

$$\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 = -\frac{\psi}{\eta \phi^2} \vec{e}_1 + \frac{\varphi}{\eta \phi^2} \vec{e}_3$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= -\frac{\kappa}{\eta^3} \vec{e}_1 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_4 &= -\frac{\sigma}{\eta\phi^2} \vec{e}_2 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= -\frac{\varphi}{\eta\phi^2} \vec{e}_2 + \frac{\mu}{\eta\phi^2} \vec{e}_4 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_4 &= -\frac{\sigma}{\eta\phi^2} \vec{e}_1 + \frac{\mu}{\eta\phi^2} \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\kappa &= f'' g' - f' g'', \\
\psi &= c^2 f f' + d^2 g g', \\
\varphi &= -c^2 f' g + d^2 f g', \\
\sigma &= cd(f' g - f g'), \\
\mu &= cd(ff' + gg')
\end{aligned} \tag{4.46}$$

M_1 üzerinde türevlenebilir fonksiyonlardır.

$M_1 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = \frac{1}{\eta^2 \phi^2} \left(\kappa \varphi - \frac{\sigma^2}{\phi^2} \right), \tag{4.47}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2\eta} \left\{ \frac{\kappa}{\eta^2} + \frac{\varphi}{\phi^2} \right\} \vec{e}_3 \tag{4.48}$$

dir. Burada ϕ, κ, η ve φ reel değerli türevlenebilir fonksiyonları (4.42), (4.43) ve (4.46) de tanımlanmıştır (Arslan vd., 2017). Böylece (4.48) eşitliği yardımıyla $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \|\vec{H}\| = \frac{\phi^2 \kappa + \eta^2 \varphi}{2\eta^3 \phi^2} \tag{4.49}$$

olarak bulunur.

M_1 genel rotasyon yüzeyinin uzaklık fonksiyonunun karesi

$$\varrho(u) = \frac{1}{2} \|x\|^2 \tag{4.50}$$

yardımıyla (1.1) ayrışımından teğet bileşeni

$$\begin{aligned}
x^T &= \sum_{i=1}^2 \langle x^T, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^2 \langle x, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i \\
&= \frac{\varrho'(u)}{\eta(u)} \vec{e}_1
\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\varrho'(u) = f(u)f'(u) + g(u)g'(u) \tag{4.52}$$

dır. Böylece M_1 genel rotasyon yüzeyinin konum vektörünün normal bileşeni

$$x^N = x - \frac{\varrho'(u)}{\psi(u)} \tag{4.53}$$

olduğu görülür. Uzaklık fonksiyonunun gradyenti hesaplanırsa

$$\text{grad}(\|\varrho\|) = \sum_{i=1}^2 \langle x, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i = x^T \tag{4.54}$$

bulunur. Buradan x^T vektör alanı bir $\|\varrho\|$ fonksiyonunun gradiyentine eşit olduğundan *konservatif* olduğu görülür.

(Chen, 2015) çalışmasından yararlanılarak aşağıdaki sonuçları vermek mümkün olacaktır.

Teorem 4.16. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$, (4.40) parametrizasyonu ile verilen bir genel rotasyonel yüzey olsun. Bu takdirde $x = x^N$ olması için gerek ve yeter koşul M_1 yüzeyinin \mathbb{R}^4 de bir küresel yüzey belirtmesidir.

Teorem 4.17. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$, (4.40) parametrizasyonu ile verilen bir genel rotasyonel yüzey olsun. Bu takdirde $x = x^T$ olması için gerek ve yeter koşul M_1 yüzeyinin \mathbb{R}^4 de yatan bir konisel yüzey belirtmesidir.

Tanım 4.18. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilen M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü \vec{H} ve konum vektörünün normal bileşeni x^N olmak üzere

$$\vec{H} + x^N = 0 \quad (4.55)$$

eşitliği sağlanırsa M altmanifoldu (3.1) denkleminin *kendine-büzüşen* bir çözümü olarak ifade edilir. Diğer bir deyişle M ye *kendine-büzüşen* altmanifold adı verilir.

Örneğin, \mathbb{R}^2 Öklid uzayı, $S^2(1)$ küresi, $S^2(1) \times \mathbb{R}$ silindiri ve $S^2(1) \times S^2(1)$ Clifford tor yüzeyi \mathbb{R}^4 deki kanonik *kendine-büzüşen* yüzeylerdir. Bununla birlikte \mathbb{R}^4 deki kompakt *kendine-büzüşen* yüzeyler $S^3(3) \subset \mathbb{R}^4$ de yatan kompakt minimal yüzeylerdir (Cheng vd., 2018).

Bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.19. \mathbb{R}^2 de tanımlanan $\Gamma_1(u) = (x_1(u), x_2(u))$, $0 \leq u < L_1$ ve $\Gamma_2(v) = (y_1(v), y_2(v))$, $0 \leq v < L_2$ parametrik eğrileri *kendine-büzüşen* olsun. Bu takdirde

$$\Gamma_1(u) \times \Gamma_2(v) = (x_1(u), x_2(v), y_1(u), y_2(v)) \quad (4.56)$$

Riemann çarpımı \mathbb{R}^2 de düz Lagrange *kendine-büzüşen* bir yüzeydir. \square

Örnek 4.20. \mathbb{R}^2 de tanımlı $\Gamma(u) = (x_1(u), x_2(u))$, $0 \leq u < L$ eğrisi *kendine-büzüşen* kapalı bir eğri olsun. Bu takdirde Γ eğrisinin eğriliği

$$\Gamma_\kappa = c \frac{e^{\frac{r^2}{2}}}{r^2}, r = \|\Gamma\|$$

dir. Burada

$$c^2 = r^4(1 - (r')^2)e^{r^2}$$

pozitif sabittir. Bununla birlikte, Anciaux 2013 yılında yapmış olduğu çalışmada

$$x(u, v) = (x_1(u)\cos v, x_1(u)\sin v, x_2(u)\cos v, x_2(u)\sin v)$$

parametrizasyonu ile verilen rotasyon yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü ile ikinci temel formun normlarının karesinin sırasıyla

$$\|\vec{H}\|^2 = c \frac{e^{\frac{r^2}{2}}}{r^2},$$

$$\|h\|^2 = c \frac{e^{\frac{r^2}{2}}}{r^2} (r^4 + 2r^2 + 4),$$

olduğunu gösterdi. Bununla birlikte Anciaux tor olarak bilinen bu yüzey \mathbb{R}^4 kompakt Lagrangian kendine-büzüşen bir yüzeydir. \square

Örnek 4.21. \mathbb{R}^4 de

$$x(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{m}{n}}u\right) \cos v, \cos\left(\sqrt{\frac{m}{n}}u\right) \sin v, \sin\left(\sqrt{\frac{m}{n}}u\right) \cos v, \sin\left(\sqrt{\frac{m}{n}}u\right) \sin v \right)$$

$m, n \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = 1$, parametrizasyonu ile verilen rotasyon yüzeyi Li-Wang tor yüzeyi olarak bilinir. Bu yüzey kendine büzüşendir (Li ve Wang, 2017). \square

Teorem 4.22. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.40) parametrizasyonu ile verilen bir genel rotasyonel yüzey olsun. Bu takdirde M_1 in bir homotetik soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$c\delta(\phi^2 k + \eta^2 \varphi) + 2\eta^4 \phi^2 = 0 \quad (4.57)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada ϕ, k, η ve φ reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.45), (4.46) ve (4.49) de tanımlanmıştır. Bununla birlikte $0 \neq c \in \mathbb{R}$ reel sabittir.

İspat. M_1 yüzeyi bir homotetik soliton olsun. Bu takdirde $\langle x, \vec{H} \rangle = -\frac{1}{c}$ eşitliği sağlanır.

Böylece (4.40), (4.41) ve (4.48) eşitlikleri yardımıyla $\langle x, \vec{H} \rangle = H\langle x, \vec{e}_3 \rangle$ elde edilir.

Ayrıca

$$\langle x, \vec{e}_3 \rangle = \frac{fg' - gf'}{\eta} = \frac{\delta}{\eta} \quad (4.58)$$

olduğundan istenilen sonuç elde edilir. \blacksquare

Teorem 4.23. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.40) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu takdirde M_1 in kendisine benzer olması için gerek ve yeter koşul

$$\phi^2 k + \eta^2 \varphi + 2\lambda\delta\eta^2 \phi^2 = 0 \quad (4.59)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada ϕ, k, η ve φ reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.42), (4.43) ve (4.46) da tanımlanmıştır.

İspat. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi kendisine benzer olsun. Bu takdirde (Tanım 3.5) gereği $\vec{H} + \lambda x^N = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Böylece bu eşitliğin her iki tarafının \vec{e}_3 ile iç çarpımı alınıp (4.48) ve (4.53) eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{\phi^2 k + \eta^2 \varphi}{2\eta^3 \phi^2} + \lambda \frac{\delta}{\eta} = 0$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse (4.59) elde edilir. ■

Sonuç 4.24. (4.40) da $c = d = 1$ alınırsa M_1 rotasyonel yüzeyi Örnek 4.21 de tanımlanan Anciaux tor yüzeyi belirtir. Bu yüzey kendine-büzüşendir.

