T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE PROJEKTİF GEOMETRİ

Ayça BAYRAKTAR

Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ
Danışman

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2012

TEZ ONAYI

Ayça BAYRAKTAR tarafından hazırlanan " Cebirsel Yapılar Üzerine Projektif Geometri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ İmza

Üye : Prof. Dr. N. Emin ÖZMUTLU İmza
Uludağ Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Basri ÇELİK İmza
Uludağ Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarır
Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Enstitü Müdürü
11 /05 /2012

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

11 / 05 / 2012

Ayça BAYRAKTAR

İmza:

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE PROJEKTİF GEOMETRİ

Ayça BAYRAKTAR

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Bu çalışmada, bölümlü halka ve cisim yardımıyla inşaa edilen geometrik yapılar olan afin ve projektif düzlemler ile afin ve projektif uzaylar incelenmiştir. Bu geometrik yapılar ile ilgili literatürde iyi bilinen sonuçlara ilaveten sonlu bir projektif uzayın toplam doğru sayısını hesaplamak için yeni bir formül elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Afin düzlem, Projektif düzlem, Afin uzay, Projektif uzay

2012, v + 44 sayfa

ABSTRACT

Master Science Thesis

PROJECTIVE GEOMETRY OVER ALGEBRAIC STRUCTURES

Ayça BAYRAKTAR

Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

In this study, affine and projective planes (and spaces) which are geometric structures constructed by divison ring and field, are examined. In addition to the well-known results in the literature, a new formula is obtained to calculate the total number of lines of finite projective space.

Key words: Affine plane, Projective plane, Affine space, Projective space

2012, v + 44 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren, bilgi ve tecrübesini benden esirgemeyen değerli danışmanım Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi ve Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Süleyman Çiftçi' ye,

Tez çalışmam boyunca verdiği desteğe ve öğrettiklerine her zaman minnettar kalacağım Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yard. Doç. Dr. Atilla Akpınar' a,

Her zaman desteğini yanımda hissettiğim Araş. Gör. Fatma Özen Erdoğan'a,

Bugüne kadar sabırla yanımda olan çok sevdiğim aileme canıgönülden teşekkür ederim.

Ayça BAYRAKTAR

11 / 05 / 2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Matematikte, geometri ile cebir arasında çok yakın ilişkiler mevcuttur. Bir geometrik yapıya karşılık koordinatlama halkası denilen bir cebir sistemi bulunmaktadır.

Bu tezin temel amacı, koordinatlama halkası bir bölümlü halka veya cisim olan yani bir bölümlü halka veya bir cisim yardımıyla kurulan bazı geometrik yapıları incelemektir.

Verilen bilgilerin hemen hemen tamamı literatürde mevcut olup, değişik kaynaklardan derlenmiştir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde tezde incelenecek olan koordinatlama halkaları ve geometrik yapılar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise iki boyutlu geometrik yapılar olan afin ve projektif düzlemler incelenerek bunların koordinatlama halkaları üzerinde çalışılmıştır. Afin düzlemde verilen bir doğru üzerinde herhangi iki noktanın toplamı ve çarpımı işlemleri tanımlanarak bu işlemlere ait özellikler incelenmiştir ve nihayetinde bu işlemlere ait özelliklerin Dezargsel bir afin düzlemde bir bölümlü halka yapısı ortaya çıkardığı görülmüştür.

Son bölümde ise iki boyutlu geometrik yapılar olan afin ve projektif düzlemlerin bir genellemesi olarak düşünebileceğimiz afin ve projektif uzaylar incelenmiştir. Bazı sonlu projektif uzay örneklerinin de verildiği bu bölümde, mertebesi k ve boyutu n olan bir projektif uzayın toplam doğru sayısı, literatürde bilinenden farklı bir ispat metodu kullanılarak hesaplanmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bilgiler cebirsel kavramlar ve geometrik kavramlar halinde farklı iki kısımda ele alınacaktır.

2.1. Cebirsel Kavramlar

Bu kavramlar için herhangi bir cebir kitabına bakılabileceği gibi biz (Fraleigh 1989) u öneriyoruz.

Tanım 2.1.1: $\boldsymbol{S}$ herhangi bir küme olsun. $\boldsymbol{S}^{\mathbf{2}}$ den $\boldsymbol{S}$ ye herhangi bir fonksiyona $\boldsymbol{S}$ üzerinde bir $ikili\ işlem$ ya da $iç\ işlem$ denir.

Tanım 2.1.2: $\boldsymbol{S}$ boş olmayan bir küme ve $\circ: \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S} \longrightarrow \boldsymbol{S}$ bir iç işlem olsun. Eğer,

G1) Her $a, b, c \in \boldsymbol{S}$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dir.

G2) Her $a \in \boldsymbol{S}$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak biçimde en az bir $e \in \boldsymbol{S}$ vardır.

G3) Her $a \in \boldsymbol{S}$ için $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ olacak biçimde en az bir $a^{-1} \in \boldsymbol{S}$ vardır.

şartları sağlanıyorsa, $(\boldsymbol{S},\circ)$ ikilisine bir $grup$ denir. G1 şartına $\circ$ işlemi için $birleşme\ (asosyatiflik)$ $özelliği$, G2 şartını sağlayan e elemanına $\circ$ işleminin $etkisiz\ elemanı$, G3 şartındaki a^{-1} elemanına da a elemanının $\circ$ işlemine göre $ters\ elemanı$ denir.

Tanım 2.1.3: $(\boldsymbol{S},\circ)$ grubunda her $a, b \in \boldsymbol{S}$ için, $a \circ b = b \circ a$ şartı sağlanıyorsa $\boldsymbol{S}$ ye $değişmeli\ (komütatif) grup$ ya da $Abel\ grubu$ denir.

Tanım 2.1.4: $\boldsymbol{H}$ herhangi bir küme olsun. + ve · işlemleri de bu küme üzerinde herhangi iki ikili işlem olsun. Eğer,

H1) $(\boldsymbol{H}, +)$ değişmeli gruptur.

H2) · işlemi birleşmelidir.

H3) Her $x, y, z \in \boldsymbol{H}$ için $x.(y + z) = x.y + x.z$ ve $(y + z).x = y.x + z.x$ dir.

şartları sağlanıyorsa $(\boldsymbol{H}, +, \cdot)$ sistemine bir $halka$ denir. Çarpma işlemi değişmeli ise bu halkaya $ğişmeli\ halka$, çarpma işleminin birim elemanı varsa halkaya $birimli\ halka$ denir.

H3) şartı ile verilen eşitliklere sol ve sağ dağılma kuralları denir.

Bir halkada toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 ile, çarpma işlemine göre etkisiz eleman, varsa, 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana ö$zdeşlik\ elemanı$ denilmektedir.

Tanım 2.1.5: $(\boldsymbol{H} - \{0\}, \cdot)$ sistemi bir grup olan herhangi bir $(\boldsymbol{H}, +, \cdot)$ halkasına bir $bölüml$ü $halka$ ya da $aykırı\ cisim$ ve çarpma işlemi değişmeli olan bir bölümlü halkaya da bir $cisim$ denir.

Buna göre bölümlü halka ve cisim için, doğrudan doğruya sağlaması gereken şartlar yardımıyla, aşağıdaki tanımlar da verilebilir.

Tanım 2.1.6: $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}, +, \cdot)$ sistemi için,

B1) $(\boldsymbol{B}, +)$ bir değişmeli gruptur.

B2) $(\boldsymbol{B} - \{0\}, \cdot)$ bir gruptur.

B3) Çarpma işlemi toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılır.

şartları sağlanıyorsa, $\boldsymbol{B}$ ye $bölüml$ü $halka$ veya $aykırı\ cisim$ denir.

Tanım 2.1.7: $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}, +, \cdot)$ sistemi için,

F1) $(\boldsymbol{F}, +)$ bir değişmeli gruptur.

F2) $(\boldsymbol{F} - \{0\}, \cdot)$ bir değişmeli gruptur.

F3) Çarpma işlemi toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılır.

şartları sağlanıyorsa, $\boldsymbol{F}$ ye bir $cisim$ denir.

Tanımlarından açık olarak görüldüğü gibi, bölümlü halka aslında çarpma işleminde değişme özelliği aranmayan bir cisimdir.

Tanım 2.1.8: Özdeşlikli bir halkada çarpma işlemine göre tersi var olan elemanlara $birim\ eleman$ denir.

Tanım 2.1.9: $(\boldsymbol{H}, +, \ \cdot)$ bir halka olsun. Eğer, $\boldsymbol{H}$ nin bir $\boldsymbol{H'}$ alt kümesi $\boldsymbol{H}$ deki işlemlerin kendisine kısıtlanmışı olan işlemler altında bir halka oluşturuyorsa $\boldsymbol{H'}$ ye $\boldsymbol{H}$ nin bir $alt\ halkası$ denir.

Tanım 2.1.10: $(\boldsymbol{F}, +, \ \cdot)$ bir cisim ve $(V, \oplus)$ bir abel grubu olsun. Eğer, $*: \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ dış işlemi, her $u, v \in \boldsymbol{V}$ ve $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ için,

V1) $\alpha * (u \oplus v) = (\alpha * u) \oplus (\alpha * v)$.

V2) $(\alpha + \beta) * u = (\alpha * u) \oplus (\beta * u)$.

V3) $(\alpha . \beta) * u = \alpha * (\beta * u)$.

V4) $1 * u = u$. ($1 \in F$ özdeşlik elemanı)

eşitlikleri sağlanacak şekilde tanımlanmış ise $\boldsymbol{V}$ ye $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde bir $vektör\ uzayı$ denir. Bu vektör uzayı $\boldsymbol{V_F}$ ile eğer bir karışıklık olmayacaksa $\boldsymbol{F}$ cismi belirtilmeden kısaca $\boldsymbol{V}$ ile gösterilir.

2.2. Geometrik Kavramlar

Bu kısımda verilecek kavramlar için (Kaya 1992) ve (Batten 1986) çalışmaları esas alınmıştır.

Tanım 2.2.1: $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ ile $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ elemanlarına sırasıyla noktalar ve doğrular denilen ayrık iki küme olsun. Ayrıca adına üzerinde olma bağıntısı denilen $\in \subset \boldsymbol{\mathcal{N}} \times \boldsymbol{\mathcal{D}}$ bağıntısı göz önüne alınsın. Bu durumda $(\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ üçlüsüne bir $geometrik\ yapı$ denir ve herhangi bir N noktası ve d doğrusu için (N, d) nin $\in$ de olması $N \in d$ ile gösterilip "N noktası d doğrusu üzerindedir." veya "d doğrusu N noktasından geçer." biçiminde okunur. Bazen $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ yerine kısaca $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ yazılır ve $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})\ uzayı$ olarak da isimlendirilir.

Tanım 2.2.2: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ uzayına bir $yaklaşık\ lineer\ uzay$ denir.

YL1) Her bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

YL2) Farklı iki noktadan en çok bir doğru geçer.

Gösterim: Bir $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ bir yaklaşık lineer uzayının toplam nokta sayısı v veya $|\boldsymbol{\mathcal{N}}|$ ile, toplam doğru sayısı b veya $|\boldsymbol{\mathcal{D}}|$ ile gösterilir. $\boldsymbol{U}$ nun herhangi bir d doğrusunun toplam nokta sayısı $v(d)$ veya $|d|$ ile, herhangi bir N noktasından geçen toplam doğru sayısı $b(N)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3: Bir $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ yaklaşık lineer uzayının $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ noktalar kümesinin bir $\boldsymbol{X}$ alt kümesi " Her $M, N \in \boldsymbol{X}$ için $MN \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ doğrusunun tamamı $\boldsymbol{X}$ te kapsanır. " şartını sağlıyorsa $\boldsymbol{X}$ e, $\boldsymbol{U}$ nun bir $alt\ uzayı$ denir.

Bir yaklaşık lineer uzayın her zaman bulabileceğimiz alt uzayları; $\emptyset$, bir nokta, bir doğru ve uzayın kendisidir. Bunlara uzayın $aşikar\ alt\ uzayları$ denir.

Tanım 2.2.4: $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ bir yaklaşık lineer uzay olsun. $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ deki noktaların $\boldsymbol{X}$ kümesini kapsayan ancak $\boldsymbol{X}$ üzerindeki hiç bir alt uzayı has olarak kapsamayan bir alt uzaya $\boldsymbol{X}\ in\ kapanışı$ denir. $< \boldsymbol{X} >$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.5: Her $x \in \boldsymbol{X}$ için $x \notin < \boldsymbol{X} \backslash \{x\} >$ ise $\boldsymbol{X}$ kümesine $bağımsız\ küme$ denir.

Tanım 2.2.6: $\boldsymbol{U}$ bir yaklaşık lineer uzay olsun. Kapanışı $\boldsymbol{U}$ ya eşit olan bağımsız bir $\boldsymbol{B}$ kümesine $\boldsymbol{U}$ nun bir $bazı$ denir.

Bir $\boldsymbol{U}$ yaklaşık lineer uzayının bazları farklı sayıda elemana sahip olabilir.

Tanım 2.2.7: $\boldsymbol{U}$ bir yaklaşık lineer uzay olduğunda, $\min\{|\boldsymbol{B}| : \boldsymbol{B}, \boldsymbol{U}\ nun\ bir\ bazıdır\}$ sayısının bir eksiğine $\boldsymbol{U}$ nun $boyutu$ denir.

Tanım 2.2.8: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ uzayına bir $lineer\ uzay$ denir.

L1) Her bir doğru en az iki nokta kapsar.

L2) Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

Bu tanımdan bir lineer uzayın aynı zamanda bir yaklaşık lineer uzay olduğu açıkça görülmektedir.

Tanım 2.2.9: $\boldsymbol{U}$ bir lineer uzay, $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U}$ da bir noktalar alt kümesi, x ile y herhangi iki nokta olmak üzere,

$$"x \notin < \boldsymbol{X} > \text{ ve } x \in < \boldsymbol{X} \cup \{y\} > \Rightarrow y \in < \boldsymbol{X} \cup \{x\} > "$$

şartı her $\boldsymbol{X}$ kümesi ve tüm x, y noktaları için geçerli ise $\boldsymbol{U}$ $değişme$ $özelliğine$ sahiptir denir.

