T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIK GRUPLAR VE HİPERBOLİK GEOMETRİ

OSMAN AVCIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2008

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIK GRUPLAR VE HİPERBOLİK GEOMETRİ

OSMAN AVCIOĞLU

Doç.Dr. OSMAN BİZİM
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2008

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIK GRUPLAR VE HİPERBOLİK GEOMETRİ

OSMAN AVCIOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2008

Bu Tez ..../...../200... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Osman BİZİM ……………………….. ……………………
Danışman

Ö Z E T

Bu çalışmada hiperbolik geometride konikler incelenmiş ve bunun için üst yarı düzlem modeli seçilmiştir. İnceleme iki bölümde gerçekleştirilmiştir.

Birinci bölümde ikinci bölüm için hazırlık yapılmıştır.

İkinci bölümde hiperbolik konikler incelenmiştir:

İlk kısımda hiperbolik çemberin tanımı yapılmış, ***U*** da her hiperbolik çemberin bir Öklid çemberi, her Öklid çemberinin de bir hiperbolik çember olduğu ispatlanmıştır. İkinci kısımda hiperbolik elipsin ve yardımcı elemanlarının (odakları, *merkezi*, *odak uzaklığı*, *asal ekseni*, *yedek ekseni*) tanımı yapılmış, hiperbolik elipsin genel denklemi verilmiştir. Merkezi i olup odakları sanal eksen üzerinde bulunan hiperbolik elips (merkezil elips) incelenmiştir. Merkezil elips için elde edilen bulgular Möb(***U***) nun dönüşümleri kullanılarak ***U*** nun herhangi bir elipsine aktarılmış. Üçüncü kısımda hiperbolik hiperbolün ve yardımcı elemanlarının (odakları, *merkezi*, *odak uzaklığı*, *asal ekseni*) tanımı yapılmış, hiperbolik hiperbolün genel denklemi verilmiştir. Merkezi i olup odakları sanal eksen üzerinde bulunan hiperbolik hiperbol (merkezil hiperbol) incelenmiş, merkezil hiperbolün sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar ile asimptotları elde edilmiştir. Daha sonra merkezil hiperbol için elde edilen bu bulgular Möb(***U***) nun dönüşümleri kullanılarak ***U*** nun herhangi bir hiperbolüne aktarılmış, ***U*** nun herhangi bir hiperbolüyle ilgili istenilen tüm bilgilere ulaşılmış ve konuyla ilgili örnekler verilmiştir. Dördüncü kısımda hiperbolik parabolün ve yardımcı elemanlarının (odağı, *doğrultmanı*, *ekseni*, *tepe noktası*) tanımı yapılmış, hiperbolik parabolün genel denklemi verilmiştir. $\lambda \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere odağı $e^{2\lambda}i$, doğrultmanı i den sanal eksene dik olarak geçen hiperbolik doğru (ve böylece ekseni sanal eksen) olan hiperbolik parabol (*merkezil parabol*) incelenmiş, merkezil parabolün sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar elde edilmiştir. Sonra merkezil parabol için elde edilen bu bulgular Möb(***U***) nun dönüşümleri kullanılarak ***U*** nun herhangi bir parabolüne aktarılmış, ***U*** nun herhangi bir parabolü ile ilgili istenilen tüm bilgilere ulaşılmış ve konuyla ilgili örnekler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Hiperbolik Geometri, Hiperbolik Metrik, Konikler, Hiperbolik Konikler.

A B S T R A C T

In this study, the conics of hyperbolic geometry have been studied and for this study upper half plane has been used. The study consists of two chapters:

The first chapter has basic studies for the second chapter.

The second chapter has four sections studying conics of hyperbolic geometry:

In the first section hyperbolic circle is defined and it is proved that every hyperbolic circle is an Euclidean circle and every Euclidean circle is a hyperbolic circle. In the second section hyperbolic ellipse, its focuses, center, focus distance, major axis and minor axis are defined and the general equation of an ellipse is given. The hyperbolic ellipse with center i, of which focuses are on the imaginary axis, the central ellipse, is examined. The findings obtained for central ellipse are transferred to an ordinary ellipse of $\boldsymbol{U}$ using the elements of Möb($\boldsymbol{U}$), so all required knowledge for an ordinary ellipse of $\boldsymbol{U}$ are obtained and related examples are given. In the third section hyperbolic hyperbola, its focuses, center, focus distance and major axis are defined and the general equation of an hyperbola is given. The hyperbolic hyperbola with center i, of which focuses are on the imaginary axis, the central hyperbola, is examined, the points of boundary at infinity and the asymptotes of the central hyperbola are obtained. After that, the findings obtained for the central hyperbola are transferred to an ordinary hyperbola of $\boldsymbol{U}$ using the elements of Möb($\boldsymbol{U}$). In the fourth section hyperbolic parabola, its focus, directrix, axis and vertex are defined and the general equation of a parabola is given. The hyperbolic parabola with the focus $e^{2\lambda}i$ where $\lambda \in \boldsymbol{R}$ and with the hyperbolic line passing through i perpendicular to the imaginary axis as the directrix (so with the imaginary axis as the axis), the central parabola, is examined and the points of boundary at infinity of the central parabola are obtained. After that, the findings obtained for the central parabola are transferred to an ordinary parabola of $\boldsymbol{U}$ using the elements of Möb($\boldsymbol{U}$), so all required knowledge for an ordinary parabola of $\boldsymbol{U}$ are obtained and related examples are given.

Key words: Hyperbolic Geometry, Hyperbolic Metric, Conics, Hyperbolic Conics.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\boldsymbol{C}$	Karmaşık sayılar kümesi, s. 1
$\overline{\boldsymbol{C}}$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi, s.1
H	Hiperbolik, s.2
$\mathrm{Re}(z)$	z karmaşık sayısının reel kısmı, s.3
$\mathrm{Im}(z)$	z karmaşık sayısının sanal kısmı, s. 1
$\boldsymbol{R}$	Reel sayılar kümesi, s. 1
$\boldsymbol{R}^{+}$	Pozitif reel sayılar kümesi, s. 19
$\boldsymbol{R}^{-}$	Negatif reel sayılar kümesi, s. 41
$\overline{\boldsymbol{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi, s. 1
$\boldsymbol{U}$	Üst yarı düzlem, s. 1
$\mathbf{MÖB}^{+}$	Tüm Möbius dönüşümlerinin oluşturduğu grup, s.13
MÖB	Genel Möbius grubu, s. 17
MÖB(*U*)	MÖB ün $\boldsymbol{U}$ yu koruyan dönüşümlerinin kümesi, s. 19
MÖB$(\overline{\boldsymbol{R}})$	MÖB ün $\overline{\boldsymbol{R}}$ yi koruyan dönüşümlerinin kümesi, s. 19
$h(\gamma)$	γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu, s. 24
$\rho(z,w)$	z ile w noktaları arasındaki hiperbolik uzunluk, s. 28
ρ	Hiperbolik metrik, s. 28
$(\boldsymbol{U},\rho)$	$\boldsymbol{U}$ ile ρ nin oluşturduğu metrik uzay, s. 28

ŞEKİLLER DİZİNİ

GİRİŞ

Euclid (M.Ö. 300), '*The Elements*' adlı ünlü kitabında beş aksiyom verdi ve kitabındaki her sonucu bu aksiyomları kullanarak ispatladı. Fakat '*verilen bir L doğrusu ve L üzerinde olmayan bir P noktası için, P den geçen ve L doğrusuna paralel olan yalnız bir* L' *doğrusu vardır*' biçiminde ifade edilen ve '*Parallel Postulate (Paralellik Aksiyomu)*' olarak da bilinen beşinci aksiyom Euclid'i bile tatmin etmedi ve bu aksiyom yaklaşık iki bin yıl boyunca birçok matematikçiyi uğraştırdı.

Konuyla ilgili ilk ciddi çalışmayı 1697 de beşinci aksiyomu yanlış kabul edip çelişkiye ulaşarak ispatlamaya çalışan *Saccheri* (1667–1733) yaptı. Fakat beşinci aksiyomla ilgili problemi gerçekten anlayan ilk matematikçi *Gauss*'dur. Gauss (1777–1855) beşinci aksiyomun doğru olmadığı bir geometri üzerinde çalışmış, fakat o dönemde yanlış anlaşılacağı düşüncesiyle çalışmalarını yayımlamamıştır.

Bir süre sonra 1823 de (matematikçi babasının beşinci aksiyomla uğraşmaması yönündeki tavsiyesine rağmen) *Bolyai* (1802–1860) ve 1829 da *Lobachevsky* (1792–1856) birbirinden bağımsız olarak '*verilen bir doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan geçen ve doğruya paralel olan birden fazla doğrunun bulunduğu yeni bir geometri,* ***hiperbolik geometri***' üzerindeki çalışmalarını yayımladı.

Hiperbolik geometrinin kurucuları sayılan Bolyai ve Lobachevsky'den sonra *Cayley* (1821–1895), *Beltrami* (1835–1900) *Poincare* (1854–1912) ve *Klein* (1849–1925) gibi birçok matematikçi bu yeni geometrinin özellikleri ve modelleri üzerinde çalıştılar. Hiperbolik geometrinin en önemli modelleri Poincare'nin *üst-yarı düzlem modeli* Poincare ve Beltrami'nin *disk modelleri* ve *Klein modeli*'dir. Özellikle Poincare üst-yarı düzlem modelini Euclid geometrisi ile hiperbolik geometrinin mantıksal tutarlılıkta denk olduklarını göstermek için kullandı.

Sonuç olarak hiperbolik geometri Euclid'in ilk dört aksiyomu ile '*verilen bir doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan geçen ve doğruya paralel olan en az iki doğru var-*

dır' biçiminde ifade edilen ve '*hiperbolik aksiyom'* adı verilen beşinci bir aksiyom üzerine kurulan geometri olarak gelişti.

Şimdiye kadar hiperbolik geometride özellikle uzaklık, uzunluk, doğrular ve çokgenler birçok çalışma yapıldı. Fakat hiperbolik geometride konikler üzerinde yeterli ve tatmin edici bir çalışma bulamadık. Bu nedenle çalışmalarımızı hiperbolik geometrinin bu sırlı dünyası üzerinde yaptık ve oldukça ilginç ve güzel sonuçlara ulaştık.

1. BÖLÜM
ÖNBİLGİLER

Bu bölüm çalışmada ele alacağımız hiperbolik konikler için gerekli olacak temel kavramları ve temel teoremleri vereceğimiz bölümdür. Bu bölümdeki teoremler ve sonuçlar daha sonraki bölümlerde kullanılacaklardır. İlk olarak, kendimize hiperbolik model olarak seçtiğimiz üst yarı düzlemi tanıtacağız. Daha sonra bu hiperbolik modeldeki hiperbolik doğrular ve bunların özelliklerini ele alacağız. Hiperbolik geometrinin eşmetri dönüşümleri olan Möbius dönüşümlerinin temel özellikleri de bu bölümde ele alınacaktır.

1.1 ÜST YARI DÜZLEM *U*

Çalışma boyunca, sonsuzu da reel sayılar kümesine ekleyerek elde edilmiş olan *genişletilmiş reel sayılar kümesi*ni $\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ biçiminde göstereceğiz. Bu kümeye çoğu kez *reel sayılar kümesinin kapanışı* da denir. *Karmaşık sayılar kümesinin kapanışı* da $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ biçiminde tanımlanır. Bu kümeye de, küreye topolojik denk olduğundan çoğu kez *Riemann Küresi* denir. Üzerinde çalışacağımız üst yarı düzlem ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

1.1.1 Tanım. Karmaşık sayılar kümesinin

$$\boldsymbol{U} = \{ z \in \boldsymbol{C} : \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

olarak tanımlanan alt kümesine *üst yarı düzlem* denir.(Anderson 1999, p.1)

1.1.2 Tanım. $\boldsymbol{C}$ deki bir Öklid çemberi veya $\boldsymbol{C}$ deki bir Öklid doğrusu ile $\{\infty\}$ kümesinin birleşimine $\overline{\boldsymbol{C}}$ de bir *çember* denir. (Anderson 1999, p. 11)

1.1.3 Teorem. $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin farklı üç noktasından yalnız bir çember geçer.

İspat. Noktaların üçü de karmaşık sayı ve bu sayılar doğrusal değillerse bu üç noktadan yalnız bir Öklid çemberi geçer. Farklı noktaların üçü de karmaşık sayı ve bu noktalar doğrusal ise bu üç noktadan yalnız bir Öklid doğrusu geçer. Noktaların biri ∞ ise diğer iki noktadan yalnız bir Öklid doğrusu geçer. Dolayısıyla $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin farklı üç noktasından yalnız bir çember geçer.

1.1.4 Tanım. $\overline{\boldsymbol{C}}$ deki bir çemberin tümleyeninin çember tarafından ayrılmış iki alt kümesinden birine $\overline{\boldsymbol{C}}$ de bir *disk* denir. (Anderson 1999, p. 16)

Sonuç. Bu tanıma göre üst yarı düzlem $\boldsymbol{U}$, $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin $\overline{\boldsymbol{R}}$ çemberi ile sınırlanmış bir diskidir.

1.1.5 Tanım. $\overline{\boldsymbol{R}}$ ye $\boldsymbol{U}$ nun *sonsuzdaki sınırı*, $\overline{\boldsymbol{R}}$ nin noktalarına da $\boldsymbol{U}$ nun *sonsuzdaki noktaları* denir. (Anderson 1999, p. 16)

1.1.6 Tanım. $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{U}$ ve $\overline{\boldsymbol{X}}$, $\overline{\boldsymbol{C}}$ de $\boldsymbol{X}$ in kapanışı olmak üzere $\boldsymbol{X}$ in *sonsuzdaki sınırı* $\overline{\boldsymbol{X}} \cap \overline{\boldsymbol{R}}$ olarak tanımlanır. (Anderson 1999, p. 16-17)

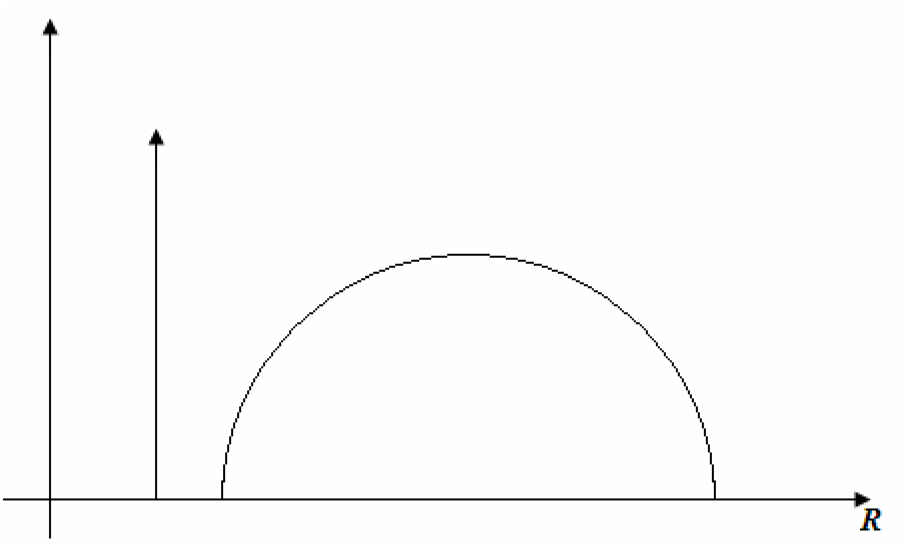
Üst yarı düzlem hiperbolik geometrinin *üst yarı düzlem modeli* olarak bilinen en kullanışlı modelinin temel uzayıdır. Üst yarı düzlem için bazı kaynaklarda $\boldsymbol{H}$ sembolü kullanılsa da kolaylık sağlaması amacıyla bu çalışmada $\boldsymbol{U}$ sembolü kullanılacaktır.

1.2 *U* DA HİPERBOLİK DOĞRULAR

Bu kısımda hiperbolik geometrinin temeli olan hiperbolik doğrular tanımlanacak ve bu doğruların temel özellikleri ele alınacaktır.

1.2.1 Tanım. $\boldsymbol{C}$ deki, reel eksen $\boldsymbol{R}$ ye dik bir Öklid doğrusunun ya da merkezi reel eksen $\boldsymbol{R}$ üzerinde bulunan bir Öklid çemberinin $\boldsymbol{U}$ ile kesişimine bir *hiperbolik doğru* (**H**-doğru) denir. (Anderson 1999, p. 2)

Uyarı 1. Tanım dikkate alınırsa, bir hiperbolik doğru, $\boldsymbol{U}$ ile $\overline{\boldsymbol{C}}$ deki bir çemberin kesişiminden başka bir şey değildir (şekil 1.2.1).



Şekil 1.2.1 $\boldsymbol{U}$ da hiperbolik doğrular

2. Bir l hiperbolik doğrusunun $\overline{\boldsymbol{C}}$ deki bir C çemberi ile $\boldsymbol{U}$ nun arakesiti olduğunu belirtmiştik. Bu C çemberine l hiperbolik doğrusunu taşıyan çember adı verilir. l bir hiperbolik doğru ve C, $\overline{\boldsymbol{C}}$ de l yi taşıyan çember ise tanım 1.1.5 ya göre l nin *sonsuzdaki sınırı* $C \cap \overline{\boldsymbol{R}}$ nin oluşturduğu iki noktadır. Bu noktaların, C nin bir Öklid çemberi olması halinde reel eksen üzerinde iki nokta, C nin bir Öklid doğrusu olması halinde de reel eksen üzerinde bir nokta ile ∞ olduğu açıktır.

1.2.2 Teorem. l bir hiperbolik doğru ise $\alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R}$ ve α ile β ikisi birden sıfır olmayan sayılar olmak üzere l nin denklemi

$$\alpha z\bar{z} + \beta\left(z + \bar{z}\right) + \gamma = 0$$

biçimindedir. Eğer $\alpha \neq 0$ ise bu denklem merkezi reel eksen üzerinde bulunan bir Öklid çemberi, $\alpha = 0$ fakat $\beta \neq 0$ ise bu denklem reel eksene dik bir Öklid doğrusu belirtir. (Anderson 1999, p.12)

İspat. l reel eksen $\boldsymbol{R}$ ye dik bir h Öklid doğrusunun $\boldsymbol{U}$ da kalan kısmı ve $h \cap \boldsymbol{R} = \{a\}$ olsun. Bu durumda l nin denklemi $\mathrm{Re}(z) = a$ yani $\dfrac{z + \bar{z}}{2} = a$ ve buradan

$$z + \bar{z} - 2a = 0$$

elde edilir. Eğer $\alpha, \gamma, \beta \in \boldsymbol{R}$ sayıları $\alpha = 0$, $\beta = 1$ ve $\gamma = -2a$ olarak seçilirse bu denklem $\alpha z\bar{z} + \beta(z + \bar{z}) + \gamma = 0$ biçiminde yazılabilir.

İkinci olarak l, merkezi $c \in \boldsymbol{R}$ ve yarıçapı r birim olan bir Öklid çemberinin $\boldsymbol{U}$ da kalan kısmı olsun. Bu durumda l nin denklemi $|z - c| = r$ yani

$$(z - c) \cdot \overline{(z - c)} = (z - c) \cdot (\bar{z} - c) = r^2$$

ve buradan $z\bar{z} - c \cdot (z + \bar{z}) + c^2 - r^2 = 0$ elde edilir. Eğer $\alpha, \gamma, \beta \in \boldsymbol{R}$ sayıları $\alpha = 1$, $\beta = -c$, $\gamma = c^2 - r^2$ olarak seçilirse denklem $\alpha z\bar{z} + \beta(z + \bar{z}) + \gamma = 0$ halini alır.■

Bu ispat aşağıdaki şekilde de yapılabilir:

İspat 2. Bilindiği gibi $\boldsymbol{C}$ de bir Öklid doğrusunun denklemi, $\beta \cap \boldsymbol{C} = \{0\}$ ve $\gamma \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere $\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ biçiminde olup bu doğrunun eğimi $\dfrac{\mathrm{Re}(\beta)}{\mathrm{Im}(\beta)}$ dır. Böyle bir doğrunun hiperbolik bir doğruyu belirtebilmesi için reel eksen $\boldsymbol{R}$ ye dik olması yani eğiminin tanımsız olması gerekir ki bu durumda $\mathrm{Im}(\beta) = 0$ yani $\beta \cap \boldsymbol{R} = \{0\}$ olmalıdır. Dolayısıyla $\beta = \bar{\beta}$ olduğundan hiperbolik doğrunun denklemi $\alpha z\bar{z} + \beta(z + \bar{z}) + \gamma = 0$ halini alır ($\alpha = 0, \gamma, \beta \in \boldsymbol{R}, \beta \neq 0$).

Ayrıca $\boldsymbol{C}$ de bir Öklid çemberinin denklemi $\alpha, \gamma \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq 0$ ve $\beta \in \boldsymbol{C}$ olmak üzere $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ biçiminde olup merkezi $c = -\dfrac{\bar{\beta}}{\alpha}$ dır. Böyle bir çemberin hiperbolik bir doğru belirtebilmesi için merkezinin reel eksen üzerinde olması yani $c = -\dfrac{\bar{\beta}}{\alpha} \in \boldsymbol{R}$ olması gerekir ki bunun için $\mathrm{Im}(\beta) = 0$ yani $\beta \in \boldsymbol{R}$ olmalıdır. Böylece $\beta = \bar{\beta}$ olup merkezi reel eksende bulunan bir Öklid çemberi üzerindeki bir hiperbolik doğrunun denklemi $\alpha z\bar{z} + \beta(z + \bar{z}) + \gamma = 0$ olur ($\alpha, \gamma, \beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq 0$).■

Öklid geometrisinde farklı iki noktadan yalnız bir doğrunun geçtiğini biliyoruz. Aşağıdaki önerme aynı özelliğin hiperbolik geometride de geçerli olduğunu göstermektedir.

1.2.3 Önerme. ***U*** nun farklı iki noktasından yalnız ve yalnız bir hiperbolik doğru geçer.

İspat. $z_1, z_2 \in \boldsymbol{U}$ ve $z_1 \neq z_2$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

1. Hal. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_1)$ yani $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$ doğrusu ile ***U*** nun kesişimi z_1 ve z_2 den geçen hiperbolik doğrudur (Bu halde z_1 ve z_2 den geçen hiperbolik doğru z_1 ve z_2 den geçen Öklid doğrusunun ***U*** da kalan kısmı olup bu noktalardan geçen Öklid doğrusu bir tektir).

2. Hal. $\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$ olsun. Bu durumda z_1 ile z_2 yi birleştiren Öklid doğru parçasının orta dikmesi ***R*** ye paralel olmadığından ***R*** yi bir noktada keser. Bu noktaya c diyelim. c noktası z_1 ile z_2 yi birleştiren Öklid doğru parçasının orta dikmesi üzerinde bulunduğundan z_1 ve z_2 ye eşit uzaklıktadır, yani $|c - z_1| = |c - z_2|$ dir. Merkezi c ve yarıçapı $r = |c - z_1| = |c - z_2|$ birim olan bir tek Öklid çemberi bulunduğundan bu çemberin ***U*** ile kesişimi z_1 ve z_2 den geçen tek hiperbolik doğrudur.■ (Anderson 1999, p. 3)

Uyarı. $\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$ olduğundan bu noktalardan geçen hiperbolik doğruyu z_1 ve z_2 noktalarına bağlı olarak bulabiliriz:

z_1 ve z_2 yi birleştiren Öklid doğru parçasının orta noktası $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ ve eğimi $m = \dfrac{\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)}{\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)}$ olduğundan bu doğru parçasının orta dikmesi, K, $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ noktasından geçip eğimi $-\dfrac{1}{m} = \dfrac{\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Re}(z_1)}{\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)}$ ve böylece denklemi

$$y - \frac{1}{2}\left(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\right) = \frac{\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Re}(z_1)}{\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)}\left(x - \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)\right)\right)$$

olan bir Öklid doğrusudur. Böylece z_1 ve z_2 den geçen Öklid çemberi C nin merkezi c, K nın ***R*** ile kesişim noktasıdır. Yani yukarıdaki denklemde $y = 0$ alınırsa C nin merkezi

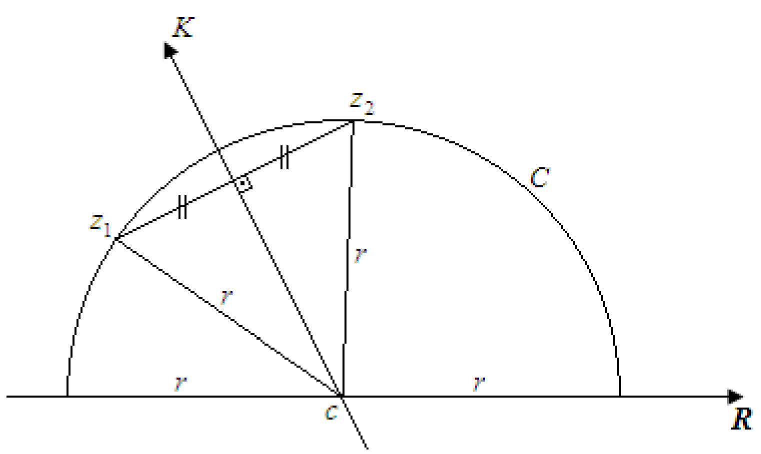
$$x = c = \left[-\frac{1}{2}\left(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\right)\frac{\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)}{\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Re}(z_1)}\right] + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}^2(z_2) - \mathrm{Re}^2(z_1) + \mathrm{Im}^2(z_2) - \mathrm{Im}^2(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Re}(z_1)} = \frac{1}{2}\frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)}$$

ve yarıçapı

$$r = |c - z_1| = |c - z_2|$$

birim olarak bulunur (şekil 1.2.2). (Anderson 1999, p. 4)



Şekil 1.2.2 z_1 ve z_2 den geçen hiperbolik doğru

1.2.4 Örnekler 1. $z_1 = 2 + i$ ve $z_2 = 2 + 2i$ noktalarından geçen hiperbolik doğrunun denklemi, $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ olduğundan $\dfrac{z+\bar{z}}{2} = 2$ ve buradan $z + \bar{z} - 4 = 0$ elde edilir.

2. $z_1 = 2 + i$ ve $z_2 = 3 + 2i$ noktalarından geçen hiperbolik doğrunun denklemini bulalım: $\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$ dir. Dolayısıyla hiperbolik doğrumuzun üzerinde bulunduğu Öklid çemberinin merkezi ve yarıçapı

$$c = \frac{1}{2}\frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)} = 4, \; r = |c - z_1| = \sqrt{5}$$

birim olarak hesaplanır. Böylece doğrumuzun denklemi $|c - z| = r$ eşitliğinden

$$z\bar{z} - 4(z + \bar{z}) + 11 = 0$$

olarak elde edilir.

Gösterim. Pozitif sanal ekseni i noktasında dik olarak kesen ve sonsuzdaki sınırı 1 ve -1 olan hiperbolik doğruyu bu çalışmanın sonuna kadar sıkça kullanacağız ve bu doğruyu l_0 ile göstereceğiz. Dikkat edilirse bu hiperbolik doğru birim çemberin $\boldsymbol{U}$ da kalan kısmından başka bir şey değildir.

1.2.5 Tanım. Bir hiperbolik doğrunun iki noktası ile bu iki nokta arasında kalan kısmına bir *hiperbolik doğru parçası* denir.

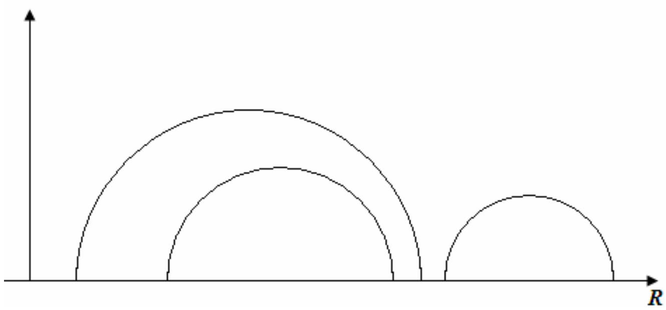
Sonuç. ***U*** nun farklı iki noktasından bir ve yalnız bir hiperbolik doğru geçtiğinden ***U*** nun farklı iki noktasını birleştiren bir ve yalnız bir hiperbolik doğru parçası vardır.

