T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DE-SİTTER UZAYINDA PSEUDO PARALEL ALTMANİFOLDLAR

Öznur PAMUK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2010

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DE-SİTTER UZAYINDA PSEUDO PARALEL ALTMANİFOLDLAR

Öznur PAMUK

Prof.Dr. Cengizhan Murathan
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2010

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DE-SİTTER UZAYINDA PSEUDO PARALEL ALTMANİFOLDLAR

Öznur PAMUK

Prof.Dr. Cengizhan Murathan
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 2..9..8./2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Cengizhan MURATHAN — Prof.Dr. Kadri ARSLAN — Doç.Dr. Orhan GÜRLER

Danışman

ÖZET

Bu çalışmada de Sitter uzayının pseudo paralel olma şartını sağlayan uzay benzeri alt manifoldları incelenmiştir. Sonra eğer de Sitter uzayının $\bar{R} \cdot h = LQ(g,h)$ ve $c - L > 0$ şartını sağlayan uzay benzeri altmanifoldunun ikinci temel formunun sıfır olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-paralel, de Sitter uzay, Lorentz uzay, yarı simetrik, lokal simetrik, uzay benzeri alt manifold, simetrik altmanifold, pseudo yarı-paralel.

ABSTRACT

In this study, space-like submanifolds of de Sitter space satisfying pseudo paralel conditions are investigated. We prove that if the space-like submanifolds of de Sitter space satisfies curvature condition $\bar{R} \cdot h = LQ(g, h)$ with $c - L > 0$ then the second fundemantel form vanishes.

Key Words: Semi-parallel, de Sitter space, Lorentzian space, semi-symmetric, locally symmetric space-like submanifold, symmetric submanifold, pseudo semi-parallel.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ ONAY SAYFASI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	
2.1. Simetrik Bilineer Formlar	3
2.2. Yarı-Riemann Manifoldlar	7
2.3. Eğrilik Tensör Alanının Geometrik Yorumu	16
2.4. Yarı-Riemann Altmanifoldlar	20
3. SİMETRİK MANİFOLDLAR	
3.1. Yarı Simetrik Manifoldlar	30
3.2. Lokal Simetrik Manifoldar	33
4. SİMETRİK ALTMANİFOLDLAR	38
5. LORENTZ UZAYLARIN SINIFLANDIRILMASI	
5.1. Üç Boyutlu Lorentzian Gerçek Uzay Formlarında Paralel Yüzeyler	46
5.2. Dört Boyutlu Lorentzian Gerçek Uzay Formlarında Paralel Yüzeyler	48
6. YARI-RİEMANN UZAY FORMUNUN UZAY BENZERİ ALT MANİFOLDLARI	51
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	59
TEŞEKKÜR	60

SİMGELER DİZİNİ

R -Reel sayılar cümlesi
R^n -Öklid n-uzay
R_v^n -v indeksli yarı-öklid n-uzay
ϕ -Simetrik iki-lineer form
$\otimes$ -Tensör çarpımı
$\|,\|$ -Norm
$\langle,\rangle$ -Skalar çarpım
$T_P M$ -p noktasındaki teğet uzay
$T_p^* M$ -p noktasındaki kotanjant uzay
M -Manifold
g -Metrik tensör
C^∞ -Diferensiyellenebilme
∇ -Afin konneksiyon
$C^\infty(M,R)$ - M den R ye diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
$\chi(M)$ -M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$[,]$ -Lie parantez operatörü
d -Dış türev operatörü
R -M nin Riemann eğrilik tensörü
S -Ricci tensörü
Q -Ricci operatörü
D -Dağılım
∂ -Kısmi türev
φ -Tensör alanı
ξ -Vektör alanı
η -1-form
F -Temel 2-form

K -Kesitsel eğrilik

r -Skalar eğrilik

Δ -Laplas

H - Ortalama eğrilik

ε - N birim normalinin işareti

1.GİRİŞ

$\widetilde{M}_p^{n+p}(c)$ bir n+p boyutlu ve indeksi p olan bağlantılı $c > 0$ sabit eğrilikli yarı-Riemann manifoldu p indeksli de-Sitter uzay olarak adlandırır. De-Sitter uzayını Riemann geometrisindeki n-kürenin yarı-Riemann karşılığı olarak düşünebiliriz.

$M_i^n \subset \widetilde{M}_p^{n+p}(c)$ nin uzay benzeri altmanifoldu olsun. T.Ishihara 1988 yılında yaptığı çalışmada M_i^n nin tam ve maksimal (=minimal) olması durumunda $c \geq 0$ iken M_i^n total geodezik olduğunu göstermiştir. Daha sonra H.Sun 1995 yılında bu çalışmada tamlık ve maksimallık şartı yerine pseudo umbilik ve paralel ikinci temel forma sahip şartı koyduğunda $p > 1$ için

$$3\|h\|^4 + 2n(c - H^2)\|h\|^2 + 2n^2H^2c \geq 0$$

ve eşitlik durumunda M^n total geodezik veya $n = p = 2$ halinde ise $M^2 = H^2\left(-\sqrt{c}\right)$ $(c < 0)$ nin $H_2^4\left(\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)$ de bir hiperbolik Veronese yüzeyi olduğunu göstermiştir.

Riemann durumunda paralel ikinci temel forma sahip olan altmanifold için (Lumiste 1999) kaynağını temel kaynak olarak verebiliriz. E.Safiulina yarı-öklidiyen uzay $(c = 0)$ da yarı-paralel uzay benzeri yüzeyler için bir sınıflandırma yapmıştır. Daha fazlası $E_s^n,\ s > 0$, yarı-paralel uzay benzeri total geodezik yüzeylerin olmadığını gösterdiler. Sonraları B.Y.Chen ve J.Vander de Veken 4 boyutlu Lorentzian uzay formlarda paralel yüzeylerin bir tam sınıflandırmasını verdiler. Paralel uzay forma sahip $(\overline{\nabla}h = 0)$ olan altmanifoldlar aynı zamanda yarı-paralel $(\bar{R} \cdot h = 0)$ dır. Fakat tersi doğru değildir.

Öklidiyen uzay durumunda yarı-paralel yüzeylerin ilk sınıflandırması J.Deprez 1985 de vermiştir.

Bir Riemann uzay formunun $M(c)$ nin yarı-paralel altmanifoldları için A.C.Asperi, G.A.Lobos ve F.Mercuri 2002 yılında minimallık şartı altında $c \leq 0$ olması durumunda altmanifoldların total geodezik olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada de Sitter uzayının $M_p^{n+p}(c)$, $c > 0$, uzay benzeri altmanifoldlarının pseudo paralel olma koşulları ve bu koşul altında total geodeziklik şartı incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \longrightarrow R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i) $g(u,v) = g(v,u)$,

ii) $g(au + bv, w) = ag(u,w) + bg(v,w)$,

iii) $g(u, av + bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilineer form* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2: V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif tanımlı,*

ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif tanımlı,*

iii) $\forall v \in V$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif yarı tanımlı,*

iv) $\forall v \in V$ için $g(v,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif yarı tanımlı,*

v) $\forall v \in V$ için $g(v, w) = 0$ iken $v = 0$ olmak zorunda ise g simetrik bilineer formuna *dejenere değil* denir. Aksi halde *dejeneredir* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3. V reel vektör uzayında bir skalar çarpma g olsun. $v \in V$ olmak üzere,

i) $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne *uzay benzeri*,

ii) $g(v, v) < 0$ ise v vektörüne *zaman benzeri*,

iii) $g(v, v) = 0$, $v \neq 0$ ise v vektörüne *ışık benzeri (lightlike(null))* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4: V bir reel vektör uzayı ve W, V nin bir alt vektör uzayı olsun.

$$g: \mathrm{V} \times \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{R}$$

bir simetrik bilineer form olmak üzere

$$g|_W: W \times W \longrightarrow R$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun *indeksi* denir ve v ile gösterilir (O'Neill 1983).

Dikkat edilirse $0 \leq v \leq boyV$ dır. Böylece g nin yarı-pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $v = 0$ dır.

Teorem 2.1.1: Bir g simetrik bilineer formun dejenere olmaması için gerek ve yeter şart g nin herhangi bir baza göre ters matrisinin var olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5. Bir V reel vektör uzayı üzerinde dejenere olmayan simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpma* denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine *skalar çarpımlı vektör uzayı* denir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.1:

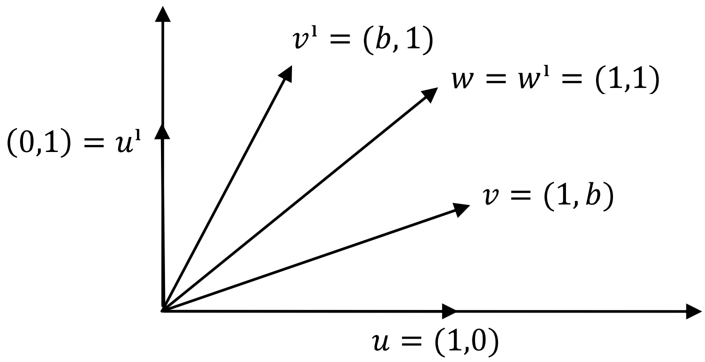
$$g: R^2 \times R^2 \to R\,,$$

$$g(v,w) = v_1 w_1 - v_2 w_2$$

dönüşümü iki lineer ve simetriktir. g ye karşılık gelen matris $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisidir ve regülerdir. Böylece g dejenere değildir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6: $\forall v, w \in V$ için $v \neq 0$ ve $w = 0$ iken $g(v,w) = 0$ ise v ve w vektörleri diktir denir ve $v \perp w$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.2: Örnek 1.1.1. deki skalar çarpımı gözönüne alalım. R^2 de $v = (1, b)$, $v^1 = (b, 1)$, $u = (1{,}0)$, $u^1 = (0{,}1)$, $w = w^1 = (1{,}1)$ vektörlerini seçelim.



Şekil 2.1.1

Dikkat edilirse burada u^1 ve u, v^1 ile v, w ile w' vektörleri birbirine dik vektörlerdir.

Tanım 2.1.7: W, V vektör uzayının bir altuzayı olsun. $W^{\perp} = \{v \in V \,|\, v \perp w\}$, $W^{\perp}$ altuzayına W *nun diki* denir (O'Neill 1983).

Uyarı 2.1.1: $W^{\perp}, W$ nun dik tümleyeni olmak zorunda değil. Örnek 2.1.1. deki skalar çarpımı tekrar göz önüne alacak olursak $W = S_p\{(1,1)\}$ elde edildiği için $W^{\perp} = W$ dır. Böylece $W^{\perp}, W$ nun dik tümleyeni olmak zorunda değildir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.2: W bir Vskalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman,

i) $boyW + boyW^{\perp} = boyV$,

ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

dir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8: V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma g ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer g, W üzerinde dejenere değil ise W ya *dejenere olmayan altuzay*, aksi halde *dejenere altuzay* denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.3: V bir iç çarpım uzayı ve W, V nin bir alt uzayı olsun. W nın dejenere olmayan altuzay olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^{\perp}$ olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.9: Bir V reel vektör uzayı üzerinde bir g iç çarpım olsun. Bir $v \in V$ vektörünün normu

$$\|v\| = \sqrt{|g(v,v)|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre *birim vektör* ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de *ortonormal vektör sistemi* denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.4: Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.5: V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.10: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir *Lorentz uzayı* denir (O'Neill 1983).

2.2. Yarı-Riemann Manifoldlar

Bu bölümde yarı-Riemann manifoldlar tanıtılacak ve altmanifoldlara ait özellikler verilecektir.

Tanım 2.2.1: M bir C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere

$$\begin{aligned} g_p: T_pM \times T_pM &\longrightarrow R \\ (X_p, Y_p) &\longrightarrow g_p(X_p, Y_p) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

biçiminde tanımlı ve simetrik, iki lineer (bilineer), dejenere olmayan (0,2) tensörüne M üzerinde bir *metrik tensör* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.2: M bir C^∞ manifold olsun. M nin üzerinde bir g metrik tensörü tanımlanmışsa M ye bir yarı-Riemann manifold denir ve (M, g) ile gösterilir (O'Neill 1983).

Uyarı 2.2.1: (M, g) bir yarı-Riemann manifold ve U, M nin bir koordinat komşuluğu ve bu koordinat komşuluğundaki koordinat sistemi $x^1, x^2, \ldots, x^n$ olsun.