Teorem 2.2.1: Sonlu bir $\boldsymbol{U}$ lineer uzayında değişme özelliği geçerli ise $\boldsymbol{U}$ nun tüm bazları aynı sayıda elemana sahiptir.

Tanım 2.2.10: Bir lineer uzayın $\boldsymbol{V}$ ve $\boldsymbol{W}$ gibi farklı iki alt uzayı için $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$ olup $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{V}$ özelliğindeki her $\boldsymbol{H}$ alt uzayı için $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{V}$ olması gerekiyorsa $\boldsymbol{V}$ alt uzayı $\boldsymbol{W}$ alt uzayını $örter$ denir.

Diğer bir ifade ile $\boldsymbol{V}$ ile $\boldsymbol{W}$ arasında hiçbir alt uzay yoksa $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ yu örter denir.

Tanım 2.2.11: Bir $\boldsymbol{U}$ lineer uzayının örtüsü olduğu bir alt uzaya $\boldsymbol{U}$ nun bir hiperdüzlemi denir.

Tanım 2.2.12: Aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ geometrik yapısına bir *projektif düzlem* denir.

P1) Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

P2) Farklı iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Diğer bir ifade ile P2 ve P3 aksiyomlarını sağlayan bir lineer uzaya bir projektif düzlem denir ve bir projektif düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası olduğuda iyi bilinmektedir.

Bir projektif düzlemi $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ yerine $\mathbb{P} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.13: Aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ geometrik yapısına bir $afin$ $düzlem$ denir.

A1) Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.

A2) Bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olan bir tek doğru vardır.

A3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

c ve d gibi farklı iki doğrunun paralelliği $c \| d$ ile gösterilir.

Diğer bir ifade ile A2 ve A3 aksiyomlarını sağlayan bir lineer uzaya bir afin düzlem denir.

Tanım 2.2.14: $\boldsymbol{U}$ ve $\boldsymbol{U'}$ herhangi iki geometrik yapı olsun. $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{U'}$ ye; $\boldsymbol{U}$ nun noktalarını $\boldsymbol{U'}$ nün noktalarına, $\boldsymbol{U}$ nun doğrularını $\boldsymbol{U'}$ nün doğrularına dönüştüren ve üzerinde olma bağıntısını koruyan birebir ve örten bir fonksiyon varsa bu geometrik yapılar $izomorftur$ denir, bu fonksiyona da bir $izomorfizm$ denir.

Tanım 2.2.15: A, B, C, A', B', C' bir geometrik yapının herhangi altı noktası olsun. Eğer A, B, C doğrudaş değilse $\{A, B, C\}$ kümesine bir üçgen denir. $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ üçgenleri için A ile A', B ile B', C ile C' noktalarına bu üçgenlerin $karşılıklı$ $köşeleri$ denir. Eğer M, A, A'; M, B, B' ve M, C, C' nokta üçlüleri doğrudaş olacak biçimde bir M noktası varsa bu üçgenler M den $perspektiftir$ denir. Ayrıca M noktasına $perspektiflik$ $merkezi;$ AB ile $A'B'$, AC ile $A'C'$, BC ile $B'C'$ doğru ikililerine bu üçgenlerin $karşılıklı$ $kenarları$ adı verilir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının $P = AB \cap A'B', Q = AC \cap A'C', R = BC \cap B'C'$ arakesit noktaları doğrudaşsa, P, Q ve R noktalarının üzerinde bulunduğu doğruya üçgenlerin $perspektiflik$ $ekseni$ denir. Perspektiflik ekseni e doğrusu olan iki üçgene e $ekseninden$ $perspektif$ üç$genler$ denir.

Tanım 2.2.16 A4 (Dezarg Aksiyomu):

$\mathbb{A}$ bir afin düzlem ve $\{A, B, C\}$ ile $\{A', B', C'\}$ $\mathbb{A}$ da herhangi iki üçgen olmak üzere

I. İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular paralel olsun. $AB \| A'B'$ ve $AC \| A'C'$ ise $BC \| B'C'$ dür.

II. $\{A, B, C\}$ ve $\{A', B', C'\}$ bir M merkezinden perspektif olup $AB \| A'B'$ ve $AC \| A'C'$ ise $BC \| B'C'$ dür.

Yukarıdaki iki aksiyomu gerçekleyen bir afin düzleme $Dezargsel\, afin\, düzlem$**,** aksiyomu gerçeklemeyen bir afin düzleme de $Dezargsel\, olmayan\, afin\, düzlem$ denir.

Tanım 2.2.17 $A4'$ (Dezarg Aksiyomunun Karşıtı): $\mathbb{A}$ bir afin düzlem ve $\{A, B, C\}$ ile $\{A', B', C'\}$ $\mathbb{A}$ da herhangi iki üçgen olmak üzere $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$ ve $BC \| B'C'$ olsun. Bu takdirde ya $AA' \| BB' \| CC'$ ya da bir $M \in \mathbb{A}$ için $AA' \cap BB' \cap CC' = M$ dir.

Teorem 2.2.2: Bir afin düzlemde $A4$ ve $A4'$ aksiyomları birbirine denktir.

Tanım 2.2.18 P4 (Dezarg Aksiyomu): Bir projektif düzlemde **“** iki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaş ise bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudaştır.” şartına $Dezarg\; aksiyomu$ denir. Bu aksiyomu gerçekleyen bir projektif düzleme $Dezarg\; Düzlemi$**,** aksiyomu gerçeklemeyen bir projektif düzleme de $Dezargsel\, olmayan\, projektif\;\, düzlem$ denir.

3. BAZI CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE DÜZLEMLER

Bu bölümde iki boyutlu geometrik yapıları inceliyoruz. Bunlar afin düzlemler ve projektif düzlemlerdir. Esas olarak afin ve projektif düzlemlerin, bölümlü halkalar ve cisimler üzerine koordinatlamalarını (Kaya 1992) kaynağını esas alarak inceleyeceğiz.

3.1. Bölümlü Halka Üzerine Kurulan Afin Düzlem

Önce bir $(\boldsymbol{B}, +, \ \cdot)$ bölümlü halkası üzerine bir afin düzlemin nasıl kurulacağını ele alacağız.

Bir $\boldsymbol{B}$ bölümlü halkasının elemanları ile aşağıdaki gibi oluşturulan $(\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ geometrik yapısı $\mathbb{A}_2\boldsymbol{B}$ ile gösterilsin. $\mathbb{A}_2\boldsymbol{B}$ nin noktalar kümesi $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ ve doğrular kümesi $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ile gösterilmek üzere

$\boldsymbol{\mathcal{N}} = \{(x, y) |\ x, y \ \in \boldsymbol{B}\}$,

$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{[m, k] |\ m, k \in \boldsymbol{B}\} \ \cup \{[a] |\ a \in \boldsymbol{B}\}$ ve

$\in \subseteq \ \boldsymbol{\mathcal{N}} \times \boldsymbol{\mathcal{D}}$ üzerinde olma bağıntısı, her $(x, y) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$ ve her $[m, k]$, $[a] \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ için

$(x, y) \in [m, k] \Leftrightarrow y = mx + k$ ve $(x, y) \in [a] \Leftrightarrow x = a$ şeklinde tanımlansın.

Bu şekilde oluşturulan $\mathbb{A}_2\boldsymbol{B}$ geometrik yapısının bir afin düzlem olduğunu teorem olarak ifade edeceğiz.

Teorem 3.1.1: $\mathbb{A}_2\boldsymbol{B}$ geometrik yapısı bir afin düzlemdir.

İspat: A1) (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) farklı iki nokta olsun. Eğer $x_1 = x_2$ ise bu iki noktadan geçen tek doğrunun $[x_1]$ olduğu açıktır. $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu durumda verilen noktalardan $[a]$ biçimindeki doğru geçemez. Bu iki noktanın $[m, k]$ tipinde bir doğru üzerinde olması için $(x_1, y_1) \in [m, k]$ ve $(x_2, y_2) \in [m, k]$ bağıntılarından

$$y_1 = mx_1 + k$$

ve (1)

$$y_2 = mx_2 + k$$

denklemlerinin geçerli olması gerektiği görülür. Buradan $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$ ve $x_1 - x_2 \neq 0$ olduğu için $m = (y_1 - y_2)(x_1 - x_2)^{-1}$ elde edilir. (1) in ilk denkleminde bu değer kullanılarak $k = y_1 - mx_1$ bulunur. Böylece m ve k tek türlü hesaplanabileceğinden, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen doğrunun bir tek olduğu görülür.

A2) $[m, k]$ ve $[a]$ gibi iki doğrunun $(a, ma + k)$ ortak noktası var olduğundan, farklı tipteki iki doğru paralel olamaz. Burada önce $[a]$, sonra $[m, k]$ tipli doğruları ele alıp A2 aksiyomunu irdeleyeceğiz.

i) (x, y) noktası, $[a]$ doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olsun. O zaman $x \neq a$ dır. (x, y) noktasından geçen ve $[a]$ doğrusuna paralel olan tek doğru $[x]$ dir.

ii) $(x, y) \notin [m, k]$ olsun. $u \neq m$ iken $[u, r]$ ile $[m, k]$ doğrularının her zaman bir ortak noktası bulunabileceğinden (x, y) noktasından geçen ve $[m, k]$ doğrusuna paralel olan bir doğru $[m, r]$ tipinde olmalıdır. Bu durumda $(x, y) \in [m, r] \Leftrightarrow y = mx + r$ denkleminden, $r = y - mx$ bulunur. Dolayısıyla aranan paralel doğru $[m, y - mx]$ doğrusudur. Bu da A2 aksiyomunun geçerli olduğunu gösterir.

A3) $0, 1 \in \boldsymbol{B}$ elemanları kullanılarak yazılan $(0,0), (0,1), (1,0)$ noktaları doğrudaş olmayan üç noktadır. □

$\boldsymbol{F}$ bir cisim iken $A_2\boldsymbol{F}$ afin düzlemi aynı şekilde kurulur. Sonlu bir bölümlü halka varolmadığı halde sonlu elemanlı, sonsuz çoklukta cisim mevcuttur. p bir asal sayı ve n pozitif tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ ve $GF(p^n)$ şeklinde p ve p^n elemanlı cisimlerin varlığı iyi bilinmektedir. $\mathbb{Z}_p$ kümesi üzerinde cisim kurulurken p modülüne göre toplama ve çarpma işlemleri kullanılmaktadır ve $GF(p^n)$ Galois cisimleri, cisim genişletmesindeki işlemlerle kurulmaktadır. Dolayısıyla cisimleri, sonlu ve sonsuz cisimler diye iki sınıfa ayırmak mümkündür.

Sonlu bir $\boldsymbol{F}$ cismi üzerine kurulan $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ afin düzlemi ile ilgili bazı sonuçlar vermek faydalı olacaktır.

Teorem 3.1.2: $\boldsymbol{F}$, n elemanlı bir cisim olsun. $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ afin düzleminde,

a) Her doğru n tane nokta kapsar.

b) Her noktadan $n + 1$ doğru geçer.

c) Toplam nokta sayısı n^2 dir.

d) Bir d doğrusuna paralel doğru sayısı, d dahil, n dir.

e) Toplam doğru sayısı $n^2 + n$ dir.

İspat: a) d, $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ de n tane nokta kapsayan bir doğru ve d' $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ nin herhangi bir doğrusu olsun. d ve d' üzerinde olmayan bir M noktası alalım. İki durum söz konusudur.

1. Durum: d ve d' paralel olsun

$f: d \longrightarrow d'$, $f(X) = MX \cap d' = X'$ olacak şekilde tanımlanan f fonksiyonu birebir ve örtendir. Aksi takdirde A1 ve A2 aksiyomları ile çelişki doğar. f birebir ve örten olduğundan d ve d' aynı sayıda nokta kapsar. Yani $|d'| = n$ dir.

2. Durum: d ve d' paralel olmasın. M den d ye çizilen paralel d' doğrusunu B noktasında ve M den d' ye çizilen paralel d doğrusunu A noktasında kessin. Bu takdirde

$$g(X) = \begin{cases} XM \cap d', & X \neq A \text{ ise} \\ B \quad , & X = A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $g: d \longrightarrow d'$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Dolayısıyla $|d| = |d'| = n$ dir.

b) Bir d doğrusunun dışında bir N noktası alalım. N noktası d doğrusunun üzerindeki her bir nokta ile birleştirilerek N den geçen bir doğru oluşturulabileceğinden, N den geçip d yi kesen doğru sayısı d nin nokta sayısına eşittir, yani n dir. N den d ye bir tek paralel çizilebileceğinden N den geçen toplam doğru sayısı $n + 1$ dir.

c) N, $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ nin belli bir noktası olsun. A1 gereği $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ nin tüm noktaları N noktasından geçen $n + 1$ tane doğrunun üzerindedir ve bunların her biri, N hariç, $n - 1$ tane nokta kapsar. Dolayısıyla $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ nin toplam nokta sayısı

$$(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2$$

olur.

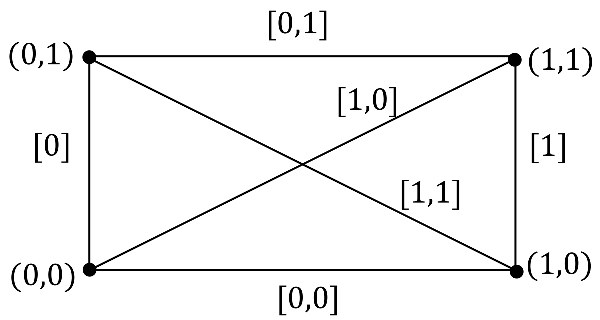
d) d yi kesen bir d' doğrusu alalım. A2 gereği d' nün her noktasından d ye bir tek paralel çizilebilir ve d ye paralel olan her doğru d' yü kesmek zorundadır. Yani, d dahil, d ye paralel doğru sayısı n dir.

e) $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ nin belli bir d doğrusunun her noktasından, d hariç, n tane doğru geçtiğinden d yi kesen doğru sayısı n^2 olup d ye paralel doğruların sayısı n dir. Dolayısıyla $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ nin toplam doğru sayısı $n^2 + n$ dir. □

Bir $\mathbb{A}$ afin düzleminde bir doğru üzerindeki nokta sayısına $\mathbb{A}\, afin\, düzleminin\, mertebesi$ denir.

