



T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RULMANLI YATAKLARDA
HERTZ BASINÇLARININ HESABI

Osman GÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA 2010



T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RULMANLI YATAKLARDA
HERTZ BASINÇLARININ HESABI

Osman GÜN
Prof. Dr. Emin GÜLLÜ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA 2010

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RULMANLI YATAKLARDA
HERTZ BASINÇLARININ HESABI

Osman GÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez .../.../20... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Emin GÜLLÜ

Prof.Dr. Reşat ÖZCAN

Prof.Dr. Adem DOĞANGÜN

Danışman

ÖZET

Rulmanlar standartlaştırılmış makine elemanlarıdır. Temas yüzey boyutu elemanların diğer boyutlarından çok küçük olduğunda yüzey basınçları yerine rulmanların ömrünün azalmasında çok etkili olan Hertz Basınçları meydana gelir ve bu Hertz Basınçları çok fazlaysa rulmanın ömrü azalır ve çok kısa kullanma zamanından sonra değiştirilmesi gerekir. Bu ayrıca makine ve makinenin kullanıldığı prosesi etkiler.

Bu tezde rulmanlardaki Hertz Basıncı'nın sabit bilyalı ve silindirik makaralı rulmanlardaki etkilerini ve bilya ve makara büyüklüklerinin değiştirilmesiyle ne gibi sonuçlar verdiği, yuvarlanma elemanlarında ve bileziklerde meydana gelen elastik deformasyonlar Matlab programıyla incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hertz Deformasyonu, Temas Basıncı, Sabit Bilyalı Yatak, Makaralı Yatak

ABSTRACT

Bearings are standardized machine elements. Because of very smaller contact area size which has very big effects on bearing deformation occurs instead of contact pressures and if Hertz Pressures are so much it makes the bearing life decrease and needs to change bearing after short time usage. This also effects the machine and all preses which machine is using in.

In this thesis, the effect of Hertz Pressure on ball bearrings and roller bearrings, the results of changing the ball and roller sizes, deformations of rolling elements were researched with Matlab Software.

Key Words: Hertz Deformation, Contact Stress, Ball Bearings, Roller Bearings

İÇİNDEKİLER

1-GİRİŞ	1
2-KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	6
2.1. Konuyla İlgili Yapılan Teorik Çalışmalar	7
2.1.1. Çizgi Teması.....	8
2.1.2. Nokta Teması	9
2.2. Konuyla İlgili Yapılan Deneysel Çalışmalar	10
2.2.1. Çizgi Teması	10
2.2.2. Nokta Teması	11
2.3. Teorik ve Deneysel Sonuçların Derlenmesi.....	12
2.3.1. Teorik Sonuçların Derlenmesi	12
2.3.2. Deneysel Sonuçların Derlenmesi.....	13
3- ÇÖZÜM SIRASINDA KULLANILACAK OLAN TEMEL	
DENKLEMLER.....	16
3.1. Elastik Deformasyon Denklemi	16
3.1.1. Yer Değiştirme Potansiyeli	20
3.1.2. Love Yer Değiştirme Fonksiyonu	22
3.1.3. Yarı Sonsuz Bir Cisme Noktasal Bir Normal Yükün	
Etki Etmesi Durumu	23
3.1.4. Yarı sonsuz Bir Cismin Sınır Yüzeyine Yayılı	
Normal Yükün Etki Etmesi Durumu.....	27
3.1.5. Temas Halinde Bulunan İki Küresel Cisim	
Arasındaki Basınç	33
3.2. Reynolds Denklemi	39
3.3. Geometrik Denklem	39
3.4. Yağın Hal Denklemleri	41
3.4.1. Yoğunluk.....	41
3.4.2. Viskozite	45
3.5. Denklem Sistemi.....	47
4- MATERYAL ve YÖNTEM	49

4.1. Temel Hesaplamalar	49
4.2. Basınç Dağılımının Oluşturulması	52
4.3. Elastik Deformasyonun Oluşturulması	53
4.4. En Küçük Aralık Uzaklığı " h_0 "'ın Hesaplanması	57
4.5. Deformasyondan Aralık Konturu " $h(x,y)$ "'nin Hesaplanması	59
4.6. Katsayıların Hesaplanması	59
4.7. Denklem Sisteminin Oluşturulması	62
4.8. Basınç Dağılımları Arasında Yaklaşım Yapılması.....	67
4.9. Aralık Hattının Reynolds Denkleminden Hesaplanması.....	68
4.10. Basınçların Değişimi	70
5- ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMALAR.....	72
5.1. Temasın Başlangıç Durumunda Meydana Gelen ve Sadece Hertz Deformasyon Denklemine Dikkate Alındığı Hal	72
5.1.1. Sabit Bilyalı Rulmanlar için Kullanılan Seçenekler ve Bulunan Sonuçlar	72
5.1.2. Silindirik Makaralı Rulmanlar İçin Kullanılan Seçenekler ve Bulunan Sonuçlar	80
5.1.3. Sonuçların Karşılaştırılması.....	85
KAYNAKLAR	87
EK Hesaplamalar İçin Matlab'da Yazılan Kodlar	89
ÖZGEÇMİŞ.....	99

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	Denklem 2.14' de A olarak gösterilen sayıların Değerleri.....	13
Çizelge 2.2	Denklem2.15' de A olarak gösterilen sayıların Değerleri.....	13
Çizelge 2.3	Denklem 2.16' da A olarak gösterilen sayıların çizgi teması için değerleri.....	14
Çizelge 2.4	Denklem 2.16' da A olarak gösterilen sayıların nokta teması için değerleri.....	14
Çizelge4.1	φ Açısına göre ξ , ϑ ve $\frac{2K}{\pi \cdot \xi}$ değerleri	52
Çizelge 5.1	Sabit bilyalı rulmanlar için sonuçlar.....	73
Çizelge 5.2	Sabit bilyalı rulmanlar için sonuçlar (D = 63 Dış Bilezik Çapı Artırılmış)	74
Çizelge 5.3	Sabit bilyalı rulmanlar için sonuçlar (D = 64 Dış Bilezik Çapı Artırılmış)	74
Çizelge 5.4	Silindirik makaralı rulmanlar için sonuçlar	81

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Yuvarlanma Elemanına Göre Rulmanlar.....	1
Şekil 1.2	(N) Serisi silindirik makaralı rulman.....	4
Şekil 1.3	(NU) Serisi silindirik makaralı rulman.....	4
Şekil 2.1	Tamamen rijit olmayan silindir ve yüzey	6
Şekil 2.2	Abartılmış deplasman yapmış iki cisim.....	6
Şekil 2.2.a	Tepe Basıncı Değişimi.....	7
Şekil 2.3	İki silindir arasındaki temas gerilmesi.....	8
Şekil 2.4	Dikdörtgensel temas yüzeyindeki basınç dağılımı (Peter Brüser 1972)	9
Şekil 2.5.	Elasto-hidrodinamik yağ probleminde ERTEL-GRUBIN modeli (1949).....	9
Şekil 2.6.	Eliptik temas yüzeyindeki basınç dağılımı (Brüser 1972).....	10
Şekil 3.1.1	Silindirik koordinatlarda incelenmek üzere alınan eleman	17
Şekil 3.1.2	Eleman üzerinde gerilme bileşenlerinin gösterilmesi	17
Şekil 3.1.3	Yarı sonsuz bir cisme bir normal yükün etmesi durumu.....	23
Şekil 3.1.4	Yarı sonsuz bir cisme yayılı yükün etki etmesi durumu.....	27
Şekil 3.1.5	Yük alanı sınırı içerisindeki bir noktanın incelenmesi,.....	29
Şekil 3.1.6	Yük alanı merkezi altındaki gerilme bileşenlerinin İncelenmesi.....	31
Şekil 3.1.7	Temas halinde bulunan iki küresel cisim.....	33
Şekil 3.3.1	Deforme olmamış bir cisim ile düzlem arasındaki Mesafe.....	39
Şekil 3.3.2	Deforme olmuş bir cisim ile düzlem arasındaki mesafe	41
Şekil 3.4.1	Bazı yağların yoğunluklarının sıcaklıkla değişimi.....	44
Şekil 3.4.2	Mineral yağlar İçin yoğunluğun basınçla değişimi.....	44
Şekil 3.4.3	Bazı yağların viskozitelerinin sıcaklıkla değişimi.....	46
Şekil 3.4.4	Mineral yağlar için viskozitenin basınçla değişimi.....	47