Tanım 4.25. \mathbb{R}^4 teki Vranceanu yüzeyi aşağıdaki parametrizasyon ile tanımlanır;

$$f(u) = r(u)\cos u, g(u) = r(u)\sin u, a = b = 1. \quad (4.60)$$

Burada $r(u)$ reel değerli sıfırdan farklı bir fonksiyondur (Vranceanu, 1977; Arslan vd.,2012).

$r(u)$ fonksiyonu reel sabit ise Vranceanu yüzeyi Clifford torusa dönüşür, diğer bir deyişle aynı yarıçaplı iki tane düzlem çemberi elde edilir (Yoon, 2003).Vranceanu yüzeyi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.26. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ Vranceanu yüzeyi olsun. Bu taktirde M_1 nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = \frac{(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^2}, \quad (4.61)$$

$$\vec{H} = \frac{rr'' - 3(r')^2 - 2r^2}{2(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_3 \quad (4.62)$$

dir.

(4.57) ve (4.60) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.27. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ bir Vranceanu yüzey olsun. Bu taktirde M_1 in bir homotetik soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$cr^2(rr'' - 3(r')^2 - 2r^2) + 2(r^2 + (r')^2)^2 = 0 \quad (4.63)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.28. Vranceanu yüzeyinde $r = sbt$. alınrsa Clifford tor yüzeyi elde edilir. Bu yüzey düzdür. Bununla birlikte (4.63) eşitliği sağlandığından Clifford tor yüzeyi bir homotetik solitondur.

Teorem 4.22 nin bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.29. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ bir Vranceanu yüzey olsun. Bu taktirde M_1 in kendine benzer olması için gerek ve yeter koşul

$$rr'' - 3(r')^2 - 2r^2 + 2\lambda r^2(r^2 + (r')^2)^2 = 0 \quad (4.64)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.30. Vranceanu yüzey Clifford tor yüzeyi olarak alınrsa $\lambda = 1$ durumunda (4.64) eşitliği sağlanır. Bu nedenle Clifford tor yüzeyi daralan kendine benzer bir yüzeydir.

Aşağıdaki sonucun detaylı bir ispatı (Arslan vd., 2017) de verilmiştir.

Teorem 4.31. M yüzeyi \mathbb{R}^4 de kompakt, kendine-büzüşen bir yüzey olsun. O halde $\|\vec{H}\|$ sabit, $\|h\| \leq 0$, veya $\|h\| \geq 0$ ise bu takdirde M bir Clifford tor yüzeyi belirtir.

Teorem. 4.31 in tersinin de geçerli olduğu Örnek 4.30 dan anlaşılmaktadır.

Aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Y. Teorem 4.32. $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ yüzeyi $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilsin.

Bu takdirde M nin bir ξ -yüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$D_{\vec{e}_i} \vec{H} = \sum_{j=1}^2 \langle x, \vec{e}_j \rangle h(\vec{e}_i, \vec{e}_j), \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (4.65)$$

ve

$$A_{\vec{H}} \vec{e}_i = A_{\xi} \vec{e}_i + \vec{e}_i - \nabla_{\vec{e}_i} x^T \quad (4.66)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat. ξ -yüzeyi tanımından

$$\vec{H} = \xi - x^N$$

dir. Herhangi $\vec{e}_i \in \chi(M)$ vektör alanı için Gauss ve Weingarten denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} A_{\vec{H}}\vec{e}_i &= -\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}\vec{H} + D_{\vec{e}_i}\vec{H} \\ &= -\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}(\xi - x^N) + D_{\vec{e}_i}\vec{H} \\ &= -\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}(\xi - x + x^T) + D_{\vec{e}_i}\vec{H} \\ &= -\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}\xi + \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}x - \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}x^T + D_{\vec{e}_i}\vec{H} \\ &= A_\xi\vec{e}_i + \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}x - \nabla_{\vec{e}_i}x^T - h(x^T, \vec{e}_i) + D_{\vec{e}_i}\vec{H} \end{aligned} \quad (4.67)$$

dir. Buradan $\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}x = \vec{e}_i$, $\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i}\xi = -A_\xi\vec{e}_i$ ve

$$x^T = \sum_{j=1}^2 \langle x, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$$

yardımıyla(4.67) eşitliğindeki teğet ve normal bileşenler taraf tarafa toplanırsa (4.65) ve (4.66) elde edilir. ■

Y. Teorem 4.33. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.40) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. O halde M_1 bir ξ -yüzeyi ise bu takdirde

$$\frac{\partial H}{\partial u} \sigma \eta^2 - H \mu k = 0 \quad (4.68)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.(4.48)de verilen \vec{H} ortalama vektör alanının \vec{e}_1 ve \vec{e}_2 yönünde türevleri alınırsa

$$D_{\vec{e}_1}\vec{H} = \frac{1}{\eta} (H)_u \vec{e}_3, \quad (4.69)$$

$$D_{\vec{e}_2}\vec{H} = \frac{H\mu}{\eta\phi^2} \vec{e}_4 \quad (4.70)$$

elde edilir. Bununla birlikte M_1 bir ξ -yüzeyi olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Y. Teorem 4.33 den

$$D_{\vec{e}_i} \vec{H} = \langle x, \vec{e}_i \rangle h(\vec{e}_i, \vec{e}_1) + \langle x, \vec{e}_i \rangle h(\vec{e}_i, \vec{e}_2), \quad 1 \leq i \leq 2 \quad (4.71)$$

bulunur. Ayrıca, (4.44) deki eşitliklerin normal bileşenleri

$$\begin{aligned} h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) &= \frac{k}{\eta^3} \vec{e}_3, \\ h(\vec{e}_1, \vec{e}_2) &= \frac{\sigma}{\eta\phi^2} \vec{e}_4, \\ h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) &= \frac{\varphi}{\eta\phi^2} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.72)$$

dir. Bununla birlikte ve $\langle x, \vec{e}_2 \rangle = 0$ eşitliği kullanılarak

$$D_{\vec{e}_1} \vec{H} = \langle x, \vec{e}_1 \rangle h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \langle x, \vec{e}_1 \rangle \frac{k}{\eta^3} \vec{e}_3, \quad (4.73)$$

$$D_{\vec{e}_2} \vec{H} = \langle x, \vec{e}_1 \rangle h(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \langle x, \vec{e}_1 \rangle \frac{\sigma}{\eta\phi^2} \vec{e}_4 \quad (4.74)$$

elde edilir. Böylece (4.69), (4.70) ile (4.73) ve (4.74) eşitlikleri karşılıklı olarak kıyaslanırsa

$$\langle x, \vec{e}_1 \rangle \frac{k}{\eta^3} = \frac{1}{\eta} (H)_u,$$

$$\langle x, \vec{e}_1 \rangle \frac{\sigma}{\eta\phi^2} = \frac{H\mu}{\eta\phi^2}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitliklerden birinden $\langle x, \vec{e}_1 \rangle$ çekilip diğerinde yerine yazılırsa (4.68) elde edilir. ■

(4.49), (4.52) ve Y. Teorem 4.32 den yararlanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.34. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzey sabit ortalama eğrilikli bir ξ -yüzeyi ise bu takdirde M_1 aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır;

- (i) \mathbb{R}^4 de bir minimal yüzey,
- (ii) \mathbb{R}^4 de bir küresel yüzey veya
- (iii) \mathbb{R}^4 de profil eğrisi düz doğru olan bir yüzey.

İspat. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi (4.40) parametrizasyonu ile verilsin. Eğer M_1 yüzeyi bir ξ -yüzeyi ise bu takdirde (4.65) eşitliği sağlanır. Ayrıca M_1 in ortalama eğriliği sabit olduğundan $H\mu k = 0$ dır. Böylece $H = 0$, $\mu = 0$ ya da $k = 0$ durumları söz konusudur. İlk durumda yüzey minimaldir. İkinci durumda

$$\mu = cd(ff' + gg') = 0$$

dır. Bununla birlikte

$$\rho'(u) = f(u)f'(u) + g(u)g'(u) = 0$$

olduğundan (4.53) eşitliği yardımıyla M_1 genel rotasyon yüzeyinin konum vektörünün normal bileşeni $x^N = x$ olmalıdır. Bu durumda Teorem 4.16 dan M_1 yüzeyi \mathbb{R}^4 de yatan küresel bir yüzeydir. Üçüncü durumda $k = 0$ olduğundan meridyen eğrisi γ bir doğru belirtir. ■