1.3 *U* DA PARALEL HİPERBOLİK DOĞRULAR

Bu kısımda hiperbolik geometri ile Öklid geometrisi arasındaki en büyük farklılık olan paralellik kavramı üzerinde duracağız. Bilindiği gibi Öklid geometrisinde paralel iki doğru arasındaki uzaklık sabittir. Ayrıca Öklid geometrisinde bir l doğrusunun dışındaki bir P noktasından geçip l ye paralel olan bir tek doğru vardır. Buna karşılık hiperbolik geometride paralellik kavramı çok daha farklıdır:

1.3.1 Tanım. Ayrık olan iki hiperbolik doğruya *paralel doğrular*dır denir (şekil 1.3.1). (Anderson 1999, p. 4)

Uyarı 1. Tanımdan da görüldüğü gibi ***U*** da ortak noktası olmayan hiperbolik doğrular paraleldir.
2. Aşağıdaki teorem Öklid geometrisi ile hiperbolik geometri arasındaki en büyük farkı ortaya koymaktadır:

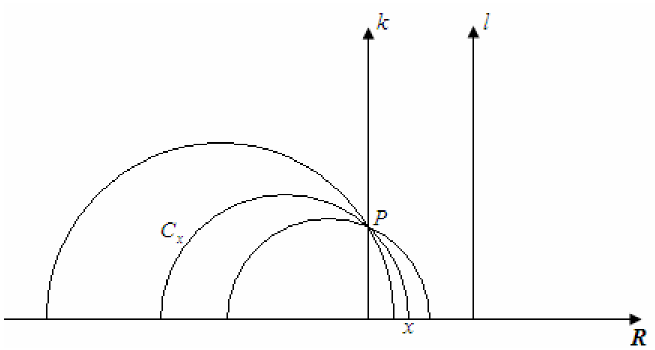


Şekil 1.3.1 ***U*** da paralel hiperbolik doğrular

1.3.2 Teorem. Hiperbolik geometride bir l hiperbolik doğrusunun üzerinde olmayan bir P noktasından geçen ve l ye paralel olan sonsuz çoklukta farklı hiperbolik doğru vardır.

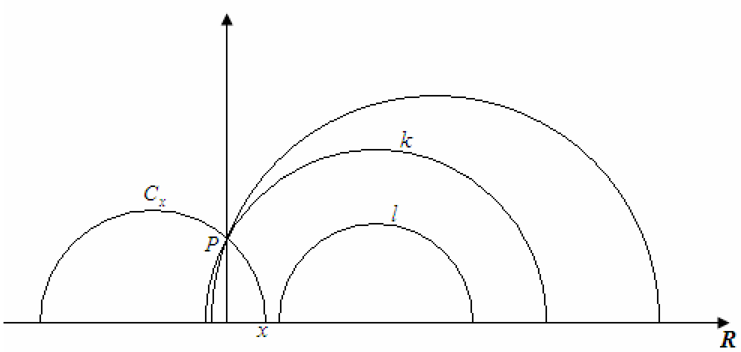
İspat. İki farklı durum söz konusudur:

1. Hal. l hiperbolik doğrusunun bir L Öklid doğrusu üzerinde olduğunu kabul edelim. P noktası L nin üzerinde olmadığından P den geçip L ye Öklid geometrisince paralel olan bir K Öklid doğrusu vardır. Öyle ise $k = \boldsymbol{U} \cap K$, l ye paralel bir hiperbolik doğrudur. Diğer taraftan reel eksen $\boldsymbol{R}$ üzerinde K ve L arasındaki her x noktası için merkezi $\boldsymbol{R}$ de bulunup x ve P den geçen Öklid çemberi C_x, L den ayrıktır. Öyle ise $\boldsymbol{U} \cap C_x$ hiperbolik doğruları l ye paraleldirler. Bu şekilde sonsuz çoklukta $x \in \boldsymbol{R}$ bulunduğundan P den geçip l ye paralel olan sonsuz çoklukta hiperbolik doğru vardır (şekil 1.3.2).



Şekil 1.3.2 P den geçip l ye paralel olan hiperbolik doğrular

2. Hal. l hiperbolik doğrusunun bir C Öklid çemberi üzerinde olduğunu kabul edelim. $\hat{C}$, merkezi C ninki ile aynı olup P den geçen Öklid çemberi olsun. Böylece $k = \boldsymbol{U} \cap \hat{C}$ hiperbolik doğrusu l ye paraleldir. Diğer taraftan reel eksen $\boldsymbol{R}$ üzerinde C ve $\hat{C}$ arasındaki her x noktası için merkezi $\boldsymbol{R}$ de bulunup x ve P den geçen Öklid çemberi C_x, C den ayrık olup $\boldsymbol{U} \cap C_x$ hiperbolik doğruları l ye paraleldirler. Bu şekilde sonsuz çoklukta $x \in \boldsymbol{R}$ bulunduğundan P den geçip l ye paralel olan sonsuz çoklukta hiperbolik doğru vardır (şekil 1.3.3). ■ (Anderson 1999, p. 5)



Şekil 1.3.3 *P* den geçip *l* ye paralel olan hiperbolik doğrular

Acaba verilen iki hiperbolik doğrunun paralel olup olmadığını nasıl anlayabiliriz. Bu sorunun cevabını aşağıdaki teorem yardımıyla verebiliriz.

1.3.3 Önerme 1. Denklemleri $\beta(z+\bar{z})+\gamma=0$ biçiminde olan (yani reel eksen ***R*** ye dik Öklid doğruları üzerinde bulunan) farklı iki hiperbolik doğru paraleldir.

2. Denklemi $\beta_1(z+\bar{z})+\gamma_1=0$ biçiminde olan hiperbolik doğru ile denklemi

$$\alpha z\bar{z}+\beta(z+\bar{z})+\gamma=0$$

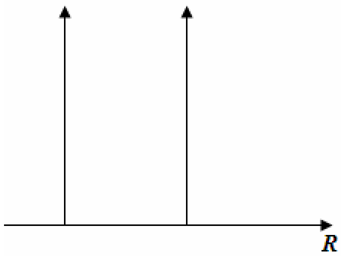
olup merkezi $c=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ve yarıçapı $r=\dfrac{1}{|\alpha|}\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$ birim olan Öklid çemberi üzerinde bulunan hiperbolik doğru paraleldir ancak ve ancak $-\dfrac{\gamma_1}{2\beta_1}\leq c-r$ ya da $c+r\leq-\dfrac{\gamma_1}{2\beta_1}$.

3. Denklemleri $\alpha_1 z\bar{z}+\beta_1(z+\bar{z})+\gamma_1=0$ ve $\alpha_2 z\bar{z}+\beta_2(z+\bar{z})+\gamma_2=0$ olup merkezleri ve yarıçapları sırasıyla

$$c_1=-\frac{\beta_1}{\alpha_1},\; c_2=-\frac{\beta_2}{\alpha_2} \text{ ve } r_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\sqrt{{\beta_1}^2-\alpha_1\gamma_1},\; r_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\sqrt{{\beta_2}^2-\alpha_2\gamma_2}$$

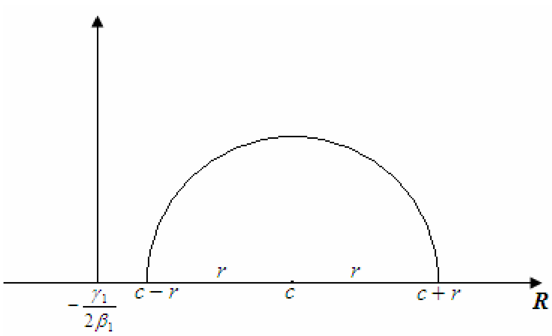
birim olan Öklid çemberleri üzerinde bulunan hiperbolik doğrular paraleldir ancak ve ancak $|c_1-c_2|\leq|r_1-r_2|$ ya da $r_1+r_2\leq|c_1-c_2|$.

İspat. 1. Denklemleri $\beta(z+\bar{z})+\gamma=0$ biçiminde olan farklı iki hiperbolik doğru reel eksene dik farklı iki Öklid doğrusu üzerinde bulunduğundan ayrık olup paraleldir (şekil 1.3.4).

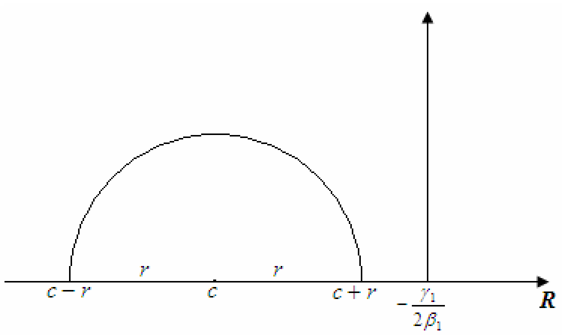


Şekil 1.3.4 Paralel hiperbolik doğrular

2. Denklemi $\beta_1(z+\bar{z})+\gamma_1=0$ biçiminde olan bir l hiperbolik doğrusu reel eksene dik olan bir L Öklid doğrusunun $\boldsymbol{U}$ ile kesişimidir. Ayrıca $\beta_1(z+\bar{z})+\gamma_1=0$ eşitliğinden $\beta_1 2\,\mathrm{Re}(z)+\gamma_1=0$ ve böylece $\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{\gamma_1}{2\beta_1}$ noktasının L nin $\boldsymbol{R}$ ile kesişim noktası olduğu elde edilir. Diğer taraftan denklemi $\alpha z\bar{z}+\beta(z+\bar{z})+\gamma=0$ olup merkezi $c=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ve yarıçapı $r=\dfrac{1}{|\alpha|}\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}$ birim olan Öklid çemberinin belirttiği hiperbolik doğru k olsun. Bu durumda k hiperbolik doğrusu l ye paraleldir ancak ve ancak $-\dfrac{\gamma_1}{2\beta_1}\leq c-r$ ya da $c+r\leq-\dfrac{\gamma_1}{2\beta_1}$ (şekil 1.3.5 ve 1.3.6).



Şekil 1.3.5 Paralel hiperbolik doğrular



Şekil 1.3.6 Paralel hiperbolik doğrular

3. $c_1<c_2$ olsun. Bu durumda iki hiperbolik doğru bir noktada kesişirler ancak ve ancak

$$c_1-r_1<c_2-r_2<c_1+r_1<c_2+r_2 \Leftrightarrow c_1-r_1<c_2-r_2,\; c_1+r_1<c_2+r_2,\; c_2-r_2<c_1+r_1$$

$$\Leftrightarrow r_2-r_1<c_2-c_1,\; r_1-r_2<c_2-c_1,\; c_2-c_1<r_1+r_2$$

$$\Leftrightarrow |r_1 - r_2| < c_2 - c_1 \text{ ve } c_2 - c_1 < r_1 + r_2$$

$$\Leftrightarrow |r_1 - r_2| < c_2 - c_1 < r_1 + r_2 \qquad (1)$$

Eğer $c_2 < c_1$ ise benzer şekilde iki hiperbolik doğru bir noktada kesişirler ancak ve ancak

$$|r_1 - r_2| < c_1 - c_2 < r_1 + r_2 \qquad (2)$$

Öyle ise (1) ve (2) den iki hiperbolik doğru bir noktada kesişirler ancak ve ancak

$$|r_1 - r_2| < |c_1 - c_2| < r_1 + r_2$$

Buradan iki hiperbolik doğru ayrıktır, yani paraleldir ancak ve ancak

$$|c_1 - c_2| \le |r_1 - r_2| \text{ ya da } r_1 + r_2 \le |c_1 - c_2|$$

.■

1.3.4 Örnekler 1. Denklemleri, sırasıyla $2z\bar{z} - 7(z + \bar{z}) + 12 = 0$, $z\bar{z} - 3(z + \bar{z}) + 8 = 0$ ve $z\bar{z} - 6(z + \bar{z}) + 32 = 0$ olan *l*, *k* ve *d* hiperbolik doğrularını ele alalım:

l, merkezi $c_1 = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$ ve yarıçapı $r_1 = \frac{1}{|2|}\sqrt{(-7)^2 - 2\cdot 12} = \frac{5}{2}$ birim olan Öklid çemberi; *k*, merkezi $c_2 = -\frac{-3}{1} = 3$ ve yarıçapı $r_2 = \frac{1}{|1|}\sqrt{(-3)^2 - 1\cdot 8} = 1$ birim olan Öklid çemberi; *d*, merkezi $c_3 = -\frac{-6}{1} = 6$ ve yarıçapı $r_3 = \frac{1}{|1|}\sqrt{(-6)^2 - 1\cdot 32} = 2$ birim olan Öklid çemberi üzerindedir.

$$|c_1 - c_2| = \left|\frac{7}{2} - 3\right| = \frac{1}{2},\ |r_1 - r_2| = \left|\frac{5}{2} - 1\right| = \frac{3}{2} \text{ ve } |c_1 - c_2| < |r_1 - r_2|$$

olduğundan *l* ile *k* paraleldir.

$$|c_1 - c_3| = \left|\frac{7}{2} - 6\right| = \frac{5}{2},\ |r_1 - r_3| = \left|\frac{5}{2} - 2\right| = \frac{1}{2},\ r_1 + r_2 = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

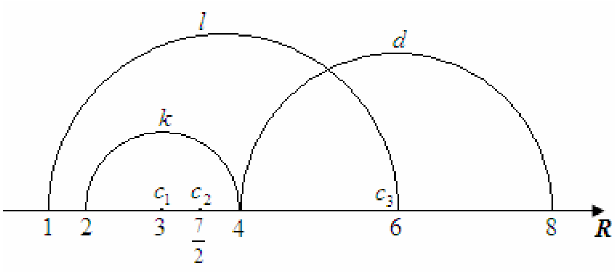
ve

$$|r_1 - r_3| < |c_1 - c_3| < r_1 + r_3$$

olduğundan *l* ile *d* paralel değildir.

$$|c_2 - c_3| = |3 - 6| = 3,\ r_2 + r_3 = 1 + 2 = 3 \text{ ve } r_2 + r_3 = |c_2 - c_3|$$

olduğundan *k* ile *d* paraleldir (şekil 1.3.7).



Şekil 1.3.7 Kesişen ve paralel hiperbolik doğrular

2. Denklemleri, sırasıyla $z+\bar{z}+2=0$, $z\bar{z}-4=0$ ve $9z\bar{z}-30(z+\bar{z})+91=0$ olan *l*, *k* ve *d* hiperbolik doğrularını inceleyelim:

l, $a=0$ olduğundan, reel ekseni $\operatorname{Re}(z)=-\dfrac{\gamma_1}{2\beta_1}=\dfrac{-2}{2\cdot 1}=-1$ noktasında dik kesen Öklid doğrusu; *k*, merkezi $c_1=-\dfrac{0}{1}=0$ ve yarıçapı $r_1=\dfrac{1}{|1|}\sqrt{0^2-1\cdot(-4)}=2$ birim olan Öklid çemberi; *d*, merkezi $c_2=-\dfrac{-30}{9}=\dfrac{10}{3}$ ve yarıçapı $r_2=\dfrac{1}{|9|}\sqrt{(-30)^2-9\cdot 91}=1$ birim olan Öklid çemberi üzerindedir.

$$c_1-r_1<-1<c_1+r_1$$

olduğundan *l* ile *k* paralel değildir.

$$-1<c_1-r_1$$

olduğundan *l* ile *d* paraleldir.

$$r_1+r_2<|c_1-c_2|$$

olduğundan *k* ile *d* paraleldir.

1.4 MÖBİUS ($MÖB^+$) VE GENEL MÖBİUS DÖNÜŞÜMLERİ GRUBU (MÖB)

Bu kısımda, hiperbolik geometrinin eşmetri dönüşümleri (iki nokta arasındaki uzaklıkları koruyan dönüşümler) olan Möbius dönüşümlerini ve bunların oluşturduğu grupları tanımlayacağız ve bu dönüşümler ile grupların özelliklerini ele alacağız.

1.4.1 Tanım. $a,b,c,d \in \mathbf{C}$ ve $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ olmak üzere

$$T : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}} \,, T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçiminde tanımlanan T fonksiyonuna bir *Möbius dönüşümü* denir. (Anderson 1999, p. 22)

Uyarı 1. Bu dönüşüm için

$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$, c \neq 0$ için

$$T(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

ve $c = 0$ için

$$T(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = \infty$$

olarak tanımlıdır. (Anderson 1999, p. 23)

2. Tüm Möbius dönüşümlerinin oluşturduğu küme Möb^+ ile gösterilir. Kolayca, iki Möbius dönüşümünün bileşkesinin yine bir Möbius dönüşümü olduğu görülebilir. Ayrıca bileşke işlemine göre birim dönüşüm $I(z) = z$ olmak üzere $I \in \text{Möb}^+$ dir. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ olmak üzere $T \in \text{Möb}^+$ dönüşümünün bileşke işlemine göre tersi $T^{-1}(z) = \dfrac{-dz+b}{cz-a}$ dir ve $T^{-1} \in \text{Möb}^+$ dır. Bunlara bileşke işleminin birleşme özelliği de eklenince Möb^+ nın bir grup olduğu sonucuna varılır. (Anderson 1999, p. 23)

1.4.2 Tanım. Bir $T \in \text{Möb}^+$ için $T(z) = z$ eşitliğini gerçekleyen $z \in \overline{\mathbf{C}}$ noktasına *T nin bir sabit noktası* denir. (Anderson 1999, p. 25)

1.4.3 Örnek. $T(z) = \dfrac{3z-2}{z+1}$ dönüşümünün sabit noktalarını bulalım: $T(z) = \dfrac{3z-2}{z+1} = z$

eşitliğinden $z^2 + z = 3z - 2$ ve böylece $z^2 - 2z + 2 = 0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin kökleri olan

$$z = 1 \pm i$$

noktaları verilen dönüşümün sabit noktalarıdır. Gerçekten de

$$T(1 \pm i) = \frac{3(1 \pm i) - 2}{(1 \pm i) + 1} = \frac{1 \pm 3i}{2 \pm i} = \frac{2 \pm 5i - 3i^2}{4 - i^2} = \frac{5 \pm 5i}{5} = 1 \pm i$$

dir.

1.4.4 Teorem. Möb$^+$ nın birim dönüşümden farklı bir dönüşümünün $\overline{\boldsymbol{C}}$ de en fazla iki sabit noktası vardır.

İspat. $T \in$ Möb$^+$ birim dönüşümden farklı bir dönüşüm olsun. İki durum söz konusudur:

1. Hal. $c = 0$ ise $T(\infty) = \infty$ dır, yani sabit noktalardan biri ∞ dur. Diğer sabit nokta(lar) için $T(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = z$ denklemi çözülmelidir. $\frac{a}{d} = 1$ için T birim dönüşüm olmadığından $\frac{b}{d} \neq 0$ olup denklemin çözüm kümesi boş kümedir, yani ∞ dan başka sabit nokta yoktur. $\frac{a}{d} \neq 1$ için yapılan çözümden ise ∞ dan başka tek sabit noktanın $z = \frac{b}{d - a}$ olduğu görülür. Demek ki $c = 0$ durumunda T nin bir ya da iki sabit noktası vardır.

2. Hal. $c \neq 0$ ise $T(\infty) \neq \infty$ olup ∞ sabit nokta değildir. Bu durumda $T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z$ denklemi düzenlenerek elde edilen ikinci derece denklem çözüldüğünde T nin bir ya da iki sabit noktası olduğu görülür.■ (Anderson 1999, p. 25)

Sonuç: $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin en az üç noktasını sabit bırakan bir $T \in$ Möb$^+$ dönüşümü birim dönüşümdür.

1.4.5 Teorem. z_1, z_2, z_3, $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin farklı üç elemanı olmak üzere $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ ve $T(z_3) = \infty$ olacak biçimde yalnız ve yalnız bir $T \in$ Möb$^+$ vardır.

İspat. İlk olarak bu farklı üç noktanın birer karmaşık sayı, yani $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$ olduğunu varsayalım ve

$$T(z)=\frac{(z-z_1)\cdot(z_2-z_3)}{(z-z_3)\cdot(z_2-z_1)}$$

dönüşümünü dikkate alalım. Bu durumda

$$T(z)=\frac{(z_2-z_3)\cdot z-z_1\cdot(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)\cdot z-z_3\cdot(z_2-z_1)} \text{ ve } ad-bc=(z_2-z_3)\cdot(z_2-z_1)\cdot(z_1-z_3)\neq 0$$

olduğundan $T\in \text{Möb}^+$ dir ve üstelik $T(z_1)=0$, $T(z_2)=1$ ve $T(z_3)=\infty$ dir.

Şimdi de bu farklı noktalardan bir tanesinin, örneğin $z_1=\infty$ ve diğer iki noktanın karmaşık sayı, yani $z_2,z_3\neq\infty$ olduğunu varsayalım ve $T(z)=\dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}$ dönüşümünü, $z_2=\infty$ ve $z_1,z_3\neq\infty$ için $T(z)=\dfrac{z-z_1}{z-z_3}$, $z_3=\infty$ ve $z_1,z_2\neq\infty$ için $T(z)=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ alalım. Eğer $T(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}T(z)$ olarak hesaplanırsa z_1,z_2,z_3 den birinin ∞ olduğu her durumda $T\in \text{Möb}^+$, $T(z_1)=0$, $T(z_2)=1$ ve $T(z_3)=\infty$ olduğu görülür.

Diğer taraftan $S\in Möb^+$, $S(z_1)=0$, $S(z_2)=1$ ve $S(z_3)=\infty$ eşitliklerini sağlayan başka bir dönüşüm ise $S\circ T^{-1}\in \text{Möb}^+$ olup $(S\circ T^{-1})(0)=0$, $(S\circ T^{-1})(1)=1$ ve $(S\circ T^{-1})(\infty)=\infty$ dir. Buna göre $S\circ T^{-1}$ dönüşümü $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin farklı üç noktasını sabit bıraktığından birim dönüşümdür. Böylece $S=T$ dir, yani T verilen koşulları sağlayan tek dönüşümdür.■ (Anderson 1999, p. 25-26)

1.4.6 Teorem. (z_1,z_2,z_3) ve (w_1,w_2,w_3), $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin her biri farklı elemanlardan oluşan farklı iki sıralı üçlüsü ise $T(z_1)=w_1$, $T(z_2)=w_2$ ve $T(z_3)=w_3$ olacak biçimde yalnız ve yalnız bir $T\in \text{Möb}^+$ vardır.

İspat. Teorem 1.4.5 e göre (z_1,z_2,z_3) ve (w_1,w_2,w_3) ü sırasıyla $(0,1,\infty)$ a resmeden yalnızca birer tane Möbius dönüşümü vardır. Bu dönüşümler sırasıyla $V,W\in \text{Möb}^+$ olsun. Buna göre $T=W^{-1}\circ V\in \text{Möb}^+$ için $T(z_1)=w_1$, $T(z_2)=w_2$ ve $T(z_3)=w_3$ olup V ile W bir tek olduklarından T de bir tektir.■ (Anderson 1999, p. 25-26)

1.4.7 Örnek. $(3,2+i,i)$ üçlüsünü sırasıyla $(0,1,\infty)$ a resmeden dönüşüm

$$V(z)=\frac{2z-6}{(-1+i)\cdot z+1+i}$$

,$(-i,1-i,2)$ üçlüsünü sırasıyla $(0,1,\infty)$ a resmeden dönüşüm

$$W(z)=\frac{(-1-i)\cdot z+1-i}{z-2}$$

olup $W^{-1}(z)=\dfrac{2z+1-i}{z+1+i}$ ve böylece $(3,2+i,i)$ üçlüsünü sırasıyla $(-i,1-i,2)$ üçlüsüne resmeden dönüşüm

$$T(z)=\left(W^{-1}\circ V\right)(z)=\frac{2\cdot\left(\dfrac{2z-6}{(-1+i)\cdot z+1+i}\right)+1-i}{\dfrac{2z-6}{(-1+i)\cdot z+1+i}+1+i}=\frac{(2+i)\cdot z-5}{-3+i}$$

olarak elde edilir.

1.4.8 Tanım. *G* bir grup ve *X* bir küme olmak üzere her $x, y \in X$ için $g(x) = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa *G* grubuna *X üzerine geçişli olarak etki ediyor* denir. Eğer $x, y \in X$ için $g(x) = y$ olacak şekilde yalnız ve yalnız bir tek $g \in G$ varsa *G* grubuna *X üzerine tek şekilde geçişli olarak etki ediyor* denir. (Anderson 1999, p. 27-28)

Sonuç. Teorem 1.4.6 ya göre Möb^+, $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin farklı noktalarından oluşan sıralı üçlülerinin kümesi üzerine tek şekilde geçişli olarak etki eder. (Anderson 1999, p. 28)

1.4.9 Teorem. Möb^+, $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin çemberlerinin kümesi üzerine geçişli olarak etki eder.

İspat. C_1 ve C_2, $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin herhangi iki çemberi olsun. C_1 ve C_2 üzerinde üçer tane farklı nokta alalım. Yukarıdaki sonuca göre C_1 üzerindeki noktaları C_2 üzerindeki noktalara resmeden bir $T \in \text{Möb}^+$ dönüşümü vardır. C_1 üzerindeki üç noktadan geçen tek çember C_1 ve C_2 üzerindeki üç noktadan geçen tek çember C_2 olduğundan *T* dönüşümü C_1 i C_2 ye resmeder (C_1 ve C_2 üzerindeki üçer nokta bir tek şekilde belirlenemediğinden C_1 i C_2 ye resmeden dönüşüm sayısı da birden fazladır). ■ (Anderson 1999, p. 28)

Not. $ad-bc$ ye *T* nin *determinantı*, yani $\det(T)=ad-bc$, denirse det(*T*) nin iyi tanımlı olmadığı görülür. Örneğin $T(z)=\dfrac{2z+1}{z-1}=\dfrac{4z+2}{2z-2}$ olduğundan *T* için farklı iki $\det(T)$ hesaplanacaktır. Bu karışıklığı gidermek için bundan sonra her $T\in$ Möb$^+$ için $\det(T)=1$ olarak alınacaktır. Çünkü *T* nin her terimi $\alpha^2=\det(T)$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha\in\boldsymbol{C}$ ile bölündüğünde elde edilen yeni biçiminin determinantı 1 olup *T* nin her $z\in\boldsymbol{C}$ için değeri aynı kalır. (Anderson 1999, p. 37)

1.4.10 Örnek. $T(z)=\dfrac{2z+1}{z-1}$ için $\det(T)=-3$ iken, $\alpha=\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$ seçildiğinde

$$T(z)=\frac{\dfrac{2z}{\sqrt{3}i}+\dfrac{1}{\sqrt{3}i}}{\dfrac{z}{\sqrt{3}i}-\dfrac{1}{\sqrt{3}i}}$$

ve böylece $\det(T)=1$ olur.

1.4.11 Tanım. Her $z\in\boldsymbol{C}$ için $E:\overline{\boldsymbol{C}}\to\overline{\boldsymbol{C}}$, $E(z)=\bar{z}$ ve $E(\infty)=\infty$ olmak üzere Möb$^+$ ve *E* tarafından üretilen gruba *genel Möbius grubu* denir ve bu grup Möb ile gösterilir. (Anderson 1999, p. 41)

1.4.12 Teorem. $a,b,c,d\in\boldsymbol{C}$ ve $ad-bc=1$ olmak üzere Möb' ün her bir elemanı ya

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

ya da

$$T(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

biçimindedir.

İspat. Bir $T\in$Möb için Möb' ün tanımına göre aşağıdaki dört durumdan en az biri doğrudur:

1. $T\in$ Möb$^+$ olabilir. Bu durumda *T*, Möb$^+$ nın tanımı gereği $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ biçiminde olup $a,b,c,d\in\boldsymbol{C}$ ve $ad-bc=1$ dir.