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$$

olmak üzere M üzerinde bir g metrik tensörünü

$$g = \sum g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

şeklinde yazabiliriz (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.3: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine *yarı-Riemann manifoldun indeksi* denir ve $indM = v$ ile gösterilir. Eğer indeks v ise $0 \leq v \leq boyM$ dir. Özel olarak $v = 0$ ise $\forall p \in M$ için g_p, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir metrik tensör olduğunda (M, g) ye Riemann manifoldu, $v = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise (M, g) ye bir *Lorentz manifoldu* denir (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.4: R_v^n öklid n-uzayı verilsin. $0 \leq v \leq n$, olmak üzere v tamsayısı için, R_v^n üzerinde

$$g_p\left(X_p, Y_p\right) = -\sum_{i=1}^{v} x_i y_i + \sum_{i=v+1}^{n} x_i y_i \tag{2.2.2}$$

ile verilen metrik tensör gözönüne alınırsa, (R_v^n, g) ikilisi *yarı-Öklid-uzay* olarak adlandırılır ve R_v^n ile gösterilir (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.5: (M, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. $p \in M$ için T_pM tanjant uzayındaki

$$\Lambda_P = \left\{u | g_p(u, u) = 0, u \neq 0\right\}$$

cümlesine *ışık (null) konisi* denir (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.6: $\{u_1, \dots, u_n\}$, R_v^n üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, R_v^n üzerinde vektör alanları ise

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i) \partial_i \tag{2.2.3}$$

vektör alanına W nın V ye göre *doğal kovaryant türevi* denir. Burada

$\left\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i} \middle| 1 \leq i \leq n\right\}$, $\chi(R_v^n)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.7: M bir C^{∞} manifold olsun. M üzerinde bir dönüşüm

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

i) $\nabla_V W$, V ye göre $C^{\infty}(M,R)$ lineerdir,

ii) $\nabla_V W$, W ye göre R lineerdir,

iii) $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W, \forall f \in C^{\infty}(M,R)$ (2.2.4)

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir *koneksiyon* denir. $\nabla_V W$ ya V ye göre W nın *kovaryant türevi* denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.2.1: (M,g) yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

i) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (2.2.5)

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (2.2.6)

olacak şekilde bir tek ∇ koneksiyonu vardır. ∇ ya M nin *Levi-Civita koneksiyonu* denir ve Levi-Civita koneksiyonu

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y)$$

$$-g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])$$

Kozsul formülü ile karakterize edilebilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.8: (M,g) yarı-Riemann manifold ve $x^1, x^2, \dots, x^n$ M nin bir U koordinat komşuluğundaki koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sisteminde reel değerli Γ_{ij}^k fonksiyonları

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k \frac{\partial}{\partial x^k} \ , \ 1 \leq i,j \leq n \tag{2.2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Bu reel değerli Γ_{ij}^k fonksiyonları U üzerinde M nin *Christoffel sembolleri* olarak adlandırılır. Böylece Christoffel sembolleri bir $p \in U \subset M$ koordinat komşuluğundaki baz vektörlerinin birbirlerine göre değişimini ölçer (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.1: (M,g) bir yarı-Riemann manifold ve M nin U koordinat komşuluğundaki $x^1, x^2, \dots, x^n$ için

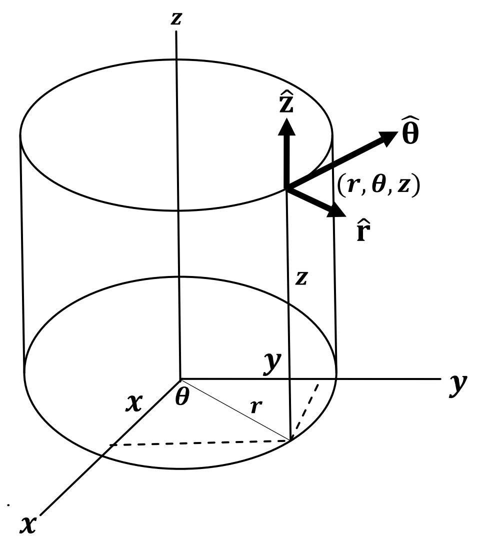
(1) $\nabla_{\partial_i}\left(\sum W^j \partial_j\right) = \sum_k \left\{\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j\right\} \partial_k,$ (2.2.8)

(2) $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left\{\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right\}$ (2.2.9)

dir (O’Neill, 1983).

Şimdi bir örnek vereceğiz.

Örnek 2.2.1:



Şekil 2.2.1

Silindirik koordinatlar

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z.$$

dır. $r \in [0, \infty)$, $\theta \epsilon [0,2\pi)$, $z \epsilon (-\infty, \infty)$, olduğunda kartezyen koordinatlar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z,$$

olur. Buna göre $\partial_r = cos\theta\partial_x + sin\theta\partial_y$, $\partial_\theta = r(-sin\theta\partial_x + cos\theta\partial_y)$, $\partial_z = \partial_z$ dır.

Metrik tensör bileşenleri

$$\begin{aligned} g_{rr} &= g(\partial_r, \partial_r) = 1 \\ g_{\theta\theta} &= g(\partial_\theta, \partial_\theta) = r^2 \\ g_{zz} &= g(\partial_z, \partial_z) = 1 \\ g_{r\theta} &= g(\partial_r, \partial_\theta) = 0 \\ g_{z\theta} &= g(\partial_z, \partial_\theta) = 0 \\ g_{rz} &= g(\partial_r, \partial_z) = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece metrik

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \tag{2.2.10}$$

elde edilir. Kartezyen vektör

$$r = \begin{bmatrix} rcos\theta \\ rsin\theta \\ z \end{bmatrix}$$

dır. (2.2.9) ve (2.2.10) denklemleri yardımıyla Christoffel sembolleri

$$\Gamma^{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} \Gamma^{\mathrm{r}}_{11} & \Gamma^{\mathrm{r}}_{12} & \Gamma^{\mathrm{r}}_{13} \\ \Gamma^{\mathrm{r}}_{21} & \Gamma^{\mathrm{r}}_{22} & \Gamma^{\mathrm{r}}_{23} \\ \Gamma^{\mathrm{r}}_{31} & \Gamma^{\mathrm{r}}_{32} & \Gamma^{\mathrm{r}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{\theta} = \begin{bmatrix} \Gamma^{\theta}_{11} & \Gamma^{\theta}_{12} & \Gamma^{\theta}_{13} \\ \Gamma^{\theta}_{21} & \Gamma^{\theta}_{22} & \Gamma^{\theta}_{23} \\ \Gamma^{\theta}_{31} & \Gamma^{\theta}_{32} & \Gamma^{\theta}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{z} = \begin{bmatrix} \Gamma^{\mathrm{z}}_{11} & \Gamma^{\mathrm{z}}_{12} & \Gamma^{\mathrm{z}}_{13} \\ \Gamma^{\mathrm{z}}_{21} & \Gamma^{\mathrm{z}}_{22} & \Gamma^{\mathrm{z}}_{23} \\ \Gamma^{\mathrm{z}}_{31} & \Gamma^{\mathrm{z}}_{32} & \Gamma^{\mathrm{z}}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Tanım 2.2.9: (M, g) bir yarı-Riemann manifold ve üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ∇ olsun.

$$\begin{aligned} \gamma: I &\longrightarrow M \\ t &\longrightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

bir C^{∞} eğri ve $Z \in \chi(M)$ olmak üzere her $t \in I$ için

$$\nabla_{\gamma'} Z = 0 \tag{2.2.11}$$

ise Z , γ boyunca paraleldir denir (O'Neill 1983).

(2.2.8) ve (2.2.11) u kullanırsak bu Z vektör alanlarının paralel olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_k \left\{ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d(x_i \circ \gamma)}{dt} Z^j \right\} \partial_k = 0 \tag{2.2.12}$$

olmasıdır sonucunu elde ederiz (O'Neill 1983).

Böylece (2.2.12) numaralı denklem bir lineer denklem sistemi olur. Diferansiyel deklem sistemlerinin varlık ve teklik teoremini kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.2: $\gamma: I \longrightarrow M$ bir C^{∞} eğri, $o \in I$ ve $z \in T_{\gamma(o)}M$ olsun. O zaman γ boyunca

$$Z(o) = z$$

olacak şekilde bir tek Z paralel vektör alanı vardır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.10: $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$ tanımlı bir C^{∞} eğri olsun. Z, $Z(o) = z$ başlangıçlı γ boyunca paralel bir vektör alanı olsun.

$$\mathrm{P}: \mathrm{P}_o^1(\gamma): \mathrm{T}_{\gamma(0)}\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{T}_{\gamma(1)}\mathrm{M}$$

$$\mathrm{Z}(0) \longrightarrow \mathrm{Z}(1)$$

paralel olarak taşınan bu dönüşüme γ boyunca *paralel öteleme* denir (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.2: Paralel öteleme bir lineer izometridir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.11: (M,g) bir yarı-Riemann manifold ve $\gamma: I \longrightarrow M$ bir C^{∞} eğri olsun. M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ ise γ ya M de bir *geodeziktir* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.12: Levi-Civita koneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifold M olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \longrightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (2.2.13)$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde (1,3) tensördür. Bu tensöre M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.13: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

i) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(Y,X)Z, W),$ (2.2.14)

ii) $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z),$ (2.2.15)

iii) $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$ (2.2.16)

dir (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.3: $x^1, x^2, \dots, x^n$ koordinat sisteminin koordinat komşuluğunda

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R^i_{jkl}\, \partial_i \qquad (2.2.17)$$

dir. Burada R nin bileşenleri

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} \qquad (2.2.18)$$

şeklinde bellidir (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.4: (İkinci Bianchi Özdeşliği) $(\mathrm{M}^n, \mathrm{g})$ bir yarı-Riemann manifold ve ∇, M^n üzerinde bir yarı-Riemann koneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, Z \epsilon \chi(M)$ için

$$(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0$$

dır (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.14: M bir yarı-Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki X, Y tanjant vektörlerinin gerdiği $T_P M$ tanjant uzayının 2-boyutlu bir dejenere olmayan altuzayı π olsun.

$$K(\pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\pi)$ reel sayısına π nin *kesit eğriliği* denir (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.15: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T_P M$ nin bir ortanormal bazı olmak üzere

$$Ric: T_P M \times T_P M \longrightarrow R$$

$$(X, Y) \longrightarrow Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, g(R(e_i, X)Y, e_i) \quad (2.2.19)$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne *Ricci eğrilik tensörü* ve $Ric(X,Y)$ değerine de M nin *Ricci eğriliği* denir (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.16: M bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T_P M$ nin bir ortanormal bazı olmak üzere

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(e_i, e_i) \quad (2.2.20)$$

değerine M nin *skaler eğriliği* denir (O’Neill 1983).

Tanım 2.2.17: (M, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. Eğer M nin kesit eğrilik fonksiyonu sabit ise M *sabit eğriliklidir* denir (O’Neill 1983).

Önerme 2.2.5: M bir yarı-Riemann manifold olsun. M manifoldu c sabit eğriliğine sahip ise M nin eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \tag{2.2.21}$$

şeklindedir (O'Neill 1983).

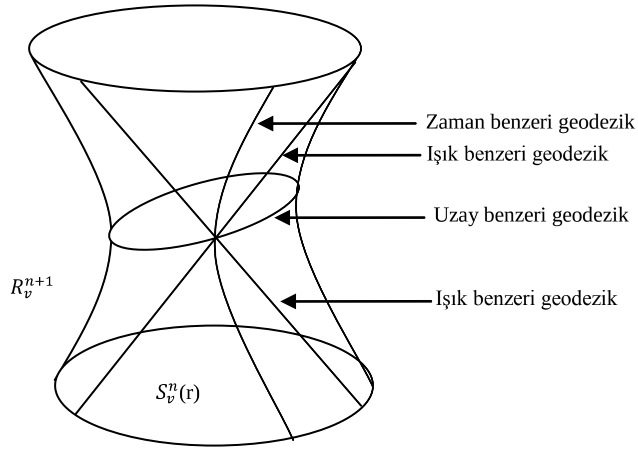
Tanım 2.2.18: M^n, n boyutlu, p-indeksli ve c sabit eğrilikli bağlantılı yarı-Riemann manifold olsun. Bu yarı-Riemann manifolda *p-indeksli tanımsız uzay formu* denir ve $M_p^n(c)$ şeklinde gösterilir (Zheng 1996).

Tanım 2.2.19: $n \geq 2$ ve $0 \leq v \leq n$ olmak üzere

i) $S_v^n(r) = \{X \in R_v^{n+1} : g(X,X) = r^2\}$ ile verilen hiperquadriğe R_v^{n+1} de $r > 0$ yarıçaplı, *n-boyutlu* ve *v-indeksli pseudo-kür*e denir.

ii) $H_v^n(r) = \{X \in R_{v+1}^{n+1} : g(X,X) = -r^2\}$ ile verilen hiperquadriğe R_v^{n+1} de $r > 0$ yarıçaplı, *n-boyutlu* ve *v-indeksli pseudo-hiperbolik uzay* denir

(O'Neill 1983).



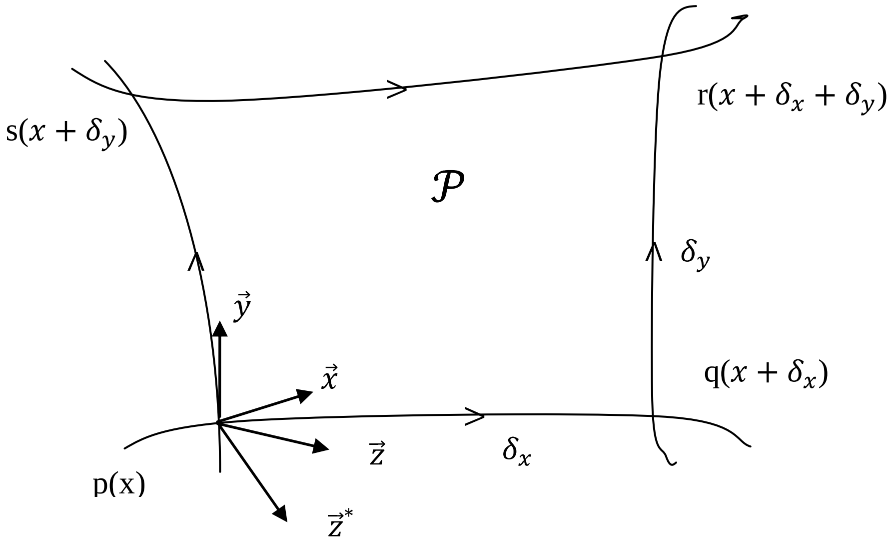
Şekil 2.2.2

Tanım 2.2.20: $M_p^n(c)$, p-indeksli tanımsız uzay formu olsun. $c > 0$ ve $p = 1$ ise M uzayına *1-indeksli de Sitter uzayı* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.21: $M_p^n(c)$, p-indeksli tanımsız uzay formu olsun. $c < 0$ ve $p = 1$ ise M uzayına *anti-de Sitter uzayı* denir (O'Neill 1983).

2.3. Eğrilik Tensör Alanının Geometrik Yorumu

Burada R eğrilik tensör alanının bir geometrik yorumunu vereceğiz.