Vranceanu yüzeyi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.35. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi (4.60) parametrizasyonu ile verilen bir Vranceanu yüzeyi olsun. Eğer M_1 bir ξ -yüzeyi ise bu takdirde

$$r(u) = e^{\int \varrho(z) dz + c_2} \quad (4.75)$$

dir. Burada

$$u = \int \frac{e^{\int \varrho(z) dz + c_2}}{\sqrt{z - e^{2 \int \varrho(z) dz + 2c_2}}} dz + c_1 \quad (4.76)$$

türevlenebilir bir fonksiyon olup

$$z = r(u)^2 + r'(u)^2,$$

$$\varrho(z) = \frac{1}{2r(u)(r(u)^2 + r''(u)^2)}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial z} \varrho(z) = 12\varrho(z)^3 + \frac{(3z - 5)\varrho(z)^2}{z} - \frac{(3z - 1)\varrho(z)}{2z^2}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. M_1 yüzeyi (4.60) parametrizasyonu ile verilen bir Vranceanu yüzeyi olsun. O halde M_1 bir ξ -yüzeyi ise Y. Teorem 4.33 den

$$\frac{\partial H}{\partial u} \sigma \eta^2 - H \mu k = 0$$

eşitliği sağlanır. Bununla birlikte (4.42) (4.46) ve (4.60) eşitliklerinden

$$H = \frac{rr'' - 3(r')^2 - 2r^2}{2(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$k = rr'' - 2(f')^2 - r^2,$$

$$\eta^2 = r^2 + (r')^2,$$

$$\mu = rr',$$

$$\sigma = -r^2$$

elde edilir. Bu değerler yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$r(r^2 + (r')^2) \left(\frac{rr'' - 3(r')^2 - 2r^2}{2(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_u + r' (rr'' - 2(f')^2 - r^2) \left(\frac{rr'' - 3(r')^2 - 2r^2}{2(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Buradan bu denklemin

$$>H1(u):=r(u)*diff(r(u),u,u)-3*diff(r(u),u)^2-2*r(u)^2:$$

$$>z(u):=diff(r(u),u)^2+r(u)^2:$$

$$>H(u):=H1(u)/(2*z(u)^(3/2)):$$

$$>k(u):=r(u)*diff(r(u),u,u)-2*diff(r(u),u)^2-r(u)^2:$$

$$>ode1:=r(u)*z(u)^2*diff(H(u),u)+diff(r(u),u)*k(u)*H(u)=0:$$

$$>dsolve(ode1);$$

Maple komutu kullanılarak elde edilen aşıkâr olmayan bir çözümden istenilen sonuç elde edilir. ■

II. Durum: \mathbb{R}^4 de küresel çarpım yüzeyleri

Tanım 4.36. Meridyen eğrisi

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$$

birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu taktirde γ nın

$$\rho(v) = (\cos v, \sin v)$$

birim çemberi etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$M_2 : X(u, v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u) \cos v, f_3(u) \sin v) \quad (4.77)$$

yamasına sahip olup bu yüzeye \mathbb{R}^4 te *küresel çarpım yüzeyi* adı verilir (Bulca vd., 2012, Arslan vd., 2017).

M_2 yüzeyinin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial v}, \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{\kappa_\gamma} (f_1''(u), f_2''(u), f_3''(u) \cos v, f_3''(u) \sin v), \\ \vec{e}_4 &= \frac{1}{\kappa_\gamma} (p_{23}, p_{13}, p_{12} \cos v, p_{12} \sin v) \end{aligned} \quad (4.78)$$

vektör alanları tarafından gerilir. Burada

$$\kappa_\gamma = \sqrt{(f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2} \quad (4.79)$$

γ eğrisinin eğriliği ve

$$p_{ij}(u) = f_i'(u) f_j''(u) - f_j'(u) f_i''(u) \quad (4.80)$$

türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \kappa_\gamma \vec{e}_3 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= 0 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 &= \frac{f_3'}{f_3} \vec{e}_2 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{f_3'}{f_3} \vec{e}_1 - \frac{f_3''}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_3 - \frac{k}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_4
\end{aligned} \tag{4.81}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= -\kappa_\gamma \vec{e}_1 + \tau \vec{e}_4 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= \frac{f_3''}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_3 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_4 &= -\tau \vec{e}_3 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_4 &= \frac{k}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_2
\end{aligned} \tag{4.82}$$

elde edilir. Burada τ , meridyen eğrisi γ nın burulması ve

$$k = p_{12} = f_1'(u)f_2''(u) - f_2'(u)f_1''(u) \tag{4.83}$$

M_2 üzerinde türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece, (4.82) deki eşitlikler kullanılırsa şekil operatörü matrisleri

$$\begin{aligned}
A_{\vec{e}_3} &= \begin{pmatrix} \kappa_\gamma & 0 \\ 0 & \frac{-f_3''}{\kappa_\gamma f_3} \end{pmatrix}, \\
A_{\vec{e}_4} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{\kappa_\gamma f_3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

elde edilir. Buradan M_2 nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = -\frac{f_3''}{f_3} \tag{4.85}$$

ve

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\kappa_\gamma + \frac{k}{\kappa_\gamma} \right) \vec{e}_3 - \frac{k}{f_3 \kappa_\gamma} \vec{e}_4 \right\} \quad (4.86)$$

dir. Böylece, basitliğin hatırına M_2 nin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H} = H_1 \vec{e}_3 + H_2 \vec{e}_4$ olarak seçilirse M_2 nin 1. ve 2. ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$H_1 = \frac{1}{2} \left(\kappa_\gamma + \frac{k}{\kappa_\gamma} \right), H_2 = \frac{-k}{2f_3 \kappa_\gamma} \quad (4.87)$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç verilir.

Teorem 4.37. $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.77) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde M_2 nin minimal olması için gerek ve yeter şart M_2 nin düz yüzey veya meridyen eğrisi

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \frac{\lambda \sqrt{2c_2 - c_1^2}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \ln \left(\sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} + u + c_1 \right) + c_3 \\ f_2(u) &= \frac{\sqrt{2c_2 - c_1^2}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \ln \left(\sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} + u + c_1 \right) + c_4 \\ f_3(u) &= \pm \sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} \end{aligned} \quad (4.88)$$

olan bir yüzey olmasıdır. Burada c_1, c_2, c_3, c_4 ve λ reel sabitlerdir.

İspat. Bakınız (Arslan ve ark. 2017) \square

Teorem 4.38. $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.77) parametrizasyonu ile verilen bir genel rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde M_2 nin bir homotetik soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} &= \frac{1}{2\kappa_\gamma} \left(\kappa_\gamma + \frac{k}{\kappa_\gamma} \right) (f_1(u)f_1''(u) + f_2(u)f_2''(u) + f_3(u)f_3''(u)) \\ &\quad - \frac{k}{2f_3 \kappa_\gamma^2} (f_1(u)p_{23}(u) + f_2(u)p_{13}(u) + f_3(u)p_{12}(u)) \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada k, κ_γ ve p_{ij} reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup sırasıyla (4.83), (4.79) ve (4.80) de tanımlanmıştır.

İspat. M_2 yüzeyi bir homotetik soliton olsun. Bu takdirde Açıklama 3.6 daki

$$\langle x, \vec{H} \rangle = -\frac{1}{c}$$

eşitliği sağlanır. Böylece (4.40)-(4.41) ve (4.48) eşitlikleri yardımıyla

$$\langle x, \vec{H} \rangle = H_1 \langle x, \vec{e}_3 \rangle + H_2 \langle x, \vec{e}_4 \rangle$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle x, \vec{e}_3 \rangle = \frac{1}{\kappa_\gamma} (f_1(u)f_1''(u) + f_2(u)f_2''(u) + f_3(u)f_3''(u))$$

$$\langle x, \vec{e}_4 \rangle = \frac{1}{\kappa_\gamma} (f_1(u)p_{23}(u) + f_2(u)p_{13}(u) + f_3(u)p_{12}(u))$$

dir. Böylece (4.78) yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.39. $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.77) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu takdirde M_2 nin kendisine benzer olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\kappa_\gamma + \frac{\kappa}{\kappa_\gamma} \right) + \frac{\lambda}{\kappa_\gamma} (f_1(u)f_1''(u) + f_2(u)f_2''(u) + f_3(u)f_3''(u)) &= 0 \\ \frac{\kappa}{2f_3\kappa_\gamma} - \frac{\lambda}{\kappa_\gamma} (f_1(u)p_{23}(u) + f_2(u)p_{13}(u) + f_3(u)p_{12}(u)) &= 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada κ_γ ve p_{ij} reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.79) ve (4.80) de tanımlanmıştır.

İspat. $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi kendisine benzer olsun. Bu takdirde Tanım 3.5 gereği $\vec{H} + \lambda x^N = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Böylece bu eşitliğin her iki tarafının \vec{e}_3 ve \vec{e}_4 ile iç çarpımından

$$H_1 + \lambda \langle x, \vec{e}_3 \rangle = 0$$

$$H_2 + \lambda \langle x, \vec{e}_4 \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece (4.77), (4.78) ve (4.87) eşitlikleri kullanılarak istenilen sonuç elde edilir ■

III. Durum: \mathbb{R}^4 de Meridyen Yüzeyleri

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu takdirde γ nın $\rho(v)$ birim küresel eğrinin etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$M_3 : z(u, v) = f(u)\rho(v) + g(u)E_1 \quad (4.90)$$

yamasına sahip olup bu yüzeye \mathbb{R}^4 te meridyen yüzeyi adı verilir. Burada $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ birim vektördür (Ganchev ve Mileusheva, 2015). Meridyen yüzeyleri 2. tip rotasyonel yüzey olarak da bilinir (Arslan vd., 2014),(Arslan vd., 2017).