2. T bir $V(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\in$ Möb$^+$ ile $E(z)=\overline{z}$ nin bileşkesi yani

$$T(z)=(V\circ E)(z)=\frac{a\cdot\overline{z}+b}{c\cdot\overline{z}+d}$$

biçiminde olabilir. Bu durumda $V\in$ Möb$^+$ olduğundan $a,b,c,d\in\mathbf{C}$ ve $ad-bc=1$ dir.

3. T, $V(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\in$ Möb$^+$ ile **2.** deki biçimde elde edilmiş bir Möb nin $W(z)=\dfrac{p\overline{z}+q}{r\overline{z}+s}$ dönüşümünün bileşkesi yani

$$T(z)=(V\circ W)(z)=\frac{(ap+br)\overline{z}+aq+bs}{(cp+dr)\overline{z}+cq+ds}$$

biçiminde olabilir. Bu durumda

$$(ap+br)(cq+ds)-(cp+dr)(aq+bs)=(ad-bc)(ps-qr)=1$$

dir.

4. T, **3.** deki biçimde elde edilmiş bir $V(z)=\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\in$Möb ile yine **3.** deki biçimde elde edilmiş bir $W(z)=\dfrac{p\overline{z}+q}{r\overline{z}+s}\in$Möb dönüşümünün bileşkesi yani

$$T(z)=(V\circ W)(z)=\frac{(a\overline{p}+b\overline{r})\overline{z}+a\overline{q}+b\overline{s}}{(c\overline{p}+d\overline{r})\overline{z}+c\overline{q}+d\overline{s}}$$

biçiminde olabilir. Bu durumda da

$$\begin{aligned}(a\overline{p}+b\overline{r})(c\overline{q}+d\overline{s})-(c\overline{p}+d\overline{r})(a\overline{q}+b\overline{s})&=(ad-bc)(\overline{p}\overline{s}-\overline{q}\overline{r})\\&=(ad-bc)\overline{(ps-qr)}=1\cdot\overline{1}=1\end{aligned}$$

dir.■ (Anderson 1999, p. 42)

1.4.13 Teorem. C, $\overline{\mathbf{C}}$ nin herhangi bir çemberi ve T, Möb'ün herhangi bir dönüşümü ise $T(C)$ de $\overline{\mathbf{C}}$ nin bir çemberidir, yani Möb'ün dönüşümleri altında $\overline{\mathbf{C}}$ nin çemberleri korunur.

İspat. Möb$^+$ nın dönüşümleri ile $E(z)=\overline{z}$ dönüşümü birebir olduğundan Möb'ün dönüşümleri ve böylece T birebirdir. Eğer z_1,z_2,z_3 noktaları C nin farklı üç noktası ise T birebir olduğundan $T(z_1),T(z_2)$ ve $T(z_3)$ de $\overline{\mathbf{C}}$ nin farklı üç noktasıdır ve $\overline{\mathbf{C}}$ nin farklı üç noktası $\overline{\mathbf{C}}$ de bir çember belirtir. ■

1.4.14 Tanım. ***C*** nin bir noktasında kesişen *iki eğrisi arasındaki açı* bu eğrilerin kesişim noktasındaki teğetlerinin arasındaki açı olarak tanımlanır. (Anderson 1999, p. 46)

1.4.15 Tanım. $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin eğrileri arasındaki açının mutlak değerini koruyan homeomorfizmlerine *konform* (*açı koruyan*) *dönüşümler* denir. (Anderson 1999, p. 46)

1.4.16 Teorem. Möb dönüşümleri $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin konform homeomorfizmleridir.
İspat. Bkz. James W.Anderson, p. 46-48.

1.5 MÖB(*U*) VE MÖB($\overline{\boldsymbol{R}}$)

Bu kısımda, özel olarak ***U*** ve genişletilmiş reel eksen $\overline{\boldsymbol{R}}$ nin Möbius dönüşümlerini ele alacağız.

1.5.1 Tanım. $\text{Möb}(\boldsymbol{U}) = \{T \in \text{Möb} \mid T(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}\}$ biçiminde, yani Möb(***U***), Möb'ün ***U*** *yu koruyan dönüşümlerinin kümesi* olarak, tanımlanır. (Anderson 1999, p. 49)

1.5.2 Tanım. $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ olmak üzere $U_\lambda \in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$, $U_\lambda(z) = \lambda z$ olarak tanımlıdır.

Not: Eğer $U_\lambda(z) = \dfrac{\lambda z/\sqrt{\lambda}}{1/\sqrt{\lambda}}$ olarak yazılırsa $\det(U_\lambda) = 1$ olur.

1.5.3 Tanım. $\text{Möb}(\overline{\boldsymbol{R}}) = \{T \in \text{Möb} \mid T(\overline{\boldsymbol{R}}) = \overline{\boldsymbol{R}}\}$ biçiminde, yani $\text{Möb}(\overline{\boldsymbol{R}})$, Möb'ün $\overline{\boldsymbol{R}}$ *yi koruyan dönüşümlerinin kümesi* olarak, tanımlıdır. (Anderson 1999, p. 49)

1.5.4 Teorem. $\text{Möb}(\overline{\boldsymbol{R}})$ nin elemanları aşağıdaki dört biçimden birine sahiptir:

1. $a,b,c,d \in \boldsymbol{R}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

2. $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=1$ olmak üzere $T(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

3. a,b,c,d sırf sanal ve $ad-bc=1$ olmak üzere $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$

4. a,b,c,d sırf sanal ve $ad-bc=1$ olmak üzere $T(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

İspat. Bkz. James W.Anderson, p. 49-51.

1.5.5 Teorem. Möb($\boldsymbol{U}$) nun elemanları aşağıdaki iki biçimden birine sahiptir:

1. $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=1$ olmak üzere $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$

2. a,b,c,d sırf sanal ve $ad-bc=1$ olmak üzere $T(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$

İspat. Bkz. James W.Anderson, p. 51-53.

1.5.6 Teorem. Möb($\boldsymbol{U}$) $\subset$ Möb($\overline{\mathbf{R}}$).

İspat. Teorem 1.5.4 ve 1.5.5 den Möb($\boldsymbol{U}$) $\subset$ Möb($\overline{\mathbf{R}}$) olduğu kolayca görülür. Ancak teoremin ispatı şu şekilde de yapılabilir:

Teorem 1.5.5 e göre Möb($\boldsymbol{U}$) nun herhangi bir elemanı ya

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=1$$

ya da

$$T(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a,b,c,d \text{ sırf sanal sayılar ve } ad-bc=1$$

biçimindedir. $x \in \overline{\mathbf{R}}$ ve $T \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) için T birinci çeşitten ise $T(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \in \overline{\mathbf{R}}$; T ikinci çeşitten ise $T(x)=\dfrac{a\bar{x}+b}{c\bar{x}+d}=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ olur ki bu durumda $ax+b$ ile $cx+d$ ikisi de sırf sanal olduklarından yine $T(x) \in \overline{\mathbf{R}}$ elde edilir. Buna göre her $T \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) için $T(\overline{\mathbf{R}})=\overline{\mathbf{R}}$, yani Möb($\boldsymbol{U}$) $\subset$ Möb($\overline{\mathbf{R}}$) dir.■

1.5.7 Teorem. Möb(***U***) ***U*** üzerine geçişli olarak etki eder.

İspat. $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}^{+}$ ve $v = a + bi \in \boldsymbol{U}$ olmak üzere $V(z) = \dfrac{z-a}{b}$ dönüşümü Möb(***U***) nun *v* yi *i* ye resmeden bir dönüşümüdür (*V*, katsayıları determinantının kareköküne bölündüğünde Möb(***U***) nun elemanı olur). Diğer taraftan *w*, ***U*** nun başka bir noktası ise benzer şekilde *w* noktasını da *i* noktasına resmeden başka bir $W \in$ Möb(***U***) vardır. Böylece $T = W^{-1} \circ V \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) dönüşümü *v* yi *w* ye resmeder. Yani Möb(***U***), ***U*** üzerine geçişli olarak etki eder.■ (Anderson 1999, p. 54)

1.5.8 Örnek. $z = 2 + i$ ve $w = 1 - 2i$ ise $V(z) = \dfrac{z-2}{1} = z - 2$, $W(z) = \dfrac{z-1}{-2} = \dfrac{-z+1}{2}$ ve böylece $W^{-1}(z) = \dfrac{-2z+1}{1} = -2z + 1$ olup

$$T(z) = \left(W^{-1} \circ V\right)(z) = -2 \cdot (z-2) + 1 = -2z + 5$$

dönüşümü *z* yi *w* ye resmeden dönüşümdür.

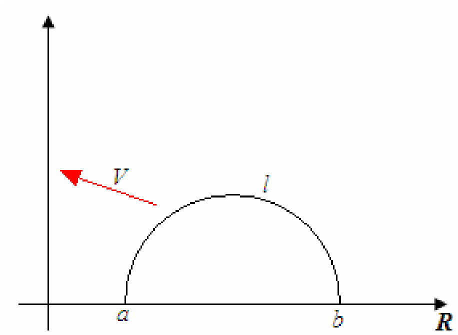
1.5.9 Teorem. Möb(***U***) nun her bir elemanı hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmeder. (Anderson 1999)

İspat. Teorem 1.4.13 den Möb' ün $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin çemberlerini koruduğunu biliyoruz. Diğer yandan Möb(***U***)$\subset$Möb olduğundan Möb(***U***) da ***C*** nin çemberlerini korur. Ayrıca Möb ve dolayısıyla Möb(***U***) konformaldir, yani açı koruyandır.

U daki bir *l* hiperbolik doğrusu ***U*** ile $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin $\overline{\boldsymbol{R}}$ ye dik bir *C* çemberinin kesişimidir. Teorem 1.4.13 gereği Möb ve dolayısıyla Möb(***U***), $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin çemberlerini koruduğundan her $T \in$ Möb(***U***) için *T*(*C*) yine $\overline{\boldsymbol{C}}$ de bir çemberdir. Teorem 1.5.6 gereği $T\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right) = \overline{\boldsymbol{R}}$ ve *T* konformal olduğundan *T*(*C*), $T\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right) = \overline{\boldsymbol{R}}$ ye diktir, yani *T*(*C*), $\overline{\boldsymbol{C}}$ nin $\overline{\boldsymbol{R}}$ ye dik bir çemberidir. *l* nin sonsuzdaki sınırı $p, q \in \overline{\boldsymbol{R}}$ noktaları ise Möb($\boldsymbol{U}$) $\subset$ Möb($\overline{\boldsymbol{R}}$) olduğundan $T(p), T(q) \in \overline{\boldsymbol{R}}$ dir, Möb($\boldsymbol{U}$), ***U*** yu koruduğundan $T(l)$, $T(C)$ ile ***U*** nun kesişimi, yani bir hiperbolik doğru olur.■

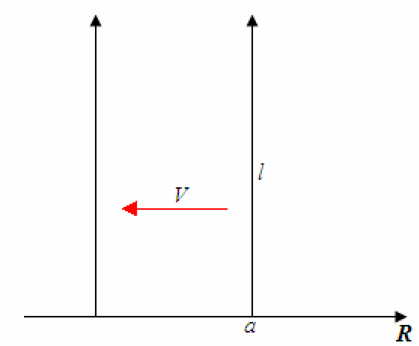
1.5.10 Teorem. Möb($\boldsymbol{U}$), $\boldsymbol{U}$ nun hiperbolik doğrularının kümesi üzerine geçişli olarak etki eder.

İspat. l hiperbolik doğrusu, merkezi $\boldsymbol{R}$ de bulunan bir Öklid çemberi üzerinde ve bu doğrunun sonsuzdaki sınırı, $a < b$ olmak üzere $a, b \in \boldsymbol{R}$ noktaları olsun. Bu durumda $V(z) = \dfrac{z-b}{z-a} \in$ Möb$(\boldsymbol{U})$ dönüşümü l yi pozitif sanal eksene resmeder (şekil 1.5.1).



Şekil 1.5.1 l hiperbolik doğrusunun sanal eksene resmedilmesi

Eğer l, $\boldsymbol{R}$ yi a noktasında dik kesen bir Öklid doğrusu üzerinde ise $V(z) = z - a \in$ Möb$(\boldsymbol{U})$ dönüşümü l yi pozitif sanal eksene resmeder (şekil 1.5.2).



Şekil 1.5.2 l hiperbolik doğrusunun sanal eksene resmedilmesi

k başka bir hiperbolik doğru olsun. Benzer şekilde k yı da pozitif sanal eksene resmeden bir $W \in$ Möb$(\boldsymbol{U})$ vardır. Böylece $T = W^{-1} \circ V \in$ Möb$(\boldsymbol{U})$ olmak üzere

$$T(l) = W^{-1}(V(l)) = k$$

dır. Yani Möb(***U***), ***U*** nun hiperbolik doğrularının kümesi üzerine geçişli olarak etki e-der.■ (Anderson 1999, p. 55 – Singerman 1987, p. 224)

1.5.11 Teorem. Möb(***U***), $\overline{\boldsymbol{R}}$ nin farklı noktalarından oluşan sıralı üçlülerinin kümesi üzerine geçişli olarak etki eder .

İspat. $z_1, z_2, z_3 \in \boldsymbol{R}$ ve $z_1 < z_2 < z_3$ olsun ($z_1 < z_2 < z_3$ olması genelliği bozmaz). Bu durumda $V(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_3} \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) dönüşümü z_3 ü ∞ a z_1 i 0 a resmeder. Böylece $\lambda = V(z_2) \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere $W = U_{\frac{1}{\lambda}} \circ V$ dönüşümü z_1, z_2 ve z_3 ü $W(z_1) = 0$, $W(z_2) = 1$ ve $W(z_3) = \infty$ olacak şekilde resmetmiş olur.

$z_1, z_2 \in \mathrm{R}$, $z_3 = \infty$ ve $z_1 < z_2$ olsun ($z_3 = \infty$ ve $z_1 < z_2$ olması genelliği bozmaz). Bu durumda $V(z) = z - z_1 \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) dönüşümü z_3 ü ∞ a z_1 i 0 a resmeder. Böylece $\lambda = V(z_2) \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere $W = U_{\frac{1}{\lambda}} \circ V$ dönüşümü z_1, z_2 ve z_3 ü $W(z_1) = 0$, $W(z_2) = 1$ ve $W(z_3) = \infty$ olacak şekilde resmetmiş olur.

$w_1, w_2, w_3 \in \boldsymbol{R}$ ve $w_1 < w_2 < w_3$ olsun ($w_1 < w_2 < w_3$ olması genelliği bozmaz). Yukarıdakine benzer bir işlemle w_1, w_2 ve w_3 ü $\hat{W}(w_1) = 0$, $\hat{W}(w_2) = 1$ ve $\hat{W}(w_3) = \infty$ olacak şekilde resmeden bir $\hat{W} \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) dönüşümü olduğu gösterilebilir. Buna göre $T = \hat{W}^{-1} \circ W \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) dönüşümü z_1, z_2 ve z_3 ü sırasıyla w_1, w_2 ve w_3 e resmeder. ■ (Anderson 1999, p. 56)

1.6 *U* DA HİPERBOLİK UZUNLUK VE UZAKLIK

Bu kısımda, üst yarı düzlem üzerinde hiperbolik uzunluğu ve onu kullanarak hiperbolik metriği tanımlayacağız.

1.6.1 Tanım (Hiperbolik Uzunluk). ***J*** = [0, 1] olmak üzere

$$\gamma : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{U},\ \gamma(t) = x(t) + iy(t) = z(t)$$

parçalı diferensiyellenebilir *γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu*

$$h(\gamma)=\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt}{y}=\int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|\cdot dt}{y}$$

olarak tanımlanır. (Singerman 1987, p. 222)

1.6.2 Teorem. Möb($\boldsymbol{U}$) altında hiperbolik uzunluk değişmez. Yani $T\in$ Möb($\boldsymbol{U}$) ise $h(T(\gamma))=h(\gamma)$ dır.

İspat. T nin aldığı biçime göre iki farklı durum vardır:

1. Hal. $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d\in\boldsymbol{R}$ ve $ad-bc=1$ ise

$$\frac{dT}{dz}=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}=\frac{1}{(cz+d)^2}$$

dir. $z=x+iy$ ve $T(z)=u+iv$ olmak üzere

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}=\frac{acz\bar{z}+bd+adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}$$

$$=\frac{acz\bar{z}+bd+adx+bcx}{|cz+d|^2}+\frac{adyi-bcyi}{|cz+d|^2}$$

$$=\frac{acz\bar{z}+bd+adx+bcx}{|cz+d|^2}+\frac{(ad-bc)yi}{|cz+d|^2} \qquad (ad-bc=1)$$

$$=\frac{acz\bar{z}+bd+adx+bcx}{|cz+d|^2}+\frac{y}{|cz+d|^2}i=u+iv$$

olur. Böylece

$$v=\frac{y}{|cz+d|^2} \text{ olup } \frac{dT}{dz}=\frac{1}{|cz+d|^2}=\frac{v}{y}$$

olduğundan

$$h(T(\gamma))=\int_0^1\frac{\left|\frac{dT}{dt}\right|\cdot dt}{v}=\int_0^1\frac{\left|\frac{dT}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\right|\cdot dt}{v}=\int_0^1\frac{\frac{v}{y}\cdot\left|\frac{dz}{dt}\right|\cdot dt}{v}=\int_0^1\frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|\cdot dt}{y}=h(\gamma)$$

olarak bulunur. (Singerman 1987, p. 222-223)

2. Hal. $T(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a,b,c,d sırf sanal sayılar ve $ad-bc=1$ ise

$$\frac{dT}{d\bar{z}}=\frac{a(c\bar{z}+d)-c(a\bar{z}+b)}{(c\bar{z}+d)^2}=\frac{ad-bc}{(c\bar{z}+d)^2}=\frac{1}{(c\bar{z}+d)^2}$$

dir. $z=x+iy$ ve $T(z)=u+iv$ olmak üzere

$$T(\bar{z})=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}=\frac{(a\bar{z}+b)(cz+d)}{|c\bar{z}+d|^2}=\frac{acz\bar{z}+bd+ad\bar{z}+bcz}{|c\bar{z}+d|^2}$$

$$=\frac{acz\bar{z}+bd+adx+bcx}{|c\bar{z}+d|^2}+\frac{bcyi-adyi}{|c\bar{z}+d|^2}$$

$$=\frac{acz\bar{z}+bd+adx+bcx}{|c\bar{z}+d|^2}+\frac{(bc-ad)yi}{|c\bar{z}+d|^2} \qquad (ad-bc=1)$$

$$=\frac{acz\bar{z}+bd+adx+bcx}{|c\bar{z}+d|^2}-\frac{y}{|c\bar{z}+d|^2}i=u+iv$$

olur. Böylece

$$v=\frac{-y}{|c\bar{z}+d|^2} \text{ olup } \frac{dT}{d\bar{z}}=\frac{1}{|c\bar{z}+d|^2}=\frac{-v}{y}$$

elde edilir. $z(t)=x(t)+y(t)i$ ve böylece $\bar{z}(t)=x(t)-y(t)i$ olduğundan

$$\left|\frac{dz}{dt}\right|=\left|\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}i\right|=\left|\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}i\right|=\left|\frac{d\bar{z}}{dt}\right|$$

dir. Buradan

$$h(T(\gamma))=\int_0^1\frac{\left|\frac{dT}{dt}\right|\cdot dt}{v}=\int_0^1\frac{\left|\frac{dT}{d\bar{z}}\cdot\frac{d\bar{z}}{dt}\right|\cdot dt}{v}$$

$$=\int_0^1\frac{\left|\frac{dT}{d\bar{z}}\right|\cdot\left|\frac{d\bar{z}}{dt}\right|\cdot dt}{v}=\int_0^1\frac{\left|\frac{-v}{y}\right|\cdot\left|\frac{d\bar{z}}{dt}\right|\cdot dt}{v}$$

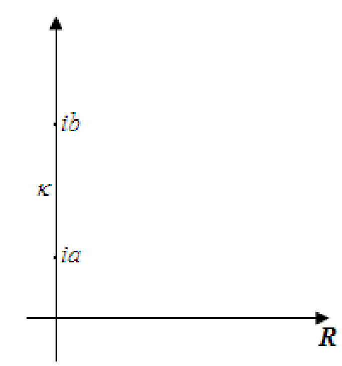
$$=\int_0^1\frac{\left|\frac{d\bar{z}}{dt}\right|\cdot dt}{y}=\int_0^1\frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|\cdot dt}{y}=h(\gamma) \qquad \left(\left|\frac{d\bar{z}}{dt}\right|=\left|\frac{dz}{dt}\right|\right)$$

olarak bulunur.■

1.6.3 Teorem. ***U*** nun farklı iki noktasını birleştiren parçalı diferensiyellenebilir eğriler içerisinde en küçük hiperbolik uzunluğa sahip olanı bu iki nokta arasındaki hiperbolik doğru parçasıdır.

İspat. İki farklı durum söz konusudur:

1. Hal. $a,b \in \boldsymbol{R}^{+}$, $a<b$, $\kappa(t)=(0,y(t))$, $\dfrac{dy}{dt}>0$, $y(0)=a$ ve $y(1)=b$ olmak üzere $\kappa:[0,1]\to \boldsymbol{U}$ sanal eksen üzerinde *ia*' yı *ib*' ye birleştiren hiperbolik doğru parçası olsun (şekil 1.6.1).



Şekil 1.6.1 Sanal eksen üzerinde hiperbolik doğru parçası

κ' nın uzunluğu

$$h(\kappa)=\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt}{y(t)}=\int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|\cdot dt}{y(t)}=\int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}\cdot dt}{y(t)}=\int_a^b \frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}$$

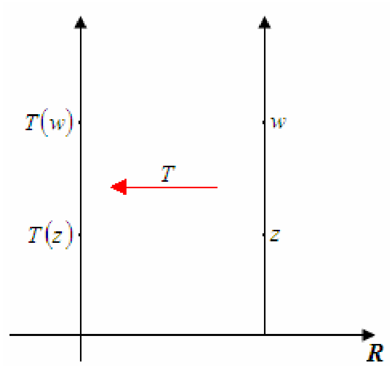
Eğer $\tilde{\kappa}:[0,1]\to \boldsymbol{U}$ *ia*' yı *ib*' ye birleştiren başka bir parçalı diferensiyellenebilir eğri ve $\tilde{\kappa}(t)=(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ ise $\tilde{\kappa}$ ' nın uzunluğu

$$h(\tilde{\kappa})=\int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}\cdot dt}{\tilde{y}(t)}\geq \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}\cdot dt}{\tilde{y}(t)}\geq \int_0^1 \frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}\cdot dt}{\tilde{y}(t)}=\int_a^b \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}}=\ln\frac{b}{a}$$

dır. Eşitlik ancak $\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=0$ ve $\dfrac{d\tilde{y}}{dt}\geq 0$ olursa gerçeklenir. Bu ise $\tilde{\kappa}$ ' nın *ia*' yı *ib*' ye birleştiren sanal doğru parçası (hiperbolik doğru parçası) olduğu anlamına gelir (gerçekten

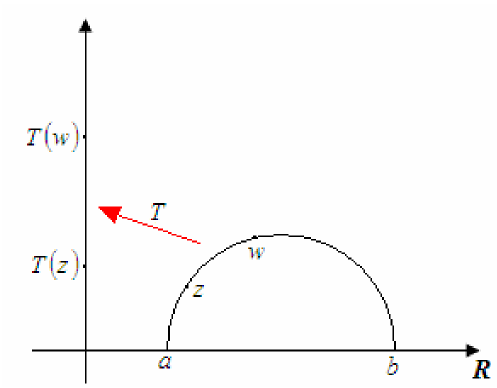
$\dfrac{d\tilde{x}}{dt}=0$ ve $\dfrac{d\tilde{y}}{dt}\geq 0 \Rightarrow \tilde{\kappa}(t)=(c,\tilde{y}(t))$, $c\in \boldsymbol{R} \Rightarrow \tilde{\kappa}(0)=(c,\tilde{y}(0)) \Rightarrow c=0$, $\tilde{y}(0)=a$ ve $\tilde{\kappa}(1)=(c,\tilde{y}(1)) \Rightarrow \tilde{y}(1)=b$).

2. Hal. z ile w noktaları $\boldsymbol{U}$ nun ikisi birden sanal eksen üzerinde olmayan farklı iki noktası olsun: Eğer $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(w)$ ise z ile w'yi birleştiren hiperbolik doğru $\boldsymbol{C}$ deki $x=\mathrm{Re}(z)$ Öklid doğrusu üzerindedir. $T(t)=t-\mathrm{Re}(z)\in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü ile bu hiperbolik doğru pozitif sanal eksene resmedilebilir (şekil 1.6.2).



Şekil 1.6.2 z ile w arasındaki hiperbolik doğru parçası

Eğer $\mathrm{Re}(z)\neq \mathrm{Re}(w)$ ise z ile w yi birleştiren hiperbolik doğru $\boldsymbol{C}$ de merkezi $\boldsymbol{R}$ de bulunan bir Öklid çemberi üzerindedir. Bu çemberin $\boldsymbol{R}$ yi kestiği noktalar $a,b\in \boldsymbol{R}$ ve $a<b$ ise $T(t)=\dfrac{t-b}{t-a}\in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü z ile w yi birleştiren hiperbolik doğruyu pozitif sanal eksene resmeder (şekil 1.6.3).



Şekil 1.6.3 z ile w arasındaki hiperbolik doğru parçası

Böylece $T \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) hiperbolik uzunluğu koruduğundan ve $T(z)$ ile $T(w)$ yi birleştiren parçalı diferensiyellenebilir eğriler içerisinde hiperbolik uzunluğu en kısa olanı $T(z)$ ile $T(w)$ yi birleştiren hiperbolik doğru parçası olduğundan, z ile w yi birleştiren parçalı diferensiyellenebilir eğriler içerisinde hiperbolik uzunluğu en kısa olanı z ile w yi birleştiren hiperbolik doğru parçasıdır.■ (Singerman 1987, p. 223-224)

1.6.4 Tanım. $\boldsymbol{U}$ nun z, w noktaları arasındaki "*ρ hiperbolik uzaklığı*" onları birleştiren hiperbolik doğru parçasının uzunluğu olup $\rho(z,w)$ ile gösterilir. (Singerman 1987, p. 224)

Sonuç. Teorem 1.6.3 gereği her z, w, $v \in \boldsymbol{U}$ için

1. $z \neq w$ ise $\rho(z,w) > 0$, $z = w$ ise $\rho(z,w) = 0$,

2. $\rho(z,w) = \rho(w,z)$

3. $\rho(z,w) = \rho(z,v) + \rho(v,w)$ dir.

Böylece $(\boldsymbol{U}, \rho)$ bir metrik uzaydır.

1.6.5 Teorem. Her $T \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) ve z, $w \in \boldsymbol{U}$ için $\rho(T(z),T(w)) = \rho(z,w)$ dir.

İspat. z ile w' yi birleştiren hiperbolik doğru parçası γ ise $T(z)$ ile $T(w)$ yi birleştiren hiperbolik doğru parçası $T(\gamma)$ olup teorem 1.6.2 gereği $h(\gamma) = h(T(\gamma))$ yani $\rho(z,w) = \rho(T(z),T(w))$ dir.■ (Singerman 1987, p. 225)

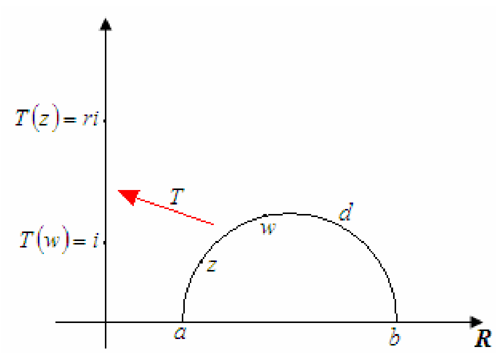
1.7 $\rho(z,w)$ NİN HESAPLANMASI

Bu kısımda $z, w \in \boldsymbol{U}$ noktaları arasındaki hiperbolik uzaklığı hesaplamaya yarayan formüller üzerinde çalışacağız. Daha önce $a, b \in \boldsymbol{R}^+$ ve $a < b$ olmak üzere ia ile ib sanal eksen üzerinde iki nokta ise $\rho(ia, ib) = \ln \dfrac{b}{a}$ olduğunu gördük.