$\boldsymbol{F}$ bir cisim olmak üzere $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ afin düzleminin mertebesi ile $\boldsymbol{F}$ cisminin mertebesi aynı sayıdır.

Örnek 3.1.1: $\boldsymbol{F} = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ olmak üzere $\mathbb{A}_2\boldsymbol{F}$ nin noktalar kümesi $\boldsymbol{\mathcal{N}} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ olup her nokta ikilisi bir doğru gösterir. Dolayısıyla mertebesi 2 dir. Şekil 3.1.1 ile temsil edilebilir.



Şekil 3.1.1

3.2. Bölümlü Halka Üzerine Kurulan Projektif Düzlem

Bu kısımda bir bölümlü halka üzerine bir projektif düzlemin nasıl kurulacağını göstereceğiz.

$(\boldsymbol{B}, +, \cdot)$ bir bölümlü halka olsun. $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ noktalar ve $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ doğrular kümesi olarak aşağıdaki gibi kurulsun. ∞, $\boldsymbol{B}$ de kapsanan bir eleman olmak üzere,

$\boldsymbol{\mathcal{N}} = \{(x, y) | x, y \in \boldsymbol{B}\} \cup \{(u) | u \in \boldsymbol{B}\} \cup \{(\infty)\}$

$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{[m, k] | m, k \in \boldsymbol{B}\} \cup \{[a] | a \in \boldsymbol{B}\} \cup \{[\infty]\}$,

$\in \subseteq \boldsymbol{\mathcal{N}} \times \boldsymbol{\mathcal{D}}$ üzerinde olma bağıntısı, her $(x, y), (u), (\infty) \in \boldsymbol{\mathcal{N}}$ ve her $[m, k], [a], [\infty] \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ için,

$(x, y) \in [m, k] \Leftrightarrow y = mx + k$,

$(x, y) \in [a] \Leftrightarrow x = a$,

$(x, y) \notin [\infty]$,

$(u) \in [m, k] \Leftrightarrow u = m$,

$(u) \in [\infty]$,

$(u) \notin [a]$,

$(\infty) \in [a]$,

$(\infty) \in [\infty]$,

$(\infty) \notin [m, k]$

şartları ile tanımlansın. Bu şekilde elde edilen $(\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ geometrik yapısı $\mathbb{P}_2\boldsymbol{B}$ ile gösterilsin. Aşağıda teorem olarak ifade edeceğimiz $\mathbb{P}_2\boldsymbol{B}$ nin bir projektif düzlem olduğu önermesinin ispatı için değişik projektif geometri kitaplarına bakılabilir. Biz Türkçe kaynak olarak (Kaya 1992) yi öneriyoruz.

Teorem 3.2.1: $\mathbb{P}_2\boldsymbol{B}$ bir projektif düzlemdir.

$(\boldsymbol{B}, +, \cdot)$ bölümlü halkası üzerine aşağıdaki gibi kurulan $\mathbb{P} = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ geometrik yapısının da bir projektif düzlem olduğu iyi bilinmektedir. $\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B} \setminus \{0\}$ olmak üzere;

$\mathcal{N}' = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{B}, (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0), (x_1, x_2, x_3) \neq (x_1, x_2, x_3)r, r \in \boldsymbol{B}^*\}$

$\mathcal{D}' = \{[a_1, a_2, a_3] | a_1, a_2, a_3 \in \boldsymbol{B}, [a_1, a_2, a_3] \neq [0,0,0], [a_1, a_2, a_3] = s[a_1, a_2, a_3], s \in \boldsymbol{B}^*\}$

$\in'$ üzerinde olma bağıntısı ise her $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{N}'$ ve her $[a_1, a_2, a_3] \in \mathcal{D}'$ için, $(x_1, x_2, x_3) \in' [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ şeklinde tanımlansın.

$\mathbb{P} = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ projektif düzlemi ile $\mathbb{P}_2\boldsymbol{B}$ arasında noktalar için

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1x_3^{-1}, x_2x_3^{-1}), & x_3 \neq 0 \text{ ise} \\ (x_2x_1^{-1}), & x_3 = 0 \neq x_1 \text{ ise} \\ (\infty), & x_3 = 0 = x_1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve doğrular için

$$f([a_1, a_2, a_3]) = \begin{cases} [-a_2^{-1}a_1, -a_2^{-1}a_3], & a_2 \neq 0 \text{ ise} \\ [-a_1^{-1}a_3], & a_2 = 0 \neq a_1 \text{ ise} \\ [\infty], & a_1 = a_2 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f dönüşümünün bir izomorfizm olduğu kolayca görülebilir, yani bu iki projektif düzlem izomorftur.

Her $\boldsymbol{F}$ cisminin bir bölümlü halka olduğu bilindiğinden, $\boldsymbol{F}$ bir cisim olmak üzere $\mathbb{P}_2\boldsymbol{F}$ de bir projektif düzlemdir.

Nokta sayısı sonlu olan projektif düzlemlerle ilgili aşağıdaki bilgilerin doğruluğu iyi bilinmektedir.

Eğer düzlemin bir doğrusu üzerinde $n+1$ nokta bulunuyorsa tüm doğrular $n+1$ noktalı olup, her noktadan $n+1$ doğru geçer. Ayrıca toplam nokta ve toplam doğru sayısı aynı olup n^2+n+1 dir. Bu n sayısına ilgili $projektif\ düzlemin\ mertebesi$ denir. $\mathbb{P}_2\boldsymbol{F}$ düzlemi ile $\boldsymbol{F}$ cisminin mertesinin aynı sayı olduğu kolayca görülür.

Şimdi sonlu bir cisim üzerine yukarıda belirtilen tarzda kurulan bir projektif düzlem örneği vereceğiz.

Örnek 3.2.1 : $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ cismi ile koordinatlanan projektif düzlemin noktalar kümesi:

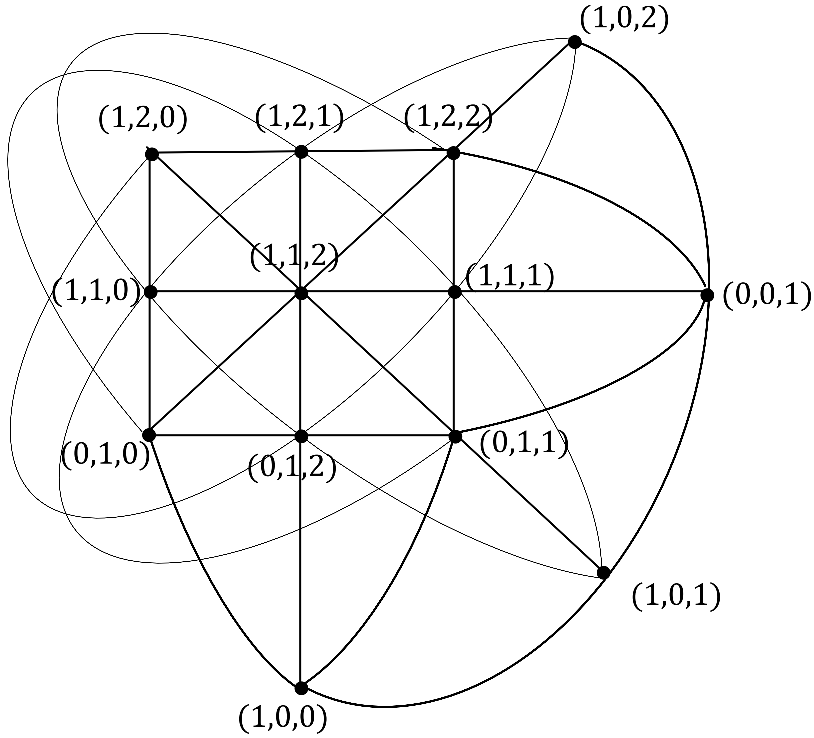
$$\boldsymbol{\mathcal{N}} = \{(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),(1,1,0),(1,1,1),$$
$$(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\}$$

ve doğrular kümesi:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \{[0,0,1] = \{(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,2,0)\},$$
$$[0,1,0] = \{(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),(0,0,1)\},$$
$$[0,1,1] = \{(0,1,2),(1,0,0),(1,1,2),(1,2,1)\},$$
$$[0,1,2] = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,2,2),(1,1,1)\},$$
$$[1,0,0] = \{(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,0,1)\},$$
$$[1,0,1] = \{(0,1,0),(1,0,2),(1,1,2),(1,2,2)\},$$
$$[1,0,2] = \{(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1),(1,2,1)\},$$
$$[1,1,0] = \{(0,0,1),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,0)\},$$
$$[1,1,1] = \{(1,1,1),(1,0,2),(1,2,0),(0,1,2)\},$$
$$[1,1,2] = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,2),(1,2,0)\},$$
$$[1,2,0] = \{(0,0,1),(1,1,1),(1,1,0),(1,1,2)\},$$
$$[1,2,1] = \{(0,1,1),(1,0,2),(1,2,1),(1,1,0)\},$$
$$[1,2,2] = \{(0,1,2),(1,1,0),(1,0,1),(1,2,2)\}\}$$

biçimindedir. Elde edilen yapının bir projektif düzlem olduğu kolayca kontrol edilebilir. Burada her bir nokta ve her bir doğrunun iki temsili söz konusudur. Mesela (1,0,1) ile (2,0,2) sıralı üçlüleri aynı noktayı göstermektedir. Doğruların her birini kapsadığı noktaların kümesi halinde yazdık. Her doğrunun dört nokta kapsadığı ve her noktadan dört doğru geçtiği görülmektedir. Dolayısıyla bu projektif düzlemin mertebesi 3 tür. Bu sayı aynı zamanda $\mathbb{Z}_3$ cisminin mertebesidir.

Burada kurduğumuz projektif düzlem aşağıdaki şekil ile temsil edilebilir.



Şekil 3.2.1

Aşağıdaki teorem projektif düzlemler ile afin düzlemler arasındaki yakın ilişkiyi belirtmektedir.

Teorem 3.2.2 : $\mathbb{I} = (\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \in)$ bir projektif düzlem ve d herhangi bir doğrusu olsun. Bu takdirde $\mathbb{I}\backslash d$ bir afin düzlemdir.

İspat: $\mathbb{I}$ de her c doğrusu d ile bir noktada kesiştiğinden $\mathbb{I}\backslash d$ de c doğrusunun nokta sayısı $\mathbb{I}$ dekinden 1 eksiktir. $\mathbb{I}$ de bir doğrunun en az üç noktası varolduğundan $\mathbb{I}\backslash d$ geometrik yapısında c nin en az 2 noktası kalır. Yani $\mathbb{I}\backslash d$ uzayında L1 aksiyomu geçerlidir. $\mathbb{I}\backslash d$ nin herhangi iki noktası $\mathbb{I}$ nin de iki noktası olduğundan birleşir. Dolayısıyla L2 geçerlidir $\mathbb{I}\backslash d$ nin bir c doğrusu ve dışında bir N noktası verilsin. $\mathbb{I}$ de

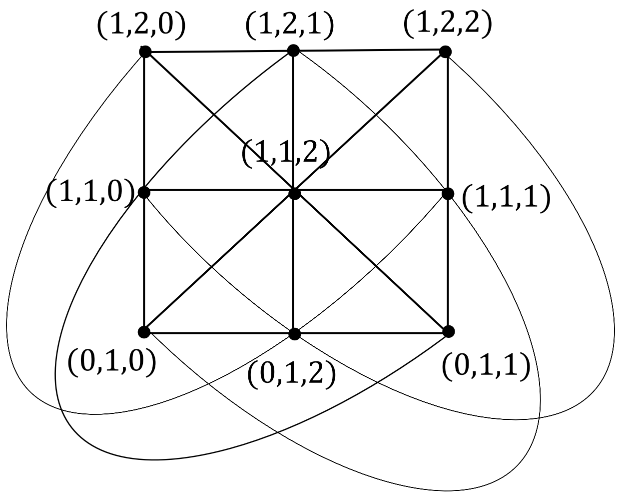
$c \wedge d = M$ olsun. $\mathbb{III}$ deki NM doğrusu $\mathbb{III}\backslash d$ uzayında $NM\backslash\{M\}$ doğrusunu verir. $NM\backslash\{M\}$ doğrusu $\mathbb{III}\backslash d$ uzayının N den geçip c yi kesmeyen tek doğrusu olur. O halde A2 aksiyomu sağlanır. $\mathbb{III}$ de herhangi iki doğru dışında en az bir nokta var olduğundan $\mathbb{III}\backslash d$ uzayı A3 aksiyomunu sağlar. □

$\mathbb{III}$ projektif düzleminin mertebesi n ise her doğrusu üzerinde $n + 1$ nokta bulunur. $\mathbb{III}\backslash d$ afin düzleminde her doğru üzerinde n nokta bulunacağından $\mathbb{III}\backslash d$ afin düzleminin mertebesi yine n dir.

Bu teoreme bir örnek veriyoruz.

Örnek 3.2.2 : Şekil 3.2.1 deki 3. mertebeden projektif düzlemden $[0,1,0]$ doğrusunu atarak elde edilen yapıyı Şekil 3.2.2 ile gösterebiliriz. Burada yatay çizgiler bir paralel doğru demetini ve düşey doğrular bir başka paralel doğru demetini göstermektedir. Ayrıca $\{(1,2,0),(1,1,2),(0,1,1)\}$, $\{(1,2,1),(1,1,1),(0,1,0)\}$, $\{(1,1,0),(0,1,2),(1,2,2)\}$ kümelerinin belirttiği doğrular bir paralel doğru demetini oluşturduğu gibi, $\{(0,1,0),(1,1,2),(1,2,2)\}$, $\{(1,2,0),(0,1,2),(1,1,1)\}$ ve $\{(1,2,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ kümelerinin belirttiği doğrular da bir başka paralel doğru demeti oluşturmaktadır.

Her doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebildiğine örnek olarak; $\{(1,2,1),(1,1,1),(0,1,0)\}$ doğrusuna dışındaki $(1,2,0)$ noktasından çizilen tek paralel doğrunun $\{(1,2,0),(1,1,2),(0,1,1)\}$ olduğunu gösterebiliriz.



Şekil 3.2.2

3.3. Bir Afin Düzlemde Noktalar İçin Toplama Ve Çarpma İşlemleri

Bu kısımdaki tanım ve teoremler (Bennett 1995) den alınmıştır.