Şekil 2.3.1

(M, g) yarı -Riemann manifold üzerinde yeteri kadar küçük olan ve köşe noktaları $x, x + \delta_x$, $x + \delta_x + \delta_y$, $x + \delta_y$ olan paralelogramı göz önüne alalım. Bir z vektör alanı bir γ eğrisi boyunca paralel ise (2.2.12) denklemi yardımıyla

$$\dot{z}_i(s) + \Gamma_{kj}^i . \dot{\gamma}_k(s) z_j(s) = 0, \quad i = 1,2, \dots, n \tag{2.3.1}$$

denklemi elde edilir. Türev tanımı gereğince yeteri kadar küçük δ_x için

$$\frac{z_i(x + \delta_x) - z_i(x)}{\delta_x} = \dot{z}_i(x)$$

dir. Bu denklemi (2.3.1) de yerine yazarsak

$$\frac{z_i(x+\delta_x)-z_i(x)}{\delta_x}+\Gamma^i_{kj}\left(\frac{\gamma_k(x+\delta_x)-\gamma_k(x)}{\delta_x}\right).z_j(x)=0$$

eşitliği elde edilir. $\gamma_k(x+\delta_x)-\gamma_k(x)=\delta\gamma_k$ gösterimini kullanarak

$$z_i(x+\delta_x)-z_i(x)+\Gamma^i_{kj}\delta\gamma_k z_j(x)=0 \tag{2.3.2}$$

denklemini elde ederiz.

Şimdi γ_j eğrisini x_j eğrisi gibi göz önüne alalım ve $j\to k$ değişimi yapalım.

$$z_i(x+\delta_x)=z_i(x)-\Gamma^i_{jk}(x)z_k(x)\delta x_j \tag{2.3.3}$$

denklemi elde edilir. Bu son paralel ötelemeyi $x+\delta_x+\delta_y$ noktasına δ_y boyunca paralel olarak öteleyelim. Bu durumda (2.3.3) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} z_i\left(x+\delta_x+\delta_y\right)&=z_i(x+\delta_x)-\Gamma^i_{jk}(x+\delta_x)z_k(x+\delta_x)\delta y_j\\ &=z_i(x)-\Gamma^i_{jk}(x)z_k(x)\delta x_j\\ &-\Gamma^i_{jk}(x+\delta_x)\left[z_k(x)-\Gamma^k_{lm}z_m(x)\delta x_l\right]\delta y_j \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{\Gamma^i_{jk}(x+\delta_x)-\Gamma^i_{jk}(x)}{\delta x_m}=\partial_m\Gamma^i_{jk}$$

yani,

$$\Gamma^i_{jk}(x+\delta_x)=\Gamma^i_{jk}(x)+\partial_m\Gamma^i_{jk}\delta x_m. \tag{2.3.5}$$

dır. (2.3.5) denklemini (2.3.4) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &=z_i(x)-\Gamma^i_{jk}(x)z_k(x)\delta x_j\\ &-\left[\Gamma^i_{jk}(x)+\partial_m\Gamma^i_{jk}(x)\delta x_m\right]\left[z_k(x)-\Gamma^k_{lm}(x)z_m(x)\delta x_l\right]\delta y_j \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} z_i\left(x+\delta_x+\delta_y\right)&=z_i(x)-\Gamma^i_{jk}(x)z_k(x)\delta x_j\\ &-\Gamma^i_{jk}(x)z_k(x)\delta y_j+\Gamma^i_{jk}(x)\Gamma^k_{lm}(x)z_m(x)\delta x_l\delta y_j\\ &-\partial_m\Gamma^i_{jk}(x)\delta x_m\delta y_j z_k(x)+\partial_m\Gamma^i_{jk}(x)\delta x_m\Gamma^k_{lm}z_m(x)\delta x_l\delta y_j \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

İkinci mertebeden değişimi ölçtüğümüz için daha büyük dereceli terimleri ihmal edicez. Burada $O^{>2}(\delta_x, \delta_y)$ ikinci dereceden büyük terimleri ifade etmektedir.

O halde

$$= z_i(x) - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta x_j$$

$$-\Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_j - \partial_m \Gamma^i_{jk}(x) \delta x_m \delta y_j z_k(x)$$

$$+\Gamma^i_{jk}(x) \Gamma^k_{lm}(x) z_m(x) \delta x_l \delta y_j + O^{>2}(\delta_x, \delta_y) \qquad (2.3.7)$$

yazabiliriz. x deki z tanjant vektörünü $x + \delta_y$ noktasına paralel ötelersek

$$z_i(x + \delta_y) = z_i(x) - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_j \qquad (2.3.8)$$

elde edilir. Daha sonra bu vektörü $x + \delta_y$ den $x + \delta_y + \delta_x$ noktasına paralel ötelersek

$$z_i(x + \delta_y + \delta_x) = z_i(x + \delta_y) - \Gamma^i_{jk}(x + \delta_y) z_k(x + \delta_y) \delta x_j$$

$$= z_i(x) - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_j$$

$$-\left(\Gamma^i_{jk}(x) + \partial_m \Gamma^i_{jk}(x) \delta y_m\right)\left[z_k(x) - \Gamma^k_{lm} z_m(x) \delta y_l\right] \delta x_j$$

$$= z_i(x) - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_j$$

$$-\Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta x_j + \Gamma^i_{jk}(x) \Gamma^k_{lm}(x) z_m(x) \delta y_l \delta x_j$$

$$-\partial_m \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_m \delta x_j + (\ \partial_m \Gamma^i_{jk} \Gamma^k_{lm} z_m(x) \delta y_m \delta y_l \delta x_j)^3$$

$$= z_i(x) - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_j$$

$$-\Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta x_j + \Gamma^i_{jk}(x) \Gamma^k_{lm}(x) z_m(x) \delta y_l \delta x_j$$

$$-\partial_m \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_m \delta x_j + O^{>2}(\delta_x, \delta_y) \qquad (2.3.9)$$

denklemine ulaşırız. x deki z tanjant vektörünü saat yönünün tersinde sırasıyla $x + \delta_x$, $x + \delta_x + \delta_y$, $x + \delta_y$ ve son olarakta $x + \delta_y + \delta_x$ noktasına paralel ötelediğimizde

$$z_i(x) - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta x_j$$

$$+z_i(x) - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta x_j - \Gamma^i_{jk}(x) z_k(x) \delta y_j$$

$$-\partial_m \Gamma_{jk}^i(x)\delta x_m \delta y_j z_k(x) + \Gamma_{jk}^i(x)\Gamma_{lm}^k(x) z_m(x)\delta x_l \delta y_j$$

$$-z_i(x) + \Gamma_{jk}^i(x) z_k(x)\delta y_j$$

$$-z_i(x) + \Gamma_{jk}^i(x) z_k(x)\delta y_j$$

$$+\Gamma_{jk}^i(x) z_k(x)\delta x_j - \Gamma_{jk}^i(x)\Gamma_{lm}^k(x) z_m(x)\delta y_l \delta x_j$$

$$+\partial_m \Gamma_{jk}^i(x) z_k(x)\delta y_m \delta x_j + O^{>2}(\delta_x, \delta_y)$$

$$= -\partial_m \Gamma_{jk}^i(x)\delta x_m \delta y_j z_k(x) + \Gamma_{jk}^i(x)\Gamma_{lm}^k(x) z_m(x)\delta x_l \delta y_j$$

$$-\Gamma_{jk}^i(x)\Gamma_{lm}^k(x) z_m(x)\delta y_l \delta x_j + \partial_m \Gamma_{jk}^i(x) z_k(x)\delta y_m \delta x_j + O^{>2}(\delta_x, \delta_y)$$

$$= \left[-\partial_m \Gamma_{jk}^i(x) + \partial_j \Gamma_{mk}^i(x) + \Gamma_{jm}^i(x)\Gamma_{lk}^m(x) - \Gamma_{lm}^i(x)\Gamma_{jk}^m(x)\right] z_k(x)\delta x_m \delta y_j$$

$$+O^{>2}(\delta_x, \delta_y) \qquad (2.3.10)$$

denklemini elde ederiz. Daha sonra önerme (2.2.8) yardımıyla

$$= R_{kjm}^i z_k(x)\delta x_m \delta y_j + O^{>2}(\delta_x, \delta_y) \qquad (2.3.11)$$

elde edilir. Buradan x noktasındaki z tanjant vektörü ile z tanjant vektörünü paralelogram boyunca öteleyip x noktasına geldiğimizde elde ettiğimiz z^* tanjant vektörünün bileşenleri arasındaki ilişki

$$z_i^* = z_i + \left[R_{kjm}^i z_k\right]\delta x_m \delta y_j + O^{>2}(\delta_x, \delta_y) \qquad (2.3.12)$$

şeklinde olur.

Böylece p köşe noktasında $x, y \in T_pM$ tanjant vektörlerine teğet olan yeteri kadar küçük P paralelogramı boyunca z tanjant vektörü paralel olarak ötelendiğinde elde edilen z^* tanjant vektörü için

$$z^* = z + R(x,y)z\delta_x\delta_y + O^{>2}\left(\delta_x, \delta_y\right)$$

eşitliği elde edilmiş olur. O halde $R(x,y)z$, ile $z \in T_pM$ tanjant vektörünü P paralelogram etrafında parelel olarak ötelediğimizde z nin değişimini ikinci mertebeden ölçmüş olur (Haesen ve Verstraelen 2007).

2.4 Yarı-Riemann Altmanifoldlar

Tanım 2.4.1: M ve $\widetilde{M}$ birer diferansiyellenebilir manifold ve $M \subset \widetilde{M}$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} j: M &\longrightarrow \widetilde{M} \\ p &\longrightarrow j(p) = p \end{aligned}$$

dahil etme fonksiyonu bir immersiyon ise M ye $\widetilde{M}$ nın alt manifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.2: $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ yarı- Riemann manifoldunun bir C^{∞} altmanifoldu M olsun.

$$\begin{aligned} j: M &\longrightarrow \widetilde{M} \\ p &\longrightarrow j(p) = p \end{aligned}$$

dahil etme dönüşümünün $p \in M$ deki türev dönüşümü

$$\begin{aligned} T_pM &\xrightarrow{j_*|_p} T_p\widetilde{M} \\ v &\longrightarrow j_*|_p(v) = v \end{aligned}$$

şeklinde olup, $v, w \in T_pM$ için

$$\tilde{g}|_p\big(j_*(v), j_*(w)\big) = g(v, w)$$

ise g ye $\tilde{g}$ nın M ye *indirgenmiş yarı-Riemann metrik tensörü* denir. (M, g) ikilisine $\big(\widetilde{M}, \tilde{g}\big)$ nin bir *yarı-Riemann alt manifoldu* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.3: M_i^n, $\widetilde{M}_v^{n+p}$ nin n-boyutlu bir yarı - Riemann alt manifoldu olsun. $\forall p \in M_i^n$ için $T_p(M_i^n)^{\perp}$ nin boyutuna M_i^n nin *dik tümleyenin boyutu* (co-dimension), $T_p(M_i^n)^{\perp}$ indeksine de M_i^n nin *dik tümleyenin indeksi* (co-indeksi) denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.4.1: M_i^n, $\widetilde{M}_v^{n+p}$nin n-boyutlu bir yarı - Riemann alt manifoldu olsun. O zaman;

$$ind\ \widetilde{M}_v^{n+p} = ind\ M_i^n + coind\ M_i^n$$

dır (O'Neill 1983).

Böylece

$$\mathrm{T_p}\left(\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{n+p}}\right) = \mathrm{T_p}(\mathrm{M_i^n}) \oplus T_p(M_i^n)^{\perp}$$

olduğundan, $x \in \mathrm{T_p}\left(\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{n+p}}\right)$ için tanjant ve normal bileşenler yardımıyla,

$$x = \tan x + \mathrm{nor}\ x$$

yazılışı tek türlüdür. Burada

$$\tan x \in \mathrm{T_p}(\mathrm{M_i^n}), \mathrm{nor}\ x \in T_p(M_i^n)^{\perp}$$

dir. Ortogonal izdüşümlerin sonucu olarak

$$\tan\colon \mathrm{T_p}\left(\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{n+p}}\right) \longrightarrow \mathrm{T_p}(\mathrm{M_v^n})$$

ve

$$\mathrm{nor}\colon \mathrm{T_p}\left(\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{n+p}}\right) \longrightarrow T_p(M_i^n)^{\perp}$$

birer lineer dönüşüm olurlar (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.4: $M_i^n \subset \widetilde{M}_v^{n+p}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}_v^{n+p}$ deki yarı-Riemann koneksiyonu olsun.

$$\begin{aligned} h\colon \chi(M_i^n) \times \chi(M_i^n) &\longrightarrow \chi(M_i^n)^{\perp} \\ (\ X,\ \ Y\ ) &\longrightarrow h(X,Y) = \mathrm{nor}\widetilde{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

simetrik ve iki lineer dönüşümüne M^n nin *ikinci temel formu* denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.4.2: $M_i^n \subset \widetilde{M}_v^{n+p}$ bir C^{∞} altmanifold ve M_i^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M_i^n)$ olmak üzere, $\widetilde{M}_i^n$ üzerindeki yarı- Riemann $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonu yardımıyla;

$$\nabla : \chi(M_i^n) \times \chi(M_i^n) \longrightarrow \chi(M_i^n)$$
$$(\ X,\ \ Y\ ) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - h(X,Y)$$

ile tanımlanan ∇, M_i^n nin bir yarı- Riemann koneksiyonudur (O'Neill 1983).

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

eşitliği *Gauss formülü* olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.5: M_i^n, $\widetilde{M}_v^{n+p}$ nin n-boyutlu yarı- Riemann alt manifoldu olsun. ξ, M_i^n de normal bir birim vektör alanı ve $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}_v^{n+p}$ nin yarı- Riemann koneksiyonu olsun. $\forall X \in \chi(M_i^n)$, $\widetilde{\nabla}_X \xi$ nın teğet bileşeni $-A_\xi X$ ve normal bileşeni $D_X \xi$ olmak üzere,

$$A : \chi(M_i^n) \times \chi(M_i^n)^{\perp} \longrightarrow \chi(M_i^n)$$
$$(X,\xi) \longrightarrow A_\xi X$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece,

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{2.4.1}$$

dır. Bu eşitliğe, *Weingarten eşitliği* denir (Chen 1973).