1.7.1 Teorem. $z, w \in \boldsymbol{U}$, $z \neq w$ ise bir $r \in \boldsymbol{R}$ ve $r > 1$ için $T(z) = ri$ ve $\rho(z,w) = \ln r$ dir.

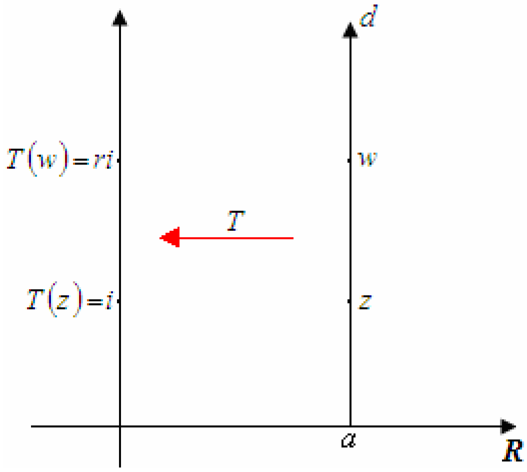
İspat. z ile w yi birleştiren hiperbolik doğru d ve d nin sonsuzdaki sınırı $a, b \in \overline{\boldsymbol{R}}$ noktaları ve z noktası a ile w arasında olsun. İki farklı durum söz konusudur:

1. Hal. $a, b \neq \infty$, $a < b$ ve $V(t) = \dfrac{t-b}{t-a}$ olsun. $V(a) = \infty$ ve $V(b) = 0$ olduğundan $V \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) dönüşümü d yi pozitif sanal eksene resmeder. $k \in \boldsymbol{R}^+$ olmak üzere $V(w) = ki$ ise $T = U_{\frac{1}{k}} \circ V \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) aradığımız dönüşümdür. z noktası a ile w arasında olduğundan $T(w) = i$ noktası $T(b) = 0$ ile $T(z)$ arasındadır. Öyle ise bir $r \in \boldsymbol{R}$ ve $r > 1$ için $T(z) = ri$ dir. Böylece $\rho(z,w) = \rho(T(z), T(w)) = \rho(ri, i) = \ln r$ dir (şekil 1.7.1).



Şekil 1.7.1 z ile w arasındaki hiperbolik uzaklık

2. Hal. $a \in \boldsymbol{R}$ ve $b = \infty$ olsun. Bu durumda d, $\boldsymbol{R}$ ye dik bir Öklid doğrusu üzerindedir ve $V(t) = t - a \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) dönüşümü d yi sanal eksene resmeder. $k \in \boldsymbol{R}^+$ olmak üzere $V(z) = ki$ ise $T = U_{\frac{1}{k}} \circ V \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) aradığımız dönüşümdür. z noktası a ile w arasında olduğundan $T(z) = i$ noktası $T(a) = 0$ ile $T(w)$ arasındadır. Öyle ise bir $r \in \boldsymbol{R}$ ve $r > 1$ için $T(w) = ri$ ve böylece $\rho(z,w) = \rho(T(z), T(w)) = \rho(i, ri) = \ln r$ dir.



Şekil 1.7.2 z ile w arasındaki hiperbolik uzaklık

.■ (Singerman 1987, p. 225)

1.7.2 Teorem. Her z, $w \in \boldsymbol{U}$ için $\tau(z,w)=\left|\dfrac{z-w}{z-\overline{w}}\right|$ fonksiyonu Möb($\boldsymbol{U}$) altında değişmezdir.

İspat. $T \in$ Möb($\boldsymbol{U}$) olsun. İki durum vardır:

1. Hal. $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ ve $ad-bc=1$ ise

$$\tau(T(z),T(w))=\left|\frac{T(z)-T(w)}{T(z)-\overline{T(w)}}\right|=\left|\frac{\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{aw+b}{cw+d}}{\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{a\overline{w}+b}{c\overline{w}+d}}\right|=\left|\frac{\dfrac{adz+bcw-adw-bcz}{(cz+d)(cw+d)}}{\dfrac{adz+bc\overline{w}-ad\overline{w}-bcz}{(cz+d)(c\overline{w}+d)}}\right|$$

$$=\left|\frac{(ad-bc)z+(bc-ad)w}{(ad-bc)z+(bc-ad)\overline{w}}\right|\cdot\left|\frac{c\overline{w}+d}{cw+d}\right|$$

$$=\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|\cdot\frac{|c\overline{w}+d|}{|cw+d|}=\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|=\tau(z,w).$$

2. Hal. $T(z)=\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, a,b,c,d sırf sanal sayılar ve $ad-bc=1$ ise

$$\tau(T(z),T(w))=\left|\frac{T(z)-T(w)}{T(z)-\overline{T(w)}}\right|=\left|\frac{\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}-\dfrac{a\overline{w}+b}{c\overline{w}+d}}{\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}-\dfrac{\overline{a}w+\overline{b}}{\overline{c}w+\overline{d}}}\right|=\left|\frac{\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}-\dfrac{a\overline{w}+b}{c\overline{w}+d}}{\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}-\dfrac{-aw-b}{-cw-d}}\right|$$

$$=\left|\frac{\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}-\dfrac{a\overline{w}+b}{c\overline{w}+d}}{\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}+\dfrac{aw+b}{cw+d}}\right|=\left|\frac{(ad-bc)\bar{z}+(bc-ad)\overline{w}}{(ad-bc)\bar{z}+(bc-ad)w}\right|\cdot\left|\frac{cw+d}{c\overline{w}+d}\right|$$

$$=\left|\frac{\bar{z}-\overline{w}}{\bar{z}-w}\right|\cdot\frac{|cw+d|}{|c\overline{w}+d|}=\left|\overline{\left(\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right)}\right|=\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|=\tau(z,w).\blacksquare$$

(Singerman 1987, p. 226)

Sonuç 1. Teorem 1.7.1 e göre Her $z,\, w \in \boldsymbol{U}$ için $\rho(z,w)=\ln r$ ve $r>1$ olacak biçimde bir $r \in \boldsymbol{R}$ olduğunu gördük. Böylece $\rho(z,w)=\ln r$ olduğundan $r=e^{\rho(z,w)}$ olur. O halde teorem 1.7.2 gereği

$$\tau(z,w)=\tau(i,ri)=\left|\frac{i-ri}{i+ri}\right|=\frac{r-1}{r+1}=\frac{e^{\rho(z,w)}-1}{e^{\rho(z,w)}+1} \tag{3}$$

dir. Bu eşitlikten

$$e^{\rho(z,w)}=\frac{1+\tau(z,w)}{1-\tau(z,w)}$$

ve dolayısıyla

$$\rho(z,w)=\ln\left\{\frac{1+\tau(z,w)}{1-\tau(z,w)}\right\}=\ln\left\{\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right\}$$

elde edilir. (Singerman 1987, p. 226)

1.7.3 Örnek. 1+2i ve 2+3i noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık

$$\rho(1+i,2+3i)=\ln\left\{\frac{|1+i-(2-3i)|+|1+i-(2+3i)|}{|1+i-(2-3i)|-|1+i-(2+3i)|}\right\}$$

$$=\ln\left\{\frac{|-1+4i|+|-1-2i|}{|-1+4i|-|-1-2i|}\right\}=\ln\frac{\sqrt{17}+\sqrt{5}}{\sqrt{17}-\sqrt{5}}=\ln\frac{11+\sqrt{85}}{6}$$

dir.

Sonuç 2 (hiperbolik uzaklık için ikinci bir formül).

$$\tanh\frac{u}{2}=\frac{e^u-1}{e^u+1}\ ,\quad \sinh^2\frac{u}{2}=\frac{\tanh^2\frac{u}{2}}{1-\tanh^2\frac{u}{2}}$$

ve (3) den

$$\tanh\frac{\rho(z,w)}{2}=\frac{e^{\rho(z,w)}-1}{e^{\rho(z,w)}+1}=\tau(z,w)$$

olduğundan

$$\sinh^2\frac{\rho(z,w)}{2}=\frac{\tau^2(z,w)}{1-\tau^2(z,w)}=\frac{\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|^2}{1-\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|^2}$$

$$=\frac{|z-w|^2}{|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2}=\frac{|z-w|^2}{(z-\overline{w})(\overline{z}-w)-(z-w)(\overline{z}-\overline{w})}$$

$$=\frac{|z-w|^2}{-(z-\overline{z})(w-\overline{w})}=\frac{|z-w|^2}{4\mathrm{Im}(z)\cdot\mathrm{Im}(w)}$$

yani

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(z,w)=\frac{|z-w|^2}{4\mathrm{Im}(z)\cdot\mathrm{Im}(w)}$$

elde edilir (Formülde $|z-w|$, z ile w arasındaki Öklid uzaklığıdır). (Singerman 1987, p. 226-227)

1.7.4 Örnek. 1+2i ve 2+3i noktaları için

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(1+i,2+3i)=\frac{|1+i-2-3i|^2}{4\cdot 1\cdot 3}=\frac{|-1-2i|^2}{12}=\frac{5}{12}$$

olduğundan

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(1+i,2+3i)=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\rho(1+i,2+3i)}-e^{-\frac{1}{2}\rho(1+i,2+3i)}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

ve dolayısıyla

$$e^{\rho(1+i,2+3i)}-\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot e^{\frac{1}{2}\rho(1+i,2+3i)}-1=0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin kökleri, $\Delta=\frac{5}{3}-4\cdot 1\cdot(-1)=\frac{17}{3}$ olduğundan

$$e^{\frac{1}{2}\rho(1+i,2+3i)}=\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}\pm\sqrt{\frac{17}{3}}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{17}}{2\sqrt{3}}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\rho(1+i,2+3i)=2\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2\sqrt{3}}=\ln\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

veya

$$\rho(1+i,2+3i)=\ln\frac{11+\sqrt{85}}{6}$$

olarak bulunur.

2. BÖLÜM
U DA HİPERBOLİK KONİKLER

Bu bölümde sırasıyla hiperbolik çember, hiperbolik elips, hiperbolik hiperbol ve hiperbolik parabol olmak üzere **U** da hiperbolik konikler ele alınacak, temel özellikleri belirlenecek ve grafikleri çizilecektir. Her bir kısımda önce merkezil konik tanımlanıp incelenecek, sonra da merkezil konik referans alınarak **U** da herhangi bir konik incelenecektir.

2.1 *U* DA HİPERBOLİK ÇEMBER

Bu kısımda önce hiperbolik çemberin tanımı yapılıp i merkezli δ yarıçaplı hiperbolik çember (merkezil çember) incelenecek, sonra **U** da her hiperbolik çemberin bir Öklid çemberi, her Öklid çemberinin de bir hiperbolik çember olduğu ispatlanacaktır. Sonra da $\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ nun elemanları kullanılarak merkezil çember için elde edilen sonuçlar **U** da herhangi bir hiperbolik çembere aktarılacak ve o çemberle ilgili tüm bilgilere ulaşılacaktır.

2.1.1 Tanım. ***U*** nun bir noktasından eşit hiperbolik uzaklıkta bulunan noktaların kümesine *hiperbolik çember* denir.

Hiperbolik uzaklığın Öklid uzaklığından farklı olduğu düşünüldüğünde hiperbolik çemberin şeklinin de Öklid çembersininkinden farklı olması gerektiği düşünülebilir. Acaba hiperbolik bir çemberin şekli nasıldır? Aşağıda öncelikle çalışmamızda referans olarak kullanabileceğimiz bir çemberden başlayarak bu sorunun cevabını araştırdık:

$x, y, \delta \in \boldsymbol{R}$, $\delta > 0$ ve $z = x + yi \in \boldsymbol{U}$ olmak üzere **U** da i merkezli δ yarıçaplı (ve böylece sanal ekseni $e^{\delta}i$ ile $e^{-\delta}i$ noktalarında kesen) hiperbolik çember (merkezil çember)

$$C = \{z : \rho(z,i) = \delta\} = \left\{z : \sinh^2 \frac{1}{2}\rho(z,i) = \sinh^2 \frac{1}{2}\delta\right\}$$

$$= \left\{ z : \frac{|z-i|^2}{4\mathrm{Im}(z)\cdot \mathrm{Im}(i)} = \sinh^2 \frac{1}{2}\delta \right\} = \left\{ z : |z-i|^2 = 4y\sinh^2 \frac{1}{2}\delta \right\}$$

$$= \left\{ z = x+yi : |x+(y-1)i|^2 = 4y\sinh^2 \frac{1}{2}\delta \right\}$$

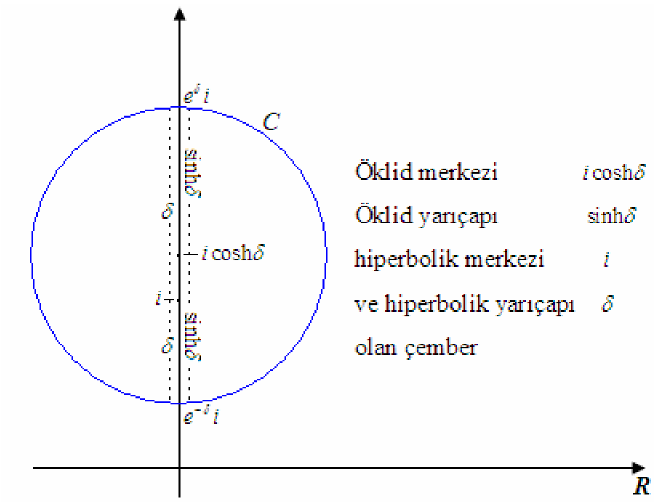
$$= \left\{ z = x+yi : x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4y\sinh^2 \frac{1}{2}\delta \right\}$$

$$= \left\{ x+yi : x^2 + y^2 + 1 = 2y\left(2\sinh^2 \frac{1}{2}\delta + 1 \right) = 2y\cosh\delta \right\}$$

$$= \left\{ x+yi : x^2 + y^2 - 2y\cosh\delta + \cosh^2\delta = \cosh^2\delta - 1 \right\}$$

$$= \left\{ x+yi : x^2 + (y-\cosh\delta)^2 = \cosh^2\delta \right\}$$

olur ki bu merkezi $(0,\cosh\delta)$ ve yarıçapı $\sinh\delta$ olan bir Öklid çemberidir (şekil 2.1.1). (Singerman 1987, p. 227)



Şekil 2.1.1 Öklid merkezi $i\cosh\delta$, Öklid yarıçapı $\sinh\delta$, hiperbolik merkezi i ve hiperbolik yarıçapı δ olan çember

Möb' ün elemanları $\boldsymbol{C}$ nin farklı üç noktasını $\boldsymbol{C}$ nin farklı üç noktasına resmetiğinden $\boldsymbol{C}$ de Öklid çemberlerinin Möb altındaki resimleri yine Öklid çemberidir. Öyle ise $\boldsymbol{U}$ da da Öklid çemberlerinin $\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ altındaki resimleri yine Öklid çemberidir (çünkü $\text{Möb}(\boldsymbol{U}) \subset \text{Möb}$). Ayrıca $\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ hiperbolik uzaklığı koruduğundan $\boldsymbol{U}$ da hiperbolik çemberlerin resimleri yine $\boldsymbol{U}$ da birer hiperbolik çemberdir.

2.1.2 Teorem. ***U*** da her hiperbolik çember bir Öklid çemberi, her Öklid çemberi de bir hiperbolik çemberdir.

İspat. İspatı iki aşamada yapacağız:

1. $\hat{C}$, ***U*** da $\hat{c}$ merkezli δ hiperbolik yarıçaplı hiperbolik çember ve $V(z)=z-\operatorname{Re}(\hat{c})$ olsun. $V(\hat{C})$ merkezi sanal eksen üzerinde $V(\hat{c})=\hat{c}-\operatorname{Re}(\hat{c})=\operatorname{Im}(\hat{c})i$ ve hiperbolik yarıçapı δ olan hiperbolik çemberdir ($\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ hiperbolik uzunluğu korur ve $V\in\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dur). Böylece $T=U_{\frac{1}{\operatorname{Im}(\hat{c})}}\circ V\in\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ için

$$T(\hat{c})=\left(U_{\frac{1}{\operatorname{Im}(\hat{c})}}\circ V\right)(\hat{c})=\frac{1}{\operatorname{Im}(\hat{c})}\cdot\operatorname{Im}(\hat{c})i=i$$

olup $T(\hat{C})$ merkezi i hiperbolik yarıçapı δ olan hiperbolik çemberdir. Yukarıda gördüğümüz gibi bu çember (C) aynı zamanda merkezi $i\cosh\delta$ ve yarıçapı $r=\sinh\delta$ olan Öklid çemberidir. Öyle ise $T^{-1}\in\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ olduğundan ve Öklid çemberlerinin $\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ altındaki resimleri de Öklid çemberleri olduklarından $\hat{C}=T^{-1}(C)$ aynı zamanda bir Öklid çemberidir. Buna göre $\hat{C}$ nin Öklid merkezi

$$c=T^{-1}(i\cosh\delta)=\left(V^{-1}\circ U_{\frac{1}{\operatorname{Im}(\hat{c})}}^{-1}\right)(i\cosh\delta)=\left(V^{-1}\circ U_{\operatorname{Im}(\hat{c})}\right)(i\cosh\delta)$$

$$=V^{-1}(i\cosh\delta\cdot\operatorname{Im}(\hat{c}))=\operatorname{Re}(\hat{c})+\cosh\delta\cdot\operatorname{Im}(\hat{c})i$$

ve

$$T^{-1}(e^{\delta}i)=\left(V^{-1}\circ U_{\operatorname{Im}(\hat{c})}\right)(e^{\delta}i)=V^{-1}(\operatorname{Im}(\hat{c})e^{\delta}i)=\operatorname{Re}(\hat{c})+\operatorname{Im}(\hat{c})e^{\delta}i$$

olduğundan $\hat{C}$ nin Öklid yarıçapı

$$r=\left|T^{-1}(e^{\delta}i)-c\right|=\left|\operatorname{Re}(\hat{c})+\operatorname{Im}(\hat{c})e^{\delta}i-(\operatorname{Re}(\hat{c})+\cosh\delta\cdot\operatorname{Im}(\hat{c})i)\right|$$

$$=\left|\operatorname{Im}(\hat{c})(e^{\delta}-\cosh)i\right|=\left|\operatorname{Im}(\hat{c})\cdot\sinh\delta\cdot i\right|=\operatorname{Im}(\hat{c})\cdot\sinh\delta$$

dir.

2. $\hat{C}$ ***U*** da c merkezli r yarıçaplı Öklid çemberi ve $V(z)=z-\operatorname{Re}(c)$ olsun. $V(\hat{C})$ merkezi sanal eksen üzerinde $V(c)=c-\operatorname{Re}(c)=\operatorname{Im}(c)i$ ve yarıçapı r olan Öklid çemberidir.

Bu çemberin sanal ekseni kestiği noktalar $(\mathrm{Im}(c)+r)i$ ve $(\mathrm{Im}(c)-r)i$ dir. $k \in \boldsymbol{R}^{+}$ olmak üzere $V(\hat{C})$ nin hiperbolik merkezi ki ise

$$\ln\frac{\mathrm{Im}(c)+r}{k} = \ln\frac{k}{\mathrm{Im}(c)-r}$$

eşitliğinden

$$\frac{\mathrm{Im}(c)+r}{k} = \frac{k}{\mathrm{Im}(c)-r}$$

ve böylece

$$k^2 = \mathrm{Im}^2(c) - r^2$$

elde edilir. $k > 0$ olduğundan

$$k = \sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r^2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$U_{\frac{1}{k}}\left((\mathrm{Im}(c)+r)i\right) = \frac{\mathrm{Im}(c)+r}{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c)-r^2}}\, i = e^{\delta} i$$

dersek

$$U_{\frac{1}{k}}\left((\mathrm{Im}(c)-r)i\right) = \frac{\mathrm{Im}(c)-r}{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c)-r^2}}\, i = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c)-r^2}}{\mathrm{Im}(c)-r}}\, i$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{\mathrm{Im}(c)+r}}{\sqrt{\mathrm{Im}(c)-r}}}\, i = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{Im}(c)+r}{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c)-r^2}}}\, i = \frac{1}{e^{\delta}}\, i = e^{-\delta} i$$

olur ki bu $T = U_{\frac{1}{k}} \circ V \in \mathrm{Möb}(\boldsymbol{U})$ için $T(\hat{C})$ nin sanal ekseni $e^{\delta} i$ ile $e^{-\delta} i$ de dik kesen Öklid çemberi, yani yukarıda incelediğimiz i merkezli δ hiperbolik yarıçaplı hiperbolik çember (C) olduğu anlamına gelir. Öyle ise $T^{-1} \in \mathrm{Möb}(\boldsymbol{U})$ olduğundan ve hiperbolik çemberlerin $\mathrm{Möb}(\boldsymbol{U})$ altındaki resimleri de hiperbolik çember olduklarından $\hat{C} = T^{-1}(C)$ aynı zamanda bir hiperbolik çemberdir. Buna göre $\hat{C}$ nin hiperbolik merkezi

$$\hat{c} = T^{-1}(i) = \left(V^{-1} \circ U_{\frac{1}{k}}^{\;-1}\right)(i) = \left(V^{-1} \circ U_k\right)(i)$$

$$= V^{-1}(ki) = \mathrm{Re}(c) + ki = \mathrm{Re}(c) + \sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r^2}\, i$$

ve

$$\frac{\mathrm{Im}(c) + r}{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r^2}}\, i = e^{\delta} i$$

den hiperbolik yarıçapı

$$\delta = \ln \frac{\mathrm{Im}(c) + r}{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r}}$$

elde edilir.■

2.1.3 Teorem. ***U*** da $\hat{c}$ merkezli δ yarıçaplı bir hiperbolik çember $c = \mathrm{Re}(\hat{c}) + \cosh\delta \cdot \mathrm{Im}(\hat{c})i$ merkezli $r = \mathrm{Im}(\hat{c})\sinh \delta$ yarıçaplı Öklid çemberi; ***U*** da c merkezli r yarıçaplı bir Öklid çemberi de $\hat{c} = \mathrm{Re}(c) + \sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r^2}\, i$ merkezli $\delta = \ln \dfrac{\mathrm{Im}(c) + r}{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r}}$ yarıçaplı hiperbolik çemberdir.

İspat. Bu teoremin ispatı yukarıdaki teoremin ispatı içerisinde mevcuttur.■

2.1.4 Örnekler 1. ***U*** da $c = 2 + 5i$ merkezli $r = 3$ birim yarıçaplı bir Öklid çemberinin hiperbolik merkezi

$$\hat{c} = \mathrm{Re}(c) + \sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r^2}\, i = 2 + \sqrt{5^2 - 3^2}\, i = 2 + 4i$$

ve hiperbolik yarıçapı

$$\delta = \ln \frac{\mathrm{Im}(c) + r}{\sqrt{\mathrm{Im}^2(c) - r}} = \ln \frac{5 + 3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \ln 2$$

birimdir.

2. Yukarıda elde ettiğimiz $\hat{c} = 2 + 4i$ merkezli ve $\delta = \ln 2$ birim hiperbolik yarıçaplı hiperbolik çemberin Öklid merkezi

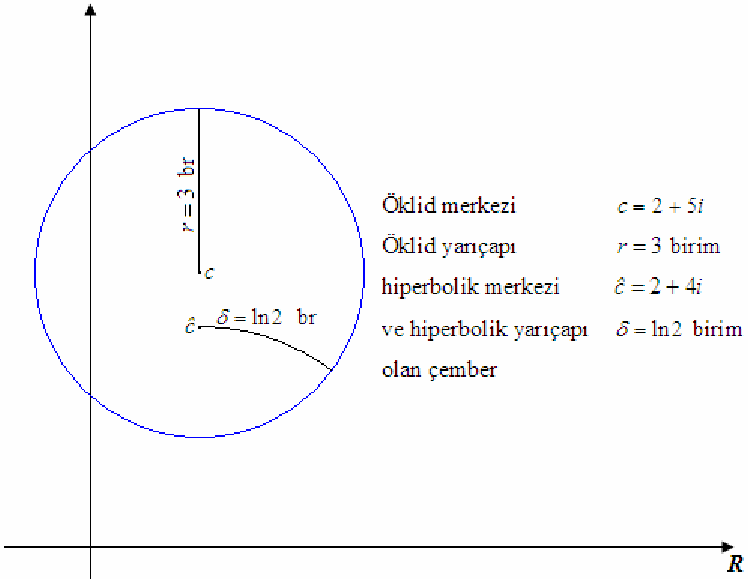
$$c = \mathrm{Re}(\hat{c}) + \cosh\delta \cdot \mathrm{Im}(\hat{c})i = 2 + \cosh(\ln 2) \cdot 4i$$

$$= 2 + \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} \cdot 4i = 2 + \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} \cdot 4i = 2 + \frac{5}{4} \cdot 4i = 2 + 5i$$

ve Öklid yarıçapı

$$r = \mathrm{Im}(\hat{c})\sinh\delta = 4\sinh(\ln 2) = 4\cdot\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = 4\cdot\frac{2-\frac{1}{2}}{2} = 4\cdot\frac{3}{4} = 3$$

birimdir (şekil 2.1.2).



Şekil 2.1.2 Öklid merkezi $c = 2 + 5i$, Öklid yarıçapı $r = 3$ birim, hiperbolik merkezi $\hat{c} = 2 + 4i$ ve hiperbolik yarıçapı $\delta = \ln 2$ birim olan çember

2.2 *U* DA HİPERBOLİK ELİPS

Bu kısımda önce hiperbolik elipsin ve yardımcı elemanlarının tanımı yapılıp merkezil elips incelenecek, sonra da Möb(***U***) nun elemanları kullanılarak merkezil elips için elde edilen sonuçlar ***U*** da herhangi bir hiperbolik elipse aktarılacaktır.

2.2.1 Tanım. ***U*** da sabit iki noktaya hiperbolik uzaklıkları toplamları sabit olan noktaların kümesine *hiperbolik elips*, sabit noktalara elipsin *odak*ları ve odaklar arası hiperbolik uzaklığa da *odak uzaklığı* denir.

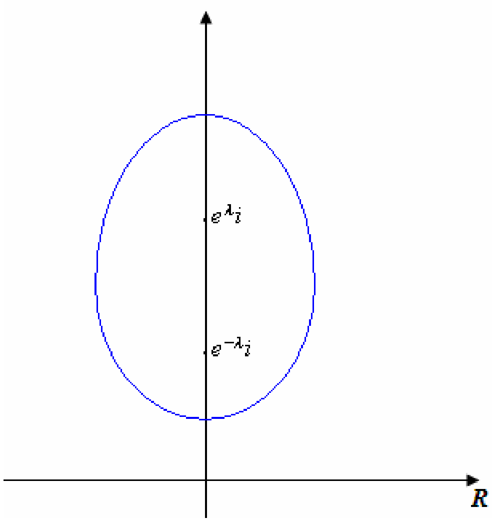
Buna göre odakları $w, \hat{w} \in \boldsymbol{U}$ ve $2\delta > \rho(w, \hat{w}) > 0$ için odaklara hiperbolik uzaklıkları toplamı 2δ olan noktaların oluşturduğu hiperbolik elipsin denklemi $\rho(z, w) + \rho(z, \hat{w}) = 2\delta$ dır.

2.2.2 Tanım. Odaklardan geçen hiperbolik doğrunun elipsi kestiği noktalar ile bu noktalar arasında kalan kısmının oluşturduğu hiperbolik doğru parçasına elipsin *asal ekseni* denir.