Bir afin düzlemde herhangi bir doğrunun noktaları için toplama ve çarpma işlemleri, afin düzlem aksiyomlarından faydalanılarak tanımlanabilir. Önce toplama işlemini ele alalım.

Bir $(\boldsymbol{\mathcal{N}}, \boldsymbol{\mathcal{D}})$ afin düzleminde bir $d \in \boldsymbol{\mathcal{D}}$ doğrusu ve d üzerinde bir O orjinini seçelim. d üzerinde herhangi iki nokta A ve B olsun. A ve B nin O ya göre toplamını bulmak için aşağıdaki işlem sırası takip edilir:

1) d dışında bir C noktası seçilir.

2) C den geçen d doğrusuna paralel olan bir c doğrusu alınır.

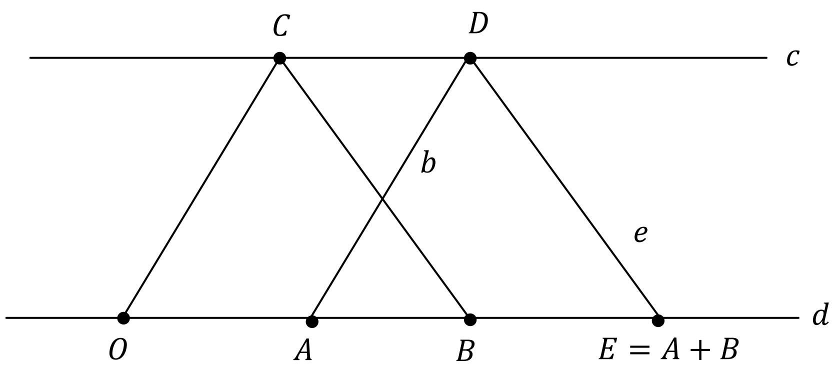
3) A dan OC doğrusuna bir b paraleli çizilir.

4) $c \wedge b = D$ noktası bulunur.

5) D den BC ye e paraleli çizilir.

6) $e \wedge d = E$ noktası $A + B$ olarak tanımlanır.

Bu toplama işlemi aşağıdaki Şekil 3.3.1 ile temsil edilebilir.



Şekil 3.3.1

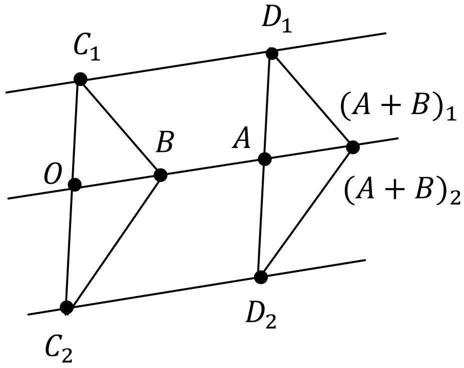
Öklid düzlemi en meşhur afin düzlemdir. Bu toplama, Öklid düzleminde düşünülürse OA ile CD ve CD ile BE nin birer paralelkenarın, paralel kenarları olarak eşit uzunlukta olduğu açıktır. Dolayısıyla OA kenarı önce c nin üzerine sonra da başlangıç noktası B olacak şekilde tekrar d nin üzerine kaydırılmıştır denilebilir.

Teorem 3.3.1 : Bir Dezargsel afin düzlemde bir d doğrusu üzerindeki herhangi iki A, B noktasının toplamı C noktasının seçiminden bağımsızdır.

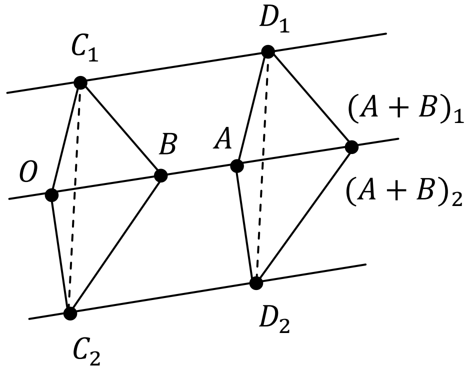
İspat: A ve B nin toplamı, A ve B yi birleştiren doğrunun dışında seçilen C_1 ve C_2 noktaları kullanılarak sırasıyla $(A+B)_1$ ve $(A+B)_2$ şeklinde elde edilsin. Seçilen C_1 ve C_2 noktaları için bulunan D_1 ve D_2 noktaları Şekil 3.3.2 veya Şekil 3.3.3 den görülebilir. İspatı iki durum için ele alacağız.

1. durum: C_1, C_2 ve O doğrudaş olsun. Toplamanın tanımı gereği OC_1 doğrusu ile AD_1 doğrusunun ve OC_2 doğrusu ile AD_2 doğrusunun paralel oldukları bilinmektedir. Bu durumda paralellik aksiyomu gereği, C_1C_2 doğrusuna dışındaki A noktasından bir tek paralel çizilebileceğinden D_1, D_2 ve A noktaları doğrudaş olmak zorundadır. Böylece C_1C_2 doğrusunun D_1D_2 doğrusuna paralel olduğu sonucuna varılır. C_1B doğrusunun $D_1(A+B)_1$ doğrusuna paralel olduğunu toplamanın tanımından biliyoruz. Şimdi $\{C_1, C_2, B\}$ ve $\{D_1, D_2, (A+B)_1\}$ üçgenlerine Dezarg teoremi (I) uygulanırsa; C_2B ile $D_2(A+B)_1$ doğrusunun paralel olduğu elde edilir. C_2B doğrusunun $D_2(A+B)_2$ doğrusuna da paralel olduğu toplamanın tanımından bilinmektedir. C_2B doğrusuna dışındaki D_2 noktasından bir tek paralel çizilebileceğinden $(A+B)_1 = (A+B)_2$ dir.

2. durum: C_1, C_2, O doğrudaş olmasın. Toplamanın tanımı gereği OC_1 ile AD_1 doğrusunun ve OC_2 ile AD_2 doğrusunun paralel oldukları bilinmektedir. $\{C_1, C_2, O\}$ ve $\{A, D_1, D_2\}$ üçgenlerine Dezarg teoremi (I) uygulanırsa C_1C_2 doğrusu ile D_1D_2 doğrusunun paralel olduğu elde edilir. Üstelik yine toplamanın tanımı gereği C_1B doğrusu ile $D_1(A+B)_1$ doğrusunun paralel olduğu bilinmektedir. Bu durumda $\{C_1, C_2, B\}$ ve $\{D_1, D_2, (A+B)_1\}$ üçgenlerine tekrar Dezarg teoremi (I) uygulanırsa C_2B doğrusu ile $D_2(A+B)_1$ doğrusunun paralel olduğu elde edilir. Toplamanın tanımı gereği C_2B doğrusu $D_2(A+B)_2$ doğrusuna paralel olduğundan C_2B doğrusuna dışındaki D_2 noktasından bir tek paralel çizilebileceğinden $(A+B)_1 = (A+B)_2$ dir. □



Şekil 3.3.2



Şekil 3.3.3

Şimdi sonlu bir afin düzlemi alarak bu toplama işlemine bir örnek vereceğiz.

Örnek 2.3.1 : 5. Mertebeden afin düzlemin noktalar kümesi, (ingiliz alfabesinin büyük harflerinin kümesi) $\boldsymbol{\mathcal{N}} = \{A, B, C, \dots, Y\}$ ve doğrular kümesi,

$\{OIABC, DEFGH, JKLMN, PQRST, UVWXY$

$ODJPU, IEKQV, AFLRW, BGMSX, CHNTY$

$OELSY, CDKRX, BHJQW, AGNPV, IFMTU$

$OHMRV, IDNSW, AEJTX, BFKPY, CGLQU$

$OGKTW, IHLPX, ADMQY, BENRU, CFJSV$

$OFNQX, IGJRY, AHKSU, BDLTV, CEMPW\}$

olmak üzere $d = OIABC$ doğrusu üzerindeki A ve C noktalarını, O noktasını orjin seçerek toplayalım:

1) d doğrusu dışındaki bir E noktasını alalım.

2) E noktasından geçen ve d ye paralel olan doğru $c = DEFGH$ dir.

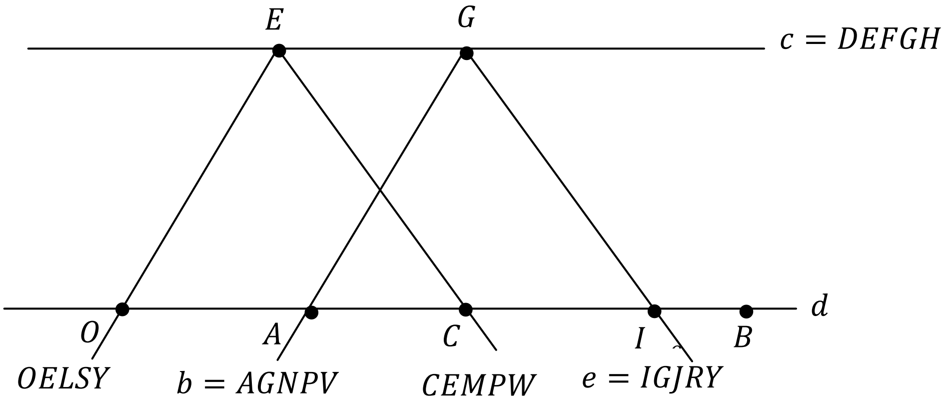
3) A noktasından, O ve E noktalarından geçen $OELSY$ doğrusuna çizilen paralel doğru $b = AGNPV$ dur.

4) $c \wedge b = G$ dir.

5) G noktasından, E ve C noktalarından geçen $CEMPW$ doğrusuna çizilen paralel $IGJRY$ doğrusudur.

6) $OIABC$ ile $IGJRY$ doğrularının kesişim noktası I olduğundan $A + C = I$ dır.

Bu işlemleri aşağıdaki Şekil 3.3.4 ile temsil edebiliriz.

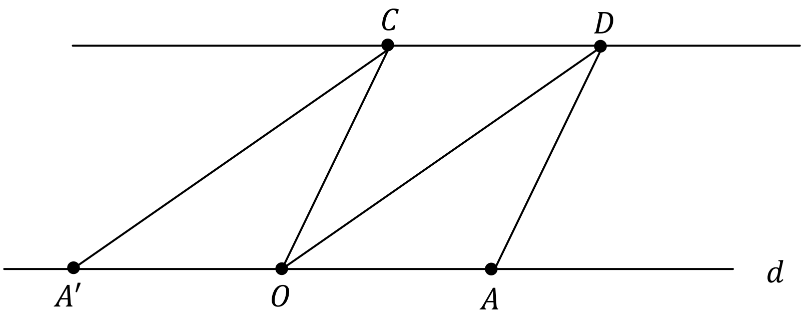


Şekil 3.3.4

Bu toplama işlemi altında d doğrusunun herhangi bir B noktası için, $O + B = B = B + O$ olduğu gibi $O + O = O$ olur. Yani, O noktası toplama işleminin etkisiz elemanı (sıfırı) rolünü oynar.

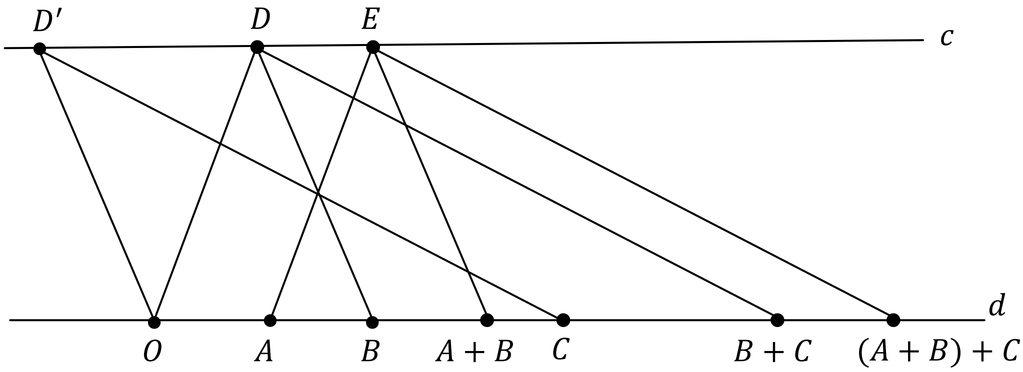
A, d doğrusunun herhangi bir noktası olmak üzere d üzerinde $A + A' = O = A' + A$ özelliğinde bir A' noktası aşağıdaki gibi bulunur:

d doğrusunun dışında bir C noktası alınır. C den d ye bir paralel çizilir. Bu doğru ile A dan OC ye çizilen paralel doğrunun kesişim noktası D bulunur. C den OD ye çizilen paralel d doğrusunu A' noktasında keser.



Şekil 3.3.5

Bu toplama işlemi kullanılarak d doğrusu üzerindeki herhangi A, B, C noktaları için, $A + (B + C) = (A + B) + C$ olduğu aşağıdaki şekil yardımıyla kolayca görülür.



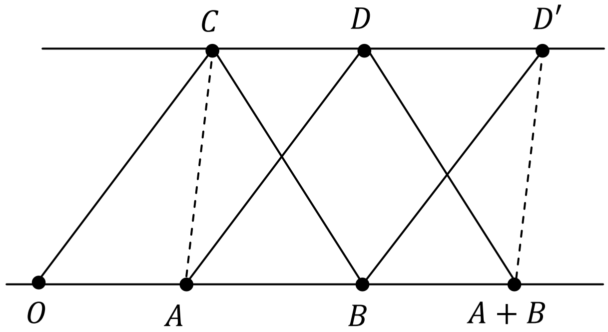
Şekil 3.3.6

$A + B$ yi bulmak için d doğrusu dışındaki D noktasını kullanıyoruz. D den d ye çizilen paralel c olsun. A dan OD ye çizilen paralelin c yi kestiği nokta E olsun. E den DB ye çizilen paralel d yi $A + B$ de keser. $(A + B) + C$ toplamını bulmak için O dan DB ye çizilen paralelin c yi kestiği D' noktası kullanılsın. E den $D'C$ ye çizilen paralel d yi $(A + B) + C$ noktasında keser. $B + C$ toplamını bulmak için yine D' noktasını kullanalım. Böylece OD' ne B den çizilen paralelin c yi kestiği D noktasından $D'C$ ye çizilen paralelin d yi kestiği nokta $B + C$ olur. Eğer A ile $B + C$ noktasının toplamını bulmak için D noktası kullanılırsa A dan OD ye çizilen paralelin c yi kestiği E noktasından $D(B + C)$ doğrusuna çizilen paralelin d yi kestiği nokta $A + (B + C)$ olur ki, bu $(A + B) + C$ ile aynı noktadır.