Burada

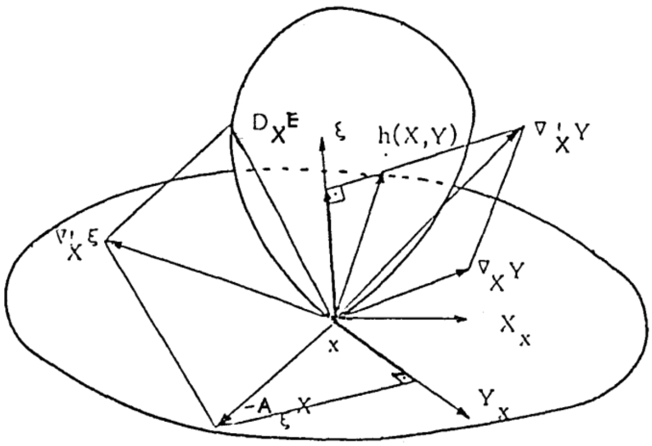
$$D : \chi(M_i) \times \chi(M_i)^{\perp} \longrightarrow \chi(M_i)$$
$$(X,\xi) \longrightarrow D_X \xi$$

koneksiyonuna, M_i^n nin *normal koneksiyonu* denir (Chen 1973).

Teorem 2.4.3: $M_i^n \subset \widetilde{M}_v^{n+p}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M_i^n)$ ve $\forall \xi \in \chi(M_i^n)^{\perp}$ olmak üzere

$$g\big(A_\xi X, Y\big) = \tilde{g}(h(X,Y),\xi)$$

dır (O'Neill 1983, Chen 1973).



Şekil 2.4.1

Tanım 2.4.6: M_i^n, $\widetilde{M}_v^{n+p}$ nin n-boyutlu yarı- Riemann alt manifoldu, $\forall X,Y,Z \in \chi(M_i^n)$ ve h M_i^n de ikinci temel form olmak üzere,

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = D_X\big(h(Y,Z)\big) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \qquad (2.4.2)$$

şeklinde tanımlı $\overline{\nabla}$ koneksiyonuna M_i^n nin *Van-Der Waerden-Bortolotti koneksiyonu* denir (O'Neill 1983).

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = 0$$

ise M_i^n *paralel ikinci temel forma sahiptir* denir. Paralel ikinci temel forma sahip altmanifolda yarı paralel altmanifold denir (Lumiste 1999).

Tanım 2.4.7: M_i^n yarı-Riemann manifold $X,Y \in \chi(M_i^n)$ ve $V \epsilon \chi(M_i^n)^\perp$ olmak üzere

$$R^\perp(X,Y)V = D_X D_Y V - D_Y D_X V - D_{[X,Y]} V$$

şeklinde tanımlı eğrilik tensörüne M manifoldunun *normal eğrilik tensörü* denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.4.4: $\widetilde{R}$ ve R sırası ile $\widetilde{M}$ ve M nin eğrilik tensör alanları olsun. O zaman $\forall X,Y,Z \in T_P M$ ve M ye teğet her bir W tanjant vektör alanı için

i) $$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y$$
$$+(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z) \qquad (2.4.3)$$

ii) $$g\big(\tilde{R}(X,Y)Z,W\big) = g(R(X,Y)Z,W) - g\big(h(X,W),h(Y,Z)\big)$$
$$+g\big(h(Y,W),h(X,Z)\big)$$

dır. Bu eşitliğe *Gauss denklemi* denir.

iii) $$\big(\tilde{R}(X,Y)Z\big)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z)$$

dir. Bu eşitliğe de *Codazzi denklemi* denir (Yano ve Kon 1984).

İspat: $\forall X,Y,Z \in \chi(M_i^n)$ olmak üzere Gauss ve Weingarten eşitliklerinden

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$$
$$= \widetilde{\nabla}_X\big(\nabla_Y Z + h(Y,Z)\big) - \widetilde{\nabla}_Y\big(\nabla_X Z + h(X,Z)\big)$$
$$-\Big(\nabla_{[X,Y]}Z + h([X,Y],Z)\Big)$$
$$= \nabla_X\nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z) + (\nabla_X h)(Y,Z) + h(\nabla_X Y,Z)$$
$$+h(Y,\nabla_X Z) - \nabla_Y\nabla_X Z - h(Y,\nabla_X Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)$$
$$-h(\nabla_Y X,Z) - h(X,\nabla_Y Z) - \nabla_{[X,Y]}Z - h([X,Y],Z)$$
$$-A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y$$
$$= R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y$$
$$+(\nabla_Z h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z),$$
$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y$$
$$+(\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z).$$

Böylece (i) ispatlanır. (i) denkleminin her iki tarafını $W \in \chi(M_i^n)$ ile çarparsak

$$g(\bar{R}(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$
$$-g\Big(h(X,W),h(Y,Z) + g\big(h(Y,W),h(X,Z)\big)\Big).$$

(ii) ispatlanır. (i) denkleminin normal kısmını göz önüne alırsak

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)$$

eşitliği elde edilir. (iii) ispatlanır.

Tanım 2.4.8: M_i^n yarı-Riemann manifoldunun bir ortonormal çatısı $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ve $g(e_i, e_i) = \varepsilon_i$,

$$H = (1/n)\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h\left(e_j, e_j\right) \tag{2.4.4}$$

şeklinde tanımlı normal değerli vektör alanına M_i^n nin *ortalama eğrilik vektör alanı* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.9: M_i^n, $\widetilde{M}_v^{n+p}$ nin n-boyutlu yarı- Riemann altmanifoldu olsun. g, M_i^n nin $\widetilde{M}_v^{n+p}$ deki $\tilde{g}$ metriğinden indirgenmiş yarı- Riemann metrik olsun. $\forall X, Y \in \chi(M_i^n)$ için

$$h(X, Y) = g(X, Y)H \tag{2.4.5}$$

ise M_i^n ye *total umbilik altmanifold* ve ikinci temel form özdeş olarak sıfır ise M_i^n ye *total geodezik altmanifold* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.10: M_i^n nin normal koneksiyonu D, $X \in \chi(M_i^n)$ ve H, M_i^n nin ortalama eğrilik vektör alanı olsun. Eğer, $D_X H = 0$ ise H M_i^n de *paraleldir* denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.4.5: $\widetilde{M}_v^{n+p}(c)$ c-sabit eğrilikli yarı-Riemann manifold ve M_i^n, $\widetilde{M}_v^{n+p}(c)$ nin bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M_i^n)$ için $\widetilde{R}\,(X, Y)Z$, M_i^n ye teğettir (Yano ve Kon 1984).

İspat: $\widetilde{M}$ c-sabit eğrilikli olduğundan

$$\tilde{R}(X, Y)Z = c[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

ve Codazzi denkleminden

$$0 = \left(\tilde{R}(X, Y)Z\right)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X, Z)$$

(2.3.7) denklemi yardımıyla $V \in \chi(M_i^n)^{\perp}$ olmak üzere

$$= g\left(\tilde{R}(X, Y)Z, V\right) = g(R(X, Y)Z, V) - g\left(A_{h(Y,Z)}X, V\right) - g\left(A_{h(X,Z)}Y, V\right)$$

$$= g(R(X,Y)Z,V)$$
$$= 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.6: $\widetilde{M}_v^{n+p}$(c) yarı-Riemann manifoldunun bir alt manifoldu M_i^n olsun. $\widetilde{M}_v^{n+p}$(c) ve M_i^n nin eğrilik tensörleri sırasıyla $\tilde{R}$ ve R olmak üzere

i) $g\big(\tilde{R}(X,Y)Z,W\big) =$
$g(R(W,Z)X,Y) - g\Big(h(W,X),h(V,Y) + g\big(h(V,X),h(W,Y)\big)\Big)$

ii) $Ric(X,Y) = (n-1)cg(X,Y) + \sum_\alpha izA_\alpha g(A_\alpha X,Y) - \sum_\alpha g(A_\alpha X,A_\alpha Y).$

iii) $r = n(n-1)c + \sum_\alpha (izA_\alpha)^2 - \sum_\alpha izA_\alpha^2$

dır. Burada r M nin skaler eğriliğidir (Yano and Kon 1984).

İspat:

i) $[V,W] = 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\tilde{g}\big(\tilde{R}(X,Y)Z,W\big) = \tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_W X - \tilde{\nabla}_W\tilde{\nabla}_V X,Y\big) \tag{2.4.6}$$
$$= g\Big(\tilde{\nabla}_V(\nabla_W X + h(W,X)) - \tilde{\nabla}_W(\nabla_V X + h(V,X),Y)\Big)$$
$$= \tilde{g}\big(\nabla_V\nabla_w X + h(V,\nabla_W X) - A_{h(W,X)}V + D_V h(W,X) - \nabla_v\nabla_w X - h(w,\nabla_v X)$$
$$+ A_{h(v,X)}W - D_w h(v,X),Y)$$
$$= g(\nabla_v\nabla_w X - \nabla_w\nabla_v X,Y) + g(-A_{h(w,X)}V + A_{h(v,X)}W,Y)$$
$$= g(R(v,w)X,Y) - g\big(h(w,X),h(v,Y)\big) + g(h(v,X) + h(w,Y)) \tag{2.4.7}$$

ii) $S(V,Y) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(V,e_i)e_i,Y)$

$$= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i c[g(e_i,e_i)g(V,Y) - g(V,e_i)g(Y,e_i)]$$
$$+ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\big[-\tilde{g}\big(h(V,e_i),h(Y,e_i)\big) + \tilde{g}(h(e_i,e_i),h(V,Y))\big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c[\varepsilon_i g(e_i, e_i) g(V, Y) - \varepsilon_i g(V, e_i) g(Y, e_i)]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left[-\tilde{g}\big(h(V, e_i), h(Y, e_i)\big) + \tilde{g}(h(e_i, e_i), h(V, Y)) \right]$$

$$= n \cdot cg(V, Y) - cg(V, Y)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} \varepsilon_i \left[-\varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha g(A_\alpha Y, e_i) g\big(e_\alpha, e_\beta\big) + \varepsilon_\beta \varepsilon_\alpha g(A_\alpha e_i, e_i) g\big(A_\beta V, Y\big) g(e_\alpha, e_\beta) \right]$$

$$= (n-1)cg(V, Y) + \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} -g(A_\alpha V, A_\alpha V) + \sum_{\alpha=n+1}^{n+d} izA_\alpha g(A_\alpha V, Y)$$

iii) $r = \sum \varepsilon_i g(e_i, e_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (n-1) cg\,(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{d} -\varepsilon_i g(A_\alpha e_i, A_\alpha e_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=n+1}^{d} \varepsilon_i izA_\alpha g(A_\alpha e_i, e_i)$$

$$= n(n-1)c - \sum_{\alpha=n+1}^{d} izA_\alpha^2 + \sum_{\alpha=n+1}^{d} (izA_\alpha)^2$$

eşitliği elde edilir. Böylece M manifoldunun τ skaler eğriliği,

$$r = n(n-1)c + \sum_{a} (izA)^2 - \sum_{a} izA_a^2$$

dir. Burada izA_a^2 M nin ikinci temel formunun karesidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.4.11: Eğrilik tensörünün ikinci temel forma etkisi $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$(\bar{R}(X, Y) \cdot h)(Z, W) = R^{\perp}(X, Y) h(Z, W) - h(R(X, Y)Z, W) - h(Z, R(X, Y)W)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\bar{R} \cdot h = 0$ ise M ye yarı paraleldir denir (Chen 1973).

Ayrıca kolay bir hesaplama ile

$$(\bar{R}(X,Y).h)(Z,W) = (\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y h)(Z,W) - (\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X h)(Z,W)$$

denklemi elde edilir (Chen 1973).

Tanım 2.4.12: M bir yarı-Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM nin ortanormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere $f \in C^\infty(M,R)$ için

$$\Delta : C^\infty(M,R) \longrightarrow C^\infty(M,R)$$

$$f \longrightarrow \Delta f = div(gradf)$$

$$= \sum_i \varepsilon_i \big(e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i) f\big) \qquad (2.4.8)$$

şeklinde tanımlanan Δ operatörüne *laplasyan operatörü* ve Δf e ise f fonksiyonunun *Laplasyanı* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.4.13: $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir (M, g) altmanifoldu verilsin. M nin birim tanjant vektörü X olmak üzere γ M üzerinde $\gamma'(0) = X$ özelliğinde bir geodezik olsun. Bu taktirde γ nın 0 noktasındaki birinci Frenet eğriliği $k(0) = \|h(X,X)\|$ dır. Eğer M nin her p noktasında $h(X,X)$ in normu $\|h(X,X)\|$ sadece p ye bağlı olup $X = \gamma'(0)$ dan bağımsız ise M ye *izotropik altmanifold* adı verilir (O'Neill 1983).

Bir m-boyutlu $\bar{M}$ Riemann manifoldunun bir n-boyutlu altmanifoldu M olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, T_XM de ve $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$, $T_X^\perp M$ de bir ortanormal baz olsun. M nin ikinci temel formunun boyunun karesinin Laplace denklemi

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = g(\bar{\nabla}^2 h, h) + \|\bar{\nabla} h\|^2 \qquad (2.4.9)$$

şeklinde elde edilir.

$\tilde{R}(X,Y)Z$, M de ve teğet olsun. Bu durumda

$$(\bar{\nabla}^2 h)(X,Y) = \sum_i \big(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i} h\big)(X,Y)$$

$$= \sum_i (R(e_i, X)h)(e_i, Y) + D_X D_Y (izh)$$

dir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.4.14: $M, \widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu olsun.

$$\bar{R} \cdot h = LQ(g, h)$$

ise M ye pseudo paraleldir denir. Burada L, M üzerinde tanımlı differansiyellenebilir bir fonksiyondur (O'Neill 1983).