2.2.3 Tanım. Asal eksen üzerinde ve odaklara eşit hiperbolik uzaklıkta bulunan noktaya elipsin *merkezi* denir.

2.2.4 Tanım. Merkezden asal eksene dik olarak geçen hiperbolik doğrunun elipsi kestiği noktalar ile bu noktalar arasında kalan kısmının oluşturduğu hiperbolik doğru parçasına elipsin *yedek ekseni* denir.

2.2.5 Merkezil Elips. Herhangi bir elipsi incelerken referans alabileceğimiz $\delta, \lambda \in \boldsymbol{R}$ ve $\delta > \lambda > 0$ olmak üzere, odakları sanal eksen üzerinde $e^{\lambda} i$ ile $e^{-\lambda} i$ noktaları olup odaklara hiperbolik uzaklıkları toplamı 2δ olan noktaların oluşturduğu hiperbolik elipsi (*merkezil elips*) inceleyelim (şekil 2.2.1).



Şekil 2.2.1 Merkezil hiperbolik elips

1. Elipsin merkezi $e^{\lambda} i$ ile $e^{-\lambda} i$ nin hiperbolik orta noktası olan i dir.

2. Sanal eksenin elipsi kestiği noktalar (asal eksen uç noktaları) A ile $\hat{A}$ ve $\operatorname{Im}(A) > \operatorname{Im}(\hat{A})$ olsun. Bu durumda

$$\rho\left(A, e^{\lambda} i\right) + \rho\left(A, e^{-\lambda} i\right) = 2\delta$$

olur. Ayrıca

$$\rho\left(A, e^{-\lambda} i\right) = \rho\left(A, e^{\lambda} i\right) + 2\lambda$$

olduğu da dikkate alınırsa

$$\rho\left(A, e^{\lambda} i\right) + \rho\left(A, e^{\lambda} i\right) + 2\lambda = 2\delta$$

eşitliğinden A nın i ye olan hiperbolik uzaklığı

$$\rho(A, i) = \rho\left(A, e^{\lambda} i\right) + \lambda = \delta$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\rho\left(\hat{A}, i\right) = \delta$ olduğu da görülebilir. Buna göre $A = e^{\delta} i$ ve $\hat{A} = e^{-\delta} i$ elde edilir.

3. $a, b, \hat{b} \in \boldsymbol{R}^{+}$ ve $a \in \boldsymbol{R}^{-}$ olmak üzere l_0 ın (i den sanal eksene dik olarak geçen hiperbolik doğru) elipsi kestiği noktalar (yedek eksen uç noktaları) $B = a + bi$ ve $\hat{B} = \hat{a} + \hat{b} i$ olsun. Bu durumda

$$\rho\left(B, e^{\lambda} i\right) = \ln\left\{\frac{\left|B - \overline{e^{\lambda} i}\right| + \left|B - e^{\lambda} i\right|}{\left|B - \overline{e^{\lambda} i}\right| - \left|B - e^{\lambda} i\right|}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\left|a + bi + e^{\lambda} i\right| + \left|a + bi - e^{\lambda} i\right|}{\left|a + bi + e^{\lambda} i\right| - \left|a + bi - e^{\lambda} i\right|}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\sqrt{a^2 + \left(b + e^{\lambda}\right)^2} + \sqrt{a^2 + \left(b - e^{\lambda}\right)^2}}{\sqrt{a^2 + \left(b + e^{\lambda}\right)^2} - \sqrt{a^2 + \left(b - e^{\lambda}\right)^2}}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}} - \sqrt{a^2 + b^2 - 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}}}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\sqrt{1 + 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}} + \sqrt{1 - 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}}}{\sqrt{1 + 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}} - \sqrt{1 - 2be^{\lambda} + e^{2\lambda}}}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\sqrt{\dfrac{1+2be^{\lambda}+e^{2\lambda}}{e^{2\lambda}}}+\sqrt{\dfrac{1-2be^{\lambda}+e^{2\lambda}}{e^{2\lambda}}}}{\sqrt{\dfrac{1+2be^{\lambda}+e^{2\lambda}}{e^{2\lambda}}}-\sqrt{\dfrac{1-2be^{\lambda}+e^{2\lambda}}{e^{2\lambda}}}}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\sqrt{e^{-2\lambda}+2be^{-\lambda}+1}+\sqrt{e^{-2\lambda}-2be^{\lambda}+1}}{\sqrt{e^{-2\lambda}+2be^{-\lambda}+1}-\sqrt{e^{-2\lambda}-2be^{-\lambda}+1}}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2+2be^{-\lambda}+e^{-2\lambda}}+\sqrt{a^2+b^2-2be^{-\lambda}+e^{-2\lambda}}}{\sqrt{a^2+b^2+2be^{-\lambda}+e^{-2\lambda}}-\sqrt{a^2+b^2-2be^{-\lambda}+e^{-2\lambda}}}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\sqrt{a^2+\left(b+e^{-\lambda}\right)^2}+\sqrt{a^2+\left(b-e^{-\lambda}\right)^2}}{\sqrt{a^2+\left(b+e^{-\lambda}\right)^2}-\sqrt{a^2+\left(b-e^{-\lambda}\right)^2}}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\left|a+bi+e^{-\lambda}i\right|+\left|a+bi-e^{-\lambda}i\right|}{\left|a+bi+e^{-\lambda}i\right|-\left|a+bi-e^{-\lambda}i\right|}\right\}$$

$$= \ln\left\{\frac{\left|B-\overline{e^{-\lambda}i}\right|+\left|B-e^{-\lambda}i\right|}{\left|B-\overline{e^{-\lambda}i}\right|-\left|B-e^{-\lambda}i\right|}\right\} = \rho\left(B,e^{-\lambda}i\right)$$

olur. Böylece $\rho\left(B,e^{\lambda}i\right)+\rho\left(B,e^{-\lambda}i\right)=2\delta$ olduğundan

$$\rho\left(B,e^{\lambda}i\right)=\rho\left(B,e^{-\lambda}i\right)=\delta \tag{4}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde

$$\rho\left(\hat{B},e^{\lambda}i\right)=\left(\hat{B},e^{-\lambda}i\right)=\delta \tag{5}$$

olduğu da gösterilebilir.

4. (4) ve (5) den $\rho\left(B,e^{\lambda}i\right)=\rho\left(\hat{B},e^{\lambda}i\right)$ olup

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho\left(B,e^{\lambda}i\right)=\sinh^2\frac{1}{2}\rho\left(\hat{B},e^{\lambda}i\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\left|B-e^{\lambda}i\right|^2}{4\operatorname{Im}(B)\operatorname{Im}\left(e^{\lambda}i\right)}=\frac{\left|\hat{B}-e^{\lambda}i\right|^2}{4\operatorname{Im}\left(\hat{B}\right)\operatorname{Im}\left(e^{\lambda}i\right)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $B=a+bi$ ve $\hat{B}=\hat{a}+\hat{b}i$ olduğu dikkate alındığında

$$\frac{\left|a+bi-e^{\lambda}i\right|^2}{4be^{\lambda}}=\frac{\left|\hat{a}+\hat{b}i-e^{\lambda}i\right|^2}{4\hat{b}e^{\lambda}}$$

halini alır. Gerekli sadeleştirmeler ve işlemler yapıldığında sırasıyla

$$\frac{a^2+\left(b-e^{\lambda}\right)^2}{b}=\frac{\hat{a}^2+\left(\hat{b}-e^{\lambda}\right)^2}{\hat{b}}$$

ve

$$\hat{b}\left(a^2+b^2-2be^{\lambda}+e^{2\lambda}\right)=b\left(\hat{a}^2+\hat{b}^2-2\hat{b}e^{\lambda}+e^{2\lambda}\right)$$

eşitliklerine ulaşılır. $a^2+b^2=\hat{a}^2+\hat{b}^2=1$ değeri yerlerine yazılıp çözüme devam edildiğinde önce

$$\hat{b}\left(1-2be^{\lambda}+e^{2\lambda}\right)=b\left(1-2\hat{b}e^{\lambda}+e^{2\lambda}\right)$$

, sonra

$$\hat{b}-2b\hat{b}e^{\lambda}+\hat{b}e^{2\lambda}=b-2b\hat{b}e^{\lambda}+be^{2\lambda}$$

ve daha sonra da

$$\hat{b}\left(1+e^{2\lambda}\right)=b\left(1+e^{2\lambda}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. $1+e^{2\lambda}\neq 0$ olduğu göz önüne alındığında bu son eşitlikten $b=\hat{b}$ sonucuna varılır. Bu sonuç $a^2+b^2=\hat{a}^2+\hat{b}^2$ eşitliğinde yerine konulduğunda $a^2=\hat{a}^2$ eşitliğine, buradan da $B\neq\hat{B}$ eşitsizliği dikkate alındığında $\hat{a}=-a$ sonucuna ulaşılır. Böylece $\hat{B}=-a+bi$ olarak bulunmuş olur.

5. $\rho\left(B,e^{\lambda}i\right)=\delta$ olduğundan

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho\left(B,e^{\lambda}i\right)=\sinh^2\frac{1}{2}\delta$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\left|B-e^{\lambda}i\right|^2}{4\operatorname{Im}(B)\operatorname{Im}\left(e^{\lambda}i\right)}=\sinh^2\frac{1}{2}\delta$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $B=a+bi$ olduğu dikkate alındığında

$$\frac{\left|a+bi-e^{\lambda}i\right|^2}{4be^{\lambda}}=\sinh^2\frac{1}{2}\delta$$

ve buradan

$$a^2+b^2-2be^{\lambda}+e^{2\lambda}=4be^{\lambda}\sinh^2\frac{1}{2}\delta$$

halini alır. $a^2+b^2=1$ değeri yerine yazılıp çözüme devam edildiğinde önce

$$1+e^{2\lambda}=4be^{\lambda}\sinh^2\frac{1}{2}\delta+2be^{\lambda}$$

, ardından

$$1+e^{2\lambda}=2be^{\lambda}\left(2\sinh^2\frac{1}{2}\delta+1\right)$$

,sonra

$$\frac{1+e^{2\lambda}}{2e^{\lambda}}=b\cosh\delta$$

,daha sonra da

$$\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}=b\cosh\delta$$

eşitlikleri ve böylece

$$\cosh\lambda=b\cosh\delta \tag{6}$$

bağıntısı elde edilir. Eğer B nin elipsin merkezine olan hiperbolik uzaklığına σ dersek

$$\rho(B,i)=\sigma$$

ve böylece

$$\sinh^2\frac{1}{2}\rho(B,i)=\sinh^2\frac{1}{2}\sigma$$

olacağından

$$\frac{|B-i|^2}{4\operatorname{Im}(B)\operatorname{Im}(i)}=\sinh^2\frac{1}{2}\sigma$$

yazılabilir. $B=a+bi$ olduğu dikkate alındığında sırasıyla

$$\frac{a^2+(b-1)^2}{4b\cdot 1}=\sinh^2\frac{1}{2}\sigma$$

ve

$$a^2+b^2-2b+1=4b\sinh^2\frac{1}{2}\sigma$$

eşitlikleri, $a^2+b^2=1$ değeri yerine yazıldığında da

$$2-2b=4b\sinh^2\frac{1}{2}\sigma$$

ve

$$1 = b\left(2\sinh^2\frac{1}{2}\sigma + 1\right)$$

eşitlikleri elde edilir. $2\sinh^2\frac{1}{2}\sigma + 1 = \cosh\sigma$ olduğu göz önüne alındığında bu son eşitlikten $1 = b\cosh\sigma$, yani

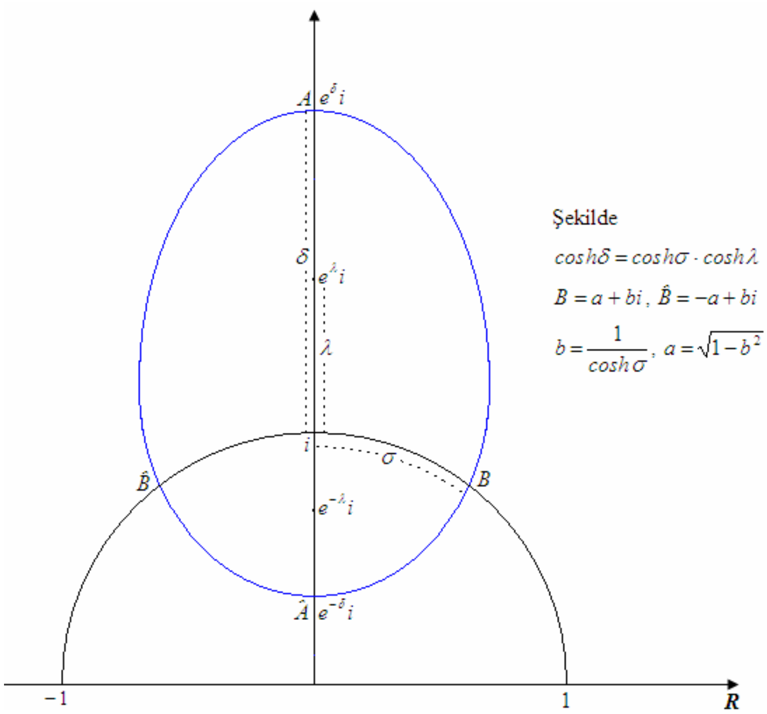
$$b = \frac{1}{\cosh\sigma} \tag{7}$$

bağıntısına ulaşılır. (6) da (7) yi yerine yazarsak elipsimizin asal eksen yarı uzunluğu (δ), yedek eksen yarı uzunluğu (σ) ve odaklar arası yarı uzunluk (λ) arasında

$$\cosh\delta = \cosh\sigma \cdot \cosh\lambda \tag{8}$$

bağıntısı elde edilir. (8. bağıntı B, i ve $e^{\lambda}i$ nin oluşturduğu hiperbolik dik üçgende hiperbolik kosinüs teoreminden de elde edilebilir).

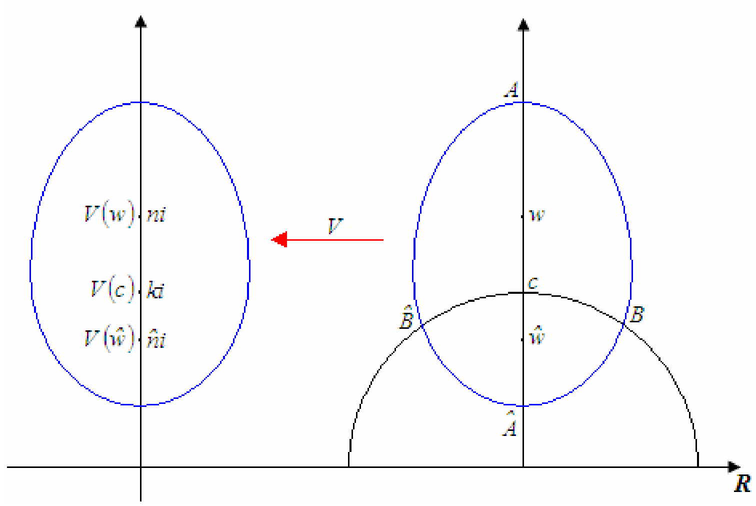
Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlara göre elipsimiz aşağıdaki gibidir (şekil 2.2.2).



Şekil 2.2.2 Merkezil hiperbolik elips

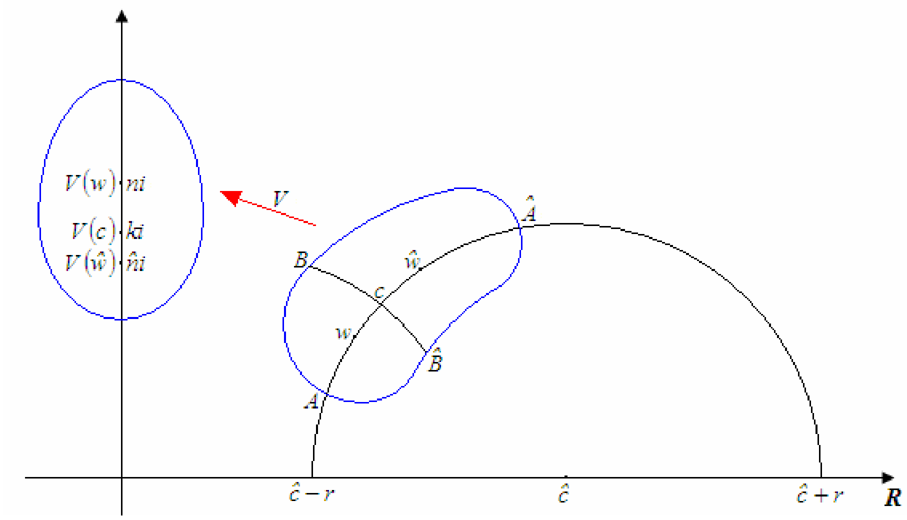
2.2.6 *U* da herhangi bir hiperbolik elips. Şimdi de odakları $w, \hat{w} \in \boldsymbol{U}$ ve $2\delta > \rho(w, \hat{w}) > 0$ için odaklara hiperbolik uzaklıkları toplamı 2δ olan noktaların oluşturduğu $\rho(z, w) + \rho(z, \hat{w}) = 2\delta$ denklemli hiperbolik elipsi inceleyelim:

Eğer $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(\hat{w})$ ise bu durumda asal eksen ***R*** ye dik $x = \mathrm{Re}(w)$ Öklid doğrusu üzerinde olup asal ekseni taşıyan hiperbolik doğru $V(z) = z - \mathrm{Re}(w) \in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü ile pozitif sanal eksen üzerine resmedilebilir (şekil 2.2.3).



Şekil 2.2.3 ***U*** da herhangi bir hiperbolik elips

Eğer $\mathrm{Re}(w) \neq \mathrm{Re}(\hat{w})$ ise bu durumda asal eksen merkezi $\hat{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|w|^2 - |\hat{w}|^2}{\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Re}(\hat{w})}$ ve yarıçapı $r = |w - \hat{c}|$ olan Öklid çemberi üzerinde olup asal ekseni taşıyan hiperbolik doğru $V(z) = \frac{z - (\hat{c} + r)}{z - (\hat{c} - r)} \in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü ile pozitif sanal eksen üzerine resmedilebilir (şekil 2.2.4).



Şekil 2.2.4 **U** da herhangi bir hiperbolik elips

Yani her iki durumda da $V \in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü ile elipsimizin odakları ve merkezi (c) sanal eksen üzerine resmedilmiş olur. Buna göre $k, n, \hat{n} \in \boldsymbol{R}^{+}$ olmak üzere $V(c) = ki$, $V(w) = ni$ ve $V(\hat{w}) = \hat{n}i$ dersek odakların merkeze hiperbolik uzaklıkları eşit olduğundan (ve $\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ nun dönüşümleri altında hiperbolik uzunluk korunduğundan)

$$\ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{k}{\hat{n}}\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{n}{k} = \frac{k}{\hat{n}}$$

ve böylece

$$k = \sqrt{n \cdot \hat{n}}$$

veya

$$k = \sqrt{-V(w) \cdot V(\hat{w})}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca elipsin odaklar arası yarı uzunluğuna λ dersek

$$\ln\left(\frac{n}{k}\right) = \lambda$$

ve böylece

$$\frac{n}{k} = e^{\lambda}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı i ile çarpıldığında

$$\frac{ni}{k} = e^{\lambda} i$$

ve $V(w) = ni$ olduğu dikkate alındığında

$$\frac{V(w)}{k} = e^{\lambda} i$$

olarak bulunur.

Benzer işlemlerle

$$\ln\left(\frac{k}{\hat{n}}\right) = \lambda$$

eşitliğinden

$$\frac{k}{\hat{n}} = e^{\lambda}$$

veya

$$\frac{\hat{n}}{k} = e^{-\lambda}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı i ile çarpılıp $V(w) = ni$ olduğu da dikkate alındığında

$$\frac{\hat{n}i}{k} = \frac{V(\hat{w})}{k} = e^{-\lambda} i$$

olarak bulunur.

Öyle ise $T = U_{\frac{1}{k}} \circ V$ dönüşümü elipsimizi yukarıda incelediğimiz i merkezli $e^{\lambda} i$, $e^{-\lambda} i$ odaklı merkezil elipse

$$T(c) = \left(U_{\frac{1}{k}} \circ V\right)(c) = U_{\frac{1}{k}}(V(c)) = U_{\frac{1}{k}}(ki) = i$$

$$T(w) = \left(U_{\frac{1}{k}} \circ V\right)(w) = U_{\frac{1}{k}}(V(w)) = U_{\frac{1}{k}}(ni) = \frac{ni}{k} = e^{\lambda} i$$

$$T(\hat{w}) = \left(U_{\frac{1}{k}} \circ V\right)(\hat{w}) = U_{\frac{1}{k}}(V(\hat{w})) = U_{\frac{1}{k}}(\hat{n}i) = \frac{\hat{n}i}{k} = e^{-\lambda} i$$

olacak biçimde resmetmiş olur.

Sonuç 1. Möbius dönüşümleri hiperbolik uzunlukları koruduğundan merkezil elips için elde ettiğimiz (8) bağıntısı yani

$$\cosh\delta = \cosh\sigma \cdot \cosh\lambda$$

bağıntısı tüm elipslerde doğrudur.

Not. Bağıntıda δ elipsin asal eksen yarı hiperbolik uzunluğunu,
σ elipsin yedek eksen yarı hiperbolik uzunluğunu,
λ elipsin odaklar arası yarı hiperbolik uzunluğunu göstermektedir.

Sonuç 2. $\dfrac{V(w)}{k} = e^{\lambda} i$ olduğundan

$$\lambda = \ln\frac{V(w)}{ki} = \ln\frac{V(w)}{\sqrt{-V(w)V(\hat{w})}i} = \ln\frac{\sqrt{-V(w)V(w)}i}{\sqrt{-V(w)V(\hat{w})}i} = \ln\sqrt{\frac{V(w)}{V(\hat{w})}}$$

yani

$$\lambda = \ln\sqrt{\frac{V(w)}{V(\hat{w})}}$$

bağıntısı elde edilir.

Not. λ yı

$$\lambda = \ln\left\{\frac{\left|w-\overline{\hat{w}}\right| + \left|w-\hat{w}\right|}{\left|w-\overline{\hat{w}}\right| - \left|w-\hat{w}\right|}\right\}$$

bağıntısından da bulabiliriz.

Sonuç 3. $a,b \in \boldsymbol{R}^{+}$, $a^2 + b^2 = 1$ ve $b = \dfrac{1}{\cosh\sigma}$ olmak üzere elipsimizin merkezi

$$c = T^{-1}(i)$$

asal eksen uç noktaları

$$A = T^{-1}\left(e^{\delta} i\right) \text{ ve } \hat{A} = T^{-1}\left(e^{-\delta} i\right)$$

ve yedek eksen uç noktaları

$$B = T^{-1}(a+bi) \text{ ve } \hat{B} = T^{-1}(-a+bi)$$

dir.

Not. $V(z) = z - \mathrm{Re}(w)$ için $T^{-1}(z) = kz + \mathrm{Re}(w)$

$V(z) = \dfrac{z - (\hat{c} + r)}{z - (\hat{c} - r)}$ için $T^{-1}(z) = \dfrac{(\hat{c} - r)kz - (\hat{c} + r)}{kz - 1}$ dir.

2.2.7 Örnek. $w = 2 + 3i$, $\hat{w} = 9 + 4i$ ve $\delta = \ln 3\sqrt{3}$ olmak üzere denklemi $\rho(z, w) + \rho(z, \hat{w}) = 2\ln 3\sqrt{3}$ olan hiperbolik elipsi inceleyelim:

$$\hat{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|w|^2 - |\hat{w}|^2}{\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Re}(\hat{w})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13 - 97}{2 - 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-84}{-7} = 6$$

$$r = |w - \hat{c}| = |2 + 3i - 6| = 5$$

$$V(z) = \frac{z - (\hat{c} + r)}{z - (\hat{c} - r)} = \frac{z - 11}{z - 1}$$

$$V(w) = \frac{w - 11}{w - 1} = \frac{-9 + 3i}{1 + 3i} = \frac{-9 + 3i + 27i - 9i^2}{1 - 9i^2} = 3i$$

$$V(\hat{w}) = \frac{\hat{w} - 11}{\hat{w} - 1} = \frac{-2 + 4i}{8 + 4i} = \frac{-16 + 32i + 8i - 16i^2}{64 - 16i^2} = \frac{i}{2}$$

$$\lambda = \ln\sqrt{\frac{V(w)}{V(\hat{w})}} = \ln\sqrt{\frac{3i}{i/2}} = \ln\sqrt{6}$$

olur.

Ayrıca

$$\cosh\delta = \cosh\sigma \cdot \cosh\lambda$$

bağıntısında $\delta = \ln 3\sqrt{3}$ ve $\lambda = \ln\sqrt{6}$ yerine yazılırsa

$$\cosh \ln 3\sqrt{3} = \cosh \ln\sqrt{6} \cdot \cosh\sigma$$

yani

$$\frac{e^{\ln 3\sqrt{3}} + e^{-\ln 3\sqrt{3}}}{2} = \frac{e^{\ln\sqrt{6}} + e^{-\ln\sqrt{6}}}{2} \cdot \cosh\sigma$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\cosh\sigma = \frac{e^{\ln 3\sqrt{3}} + e^{-\ln 3\sqrt{3}}}{e^{\ln\sqrt{6}} + e^{-\ln\sqrt{6}}} = \frac{3\sqrt{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{6} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{\dfrac{28}{3\sqrt{3}}}{\dfrac{7}{\sqrt{6}}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\cosh\sigma = \frac{e^{\sigma} + e^{-\sigma}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\sigma} + \frac{1}{e^{\sigma}}\right) = \frac{\left(e^{\sigma}\right)^2 + 1}{2e^{\sigma}}$$

olduğundan

$$\frac{\left(e^{\sigma}\right)^2 + 1}{2e^{\sigma}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ve böylece

$$3\left(e^{\sigma}\right)^2 - 8\sqrt{2}e^{\sigma} + 3 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem e^{σ} değişkeni için çözüldüğünde

$$\Delta = \left(-8\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 92$$

olup

$$e^{\sigma} = \frac{8\sqrt{2} \mp \sqrt{92}}{2\cdot 3} = \frac{4\sqrt{2} \mp \sqrt{23}}{3}$$

olarak bulunur.

Eğer $e^{\sigma} = \dfrac{4\sqrt{2} - \sqrt{23}}{3}$ ise $\sigma = \ln\left(\dfrac{4\sqrt{2} - \sqrt{23}}{3}\right) < 0$ olur ki bu, uzunluk negatif olamayacağından, mümkün değildir ($\dfrac{4\sqrt{2} - \sqrt{23}}{3} < 1$).

Eğer $e^{\sigma} = \dfrac{4\sqrt{2} + \sqrt{23}}{3}$ ise $\sigma = \ln\left(\dfrac{4\sqrt{2} + \sqrt{23}}{3}\right)$ olur.