Teorem 3.3.2: Bir Dezargsel afin düzlemde bir d doğrusu üzerindeki herhangi iki noktanın toplamı değişmelidir.

İspat: d nin herhangi iki noktası A ve B olsun. Toplama tanımındaki işlem sırası takip edilerek A ile B nin O ya bağlı olarak, $A + B$ toplamını bulmak için d doğrusu dışında C noktası seçilmiş ve böylece D noktası belirlenmiştir (Bkz. Şekil 3.3.7). Yine toplamanın tanımındaki işlem sırası takip edilerek B ile A nın, O ya bağlı olarak, $B + A$ toplamını bulmak için d doğrusu dışında C noktası seçilmiş ve böylece D' noktası belirlenmiştir (Bkz. Şekil 3.3.7). $B + A$ işleminden $CA \| D'(B + A)$ olduğunu biliyoruz.

Şayet $CA \| D'(A+B)$ olduğunu gösterebilirsek, A2 gereği, $A+B=B+A$ sonucuna ulaşmış oluruz. $\{D, A, A+B\}$ ile $\{B, D', C\}$ üçgenlerine $A4'$ uygulanırsa $DB, AD', (A+B)C$ doğruları ya paraleldir ya da üçü aynı noktada kesişir. Şimdi $\{D, A, C\}$ ve $\{B, D', A+B\}$ üçgenlerine $A4$ aksiyomu uygulanırsa $AC \| D'(A+B)$ elde edilir.□



Şekil 3.3.7

Dezargsel bir afin düzlemde toplama işlemi ile ilgili verilen bu özellikler aşağıdaki teoremle özetlenebilir.

Teorem 3.3.3 : Dezargsel bir $\mathbb{A}$ afin düzleminin bir d doğrusu üzerindeki noktaların $\boldsymbol{G}$ kümesi, yukarıda tanımlanan toplama işlemi altında, etkisiz elemanı O olan bir değişmeli gruptur.

Şimdi de bir afin düzlemin herhangi bir doğrusu üzerindeki noktalar için çarpma işleminin nasıl yapıldığını ele alalım.

Bir afin düzlemdeki bir d doğrusu üzerinde bulunan farklı iki nokta O ve I olarak alınsın. d nin A ve B gibi herhangi iki noktasının seçilen O ve I noktalarına bağlı olarak çarpımını bulmak için aşağıdaki işlem sırası takip edilir:

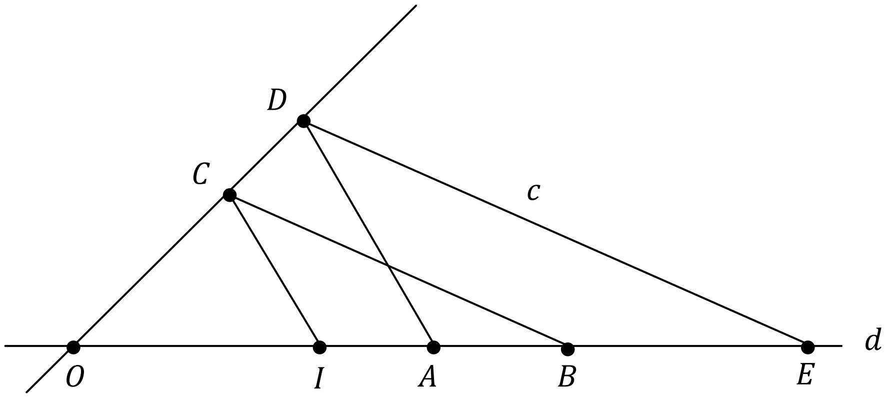
1) d dışında bir C noktası alınır ve OC doğrusu oluşturulur.

2) A dan CI doğrusuna çizilen paralelin OC yi kestiği D noktası bulunur.

3) D noktasından BC ye bir c paraleli çizilir.

4) $c \wedge d = E$ noktası $A.B$ olarak tanımlanır.

Bu çarpma işlemi aşağıdaki Şekil 3.3.8 ile temsil edilebilir.



Şekil 3.3.8

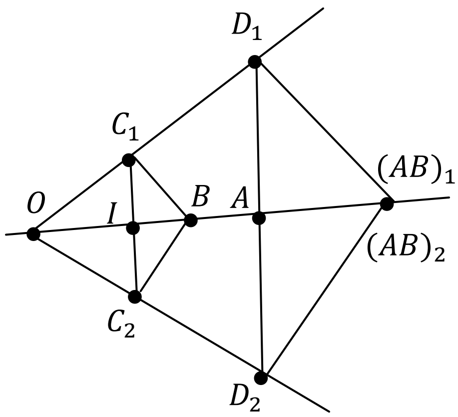
Teorem 3.3.4: Bir Dezargsel afin düzlemde bir d doğrusu üzerindeki herhangi iki A, B noktasının çarpımı C noktasının seçiminden bağımsızdır.

İspat: : A ve B nin çarpımı, A ve B yi birleştiren doğrunun dışında seçilen C_1 ve C_2 noktaları kullanılarak sırasıyla $(A.B)_1$ ve $(A.B)_2$ şeklinde elde edilsin. Seçilen C_1 ve C_2 noktaları için bulunan D_1 ve D_2 noktaları Şekil 3.3.9 veya Şekil 3.3.10 dan görülebilir. İspatı iki durum için ele alacağız.

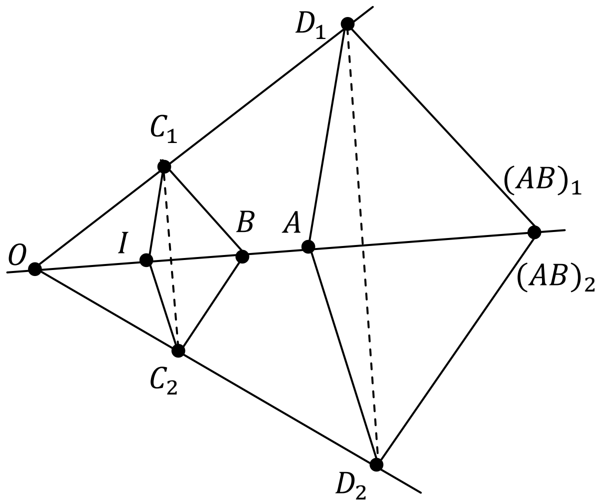
1. durum: I, C_1 ve C_2 doğrudaş olsun. Çarpmanın tanımı gereği IC_1 doğrusu ile AD_1 doğrusunun ve IC_2 doğrusu ile AD_2 doğrusunun paralel oldukları bilinmektedir. Bu durumda paralellik aksiyomu gereği, C_1C_2 doğrusuna dışındaki A noktasından bir tek paralel çizilebileceğinden A, D_1, D_2 noktaları doğrudaştır. Böylece C_1C_2 doğrusunun D_1D_2 doğrusuna paralel olduğu sonucuna varılır. C_1B doğrusunun $D_1(A.B)_1$ doğrusuna paralel olduğunu çarpmanın tanımından biliyoruz. Şimdi $\{C_1, C_2, B\}$ ve $\{D_1, D_2, (A.B)_1\}$ üçgenlerine Dezarg teoremi (II) uygulanırsa; C_2B doğrusu ile $D_2(A.B)_1$ doğrusunun paralel olduğu elde edilir. C_2B doğrusunun $D_2(A.B)_2$ doğrusuna da paralel olduğu çarpmanın tanımından bilinmektedir. C_2B doğrusuna dışındaki D_2 noktasından bir tek paralel çizilebileceğinden $(A.B)_1 = (A.B)_2$ dir.

2. durum: I, C_1 ve C_2 doğrudaş olmasın. Çarpmanın tanımı gereği IC_1 ile AD_1 doğrusunun ve IC_2 ile AD_2 doğrusunun paralel oldukları bilinmektedir. $\{I, C_1, C_2\}$ ve $\{A, D_1, D_2\}$ üçgenlerine Dezarg teoremi (II) uygulanırsa C_1C_2 doğrusu ile D_1D_2 doğrusunun paralel olduğu sonucuna ulaşılır. Yine çarpmanın tanımı gereği C_1B

doğrusu ile $D_1(A.B)_1$ doğrusunun paralel olduğu bilinmektedir. Bu durumda $\{C_1, C_2, B\}$ ve $\{D_1, D_2, (A.B)_1\}$ üçgenlerine yine Dezarg teoremi (II) uygulanırsa C_2B doğrusu ile $D_2(A.B)_1$ doğrusunun paralel olduğu elde edilir. Çarpmanın tanımı gereği C_2B doğrusu $D_2(A.B)_2$ doğrusuna paralel olduğundan ve C_2B doğrusuna dışındaki D_2 noktasından bir tek paralel çizilebileceğinden $(A.B)_1 = (A.B)_2$ dir. □



Şekil 3.3.9



Şekil 3.3.10

Şimdi sonlu bir afin düzlem alarak bu çarpma işlemine bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.3.2 : 5. Mertebeden afin düzlemin noktalar kümesi ve doğrular kümesi Örnek 2.3.1 deki gibi tanımlı olsun. Yine $d = OIABC$ doğrusunu seçerek, bu doğru üzerindeki A ve C noktalarının çarpımını O ve I ya bağlı olarak bulalım:

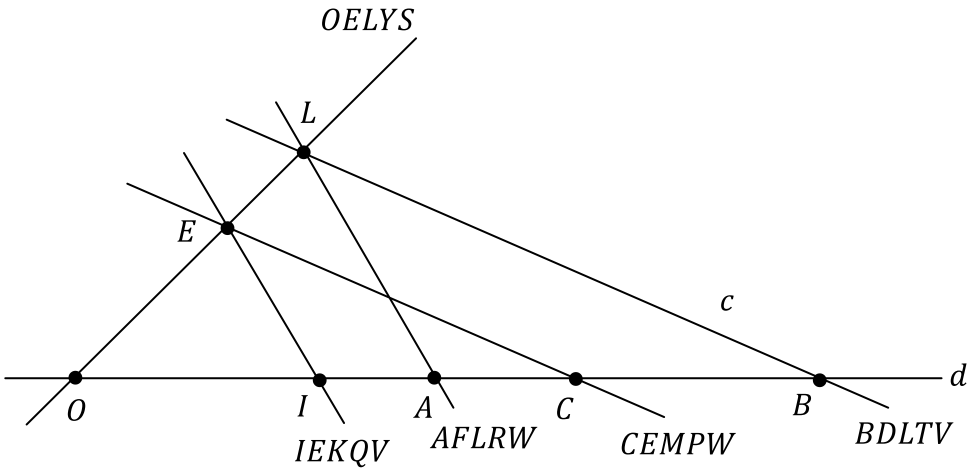
1) d doğrusu dışındaki E noktasını alalım.

2) A noktasından E ve I noktalarından geçen $IEKQV$ doğrusuna çizilen paralel olan $AFLRW$ doğrusunun O ile E yi birleştiren $OELSY$ doğrusunu kestiği nokta L dir.

3) L noktasından C ve E noktalarını birleştiren doğru olan $CEMPW$ doğrusuna çizilen paralel $BDLTV = c$ dir.

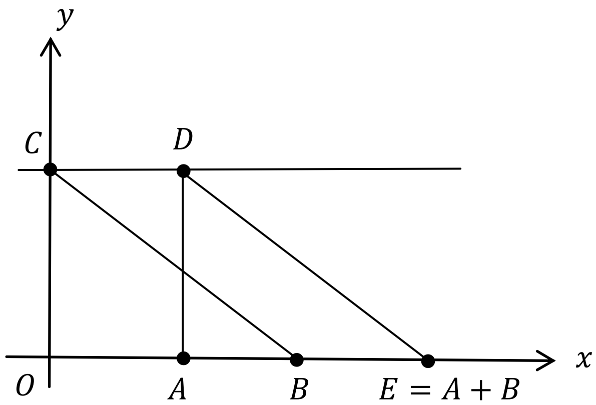
4) $c \wedge d = B$ olduğundan A ile C nin çarpımı B olarak bulunur.

Bu işlemleri aşağıdaki Şekil 3.3.11 ile temsil edebiliriz.



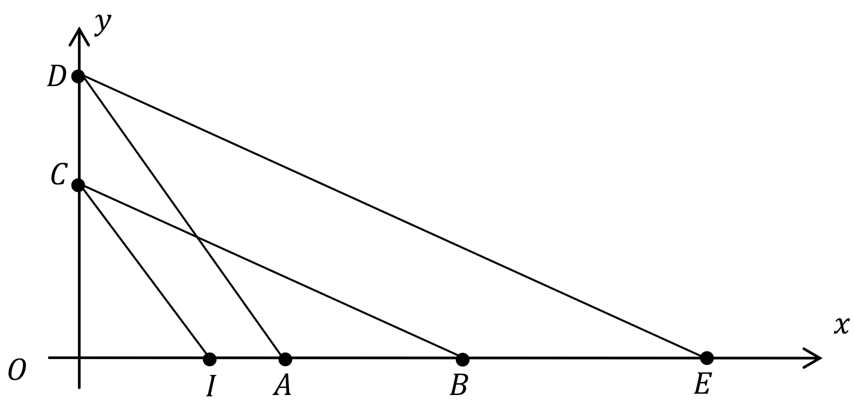
Şekil 3.3.11

Afin düzlemde yaptığımız toplama ve çarpma işlemlerini dik koordinat sistemini kullanarak Öklid düzlemine taşıyacak olursak aşağıdaki şekilleri elde ederiz.