3.SİMETRİK MANİFOLDLAR

3.1. Yarı Simetrik Manifoldlar

Bu bölümde bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde simetri kavramını açıklayacağız. Bunun için önce gerekli kavramları verelim.

Tanım 3.1.1: (M,g) bir yarı-Riemann manifold olsun. $o \in M$ ve
$D_o = \{v \in T_oM \mid \gamma_v : [0,1] \to M, \gamma_v(0) = o, \gamma_v'(0) = v \text{ başlangıç şartlı geodezik}\}$
olmak üzere

$$\begin{aligned} exp_o : D_o &\longrightarrow M \\ v &\longrightarrow exp_o(v) = \gamma_v(1) \end{aligned}$$

dönüşümüne $o \in M$ de M nin *üstel dönüşümü* denir (O'Neill 1983).

Sabit $v \in T_oM$ tanjant vektör ve $t \in R$ noktası alalım. M üzerinde

$$\begin{aligned} \beta : [0,1] &\longrightarrow M \\ s &\longrightarrow \beta(s) = \gamma_v(ts) \end{aligned}$$

eğrisini tanımlayalım. Burada γ_v tanım 3.1.1. deki γ_v eğrisidir. β nın s parametresine göre türevi

$$\beta'(s) = t\gamma_v'(ts)$$

dir. Böylece

$$\beta'(0) = t\gamma_v'(0) = tv$$

başlangıç hızlı ve

$$\beta(0) = \gamma_v(0) = 0$$

başlangıç noktalı bir geodezik olur. γ_v M üzerinde maksimal geodezik olduğundan

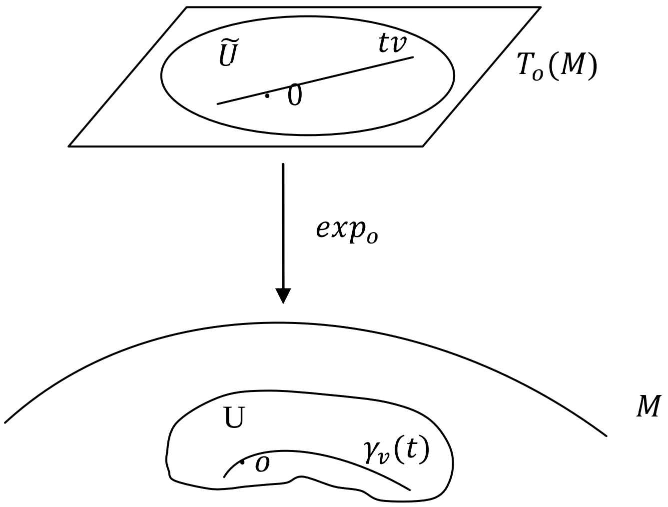
$$\beta(s) = \gamma_{v}(ts) = \gamma_{tv}(s)$$

olmak zorundadır. O halde

$$exp_0(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_{v}(t)$$

dır.

Böylece üstel dönüşüm exp_o, T_oM nin orijinden geçen doğruları M nin o noktasından geçen geodeziklere dönüştürür (O'Neill 1983).



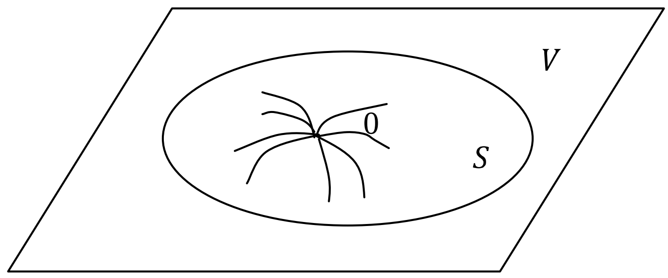
Şekil 3.1.1.

Önerme 3.1.1: Her $o \in M$ noktası için T_oM nin o noktasının bir $\widetilde{U}$ komşuluğu, M de o ın bir U komşuluğu olmak üzere

$$exp_o: T_oM \subset \widetilde{U} \longrightarrow M \subset U$$

diffeomorfizm olacak şekilde vardır (O'Neill 1983).

Tanım 3.1.2: Bir V vektör uzayının altcümlesi S olsun. Eğer $\forall t \in [0,1]$ için $v \in S$ iken $tv \in S$ ise S 0 civarında yıldızımsıdır denir (O'Neill 1983).



Şekil 3.1.2.

O zaman S radyal doğru parçaların birleşimi olur.

Tanım 3.1.3: U ve $\widetilde{U}$ önerme 3.1.1 deki gibi belirlensin. Eğer $\widetilde{U},$ 0 civarında yıldızımsı ise U ya 0 ın bir *normal komşuluğudur* denir (O'Neill 1983).

Önerme 3.1.2: Eğer U her $p \in U$ noktası için $o \in M$ nin bir normal komşuluğu ise

$$\sigma\colon [0,1] \longrightarrow U$$
$$0 \longrightarrow \sigma(0) = 0$$
$$1 \longrightarrow \sigma(1) = p$$

olacak şekilde bir tek geodezik vardır. Üstelik

$$\sigma'(0) = exp_o^{-1}(p) \in \widetilde{U}$$

dır (O'Neill 1983).

Örnek 3.1.1: $\mathrm{M} = \mathrm{R}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{n}}$ ve $p \in R_v^n$ olsun.

$$D_p = \{v \in T_P M \mid \gamma_v\colon [0,1] \longrightarrow M, t \longrightarrow \gamma_v(t) = p + tv,\ \gamma_v(0) = p, \gamma_v'(0) = v\}$$
$$exp_p\colon D_p \longrightarrow M$$
$$v \longrightarrow exp_p(v) = \gamma_v(1) = p + v$$

Önerme 3.1.1. gereğince $exp_p\colon T_p(R_v^n) \to R_v^n$ bir diffeomorfizm olur (O'Neill 1983).

3.2. Lokal Simetrik Manifoldlar

Tanım 3.2.1: (M, g) bir yarı-Riemann manifold ve R, M nin eğrilik tensör alanı olsun. Eğer $\nabla R = 0$ ise M ye lokal simetriktir denir (O'Neill 1983).

Önerme 3.2.1: Sabit eğrilikli manifoldlar lokal simetriktirler (O'Neill 1983).

İspat: M c-sabit eğrilikli bir yarı-Riemann manifold olsun. Bu durumda

$$R(X,Y)Z = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

dir.

$$(\nabla_W R)(X,Y,Z) = \nabla_W R(X,Y)Z - R(\nabla_W X, Y)Z - R(X,Y)\nabla_W Z$$

$$= \nabla_W (c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) - c(g(X,Z)\nabla_W X - g(\nabla_W X, Z)Y) - c(g(Y, \nabla_W Z)X - g(X, \nabla_W Z)Y)$$

$$= c[g(\nabla_W Y, Z)X + g(Y, \nabla_W Z)X + g(Y,Z)\nabla_W X - c(g(Y,Z)\nabla_W X - g(\nabla_W X, Z)Y) - c(g(Y, \nabla_W Z)X - g(X, \nabla_W Z)Y)]$$

$$= 0$$

Böylece teoremin ispatı biter.

Şimdi lokal simetriklik kavramının geometrik anlamını vermeye çalışalım. Bunu aşağıdaki önerme yardımıyla açıklayacağız.

Önerme 3.2.2: (M, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(1) $\nabla R = 0$,

(2) X,Y ve Z, M üzerindeki bir α eğrisi üzerinde paralel vektör alanları iseler $R(X,Y)Z$ α boyunca paraleldir,

(3) Kesit eğriliği, paralel öteleme altında değişmez

(O'Neill 1983).

Tanım 3.2.2: (M^n, g) ve $(\overline{M}^n, g)$ aynı indeksli iki yarı- Riemann manifold $o \in M$ ve $\bar{o} \in \overline{M}$ olsun.

$$L: T_o M \longrightarrow T_{\bar{o}}\overline{M}$$

L bir lineer izometri ve U, M nin $o \in M$ noktasındaki bir normal komşuluğu $exp_{\bar{o}}$, $L(exp_o^{-1}(U))$ üzerinde tanımlı olacak şekilde belli olsun. O zaman

$$\emptyset_L = exp_{\bar{o}} \circ L \circ exp_o^{-1} : U \longrightarrow M$$

dönüşümüne U üzerinde L nin kutupsal (polar) dönüşümü denir (O'Neill 1983).

$o \in M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L: T_o M &\longrightarrow T_o M \\ v &\longrightarrow -v \end{aligned}$$

lineer izometrisi için ξ_P kutupsal dönüşümü

$$\begin{aligned} \xi_p : exp_o \circ L \circ exp_o^{-1} : U &\longrightarrow M \\ p &\longrightarrow (exp_o \circ L \circ exp_o^{-1})(p) \\ &\qquad = (exp_o \circ L \circ \sigma'(o)) \\ &\qquad = exp_o(-\sigma'(o)) \end{aligned}$$

dır. Yani $\gamma(o) = p$ ise $\xi_p\big(\gamma(s)\big) = \gamma(-s)$ dir. Bu ξ_p dönüşümüne p de M nin *lokal geodezik simetrisi* denir (O'Neill 1983).

Sonuç 3.2.1: (M, g) bir yarı- Riemann manifold olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) M lokal simetriktir.

(2) $L: T_P M \longrightarrow T_q M$ bir lokal izometri ve eğrilikleri koruyorsa $\emptyset_*$=L olacak şekilde p nin ve q nun normal komşuluklarının bir izometrisi vardır.

(3) Her $p \in M$ noktasında lokal geodezik ξ_p simetriği bir izometridir

(O'Neill 1983).

Tanım 3.2.3: (M, g) bağlantılı yarı-Riemann manifold olsun. Her $p \in M$ noktası için bir tek

$$\zeta_p : M \longrightarrow M$$

izometrisi türev dönüşümü $(-id)$ olacak şekilde varsa (M, g) yarı-Riemann manifolduna *simetrik uzay* denir. ζ_p izometrisi p de M nin global simetrisi olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Sonuç 3.2.2: Tam, basit bağlantılı, lokal simetrik yarı-Riemann manifold simetriktir (O'Neill 1983).

Riemann simetrik uzayların detaylı bir çalışması olarak E. Cartan'ın 1926 yılında yaptığı çalışma temel kaynak olarak verilebilir .

(M, g) yarı-Riemann manifold lokal simetrik $(\nabla R = 0)$ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$R(X, Y) \cdot R = \nabla_X \nabla_Y R - \nabla_Y \nabla_X R - \nabla_{[X,Y]} R = 0 \qquad (3.2.1)$$

olur. Yani

$$R \cdot R = 0 \qquad (3.2.2)$$

dır (Cartan 1926).

Tanım 3.2.4: (M, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. (3.2.2) bağıntısını sağlayan manifoldlar *yarı-simetrik yarı-Riemann manifold* olarak adlandırılır (Szabo 1982).

Sonuç 3.2.3: (M, g) yarı-Riemann manifoldu lokal simetrik ise yarı-simetriktir.

Riemann yarı-simetrik manifoldların sınıflandırılması (Szabo 1982, 1984, 1985) ve (Boeckx ve ark. 1996) çalışmalarında geniş olarak verilmiştir.

Şimdi yarı-simetrik kavramının geometrik yorumunu verelim. V vektör alanının bir paralelogram etrafında paralel olarak ötelendiğinde elde edilen yeni vektör alanı V^* ise (2.3.12) denklemi yardımıyla

$$V^* = V + R(X,Y)V\delta_X\delta_Y + O^{>2}(\delta_X,\delta_Y) \tag{3.2.3}$$

eşitliğini elde ederiz.

W nun paralel ötelemesi W^* olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} R(V^*,W^*,W^*,V^*) &= R(V + R(X,Y)V\delta_X\delta_Y + O^{>2}(\delta_X,\delta_Y), \\ &\quad W + R(X,Y)W\delta_X\delta_Y + O^{>2}(\delta_X,\delta_Y), \\ &\quad W + R(X,Y)W\delta_X\delta_Y + O^{>2}(\delta_X,\delta_Y), \\ &\quad V + R(X,Y)V\delta_X\delta_Y + O^{>2}(\delta_X,\delta_Y)) \\ &= R(V,W,W,V) + R(R(X,Y)V,W,W,V)\delta_X\delta_Y \\ &\quad + R(V,R(X,Y)W,W,V)\delta_X\delta_Y + R(V,W,R(X,Y)W,V)\delta_X\delta_Y \\ &\quad + R(V,W,W,R(X,Y)V)\delta_X\delta_Y + O^{>2}(\delta_X,\delta_Y). \end{aligned}$$

Burada $O^{>2}(\delta_X,\delta_Y)$, 2. mertebeden büyük terimleri ifade etmektedir. Böylece

$$R(V^*,W^*,W^*,V^*) = R(V,W,W,V) - (R(X,Y)\cdot R)(V,W,W,V)\delta_X\delta_Y + O^{>2}(\delta_X,\delta_Y)$$

dır.

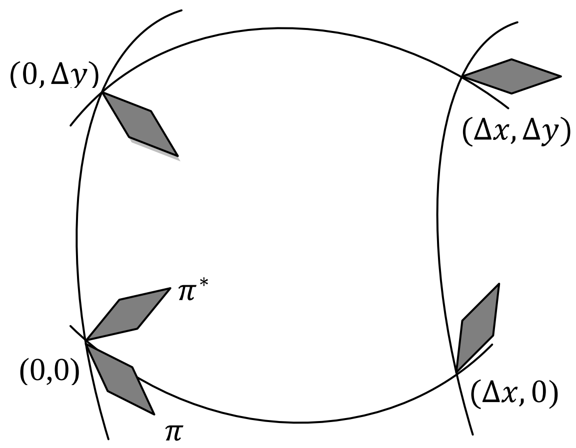
Böylece $R \cdot R$, V ve W vektörlerinin bir paralelogram etrafında paralel olarak ötelendiğinde elde edilen yeni vektörler V^* ve W^* olmak üzere V ve W vektörlerinin eğrilik değeri ile V^* ve W^* vektörlerinin eğrilik değeri arasındaki farkı ikinci mertebeden ölçer.