Ayrıca

$$b = \frac{1}{\cosh\sigma} = \frac{1}{4\sqrt{2}/3} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

ve $a^2 + b^2 = 1$ den

$$a^2 + \frac{9}{32} = 1$$

olup

$$a = \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$k=\sqrt{-V(w)\cdot V(\hat{w})}=\sqrt{-3i\cdot\frac{i}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$T(z)=\left(U_{\frac{1}{k}}\circ V\right)(z)=\frac{1}{\sqrt{6}/2}\cdot\frac{z-11}{z-1}=\frac{\sqrt{6}z-11\sqrt{6}}{3z-3}$$

ve

$$T^{-1}(z)=\frac{(\hat{c}-r)kz-(\hat{c}+r)}{kz-1}=\frac{kz-11}{kz-1}=\frac{\sqrt{6}z-22}{\sqrt{6}z-2}$$

elde edilir. Buna göre elipsimizin merkezi

$$c=T^{-1}(i)=\frac{\sqrt{6}i-22}{\sqrt{6}i-2}=\frac{6i^2-22\sqrt{6}i+2\sqrt{6}i-44}{6i^2-4}=\frac{-50-20\sqrt{6}i}{-10}=5+2\sqrt{6}i\,,$$

asal eksen uç noktaları

$$A=T^{-1}\left(e^{\delta}i\right)=T^{-1}\left(e^{\ln 3\sqrt{3}}i\right)=T^{-1}\left(3\sqrt{3}i\right)=\frac{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3}i-22}{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{3}i-2}=\frac{9\sqrt{2}i-22}{9\sqrt{2}i-2}$$

$$=\frac{162i^2-198\sqrt{2}i+18\sqrt{2}i-44}{162i^2-4}=\frac{-206-180\sqrt{2}i}{-166}=\frac{103+90\sqrt{2}i}{83}$$

$$\hat{A}=T^{-1}\left(e^{-\delta}i\right)=T^{-1}\left(e^{-\ln 3\sqrt{3}}i\right)=T^{-1}\left(\frac{i}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\sqrt{6}/3\sqrt{3}\right)i-22}{\left(\sqrt{6}/3\sqrt{3}\right)i-2}=\frac{\sqrt{2}i-66}{\sqrt{2}i-6}$$

$$=\frac{2i^2-66\sqrt{2}i+6\sqrt{2}i-396}{2i^2-36}=\frac{-398-60\sqrt{2}i}{-38}=\frac{199+30\sqrt{2}i}{19}\,,$$

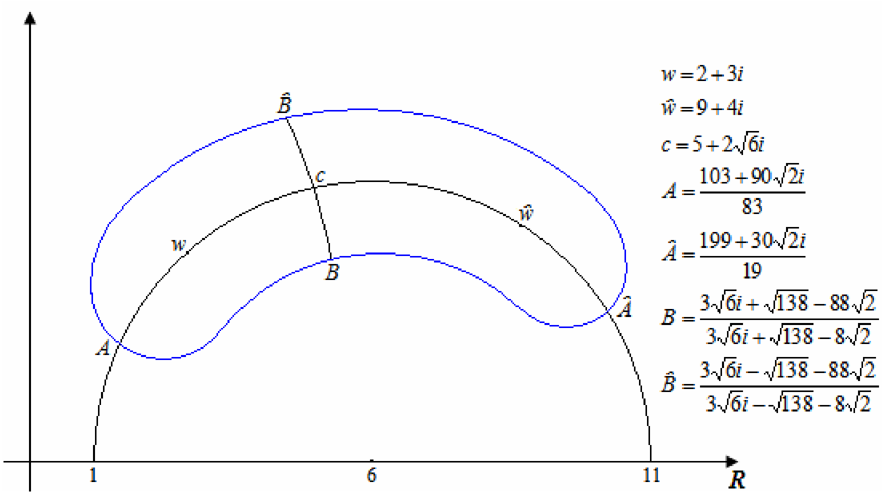
yedek eksen uç noktaları

$$B=T^{-1}(a+bi)=T^{-1}\left(\frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}i\right)=\frac{3\sqrt{6}i+\sqrt{138}-88\sqrt{2}}{3\sqrt{6}i+\sqrt{138-8\sqrt{2}}}$$

$$\hat{B}=T^{-1}(-a+bi)=T^{-1}\left(-\frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}i\right)=\frac{3\sqrt{6}i-\sqrt{138}-88\sqrt{2}}{3\sqrt{6}i-\sqrt{138-8\sqrt{2}}}$$

olarak bulunur.

Bu sonuçlara göre elipsimizin şekli aşağıdaki gibidir (şekil 2.2.5).



Şekil 2.2.5 U da $\rho(z, w) + \rho(z, \hat{w}) = 2\ln 3\sqrt{3}$ denklemli hiperbolik elips

2.3 *U* DA HİPERBOLİK HİPERBOL

Bu kısımda önce hiperbolik hiperbolün ve yardımcı elemanlarının tanımı yapılıp merkezil hiperbol incelenecek, merkezil hiperbolün sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar ile asimptotları bulunacaktır. Sonra da Möb($\boldsymbol{U}$) nun elemanları kullanılarak merkezil hiperbol için elde edilen sonuçlar $\boldsymbol{U}$ da herhangi bir hiperbolik hiperbole aktarılacaktır.

2.3.1 Tanım. $\boldsymbol{U}$ da sabit iki noktaya hiperbolik uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktaların kümesine *hiperbolik hiperbol*, sabit noktalara hiperbolün *odakları* ve odaklar arası hiperbolik uzaklığa da *odak uzaklığı* denir.

Buna göre odakları $w, \hat{w} \in \boldsymbol{U}$ ve $\rho(w, \hat{w}) > 2\delta > 0$ için odaklara hiperbolik uzaklıkları farkının mutlak değeri 2δ olan noktaların oluşturduğu hiperbolik hiperbolün denklemi $|\rho(z, w) - \rho(z, \hat{w})| = 2\delta$ dır.

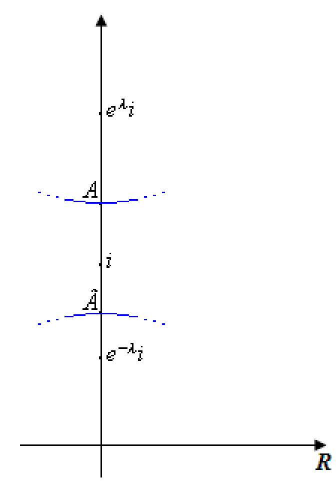
2.3.2 Tanım. Odaklardan geçen hiperbolik doğrunun hiperbolü kestiği noktalar ile bu noktalar arasında kalan kısmının oluşturduğu hiperbolik doğru parçasına hiperbolün *asal ekseni* denir.

2.3.3 Tanım. Asal eksen üzerinde ve odaklara eşit hiperbolik uzaklıkta bulunan noktaya hiperbolün *merkezi* denir.

2.3.4 Merkezil Hiperbol. Öncelikle, $\lambda, \delta \in \boldsymbol{R}$ ve $\lambda > \delta > 0$ olmak üzere, odakları sanal eksen üzerinde $e^{\lambda} i$ ile $e^{-\lambda} i$ noktaları olup odaklara hiperbolik uzaklıkları farkının mutlak değeri 2δ olan noktaların oluşturduğu hiperbolik hiperbolü (merkezil hiperbolü) inceleyelim:

1. Hiperbolün merkezi $e^{\lambda} i$ ile $e^{-\lambda} i$ nin hiperbolik orta noktası olan *i* dir.

2. Sanal eksenin hiperbolü kestiği noktalar (asal eksenin uç noktaları) *A* ile $\hat{A}$ ve $\operatorname{Im}(A) > \operatorname{Im}(\hat{A})$ olsun (şekil 2.3.1).



Şekil 2.3.1 Merkezil hiperbolik hiperbol

Bu durumda

$$\left|\rho\left(A, e^{\lambda} i\right) - \rho\left(A, e^{-\lambda} i\right)\right| = \rho\left(A, e^{-\lambda} i\right) - \rho\left(A, e^{\lambda} i\right) = 2\delta$$

ve

$$\rho(A, e^{\lambda}i) + \rho(A, e^{-\lambda}i) = 2\lambda$$

olduğundan

$$\rho(A, e^{-\lambda}i) = \lambda + \delta \text{ veya } \ln\left(\frac{\mathrm{Im}(A)}{e^{-\lambda}}\right) = \lambda + \delta$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\mathrm{Im}(A)}{e^{-\lambda}} = e^{\lambda+\delta} \text{ veya } \mathrm{Im}(A) = e^{\delta}$$

olup

$$A = e^{\delta}i$$

ve benzer şekilde

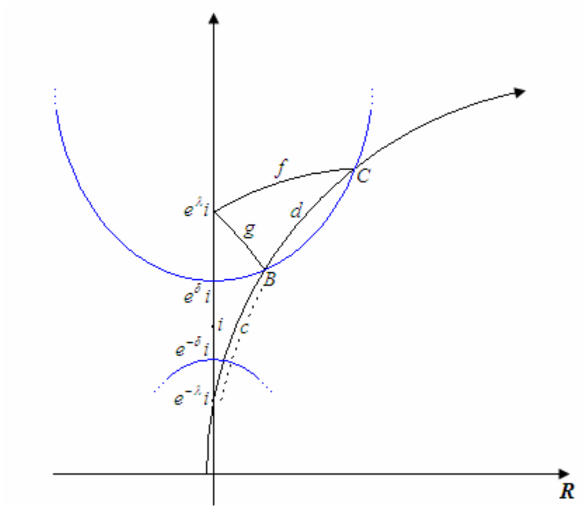
$$\hat{A} = e^{-\delta}i$$

bulunur.

3. Acaba hiperbolümüzün diğer noktaları nasıl bir seyir izler? Bu soruyu cevaplamak için bazı ispatlar yapmamız gerekiyor:

Önerme. Odaklardan geçen ve hiperbolümüzü kesen bir hiperbolik doğru, hiperbolün kestiği parçasını (üst ya da alt yarısını) ikinci bir kez daha kesmez.

İspat. Aksine $e^{-\lambda}i$ odağından geçen bir hiperbolik doğrunun hiperbolümüzün üst yarısını şekilde görüldüğü gibi iki defa kestiğini düşünelim (şekil 2.3.2).



Şekil 2.3.2 Merkezil hiperbolik hiperbol

Bu durumda $\rho\left(e^{-\lambda}i,B\right)=c$, $\rho(B,C)=d$, $\rho\left(e^{\lambda}i,C\right)=f$ ve $\rho\left(e^{\lambda}i,B\right)=g$ olmak üzere B ile C hiperbole ait olduklarından

$$c-g=c+d-f$$

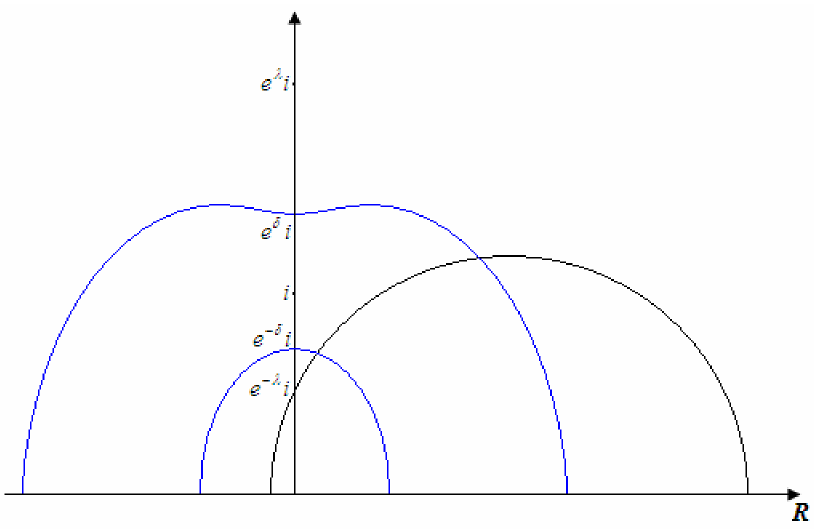
ve dolayısıyla köşeleri $e^{\lambda}i$, B ve C noktaları olan hiperbolik üçgende

$$f=d+g$$

eşitliğinin sağlanması gerekir ki bir hiperbolik üçgende bu mümkün değildir.

Benzer şekilde $e^{\lambda}i$ den geçen bir hiperbolik doğrunun hiperbolün alt yarısını birden fazla noktada kesmesinin mümkün olmadığı gösterilebilir.■

Sonuç. Hiperbolümüzün üst yarısının kolları $e^{-\lambda}i$ den geçen hiperbolik doğruları en fazla bir defa kestiklerinden reel eksene doğru yönelirler ve uzantıları reel eksende son bulur (böylece alt yarının kollarının da reel eksene yönelip uzantılarının reel eksende son bulduğu açıktır). Buna göre hiperbolümüzün şekli aşağıdaki gibidir (şekil 2.3.3).



Şekil 2.3.3 Merkezil hiperbolik hiperbol

4. Acaba hiperbolümüzün sonsuzdaki sınırını oluşturan noktaları, yani hiperbolün reel ekseni kestiği noktaları nasıl bulabiliriz?

Bu soruyu cevaplamak için hiperbolün z ye bağlı denkleminde $\mathrm{Im}(z)$ değeri 0 a giderken limit almalıyız. Buna göre hiperbolümüzün üst yarısına ait bir $z=x+yi\in \boldsymbol{C}$ noktası için

$$\rho\left(z,e^{-\lambda}i\right)-\rho\left(z,e^{\lambda}i\right)=2\delta$$

denkleminde $\rho(z,w)=\ln\left\{\dfrac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right\}$ formülü kullanılırsa

$$\ln\left\{\frac{\left|z-\overline{e^{-\lambda}i}\right|+\left|z-e^{-\lambda}i\right|}{\left|z-\overline{e^{-\lambda}i}\right|-\left|z-e^{-\lambda}i\right|}\right\}-\ln\left\{\frac{\left|z-\overline{e^{\lambda}i}\right|+\left|z-e^{\lambda}i\right|}{\left|z-\overline{e^{\lambda}i}\right|-\left|z-e^{\lambda}i\right|}\right\}=2\delta$$

veya

$$\ln\left\{\frac{\left|z+e^{-\lambda}i\right|+\left|z-e^{-\lambda}i\right|}{\left|z+e^{-\lambda}i\right|-\left|z-e^{-\lambda}i\right|}\right\}-\ln\left\{\frac{\left|z+e^{\lambda}i\right|+\left|z-e^{\lambda}i\right|}{\left|z+e^{\lambda}i\right|-\left|z-e^{\lambda}i\right|}\right\}=2\delta$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $z=x+yi$ yazıldığında

$$\ln\left\{\frac{\left|x+yi+e^{-\lambda}i\right|+\left|x+yi-e^{-\lambda}i\right|}{\left|x+yi+e^{-\lambda}i\right|-\left|x+yi-e^{-\lambda}i\right|}\right\}-\ln\left\{\frac{\left|x+yi+e^{\lambda}i\right|+\left|x+yi-e^{\lambda}i\right|}{\left|x+yi+e^{\lambda}i\right|-\left|x+yi-e^{\lambda}i\right|}\right\}=2\delta$$

ve doğal logaritma fonksiyonunun özellikleri kullanıldığında

$$\ln\left\{\frac{\left|x+\left(y+e^{-\lambda}\right)i\right|+\left|x+\left(y-e^{-\lambda}\right)i\right|}{\left|x+\left(y+e^{-\lambda}\right)i\right|-\left|x+\left(y-e^{-\lambda}\right)i\right|}\div\frac{\left|x+\left(y+e^{\lambda}\right)i\right|+\left|x+\left(y-e^{\lambda}\right)i\right|}{\left|x+\left(y+e^{\lambda}\right)i\right|-\left|x+\left(y-e^{\lambda}\right)i\right|}\right\}=2\delta$$

veya

$$\ln\left\{\frac{\left|x+\left(y+e^{-\lambda}\right)i\right|+\left|x+\left(y-e^{-\lambda}\right)i\right|}{\left|x+\left(y+e^{-\lambda}\right)i\right|-\left|x+\left(y-e^{-\lambda}\right)i\right|}\cdot\frac{\left|x+\left(y+e^{\lambda}\right)i\right|-\left|x+\left(y-e^{\lambda}\right)i\right|}{\left|x+\left(y+e^{\lambda}\right)i\right|+\left|x+\left(y-e^{\lambda}\right)i\right|}\right\}=2\delta$$

bulunur. Böylece elde edilen

$$\ln\left\{\frac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{-\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{-\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(y+e^{-\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{-\lambda}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(y+e^{\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{\lambda}\right)^2}}\right\}=2\delta$$

eşitliğinde her iki tarafın $\operatorname{Im}(z)=y\to 0$ için limiti alınırsa birinci tarafta

$$\lim_{y\to 0}\ln\left\{\frac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{-\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{-\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(y+e^{-\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{-\lambda}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(y+e^{\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{\lambda}\right)^2}}\right\}$$

$$=\ln\left\{\frac{\sqrt{x^2+e^{-2\lambda}}+\sqrt{x^2+e^{-2\lambda}}}{\sqrt{x^2+e^{-2\lambda}}-\sqrt{x^2+e^{-2\lambda}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+e^{2\lambda}}-\sqrt{x^2+e^{2\lambda}}}{\sqrt{x^2+e^{2\lambda}}+\sqrt{x^2+e^{2\lambda}}}\right\}$$

$$= \ln\left\{ \frac{2\sqrt{x^2 + e^{-2\lambda}}}{0} \cdot \frac{0}{2\sqrt{x^2 + e^{2\lambda}}} \right\} = \ln\left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad !$$

belirsizliği elde edilir.

Bu belirsizliği aşmak için L' Hospital kuralını kullandığımızda birinci tarafın limiti

$$\lim_{y\to 0} \ln\left\{ \frac{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{-\lambda}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - e^{-\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{-\lambda}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - e^{-\lambda}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{\lambda}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - e^{\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{\lambda}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - e^{\lambda}\right)^2}} \right\}$$

$$= \lim_{y\to 0} \ln\left\{ \frac{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{-\lambda}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - e^{-\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{\lambda}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - e^{\lambda}\right)^2}} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2 + \left(y + e^{\lambda}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - e^{\lambda}\right)^2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2 + \left(y + e^{-\lambda}\right)^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - e^{-\lambda}\right)^2}\right)'} \right\}$$

$$= \lim_{y\to 0} \ln\left\{ \frac{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{-\lambda}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - e^{-\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2 + \left(y + e^{\lambda}\right)^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - e^{\lambda}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(x^2 + \left(y + e^{\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(y + e^{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \left(y - e^{\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(y - e^{\lambda}\right)}{\frac{1}{2}\left(x^2 + \left(y + e^{-\lambda}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\left(y + e^{-\lambda}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \left(y - e^{-\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(y - e^{-\lambda}\right)} \right\}$$

$$= \ln\left\{ \frac{\sqrt{x^2 + e^{-2\lambda}} + \sqrt{x^2 + e^{-2\lambda}}}{\sqrt{x^2 + e^{2\lambda}} + \sqrt{x^2 + e^{2\lambda}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(x^2 + e^{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2e^{\lambda} - \frac{1}{2}\left(x^2 + e^{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2e^{\lambda}\right)}{\frac{1}{2}\left(x^2 + e^{-2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2e^{-\lambda} - \frac{1}{2}\left(x^2 + e^{-2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-2e^{-\lambda}\right)} \right\}$$

$$= \ln\left\{ \frac{\sqrt{x^2 + e^{-2\lambda}}}{\sqrt{x^2 + e^{2\lambda}}} \cdot \frac{\left(x^2 + e^{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\lambda} + \left(x^2 + e^{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\lambda}}{\left(x^2 + e^{-2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\lambda} + \left(x^2 + e^{-2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\lambda}} \right\}$$

$$= \ln\left\{ \frac{\sqrt{x^2 + e^{-2\lambda}}}{\sqrt{x^2 + e^{2\lambda}}} \cdot \frac{\left(x^2 + e^{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\lambda}}{\left(x^2 + e^{-2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\lambda}} \right\} = \ln\left\{ \frac{\left(x^2 + e^{-2\lambda}\right) \cdot e^{\lambda}}{\left(x^2 + e^{2\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda}} \right\}$$

olarak bulunur. Böylece elde edilen

$$\ln\left\{ \frac{\left(x^2 + e^{-2\lambda}\right) \cdot e^{\lambda}}{\left(x^2 + e^{2\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda}} \right\} = 2\delta$$

eşitliğinin çözümünden sırasıyla önce

$$\frac{\left(x^2+e^{-2\lambda}\right)e^{2\lambda}}{x^2+e^{2\lambda}}=e^{2\delta},$$

sonra

$$x^2\cdot e^{2\lambda}+1=x^2\cdot e^{2\delta}+e^{2\lambda+2\delta}$$

ve daha sonra

$$1-e^{2\lambda+2\delta}=x^2\left(e^{2\delta}-e^{2\lambda}\right)$$

veya

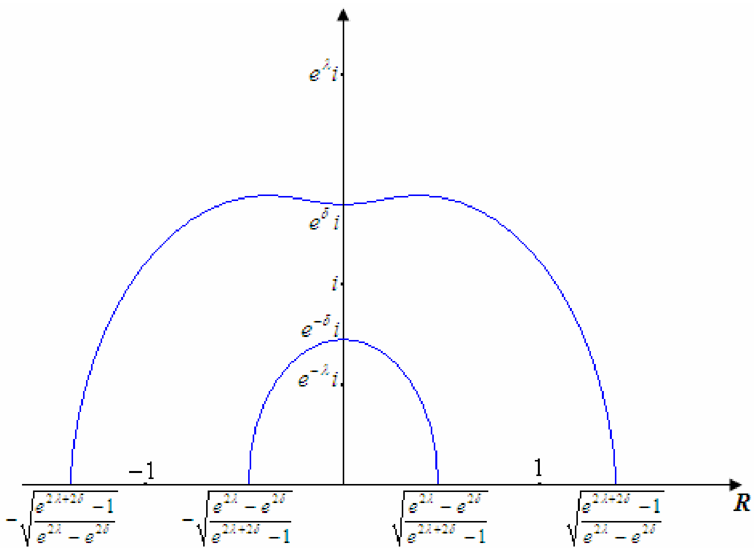
$$x^2=\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1}{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre hiperbolümüzün üst yarısının sonsuzdaki sınırı

$$x=\pm\sqrt{\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1}{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}}\in \boldsymbol{R}$$

noktalarından oluşmaktadır.

Benzer bir işlemle hiperbolümüzün alt yarısının sonsuzdaki sınırını oluşturan noktaların da $x=\pm\sqrt{\frac{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta}-1}}\in \boldsymbol{R}$ olduğu gösterilebilir (şekil 2.3.4).



Şekil 2.3.4 Merkezil hiperbolik hiperbol

Not. $0<\delta<\lambda$ olduğundan $1<e^{2\delta}$ ve böylece $1-e^{2\delta}<0$ olup

$$\left(e^{2\lambda}+1\right)\cdot\left(1-e^{2\delta}\right)=e^{2\lambda}-e^{2\lambda+2\delta}+1-e^{2\delta}<0$$

elde edilir. Ayrıca $\delta < \lambda$ olduğu da dikkate alındığında

$$0 < e^{2\lambda} - e^{2\delta} < e^{2\lambda+2\delta} - 1$$

ve buradan

$$0 < \frac{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta} - 1} < 1 < \frac{e^{2\lambda+2\delta} - 1}{e^{2\lambda} - e^{2\delta}} \text{ veya } 0 < \sqrt{\frac{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta} - 1}} < 1 < \sqrt{\frac{e^{2\lambda+2\delta} - 1}{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme. $p \in \boldsymbol{R}^{+}$ ve $q = \dfrac{1}{p}$ olmak üzere sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin p ve $-q$ noktaları olan hiperbolik doğru i den geçer.

İspat. $\boldsymbol{R}$ yi p ile $-q$ de dik kesen Öklid çemberinin merkezi $\dfrac{p-q}{2}$ ve $\dfrac{p+q}{2}$ dir. Ayrıca $q = \dfrac{1}{p}$ olduğundan $pq = 1$ dir. Buna göre

$$\left| i - \frac{p-q}{2} \right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + p^2 + q^2 - 2pq}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4pq + p^2 + q^2 - 2pq}{4}} = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + 2pq}{4}}$$

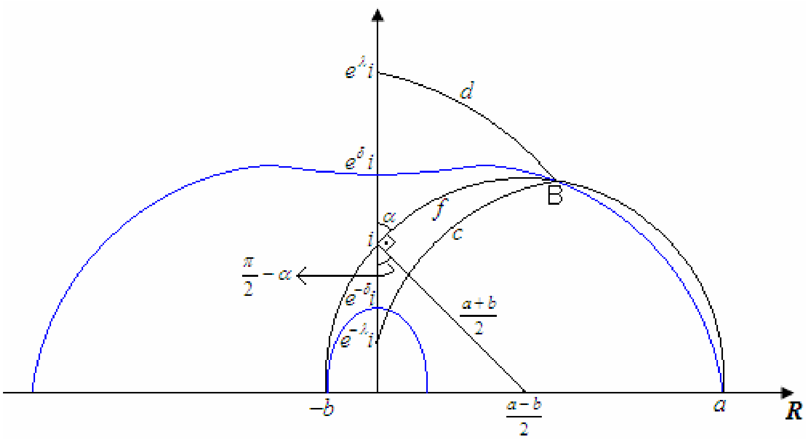
$$= \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2} = \frac{p+q}{2}$$

eşitliği ispatı tamamlar.■

Sonuç. $a = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda+2\delta} - 1}{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}}$ ve $b = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta} - 1}}$ olmak üzere sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin a ve $-b$ noktaları olan hiperbolik doğru ile sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin $-a$ ve b noktaları olan hiperbolik doğru hiperbolümüzün merkezi olan i den geçer.

Önerme. $a = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda+2\delta} - 1}{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}}$ ve $b = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta} - 1}}$ olmak üzere sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin a ve $-b$ noktaları olan hiperbolik doğrunun hiperbolümüz ile kesişimi boş kümedir.

İspat. Aksine bahsi geçen doğrunun hiperbolümüz ile aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi kesiştiğini varsayalım (şekil 2.3.5).



Şekil 2.3.5 Merkezil hiperbolik hiperbolde asimtotlar

Şekle göre

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1}{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}}-\sqrt{\frac{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta}-1}}}{\sqrt{\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1}{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}}+\sqrt{\frac{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta}-1}}}=\frac{\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1-\left(e^{2\lambda}-e^{2\delta}\right)}{\sqrt{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}\cdot\sqrt{e^{2\lambda+2\delta}-1}}}{\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1+\left(e^{2\lambda}-e^{2\delta}\right)}{\sqrt{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}\cdot\sqrt{e^{2\lambda+2\delta}-1}}}$$

$$=\frac{e^{2\lambda}\left(e^{2\delta}-1\right)+e^{2\delta}-1}{e^{2\lambda}\left(e^{2\delta}+1\right)-e^{2\delta}-1}=\frac{\left(e^{2\lambda}+1\right)\left(e^{2\delta}-1\right)}{\left(e^{2\lambda}-1\right)\left(e^{2\delta}+1\right)}$$

dir. Şekilde $\rho\left(B,e^{\lambda}i\right)=d$, $\rho\left(B,i\right)=f$, $\rho\left(B,e^{-\lambda}i\right)=c$ olmak üzere B, $e^{\lambda}i$ ve i nin oluşturduğu hiperbolik üçgende hiperbolik kosinüs teoremi gereğince

$$\cosh d=\cosh\lambda\cdot\cosh f-\sinh\lambda\cdot\sinh f\cdot\cosh\alpha$$

$$=\cosh\lambda\cdot\cosh f-\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\cdot\sinh f\cdot\frac{\left(e^{2\lambda}+1\right)\cdot\left(e^{2\delta}-1\right)}{\left(e^{2\lambda}-1\right)\cdot\left(e^{2\delta}+1\right)}$$

$$=\cosh\lambda\cdot\cosh f-\sinh f\cdot\frac{e^{2\lambda}-1}{2e^{\lambda}}\cdot\frac{\left(e^{2\lambda}+1\right)\cdot\left(e^{2\delta}-1\right)}{\left(e^{2\lambda}-1\right)\cdot\left(e^{2\delta}+1\right)}$$

$$=\cosh\lambda\cdot\cosh f-\sinh f\cdot\frac{e^{2\lambda}+1}{2e^{\lambda}}\cdot\frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1}$$

$$=\cosh\lambda\cdot\cosh f-\sinh f\cdot\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\cdot\frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \cosh f - \sinh f \cdot \cosh\lambda \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\cosh f - \sinh f \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\frac{e^{f}+e^{-f}}{2} - \frac{e^{f}-e^{-f}}{2} \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\frac{e^{f+2\delta}+e^{-f+2\delta}+e^{f}+e^{-f}-e^{f+2\delta}+e^{-f+2\delta}+e^{f}-e^{-f}}{2\left(e^{2\delta}+1\right)} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\frac{2e^{-f+2\delta}+2e^{f}}{2\left(e^{2\delta}+1\right)} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \frac{e^{-f+2\delta}+e^{f}}{e^{2\delta}+1} \tag{9}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde B, $e^{-\lambda}i$ ve i nin oluşturduğu hiperbolik üçgende hiperbolik kosinüs teoremi gereğince

$$\cosh c = \cosh\lambda \cdot \cosh f - \sinh\lambda \cdot \sinh f \cdot \cos(\pi - \alpha)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \cosh f + \sinh\lambda \cdot \sinh f \cdot \cos\alpha$$

$$= \cosh\lambda \cdot \cosh f + \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2} \cdot \sinh f \cdot \frac{\left(e^{2\lambda}+1\right)\cdot\left(e^{2\delta}-1\right)}{\left(e^{2\lambda}-1\right)\cdot\left(e^{2\delta}+1\right)}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \cosh f + \sinh f \cdot \frac{e^{2\lambda}-1}{2e^{\lambda}} \cdot \frac{\left(e^{2\lambda}+1\right)\cdot\left(e^{2\delta}-1\right)}{\left(e^{2\lambda}-1\right)\cdot\left(e^{2\delta}+1\right)}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \cosh f + \sinh f \cdot \frac{e^{2\lambda}+1}{2e^{\lambda}} \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \cosh f + \sinh f \cdot \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \cosh f + \sinh f \cdot \cosh\lambda \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\cosh f + \sinh f \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\frac{e^{f}+e^{-f}}{2} + \frac{e^{f}-e^{-f}}{2} \cdot \frac{e^{2\delta}-1}{e^{2\delta}+1} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\frac{e^{f+2\delta} + e^{-f+2\delta} + e^{f} + e^{-f} + e^{f+2\delta} - e^{-f+2\delta} - e^{f} + e^{-f}}{2\left(e^{2\delta}+1\right)} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \left(\frac{2e^{f+2\delta} + 2e^{-f}}{2\left(e^{2\delta}+1\right)} \right)$$

$$= \cosh\lambda \cdot \frac{e^{f+2\delta} + e^{-f}}{e^{2\delta}+1} \tag{10}$$

olarak bulunur.