Şekil 4.1	İki yuvarlanma cisminin yarıçaplarının izahı	50
Şekil 4.2	Eliptik Hertz temas yüzeyi için örnek bir ağ yapısının oluşturulması.....	53
Şekil 4.3	Komşu düğüm noktaları sistemi.....	61
Şekil 4.4	Basınç için katsayılar matrisinin yerleştirme şeması.....	64
Şekil 4.5	15 düğüm noktasından oluşan örnek bir ağ yapısı	65
Şekil 4.6	15 düğüm noktalı bir ağ yapısı için katsayılar matrisi	66
Şekil 4.7	Basınçlar arasındaki yaklaşımın algoritması.....	67
Şekil 4.8	Yağ filmi kalınlığı için katsayılar matrisini yerleştirme şeması.....	70
Şekil 5.1	Sabit bilyalı yatakların boyutları.....	72
Şekil 5.2	Silindirik makaralı yatakların boyutları.....	80
Grafik 1.	Bilyanın Gerilme Grafiği.....	74
Grafik 2.	Bileziğin Gerilme Grafiği.....	75
Grafik 3.	“a” ve “b” Yarıçaplı Eksende Hertz Basınç Dağılımı.....	75
Grafik 4.	“a” Yarıçaplı Eksende Hertz Basıncı.....	76
Grafik 5.	“b” Yarıçaplı Eksende Hertz Basıncı.....	76
Grafik 6.	Bilyadaki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı.....	77
Grafik 7.	Bilyadaki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı...77	
Grafik 8.	Bilyadaki Deformasyonun “b” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı...78	
Grafik 9.	Bilezikteki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı.....	78
Grafik 10.	Bilezikteki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı..79	
Grafik 11.	Bilezikteki Deformasyonun “b” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı..79	
Grafik 12.	Makaranın Gerilme Grafiği.....	81
Grafik 13.	Bileziğin Gerilme Grafiği.....	82
Grafik 14.	“a” ve “b” Yarıçaplı Eksende Hertz Basınç Dağılımı.....	82
Grafik 15.	Makaradaki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı.....	83
Grafik 16.	Makaradaki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı...83	
Grafik 17.	Bilezikteki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı.....	84
Grafik 18.	Bilezikteki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı....84	

SİMGELER DİZİNİ

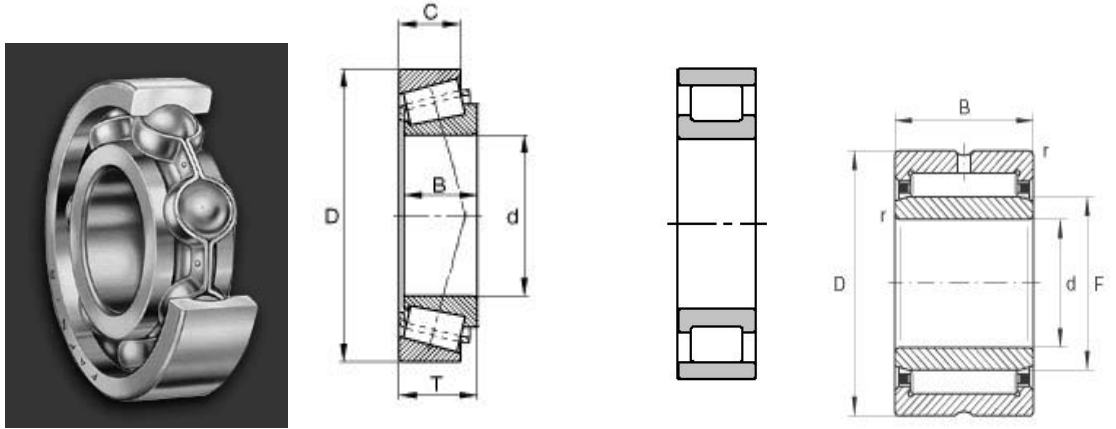
a	Eliptik Hertz temas yüzeyinin y-doğrultusundaki yarıçapı
b	Eliptik Hertz temas yüzeyinin x-doğrultusundaki yarıçapı
h	Yağ filmi kalınlığı
h_0	Temas yüzeyinin orta noktasındaki film kalınlığı
h_{min}	En küçük film kalınlığı
i	y-doğrultusundaki matris değişkeni
i_{min}	Basınç alanındaki en küçük i değeri
i_{max}	Basınç alanındaki en büyük i değeri
j	x-doğrultusundaki matris değişkeni
j_{min}	Basınç alanındaki en küçük j değeri
j_{max}	Basınç alanındaki en büyük j değeri
l	Silindir uzunluğu
m	x-doğrultusundaki adım aralığı
P	Basınç değeri
P_0	En büyük veya Hertz basınç değeri
P_m	Ortalama basınç değeri
r	Polar koordinatı
t	y-doğrultusundaki adım aralığı
t	zaman
u,v,w	x,y,z yönlerindeki hız bileşenleri
w	Elastik deformasyon miktarı
w'	Kuvvetin etki ettiği noktadaki deformasyon miktarı
x	Yuvarlanma doğrultusundaki koordinat eksenini
y,z	Yuvarlanmaya dik doğrultudaki koordinat eksenleri
E	Elastisite Modülü
E'	Eşdeğer Elastisite Modülü
F	Normal doğrultuda etki eden kuvvet
H	Film kalınlığını bulmak için kullanılan parametre
K	Hertz Sabiti
M	j -doğrultusundaki nokta adeti
N	i-doğrultusundaki nokta adeti
R	yuvarlanma cisminin yarıçapı
R_x	Yarıçapın x-doğrultusundaki bileşeni
R_y	Yarıçapın y-doğrultusundaki bileşeni
U	Yuvarlanma cisminin yuvarlanma doğrultusundaki hızı
U'	Eşdeğer hız
α	Birim kuvvet başına düşen alan
η	Dinamik viskozite
η_0	Atmosfer basıncındaki dinamik viskozite
μ, ν	Poisson Oranı
ρ	Yağın yoğunluğu
ρ_0	Atmosfer basıncındaki yağ yoğunluğu
ψ	Archard' in eliptiklik faktörü
ω	Hertz'e göre temas yüzeyleri arasındaki açı

1. GİRİŞ :

Rulman yada yuvarlanma elemanlı yatak adıyla tanıdığımız yataklar standartlaştırılmış makine elemanlarıdır.

Rulman üreticilerinin hazırladıkları kataloglarda, aynı mil çapında daha büyük yük taşıma özelliğine sahip çeşitlerin bulunması ve standartlaşmış basit hesap yöntemleri ile kolay seçilebilmesi özelliklerinden dolayı, rulmanlı yataklar konstrüktörler tarafından sıkça kullanılırlar.

Biri dönen, diğeri sabit iki makine parçası arasında kuvvet iletimini, bu iki parçaya oturacak şekilde montajı yapılan iki bileziğin arasına yerleştirilmiş, yuvarlanma elemanlarının yuvarlanma (dönme+kayma) hareketi sayesinde, çok az bir sürtünmeyle sağlayan rulmanlar, yuvarlanma elemanının geometrisine göre, bilyalı, silindirik makaralı, konik makaralı, masuralı v.b. diye sınıflandırılmışlardır.



a) Bir Sıra Bilyalı b)Konik Makaralı c) Silindirik Makaralı d) Masuralı

Şekil 1.1 : Yuvarlanma Elemanına Göre Rulmanlar

Rulmanlar da kaymalı yataklarda olduğu gibi, bir zamanlar Radyal ve Eksenel olarak iki kısma ayrılmıştır. Ancak böyle bir sınıflandırma, rulmanlarda açıklık sağlayamamaktadır. Çünkü aslında radyal kuvvet taşımak üzere yapılmış olan rulmanlar büyük miktarda eksenel kuvvet de taşıyabilmekte ve hatta bazı hallerde eksenel yataklara üstün duruma geçmektedirler. Bu sebepten dolayı yuvarlanma elemanının geometrisine göre sınıflandırma yapmak daha uygundur.

Makina veya cihazların konstrüksiyonunda rulman delik çapı birçok durumda önceden bellidir. Diğer ana boyutların (dış çap, genişlik) ve rulman tipinin tayini için

rulman seçimi hesabı yapılarak ömür, statik emniyet ve ekonomiklik yönlerinden istenilen şartları sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Bu seçim hesabında rulmana etkiyen yükler rulmanın yük sayısı ile karşılaştırılır. Boyutlandırmada temel ayırım rulmanın statik mi yoksa dinamik mi yüklendiğine göre yapılır. Duran (bilezikler birbirlerine göre hareketsiz) veya yavaş dönen rulmanlar ($n < 10$ d/d) statik olarak yüklenirler. Bu durumda, hareket yollarının ve yuvarlanma elemanlarının aşırı deformasyona karşı emniyeti kontrol edilir. Rulmanların çoğu dinamik yük altında çalışırlar. Bilezikler birbirlerine göre hareketlidir. Boyutlandırma hesabı yardımıyla hareket yollarının ve yuvarlanma elemanlarının yorulma mukavemetleri kontrol edilir. DIN ISO 281'e göre olan nominal ömür sadece özel hallerde gerçekten erişilebilen çalışma sürelerini verir. Ekonomik bir konstrüksiyon rulmanın kapasitesinin tam olarak kullanılabilmesi halinde elde edilebilir. Böyle bir durum ne kadar çok arzu ediliyorsa, rulman seçimi de o kadar çok önem kazanır.