M_3 yüzeyinin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial}{\partial u} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial v} \\ \vec{e}_3 &= n(v) \\ \vec{e}_4 &= g'(u)\rho(v) + f'(u)E_1 \end{aligned} \quad (4.91)$$

vektör alanları tarafından gerilir. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak bazı hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \kappa_m \vec{e}_4 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 &= \frac{f'}{f} \vec{e}_2 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{f'}{f} \vec{e}_1 + \frac{k}{f} \vec{e}_3 + \frac{g'}{f} \vec{e}_4 \\ \text{ve} \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= -\frac{k}{f} \vec{e}_2 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_4 &= -\kappa_m \vec{e}_1 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_4 &= -\frac{g'}{f} \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (4.92)$$
$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= -\frac{k}{f} \vec{e}_2 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_4 &= -\kappa_m \vec{e}_1 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_4 &= -\frac{g'}{f} \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (4.93)$$

elde edilir. Burada $k = k(v)$ fonksiyonu $\rho = \rho(v)$ nin küresel eğriliğidir.

$$\kappa_m = f'(u) g''(u) - f''(u) g' = -\frac{f''}{\sqrt{(1 - (f')^2)}} \quad (4.94)$$

meridyen eğrisinin eğriliğidir. Böylece, (4.93) deki eşitlikler kullanılırsa şekil operatörü matrisleri

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{f} \end{pmatrix}, A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} \kappa_m & 0 \\ 0 & \frac{g'}{f} \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

elde edilir. Buradan M_3 ün Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = \frac{g' \kappa_m}{f} = -\frac{f''}{f} \quad (4.96)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2f} \{k\vec{e}_3 + (\kappa_m f + g')\vec{e}_4\} \quad (4.97)$$

dir. Böylece M_3 yüzeyinin 1. ve 2. ortalama eğrilikleri

$$H_1 = \frac{k(v)}{2f(u)}, H_2 = \frac{\kappa_m(u)f(u) + g'(u)}{2f(u)} \quad (4.98)$$

ve ortalama eğriliği

$$H = \sqrt{\frac{k^2(v) + (\kappa_m f + g')^2(u)}{4f^2(u)}} \quad (4.99)$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.40. $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.90) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde M_3 ün minimal olması için gerek ve yeter koşul M_3 yüzeyi \mathbb{R}^3 ün alt uzayında yatan

$$g(u) = \int \sqrt{1 - (f'(u))^2} du$$

$$f(u) = \sqrt{u^2 - 2cu + d},$$

meridyen eğrili bir yüzey olmasıdır.

Teorem 4.41. $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.90) parametrizasyonu ile verilen bir genel rotasyonel yüzey olsun. Bu takdirde M_3 ün bir homotetik soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{2f(u)}(\kappa_m(u)f(u) + g'(u))(f(u)g'(u) + g(u)f'(u)) = -\frac{1}{\tilde{c}} \quad (4.100)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada κ_m reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.94) de tanımlanmıştır.

İspat. M_3 yüzeyi bir homotetik soliton olsun. Bu takdirde Açıklama 3.6 daki

$$\langle x, \vec{H} \rangle = -\frac{1}{\tilde{c}}$$

eşitliği sağlanır. Böylece

$$\langle x, \vec{e}_3 \rangle = 0, \langle x, \vec{e}_4 \rangle = f(u)g'(u) + g(u)f'(u) \quad (4.101)$$

ve

$$H_2 = \frac{\kappa_m(u)f(u) + g'(u)}{2f(u)}$$

eşitlikleri ve

$$\langle x, \vec{H} \rangle = H_1 \langle x, \vec{e}_3 \rangle + H_2 \langle x, \vec{e}_4 \rangle$$

denklemleri yardımıyla istenilen sonuç elde edilir. ■

4.3. \mathbb{R}^{n+d} de Rotasyonel Altmanifoldlar

(\tilde{M}^d, \tilde{g}) d -boyutlu Riemann manifoldu ve

$$f: \tilde{M}^d \rightarrow \mathbb{R}^p; f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$$

bir izometrik immersiyon olsun. Bununla birlikte $g: \mathbb{S}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}^q$ standart immersiyonu göz önünde bulundurulduğunda \tilde{M}^d nin \mathbb{S}^{q-1} küresi etrafında döndürülmesiyle bir M rotasyonel altmanifoldu elde edilir. Bu altmanifold $x \in \tilde{M}^d$ ve $y \in \mathbb{S}^{q-1}$ için

$$\varphi(x, y) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{p-1}(x), f_2(x)g(y)) \quad (4.102)$$

izometrik immersiyonu ile tanımlanır. Buradaki $g(y) > 0$ bileşeni \mathbb{R}^q da pozisyon vektörüdür (Kuiper, 1970).

Eğer \tilde{M}^d altmanifoldu $I \subseteq \mathbb{R}$ için \mathbb{R}^p de $C \equiv \gamma(I)$ regüler eğrisi olarak alınırsa $M \subset \mathbb{R}^{p+q-1}$ rotasyonel altmanifoldu

$$x(s, y) = (f_1(s), f_2(s), \dots, f_{p-1}(s), f_2(s)g(y)) \quad (4.103)$$

immersiyonu ile verilir. Burada $g(y)$ bileşeni \mathbb{R}^q da yatan birim hızlı bir küresel eğri ya da küresel altmanifolddur (Arslan vd., 2019).

Bu bölümde daha önceden (Arslan ve ark. 2019) da tanımlanan \mathbb{R}^5 deki 3-boyutlu rotasyonel altmanifoldları ele alınmıştır. Bu altmanifoldlar iki durumda incelenmiştir.

I. Durum: $p = 2$ ve $q = 4$ alındığında $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu

$$x(s, u, v) = (f_1(s), f_2(s)g(u, v)) \quad (4.104)$$

$$g(u, v) = (0, a_1 \cos u, a_1 \sin u, a_2 \cos v, a_2 \sin v) \quad (4.105)$$

izometrik immersiyonu ile tanımlanır. Burada $\gamma(s) = (f_1(s), f_2(s))$ birim hızlı meridyen eğrisi olduğundan $(f_1')^2 + (f_2')^2 = 1$ dir. Bununla birlikte (4.104) yüzey yaması $T^2 \subset \mathbb{R}^4$ Clifford tor yüzeyi belirtir, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ reel sabitler olup $a_1^2 + a_2^2 = 1$ dir.

M_1^3 rotasyonel altmanifoldunun $p \in M_1^3$ noktasındaki $T_p M_1^3$ tanjant uzayı

$$X_1 = \frac{x_s}{\|x_s\|} = (f_1'(s), a_1 f_2'(s) \cos u, a_1 f_2'(s) \sin u, a_2 f_2'(s) \cos v, a_2 f_2'(s) \sin v)$$

$$X_2 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = (0, -\sin u, \cos u, 0, 0) \quad (4.106)$$

$$X_3 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = (0, 0, 0, -\sin v, \cos v)$$

ortanormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece M_1^3 altmanifoldunun 1.temel formu matrisi

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 f_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 f_2^2 \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

dir. Bununla birlikte, M_1^3 rotasyonel altmanifoldunun $p \in M_1^3$ noktasındaki $T_p^\perp M_1^3$ normal uzayı

$$N_1 = \frac{1}{\kappa} (f_1''(s), a_1 f_2'(s) \cos u, a_1 f_2''(s) \sin u, a_2 f_2''(s) \cos v, a_2 f_2''(s) \sin v) \quad (4.108)$$

$$N_2 = (0, a_2 \cos u, a_2 \sin u, -a_1 \cos v, -a_1 \sin v) \quad (4.109)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir.

Böylece, bu çatı alanına göre M_1^3 altmanifoldunun 2. temel form katsayıları

$$h_{11}^1 = \kappa$$

$$h_{22}^1 = -\frac{f_2''}{\kappa f_2}, h_{22}^2 = -\frac{a_2}{a_1 f_2} \quad (4.110)$$

$$h_{33}^1 = -\frac{f_2''}{\kappa f_2}, h_{33}^2 = \frac{a_1}{a_2 f_2}$$

ve böylece 2.temel form dönüşümleri

$$h(X_1, X_1) = \kappa N_1$$

$$h(X_2, X_2) = -\frac{f_2''}{\kappa f_2} N_1 - \frac{a_2}{a_1 f_2} N_2 \quad (4.111)$$

$$h(X_3, X_3) = -\frac{f_2''}{\kappa f_2} N_1 + \frac{a_1}{a_2 f_2} N_2$$

$$h(X_1, X_2) = h(X_1, X_3) = h(X_2, X_3) = 0$$

olarak hesaplanır (Arslan vd., 2019). Burada κ fonksiyonu $\gamma(s) = (f_1(s), f_2(s))$ birim hızlı meridyen eğrisinin eğriliği olup

$$\kappa = \frac{f_2''}{\sqrt{1 - (f_2')^2}} \quad (4.112)$$

dır. Böylece (4.114) deki ifadeler (2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.42. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.104) parametrizasyonu ile verilsin.

Bu takdirde M_1^3 ün ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 h(X_k, X_k) = \frac{1}{3} \left\{ \left(\kappa - \frac{2f_2''}{\kappa f_2} \right) N_1 + \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 a_2 f_2} \right) N_2 \right\} \quad (4.113)$$

dir.

Tanım 4.43. $M^n \subset \mathbb{R}^{n+d}$ altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü \vec{H} için

$$\langle \vec{H}, x \rangle = -\frac{1}{c} \quad (4.114)$$

eşitliği sağlanırsa M^n ye ters ortalama eğrilik akısının bir *homotetik solitonu* adı verilir. Burada c sıfırdan farklı sabittir. Eğer $c < 0$ ise *büzüşen çözümler* vardır, $c > 0$ durumunda ise *genişleyen çözümleri* vardır denir (Castro ve Lerma, 2015).