V,W ortanormal vektör alanları olmak üzere ikinci mertebeden kesit eğriliğin yaklaşımı

$$K(P,\pi^*) = K(P,\pi) - (R(X,Y)\cdot R)(V,W,W,V)\delta_X\delta_Y$$

şeklinde olur.

Burada $\pi^* = S_P\{V^*, W^*\}, \pi = S_P\{V, W\}$ düzlemleridir.



Şekil 3.2.1

(Haesen ve Verstraelen 2007).

4. SİMETRİK ALTMANİFOLDLAR

Öklid uzaylarında simetrik altmanifoldlar ve bununla yakından ilişkili olan altmanifoldlarda paralel ikinci temel form ile ilgili çalışmalar 1970 lerde başladı. Bildiğimiz kadarıyla bu çalışmaların başlangıcı temel formun uzunluğu sabit olan kürelerin minimal altmanifoldları üzerinde (Chern ve ark. 1970) tarafından yapılan çalışmalara kadar uzanır. Daha sonra bu çalışmalar (Vilms 1972) ve (Tricerri ve Vanhecke 1988) tarafından devam ettirilmiştir. Sonra (Ferus 1974) Öklid uzayında paralel ikinci temel forma sahip olan altmanifoldları sistematik olarak çalıştı ve bu altmanifoldların sınıflandırmasını tamamladı. Ferus un bir çalışmasının sonucu olarak paralel ikinci temel forma sahip olan altmanifoldlar lokal olarak simetrik olacaklardır. Bu sonucun bir direk ispatı (Strübing 1979) tarafından verildi.

Tanım 4.1: (M, g), $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ nın bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. Her $p \in M$ için

$$\sigma_p : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$$
$$p \longrightarrow \sigma_p(p) = p, \sigma_p(M) = M$$

ve

$$(\sigma_p)_*(v) = \begin{cases} -v, & v \in T_pM \\ v, & v \in (T_pM)^{\perp} \end{cases}$$

olacak şekilde $\widetilde{M}$ nın bir izometrisi var ise M ye $\widetilde{M}$ nın *simetrik altmanifoldu* denir (Olmas ve ark. 2003).

Önerme 4.1: Bir uzay formun bir simetrik altmanifoldunun ikinci temel formu paraleldir (Strübing 1979).

İspat: M, $\widetilde{M}(c)$ nin bir simetrik altmanifoldu olsun. $\widetilde{M}(c)$ nin her bir izometrisi Levi-Civita koneksiyonuna göre bir afin dönüşüm olacağından

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) &= \left(\sigma_p\right)_* (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z)\\ &= \left(\overline{\nabla}_{\sigma_{p^*}} h\right)\left(\left(\sigma_p\right)_* Y, \left(\sigma_p\right)_* Z\right)\\ &= -(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z)\end{aligned}$$

Böylece

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = 0$$

elde edilir.

Tanım 4.2: (M,g), $\left(\widetilde{M},\tilde{g}\right)$ nın bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. Her $p \in M$ noktası için $\sigma_p(p) = p$, $\sigma_p(U) = U$ ve

$$\left(\sigma_p\right)_*(v) = \begin{cases} -v, & v \in T_pM \\ v, & v \in \left(T_pM\right)^{\perp} \end{cases}$$

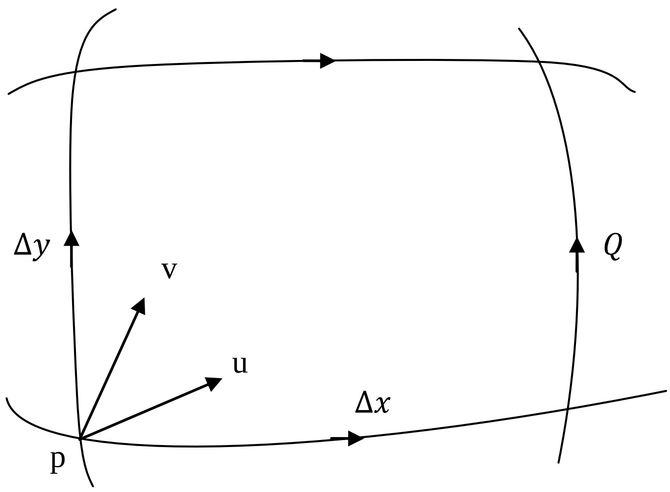
olacak şekilde M de p nin bir U koordinat komşuluğunda $\widetilde{M}$ nın bir lokal izometrisi var ise M ya *lokal simetrik altmanifold* denir (Strübing 1979).

Aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1: Sabit eğrilikli bir manifoldun altmanifoldunun lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart ikinci temel formun paralel olmasıdır (Olmas ve ark. 2003).

Teorem 4.2: M, $\widetilde{M}$ nın bir Riemann altmanifoldu ve $p \in M$ ve $u, v \in T_pM$ olsun. M de p köşeli ve Δx ve Δy kenarlı yeterince küçük bir koordinat paralelogramı Q olsun. M nin koneksiyonuna göre u ve v nin Q etrafında paralel ötelenmesi sonucunda $u^*, v^* \in T_pM$ tanjant vektörleri elde edilsin. Bu durumda $h(u,v)$ nin normal koneksiyona göre Q etrafında paralel ötelemesi sonucunda $h(u,v)^{*\perp}$ elde edilir.

O halde M nin yarı-paralel olması için gerek ve yeter şart $h(u^*, v^*)$ ile $h(u,v)^{*\perp}$ çakışık olmasıdır (Dillen ve ark. 1991).



Şekil 4.1

İspat: Eğer M de x ve y tanjant vektörleri ile birlikte p köşeli yeteri kadar küçük koordinat paralelogramı verilirse, $v \in T_pM$ tanjant vektörünü ∇ koneksiyonuna göre paralel olarak ötelersek (3.2.3) den

$$v^* = v - [R(x,y)v]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \tag{4.1}$$

dır. $\nabla^{\perp}$ koneksiyonuna göre ξ normal vektörünü paralel olarak ötelediğimizde benzer şekilde (3.2.3) yardımıyla

$$\xi^{*\perp} = \xi - [R^{\perp}(x,y)\xi]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \tag{4.2}$$

dır.

u ve v nin paralelogram etrafında paralel ötelenmesinden sonra ikinci temel formu aşağıdaki gibi düşünebiliriz. (4.1) i kullanarak

$$h(u^*, v^*) = h\big(u - [R(x,y)u]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y), v - [R(x,y)v]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\big)$$

$$= h(u,v) - h(u, R(x,y)v)\Delta x\Delta y - h(R(x,y)u, v)\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)$$
$$+h\big(u, O^{>2}(\Delta x, \Delta y)\big) + h(O^{>2}(\Delta x, \Delta y), v) + h(R(x,y)u, R(x,y)v)(\Delta x, \Delta y)^2$$

İkinci dereceden bir yaklaşım yaptığımızdan dolayı

$$h(u^*, v^*) = h(u, v) - [h(R(x, y)u, v) + h(u, R(x, y)v)]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)$$

ve ikinci temel formun $\nabla^{\perp}$ ile paralelogram etrafında paralel ötelemesi için (4.2) yi kullanırsak

$$h(u, v)^{*\perp} = h(u, v) - [R^{\perp}(x, y)h(u, v)]\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y)$$

elde edilir. $p \in M$ de

$$\begin{gathered} h(u^*, v^*) - h(u, v)^{*\perp} = \\ \big(R^{\perp}(x, y)h(u, v) - h(R(x, y)u, v) - h(u, R(x, y)v)\big)\Delta x\Delta y \\ +O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \\ = (\bar{R}(x, y) \cdot h)(u, v)\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \\ h(u^*, v^*) - h(u, v)^{*\perp} = (\bar{R} \cdot h)(u, v; x, y)\Delta x\Delta y + O^{>2}(\Delta x, \Delta y) \end{gathered}$$

denklemi elde edilir.

O halde ikinci mertebeden yaklaşım yaptığımızda $h(u^*, v^*) = h(u, v)^{*\perp}$ ise $\bar{R} \cdot h = 0$ elde edilir.

İç Özellikler		Dış Özellikler	
Flat uzay	$R = 0$	Total geodezik	$h = 0$
Uzay form	$R = \frac{c}{2} g \wedge g$	Total umbilik	$h = gH$
Lokal simetrik	$\nabla R = 0$	Paralel	$\bar{\nabla} h = 0$
Yarı-simetrik	$R \cdot R = 0$	Yarı-paralel	$\bar{R} \cdot h = 0$

M, n boyutlu bir Riemann manifold ve $u, v, x, y \in \chi(M^n)$ olsun.

$$\begin{aligned} Q(g, h)(u, v; x, y) &= -((x \wedge_g y) \cdot h)(u, v) \\ &= h\big((x \wedge_g y)u, v\big) + h\big(u, (x \wedge_g y)v\big) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada dış çarpım $\wedge_g$ ise

$$\left(x \wedge_g y\right)u = g(u,x)y - g(u,y)x$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi burada $Q(g,h)$ nın geometrik yorumunu vereceğiz.

M^n n-boyutlu Riemann manifold ve $p \in M^n$ deki tanjant uzay T_pM^n olsun. T_pM^n deki x,y tanjant vektörleri $\{x,y\}$ ortanormal ve $\{x,y,e_3,\ldots,e_n\}$ T_pM^n nin bir ortanormal bazı olacak şekilde belli olsunlar. O zaman keyfi bir $z \in T_pM^n$ tanjant vektörü

$$z = g(z,x)x + g(z,y)y + \sum_{i=3}^{n} g(z,e_i)e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

$\{x,y\}$ ortanormal vektör sistemi tarafından üretilen düzlem π olsun. z nin π düzlemi üzerine izdüşümünü $S_p\{e_3,e_4,\ldots,e_n\}$ tarafından üretilen $(n-2)$ düzlemini sabit bırakacak şekilde yeteri kadar küçük ε açısı kadar döndürelim. Burada

$$R_\varepsilon(x) = cos\varepsilon.x + sin\varepsilon.y$$
$$R_\varepsilon(y) = -sin\varepsilon.x + cos\varepsilon.y$$

olur. Fakat ε yeteri kadar küçük olduğundan $cos\varepsilon \to 1$, $sin\varepsilon \to \varepsilon$ dur. Buradan

$$R_\varepsilon(x) = x + \varepsilon y$$
$$R_\varepsilon(y) = -\varepsilon x + y$$

olur. Böylece

$$\tilde{z} = R_\varepsilon(z) = g(z,x)R_\varepsilon(x) + g(z,y)R_\varepsilon(y) + \sum_{i=3}^{n} g(z,e_i)R_\varepsilon(e_i)$$

$$= g(z,x)(x+\varepsilon y) + g(y,z)(-\varepsilon x + y) + \sum_{i=3}^{n} g(z,e_i)e_i$$

$$= g(z,x)x + g(y,z)y + \sum_{i=3}^{n} g(z,e_i)e_i + \varepsilon(g(z,x)y - g(y,z)x)$$

$$\tilde{z} = z - \varepsilon(g(y,z)x - g(x,z)y)$$

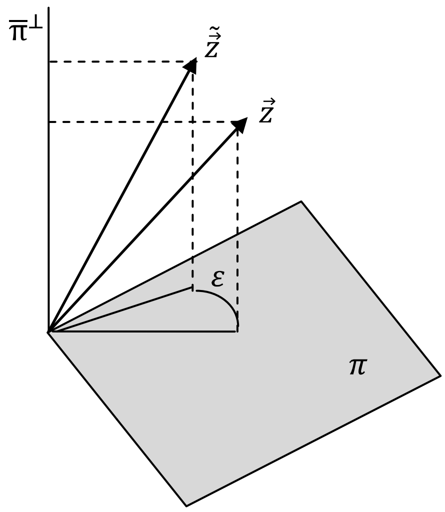
elde edilir.

$(x \wedge_g y)z$, $p \in M^n$ noktasında $z \in T_pM^n$ tanjant vektörünün Π düzlemine izdüşümünü yeteri kadar küçük ε açısı kadar döndürdükten sonra z nin değişimini birinci mertebeden ölçer.

$u, v \in T_pM^n$ olsun. $\tilde{u}$ ve $\tilde{v}$ sırasıyla u ve v nin Π düzlemine izdüşüm vektörlerini yeteri kadar küçük ε açısı kadar döndürdükten sonra elde edilen vektörler olsun.

$$
\begin{aligned}
h(\tilde{u},\tilde{v}) &= h(u-\varepsilon(g(y,u)x-g(x,u)y), v-\varepsilon(g(y,v)x-g(x,v)y) \\
&= h(u,v)-\varepsilon h((y\wedge_g x)u,v)-\varepsilon h(u,(y\wedge_g x)v)+O(\varepsilon^2) \\
&= h(u,v)-\varepsilon\left[h((y\wedge_g x)u,v)+h(u,(y\wedge_g x)v)\right]+O(\varepsilon^2) \\
&= h(u,v)-\varepsilon\, Q(g,h)(u,v;x,y)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

Böylece $Q(g,h)(u,v;x,y)$, x ve y tarafından üretilen düzlem π olmak üzere u ve v nin π düzlemine dik izdüşümlerini yeteri kadar küçük ε açısı kadar döndürdükten sonra elde edilen vektörler sırasıyla $\tilde{u}$ ve $\tilde{v}$ olsun. u ve v nin ikinci temel formdaki değeri ile $\tilde{u}$ ve $\tilde{v}$ nın ikinci temel formdaki değeri arasındaki farkı birinci mertebeden ölçer (Dillen ve ark. 1991).