Statik yüklenme endeksi f_s 'nin değeri uygun boyuttaki rulmanın seçilmesinde yol gösterir.

f_s = Statik yüklenme endeksi

C_o = statik yük sayısı

P_o = statik eşdeğer yük

Statik yüklenme endeksi f_s yuvarlanma elemanlarının temas yüzeylerinde kalıcı biçim değişmelerine karşı bir emniyet faktörüdür. Rulmandan düzgün çalışma kalitesi ve çok düşük gürültü seviyesi isteniyorsa yüksek bir f_s değeri gereklidir. Normal bir gürültü seviyesi yeterli ise küçük f_s değerleri kullanılabilir. Çoğunlukla aşağıdaki değerler uygulanabilir:

$f_s = 1.5 \dots 2.5$ yüksek sessizlik

$f_s = 1.0 \dots 1.5$ normal sessizlik

$f_s = 0.7 \dots 1.0$ düşük sessizlik

Eksenel oynak makaralı rulmanlar için değerler bu rulmanların katalog tabloları bölümünün ön kısmında verilmiştir. C_o statik yük sayısı [kN] her rulman için tablolarda verilmiştir. Bu değerdeki bir yük (radyal rulmanlarda radyal, eksenel rulmanlarda eksenel ve merkezi) yuvarlanma elemanı ile hareket yolu arasındaki temas yüzeyinin orta noktasında yüzey basıncına neden olur.

Bu basınç değeri (p_0):

Oynak bilyalı rulmanlar için 4600 N/mm^2

Diğer bütün bilyalı rulmanlar için 4200 N/mm^2

Diğer bütün makaralı rulmanlar için 4000 N/mm^2 'dir. (FAG Rulman Katalogu)

C_0 yükünün etkisiyle ($f_s = 1$ için uygundur) en fazla yüklenmiş durumdaki temas bölgesinde yuvarlanma elemanı ve hareket yolu, yuvarlanma elemanı çapının $1/10.000$ 'i ölçüsünde plastik şekil deformasyonuna uğrar.

Dinamik yüklenen rulmanlar için standart hesaplama yöntemi, malzeme yorulmasının bozulma nedeni olarak alınmasına dayanır. Anma ömrü aşağıdaki formülle hesaplanır:

L_{10} - L nominal ömür [10^6 devir]

C - dinamik yük sayısı [kN]

P - dinamik eşdeğer yük [kN]

p - ömür üssü

Anma ömrü L_{10} milyon devir olarak elde edilir. Geniş bir grup içindeki aynı tip rulmanların % 90'ı bu ömre ulaşır veya bunu geçer. Dinamik yük sayısı C [kN] her rulman için tablolarla verilmiştir. Rulmanlara dinamik yük uygulanırsa, bu rulmanın ömrü $L_{10} 10^6$ devir olur.

Dinamik eşdeğer yük P [kN] büyüklüğü ve yönü sabit, radyal rulmanlarda radyal yük, aksel rulmanlarda ise aksel yük olup hesapla bulunan bir değerdir. P, gerçekten etkiliyen karma yük ile aynı ömrü verir.

Bu tez konusu içerisinde Eliptik Hertz Temas Yüzeyi'nin meydana geldiği *Bilyalı Rulmanlar* ile Dikdörtgensel Hertz Temas Yüzeyi'nin meydana geldiği *Silindirik Makaralı Rulmanları* inceleyeceğiz.

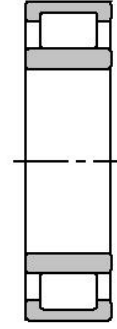
Şekil 1.1.' de gösterilen bir sıra bilyalı rulmanlar, milin eğilmesi sonucunda sıkışma tehlikesi olmayan hallerde kullanılmaya elverişlidir. Her iki bilezikte bilyaların hareketi için açılmış yivler oldukça derindir. Gerek radyal ve gerekse aksel kuvvet taşıyabilirler. İki sıralı yatağa göre daha fazla tercih edilirler çünkü iki sıralı bilyalı rulmanlarda yükün her iki bilya sırasına yayılış şekli güvenle tayin edilemez. İki sıralı

bir yatağın, aynı büyüklükteki bir sıralı yataktan yalnız % 50 daha fazla yüklenebileceği deneylerle anlaşılmıştır.

Silindirik makaralı rulman, dış boyutları aynı olan bir sıra bilyalı radyal yataktan daha fazla, yaklaşık iki kat yük kaldırır. Yatak büyüdükçe bu kapasite farkı da hayli artar. Bu yataklar ağır ve darbeli işletmelerde ve az yer işgal etmesi gereken hallerde maksada elverişlidir. Dar serilerde, makaraların çapı boyuna eşittir. Geniş serilerde ise bu oran ortalama 1:1,5 değerindedir. Makaraların gidişatı ya iç yada dış bilezikteki bordür ile sağlanır. Bordürün iç bilezikte bulunduğu yataklar iç bordürlü yataklar (N) (Şekil 1.2), dış bilezikte bulunduğu yataklar dış bordürlü yataklar (NU) (Şekil 1.3) olarak iki gruba ayrılırlar. Bordürsüz bilezikler hafif bombeli bir hareket yüzeyine sahip olup yatak içerisinde ufak bir eksenel kaymaya müsaade ederler.



Şekil 1.2 : (N) Serisi Silindirik Makaralı Rulman



Şekil 1.3 : (NU) Serisi Silindirik Makaralı Rulman

Rulmanlarda olduğu gibi temasta bulunan iki yüzey arasında meydana gelen gerilmelere *yüzey gerilmeleri* denir. Aslında basınç şeklinde olan bu gerilmeler ile basma gerilmeleri arasında şu fark vardır. Basma gerilmeleri kuvvetin etkisi altında bir elemanın kesitinde meydana gelen gerilmelerdir ve mukavemet esaslarına göre kuvvet-gerilme denge denklemlerinden elde edilir. Yüzey gerilmeleri ise, kuvvetin etkisi altında temas yüzeylerinde meydana gelen gerilmelerdir ve aslında temas yüzeylerinin büyüklüğüne bağlı olmak üzere iki şekildedir. Temas yüzeylerinin ve elemanlarının boyutları aynı mertebede olduğu takdirde *yüzey basıncı*, temas yüzeylerinin boyutları elemanların diğer boyutlarına oranla pek küçük değerlerde bulunmaları halinde *Hertz Basıncı* söz konusudur. Bu yüzey basınçları arasındaki fark yalnız tanımlama

bakımından değil, yüzey basınçlarının tayininden de ileri gelir. Yüzey basınçları basma gerilmelerine benzer bir bağıntı ile hesaplanırken, Hertz Basınçları, Elastisite Teorisi'nin esaslarına göre tayin edilir.

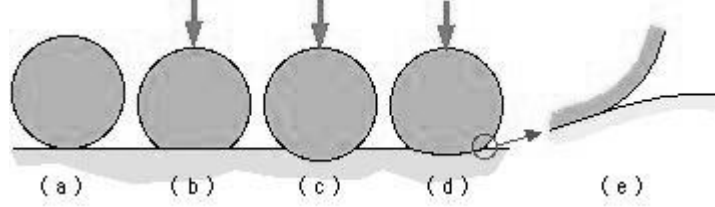
İki eleman arasındaki teorik temas noktasal veya çizgisel olduğu takdirde, dış kuvvetlerin etkisi altında meydana gelen deformasyon sonucunda, teorik nokta daire veya elips, teorik çizgi ise dikdörtgen şeklini alır. Teknikte bu çeşit elemanlara rulmanlarda, dişli çarklarda, sürtünme çarklarında ve kam mekanizmalarında rastlanır. Yüzeydeki basınçlar ve deformasyonlar Hertz Teorisi'ne göre hesaplanır. Bu teori şu kabulleri yapmaktadır:

- Temas yüzeylerinin boyutları elemanların diğer boyutlarına göre çok küçüktür.
- Deformasyonlar, elastik deformasyon şeklindedir.
- Hooke Kanunu geçerlidir.
- Temas yüzeylerinde kayma yoktur.

Birbiri üzerinde yuvarlanan ve normal doğrultuda bir kuvvetle birbirine bastırılan iki elastik yuvarlanma elemanın yüzeylerinde bir yassılma durumu ortaya çıkar. Deformasyon nedeniyle farklı eğrilik yarıçaplarının sonucu olarak kaymasız bir yuvarlanma hareketinde dahi, hiçbir relatif hareketin mevcut olmadığı temas yüzeylerinin belirli yerlerinde bile mikro çukurlara yol açan çeşitli teğetsel şekil değişimleri meydana gelir. İşte buralarda oluşan dairesel, eliptik veya silindiriksel temas yüzeyleri Hertz Teorisine göre açıklanmaktadır. Bununla beraber yuvarlanan cisimleri pratikte daha uzun süre hasara uğramadan kullanabilmek için, birbiri üzerinde hareket eden dış yüzeyler arasındaki metalik temas sayısını azaltması, ve böylelikle sürtünme ve aşınmayı küçük tutması için bir yağ filmi gereklidir. Yağlamanın tip ve miktarı uygulama durumuna ve çevre şartlarına bağlıdır. Bu yağlayıcı madde ile daha büyük çevre hızlarında yuvarlanan cisimler arasında dış yüzeyleri kısmen veya tamamen ayıran hidrodinamik bir yağ filmi oluşur.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI :

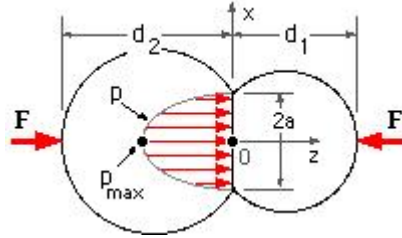
Köşe,silindir,küre gibi teorik olarak rijit yapılarda gerilmeler, temas alanı olmadığından sonsuzdurlar. Ancak gerçekte hiç biri tamamıyla rijit değildir,temas eden kısımlar deforme olur.