Tanımdan da anlaşılacağı üzere homotetik soliton ters ortalama eğrilik akısının kendine-benzer çözümüdür.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.44. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.105) parametrizasyonu ile verilsin.

Bu takdirde M_1^3 altmanifoldu ortalama eğrilik vektörü ters ortalama eğrilik akısının bir homotetik solitonu olması için gerek ve yeter koşul

$$(f_1 f_1'' + f_2 f_2'') \left(\frac{f_2 f_2'' - 2(1 - (f_2')^2)}{f_2 f_2''} \right) = -\frac{3}{c} \quad (4.115)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu ters ortalama eğrilik akısının bir homotetik solitonu olsun. Bu takdirde tanım gereği $\langle \vec{H}, x \rangle = -\frac{1}{c}$ eşitliği sağlanır. Böylece (4.113) dan

$$\langle \vec{H}, x \rangle = \frac{1}{3} \left\{ \left(\kappa - \frac{2f_2''}{\kappa f_2} \right) \langle N_1, x \rangle + \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 a_2 f_2} \right) \langle N_2, x \rangle \right\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle N_1, x \rangle = \frac{f_1 f_1'' + f_2 f_2''}{\kappa} = \frac{\mu}{\kappa}, \quad \langle N_2, x \rangle = 0$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\langle \vec{H}, x \rangle = \frac{\mu}{3\kappa} \left(\kappa - \frac{2f_2''}{\kappa f_2} \right) \quad (4.116)$$

bulunur. Burada

$$\mu = f_1 f_1'' + f_2 f_2'' \quad (4.117)$$

türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece

$$\frac{\mu}{\kappa} \left(\kappa - \frac{2f_2''}{\kappa f_2} \right) = -\frac{3}{c} \quad (4.118)$$

dır. Bununla birlikte (4.112) eşitliği (4.118) de yerine yazılırsa (4.115) elde edilir. ■

Örnek 4.45. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldunun meridyen eğrisi $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$ birim çemberi alınırsa M_1^3 altmanifoldu

$$g(u, v) = (\cos s, a_1 \sin s \cos u, a_1 \sin s \sin u, a_2 \sin s \cos v, a_2 \sin s \sin v)$$

parametrizasyonuna sahip bir küresel altmanifold olur. Ayrıca $c = -1$ olduğundan M_1^3 ters ortalama eğrilik akısının bir büzüşen homotetik solitonudur.

Tanım 4.46. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+d}$ izometrik daldırması ile verilen M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü \vec{H} ve pozisyon vektörünün normal bileşeni x^N olmak üzere

$$\vec{H} + \lambda x^N = 0 \quad (4.119)$$

eşitliği sağlanırsa M altmanifoldu ortalama eğrilik akısı denkleminin *kendine-benzer* bir çözümü olarak ifade edilir. Bu durumda, $\lambda = 1$ için *daralan kendine benzer* (kendisi büzüşen), $\lambda = -1$ için *genişleyen kendine benzer* (kendisi genişleyen) bir çözümdür (Ecker ve Huisken, 1989).

Teorem 4.47. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.105) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_1^3 altmanifoldu ortalama eğrilik akısı denkleminin kendine-benzer bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{f_2 f_2'' - 2(1 - (f_2')^2)}{f_2 \sqrt{1 - (f_2')^2}} \right)^2 + \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 a_2 f_2} \right)^2 \right\} + \lambda \mu \left(\frac{f_2 f_2'' - 2(1 - (f_2')^2)}{f_2 f_2''} \right) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu = f_1 f_1'' + f_2 f_2''$ reel değerli fonksiyondur.

İspat. M_1^3 altmanifoldu ortalama eğrilik akısı denkleminin *kendine-benzer* bir çözümü olsun. Bu takdirde (4.119) eşitliği sağlanır. Böylece

$$\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle + \lambda \langle x^N, \vec{H} \rangle = 0 \quad (4.120)$$

ve buradan da

$$\langle \vec{H}, \vec{H} \rangle + \lambda \langle x, \vec{H} \rangle = 0 \quad (4.121)$$

elde edilir. Buradan (4.113) ve (4.116) eşitlikleri (4.121) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Y. Teorem 4.48. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.105) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_1^3 ün Ricci eğrilikler

$$R_{11} = \frac{2f_2''}{f_2}, \quad R_{22} = R_{33} = \frac{f_2''}{f_2} - \left(\frac{(f_2'')^2}{\kappa^2} - \frac{1}{f_2^2} \right),$$

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0 \quad (4.122)$$

dır.

İspat. M_1^3 rotasyonel altmanifoldunun Gauss denklemi (2.7) eşitliğinden

$$R_{ijkl} = \langle h(X_i, X_l), h(X_j, X_k) \rangle - \langle h(X_i, X_k), h(X_j, X_l) \rangle, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3 \quad (4.123)$$

dir. Basitliğin hatırına

$$h(X_i, X_j) = h_{ij} \quad (4.124)$$

alınırsa (4.126) denklemleri

$$R_{ijkl} = \langle h_{il}, h_{jk} \rangle - \langle h_{ik}, h_{jl} \rangle, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3 \quad (4.125)$$

halini alır.

Böylece (4.111), (4.119), (4.125) eşitlikleri (2.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$R_{11} = \sum_{k=1}^3 R_{1k1k} = \sum_{k=1}^3 (\langle h_{1k}, h_{1k} \rangle - \langle h_{11}, h_{kk} \rangle) = -h_{11}^1 (h_{22}^1 + h_{33}^1)$$

$$R_{22} = \sum_{k=1}^3 R_{2k2k} = \sum_{k=1}^3 (\langle h_{2k}, h_{2k} \rangle - \langle h_{22}, h_{kk} \rangle) = -h_{11}^1 h_{22}^1 - (h_{22}^1 h_{33}^1 + h_{22}^2 h_{33}^2)$$

$$R_{33} = \sum_{k=1}^3 R_{3k3k} = \sum_{k=1}^3 (\langle h_{3k}, h_{3k} \rangle - \langle h_{33}, h_{kk} \rangle) = -h_{11}^1 h_{33}^1 - (h_{33}^1 h_{22}^1 + h_{33}^2 h_{22}^2)$$

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0$$

elde edilir. Böylece (4.110) deki ikinci temel form katsayıları kullanılarak istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.49. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.105) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_1^3 ün skaler eğriliği

$$r = \frac{2(f_2')^2 + 4 f_2 f_2''}{f_2^2} \quad (4.126)$$

dir.

İspat. (4.111) eşitlikleri (2.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$r = \sum_{i=1}^3 R_{ii} = \frac{4f_2''}{f_2} - \left(\frac{(f_2'')^2}{\kappa^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$$

elde edilir. Son eşitlikte $\kappa = \frac{f_2''}{\sqrt{1-(f_2')^2}}$ değeri yerine yazılıp yeniden düzenlenirse istenilen

sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.50. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.105) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_1^3 ün skaler eğriliği sıfıra eşit ise bu takdirde

$$f_2(s) = \left(\frac{3}{2} (c_1 s + c_2) \right)^{2/3}, \quad f_1(s) = \sqrt{1 - (f_2')^2},$$

dir. Burada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ integral sabitleridir.

İspat. M_1^3 rotasyonel altmanifoldu skaler eğriliği sıfıra eşit olsun. Bu takdirde Teorem 4.50 den

$$(f_2')^2 + 2f_2f_2'' = 0$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin

$$>ode:= diff(f2(s),s)^2+2*diff(f2(s),s,s)*f2(s)=0;$$

$$>dsolve(ode);$$

Maple komutu yardımıyla çözümlerinden

$$\frac{2}{3}(f_2(s))^{3/2} - c_1s - c_2 = 0$$

bulunur. Ayrıca ve $(f_1')^2 + (f_2')^2 = 1$ olduğundan istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.51. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.105) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde (M_1^3, g, x^T, λ) nin bir Ricci soliton olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa^2(f_2f_2'' + (f_2')^2) + (f_2'')^2 - (\lambda - 1)(f_2^2\kappa^2 + f_2f_2'') = 0 \quad (4.127)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada κ meridyen eğrisinin eğriliğidir.

İspat. (M_1^3, g, x^T, λ) bir Ricci soliton olsun. Bu takdirde Teorem 3.25 den dolayı

$$Ric(X_i, X_j) = (\lambda - 1)\langle X_i, X_j \rangle - \langle h(X_i, X_j), x^\perp \rangle; \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (4.128)$$

eşitliğini sağlanır. Böylece (4.112), (4.118) ve (4.123) eşitlikleri ve (4.128) de yerine yazılırsa

$$\frac{2f_2''}{f_2} = (\lambda - 1)\kappa\mu,$$

$$\frac{1}{f_2} \left(f_2'' + \frac{(f_2')^2}{f_2} \right) = (\lambda - 1) + \frac{f_2''}{\kappa f_2} \mu$$

elde edilir. Burada $\mu = f_1f_1'' + f_2f_2''$ reel değerli bir fonksiyondur. Birinci eşitlikten μ çekilip ikinci eşitlikte yerine yazılırsa (4.127) elde edilir. ■

Teorem 4.52. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.105) parametrizasyonu ile verilsin. O halde (M_1^3, g, x^T, λ) nın bir Yamabe soliton ise bu takdirde aşağıdaki ifadelerden biri söz konusudur;

- 1) M_1^3 altmanifoldu sabit kesitsel eğrilikli olup $r = \lambda + 1$ dir.
- 2) M_1^3 altmanifoldu konikseldir.
- 3) M_1^3 altmanifoldunun profil eğrisi

$$f_2(s) = \frac{a(e^{2b/a} e^{2s/a} - 1)}{2e^{b/a} e^{s/a}} \text{ veya } f_2(s) = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{e^{2b/a} e^{2s/a}} - 1 \right) e^{b/a} e^{s/a} \quad (4.129)$$

dir. Burada a, b integral sabitleridir.