Şekil 4.2

E^{2+d} öklid uzayında bir yüzeyin yarı-paralel olması için gerek ve yeter koşullar Deprez tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 4.3: $M \subset E^{2+d}$ bir yüzey olsun. M yarı-paraleldir $\Leftrightarrow$ (lokal olarak)

i) M yüzeyi S^2 küresine denktir veya

ii) M normal koneksiyonu düzlemsel olan bir lokal düzlemsel yüzeydir veya

iii) $M \subset E^5 \subset E^{2+d}$ izotropik bir yüzeydir ve $\|\breve{H}\|^2 = 3K$ eşitliğini sağlar

(Deprez 1985).

1999 yılında Lumiste, $E^{2+d}(c)$ de yarı-paralel yüzeyler için aşağıdaki sonucu vermiştir.

Teorem 4.4: $M \subset E^{2+d}(c)$ bir yüzey olsun. Eğer M yarı-paralel $(\bar{R} \cdot h = 0)$ ise

i) M bir total geodezik veya total umbilik yüzey veya

ii) $\bar{\nabla}$ van der Waerden-Bortolotti koneksiyonu düzlemsel olan bir yüzey (yani $\bar{R} = 0$) veya

iii) Ortalama eğrilik vektörü H ve Gauss eğriliği K arasında $\|H\|^2 = 3K - c$ bağıntısı bulunan bir izotropik yüzeydir

(Lumiste 1999).

2001 yılında Özgür tarafından Deprez in 1985 yılında yaptığı çalışma aşağıdaki şekilde genellenmiştir.

Teorem 4.5: $M \subset E^{2+d}$ yüzeyi $\bar{R} \cdot h = L_h Q(g, h)$ şartını sağlayan (yani M yüzeyi pseudo paralel) bir yüzey olsun. O zaman (lokal olarak) ya

i) M bir yarı-paralel yüzeydir veya

ii) Gauss eğriliği $K = L_h$ olan bir yüzey veya

iii) Ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği arasında $\|H\|^2 = 3K - 2L_h$ bağıntısı bulunan izotropik bir $M \subset E^5 \subset E^{2+d}$ yüzeyidir

(Cihan 2001).

Daha sonra Asperti ve ark. 2002 yılında aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 4.6: $\boldsymbol{M^2} \subset \widetilde{M}^5(c)$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer M^2 pseudo yarı-paralel ($\bar{R} \cdot h = L_h Q(g,h)$) ve $L + c > 0$ ise

i) M^2 total umbilik

ii) Normal demeti düzlemsel ($R^\perp = 0$) ve $K = -L \leq 0$

iii) M^2, $S^4(\tilde{c}) \subset M^5(c)$ de bir Veronese yüzey

iv) M^2, $S^5(c)$ de bir torus

dır (Asperti ve ark. 2002).

5. LORENTZ UZAYLARLARDA PARALEL YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde (Chen ve Veken 2009) kaynağı esas alınmıştır.

5.1. Üç Boyutlu Lorentzian Uzay Formlarında Paralel Yüzeyler

Üç boyutlu uzay formlarında paralel ve dejenere olmayan yüzeylerin sınıflandırması Chen ve Veken tarafından 2009 yılında aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 5.1.1: E_1^3 de dejenere olmayan paralel yüzey ise aşağıdaki sekiz tipten biridir;

(1) Öklid düzlemi $E^2 \colon L(u,v) = (0,u,v)$;

(2) Total umbilik hiperbolik düzlem

$H^2 \colon L(u,v) = a(coshucoshv, coshucoshv, sinhu),\ a > 0;$

(3) Hiperbolik silindir $H^1 \times E^1 \colon L(u,v) = (acoshu, asinhu, v),\ a > 0;$

(4) Lorentzian düzlem $E_1^2 = L(u,v) = (u,v,0);$

(5) Total umbilik de Sitter uzayı

$S_1^2 \colon L(u,v) = a(sinhu, coshucosv, coshusinv),\ \ a > 0;$

(6) Dik dairesel silindir $E^1 \times S^1 \colon L(u,v) = (u, acosv, asinv),\ \ a > 0;$

(7) Silindir $S_1^1 \times E^1 \colon L(u,v) = (asinhu, acoshu, v),\ a > 0;$

(8) Düzlemsel minimal Lorentzian yüzey

$$L(u,v) = \tfrac{1}{6}(u-v)^3 + u, \tfrac{1}{6}(u-v)^3 + v, \tfrac{1}{2}(u-v)^2$$

(Chen ve Veken 2009).

Şunları söyleyebiliriz; (4)-(8) yüzeyleri Lorentzian olmasına rağmen, (1)-(3) yüzeyleri Rimannian; (1) ve (4) total geodezik; (2) ve (5) yüzeyleri total umbilik fakat total geodezik değil, diğerlerinin hepsi düzlemsel (yarı-paralel altmanifoldlar); (1), (3), (4), (6) ve (7) yüzeyleri total geodezik altuzaylardaki paralel eğrilerin çarpımı; (8) yüzeyi düzlemsel ve minimal, fakat total geodezik değildir.

Teorem 5.1.2: $\mathrm{S}_1^3(\mathrm{c}) \subset \mathrm{E}_1^4$ de dejenere olmayan paralel yüzey ise, $c > 0$ ise aşağıdaki altı tipten biridir;

(1) Total umbilik çember S^2: $(yerel)$ $L(u, v) = (a, bsinu, bcosucosv, bcosusinv)$, $b^2 - a^2 = c^{-1}$;

(2) Total umbilik Öklid düzlem E^2:$L = \frac{1}{\sqrt{c}}\left(u^2 + v^2 - \frac{3}{4}, u^2 + v^2 - \frac{5}{4}, u, v\right)$,

(3) Total umbilik hiperbolik düzlem H^2:
$L = (acoshucoshv, acoshusinhv, asinhu, b)$, $b^2 - a^2 = c^{-1}$;

(4) Uzay benzeri yüzey
$H^1 \times S^1$: $L(u, v) = (acoshu, asinhu, bcosv, bsinv)$, $b^2 - a^2 = c^{-1}$;

(5) Total umbilik de Sitter uzayı
S_1^2: $L(u, v) = (asinhu, acoshucosv, acoshusinv, b)$, $a^2 + b^2 = c^{-1}$;

(6) Lorentzian düzlemi E_1^2:$L(u, v) = (asinhu, acoshu, bcosv, bsinv)$,
$a^2 + b^2 = c^{-1}$

(Chen ve Veken 2009).

Şunları söyleyebiliriz; (5)-(6) yüzeyleri Lorentzian olmasına rağmen, (1)-(4) yüzeyleri Rimannian; (1), (2), (4) ve (5) yüzeyleri total umbilik ve yüzeyler (1) $a = 0$ (2) $b = 0$ ve (5) b=0 ise total geodeziktir; (3), (4) ve (6) yüzeyleri düzlemsel; (6) yüzeyi $a^2 = b^2 = \frac{1}{2c}$ için minimal, fakat total geodezik değil; (4) yüzeyi E^2 nin $S_1^3(c)$ deki total umbilik izometrik immersiyonudur.

5.2. Dört Boyutlu Lorentzian Uzay Formlarında Paralel Yüzeyler

Şimdi dört boyutlu Lorentzian uzay formlarında paralel yüzeylerin sınıflandırmasını vericez. Lorentzian yüzeyler ve Riemannian yüzeyler arasındaki farkı göstericez.

Teorem 5.2.1: M, E_1^4 de uzay benzeri paralel yüzey ise aşağıdaki dokuz tipden biridir.

(1) Total geodezik düzlem $E^2: L(u,v) = (0,u,v,0)$;

(2) Küre $S^2: L(u,v) = a(0, cosucosv, cosusinv, sinu), a > 0$;

(3) Dik dairesel silindir $E^1 \times S^1: L(u,v) = (0,u,acosv,asinv),\ a > 0$;

(4) Hiperbolik silindir $H^1 \times S^1: L(u,v) = (acoshu, asinhu, v, 0),\ a > 0$;

(5) Düzlemsel silindir $H^1 \times S^1: L(u,v) = (acoshu, asinhu, bcosv, bsinv)$, $a, b > 0$;

(6) Hiperbolik düzlem $H^2: L(u,v) = a(coshucoshv, coshusinhv, sinhu, 0),\ a > 0$;

(7) Minimal düzlemsel yüzey $L(u,v) = (u^2 - v^2, u^2 - v^2, u, v)$;

(8) Yüzey $L(u,v) = (u^2 + v^2 + \frac{1}{4}, u^2 + v^2 - \frac{1}{4}, u, v)$;

(9) Düzlemsel total umbilik yüzey $L(u,v) = \frac{1}{2}((1-a)u^2 + (1+a)v^2, (1-a)u^2 + (1+a)v^2, 2u, 2v),\ a\epsilon R.$

(Chen ve Veken 2009).

Şunları söyleyebiliriz; (1), (2), (6) ve (8) yüzeyleri total umbilik ve (1) total geodezik; (1), (3)-(5) ve (7)-(9) yüzeyleri düzlemsel ve (7) yüzeyi minimaldir.

Teorem 5.2.2: E_1^4 de Lorentzian paralel yüzey, c>0 ise olmak üzere aşağıdaki altı tipten biridir;

(1) Lorentzian düzlem $E_1^2: L(u,v) = (u,v,0,0)$;

(2) De Sitter uzayı $S_1^2: L(u,v) = a(\sinh u, \cosh u \cos v\ , \cosh u \sin v\ , 0),\ a > 0$;

(3) Silindir $E_1^1 \times S^1: L(u,v) = (u, a\cos v, a\sin v, 0)$;

(4) Silindir $S_1^1 \times E^1: L(u,v) = (a\sinh u, a\cosh u, v, 0)$;

(5) Yüzey $S^1 \times S^1 : L(u,v) = (asinhu, acoshu, bcosv, bsinv)$, $a, b > 0$;

(6) Null scroll N_1^2,(1,1,0,0) yönünde dönen, sıfır kübü

$$\alpha(u) = (\frac{4}{3}u^3 + u, \frac{4}{3}u^3 - u, 2u^2, 0)$$

(Chen veVeken 2009).

Şunları söyleyebiliriz; (1) ve (2) yüzeyleri total umbilik ve (1) total geodezik; (1) ve (3)-(6) yüzeyleri düzlemsel; (6) yüzeyi minimaldir.

Şimdiki teoremlerde, kendimizi 1 ya da -1 sabit kesit eğrilikli de Sitter ya da anti-de Sitter zaman benzeri uzay ile sınırlıcaz.

Şimdi genel durumun bir sınıflandırmasını elde edicez.

Teorem 5.2.3: $S_1^4(1) \subset E_1^5$ de Riemannian paralel yüzey ise aşağıdaki yedi tipten biridir;

(1) Çember $S^2 : (yerel)\ L(a. b \cos u \cos v, b \cos u \sin v\ , b \sin u, c)$,

$-a^2 + b^2 + c^2 = 1$;

(2) Hiperbolik düzlem

$H^2\ : L(u,v) = (a \cosh u \cosh v, a \cosh u \sinh v, a \sinh u, b, c\ )$,

$-a^2 + b^2 + c^2 = 1$;

(3) Torus $S^1 \times S^1 : L(u,v) = (a, b \cos u, b \sin u, c\ \cos v, c \sin v)$,

$-a^2 + b^2 + c^2 = 1$;

(4) Yüzey $H^1 \times S^1 : L(u,v) = (a \cosh u, a \sinh u, b \cos v, b \sin v, c)$,

$-a^2 + b^2 + c^2 = 1$

(5) Yüzey $L(u,v) = \left(u^2 + v^2 + a^2 + \frac{1}{4}, u^2 + v^2 + a^2 - \frac{1}{4}, u, v, \sqrt{1+a^2}\right), a \in R$;

(6) Yüzey $L(u,v) = \left(u^2 - \frac{3}{4} + a^2, a \cos v, a \sin v\ , u, u^2 - \frac{5}{4} + a^2\right), a \in R$;

(7) Yüzey $L(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(u^2 + v^2 - \frac{3}{4}, u^2 + v^2 - \frac{5}{4}, u, v, a\right), a \epsilon R$

(Chen ve Veken 2008).

Şunları söyleyebiliriz; $(1), (2)$ ve (5) yüzeyleri total umbilik ve (1) $a = c = 0$ ise total geodezik; (3) ve (7) yüzeyleri düzlemsel; (3) yüzeyi $a = 0$ ise minimaldir.

Teorem 5.2.4: $S_1^4(1) \subset E_1^5$ de Lorentzian paralel yüzey ise aşağıdaki iki tipten biridir;

(1) De Sitter uzayı $S_1^2 : L(u,v) = (a, \sinh u, a \cosh u \cos v, a\cosh u \sin v, b, c)$,
$a^2 + b^2 + c^2 = 1$

(2) Yüzey $S_1^2 : L(u,v) = (a, \sinh u, a \cosh u, b \cos v, b \sin v, c)$,
$a^2 + b^2 + c^2 = 1$

(Chen ve Veken 2008).

Şunları söyleyebiliriz; (1) yüzeyi total umbilik ve (2) yüzeyi düzlemseldir. Ayrıca (1) yüzeyi $b = c = 0$ ise total geodezik ve (2) yüzeyi $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ ve $c = 0$ ise minimaldir.

6. YARI-RİEMANN UZAY FORMUNUN UZAY BENZERİ ALT MANİFOLDLARI

Bu bölüm orjinal sonuçlar içermektedir.

$N_p^{n+p}(c)$ n+p boyutlu, c sabit eğrilikli ve sabit p indeksli bir yarı-Riemann manifold olsun. M^n, $N_p^{n+p}(c)$ nin n-boyutlu uzay benzeri altmanifoldu olsun. T.İshihara aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 6.1: M^n, $N_p^{n+p}(c)$ de c≥ 0, nin minimal (=maksimal) uzay benzeri bir tam altmanifoldu olsun. O zaman M^n total geodeziktir (Ishihara 1988).