$OA = CD = BE$

Şekil 3.3.12



Şekil 3.3.13

$OIC \sim OAD$ ve $OBC \sim OED$ üçgenlerinin benzerlikleri kullanılarak,

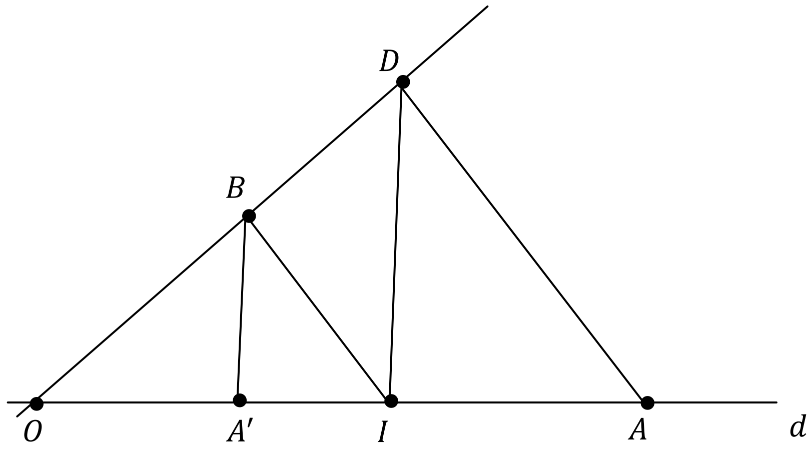
$\frac{|OA|}{|OI|} = \frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|AD|}{|IC|}$ ve $\frac{|OE|}{|OB|} = \frac{|OD|}{|OC|} = \frac{|ED|}{|BC|}$ eşitlikleri ve dolayısıyla $\frac{|OA|}{|OI|} = \frac{|OE|}{|OB|}$ bulunur.

$\frac{|OA|}{|OI|} = \frac{|OE|}{|OB|}$ eşitliğinden ise $|OA||OB| = |OI||OE|$ bulunur. $|OI|$ birim olarak alınırsa $|OA||OB| = |OE|$ sonucuna ulaşılır.

Bunu O yu kullanmadan kısaca $A.B = E$ şeklinde ifade edebiliriz.

Tanımladığımız d doğrusu üzerindeki her A noktası için $A.I = A = I.A$ ve $A.O = O = O.A$ olduğu kolayca görülür.

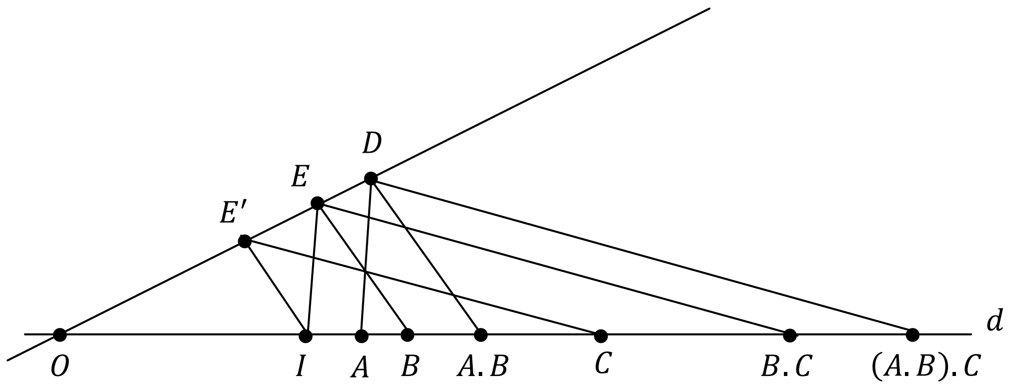
Eğer, A farklı O ise aşağıdaki şekilde tanımlanan A' noktası için $A.A' = I = A'.A$ yani $A' = A^{-1}$ olduğu görülür.



Şekil 3.3.14

d doğrusu dışındaki herhangi bir nokta B olsun. A dan IB ye çizilen paralelin OB yi kestiği nokta D olsun. B den ID ye çizilen paralelin d yi kestiği nokta A' olur.

Bunlar yardımıyla d üzerindeki herhangi A, B, C noktaları için $A.(B.C) = (A.B).C$ olduğu aşağıdaki şekilden kolayca görülebilir.



Şekil 3.3.15

Çarpma ile ilgili verdiğimiz bu bilgileri aşağıdaki teoremde özetleyebiliriz.

Teorem 3.3.5 : Bir $\mathbb{A}$ afin düzleminin bir d doğrusu üzerindeki noktaların $\boldsymbol{G}$ kümesi tanımlanan çarpma işlemi altında, etkisiz elemanı I olan bir gruptur ve O çarpma işleminin yutan elemanıdır.

Teorem 3.3.6 : Bir Dezargsel $\mathbb{A}$ afin düzleminde herhangi bir d doğrusunun noktaları için tanımlanan çarpma işlemi, toplama üzerine soldan ve sağdan dağılır.

İspat: d nin herhangi üç noktası X, Y ve Z olsun. $(X + Y).Z = X.Z + Y.Z$ sağ dağılma özelliğinin geçerli olduğunu göstermek için aşağıdaki işlem sırası takip edilir:

1) Çarpma tanımındaki işlem sırası takip edilerek X ile Z nin, O ve I ya bağlı olarak, $X.Z$ çarpımını hesaplamak için d doğrusunun dışında bir C noktası seçilmiştir ve C_1 noktası belirlenmiştir. Böylece $CZ \| C_1(X.Z)$ olduğu görülür.

2) Çarpma tanımındaki işlem sırası takip edilerek Y ile Z nin, , O ve I ya bağlı olarak, $Y.Z$ çarpımını hesaplamak için d doğrusunun dışında aynı C noktası seçilmiştir ve C_2 noktası belirlenmiştir. Böylece $CZ \| C_2(Y.Z)$ olduğu görülür.

3) Toplama tanımındaki işlem sırası takip edilerek X ile Y nin, O ya bağlı olarak, $X + Y$ toplamını hesaplamak için d doğrusunun dışında C_2 noktası seçilmiştir ve böylece C_3 noktası belirlenmiştir.Bu işlemin bir sonucu olarak OC_2 doğrusunun XC_3 doğrusuna paralel olduğunu ifade edebiliriz.

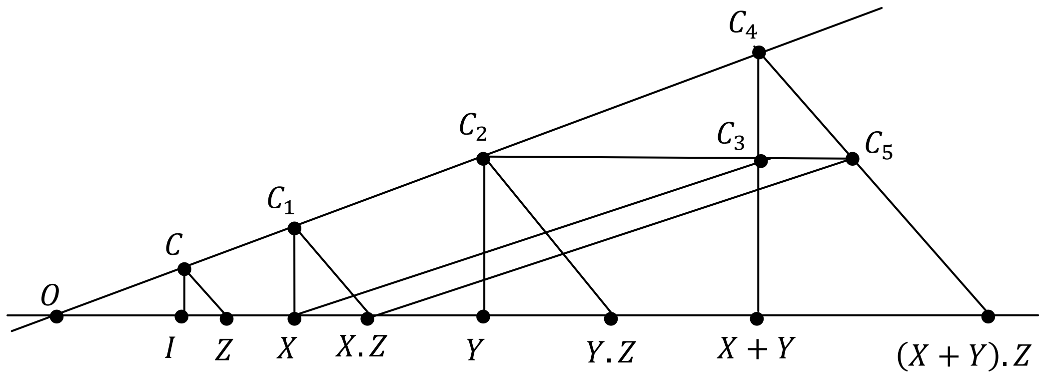
4) Çarpma tanımındaki işlem sırası takip edilerek $X + Y$ ile Z nin, O ve I ya bağlı olarak, $(X + Y).Z$ çarpımını hesaplamak için d doğrusunun dışında C noktası seçilmiştir ve böylece C_4 noktası belirlenmiştir. Bu işlemin bir sonucu olarak, CZ doğrusunun $C_4((X+Y).Z)$ doğrusuna paralel olduğunu ifade edebiliriz.

5) XC_3 doğrusuna dışındaki $X.Z$ noktasından geçen paralel doğrunun $C_4((X+Y).Z)$ doğrusunu kestiği nokta C_5 olarak seçilsin. Bu durumda $\{C_4, C_3, C_5\}$ ile $\{C_1, X, X.Z\}$ üçgenlerine Dezarg teoremi (I) uygulanırsa C_3C_5 doğrusunun $X(X.Z)$ doğrusuna paralel olduğu elde edilir. Bu ise $C_5 \in C_2C_3$ olduğunu gösterir. Yani C_2, C_3 ve C_5 noktaları doğrudaştır.

6) Toplama tanımındaki işlem sırası takip edilerek $X.Z$ ile $Y.Z$ nin, O ya bağlı olarak, $X.Z+Y.Z$ toplamını hesaplamak için d doğrusunun dışında C_2 noktası seçilmiştir ve OC_2 doğrusuna $X.Z$ noktasından çizilen paralellin C_2C_3 doğrusunu kestiği noktanın C_5 olduğu görülmüştür. Bu toplama işleminin bir sonucu olarak, $C_2(Y.Z)$ doğrusunun $C_5(X.Z+Y.Z)$ doğrusuna paralel olduğunu belirtebiliriz.

Yukarıdaki tüm işlemlerin sonuçlarını dikkate alarak $(X+Y).Z = X.Z+Y.Z$ olduğu sonucuna varılır.□

Sol dağılma özelliği yukarıdaki benzer işlemler ve $A4$ ile $A4'$ aksiyomları yardımıyla gösterilebilir.



Şekil 3.3.16

Sonuç 3.3.1: $\mathbb{A}$ bir Dezargsel afin düzlem ise $(\boldsymbol{G}, +, \cdot)$ bir bölümlü halkadır.

4. PROJEKTİF UZAY VE AFİN UZAY

Üçüncü bölümde 2-boyutlu özel lineer uzaylar olan projektif düzlemleri incelemiştik. Bu bölümde bir bakıma projektif düzlemlerin genellemesi olarak bakılabilen yüksek-boyutlu uzayları ele alacağız. Projektif uzay denilen bu özel lineer uzaylar ile ilgili vereceğimiz tanım ve teoremler için (Batten 1986, Hirschfeld 1998, Beutelspacher ve Rosenbaum 1998) i kaynak olarak kullandık.

Genel bir projektif uzayın yapısı ile ilgili çok iyi bilinen bazı önermeler vereceğiz.

Tanım 4.1: 2-boyutlu her alt uzayı bir projektif düzlem olan bir lineer uzaya bir $projektif\ uzay$ denir.

Teorem 4.1 : Bir projektif uzayın her alt uzayıda bir projektif uzaydır.

Teorem 4.2 : Bir projektif uzayın herhangi iki doğrusunun nokta sayısı eşittir.

İspat: d ve d' bir $\mathbb{P}$ projektif uzayının herhangi iki doğrusu olsun. Eğer d ve d', $\mathbb{P}$ nin 2-boyutlu bir Π alt uzayı tarafından kapsanıyorsa, Π bir projektif düzlem olduğundan d ile d' nün nokta sayısı eşittir.

Eğer böyle bir Π alt uzayı yoksa bir $N \in d$ ve bir $N' \in d'$ noktası alarak $c = NN'$ doğrusunu oluşturalım. Bu takdirde d ile c nin belirttiği bir Π ve d' ile c nin belirttiği bir Π' projektif düzlemi bulunacağından $v(d) = v(c) = v(d')$ dür. □

Teorem 4.3 : V bir $\mathbb{P}$ projektif uzayının herhangi bir alt uzayı ve $N \notin \boldsymbol{V}$ olsun. Bu takdirde $< \boldsymbol{V} \cup \{N\} >$ alt uzayı $M \in \boldsymbol{V}$ olmak üzere bütün MN doğruları üzerindeki noktaların tamamının kümesidir.

İspat: $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{V}$ nin bütün noktalarını N noktasına birleştiren doğruların üzerindeki bütün noktaların kümesi olsun. $\boldsymbol{X}$ in $\mathbb{P}$ nin bir alt uzayı olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Çünkü $\boldsymbol{V}$ ile $\{N\}$ yi kapsayan her alt uzay $\boldsymbol{X}$ i kapsamak zorundadır. Dolayısıyla $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{V}$ ile $\{N\}$ yi kapsayan en küçük alt uzay olur. P ve R, $\boldsymbol{X}$ in N den ve birbirinden farklı herhangi iki noktası olsun. $PR \subseteq \boldsymbol{X}$ olduğunu göstermemiz gerekir. $P, R \in \boldsymbol{X}$ olduğundan $P \in P'N$ ve $R \in R'N$ olacak şekilde birer $P', R' \in \boldsymbol{V}$ noktası vardır. $P = P'$ veya $R = R'$ olması da mümkündür. $\mathbb{P}$ de $< \{N\} \cup \{P\} \cup \{R\} >$ alt uzayı iki boyutlu olduğundan bir projektif düzlem belirtir. Bu projektif düzlemi Π ile gösterirsek bu durumda $P', R' \in \Pi$ olur. $S \in PR$ özelliğinde bir S noktası alınsın. NS ve $P'R'$ doğrularının her ikisi de Π projektif düzleminin birer doğrusu olduğundan bir S' noktasında kesişirler. $P'R'$ doğrusu $\boldsymbol{V}$ alt uzayının bir doğrusu olduğundan $S' \in \boldsymbol{V}$ dir ve böylece $S \in NS'$ olur. Dolayısıyla da S, $\boldsymbol{X}$ in bir noktası yani $PR \subseteq \boldsymbol{X}$ dir. □

Teorem 4.4 : Bir projektif uzayda değişme özelliği geçerlidir.

İspat: x ile y bir $\mathbb{P}$ projektif uzayının herhangi iki noktası ve $\boldsymbol{X}$ bir noktalar kümesi olsun. $x \notin <\boldsymbol{X}>$ ve $x \in <\boldsymbol{X} \cup \{y\}>$ olduğu kabul edilsin. $x \in <\boldsymbol{X} \cup \{y\}>$ ise $x \in yp$ olacak şekilde bir $p \in \boldsymbol{X}$ noktası vardır ve bu $y \in xp \subseteq <\boldsymbol{X} \cup \{x\}>$ olmasını gerektirir.□

$\boldsymbol{H}$, $\mathbb{P}$ projektif uzayının bir hiperdüzlemi ve $\boldsymbol{H}$ nin bir bazı $\{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. Herhangi bir $p \in \mathbb{P} \backslash \boldsymbol{H}$ için $\mathbb{P}$ değişmeli uzay olduğundan $boy < \{x_1, \dots, x_n, p\} >= boy\boldsymbol{H} + 1$ dir. $\mathbb{P} =< \{x_1, \dots, x_n, p\} >$ dir. Aksi halde $\boldsymbol{H} \subset< \{x_1, \dots, x_n, p\} >\subset P$ çelişkisi doğar.