İspat. (M_1^3, g, x^T, λ) nın bir Yamabe soliton olsun. Bu takdirde Teorem 3.36 dan herhangi $X_i, X_j \in T_p M_1^3$ için

$$\langle h(X_i, X_j), x^\perp \rangle = (r - \lambda - 1) \langle X_i, X_j \rangle \quad (4.130)$$

eşitliği sağlanır. Burada r, M_1^3 altmanifoldunun skaler eğriligidir. Böylece (4.111) eşitlikler (4.130) de yerine yazılırsa

$$\kappa \mu = r - \lambda - 1,$$

$$-\frac{f_2''}{f_2} \mu = \kappa(r - \lambda - 1)$$

elde edilir. Bu iki eşitlik ve $\kappa = \frac{f_2''}{\sqrt{1-(f_2')^2}}$ kullanılarak

$$\mu f_2'' (f_2'' f_2 + 1 - (f_2')^2) = 0$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki üç durum söz konusudur;

1. durum: $\mu = 0$,
2. durum: $f_2'' = 0$,
3. durum: $(f_2')^2 - f_2'' f_2 = 1$.

Bu durumları sırasıyla irdeleyelim;

1. durum: $\mu = 0$ olsun. Bu durumda M_1^3 altmanifoldu sabit kesitsel eğrilikli olup $r = \lambda + 1$ dir.

2. durum: $f_2'' = 0$ olsun. Bu durumda profil eğrisi γ orijinden geçen doğrunun açık bir parçasıdır. Bu durumda M_1^3 altmanifoldu konikseldir.

3. durum: $(f_2')^2 - f_2'' f_2 = 1$ olsun. Bu diferansiyel denklemin

```
>sys:= [diff(f2(s),s)^2-diff(y(s),s,s)*y(t)=1, diff(y(s),s)^2+diff(x(s),s)^2 =1];
```

```
>sol:= dsolve(sys);
```

Maple komutu yardımıyla aşikar olmayan bir çözümü (4.129)deki fonksiyonlardır. ■

II. Durum: $p = 3$ ve $q = 3$ alındığında $M_2^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu

$$x(s, u, v) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s)g(u, v)) \quad (4.131)$$

$$g(u, v) = (\cos u, \sin u \cos v, \sin u \sin v) \quad (4.132)$$

izometrik immersiyonu ile tanımlanır (Arslan ve ark. 2019). Burada

$$\gamma(s) = (f_1(s), f_2(s), f_3(s)) \quad (4.133)$$

birim hızlı meridyen eğrisi ve (4.133) yüzey yaması $S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ küre yüzeyi belirtir.

M_2^3 rotasyonel altmanifoldunun $p \in M_2^3$ noktasındaki $T_p M_2^3$ tanjant uzayı

$$X_1 = \frac{x_s}{\|x_s\|} = (f_1'(s), f_2'(s), f_3'(s) \sin u \cos v, f_3'(s) \sin u \sin v)$$

$$X_2 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = (0, 0, -\sin u, \cos u \cos v, \cos u \sin v) \quad (4.134)$$

$$X_3 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = (0, 0, 0, -\sin v, \cos v)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir.

Böylece M_2^3 altmanifoldunun 1.temel formu matrisi

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_3'^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \sin^2 u \end{pmatrix} \quad (4.135)$$

dir. Bununla birlikte, M_2^3 rotasyonel altmanifoldunun $p \in M_2^3$ noktasındaki $T_p^\perp M_2^3$ normal uzayı

$$N_1 = \frac{1}{\kappa}(f_1''(s), f_2'(s), f_3''(s)\cos u, f_3''(s)\sin u\cos v, f_3''(s)\sin u\sin v) \quad (4.136)$$

$$N_2 = \frac{1}{\kappa}(A, B, \kappa_1\cos u, \kappa_1\sin u\cos v, \kappa_1\sin u\sin v) \quad (4.137)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir. Burada

$$\begin{aligned} A &= f_2'f_3'' - f_3'f_2'' \\ B &= f_3'f_1'' - f_1'f_3'' \end{aligned} \quad (4.138)$$

$$\kappa_1 = f_1'f_2'' - f_2'f_1''$$

ve

$$\kappa = \sqrt{(f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2} \quad (4.139)$$

dir. Bu çatı alanına göre M_2^3 altmanifoldunun 2. temel form katsayıları

$$h_{11}^1 = \kappa, h_{11}^2 = 0$$

$$h_{22}^1 = -\frac{f_3''}{\kappa f_3}, h_{22}^2 = -\frac{\kappa_1}{\kappa f_3} \quad (4.140)$$

$$h_{33}^1 = -\frac{f_3''}{\kappa f_3}, h_{33}^2 = -\frac{\kappa_1}{\kappa f_3}$$

ve böylece 2.temel form dönüşümleri

$$h(X_1, X_1) = \kappa N_1$$

$$h(X_2, X_2) = -\frac{f_3''}{\kappa f_3} N_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} N_2 \quad (4.141)$$

$$h(X_3, X_3) = -\frac{f_3''}{\kappa f_3} N_1 - \frac{\kappa_1}{\kappa f_3} N_2$$

$$h(X_1, X_2) = h(X_1, X_3) = h(X_2, X_3) = 0$$

olarak hesaplanır (Arslan ve ark. 2019).

(4.141) deki ifadeler (2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.53. $M_2^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.132) parametrizasyonu ile verilsin.

Bu takdirde M_2^3 ün ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 h(X_k, X_k) = \frac{1}{3} \left\{ \left(\kappa - \frac{2f_3''}{\kappa f_3} \right) N_1 - \frac{2\kappa_1}{\kappa f_3} N_2 \right\}, \quad \kappa \neq 0 \quad (4.142)$$

dir.

Sonuç 4.54. $M_2^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.132) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_2^3 ün minimal olması için gerek ve yeter şart

$$f_3 f_3'' + 2(f_3')^2 = 2 \quad (4.143)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. M_2^3 altmanifoldu minimal olsun. Bu takdirde (4.142) gereği

$$\kappa^2 = \frac{2f_3''}{f_3} \text{ ve } \kappa_1 = 0$$

olmalıdır. Buradan $\kappa_1 = 0$ eşitliğinden $f_1' f_2'' - f_2' f_1'' = 0$ dir. Böylece bazı $\lambda \in \mathbb{R}$ için $f_1' = \lambda f_2'$ dir. Profil eğrisi γ birim hızlı olduğundan

$$f_2' = \pm \frac{\sqrt{1 - (f_3')^2}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

dir. Böylece f_1' ve f_2' nün türevleri $f_1'' = \lambda f_2''$ ve

$$f_2'' = \mp \frac{f_3' f_3''}{\sqrt{1 + \lambda^2} \sqrt{1 - (f_3')^2}}$$

yardımla

$$(f_1'')^2 + (f_2'')^2 = (1 + \lambda^2)(f_2'')^2 = \frac{(f_3')^2 (f_3'')^2}{(1 - (f_3')^2)}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{2f_3''}{f_3} &= \kappa^2 \\ &= (f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2 \\ &= (f_3'')^2 + \frac{(f_3')^2 (f_3'')^2}{(1 - (f_3')^2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{2f_3''}{f_3} = (f_3'')^2 + \frac{(f_3')^2 (f_3'')^2}{(1 - (f_3')^2)} = \frac{(f_3'')^2 (1 - (f_3')^2) + (f_3')^2 (f_3'')^2}{(1 - (f_3')^2)} = \frac{(f_3'')^2}{(1 - (f_3')^2)}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$f_3'' \left(\frac{2}{f_3} - \frac{f_3''}{(1 - (f_3')^2)} \right) = 0$$

dır. Ayrıca $\kappa \neq 0$ olduğundan $f_3'' \neq 0$ dır. Böylece

$$\frac{2}{f_3} - \frac{f_3''}{(1 - (f_3')^2)} = 0$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse (4.146) elde edilir. ■

Teorem 4.55. $M_2^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.132) parametrizasyonu ile verilsin.

Bu takdirde M_1^3 altmanifoldu ortalama eğrilik vektörü ters ortalama eğrilik akısının bir homotetik solitonu olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\mu}{\kappa^2 f_3} (\kappa^2 f_3 - 2f_3'') - \frac{2\kappa_1}{\kappa^2 f_3} (Af_1 + Bf_2 + \kappa_1 f_3) = -\frac{3}{c} \quad (4.144)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\mu = f_1 f_1'' + f_2 f_2'' + f_3 f_3''$ reel değerli türevlenebilir bir fonksiyon, A, B, κ_1 ve κ fonksiyonları (4.139) ve (4.140) da tanımlanmıştır.