H.Sun (Sun 1995) tamlık koşulunu manifoldun paralel ikinci temel forma sahip olması ile değiştirerek aşağıdaki teoremi elde etmiştir

Teorem 6.2: M^n, $N_p^{n+p}(c)$ de $p > 1$, $c < 0$, paralel ikinci temel forma sahip altmanifoldu olsun. O zaman

$$3\|h\|^4 + 2n(c - H^2)\|h\|^2 - 2n^2H^2c \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir.

Özel olarak eşitlik durumunda M^n total geodezikdir veya $n = p = 2$ ise $M^2 = H^2(\sqrt{-c})$ nin $H_2^4(\sqrt{\frac{-c}{3}})$ de bir hiperbolik Veronese yüzeyidir. Burada $c < 0$ ve

$$H^2(\sqrt{-c}) = \{x \in R_2^3 \mid g(x,x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = c, c < 0\}$$

ve

$$H_2^4\left(\sqrt{\frac{-c}{3}}\right)=\left\{x\in R_2^5 \middle| g(x,x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2-x_5^2=\frac{c}{3}, c<0\right\}$$

dır (Sun 1995).

Riemannian uzay formu durumunda Asperti ve ark. 2002 aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 6.3: M^n, $N_p^{n+p}(c)$ nin bir pseudo yarı-paralel minimal alt manifoldu olsun. Bu durumda $L+c\leq 0$ ise M^n total geodeziktir (Asperti ve ark. 2002).

Daha önceki bölümlerde bahsedildiği gibi paralel ikinci temel forma sahip altmanifoldlar yarı-paralel $(\bar{R}\cdot h=0)$ dır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Böylece yukarıdaki teoremin ışığı altında manifoldun pseudo yarı-paralel olması durumunu bu bölümde araştırdık.

İlk önce bölüm içerisinde vereceğimiz ana teoremin ispatında kullanılacak yardımcı önermeyi verelim.

Yardımcı önerme 6.1: M^n, $N_p^{n+p}(c)$ nin uzay benzeri minimal altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2=nc\|h\|^2-\sum_{\alpha,\beta}\left\|[A_\alpha,A_\beta]\right\|^2-\sum_{\alpha,\beta} iz\left(A_\alpha A_\beta\right)^2+\left\|\bar{\nabla}h\right\|^2 \qquad (6.1)$$

dır (Cheng ve Ishikawa 1997).

Şimdi bu bölümün orijinal teoremini vereceğiz.

Teorem 6.4: M^n, $N_p^{n+p}(c)$, $c>0$, nin uzay benzeri minimal alt manifoldu olsun. Eğer M^n pseudo paralel $(\bar{R}\cdot h=LQ(g,h))$ ve $c-L>0$ ise M^n total geodeziktir.

İspat: M^n uzay benzeri altmanifoldunun keyfi bir $x\in M^n$ noktasındaki $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ ortanormal uzay benzeri çatı alanını göz önüne alalım. Burada $(T_xM^n)^\perp$

normal uzayının $\{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+p}\}$ ortanormal çatı alanı da zaman benzeri olacaktır. O zaman $1 \leq i,j \leq n,\ n+1 \leq \alpha \leq n+p$ için M^n nin ikinci temel form bileşenleri

$$h_{ij}^{\alpha} = g(h(e_i, e_i), e_\alpha) \tag{6.2}$$

olarak verilir. h nın benzer olarak birinci ve ikinci kovaryant türevlerinin bileşenleri sırasıyla

$$h_{ijk}^{\alpha} = g\big(\overline{\nabla}_{e_k} h\big)\big(e_i, e_j\big), e_\alpha) = \overline{\nabla}_{e_k} h_{ij}^{\alpha} \tag{6.3}$$

ve

$$h_{ijkl}^{\alpha} = g\big(\overline{\nabla}_{e_l} \overline{\nabla}_{e_k} h\big)\big(e_i, e_j\big) e_\alpha = \overline{\nabla}_{e_l} h_{ijk}^{\alpha} \tag{6.4}$$

şeklinde verilir.

$$\bar{R}\big((e_l, e_k) \cdot h\big)\big(e_i, e_j\big) = \ (\overline{\nabla}_{e_l} \overline{\nabla}_{e_k} h)\big(e_i, e_j\big) - (\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_l} h)\big(e_i, e_j\big) \tag{6.5}$$

özdeşliğini göz önüne alalım. Eğer M^n pseudo yarı-paralel ise (6.5) denklemi yardımıyla

$$(\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_k} h)\big(e_i, e_j\big) - \big(\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_l} h\big)\big(e_i, e_j\big) = LQ(g, h)(e_i, e_j;\ e_l, e_k)$$

yani

$$h_{ijkl}^{\alpha} - h_{ijlk}^{\alpha} = L[\delta_{ki} h_{lj}^{\alpha} - \delta_{li} h_{kj}^{\alpha} + \delta_{kj} h_{il}^{\alpha} - \delta_{lj} h_{ik}^{\alpha}] \tag{6.6}$$

denklemi elde edilir. h_{ij}^{α} nın Laplace

$$\Delta h_{ij}^{\alpha} = \textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijkk}^{\alpha} \tag{6.7}$$

denklemini göz önüne alırsak ikinci temel formun norm karesinin Laplace (2.3.21) denklemi yardımıyla

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \Delta g\left(h\big(e_i, e_j\big), h\big(e_i, e_j\big)\right)$$

$$= \textstyle\sum_{i,j,k=1}^{n} g(\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} h)\big(e_i, e_j\big) + \big\|\overline{\nabla} h\big\|^2 \tag{6.8}$$

denklemi bulunur.

M^n, $N_p^{n+p}(c)$ uzay formunun bir altmanifoldu olduğunda Teorem 2.4.4 (iii) den ve ikinci temel formun simetrik olması nedeniyle

$$(\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_j, e_k) = (\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_i, e_k) \tag{6.9}$$

denklemine sahip oluruz. Böylece M^n nin minimal (=maksimal) olması ve (6.6) denklemini kullanarak

$$g(\overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k})h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) = g(\overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_i} h)(e_k, \mathrm{e}_j), h(e_i, e_j) =$$
$$g(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_k} h)(e_j, e_k), h(e_i, e_j) -$$
$$L\{g(e_i, e_j)g(h(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) - g(e_k, e_j)g(h(e_k, e_i), h(e_i, e_j)) +$$
$$gek,eig(h(ej,ek),h(ei,ej)) - gek,ekg(h(ei,ej),h(ei,ej) \tag{6.10}$$

yazılabilir. (6.10) eşitliği (6.9) de yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j))$$
$$- L\{g(e_i, e_j)g(h(e_k, e_k), h(e_i, e_j)) - g(e_k, e_i)g(h(e_k, e_i), h(e_i, e_j))$$
$$+ g(e_k, e_i)g(h(e_j, e_k), h(e_i, e_j)) - g(e_k, e_k)g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)\}$$
$$+ \|\overline{\nabla} h\|^2$$

bulunur. $\widetilde{M}$ nın invaryant bir altmanifoldu minimal olduğundan son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} g((\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j} h)(e_k, e_k), h(e_i, e_j))$$
$$+ Ln\|h\|^2 + \|\overline{\nabla} h\|^2 \tag{6.11}$$

(6.11) denkleminde yeniden minimallik koşulu kullanıldığında

$$\tfrac{1}{2}\Delta\|h\|^2 = Ln\|h\|^2 + \|\overline{\nabla} h\|^2 \tag{6.12}$$

denklemine ulaşırız. Böylece (6.1) ve (6.11) denklemleri yardımıyla

$$n(c-L)\|h\|^2 - \sum_{\propto,\beta}\|[A_\alpha, A_\beta]\|^2 - \sum_{\alpha,\beta} iz(A_\alpha A_\beta)^2 = 0 \tag{6.13}$$

denklemi elde edilir. M^n uzay benzeri olduğundan normal uzayı zaman benzeri olacağından $\|h\|^2 < 0$ dır. Böylece (6.11) ve $c - L > 0$ olma şartını kullanarak $\|h\|^2 = 0$ bulunur. Buda ispatı tamamlar.

Sonuç 6.1. M^n, $N_p^{n+p}(c)$ nin uzay benzeri minimal ve yarı-paralel altmanifoldu olsun. $c > 0$ ise M^n total geodeziktir.

KAYNAKÇA

ASPERTİ, A.C. , G.A. LOBOS and F. MERCURi. 2002. Pseudo Paralel Submanifolds of a Space Form. Communicated by G.Gentili, Adv.Geom. 2,57-71.

BOECKX, E. , O. KOWALSKİ and L.VANHECKE. 1996. Riemannian Manifolds of Conullity Two. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 300 p.

CARTAN, E. 1927. Sur One Casse Remorquable D'espaces De Riemann. Bul. Soc. Mth. Esanse 54 1926,214-264,55 1927,114-134

CHEN, B.Y. 1971. Some Results of Chern-Docarmo-Kobayashi Type and Lenght of Second Fundamental Form. İndiana Univ. Math, J. 20,1175-1185.

CHEN, B.Y. 1973. Geometry of Submanifolds. Pure and Applied Mathematics. Mercel Dekker, Vol.22, New York.

CHEN, B. Y. and J.V.D. VEKEN. 2008. Parallel Surfaces in Three- and Four-Dimensional Lorentzian Real Space Forms. Transilvania Univ. Brasov, 15 (50), Conference RIGA.

CHEN, B. Y. and J.V.D. VEKEN. 2009. Complete Classification of Paralel Surfaces in 4 Dimensional Lorentzian Space Forms. Tohoku Math, J. Vol.61.

CHENG, Q.M. ve S. ISHIKAWA, 1997, Complete Maximal Spacelike Submanifolds, Koda, Math. J. ,20,208-217

CHERN, S.S. , M.P. do CARMO, S. KOBAYASHİ. 1971. Minimal Submanifold of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Lenght. Functional Anal. Geom, 5, 135-147.

DEPREZ, J. 1985. Semi-Parallel Surfaces in Euclidean Spaces. J. Geometry, 25, 192-200.

DİLLEN, F. , J. FASTENAKELS, S. HAESEN, J.V.Der VEKEN and I. VERSTRAELEN. 1991. Submanifolds Teory and The Paralel Transport of Levi-Civita. Mathematics subject classification.

DUGGAL, L. K. and A. Bejangu. 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, 300p. , AH Dordrecht.

FERUS, D. 1974. Immersionen Mit Paralleler Zweiter Fundamentalform: Beispiele Und Nicht- Beispiele. Manuscr. Math, 12, 153-162.

FERUS, D. 1974. Produkt-Zerlegung Von Immersionen Mit Paraller Zweiter Fundamentalform. Math. Ann, 211,1-5.

FERUS, D. 1974. Immersions with Paralel Second Fundemantel Form. Math. Z, 140, 87-93.

HAESEN, S. and L. VERSTRAELEN. 2007. Manuscripta Math, 122, 59-72

ISHIHARA, T. 1988. Maximal Spacelike Submanifolds of a Pseudo-Riemannian Space Form of Constant Curvature. Michigan Math. J. , 35, 345-352.

LI, A.M. and J.M. LI. 1992. An İntrinsic Rigidity Theorem for Minimal Submanifolds in a Sphere. Arch. Math, 58, 52-594.

LUMİSTE, Ü. 2000. Submanifolds with Paralel Form. Handbook of Differential Geometry, I, North-Holland,Amsterdam, 779-864.

OLMAS, C. , J. BERNDT and S. CONSOLE. 2003. Submanifolds And Holonomy, CHARMAN and Hall/CRC. NEWYORK

O'NEİLL, B. 1983.Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, Inc., 468p., New York.

ÖZGÜR, C. 2001. Pseudo Simetrik Manifoldlar. D. Tez, Uludağ Üniversitesi, 65p.

SAFIULINA, E. 2001. Parallel and Semi-Parallel Space-Like Surfaces in Pseudo-Euclidean Spaces. Estonian Acad. Sci. Phys. Math,50, 1, 16-33

STRÜBİNG, W. 1979. Symmetric Submanifolds of Riemannian Manifolds. Math. Anm, 245, 37-44.

SUN, H. 1995. On Spacelike Submanifolds of a Pseudo Riemannian Space Form. Note di Matematica, 15-n.2, 215-224.

SZABO, Z.I. 1984. Classification and Construction of Complete Hyper-Surfaces Satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$. Acta Sci. Math. 47, 321-348.

SZABO, Z.I. 1982. Structure Theorems on Riemannian Manifolds Satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$. Local version, J.Diff.Geom, I, 17,531-582.

SZABO, Z.I. 1985. Structure Theorems on Riemannian Manifolds Satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$. Global versions, Geom. Dedicata, II, 19, 65-108.

TRİCERRİ, F. and L. VANHECKE. 1988. Special Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds. Colloq. Math. Soc. Ja'nos Bolyai, 46,1211-1246.

VİLMS, J. 1972. Submanifolds of Euclidean Space with Parallel Second Fundamental Form. Proc. Am. Math. Soc. , 32,263-267.

YANO, K. and M. KON.1984. Structures on Manifolds. World Scientific Publishing Co Pte Ltd. , III, 508p.

ZHENG, Y. 1996. Spacelike Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in The De Sitter Space. Differential Geometry and its Applications, 6, 51-54.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Samsun'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bursa'da tamamladıktan sonra 2002 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 2006 yılı haziran ayında lisans öğrenimi başarıyla tamamlayıp yine aynı yılın güz döneminde Uludağ Üniversitesinde Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans öğrenci olarak kabul edildi. Ağustos ayında mezun olup Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünden Tezli Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı. Şuan hala Hakkari'de Matematik öğretmeni olarak görev yapmakta.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca tezimin planlanması, yürütülmesi ve sonuçların değerlendirilmesi sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN' a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında yardımlarını benden esirgemeyen eşim Şevket PAMUK'a ve maddi ve manevi her türlü desteği veren aileme gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.