(9) dan $\cosh\lambda = \cosh d \cdot \dfrac{e^{2\delta}+1}{e^{-f+2\delta}+e^{f}}$ olup bu ifade (10) da yerine yazılırsa

$$\cosh c = \cosh d \cdot \frac{e^{2\delta}+1}{e^{-f+2\delta}+e^{f}} \cdot \frac{e^{f+2\delta}+e^{-f}}{e^{2\delta}+1}$$

$$= \cosh d \cdot \frac{e^{f+2\delta}+e^{-f}}{e^{-f+2\delta}+e^{f}} \tag{11}$$

elde edilir. B noktası hiperbolün üzerinde olduğundan $c = d + 2\delta$ olup (11) de yerine yazılırsa

$$\cosh\left(d + 2\delta\right) = \cosh d \cdot \frac{e^{f+2\delta}+e^{-f}}{e^{-f+2\delta}+e^{f}}$$

ya da

$$\frac{e^{d+2\delta}+e^{-d-2\delta}}{2} = \frac{e^{d}+e^{-d}}{2} \cdot \frac{e^{f+2\delta}+e^{-f}}{e^{-f+2\delta}+e^{f}}$$

eşitliği elde edilir. Çözüme devam edildiğinde önce

$$e^{d-f+4\delta} + e^{f+d+2\delta} + e^{-f-d} + e^{f-d-2\delta} = e^{f+d+2\delta} + e^{d-f} + e^{-d+f+2\delta} + e^{-f-d}$$

ve sadeleştirildiğinde

$$e^{d-f+4\delta} - e^{d-f} = e^{-d+f+2\delta} - e^{f-d-2\delta}$$

eşitliği, buradan da

$$e^{d-f}\left(e^{4\delta}-1\right) = e^{f-d-2\delta}\left(e^{4\delta}-1\right) \text{ veya } \left(e^{4\delta}-1\right)\cdot\left(e^{d-f} - e^{f-d-2\delta}\right) = 0$$

eşitliği bulunur. Buna göre $e^{4\delta}-1$ ile $e^{d-f} - e^{f-d-2\delta}$ ifadelerinden en az biri sıfıra eşit olmalıdır. Eğer $e^{4\delta}-1=0$ ise $\delta = 0$ olur ki bu hiperbolün $\lambda > \delta > 0$ koşulu ile çelişir. Eğer $e^{d-f} - e^{f-d-2\delta} = 0$ ise $e^{d-f} = e^{f-d-2\delta}$ eşitliğinden $d - f = f - d - 2\delta$ ya da $f = d + \delta$ elde edilir. Bu eşitlik (9) da yerine yazılırsa

$$\cosh d = \cosh\lambda \cdot \frac{e^{-f+2\delta} + e^{f}}{e^{2\delta}+1} = \cosh\lambda \cdot \frac{e^{-d-\delta+2\delta} + e^{d+\delta}}{e^{2\delta}+1}$$

$$= \cosh\lambda \cdot \frac{e^{-d+\delta} + e^{d+\delta}}{e^{2\delta}+1} = \cosh\lambda \cdot \frac{e^{\delta}\left(e^{-d}+e^{d}\right)}{e^{\delta}\left(e^{\delta}+e^{-\delta}\right)}$$

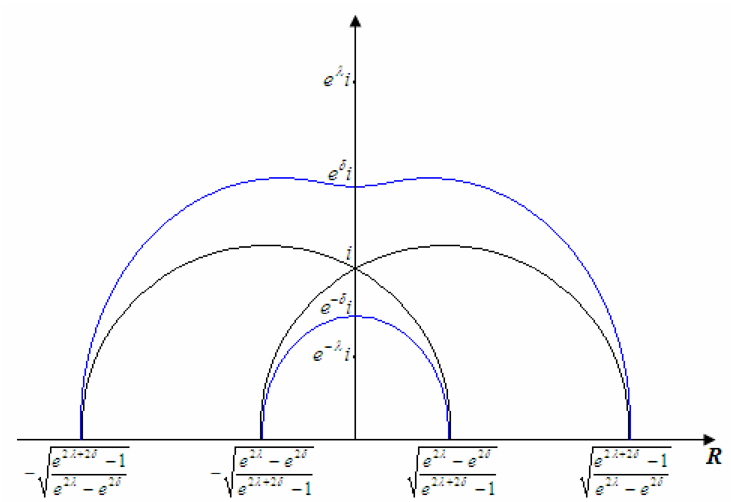
$$= \cosh\lambda \cdot \frac{\dfrac{e^{-d}+e^{d}}{2}}{\dfrac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}} = \cosh\lambda \cdot \frac{\cosh d}{\cosh\delta}$$

eşitliğine ulaşılır. Son eşitlikte $\cosh d \neq 0$ olduğundan $\cosh\delta = \cosh\lambda$ ve böylece $\delta = \lambda$ olur ki bu da hiperbolün $\lambda > \delta > 0$ koşulu ile çelişir.

Demek ki varsayımımız mümkün değildir, yani hiperbolümüz ile sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin a ve $-b$ olan hiperbolik doğru kesişmez.■

Sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin $-a$ ve b noktaları olan hiperbolik doğrunun da hiperbolümüz ile kesişmediği benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç. $a = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda+2\delta}-1}{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}}$ ve $b = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta}-1}}$ olmak üzere sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin a ve $-b$ noktaları olan hiperbolik doğru ile sonsuzdaki sınırı $\boldsymbol{R}$ nin $-a$ ve b noktaları olan hiperbolik doğru hiperbolümüzün asimptotlarıdır (şekil 2.3.6).



Şekil 2.3.6 Merkezil hiperbolik hiperbol ve asimtotları

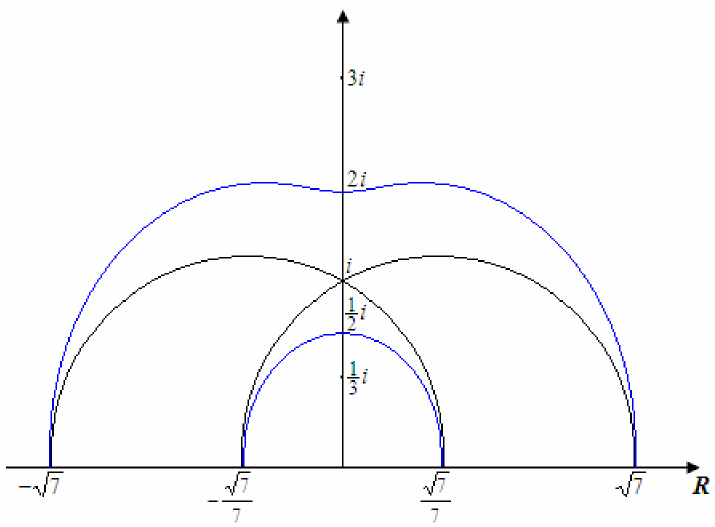
2.3.5 Örnek. Denklemi $\left|\rho(z,3i)-\rho\left(z,\frac{1}{3}i\right)\right|=2\cdot\ln 2$ olan hiperbolü inceleyelim: Denkleme göre $\delta=\ln 2$, odaklar $w=3i$ ile $\hat{w}=\frac{1}{3}i$ olup $e^{\delta}i=2i$, $e^{-\delta}i=\frac{1}{2}i$ dir. Ayrıca $e^{\lambda}i=3i$ eşitliğinden $\lambda=\ln 3$ bulunur. Böylece

$$a=\sqrt{\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1}{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}}=\sqrt{\frac{e^{2\ln 3+2\ln 2}-1}{e^{2\ln 3}-e^{2\ln 2}}}=\sqrt{\frac{36-1}{9-4}}=\sqrt{7}$$

ve

$$b=\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

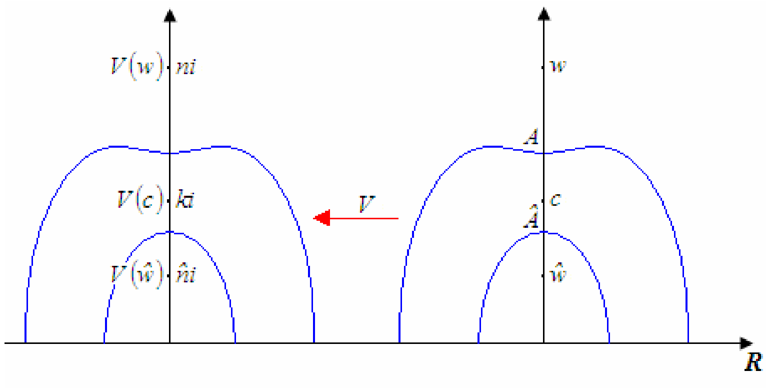
olarak hesaplanır (şekil 2.3.7).



Şekil 2.3.7 Örnek merkezil hiperbolik hiperbol

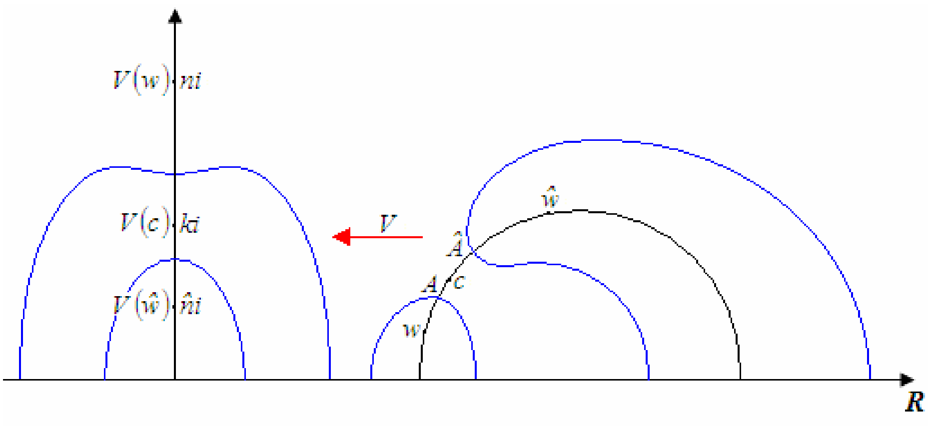
2.3.6 *U* da herhangi bir hiperbolik hiperbol. Şimdi de odakları $w,\hat{w}\in\boldsymbol{U}$ ve $\rho(w,\hat{w})>2\delta>0$ için odaklara hiperbolik uzaklıkları farkının mutlak değeri 2δ olan noktaların oluşturduğu $|\rho(z,w)-\rho(z,\hat{w})|=2\delta$ denklemli hiperbolik hiperbolü inceleyelim:

Eğer $\operatorname{Re}(w)=\operatorname{Re}(\hat{w})$ ise bu durumda asal eksen $\boldsymbol{R}$ ye dik $x=\operatorname{Re}(w)$ Öklid doğrusu üzerinde olup asal ekseni taşıyan hiperbolik doğru $V(z)=z-\operatorname{Re}(w)\in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü ile pozitif sanal eksen üzerine resmedilebilir (şekil 2.3.8).



Şekil 2.3.8 ***U*** da bir hiperbolik hiperbol

Eğer $\operatorname{Re}(w) \neq \operatorname{Re}(\hat{w})$ ise bu durumda asal eksen merkezi $\hat{c} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{|w|^2 - |\hat{w}|^2}{\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Re}(\hat{w})}$ ve yarıçapı $r = |w - \hat{c}|$ olan Öklid çemberi üzerinde olup asal ekseni taşıyan hiperbolik doğru $V(z) = \dfrac{z - (\hat{c} + r)}{z - (\hat{c} - r)} \in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü ile pozitif sanal eksen üzerine resmedilebilir (şekil 2.3.9).



Şekil 2.3.9 ***U*** da bir hiperbolik hiperbol

$V \in \text{Möb}(\boldsymbol{U})$ dönüşümü ile her iki durumda da hiperbolümüzün odakları ve merkezi (c) sanal eksen üzerine resmedilmiş olur. Buna göre $k, n, \hat{n} \in \boldsymbol{R}^+$ olmak üzere $V(c) = ki$, $V(w) = ni$ ve $V(\hat{w}) = \hat{n}i$ dersek odakların merkeze hiperbolik uzaklıkları eşit olduğundan (ve Möb(***U***) nun dönüşümleri altında hiperbolik uzunluk korunduğundan)

$$\ln\left(\frac{n}{k}\right)=\ln\left(\frac{k}{\hat{n}}\right)$$

yani

$$\frac{n}{k}=\frac{k}{\hat{n}}$$

ve k pozitif olduğundan

$$k=\sqrt{n\cdot\hat{n}}$$

veya

$$k=\sqrt{-V(w)\cdot V(\hat{w})}$$

olarak bulunur. Ayrıca hiperbolün odaklar arası yarı uzunluğuna λ dersek

$$\ln\left(\frac{n}{k}\right)=\lambda$$

eşitliğinden

$$\frac{n}{k}=e^{\lambda}$$

ve böylece

$$\frac{ni}{k}=e^{\lambda}i$$

veya

$$\frac{V(w)}{k}=e^{\lambda}i$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\ln\left(\frac{k}{\hat{n}}\right)=\lambda$$

eşitliğinden

$$\frac{k}{\hat{n}}=e^{\lambda}$$

veya

$$\frac{\hat{n}}{k}=e^{-\lambda}$$

ve böylece

$$\frac{\hat{n}i}{k}=\frac{V(\hat{w})}{k}=e^{-\lambda}i$$

olarak bulunur. Öyle ise $T = U_{\frac{1}{k}} \circ V$ dönüşümü hiperbolümüzü yukarıda incelediğimiz i merkezli $e^{\lambda} i$, $e^{-\lambda} i$ odaklı merkezil hiperbole

$$T(c) = \left(U_{\frac{1}{k}} \circ V \right)(c) = U_{\frac{1}{k}}(V(c)) = U_{\frac{1}{k}}(ki) = i$$

$$T(w) = \left(U_{\frac{1}{k}} \circ V \right)(w) = U_{\frac{1}{k}}(V(w)) = U_{\frac{1}{k}}(ni) = \frac{ni}{k} = e^{\lambda} i$$

$$T(\hat{w}) = \left(U_{\frac{1}{k}} \circ V \right)(\hat{w}) = U_{\frac{1}{k}}(V(\hat{w})) = U_{\frac{1}{k}}(\hat{n}i) = \frac{\hat{n}i}{k} = e^{-\lambda} i$$

olacak biçimde resmetmiş olur.

Sonuç 1. $\dfrac{V(w)}{k} = e^{\lambda} i$ olduğundan

$$\lambda = \ln \frac{V(w)}{ki} = \ln \frac{V(w)}{\sqrt{-V(w)V(\hat{w})}\,i} = \ln \frac{\sqrt{-V(w)V(w)}\,i}{\sqrt{-V(w)V(\hat{w})}\,i} = \ln \sqrt{\frac{V(w)}{V(\hat{w})}}$$

yani

$$\lambda = \ln \sqrt{\frac{V(w)}{V(\hat{w})}}$$

bağıntısı elde edilir.

Sonuç 2. $a = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda+2\delta} - 1}{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}}$ ve $b = \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda} - e^{2\delta}}{e^{2\lambda+2\delta} - 1}}$ olmak üzere hiperbolümüzün merkezi

$$c = T^{-1}(i),$$

asal eksen uç noktaları

$$A = T^{-1}\left(e^{\delta} i\right) \text{ ve } \hat{A} = T^{-1}\left(e^{-\delta} i\right)$$

, hiperbolümüzün üst yarısının sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar

$$T^{-1}(a) \text{ ve } T^{-1}(-a)$$

, hiperbolümüzün alt yarısının sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar

$$T^{-1}(b) \text{ ve } T^{-1}(-b)$$

, asimptotları ise sonsuzdaki sınırı

$$T^{-1}(a) \text{ ve } T^{-1}(-b)$$

noktalarından oluşan hiperbolik doğru ile sonsuzdaki sınırı

$$T^{-1}(b) \text{ ve } T^{-1}(-a)$$

noktalarından oluşan hiperbolik doğrudur.

Not. $V(z) = z - \mathrm{Re}(w)$ için $T^{-1}(z) = kz + \mathrm{Re}(w)$

$$V(z) = \frac{z-(\hat{c}+r)}{z-(\hat{c}-r)} \quad \text{için} \quad T^{-1}(z) = \frac{(\hat{c}-r)kz-(\hat{c}+r)}{kz-1} \quad \text{dir.}$$

2.3.7 Örnek. $w = 4+3i$, $\hat{w} = 11+4i$ ve $\delta = \ln\sqrt{2}$ olmak üzere denklemi $|\rho(z,w)-\rho(z,\hat{w})| = 2\ln\sqrt{2}$ olan hiperbolik hiperbolü inceleyelim:

$$\hat{c} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|w|^2-|\hat{w}|^2}{\mathrm{Re}(w)-\mathrm{Re}(\hat{w})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25-137}{4-11} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-112}{-7} = 8$$

$$r = |w-\hat{c}| = |4+3i-8| = 5$$

$$V(z) = \frac{z-(\hat{c}+r)}{z-(\hat{c}-r)} = \frac{z-13}{z-3}$$

$$V(w) = \frac{w-13}{w-3} = \frac{-9+3i}{1+3i} = \frac{-9+3i+27i-9i^2}{1-9i^2} = 3i$$

$$V(\hat{w}) = \frac{\hat{w}-13}{\hat{w}-3} = \frac{-2+4i}{8+4i} = \frac{-16+32i+8i-16i^2}{64-16i^2} = \frac{i}{2}$$

$$\lambda = \ln\sqrt{\frac{V(w)}{V(\hat{w})}} = \ln\sqrt{\frac{3i}{i/2}} = \ln\sqrt{6}$$

ve

$$k = \sqrt{-V(w)\cdot V(\hat{w})} = \sqrt{-3i\cdot\frac{i}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

olur. Böylece

$$a = \sqrt{\frac{e^{2\lambda+2\delta}-1}{e^{2\lambda}-e^{2\delta}}} = \sqrt{\frac{e^{2\ln\sqrt{6}+2\ln\sqrt{2}}-1}{e^{2\ln\sqrt{6}}-e^{2\ln\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{12-1}{6-2}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$b = \frac{1}{a} = \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$$

$$T(z)=\left(U_{\frac{1}{k}}\circ V\right)(z)=\frac{1}{\sqrt{6}/2}\cdot\frac{z-13}{z-3}=\frac{\sqrt{6}z-13\sqrt{6}}{3z-9}$$

ve

$$T^{-1}(z)=\frac{(\hat{c}-r)kz-(\hat{c}+r)}{kz-1}=\frac{kz-13}{kz-3}=\frac{3\sqrt{6}z-26}{\sqrt{6}z-2}$$

elde edilir. Buna göre hiperbolümüzün merkezi

$$c=T^{-1}(i)=\frac{3\sqrt{6}i-26}{\sqrt{6}i-2}=\frac{18i^2-26\sqrt{6}i+6\sqrt{6}i-52}{6i^2-4}$$

$$=\frac{-70-20\sqrt{6}i}{-10}=7+2\sqrt{6}i\,,$$

asal eksen uç noktaları

$$A=T^{-1}\left(e^{\delta}i\right)=T^{-1}\left(e^{\ln\sqrt{2}}i\right)=T^{-1}\left(\sqrt{2}i\right)=\frac{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}i-26}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}i-2}=\frac{6\sqrt{3}i-26}{2\sqrt{3}i-2}$$

$$=\frac{36i^2-52\sqrt{3}i+12\sqrt{3}i-52}{12i^2-4}=\frac{-88-40\sqrt{3}i}{-16}=\frac{11+5\sqrt{3}i}{2}\,,$$

$$\hat{A}=T^{-1}\left(e^{-\delta}i\right)=T^{-1}\left(e^{-\ln\sqrt{2}}i\right)=T^{-1}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\left(3\sqrt{6}/\sqrt{2}\right)i-26}{\left(\sqrt{6}/\sqrt{2}\right)i-2}=\frac{3\sqrt{3}i-26}{\sqrt{3}i-2}$$

$$=\frac{9i^2-26\sqrt{3}i+6\sqrt{3}i-52}{3i^2-4}=\frac{-61-20\sqrt{3}i}{-7}=\frac{61+20\sqrt{3}i}{7}$$

hiperbolümüzün ve asimptotlarının sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar

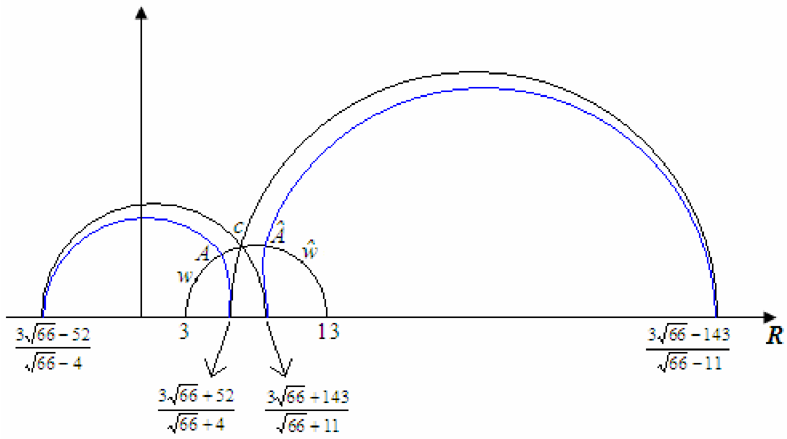
$$T^{-1}(a)=T^{-1}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{11}/2\right)-26}{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{11}/2\right)-2}=\frac{3\sqrt{66}-52}{\sqrt{66}-4}$$

$$T^{-1}(-a)=T^{-1}\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{11}/2\right)-26}{\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{11}/2\right)-2}=\frac{3\sqrt{66}+52}{\sqrt{66}+4}$$

$$T^{-1}(b)=T^{-1}\left(\frac{2\sqrt{11}}{11}\right)=\frac{3\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{11}/11\right)-26}{\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{11}/11\right)-2}=\frac{3\sqrt{66}-143}{\sqrt{66}-11}$$

$$T^{-1}(-b)=T^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{11}}{11}\right)=\frac{3\sqrt{6}\cdot\left(-2\sqrt{11}/11\right)-26}{\sqrt{6}\cdot\left(-2\sqrt{11}/11\right)-2}=\frac{3\sqrt{66}+143}{\sqrt{66}+11}$$

dir. Bu sonuçlara göre hiperbolümüzün şekli aşağıdaki gibidir (şekil 2.3.10).



Şekil 2.3.10 $|\rho(z,w)-\rho(z,\hat{w})| = 2\ln\sqrt{2}$ denklemli hiperbolik hiperbol

2.4 *U* DA HİPERBOLİK PARABOL

Bu kısımda önce hiperbolik parabolün ve yardımcı elemanlarının tanımı yapılıp merkezil parabol incelenecek, merkezil parabolün sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar bulunacaktır. Sonra da $\text{Möb}(\boldsymbol{U})$ nun elemanları kullanılarak merkezil parabol için elde edilen sonuçlar ***U*** da herhangi bir hiperbolik parabole aktarılacaktır.

2.4.1 Tanım. ***U*** da sabit bir hiperbolik doğru ile doğru üzerinde olmayan sabit bir noktaya hiperbolik uzaklıkları eşit olan noktaların kümesine *hiperbolik parabol*, sabit doğruya parabolün *doğrultmanı*, sabit noktaya da parabolün *odağı* denir.

Buna göre doğrultmanı $d \in \boldsymbol{U}$ hiperbolik doğrusu, odağı $w \in \boldsymbol{U}$ noktası olan hiperbolik parabolün denklemi $\rho(z,d) = \rho(z,w)$ dir.

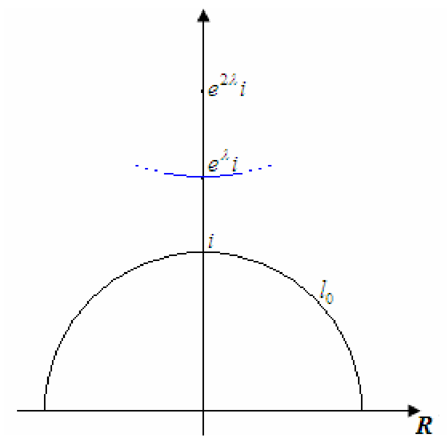
2.4.2 Tanım. Odaktan doğrultmana çizilen dik hiperbolik doğru parçasının hiperbolik orta noktasına parabolün *tepe noktası* denir (tanım gereği bu nokta parabole aittir).

2.4.3 Tanım. Odakla tepe noktasını birleştiren (ve doğrultmana dik olan) hiperbolik doğruya parabolün *ekseni* denir.

2.4.4 Merkezil Parabol. Öncelikle, ekseni asal eksen, doğrultmanı l_0 (i den sanal eksene dik olarak geçen hiperbolik doğru) ve $\lambda \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere odağı $e^{2\lambda}i$ olan hiperbolik parabolü (*merkezil parabolü*) inceleyelim:

1. Parabolümüzün tepe noktası $e^{2\lambda}i$ ile i nin hiperbolik orta noktası olan $e^{\lambda}i$ noktasıdır (ki bu nokta aynı zamanda parabolümüze aittir).

2. İncelememizi $\lambda > 0$ için yapacağız (ve bu durum genelliği bozmaz) (şekil 2.4.1).