İspat. $M_1^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldun ters ortalama eğrilik akısının bir homotetik solitonu olsun. Bu takdirde tanım gereği $\langle \vec{H}, x \rangle = -\frac{1}{c}$ eşitliği sağlanır. Böylece (4.143)

den

$$\langle \vec{H}, x \rangle = \frac{1}{3} \left\{ \left(\kappa - \frac{2f_3''}{\kappa f_3} \right) \langle N_1, x \rangle - \frac{2\kappa_1}{\kappa f_3} \langle N_2, x \rangle \right\} \quad (4.145)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle N_1, x \rangle = \frac{\mu}{\kappa}, \quad \mu = f_1 f_1'' + f_2 f_2'' + f_3 f_3'' \quad (4.146)$$

$$\langle N_2, x \rangle = \frac{Af_1 + Bf_2 + \kappa_1 f_3}{\kappa} \quad (4.147)$$

olduğundan (4.145)-(4.147) eşitlikleri yardımıyla

$$\left(\kappa - \frac{2f_3''}{\kappa f_3} \right) \frac{\mu}{\kappa} - \frac{2\kappa_1}{\kappa f_3} \left(\frac{Af_1 + Bf_2 + \kappa_1 f_3}{\kappa} \right) = -\frac{3}{c}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Y. Teorem 4.56. $M_2^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.132) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_2^3 ün Ricci eğrilikler

$$R_{11} = \frac{2f_3''}{f_3}, \quad R_{22} = R_{33} = \frac{\kappa^2 f_3 f_3'' - (f_3'')^2 - \kappa_1^2}{\kappa^2 f_3^2},$$

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0 \quad (4.148)$$

dır.

İspat.(4.141) deki 2. temel form katsayıları Y. Teorem 4.48 in ispatındaki Ricci eğriliklerde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.57. $M_2^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.132) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_1^3 ün skaler eğriliği

$$r = \frac{4\kappa^2 f_3^2 f_3'' - 2(f_3'')^2 - 2\kappa_1^2}{\kappa^2 f_3^2} \quad (4.149)$$

dir.

İspat.(4.122) eşitlikleri (2.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$r = \sum_{i=1}^3 R_{ii} = \frac{2f_3''}{f_3} + \frac{2(\kappa^2 f_3 f_3'' - (f_3'')^2 - \kappa_1^2)}{\kappa^2 f_3^2}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.58. $M_2^3 \subset \mathbb{R}^5$ rotasyonel altmanifoldu (4.132) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M_2^3 ün skaler eğriliği sıfıra eşit ise bu takdirde

$$4\kappa^2 f_3^2 f_3'' - 2(f_3'')^2 - 2\kappa_1^2 = 0$$

dir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Son yıllarda yüksek boyutlu Öklit uzayında rotasyonel yüzeyler ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Bu yüzeylerin fizikteki uygulamaları büyük önem arz etmektedir. Özellikle homotetik soliton, Ricci ve Yamabe soliton oluşturmaları için döngü eğrilerinin parametrik gösterimleri ifade edilebilir. Özellikle \mathbb{R}^4 de genel rotasyonel yüzeyleri, \mathbb{R}^4 de küresel çarpım yüzeyleri ve \mathbb{R}^4 de meridyen yüzeylerinin homotetik soliton ve ξ –yüzeyi olma koşulları ele alınmıştır. Son kısımda ise \mathbb{R}^{n+d} de rotasyonel altmanifoldlar incelenmiştir. Özellikle \mathbb{R}^5 deki rotasyonel altmanifoldların ξ –altmanifoldu olması ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Abresch, U., Langer, J. (1986). The normalized curve shortening flow and homothetic solutions, *J. Differential Geom.*, 23, 175-196.
- Al-sodais, H., Alodan, H., Deshmukh S. (2014). Hypersurfaces of Euclidean space as gradient Ricci solitons, *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University – Mathematics*.DOI: 10.2478/aicu-2014-0009
- Andrews, B. (2003). Classification of limiting shapes for isotropic curve flows, *J. Amer. Math. Soc.*, 16(2), 443–459.
- Arslan, K., Bayram (Kılıç), B., Bulca, B., Öztürk, G. (2012). Generalized rotation surfaces in \mathbb{E}^4 , *Results. Math.*, 61, 315.327.
- Arslan, K., Bayram (Kılıç), B., Bulca, B., Öztürk, G. (2019). Rotation submanifolds in Euclidean spaces, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 16(2), 1-12.
- Arslan, K., Bulca, B., Kosova, D. (2017). On Generalized rotational surfaces in Euclidean spaces, *J. Korean Math. Soc.*, 54 (2), 999-1013.
- Arslan, K., Bulca, B., Mileusheva, V. (2014). Meridian surfaces in \mathbb{E}^4 with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math. Soc.*, 51, 911.922.
- Arslan, K., Sütveren, A., Bulca, B. (2021). Rotational λ -hypersurfaces in Euclidean spaces, *Creat. Math. Inform.*, 30, 29 – 40.
- Baikoussis, C., Blair D.E. (1992). On the Gauss map of ruled surfaces. *Glasgow Math. J.*, 34, 355-359.
- Brakke, K. A. (1978). The Motion of a Surface by Its Mean Curvature, Princeton University Press, Princeton.
- Brinkmann, H.W. (1925). Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Mathematische Annalen*, Springer.
- Bulca, B., (2012). \mathbb{E}^4 deki yüzeylerin bir karakterizasyonu, [Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi], U.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü.
- Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B. K., Öztürk, G. Ugail, H. (2009, September 7-11). *On spherical product surfaces in \mathbb{E}^3* . International Conference on Cyberworlds, University of Bradford, Bradford.
- Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B. K., Öztürk, G. (2012). Spherical product surfaces in \mathbb{E}^4 , *An. St. Univ. Ovidius Constanta.*, 20, 41.54.
- Castro, I., Lerma, A.M. (2015). Homothetic soliton for the inverse mean curvature flow arXiv:1511.03826v1.
- Cao H.D., Chen, Q. (2013). On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons, *Duke Math. J.*, 162(6), 1149–1169.
- Chen, B.Y. (2017a). Topics in Differential Geometry Associated with Position Vector Fields on Euclidean Submanifolds, *Arab J. Math. Sci.*, 23, 1-17.
- Chen, B. Y. (1973). *Geometry of Submanifolds*. Dekker, New York.
- Chen, B.-Y. (2015). *Total mean curvature and submanifolds of finite type* : 2nd edition. World Scientific, Hackensack, NJ.
- Chen B.Y. (2016). Differential geometry of rectifying submanifolds. *Int. Elect. J. of Geom.*, 9 (2), 1-8.
- Chen, B.Y. (2015). Some results on concircular vector fields and their applications to Ricci solitons, *Bull. Korean Math. Soc.*, 52(5), 1535-1547.
- Chen, B.Y. (2017). *Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds*, World Scientific Publishing.

- Chen, B.Y. Deshmukd, S.,(2018). Yamabe and Quasi-Yamabe Solitons on Euclidean Submanifolds, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 15(5), 1-9.
- Chen, B.Y. Deshmukd, S.,(2014). Classification of Ricci solitons on Euclidean hypersurfaces, *International Journal of Mathematics*, 25(11):1-25.
- Chen, B.Y. Deshmukd, S.,(2014). Classification of Ricci solitons on Euclidean hypersurfaces, *Int. J. Math.*, 25(11), 1-22.
- Chen, B.Y. Deshmukd, S.,(2014b). Ricci solitons on Riemannian submanifolds, Proc. of the Conference RIGA, 2014, University of Bucharest Press Romania.
- Chen, B.Y. Deshmukd, S.,(2015). Ricci solitons and concurrent vector fields, *Balkan J. Geom. and Its Appl.*, 20(6), 14-25.
- Cheng QM, Wei G. 2015. Complete λ -hypersurfaces of the weighted volume-preserving mean curvature flow. arXiv 2015; arXiv:1403.3177.
- Chen X., Wang, Y. (2011). On four-dimensional anti-self-dual gradient Ricci solitons. arXiv:1102.0358v2.
- Cooper, A.A. (2011). *Mean Curvature Flow in Higher Codimension*, [Doctoral Dissertation, Michigan State University]. Graduate Program in Mathematics, USA.
- Castro I, Lerma AM.(2014). The Clifford torus as a self-shrinker for the Lagrangian mean curvature flow. *Int. Math. Research Notices*, 16, 1515-152.
- Castro I, Lerma AM.(2017). Homothetic solitons for the inverse mean curvature flow, *Results Math.*, 71, 1109–1125.
- Cheng, Q.M. (2016). Geometry of λ -hypersurfaces of the weighted volume-preserving mean curvature flow, Fukuaka University.
- Cheng, Q.M., Ogata, S., Wei, G. (2014). Rigidity Theorems of λ hypersurfaces, arXiv:1403.4123v3.
- Cheng, Q.M., Wei, G. (2014). The Gauss Image of Hypersurfaces and a Bernstein Type Problem, arXiv:1410.5302v1.
- Deshmukh S., Alsodais, H. (2020). A note on Ricci solitons, *Symmetry*, 12(2), 1-11.
- Do Carmo, M. 1976. Riemannian Geometry, Boston, Basel Berlin.
- Do Carmo M., Dajczer, M. (1993). Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277 (1983), 685-709.
- Drugan, G., Lee, H., Nguyen, X.H.(2018). A Survey of Closed Self-Shrinkers with Symmetry, *Results in Math.*, 32: 73-32.
- Drugan, G., Lee, H., Wheeler, G.(2016). Solitons for the inverse mean curvature flow *Pacific J. Math.*, 284(2), 309-326.
- Ecker, K. (2004). Regularity Theory for Mean Curvature Flow. Birkhäuser Boston, Inc.
- Ecker, K. Huisken, G. (1989). Mean Curvature Evolution of Entire Graphs, *Annals of Mathematics*, 130(3), 453-471.
- Etemoğlu, E., Arslan, K. Bulca, B.(2013). Self Similar Surfaces in Euclidean Spaces, *Selçuk J. Appl. Math.*, 14(1), 71-81.
- Fialkow, A. (1939). Conformal geodesics. *Trans. Am. Math. Soc.*, 45, 443–473.
- Ganchev, G., Milousheva V. (2008). On the theory of surfaces in the four dimensional Euclidean Space. *Kodai Math. J.*, 31, 183-198.
- Ganchev, G., Milousheva V. (2015). Special classes of meridian surfaces in the four-dimensional Euclidean space, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 52(6), 2035-2045.
- Gray, A. (1993). Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc.