Şekil 2.1. Tamamen rijit olmayan silindir ve yüzey

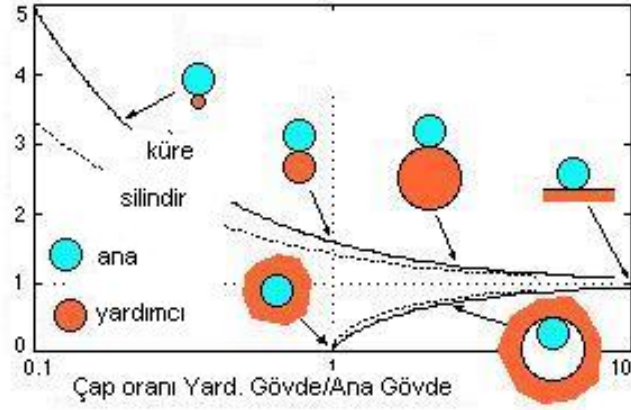
Elastisite, serbest sınırlardan ortak yüzeye kademeli geçiş gerektirir. Metal yüzeyler arasındaki temas yüzeyi çok küçüktür fakat sıfır değildir ve gerilmeler burada çok büyüktür.

Gösterilen iki küre veya L uzunluğundaki silindirlerin abartılı deformasyonlarıdır. İki parçada deforme olmuştur,yüzeysel temasın olduğu mesafe z eksenine göre simetriktir ve toplam $2a$ uzunluğundadır. Temas basıncı ve yükün şiddeti bu eksen üzerinde maksimumdur.



Şekil 2.2. Abartılmış Deplasman yapmış iki cisim

Gerilmeler tepe temas basıncıyla orantılıdır. Tepe temas basıncı iki gövdenin temas eden boyutuna göre değişir. Eğer ana gövde (silindir veya küre), çapı değişken yardımcı bir gövdeyle temas ediyorsa tepe basıncı gösterildiği gibi değişir.



Şekil.2.2.a. Tepe Basıncı Değişimi

Rulmanlarda silindirik bilezik yüzeyi yerine simit geometrisinden yararlanarak gerilmeler azaltılır.

2.1. Konuyla İlgili Yapılan Teorik Çalışmalar :

Elasto-hidrokinamik problemin teorik olarak incelenebilmesi için Reynolds' un geliştirmiş olduğu akışkan ortamının hidrodinamik özelliklerinin ve Hertz' in öncülüğünü yaptığı yuvarlanan cisimlerin elastik özelliklerinin aynı zamanda bilinmesi gerekir. Buna ek olarak yağlayıcı maddede yoğunluk ile basınç ve sıcaklık arasındaki ve viskozite ile basınç ve sıcaklık arasındaki değişimler de incelenmelidir. Bunlardan başka yüzeylerdeki ısı geçişi ve akışkanın ısı iletkenliği gibi termik olaylar da sonucu etkilerler. Bu problemin çözümü için yapılan deneylerde en küçük yağ filminin tayini ön plana çıkmaktadır. Çünkü bu, yağlanan makine elemanının değerlendirilebilmesi için en önemli karakteristik büyüklüktür. Yapılan çalışmaların daha kolay anlaşılabilmesi için yuvarlanan cisimler arasındaki temas, çizgi teması ve nokta teması olarak iki grup halinde aktarılmıştır.

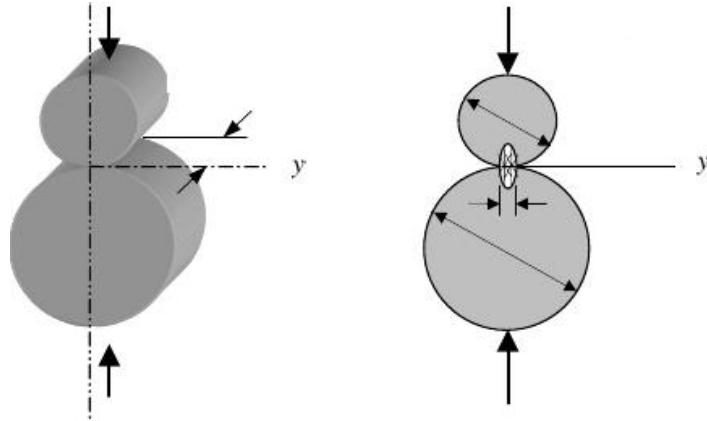
Bu bölümde kullanılacak olan denklemlerde belirtilen simgelerin ifadeleri şöyle açıklanabilir:

h = Yağ filmi kalınlığı, mm

h_o = Temas yüzeyinin orta noktasındaki yağ filmi kalınlığı, mm

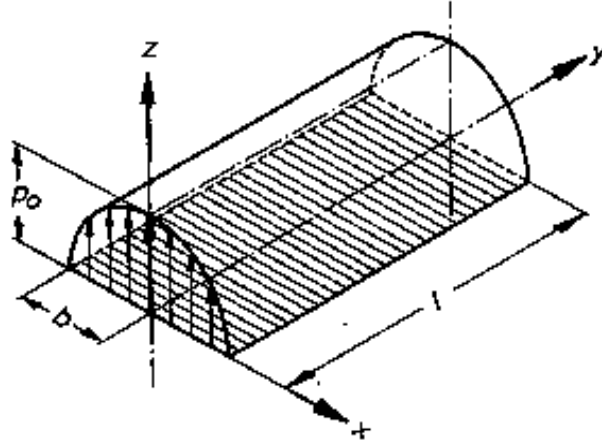
- R = Yuvarlanma cisminin yarıçapı, mm
 R_x = $1/(1/R_1+1/R_3)$ Yarıçapın x-doğrultusundaki bileşeni, mm
 R_y = $1/(1/R_2+1/R_4)$ Yarıçapın y-doğrultusundaki bileşeni, mm
 R' = $1/(1/R_x \pm 1/R_y)$ Eşdeğer yarıçapı, mm
 α = Birim kuvvet başına düşen alan, mm^2/N
 E = Elastisite Modülü, N/mm^2
 E' = $2/\left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right]$ Eşdeğer Elastisite Modülü, N/mm^2
 η_o = Atmosfer basıncındaki dinamik viskozite, Pa.s
 U = Yuvarlanma cisminin yuvarlanma doğrultusundaki hızı, mm/s
 U' = $0,5.(U_1+U_2)$ Eşdeğer hız, mm/s
 F = Normal doğrultuda etki eden kuvvet, N
 l = Temas boyunca silindir uzunluğu, mm

2.1.1. Çizgi Teması :



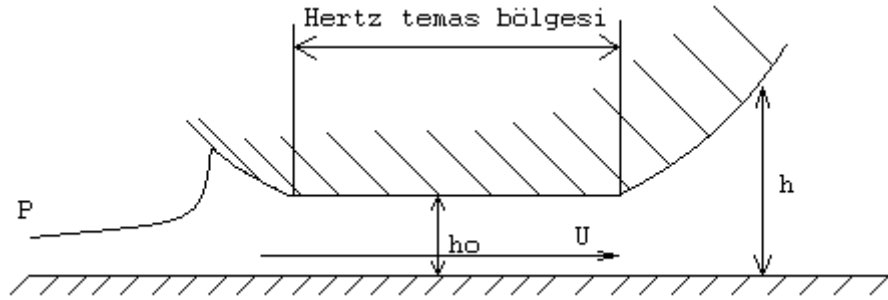
Şekil 2.3. İki silindir arasındaki temas gerilmesi

Şekil 2.1'den de görüldüğü gibi, bu çeşit temas şekline iki silindirin birbiri üzerinde yuvarlanması sırasında rastlanır. Ancak birbirlerine göre relatif iki bölge arasındaki bu incelemelerin pek çoğu sadece iki sonsuz uzun silindir arasındaki çizgi temasıyla meşgul olmaktadır. Burada teoriksel bir ifade olan çizgi teması ile dikdörtgensel bir deformasyon kastedilmektedir.



Şekil 2.4. Dikdörtgensel temas yüzeyindeki basınç dağılımı (Peter Brüser 1972)

Pratikte birçok veri bu durumun uygun olduğunu göstermektedir. Ayrıca yanlardan yağ akışının terki ile problemi iki boyutlu bir hale indirgeme önemli bir basitleştirmeyi sağlamaktadır. Bunun yanında bu konudaki mevcut bilgilerin çoğu ERTEL-GRUBIN modeli üzerine oluşturulurlar. Yani yağın mevcudiyetine rağmen yuvarlanan cisimlerin elastik deformasyona uğradığı kabulüne göre işlemler yapılır.