Teorem 4.5 : n-boyutlu ve k-mertebeli bir projektif uzayın toplam nokta sayısı " $k^n + k^{n-1} + \cdots + k^2 + k + 1$" dir.

İspat: $n = 1$ ise $\mathbb{P}$ bir doğrudur ve nokta sayısı $k + 1$ dir.

$n = 2$ ise $\mathbb{P}$ bir projektif düzlemdir ve nokta sayısı $k^2 + k + 1$ dir. Her iki halde de önerme doğrudur. Tümevarım metodu kullanılarak önermenin $n - 1$ için doğru olduğu kabul edilsin. O zaman $\mathbb{P}$ nin n-boyutlu bir projektif uzay olduğunu ve $\boldsymbol{H}$ nin onun bir hiperdüzlemi olduğunu kabul edersek $\boldsymbol{H}$ nin toplam nokta sayısı $k^{n-1} + \cdots + k + 1$ olur. $\mathbb{P}$ nin tüm noktaları belli bir $p \in \mathbb{P} \backslash \mathbf{H}$ noktası ve her bir $x \in \boldsymbol{H}$ alınarak oluşturulan tüm xp doğruları üzerindeki noktalardan ibarettir. Her xp doğrusu üzerinde p hariç k tane nokta var olduğundan $\mathbb{P}$ nin nokta sayısı

$$k(k^{n-1} + \cdots + k + 1) + 1 = k^n + k^{n-1} + \cdots + k + 1$$

dir. □

Teorem 4.6 : Bir $\mathbb{P}$ projektif uzayının bir $\boldsymbol{H}$ alt uzayının bir hiperdüzlem olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{P}$ nin her bir doğrusunun $\boldsymbol{H}$ yi en az bir noktada kesmesidir.

İspat: Her doğrunun $\boldsymbol{H}$ yi bir noktada kestiği kabul edilsin. $p \notin \boldsymbol{H}$ olsun. $q \neq p$ olmak üzere tüm pq doğruları $\boldsymbol{H}$ yi kesecektir. Dolayısıyla $\mathbb{P} \subseteq < \mathbf{H} \cup \{\mathrm{p}\} >$ yani $\mathbb{P} =< \mathbf{H} \cup \{\mathrm{p}\} >$ olacaktır. Bu da $\boldsymbol{H}$ nin bir hiperdüzlem olduğunu gösterir.

$\boldsymbol{H}$ bir hiperdüzlem olsun. $\boldsymbol{H}$ bir hiperdüzlem olduğundan bir $p \in \mathbb{P} \backslash \mathbf{H}$ için $\mathbb{P} =< \mathbf{H} \cup \{\mathrm{p}\} >$ dir. Teorem 4.3 gereği $\mathbb{P}$ nin tüm noktaları $x \in \boldsymbol{H}$ olmak üzere xp doğrularının üzerindedir. Dolayısıyla $\mathbb{P}$ nin tüm doğruları $\boldsymbol{H}$ yi kesmek zorundadır. □

Bir projektif n-uzayın herhangi iki hiperdüzleminin (n-2)-boyutlu bir alt uzayda kesiştiği de iyi bilinmektedir.

Bu bölümde $n \geq -1$ özelliğinde herhangi bir tamsayı için $n - boyutlu$ bazı geometrik yapıları inceleyeceğiz. Asıl incelememiz projektif uzayların cisimler ile koordinatlaması üzerine olacaktır.

$\boldsymbol{V} = V(n+1, q)$, $\boldsymbol{K}$ cismi üzerinde $(n+1) - boyutlu$, etkisiz elemanı sıfır olan bir vektör uzayı olsun. $\boldsymbol{V} \backslash \{0\}$ ın elemanları üzerinde denklik sınıfları $\boldsymbol{V}$ nin sıfır çıkarılmış bir boyutlu alt uzayları olan bir denklik bağıntısı düşünelim. Böylece $X, Y \in \boldsymbol{V} \backslash \{0\}$ ise X in Y ye denkliği bir $t \in K_0$ için $Y = tX$, yani her i için $y_i = tx_i$ olarak tanımlansın. Burada $\boldsymbol{K}_0$ ile $\boldsymbol{K} \setminus \{0\}$ kümesi gösterilmektedir. Bu durumda denklik sınıflarının kümesi, $\boldsymbol{K}$ üzerinde $\boldsymbol{PG}(n, \boldsymbol{K})$ veya $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{F_q}$ iken $\boldsymbol{PG}(n, q)$ ile gösterilen $n - boyutlu$ bir projektif uzaydır. Burada $\boldsymbol{F_q}$ ile q mertebeli sonlu bir cisim gösterilmektedir. $\boldsymbol{PG}(n, \boldsymbol{K})$ uzayının elemanlarına $nokta$ denir. Bir X vektörünün denklik sınıfı $P(X)$ ile gösterilir. Aynı zamanda X e $P(X)$ in $koordinat\ vekt$örü ya da $vekt$ö$rel\ temsilcisi$ denir. t, K_0 ın elemanı olmak üzere tX de $P(X)$ in bir temsilcisidir. Yani, $P(tX) = P(X)$ dir.

$P(X_1), \ldots, P(X_r)$ nin lineer bağımsızlığı $X_1, \ldots, X_r$ temsilcisinin lineer bağımsızlığı olarak tanımlanır.

$m = -1, 0, 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere; $\boldsymbol{V} = V(n+1, q)$ vektör uzayının $(m+1) - boyutlu$ tüm alt uzaylarını ve 0 vektörünü noktaları olarak kabul eden projektif uzaya $PG(n, K)$ projektif uzayının $m - boyutlu$ bir alt uzayı veya bir $m - uzay$ ve Π_m ile gösterilir. $(n-1) - boyutlu$ alt uzaya $prime$ veya $hiperd$ü$zlem$ denir. Sıfır boyutlu alt uzayı bir nokta, -1 boyutlu alt uzayı boş kümedir. Sırasıyla bir, iki ve üç boyutlu alt uzaylar doğru, düzlem ve 3 boyutlu cisimlerdir.

Bir hiperdüzlem $U = (u_0, u_1, \ldots, u_n) \in K^{n+1} \backslash \{(0,0,\ldots,0)\}$ ve $X = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ olmak üzere;

$$u_0x_0 + u_1x_1 + \ldots + u_nx_n = 0$$

lineer denklemini sağlayan $P(X)$ in denklik sınıfının kümesidir. $\Pi(U)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.1 : $n = 1$ ve $\boldsymbol{K} = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ olsun. ($\boldsymbol{V} = V(n+1, q) = V(2,3)$ olsun.)

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{K}^2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$ olmak üzere denklik sınıfları;

$P(0,1) = \{(0,1), (0,2)\}$,

$P(1,0) = \{(1,0), (2,0)\}$,

$P(1,1) = \{(1,1), (2,2)\}$,

$P(1,2) = \{(1,2), (2,1)\}$

dir. Bu durumda denklik sınıflarının kümesi olan

$\{P(0,1), P(1,0), P(1,1), P(1,2)\}$ kümesi $\boldsymbol{PG}(1,3)$ ile gösterilen $1 - boyutlu$ projektif uzaydır.

$\boldsymbol{PG}(1,3)$ projektif uzayının $m - boyutlu$ alt uzayları, $n = 1$ için $m = -1,0,1$ olur. Bu durumda,

Π_{-1} olarak seçilebilen, $-1 - boyutlu$ tek alt uzay $\emptyset$ dir.

Π_0 olarak seçilebilen, $0 - boyutlu$ dört alt uzay: $< P(0,1) >, < P(1,0) >, < P(1,1) >$ ve $< P(1,2) >$ dir.

$\Pi_1 =< P(0,1), P(1,0) > = \boldsymbol{PG}(1,3)$ ise $1 - boyutlu$ bir alt uzaydır.

Örnek 4.2 : $n = 2$ ve $\boldsymbol{K} = \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ olsun. ($\boldsymbol{V} = V(n+1,q) = V(3,3)$ olur.)

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{K}^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),$$
$$(1,0,0),(1,0,1),(1,0,2),(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2),$$
$$(2,0,0),(2,0,1),(2,0,2),(2,1,0),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,0),(2,2,1),(2,2,2)\}$$

olmak üzere denklik sınıfları,

$P(0,0,1) = \{(0,0,1),(0,0,2)\}$, $P(0,1,0) = \{(0,1,0),(0,2,0)\}$,

$P(0,1,1) = \{(0,1,1),(0,2,2)\}$, $P(0,1,2) = \{(0,1,2),(0,2,1)\}$,

$P(1,0,0) = \{(1,0,0),(2,0,0)\}$, $P(1,0,1) = \{(1,0,1),(2,0,2)\}$,

$P(1,0,2) = \{(1,0,2),(2,0,1)\}$, $P(1,1,0) = \{(1,1,0),(2,2,0)\}$,

$P(1,1,1) = \{(1,1,1),(2,2,2)\}$, $P(1,1,2) = \{(1,1,2),(2,2,1)\}$,

$P(1,2,0) = \{(1,2,0),(2,1,0)\}$, $P(1,2,1) = \{(1,2,1),(2,1,2)\}$,

$P(1,2,2) = \{(1,2,2),(2,1,1)\}$

dir. Bu durumda denklik sınıflarının kümesi olan,

$\{P(0,0,1),P(0,1,0),P(0,1,1),P(0,1,2),P(1,0,0),P(1,0,1),P(1,0,2),P(1,1,0),P(1,1,1),$

$P(1,1,2),P(1,2,0),P(1,2,1),P(1,2,2)\}$ kümesi $\boldsymbol{PG}(2,3)$ ile gösterilen $2-boyutlu$ projektif uzaydır.

$\boldsymbol{PG}(2,3)$ projektif uzayının $m-boyutlu$ alt uzayları, $n = 2$ olduğundan $m = -1,0,1,2$ olur. Bu durumda

$\Pi_{-1} = \emptyset$,

Π_0 olarak seçilebilen alt uzaylar: $< P(0,0,1) >, < P(0,1,0) >, \ldots, < P(1,2,2) >$ dir.

Π_1 olarak seçilebilen alt uzaylar yani hiperdüzlemler: $< P(0,0,1), P(0,1,0) >$,

$< P(0,0,1), P(0,1,1) >, < P(0,0,1), \mathrm{P}(0,1,2) >, \ldots, < P(1,2,1), \mathrm{P}(1,2,2) >$ dir.

$\Pi_2 =< P(0,0,1), \mathrm{P}(1,0,0), \mathrm{P}(0,1,0) >= \boldsymbol{PG}(2,3)$ ise 2-boyutlu altuzaylardır.

Şimdi de afin düzlemin genelleştirilmişi olarak düşünebileceğimiz afin uzay kavramını ele alacağız.

Tanım 4.2: 2-boyutlu her alt uzayı bir afin düzlem olan bir lineer uzaya bir $afin\ uzay$ denir.

Teorem 4.7 : $\mathbb{P}$ bir projektif uzay; $\boldsymbol{H}$, $\mathbb{P}$ de bir hiperdüzlem olsun. $\mathbb{P}\backslash\boldsymbol{H}$ bir afin uzaydır.

İspat: $\boldsymbol{H}$ bir hiperdüzlem ve $p \notin \boldsymbol{H}$ olsun. Bu durumda, $< \boldsymbol{H} \cup \{p\} > = P$ olur. Yani, $\mathbb{P}$ nin tüm noktaları p den geçip $\boldsymbol{H}$ yi kesen doğrular üzerindedir. $\mathbb{P}\backslash\boldsymbol{H}$ nin bir afin uzay olduğunu göstermek için $\mathbb{P}\backslash\boldsymbol{H}$ nin iki boyutlu her $\mathbb{A}$ alt uzayının A1, A2 ve A3 aksiyomlarını sağladığı gösterilmelidir.

A1 ve A3 şartlarının sağlanacağı açıktır.

Şimdi A2) aksiyomunun sağlandığını gösterelim. $\mathbb{A}$ da keyfi bir d doğrusu alalım ve $M \notin d$ olsun. $\mathbb{P}$ de d yi kapsayan bir $\mathbb{\Pi}$ projektif düzlemi vardır. Bu d doğrusu $\boldsymbol{H}$ hiperdüzlemini bir N noktasında keser. $MN = c$ olsun. Bu durumda $\mathbb{A}$ da d doğrusuna dışındaki M noktasından çizilen tek paralel doğru c dir. □

Şimdi de en çok çalışılan projektif uzay olan 3-boyutlu projektif uzayı özel olarak ele alıp bazı detaylara ineceğiz.

Tanım 4.3 : Nokta, doğru ve düzlem denilen tanımsız geometrik nesnelerden oluşan boş olmayan üç ayrık cümle, bu cümlelerin elemanları arasında tanımlı üzerinde olma bağıntılarıyla birlikte aşağıdaki aksiyomları da gerçekliyorsa, bunların hepsine birden $projektif\ 3 - uzay$ denir.

PU1) Farklı iki nokta bir tek doğru üzerindedir.

PU2) Her doğru üzerinde en az üç nokta vardır.

PU3) Doğrudaş olmayan üç nokta bir tek düzlem üzerindedir.

PU4) Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve hepsi aynı düzlemde bulunmayan dört nokta vardır.

PU5) Bir doğru ve bir düzlemin en az bir ortak noktası vardır.

PU6) İki düzlemin en az bir ortak doğrusu vardır.

Teorem 4.8 : Bir $\mathbb{P}$ projektif 3-uzayın farklı herhangi iki düzlemi bir doğru boyunca kesişir.

İspat: $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{H}'$, $\mathbb{P}$ nin herhangi iki düzlemi ve $N \in \mathbb{H} \backslash \mathbb{H}'$ olsun. d_1 ve d_2 $\mathbb{H}$ nin N den geçen herhangi iki doğrusu olmak üzere $\mathbb{H}'$, $\mathbb{P}$ nin herhangi bir hiperdüzlemi olduğundan Teorem 4.6 gereği d_1 ve d_2 doğruları $\mathbb{H}'$ yü farklı birer noktada keser. Bu noktalara sırasıyla K ve L denilsin. Bu durumda $KL \subseteq \mathbb{H} \cap \mathbb{H}'$ olur. Eğer $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{H}'$ nün $M \notin KL$ özelliğinde bir noktası varolsaydı $\mathbb{H} =< \{K\} \cup \{L\} \cup \{M\} > = \mathbb{H}'$ olurdu. Dolayısıyla $\mathbb{H} \cap \mathbb{H}' = KL$ dir. □

Bir hiperdüzlemi çıkarılmış projektif 3-uzayın bir $afin\ 3 - uzay$ olduğunu Teorem 4.7 den söyleyebiliriz.