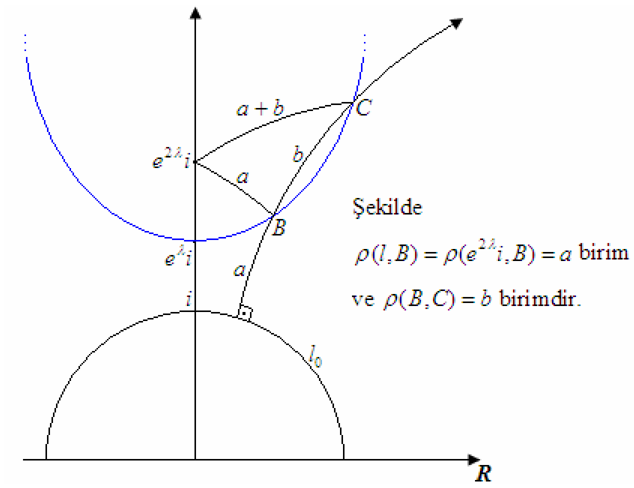


Şekil 2.4.1 Merkezil hiperbolik parabol

3. Acaba parabolümüzün diğer noktaları nasıl bir seyir izler? Bu soruyu cevaplamak için bazı ispatlar yapmamız gerekiyor:

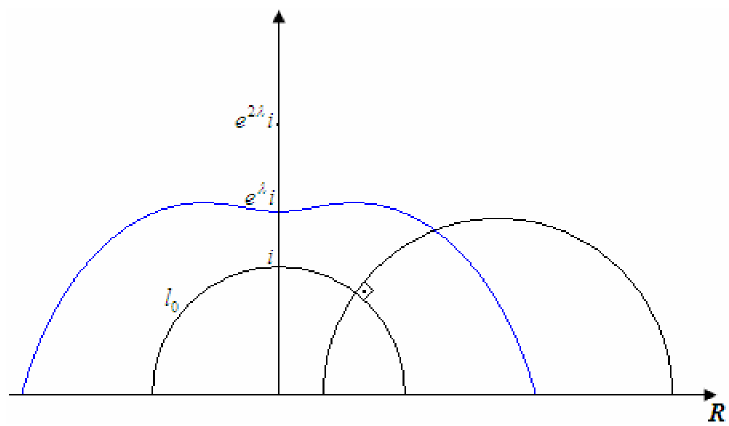
Önerme. Parabolümüzün herhangi bir noktasından l_0 a dik olacak şekilde geçen bir hiperbolik doğru parabolü başka bir noktada daha kesmez (şekil 2.4.2).

İspat. İddiamıza göre l_0 a dik bir hiperbolik doğru parabolümüzü aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi iki defa kesemez. Gerçekten de böyle bir durumda, yani B ve C gibi iki farklı noktada kesmesi halinde $\rho(l,B) = \rho(e^{2\lambda}i,B)$ ve $\rho(l,C) = \rho(e^{2\lambda}i,C)$ olması gerektiğinden $e^{2\lambda}i$, B ve C noktalarının oluşturduğu hiperbolik üçgende $\rho(e^{2\lambda}i,C) = \rho(e^{2\lambda}i,B) + \rho(B,C)$ elde edilir ki bu mümkün değildir.■



Şekil 2.4.2 Merkezil hiperbolik parabol

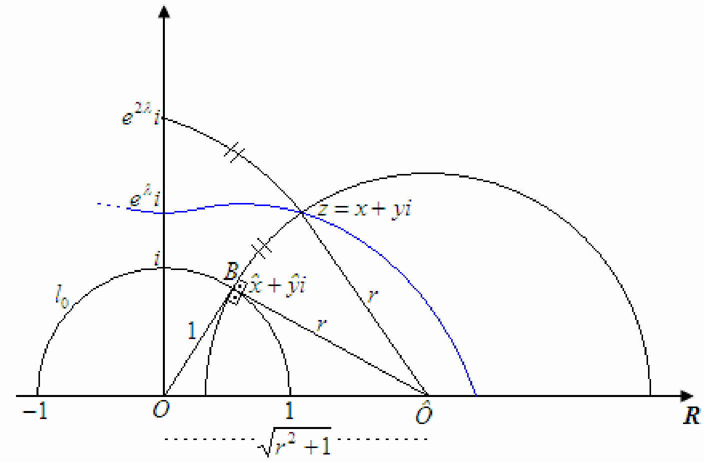
Sonuç. Parabolümüzün kolları l_0 a dik hiperbolik doğruları en fazla bir defa kestiklerinden reel eksene doğru yönelirler ve uzantıları reel eksende son bulur. Buna göre parabolümüzün şekli aşağıdaki gibidir (şekil 2.4.3).



Şekil 2.4.3 Merkezil hiperbolik parabol

4. Acaba parabolümüzün uzantılarının ***R*** yi kestiği noktaları bulabilir miyiz? Bu soruyu cevaplamak için parabolün *z* ye bağlı denkleminde $\mathrm{Im}(z)$ 0 a giderken limit almalıyız:

Parabolümüze ait bir $z = x + yi \in \boldsymbol{U}$ noktasından l_0 a dik olarak çizilen hiperbolik doğrunun üzerinde bulunduğu Öklid çemberinin merkezi $\hat{O}$, yarıçapı r ve l yi kestiği nokta B olsun (şekil 2.4.4).



Şekil 2.4.4 Merkezil hiperbolik parabol

Şekildeki $OB\hat{O}$ dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $\hat{O}$ $\boldsymbol{R}$ nin $\sqrt{r^2+1}$ apsisli noktasıdır. Buna göre

$$\left|z - \hat{O}\right| = \sqrt{\left(x - \sqrt{r^2+1}\right)^2 + y^2} = r$$

eşitliğinden

$$x^2 - 2x\sqrt{r^2+1} + r^2 + 1 + y^2 = r^2$$

veya

$$x^2 - 2x\sqrt{r^2+1} + 1 + y^2 = 0 \tag{12}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde

$$\left|B - \hat{O}\right| = \sqrt{\left(\hat{x} - \sqrt{r^2+1}\right)^2 + \hat{y}^2} = r$$

eşitliğinden de

$$\hat{x}^2 - 2\hat{x}\sqrt{r^2+1} + r^2 + 1 + \hat{y}^2 = r^2$$

veya

$$\hat{x}^2 - 2\hat{x}\sqrt{r^2+1} + 1 + \hat{y}^2 = 0 \tag{13}$$

elde edilir. (12) ile (13) ün ortak çözümünden

$$\sqrt{r^2+1} = \frac{1+x^2+y^2}{2x} = \frac{1+\hat{x}^2+\hat{y}^2}{2\hat{x}} \tag{14}$$

olur. B noktası l_0 doğrusu üzerinde olduğundan $\hat{x}^2+\hat{y}^2=1$ olup (14) de yerine yazılırsa

$$\hat{x} = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

ve buradan

$$\hat{y} = \sqrt{1-\hat{x}^2} = \sqrt{1-\frac{2x}{1+x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{\left(1+x^2+y^2\right)^2-4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1+x^2+y^2-2x\right)\cdot\left(1+x^2+y^2+2x\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{\left((x-1)^2+y^2\right)\left((x+1)^2+y^2\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan z parabole ait olduğundan

$$\rho\left(z, e^{2\lambda}i\right) = \rho(z, B)$$

olup bu denklemde $\rho(z,w) = \ln\left\{\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right\}$ formülü kullanılırsa

$$\ln\left\{\frac{\left|z-\overline{e^{2\lambda}i}\right|+\left|z-e^{2\lambda}i\right|}{\left|z-\overline{e^{2\lambda}i}\right|-\left|z-e^{2\lambda}i\right|}\right\} = \ln\left\{\frac{\left|z-\overline{B}\right|+|z-B|}{\left|z-\overline{B}\right|-|z-B|}\right\}$$

veya

$$\ln\left\{\frac{\left|z+e^{2\lambda}i\right|+\left|z-e^{2\lambda}i\right|}{\left|z+e^{2\lambda}i\right|-\left|z-e^{2\lambda}i\right|}\right\} = \ln\left\{\frac{\left|z-\overline{B}\right|+|z-B|}{\left|z-\overline{B}\right|-|z-B|}\right\}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $z = x+yi$ yazıldığında

$$\frac{\left|x+yi+e^{2\lambda}i\right|+\left|x+yi-e^{2\lambda}i\right|}{\left|x+yi+e^{2\lambda}i\right|-\left|x+yi-e^{2\lambda}i\right|} = \frac{\left|x+yi-(\hat{x}-\hat{y}i)\right|+\left|x+yi-(\hat{x}+\hat{y}i)\right|}{\left|x+yi-(\hat{x}-\hat{y}i)\right|-\left|x+yi-(\hat{x}+\hat{y}i)\right|}$$

veya

$$\left\{\frac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}-\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}+\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}\right\}=1$$

bulunur. Bu eşitlikte her iki tarafın $\mathrm{Im}(z)=y\to 0$ için limiti alınırsa birinci tarafta

$$\lim_{y\to 0}\left\{\frac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}-\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}+\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+e^{4\lambda}}+\sqrt{x^2+e^{4\lambda}}}{\sqrt{x^2+e^{4\lambda}}-\sqrt{x^2+e^{4\lambda}}}\cdot\frac{\sqrt{(x-\hat{x})^2+\hat{y}^2}-\sqrt{(x-\hat{x})^2+\hat{y}^2}}{\sqrt{(x-\hat{x})^2+\hat{y}^2}+\sqrt{(x-\hat{x})^2+\hat{y}^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+e^{4\lambda}}}{0}\cdot\frac{0}{2\sqrt{(x-\hat{x})^2+\hat{y}^2}}=\frac{0}{0}\quad !$$

belirsizliği elde edilir.

$y\to 0$ iken (yeteri kadar küçük y için) $x^2>1$ olduğundan

$$\sqrt{(x-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+0^2}=\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}=\left|x^2-1\right|=x^2-1$$

dir. Bu durum da dikkate alınarak belirsizliği gidermek için birinci tarafta limit almadan önce L'Hospital kuralına göre türev alınırsa:

$$\lim_{y\to 0}\left\{\frac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}-\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}+\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}+\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}\\[2ex] \cdot\dfrac{\left(\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}-\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}\right)'}\end{array}\right\}$$

$$=\lim_{y\to 0}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2}}{\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2}+\sqrt{(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2}}\\[2ex] \cdot\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\left((x-\hat{x})^2+(y+\hat{y})^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(y+\hat{y})-\frac{1}{2}\cdot\left((x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(y-\hat{y})}{\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+\left(y+e^{2\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\left(y+e^{2\lambda}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+\left(y-e^{2\lambda}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\left(y-e^{2\lambda}\right)}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{x^2+e^{4\lambda}}}{2\cdot\sqrt{x^2\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\frac{2\cdot\left[x^2\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{2\cdot\left(x^2+e^{4\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{2\lambda}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+e^{4\lambda}}}{\sqrt{\left(x^2+1\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\cdot\frac{\left[\left(x^2+1\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{\left(x^2+e^{4\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{2\lambda}}$$

$$= \frac{x^2+e^{4\lambda}}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\cdot\frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{e^{2\lambda}} = \frac{x^2+e^{4\lambda}}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\cdot e^{2\lambda}} = \frac{x^2+e^{4\lambda}}{\left(x^2-1\right)\cdot e^{2\lambda}}$$

olarak bulunur. Böylece elde edilen

$$\frac{x^2+e^{4\lambda}}{\left(x^2-1\right)\cdot e^{2\lambda}}=1$$

eşitliğinin çözümünden sırasıyla önce

$$x^2+e^{4\lambda}=x^2\cdot e^{2\lambda}-e^{2\lambda},$$

sonra

$$x^2\left(e^{2\lambda}-1\right)=e^{4\lambda}+e^{2\lambda}$$

ve daha sonra

$$x^2=\frac{e^{2\lambda}\left(e^{2\lambda}+1\right)}{e^{2\lambda}-1}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre parabolümüzün sonsuzdaki sınırı ***R*** nin

$$x=\pm e^{\lambda}\sqrt{\frac{e^{2\lambda}+1}{e^{2\lambda}-1}}$$

noktalarından oluşmaktadır.

(Eğer $\lambda<0$ ise $y\to 0$ iken (yeteri kadar küçük y için) $x^2<1$ olduğundan

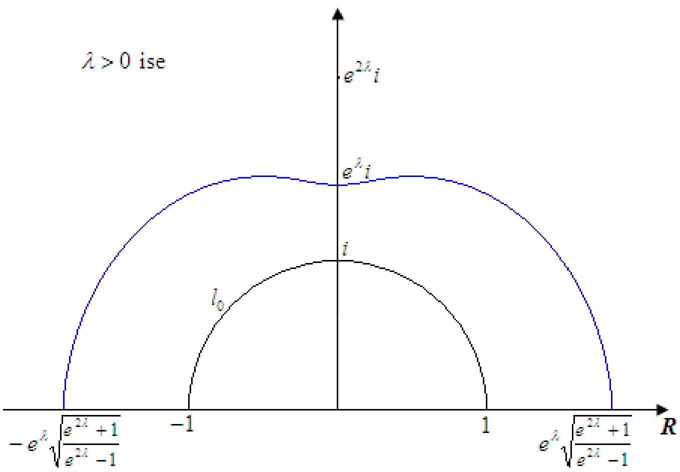
$$\sqrt{(x-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+0^2}=\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}=\left|x^2-1\right|=1-x^2$$

olup yukarıdakilere benzer işlemlerle parabolümüzün sonsuzdaki sınırının $\boldsymbol{R}$ nin $x=\pm e^{\lambda}\sqrt{\dfrac{1-e^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}}$ noktalarından oluştuğu bulunur.)

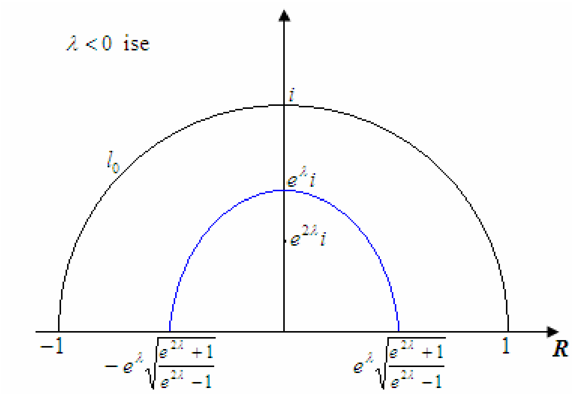
Not. 1. $\lambda>0$ ise $e^{\lambda}>1$ olup $1<e^{\lambda}\sqrt{\dfrac{e^{2\lambda}+1}{e^{2\lambda}-1}}$ dir.

2. $\lambda<0$ ise $0<e^{\lambda}<1$ olup $0<e^{\lambda}\sqrt{\dfrac{1-e^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}}<1$ dir.

Sonuç. Parabolümüzün şekli aşağıdaki gibidir (şekil 2.4.5 ve 2.4.6).



Şekil 2.4.5 $\lambda>0$ için merkezil hiperbolik parabol



Şekil 2.4.6 $\lambda<0$ için merkezil hiperbolik parabol

2.4.5 Örnek. $\lambda = \ln 2$ için yukarıda incelediğimiz parabolde

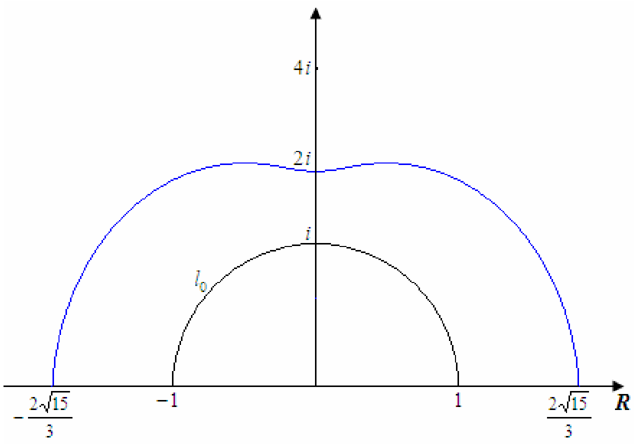
$$e^{\lambda} i = e^{\ln 2} i = 2i$$

$$e^{2\lambda} i = e^{2\ln 2} i = 4i$$

ve

$$e^{\lambda}\sqrt{\frac{e^{2\lambda}+1}{e^{2\lambda}-1}} = e^{\ln 2}\sqrt{\frac{e^{2\ln 2}+1}{e^{2\ln 2}-1}} = 2\cdot\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

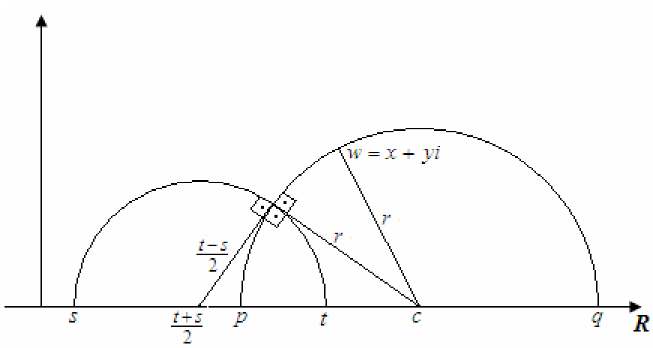
olup parabolün şekli aşağıdaki gibi olur (şekil 2.4.7).



Şekil 2.4.7 Örnek merkezil hiperbolik parabol

2.4.6 *U* da herhangi bir hiperbolik parabol. Şimdi de doğrultmanı herhangi bir d hiperbolik doğrusu ve $x, y \in \boldsymbol{R}$ olmak üzere odağı $w = x + yi \in \boldsymbol{U}$ noktası olan hiperbolik parabolü inceleyelim:

$s, t \in \boldsymbol{R}$ ve $s < t$ olmak üzere d nin sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar s ile t olsun (şekil 2.4.8).



Şekil 2.4.8 ***U*** da bir hiperbolik parabolün odak ve doğrultmanına göre asal ekseninin İncelenmesi

Şekilde görüldüğü gibi $c, p, q, r \in \boldsymbol{R}$, $p < q$, $r > 0$ olmak üzere parabolün ekseninin sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalara p ile q, eksenin üzerinde bulunduğu Öklid çemberinin merkezine c, yarıçapına r dersek $r = |w - c|$ den

$$r^2 = (x-c)^2 + y^2$$

ve $r > 0$ olduğundan

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{15}$$

olarak bulunur. Ayrıca şekildeki dik üçgende Pisagor bağıntısından

$$r^2 + \left(\frac{t-s}{2}\right)^2 = \left(c - \frac{t+s}{2}\right)^2$$

eşitliği ve $r^2 = (x-c)^2 + y^2$ yerine yazıldığında

$$(x-c)^2 + y^2 + \left(\frac{t-s}{2}\right)^2 = \left(c - \frac{t+s}{2}\right)^2$$

veya

$$\left(c - \frac{t+s}{2}\right)^2 - (x-c)^2 = y^2 + \left(\frac{t-s}{2}\right)^2$$

eşitliği elde edilir. Buradan iki kare farkı özdeşliği kullanılarak

$$\left(x - \frac{t+s}{2}\right) \cdot \left(2c - x - \frac{t+s}{2}\right) = y^2 + \left(\frac{t-s}{2}\right)^2$$

eşitliğine, $\frac{t+s}{2} < x$ ve böylece $x - \frac{t+s}{2} \neq 0$ olduğu dikkate alınarak

$$2c - \left(x + \frac{t+s}{2}\right) = \frac{y^2 + \left(\frac{t-s}{2}\right)^2}{x - \frac{t+s}{2}}$$

eşitliğine ulaşılır. Buna göre parabolün ekseninin üzerinde bulunduğu Öklid çemberinin merkezi

$$c = \frac{y^2 + \left(\frac{t-s}{2}\right)^2}{2x - t - s} + \frac{x}{2} + \frac{t+s}{4} \tag{16}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan parabolün ekseninin sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar p ve q olduğundan, ki $p = c - r$ ve $q = c + r$ dir, bu eksen $V(z) = \dfrac{z-q}{z-p}$ dönüşümü ile pozitif sanal eksene resmedilebilir. Bu durumda

$$T(z) = \left(U_{\frac{1}{V(s)}} \circ V \right)(z) = \frac{s-p}{s-q} \cdot \frac{z-q}{z-p}$$

dönüşümü d yi l_0 a, w yi de pozitif sanal eksen üzerine resmeden dönüşüm olup

$$T^{-1}(z) = \frac{p \cdot (s-q) \cdot z - q \cdot (s-p)}{(s-q) \cdot z - (s-p)}$$

dir. (Eğer parabolün ekseni $\boldsymbol{R}$ ye dik bir Öklid doğrusu üzerinde ise, yani $\operatorname{Re}(w) = x = \dfrac{t+s}{2}$ ise, bu durumda

$$V(z) = z - x$$

$$T(z) = \left(U_{\frac{1}{V(t)}} \circ V \right)(z) = \frac{z-x}{t-x}$$

ve

$$T^{-1}(z) = (t-x) \cdot z + x$$

dir.)

Dolayısıyla $T(w) = e^{2\lambda} i$ den $\lambda = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{T(w)}{i} = \dfrac{1}{2} \ln \operatorname{Im} T(w)$ olup parabolün tepe noktası

$$T^{-1}\left(e^{\lambda} i\right)$$

ve $a = e^{\lambda} \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda}+1}{e^{2\lambda}-1}}$ ($\lambda < 0$ için $a = e^{\lambda} \sqrt{\dfrac{1-e^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}}$) olmak üzere parabolün sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar

$$T^{-1}(a) \text{ ve } T^{-1}(-a)$$

olarak bulunur.

2.4.7 Örnek. Doğrultmanı uzantıları $\boldsymbol{R}$ yi $s = 2$ ve $t = 18$ noktalarında kesen hiperbolik doğru ve odağı $w = 18 + 12i$ olan hiperbolik parabolü inceleyelim:

Parabolün üzerinde bulunduğu Öklid çemberinin merkezi (16) dan

$$c = \frac{12^2 + \left(\frac{18-2}{2}\right)^2}{2 \cdot 18 - 18 - 2} + \frac{18}{2} + \frac{18+2}{4} = 27$$

yarıçapı (15) den

$$r = \sqrt{(18-27)^2 + 12^2} = 15$$

birimdir. Böylece parabolün ekseninin sonsuzdaki sınırını oluşturan noktalar $p = 27 - 15 = 12$ ve $q = 27 + 15 = 42$ olup bu ekseni pozitif sanal eksene resmeden dönüşüm

$$V(z) = \frac{z-q}{z-p} = \frac{z-42}{z-12}$$

dir. Buradan parabolün doğrultmanını l_0 a (ve w yi de pozitif sanal eksen üzerine) resmeden dönüşüm

$$T(z) = \left(U_{\frac{1}{V(s)}} \circ V\right)(z) = \frac{2-12}{2-42} \cdot \frac{z-42}{z-12} = \frac{z-42}{4z-48}$$

ve tersi

$$T^{-1}(z) = \frac{48z-42}{4z-1}$$

olarak elde edilir. Öyle ise

$$T(w) = \frac{w-42}{4w-48} = \frac{18+12i-42}{4 \cdot (18+12i) - 48} = \frac{-24+12i}{24+48i}$$

$$= \frac{-2+i}{2+4i} = \frac{-4+2i+8i-4i^2}{4-16i^2} = \frac{10i}{20} = \frac{i}{2}$$

olup

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln \operatorname{Im} T(w) = \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir. Buna göre $\lambda < 0$ olduğundan

$$a = e^{\lambda} \sqrt{\frac{1-e^{2\lambda}}{1+e^{2\lambda}}} = e^{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1-e^{2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}}{1+e^{2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

elde edilir. Böylece parabolün tepe noktasının

$$T^{-1}\left(e^{\lambda} i\right) = T^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{48 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i - 42}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i - 1} = \frac{24\sqrt{2} i - 42}{2\sqrt{2} i - 1}$$

$$= \frac{96 i^2 + 24\sqrt{2} i - 84\sqrt{2} i - 42}{8 i^2 - 1} = \frac{-138 - 60\sqrt{2} i}{-9} = \frac{46 + 20\sqrt{2} i}{3}$$

ve sonsuzdaki sınırını oluşturan noktaların

$$T^{-1}(a) = T^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{48 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} - 42}{4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} - 1} = \frac{8\sqrt{6} - 42}{\frac{2\sqrt{6} - 3}{3}} = \frac{6 \cdot \left(4\sqrt{6} - 21\right)}{2\sqrt{6} - 3}$$

$$= \frac{6 \cdot \left(48 + 12\sqrt{6} - 42\sqrt{6} - 63\right)}{24 - 9} = \frac{6 \cdot \left(-15 - 30\sqrt{6}\right)}{15} = -6 - 12\sqrt{6}$$

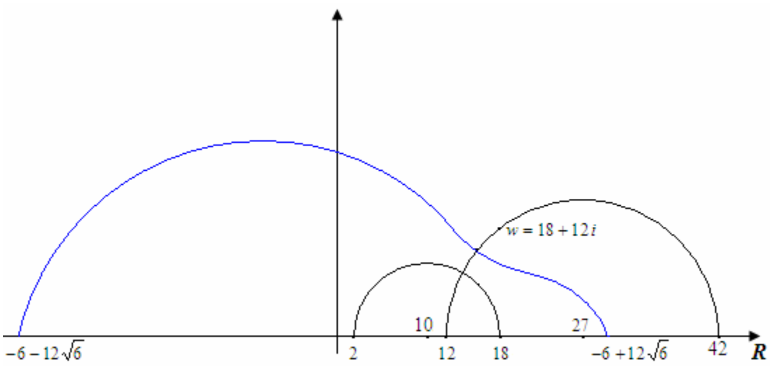
ile

$$T^{-1}(-a) = T^{-1}\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{48 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) - 42}{4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) - 1} = \frac{-8\sqrt{6} - 42}{\frac{-2\sqrt{6} - 3}{3}}$$

$$= \frac{6 \cdot \left(4\sqrt{6} + 21\right)}{2\sqrt{6} + 3} = \frac{6 \cdot \left(48 - 12\sqrt{6} + 42\sqrt{6} - 63\right)}{24 - 9}$$

$$= \frac{6 \cdot \left(-15 + 30\sqrt{6}\right)}{15} = -6 + 12\sqrt{6}$$

olduğu sonucuna varılır. Buna göre parabolümüzün şekli aşağıdaki gibidir (şekil 2.4.9).



Şekil 2.4.9 Doğrultmanı sonsuzdaki sınırı $s = 2$ ve $t = 18$ noktalarından oluşan hiperbolik doğru ve odağı $w = 18 + 12i$ olan hiperbolik parabol

KAYNAKLAR

J. W. ANDERSON. 1999. Hyperbolic Geometry. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, London., 230 p.

G.A. JONES AND D.SİNGERMAN. 1987. Complex functions, an algebraic and geometric viewpoint. Cambridge University Press, Cambridge., p.221-231

C. H. EDWARDS, JR. AND D. E. PENNEY. 1990. Calculus and Analytic Geometry. Third Edition. Prentice-Hall International, Inc., p.403-406

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html - 29k - JOC/EFR, February, 1996. **J.J. O'CONNOR AND E.F. ROBERTSON.** Erişim Tarihi: 12.02.2008. Konu: Non-Euclidean Geometry.

en.wikipedia.org/wiki/Non-Euclidean_geometry - 47k - Erişim Tarihi: 12.02.2008. Konu: Non-Euclidean Geometry.

www.math.**columbia**.edu/~**pinkham**/**teaching**/seminars/NonEuclidean.**html** - 5k - **G.SCHREİBER.** Erişim Tarihi: 12.02.2008. Konu: Seminar on the History of Hyperbolic Geometry.

merg.umassd.edu/programs/graduate/531/resources/101706/week7.pdf
S. HEGEDUS. Erişim Tarihi: 12.02.2008. Konu: MTH531 Geometry for Teachers. Week 7. Fall 2006, 6 p.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Uşak' da doğan Osman AVCIOĞLU ilk, orta ve lise öğrenimini Uşak' da tamamladıktan sonra 1990-1991 yılında İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi Uçak Mühendisliği Bölümü'nde İngilizce hazırlık okudu. 1991 yılında Boğaziçi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne kayıt yaptırıp 1996 yılında bu bölümü bitirdi. Mezuniyetten sonra 2003 yılına kadar çeşitli özel kurumlarda ve bu yıldan itibaren MEB' e bağlı okullarda matematik öğretmeni olarak çalıştı. Halen MEB Orhaneli T.S.Y. Anadolu Lisesi'ndeki görevine ve 2004 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve hiçbir aşamasında yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Osman BİZİM'e, katkılarından ve yardımlarından dolayı Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL ve Öğr. Gör. Dr. Ahmet TEKCAN'a teşekkürlerimi sunarım.