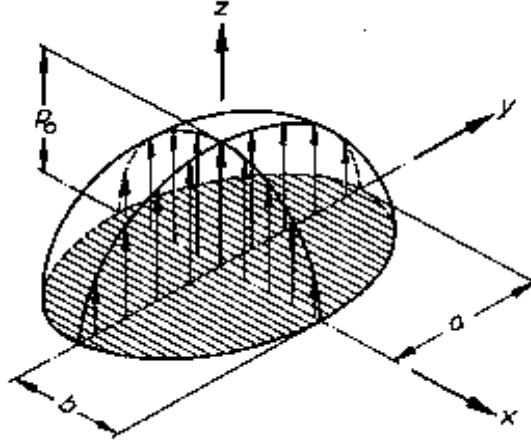


Şekil 2.5. Elasto-hidrodinamik yağ probleminde ERTEL-GRUBIN modeli (1949)

2.1.2. Nokta Teması :

Bu tip temaslara iki küresel veya bir küresel ile bir silindiriksel veya bir küresel ile bir düzlemsel veya birbirlerine dik bir şekilde konumlandırılan iki silindiriksel, yuvarlanma elemanının birbirleri üzerinde yuvarlanmaları sırasında rastlanılır. Nokta

teması şeklinde bir tanımlama tam olarak doğru olmamakla beraber, bu temaslar sonucunda oluşan deformasyonlar daire veya elips şeklindedir, ve bu yüzden bu tip deformasyonlar teorik nokta şeklinde ifade edilirler.



Şekil 2.6. Eliptik temas yüzeyindeki basınç dağılımı (Brüser 1972)

2.2. Deneysel Çalışmalar :

2.2.1. Çizgi Teması :

Çizgi temaslı Elasto-Hidrokinamik kontakta yağ kalınlıklarının ölçülmesine dair pek çok yayın bulunmaktadır. Burada ilk etapta 4 araştırma enstitüsünün raporları hakkında bilgi verilecektir.

a) Research Laboratory, Associated Electrical Industries, Aldermaston, Berkshire, England :

İlk sistematik ölçmeler 1961 yılında CROOK tarafından yapılmıştır. İki diskli deney standında yağ kalınlığı, diskler ve kayma pabuçları arasındaki kapasitif dirençler yardımıyla ölçülmüştür. Deneyler sonucunda şu sonuca ulaşılmıştır: (Brüser 1972)

$$\frac{h_o}{R} = 4,2 \cdot 10^6 \cdot (U' \cdot \eta)^{0,5} \quad (2.1)$$

b) Batelle Memorial Institute, Columbus, Ohio, U.S.A :

SIBLEY ve ORCUTT deneylerinde iki disk arasındaki yağ filmi kalınlığını ölçmek için röntgen ışınları kullanmışlar ve şu sonuca ulaşmışlardır. (Brüser 1972)

$$\frac{h_o}{R'} = 0,112 \cdot \left[\frac{\alpha \cdot \eta_o \cdot U'}{R'} \right]^{0,727} \cdot \left[\frac{F}{l \cdot E' \cdot R'} \right]^{-0,364} \quad (2.2)$$

c) Technische Universitaet, Trondheim, Norwegen :

CHRISTENSEN, bir kayma pabucunun ötelenmesi yardımıyla yağ debisinden hareketle iki disk arasındaki minimum yağ kalınlığı için şu formülü bulmuştur. (Brüser 1972)

$$\frac{h_o}{R'} = 1,4 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{F}{l} \right)^{-0,2} \cdot (\eta_o \cdot U')^{0,83} \quad (2.3)$$

d) Shell Research, Thorton, Chester, England :

DYSON, NAYLOR ve WILLSON' un çok kapsamlı deneylerinde, her biri 76,2mm çapa sahip olan iki disk arasındaki kapasite direkt olarak ölçülmüş ve burada çeşitli yağlar kullanılarak 0,4 – 6 m/s' lik hızlar için ve 2,2 – 2,6 kp/mm², lik yüklerde şu sonuç elde edilmiştir: (Brüser 1972)

$$\frac{h_o}{R'} = 9,707 \cdot 10^{-7} \cdot (U' \cdot \eta_o)^{0,65} \cdot \alpha^{0,56} \cdot \left[\frac{F}{l \cdot E' \cdot R'} \right]^{-0,15} \quad (2.4)$$

2.2.2. Nokta Teması :

Nokta teması için şimdiye kadar pek az ölçme sonucu mevcuttur. Burada sadece yuvarlanan iki cisim arasında yüzey teması halindeki ölçmeler söz konusu edilecektir.

CAMERON ve GOHAR, çelik bir küre ile bir cam plaka arasındaki film kalınlığını interferans halkası yardımıyla tayin etmişlerdir. Bu bilim adamları azami 50 kp/mm², ye kadar Hertz Basınçları ve 0,5 m/s' ye kadar hızlar için bulmuş oldukları

deney sonuçlarını, teorik olarak türetilmiş olan Denk.2.5 ile mukayese etmişler ve bu denklemin deney sonuçları ile paralellik arz ettiğini tespit etmişlerdir. (Brüser 1972)

$$\frac{h_o}{R'} = 5,81 \cdot \frac{\alpha \cdot \eta_o \cdot U'}{R'} \left[\frac{F}{E' \cdot R'^2} \right] \quad (2.5)$$

ARCHARD ve KIRK deneylerinde dairevi temas yüzeyli bir nokta yükünü gerçekleştirmek için, birbirini dik açıda kesen aynı çap değerine sahip iki silindir kullanmışlardır. Her iki silindirin aynı çevresel hıza sahip olması halinde eşdeğer hızı şöyle hesaplamışlardır. (Brüser 1972)

$$U' = \frac{\sqrt{2}}{2} U \quad (2.6)$$

Bu araştırmacılar çeşitli ölçme metotları kullanmışlar ve her iki silindir arasında direkt kapasite kullanarak yaptıkları ölçüm sonucu şu formülü elde etmişlerdir: (Brüser 1972)

$$h_o = 1,24 \cdot 10^{-5} (\alpha \cdot \eta_o)^{0,57} \cdot U^{0,55} \cdot R^{0,62} \quad (2.7)$$

Deneyleşer şu değerler için yapılmıştır :

$$R = 3 - 40 \text{ mm}$$

$$U = 0,01 - 5 \text{ m/s}$$

$$\alpha \cdot \eta_o = (0,8 - 10) \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

2.3. Teorik ve Deneysel Sonuçların Derlenmesi :

2.3.1. Teorik Sonuçların Derlenmesi :

Teorik neticeler üç boyutsuz grupta ifade edilebilirler. Bu amaçla farklı üstlerle yapılan bir derlemeyi izelge 2.2 ve izelge 2.3 göstermektedir. (Brüser 1972)

a) Çizgi Teması :

$$\frac{h_o}{R'} = A_1 [\alpha.E']^{A_2} \left[\frac{\eta_o.U'}{E'.R'} \right]^{A_3} \left[\frac{F}{l.E'R'} \right]^{A_4} \quad (2.8)$$

Çizelge 2.1. Denklem 2.8' de A olarak gösterilen sayıların değerleri

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
Ertel/Grubin	1,95	0,73	0,73	-0,091
Crook	2,74	0,75	0,75	-0,125
Dowson	2,0	0,6	0,7	-0,13

b) Nokta Teması :

$$\frac{h_o}{R'} = A_1 [\alpha.E']^{A_2} \left[\frac{\eta_o.U'}{E'.R'} \right]^{A_3} \left[\frac{F}{E'R'^2} \right]^{A_4} \quad (2.9)$$

Çizelge 2.2. Denklem 2.9' te A olarak gösterilen sayıların değerleri

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
Archard (Denk.2.6)	1,40	0,74	0,74	-0,074
Cameron (Denk.2.7)	5,81	1	1	-0,33
Cheng (Denk.2.8)	2,21	0,725	0,725	-0,058

2.3.2. Deneysel Sonuçlar Derlenmesi :

Deneysel incelemelerde farklı tanımlanan yük yerine maksimum Hertz Basıncı yani p_o kullanılırsa bütün sonuçlar müşterek bir formülde toplanabilir. Çizelge 2.3 ve Çizelge 2.4 parametrelerin değerlerini göstermektedir. (Brüser 1972)

$$h_o = A_5 \cdot \alpha^{A_6} \cdot \eta_o^{A_7} \cdot U^{A_8} \cdot R^{A_9} \cdot p_o^{A_{10}} \quad (2.10)$$

a) Çizgi Teması :

Çizelge 2.3. Denklem 2.10' da A olarak gösterilen sayıların çizgi teması için değerleri

	A ₆	A ₇	α mm ² /N	A ₈	η_0 cP	A ₉	U m/s	A ₁₀	R mm	A ₁₁	P ₀ kp/mm ²
Crook	$8,0 \cdot 10^{-5}$	0	-----	0,5	14-119	0,5	0,03-10	0	19,05	0	37-63
Sibley	$1,58 \cdot 10^{-3}$	0,73	0,07-0,2	0,73	5-22	0,73	7,6-25,4	0	18,29	-0,73	70-126
Christens.	$8,0 \cdot 10^{-5}$	0	-----	0,83	13	0,83	0,6-6,7	0	19,05	-0,3	21-71
Dyson	$2,87 \cdot 10^{-4}$	0,56	0,1-0,34	0,65	7-310	0,65	0,4-6	0	19,05	-0,3	21-71

b) Nokta Teması :