Mertebesi k olan 3-boyutlu $A(3,k)$ afin uzayın, $P(3,k)$ projektif uzayından bir hiperdüzlem atılarak elde edildiğini biliyoruz. $P(3,k)$ uzayının bir hiperdüzlemi k mertebeli bir projektif düzlemdir. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.9 : $A(3,k)$ uzayında:

1. Toplam nokta sayısı k^3 tür.

2. Bir noktadan geçen doğru sayısı $k^2 + k + 1$ dir.

3. Toplam doğru sayısı $k^4 + k^3 + k^2$ dir.

İspat : 1. $P(3,k)$ nin toplam nokta sayısı olan $k^3 + k^2 + k + 1$ sayısından atılan bir hiperdüzlemin nokta sayısı olan $k^2 + k + 1$ çıkarılarak $A(3,k)$ nin toplam nokta sayısı $v = (k^3 + k^2 + k + 1) - (k^2 + k + 1) = k^3$ olarak bulunur.

2. $A(3,k)$ nin herhangi bir N noktası $P(3,k)$ deki bir nokta olarak düşünüldüğünde kendisinden $k^2 + k + 1$ tane doğru geçtiği bilinmektedir. $P(3,k)$ den bir hiperdüzlem atıldığında N den geçen doğruların her birinden sadece hiperdüzlemle kesişim noktaları, yani 1 nokta çıkarılacağından doğru sayısı aynı kalacaktır. Çünkü, $P(3,k)$ de her doğru en az üç nokta kapsamaktadır. Dolayısıyla bir noktası atıldığında da $A(3,k)$ nin doğrusu olarak kalacaktır. Sonuç olarak $A(3,k)$ de her noktadan k^2+k+1 doğru geçer.

3. $A(3,k)$ de, $v=k^3$ tane nokta var olup, her birinden k^2+k+1 tane doğru geçer. Ancak her doğru üzerinde k tane nokta bulunmaktadır. Dolayısıyla toplam doğru sayısı

$$b=\frac{k^3(k^2+k+1)}{k}=k^2(k^2+k+1)=k^4+k^3+k^2$$

dir. □

Teorem 4.10 : $\mathbb{P}$, k mertebeli bir projektif uzay ve $\boldsymbol{U}$ onun t boyutlu bir alt uzayı olsun. Bu takdirde

a) $\boldsymbol{U}$ nun toplam nokta sayısı $k^t+\cdots+k+1$ dir.

b) $\boldsymbol{U}$ nun bir noktasından toplam $k^{t-1}+\cdots+k+1$ doğru geçer.

c) $\boldsymbol{U}$ nun toplam doğru sayısı

$$\frac{(k^t+\cdots+k+1)(k^{t-1}+\cdots+k+1)}{k+1}$$

dir.

İspat: a) $\boldsymbol{U}$ nun mertebesi $\mathbb{P}$ nin mertebesine eşit olup k dir. Bu durumda $\boldsymbol{U}$, t $-$boyutlu ve k $-$mertebeli bir projektif uzay olur ki Teorem 4.5 gereği toplam nokta sayısı $k^t+\cdots+k+1$ dir.

b) $\boldsymbol{U}$ nun bir H hiperdüzlemi $(t-1)$ $-$boyutlu bir projektif uzaydır. $\boldsymbol{U}$ nun her noktasından Teorem 4.3 gereği H nin nokta sayısı olan $k^{t-1}+\cdots+k+1$ tane doğru geçer.

c) $\boldsymbol{U}$ nun her noktasından b) gereği $k^{t-1}+\cdots+k+1$ tane doğru geçer. a) gereği $\boldsymbol{U}$ nun nokta sayısı $k^t+\cdots+k+1$ dir. $\boldsymbol{U}$ nun her doğrusu üzerinde $k+1$ tane nokta bulunduğundan, $\boldsymbol{U}$ nun toplam doğru sayısı

$$\frac{(k^t + \cdots + k + 1)(k^{t-1} + \cdots + k + 1)}{k + 1}$$

olur. □

Bu teoremin c) şıkkı gereği n −boyutlu ve k −mertebeli bir $\mathbb{P}$ projektif uzayının toplam doğru sayısının

$$\frac{(k^n + \cdots + k + 1)(k^{n-1} + \cdots + k + 1)}{k + 1}$$

olacağı açıktır. Bu sayıyı başka bir tarzda ifade eden aşağıdaki alternatif teoremi detaylı bir ispat ile vereceğiz. Bu ifadenin $\mathbb{P}$ nin t −boyutlu herhangi bir $\boldsymbol{U}$ alt uzayına kolayca adapte edilebileceği açıktır.

Teorem 4.11 : Mertebesi k ve boyutu $n \geq 2$ olan bir projektif uzayın toplam doğru sayısı

$$a_i = \begin{cases} \left[\!\left[\frac{i}{2}\right]\!\right] + 1 & , \quad i < n \\ n - \left[\!\left[\frac{i+1}{2}\right]\!\right] & , \quad i \geq n \end{cases}$$

olmak üzere

$$b = \sum_{i=0}^{2n-2} a_i k^{2n-2-i}$$

toplamına eşittir.

İspat : İspatı n üzerinden tümevarım ispat yöntemini kullanarak göstereceğiz.

$n = 2$ için $P(2, k)$ bir projektif düzlem olup $P(2, k)$ nın toplam doğru sayısı $b = k^2 + k + 1$ olduğunu biliyoruz ki bu teoremimizden bulunacak, $n = 2$ iken

$$a_i = \begin{cases} \left[\!\left[\frac{i}{2}\right]\!\right] + 1 & , \quad i < 2 \\ 2 - \left[\!\left[\frac{i+1}{2}\right]\!\right] & , \quad i \geq 2 \end{cases}$$

olmak üzere

$$b = \sum_{i=0}^{2} a_i k^{2-i} = a_0 k^2 + a_1 k + 1 = 1.k^2 + 1.k + 1.1 = k^2 + k + 1$$

sayısı ile aynıdır.

$P(3,k)$ uzayının herhangi bir noktası N ve N yi kapsamayan herhangi bir hiperdüzlemi $\boldsymbol{H}$ olsun. $\boldsymbol{H}$, boyutu 2 ve mertebesi k olan bir projektif uzay olduğundan bir projektif düzlemdir. N den geçen doğru sayısı hiperdüzlemin toplam nokta sayısı olan $k^2 + k + 1$ dir. Dolayısıyla $\boldsymbol{H}$ nin her bir noktasından geçen $k^2 + k + 1$ doğrusunun $k + 1$ tanesi $\boldsymbol{H}$ nin doğruları, $k^2 + k + 1 - (k + 1) = k^2$ tanesi ise $\boldsymbol{H}$ yi bir tek noktada kesen doğrulardır. $P(3,k)$ nin her doğrusu $\boldsymbol{H}$ yi kesmek zorunda olduğundan; $\boldsymbol{H}$ yi tek noktada kesen doğru sayısı $k^2(k^2 + k + 1)$ dir. $\boldsymbol{H}$ de kapsanan doğruların sayısı ise $k^2 + k + 1$ olduğundan $P(3,k)$ nin toplam doğru sayısı

$$k^2(k^2 + k + 1) + k^2 + k + 1 = k^4 + k^3 + 2k^2 + k + 1$$

dir.

Teoremin iddiasını değerlendirecek olursak; $n = 3$ iken

$$a_i = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{i}{2}\right]\!\right] + 1 & , \quad i < 3 \\ 3 - \left[\!\left[\dfrac{i+1}{2}\right]\!\right] & , \quad i \geq 3 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{4} a_i k^{4-i} = a_0 k^4 + a_1 k^3 + a_2 k^2 + a_3 k^1 + a_4 k^0 = 1k^4 + 1k^3 + 2k^2 + 1k + 1$$

dir. Bu da, $P(3,k)$ için,

$$b = \sum_{i=0}^{4} a_i k^{4-i}$$

olduğunu gösterir.

Şimdi tümevarım ispat metodu gereği iddianın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. $P(n-1,k)$ projektif uzayının toplam doğru sayısı

$$b_i = \begin{cases} \left[\!\left[\frac{i}{2}\right]\!\right] + 1 & , \quad i < n-1 \\ (n-1) - \left[\!\left[\frac{i+1}{2}\right]\!\right] & , \quad i \geq n-1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{2n-4} b_i k^{2n-4-i}$$

dir. Bu durumda n için doğru olduğunu gösterelim.

$P(n,k)$ nin toplam doğru sayısını hesaplamak istiyoruz. $P(n,k)$ uzayının herhangi bir noktası N ve N yi kapsamayan herhangi bir hiperdüzlemi $\boldsymbol{H}$ olsun. $\boldsymbol{H}$, boyutu $n-1$ ve mertebesi k olan bir projektif uzaydır. Dolayısıyla $\boldsymbol{H}$ nin toplam nokta sayısı, $k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^2 + k + 1$ dir. N den geçen doğru sayısı hiperdüzlemin toplam nokta sayısı olan $k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^2 + k + 1$ dir. Dolayısıyla $\boldsymbol{H}$ nin her bir noktasından geçen $k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^2 + k + 1$ doğrunun $k^{n-2} + k^{n-3} + \cdots + k^2 + k + 1$ tanesi $\boldsymbol{H}$ nin doğruları, $k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^2 + k + 1 - (k^{n-2} + k^{n-3} + \cdots + k^2 + k + 1) = k^{n-1}$ tanesi ise $\boldsymbol{H}$ yi bir tek noktada kesen doğrulardır. $P(n,k)$ nin her doğrusu $\boldsymbol{H}$ yi kesmek zorunda olduğundan $\boldsymbol{H}$ yi tek noktada kesen doğru sayısı, $k^{n-1}(k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^2 + k + 1)$ dir. $\boldsymbol{H}$ de kapsanan doğruların sayısı,

$$\sum_{i=0}^{2n-4} b_i k^{2n-4-i}$$

olduğu kabulünden $P(n,k)$ nin toplam doğru sayısı:

$$b = k^{n-1}(k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^2 + k + 1) + \sum_{i=0}^{2n-4} b_i k^{2n-4-i}$$

$$= k^{2n-2} + k^{2n-3} + k^{2n-4} + k^{2n-5} + \cdots + k^{n+1} + k^n + k^{n-1} + b_0 k^{2n-4} + b_1 k^{2n-5}$$

$$+ \cdots + b_{n-5} k^{n+1} + b_{n-4} k^n + b_{n-3} k^{n-1} + b_{n-2} k^{n-2} + \cdots + b_{2n-4} k^0$$

$$= k^{2n-2} + k^{2n-3} + (b_0 + 1)k^{2n-4} + (b_1 + 1)k^{2n-5} + \cdots + (b_{n-5} + 1)k^{n+1}$$

$$+(b_{n-4} + 1)k^n + (b_{n-3} + 1)k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} + \cdots + b_{2n-5}k^1 + b_{2n-4}k^0$$

bulunur. $P(n,k)$ nin toplam doğru sayısının teoremdeki iddiaya uygun olarak,

$$\sum_{i=0}^{2n-2} a_i k^{2n-2-i}$$

olduğunu göstereceğiz. Burada ilk olarak,

$a_0 = 1,$

$a_1 = 1,$

$a_2 = b_0 + 1,$

$a_3 = b_1 + 1,$

$\vdots$

$a_{n-2} = b_{n-4} + 1,$

$a_{n-1} = b_{n-3} + 1$

yani $i < n$ olmak üzere $a_i = \left[\!\left[\frac{i}{2}\right]\!\right] + 1$ olduğunu göstereceğiz:

$a_i = b_{i-2} + 1 = \left(\left[\!\left[\frac{i-2}{2}\right]\!\right] + 1\right) + 1 = \left(\left[\!\left[\frac{i}{2} - 1\right]\!\right] + 1\right) + 1 = \left[\!\left[\frac{i}{2}\right]\!\right] + 1$ buluruz.

İkinci olarak,

$a_n = b_{n-2},$

$a_{n+1} = b_{n-1},$

$a_{n+2} = b_n,$

$\vdots$

$a_{2n-3} = b_{2n-5},$

$a_{2n-2} = b_{2n-4}$

yani $i \geq n$ olmak üzere $a_i = n - \left[\!\left[\frac{i+1}{2}\right]\!\right]$ olduğunu göstereceğiz:

$$a_i = b_{i-2} = \left((n-1) - \left[\!\left[\frac{i-2+1}{2}\right]\!\right]\right) = n - 1 - \left(\left[\!\left[\frac{i}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right]\!\right]\right)$$

$$= n - 1 - \left((-1) + \left[\!\left[\frac{i+1}{2}\right]\!\right]\right) = n - \left[\!\left[\frac{i+1}{2}\right]\!\right] \text{ dir. } \square$$

KAYNAKLAR

Kaya, R. 2005. Projektif Geometri. Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 392s.

Fraleigh, J.B. 1989. A First Course in Abstract Algebra. Addison Wesley P.C., USA, 518pp.

Batten, L.M. 1986. Combinatorics of Finite Geometries. Cambridge Press,U.K.,193pp.

Bennett, M.K. 1995. Affine and Projective Geometry. John Wiley and SONS, INC., New York, 173pp.

Hirschfeld, J.W.P. 1998. Projective Geometries over Finite Fields. Oxford Science Publications., New York, 555pp.

Beutelspacher, A., Rosenbaum, U. 1998. Projective Geometry. Cambridge University Press, U.K., 258pp.

Stevenson, F.W. 1972. Projective Planes. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 415pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayça BAYRAKTAR

Doğum Yeri ve Tarihi : Bursa, 1986

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bursa Kız Lisesi

Lisans : Uludağ Üniversitesi

Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Birey Dershanesi 2006-2007

Milli Eğitim Bakanlığı 2010-2011

İletişim: ayca.byrktr@gmail.com