- Guo, S. H. (2017). *Self Shrinkers and Singularity Models of the Mean Curvature Flow*. [Doctoral Dissertation, The State University of New Jersey]. Graduate Program in Mathematics, USA.
- Halldorsson, P.H. (2013). *Self-Similar Solutions to the Mean Curvature Flow in Euclidean and Minkowski Space*, [Doctoral Dissertation, Massachusetts Institute of Technology]. Department of Mathematics, USA.
- Hamilton, R. S. (1988). The Ricci flow on surfaces, *Contem. Math.*, 71, 237-261.
- He, C., Petersen, P., Wylie, W. (2012). On the classification of warped product Einstein metrics, *Comm. Anal. Geom.*, 20 (2), 271-311.
- Huisken, G. (1990). Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differential Geom.*, 31, 285-299.
- Huisken, G., Ilmanen, T. (2001). The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality", *J. Differential Geom.*, 59(3), 353-437.
- Huisken, G., Ilmanen, T. (2008). Higher regularity of the inverse mean curvature flow", *J. Differential Geom.*, 80(3), 433-451.
- Hussey, C. (2012). *Classification and Analysis of Low index Mean Curvature Flow Self-shrinkers*, [Doctoral Dissertation, Johns Hopkins University]. Department of Mathematics, USA.
- Ivey, T., (1993). Ricci solitons on compact three-manifolds, *Diff. Geom. Appl.*, 3, 301-307.
- Joyse D, Lee Y, Tsui MP. (2010). Self-similar solutions and translating solutions for Lagrangian mean curvature flow. *J. Diff. Geom.*, 84, 127-161.
- Kim, D., Pyo, J. (2019). Translating Solitons for the Inverse Mean Curvature Flow, *Results Math.*, 64, 1-28.
- Kuiper, N.H., (1970). Minimal total absolute curvature for immersions, *Invent. Math.*, 10, 209-238.
- Lejdfors, C. J. (2003). *Surfaces of Constant Mean Curvature*, [Msc. Dissertation, Lund University]. Centre for Mathematical Sciences, Sweden.
- Peng, Y. (2013). *Complete self-shrinkers of mean curvature flow*, [Doctoral Dissertation, Saga University]. Graduate School of Science and Engineering, Department of Science and Advanced Technology, Japan.
- Li X, Chang X. (2016). A rigidity theorem of ξ -submanifolds in C^2 , *Geom. Dedicata*, 185, 155-169.
- Li X, Li Z. (2020). Variational characterization of ξ -submanifolds in the Euclidean space \mathbb{R}^{m+p} . *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 199, 1491-1518.
- Li, X., Chang, X. (2015). Rigidity Theorems of the Space-like λ -hypersurfaces in the Lorentzian Space \mathbb{R}^{n+1} arXiv:1511.02984v1.
- Li H, Wang X (2017). New characterizations of the Clifford torus as a Lagrangian self-shrinker. *The Journal of Geometric Analysis*, 27, 1393-1412.
- McGonagle, M., Ross. J. (2013). The hyperplane is the only stable, smooth solution to the isoperimetric problem in gaussian space. arXiv preprint arXiv:1307.7088.
- Montegazza, C. 2011. Lecture Notes on Mean Curvature Flow, Birkhauser,
- Munteanu, O., Wang, M-T. (2011). The curvature of gradient Ricci solitons, *Math. Res. Lett.*, 18(6), 1051-1069.
- Peng, Y. (2013). *Complete self-shrinkers of mean curvature flow*, [Doctoral Dissertation, Saga University]. Graduate School of Science and Engineering, Department of Science and Advanced Technology, Japan.

- Ross, J. (2015). *Rigidity Results of Lambda-Hypersurfaces*, [Doctoral Dissertation, Johns Hopkins University]. Department of Mathematics, USA.
- Schulze, F. (2017). Introduction to Mean Curvature Flow, Lecture Notes, University College London.
- Shiho, O. (2015). A Global Pinching Theorem of Complete λ -hypersurfaces, arXiv:1504.00789v2.
- Smoczyk, K. (2012). Mean Curvature Flow in Higher Codimension: Introduction and Survey, Global Differential Geometry, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Sigal, I. M. (2014). Lectures on Mean Curvature Flow and Stability, Lecture Notes, Dept of Mathematics, Univ of Toronto.
- Sütveren A. (2015). *n-boyutlu Öklid uzayında λ -hiperyüzeylerinin bir karakterizasyonu*, [Yüksek Lisans tezi, Uludağ Üniversitesi], U.Ü. Fen-Bilimleri Enstitüsü.
- Tonegawa, Y. (2019). Brakke's mean curvature flow an introduction, Springer Briefs in Mathematics.
- Topping, P. (2006). Lecture notes on Ricci flow, Warwick University.
- Vranceanu, G. (1977). Surfaces de rotation dans \mathbb{E}^4 . *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* XXII, 6, 857-862.
- Yano, K. (1943). Sur le parallelisme et la concourance dans l'espace de Riemann. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 19, 189-197.
- Yano, K., (1944). On torse forming direction in a Riemannian space. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20, 340–346.
- Yano, K., Chen, B.Y. (1971). On the concurrent vector fields of immersed manifolds, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 23, 343-350.
- Yoon, D.W. (2003). Some properties of the Clifford torus as rotation surfaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34, 857-862.
- Zhu, Y., Chen, Q. (2019). Classification and rigidity of λ -hypersurfaces in the weighted volume-preserving mean curvature mean curvature, *Houston Journal of Math.* 45(4), 1037–1053.
- Dursun, U., Turgay, N.C. (2012). General Rotational Surfaces in Euclidean Space \mathbb{E}^4 *Mathematical Communications*, 17(1), 71-81.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yılmaz AYDIN
Doğum Yeri ve Tarihi :
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Milas Anadolu Lisesi
Lisans : Uludağ Üniversitesi
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Özel Açı Grup Dersaneleri (Bursa) (2006-2010)
Özel Marmara Grup Dersanesi (Bursa) (2011-2012)
Özel İlgüneş Anadolu Lisesi (Bursa) (2012-2014)
Özel Bursa Marmara Akçan Anadolu Lisesi (Bursa) (2014-2015)
Selahattin Eyyubi M.T.A.L.(Yüksekova) (2015-2016)
Milas Selimiye Timuçin Biliktan Ç.P.A.L. (2016-2018)
Bodrum Mumcular Sitare Özkan Ç.P.A.L. (2018-)

İletişim (e-posta) :

Yayınları :

Arslan, K., Aydın, Y., Bulca B., (2021). General rotational ξ -surfaces in Euclidean spaces, *Turk. J. Math.* 45: 1287–1299, doi:10.3906/mat-2006-93.
Arslan, K., Aydın, Y., Demirbaş, E., Yazla, A. (2018). Euclidean curves with incompressible canonical vector field, *Adıyaman University J. of Sci.*, 8(2), 70-82.
Arslan, K., Aydın, Y., Bulca B., (2021, July 12-13). General rotational surfaces in Euclidean spaces, 18th International Geometry Symposium, Malatya. <http://18geosem.inonu.edu.tr>, Malatya-TÜRKİYE.
Arslan, K., Aydın, Y., Demirbaş, E., Yazla, A. (2018, July 4-7). *Euclidean Curves with Incompressible Canonical Vector Fields*, 16th International Geometry Symposium, Manisa Celal Bayar University, Manisa-TÜRKİYE.
Arslan, K., Aydın, Y., Öztürk. G., Hassan, U. (2009). Biminimal curves in Euclidean spaces, *Int. Elect. J. of Geom.* 2(2), 46-52.
Aydın, Y., Arslan, K., Bulca, B. (2022, 27-30 Haziran). *Rotational self-shrinkers* in Euclidean spaces. 19. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Edirne-TÜRKİYE.