Çizelge 2.4. Denklem 2.10' da A olarak gösterilen sayıların nokta teması için değerleri

	A ₆	A ₇	α mm ² /N	A ₈	η_0 cP	A ₉	U m/s	A ₁₀	R mm	A ₁₁	P ₀ kp/mm ²
Cameron	$3,17 \cdot 10^{-3}$	1	-----	1	180-800	1	0-0,5	0	12,7	-1	0-50
Archard	$1,24 \cdot 10^{-5}$	0,57	8-98	0,57	8-98	0,55	0,01-5	0,62	3-40	0	-----

Buraya kadar yapılan açıklamalar ile Elasto-Hidrokinamik yağlama ile ilgili tanınmış literatürler derlenmiştir. Görüldüğü gibi bu konuda mevcut bilgilerin büyük bir bölümü ERTEL-GRUBIN modeli üzerine kurulmuşlardır. Yani yağın mevcudiyetine rağmen yuvarlanan cisimlerin elastik deformasyona uğradığı kabulüne göre işlemler yapılır. Bu çok basitleştirilmiş metot denklem sisteminin bir bütün halinde ele alınmasıyla kontrol edilmek zorundadır. Ancak bu esnada matematiksel olarak aşağıdaki problem ortaya çıkar.

Örneğin birbirinden yağ filmiyle ayrılmış, x-ekseni bileşenlerine göre R_1 ve R_3 ile y-ekseni bileşenlerine göre R_2 ve R_4 esas yarıçaplarına sahip keyfi eğrilikli iki cisim x-doğrultusunda $U_1 = U_2 = U$ çevre hızlarıyla birbirleri üzerinde yuvarlanıyor olsunlar. Ayrıca yağ filmine dik bir F kuvveti de etki ediyor olsun. Böyle bir durumda bu kuvvet $P(x,y)$ basınç dağılımının bileşkesiyle dengededir. Bu basınç dağılımı ise cisimlerde bir $w(x,y)$ Elastik deformasyonuna neden olur. Yağ, değişken viskoziteli sıkıştırılabilir bir ortam olarak ele alındığı için, $\rho(x,y)$ yoğunluğu ve $\eta(x,y)$ viskozitesi aynı anda basınç dağılımından etkilenirler. Bu nedenle tanımlanan problem için, yağ aralığı geometrisi $h(x,y)$ ' nin ve basınç dağılımı $P(x,y)$ ' nin hesaplanmasının, denklemlerin komplike münasebetleri ve etkin değişkenlerin sayısının çokluğundan dolayı, kapalı bir matematiksel çözüm ile imkansız olarak görüldüğünden, çözüm nümerik metotlarla yapılmalıdır.

Bu nümerik çözümün yapılabilmesi için öncelikle kullanılması gereken matematiksel denklemlerin ayrıntılı bir şekilde açıklanıp incelenmesi gerekir.

3. ÇÖZÜM SIRASINDA KULLANILACAK OLAN TEMEL DENKLEMLER :

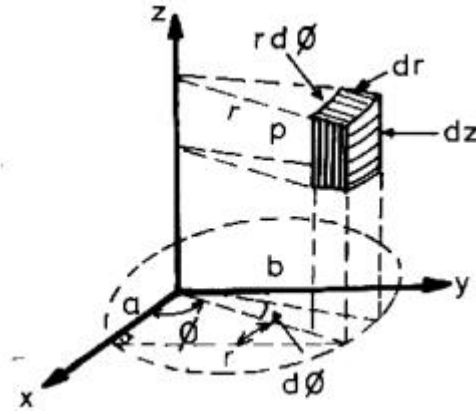
Hertz temas yüzeyleri için ortaya çıkan Elasto-Hidrodinamik yağlama problemi aşağıdaki denklemler yardımıyla çözülebilir :

- a) Elastik Deformasyon Denklemi: Yuvarlanan cismin, yükü ve elastik deformasyonu arasındaki bağıntıyı verir.
- b) Reynolds Denklemi : Hidrodinamik etkiyi dikkate alır.
- c) Geometrik Denklem : Elastik Deformasyonu da kullanarak her hangi bir konumdaki $h(x,y)$ yağ aralığının bulunmasını sağlar.
- d) Yağın Hal Denklemleri : Yoğunluk ve viskozitenin, basınçla değişimini tanımlar.

Kaymasız yuvarlanma olduğu için termodinamik etkilerin göz önüne alınması gereksizdir. Çünkü burada bir hız düşüşü olmadığından sürtünme enerjisinden doğan ısı enerjisi yoktur. Bu nedenle problem izotermik bir durum için incelenebilir. Bu hipotezler pek çok kez tecrübe ile doğrulanmışlardır.

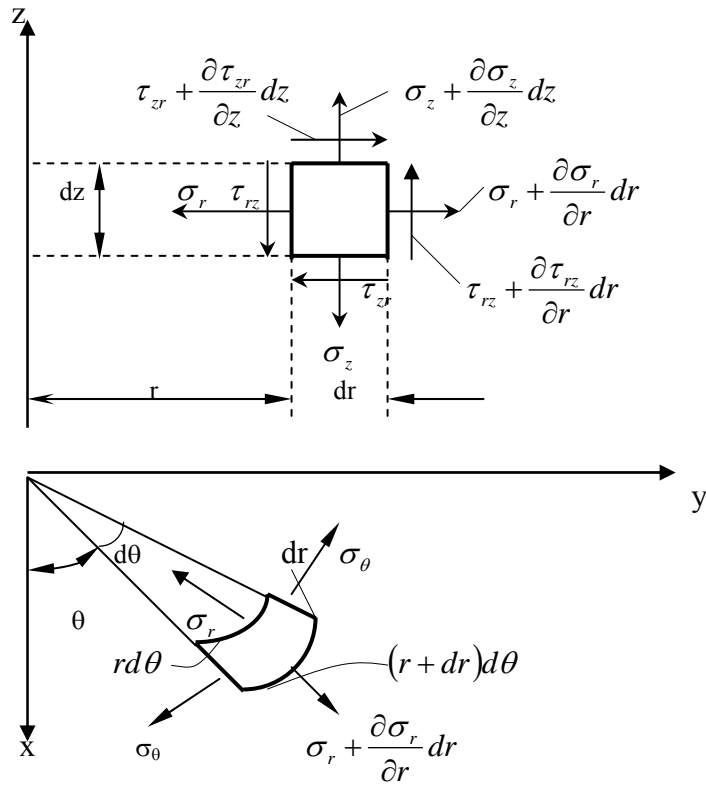
3.1. Elastik Deformasyon Denklemi :

Elastik Deformasyon Denklemi'nin çıkarılışının iyi bir şekilde aktarılabilmesi için öncelikle kullanılacak olan koordinat sistemini açıklanmıştır. Bizim problemimizde eksenel bir simetri mevcut olduğu için, gerilme, birim şekil değiştirme ve yer değiştirme bileşenleri incelenirken kartezyen koordinatlara nazaran silindiriksel koordinatların kullanılması daha avantajlıdır. Bunun nedeni bulunmak istenen bileşenlerin sadece iki koordinata (r' ye ve z' ye) göre değişim göstermeleridir. Ayrıca bazı bileşenler de birbirlerini götürdükleri için uğraşılmak zorunda kalınmazlar. Gerilme bileşenlerinin gösterilebilmesi için aşağıda örnek bir eleman ele alınmıştır.



Şekil 3.1.1. Silindirik koordinatlarda incelenmek üzere alınan eleman

Bu eleman iki görünüşü ile incelenerek, gerilme bileşenleri gösterilirse, σ_r , σ_θ , σ_z gerilme bileşenleri dışında sadece bir tane kayma gerilmesi $\tau_{zr} = \tau_{rz}$ olduğu görülür. Diğer kayma gerilmeleri, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta r}$, $\tau_{\theta z}$, $\tau_{z\theta}$ simetriden dolayı birbirlerini yok ederler.



Şekil 3.1.2. Eleman üzerinde gerilme bileşenlerinin gösterilmesi

Şekil 3.1.1 ve Şekil 3.1.2’de gösterilen cisme radyal doğrultuda etki eden dış kuvvet K_r , z-doğrultusunda etki eden dış kuvvet Z ile gösterilecektir. Ve bu kuvvetler de sadece r ’ ye ve z ’ ye göre değişen fonksiyonlar durumundadırlar.

r-doğrultusundaki tüm kuvvetler toplandığı takdirde denge denkleminde Timoshenko 1969 kaynağına göre şu sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - 2\sigma_\theta dr dz \frac{d\theta}{2} \\ & + \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - \tau_{rz} r d\theta dr + K_r r d\theta dr dz = 0 \end{aligned}$$

Gerekli düzenleme işlemlerini yapıp, tüm terimleri $r d\theta dr dz$ ye böldükten sonra

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0 \quad (3.1.1)$$

denklemini elde edilir. Benzer işlemler z-doğrultusu için gerçekleştirildiğinde ise

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0 \quad (3.1.2)$$

sonucuna ulaşılır.

r-doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni u_r ve z-doğrultusundaki yer değiştirme bileşeni w ile ifade edilirse ($u_\theta=0$ simetriden dolayı).

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3.1.3)$$

şeklinde gösterilebilir.

Fiziksel denklemler ise şöyledir (Timoshenko 1969) :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G} \tau_{zr} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zr} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

Hacimsel birim şekil değiştirme “ e ” ise 3.1.4 denkleminin ilk üç teriminin toplanması sonucu şöyle bulunur.

$$e = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \quad (3.1.5)$$

burada,

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

eşitliğini de kullanarak, gerilme bileşenleri birim şekil değiştirme cinsinden Denk.3.1.4’ ün ve Denk.3.1.5.’ in de yardımlarıyla şu şekilde ifade edilebilir.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_r \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_\theta \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_z \right) \\ \tau_{zr} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zr} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.6)$$

Denk.3.1.6.’ daki eşitlikler Denk.3.1.1.’ de ve Denk.3.1.2.’ de yerine konduğunda şu sonuçlar elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) + K_r &= 0 \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.7)$$

Burada,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

eşitliğini ifade etmektedir.

Silindiriksel koordinatlardaki gerilme ve birim şekil değiştirme bileşenlerinin açıklanmasından sonra elastik deformasyon denkleminin elde edilmesine başlanabilir.

Elastisite Teorisi'nin bulunması sırasında bazı bilim adamları yer değiştirme bileşenlerini tanımlamak için farklı formlarda yer değiştirme fonksiyonları oluşturmuşlar ve böylece değişik problemlerin bu fonksiyonlar sayesinde çözülebilmeye imkan sağlamışlardır. Bizim problemimizin çözümü için ise bu yer değiştirme fonksiyonlarından, Yer Değiştirme Potansiyeli'nin ve Love Yer Değiştirme Fonksiyonu' nun bilinmesi gerekir.

3.1.1. Yer Değiştirme Potansiyeli :

Yer değiştirme fonksiyonlarının en basiti Yer Değiştirme Potansiyeli'dir. Bizim problemimizde olduğu gibi aksenal simetrisinin mevcut olduğu durumlar için dış kuvvetler dikkate alınmazsa Denk.3.1.7 Timoshenko 1969 kaynağına göre şu hale gelir.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} &= 0 \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

Yer değiştirmelerin bir potansiyeli olduğu kabul edilirse, her hangi bir yöndeki yer değiştirme bileşeni, bu yöndeki belirli bir $\psi(r,z)$ potansiyel fonksiyonu ile orantılı olur. Bu durumlarda silindirik koordinatlarda yer değiştirme fonksiyonları Timoshenko 1969 kaynağına göre,

$$u_r = \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial r}, w = \frac{1}{2G} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.1.9)$$

olarak ifade edilirse, burada

$$\frac{1}{2G} = \frac{1+\mu}{E}$$

şeklinindedir. Hacimsel birim şekil değiştirme “e” ise Denk.3.1.9. kullanılarak şöyle elde edilir.

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2G} \nabla^2 \psi \quad (3.1.10)$$

Denk.3.1.10. ve Denk.3.1.9. Denk.3.1.8.’ e konulursa,

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi = 0, \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi = 0$$

sonuçlarına varılır. Bu da $\nabla^2 \psi = C$ eşitliğini gerektirir. Burada $C = 0$ alarak ve Denk.3.1.6. ve Denk.3.1.9.’ daki eşitlikleri kullanarak gerilme bileşenleri Timoshenko 1969 kaynağına göre şöyle elde edilebilir.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \sigma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \sigma_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.11)$$

Bu durumda bir aksenal simetrisinin mevcut olduğu problem için, $\psi(r,z)$ gibi bir harmonik fonksiyonun bulunmasında başarılı olunursa, Denk.3.1.9.’ da verilen yer

değiştirme ve Denk.3.1.11.' de verilen gerilme bileşenlerinin sağladığı tüm sınır şartları için, doğru sonuç bulunmuş olur.

Bir Yer Değiştirme Potansiyeli' nin var olduğu durumda, Denk.3.1.10.' dan görüldüğü gibi, incelenen cismin tümündeki hacimsel birim şekil değiştirme “e” nin sabit olması gerekir. Bu gibi durumlar nadiren oluştuğu için ancak az sayıda problem sadece Yer Değiştirme Potansiyeli kullanılarak çözülebilir. Bu nedenle birçok problemde daha karmaşık yer değiştirme fonksiyonlarına baş vurulmak zorunda kalınır. Yine de bazen Yer Değiştirme Potansiyeli, matematiksel işlemleri indirgemek amacıyla bir alt yer değiştirme fonksiyonu olarak kullanılabilir. Nitekim bizim problemimizde de böyle bir yöntem kullanılacaktır. Ancak öncelikle daha karmaşık bir yer değiştirme fonksiyonu olan Love Yer Değiştirme Fonksiyonu anlatılmıştır.

3.1.2. Love Yer Değiştirme Fonksiyonu :

Eksenel simetrinin mevcut olduğu üç boyutlu problemlerin çözümü için Love $\zeta(r,z)$ şeklinde bir yer değiştirme fonksiyonu tanımlamış ve yer değiştirme bileşenlerini şöyle belirlemiştir. (Timoshenko 1969)

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial z} \\ w &= \frac{1}{2G} \left[2(1-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta \end{aligned} \right\} \quad (3.1.12)$$

Burada,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

eşitliğini ifade etmektedir.

Bu durumda Denk.3.1.5.' de verilen hacimsel birim şekil değiştirme ise şu hali alır.

(Timoshenko 1969)

$$e = \frac{1-2\mu}{2E} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \zeta \quad (3.1.13)$$

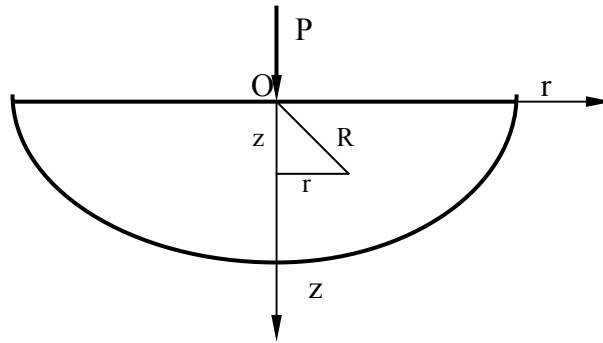
Denk.3.1.12. ve Denk.3.1.13. kullanıldığında Denk.3.1.8.' in birinci eşitliğinin aynen sağlandığı ancak ikinci eşitliğin $\nabla^4\zeta = 0$ şartını gerektirdiği görülür. Bu da ζ 'nin bir biharmonik fonksiyon olması gerektiğini gösterir. Denk.3.1.12. ve Denk.3.1.13. Denk.3.1.6.' da yerine konulursa ($\frac{1}{2G} = \frac{1+\mu}{E}$ olmak üzere).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \zeta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \nabla^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \zeta \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta \\ \tau_{zr} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\mu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \zeta \end{aligned} \right\} \quad (3.1.14)$$

bulunur. Böylece bir aksel simetri probleminde uygun bir biharmonik fonksiyon ζ bulunabildiği takdirde, verilen sınır şartlarını sağlayabilecek olan yer değiştirme bileşenleri Denk.3.1.12., gerilme bileşenleri ise Denk.3.1.14. yardımıyla bulunabilir.

3.1.3. Yarı Sonsuz Bir Cisme Noktasal Bir Normal Yükün Etki Etmesi Durumu :

Bu açıklamalardan sonra şimdi de Şekil 3.1.3.' de görüldüğü gibi yarı sonsuz bir eleman üzerine etki eden normal kuvvet durumu incelenecektir.



Şekil 3.1.3. Yarı sonsuz bir cisme bir normal yükün etki etmesi durumu

Sınır düzleminin yükün etki etmediği bölümünde aşağıdaki sınır şartları mevcuttur.
(Timoshenko 1969)

$$(\sigma_z)_{z=0, r \neq 0} = 0, \quad (3.1.15)$$

$$(\tau_{zr})_{z=0, r \neq 0} = 0. \quad (3.1.16)$$

merkezde, sınır düzleminin küçük bir bölümünde yüzey kuvvetleri etki etmektedir. Bu kuvvetlerin dağılımları verilmemiştir ancak bileşke kuvvetleri P' dir. Sınır düzleminde z kadar uzaklıkta yatay bir düzlem olduğu düşünülürse, bu düzlemdeki normal gerilmelerin yüzey kuvvetleri ile, yani aynı zamanda P yükü ile, dengede olması gerekir. Eksenel simetrisinin olduğu da dikkate alınır, sınır durumunun hakim olduğu bölgede Timoshenko 1969 kaynağına göre şu denge denklemi elde edilir.

$$\int_0^{\infty} (2\pi r dr) \sigma_z + P = 0 \quad (3.1.17)$$

Cisimdeki gerilme ve birim şekil değiştirmelerin kuvvetten olan uzaklıkla değiştiği aşikardır, ve bu nedenle hacimsel birim şekil değiştirme “e” de sabit değildir. Bu nedenle sadece bir Yer Değiştirme Potansiyeli kullanmakla problemin doğru bir çözümü elde edilemez, ve bir Love Yer Değiştirme Fonksiyonu da kullanılmaya çalışılacaktır. Denk.3.1.14.’ten görüldüğü gibi yer değiştirme fonksiyonu ζ , P' nin lineer terimler olan r,z ve R ile çarpımı sonucu elde edilebilir. Şimdi ζ 'nin, A_1 sabiti ile biharmonik fonksiyon olan R' nin çarpımı olduğu düşünülürse: (Timoshenko 1969)

$$\zeta = A_1 R = A_1 \sqrt{r^2 + z^2} \quad (3.1.18)$$

olur. Denk.3.1.18., Denk.3.1.12. ve Denk.3.1.14.’de yerine konduğu takdirde Timoshenko 1969 kaynağına göre şu sonuçlar elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{A_1 r z}{2GR^3}, & w &= \frac{A_1}{2G} \left(\frac{3-4\mu}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right) \\ \sigma_r &= A_1 \left[\frac{(1-2\mu)z}{R^3} - \frac{3r^2 z}{R^5} \right], & \sigma_\theta &= \frac{A_1 (1-2\mu)z}{R^3} \\ \sigma_z &= -A_1 \left[\frac{(1-2\mu)z}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5} \right], & \tau_{zr} &= -A_1 \left[\frac{(1-2\mu)r}{R^3} + \frac{3rz^2}{R^5} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1.19)$$

Bu sonuçlara göre Denk.3.1.15.'deki sınır şartı sağlanmıştır, ancak Denk.3.1.16.'daki sınır şartı sağlanamamıştır. Çünkü

$$(\tau_{zr})_{z=0, r \neq 0} = -\frac{A_1(1-2\mu)}{r^2} \quad (3.1.20)$$

denkleminin r 'nin hiçbir değeri için sıfıra eşit değildir.

Hem Denk.3.1.15. hem de Denk.3.1.16. sınır şartlarının sağlanması amacıyla, $\psi(r,z)$ gibi bir Yer Değiştirme Potansiyeli şeklinde harmonik bir fonksiyon bulunmaya çalışılmalıdır. Bu fonksiyon $z=0$ için $\sigma_z=0$ şartını sağlarken Denk.3.1.20.'de gösterilen kayma gerilmesini de yok etmelidir. Birçok denemeden sonra $\ln(R+z)$ şeklinde bir harmonik fonksiyonun tüm istekleri karşıladığı görülmüştür. Böylece

$$\psi = A_2 \ln(R+z) \quad (3.1.21)$$

eşitliği ele alınır. (Timoshenko 1969) Burada A_2 bir sabittir. Denk.3.1.21., Denk.3.1.9. ve Denk.3.1.11.'de yerine konulursa

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{A_2 r}{2GR(R+z)}, & w &= \frac{A_2}{2GR} \\ \sigma_r &= A_2 \left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)} \right], & \sigma_\theta &= \frac{A_2}{R(R+z)} \\ \sigma_z &= -\frac{A_2 z}{R^3}, & \tau_{zr} &= -\frac{A_2 r}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.22)$$

eşitlikleri bulunur. (Timoshenko 1969) Denk.3.1.19. ve Denk.3.1.22. süperpoze edilirse, Denk.3.1.15. numaralı sınır şartı hala sağlanırken, Denk.3.1.16. numaralı sınır şartının,

$$-\frac{A_1(1-2\mu)}{r^2} - \frac{A_2}{r^2} = 0$$

halini aldığı görülür. Bu da

$$(1-2\mu)A_1 + A_2 = 0 \quad (3.1.23)$$

eşitliğini gerektirir. σ_z için bulunan eşitlikler süperpoze edildikten sonra Denk.3.1.17. de yerine konulup integrali alınır (Timoshenko 1969)

$$4\pi(1-\mu)A_1 + 2\pi A_2 = P \quad (3.1.24)$$

sonucuna ulaşılır. Denk.3.1.23. ve Denk3.1.24. kullanılarak A_1 ve A_2 değerleri

$$A_1 = \frac{P}{2\pi}, \quad A_2 = -\frac{(1-2\mu)P}{2\pi} \quad (3.1.25)$$

olarak bulunur. Bu sonuçlara göre Denk.3.1.19. ve Denk.3.1.22. süperpoze edilip Denk.3.1.25.'de bulunan A_1 ve A_2 değerleri de yerine konulursa Timoshenko 1969 kaynağına göre

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{(1+\mu)P}{2\pi ER} \left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\mu)r}{R+z} \right] \\ w &= \frac{(1+\mu)P}{2\pi ER} \left[2(1-\mu) + \frac{z^2}{R^2} \right] \\ \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{(1-2\mu)P}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{3Pz^3}{2\pi R^5} \\ \tau_{zr} = \tau_{rz} &= -\frac{3Pz^2 r}{2\pi R^5} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.26)$$

bulunur. Bu çözüm 1878 yılında J.Boussinesq tarafından bulunmuştur.

Denk.3.1.21.'deki Yer Değiştirme Potansiyeli yerine şu şekilde Love Yer Değiştirme Fonksiyonu' da kullanılabilir:

$$\zeta = A_2 [R - z \ln(R+z)]$$

bu tanımlama da Denk.3.1.12.'ye ve Denk.3.1.14.'e yerleştirilirse Denk.3.1.22.'deki aynı sonuçlara ulaşılabilir, ancak daha fazla matematiksel işlem yapmak gerekir.

Denk.3.1.26.'daki w eşitliğinden yatay sınır düzlemi üzerinde herhangi bir noktadaki dikey yer değiştirme Timoshenko 1969 kaynağına göre şöyle bulunur.

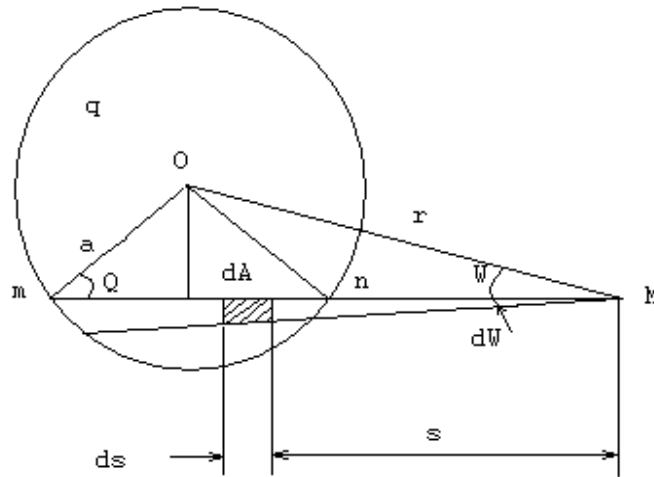
$$(w)_{z=0} = \frac{(1-\mu^2)P}{\pi E r} \quad (3.1.27)$$

buradan da görüldüğü gibi P yükünün etki ettiği noktadaki yer değiştirme ile r uzaklığı arasında bir ters orantı mevcuttur.

Yarı sonsuz bir cismin sınır yüzeyine etki eden noktasal bir normal yük için çözüm elde edildiğine göre, artık yayılı yük için de yer değiştirme ve gerilme bileşenleri süperpoze edilerek bulabilirler.

3.1.4. Yarı Sonsuz Bir Cismin Sınır Yüzeyine Yayılı Normal Yükün Etki Etmesi :

Örnek olarak Şekil 3.1.4.'de görüldüğü gibi, a yarıçapında dairesel bir alan üzerinde, q büyüklüğünde uniform dağılımlı normal bir yükün etki ettiği durum ele alınmış ve sınır yüzeyi üzerinde bulunan ve dairenin merkezinden r kadar uzaklıkta olan bir M noktası için normal yani z yönündeki yer değiştirme bulunmaya çalışılmıştır.



Şekil 3.1.4. Yarı sonsuz bir cisme yayılı yükün etki etmesi durumu.

Yükün etki ettiği alan içerisinde bulunan ve taralı bölge olarak gösterilen $dA=s.d\omega.ds$ temel alanı üzerindeki yüke göre, M noktasındaki normal yönlü yer değiştirme, Denk.3.1.27.' ye göre şöyle bulunur :

$$\frac{(1-\mu^2)qdA}{\pi Es} = \frac{(1-\mu^2)qsd\omega ds}{\pi Es} = \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} d\omega ds$$

buna göre, toplam yer değiştirme Timoshenko 1969 kaynağına göre

$$w = \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} \iint dsd\omega \quad (3.1.28)$$

olur. Bu denklemin s' ye göre integrali alınır ve şekilde görüldüğü gibi çubuğun mn uzunluğu $2\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \omega}$ eşitliği şeklinde yazılırsa,

$$w = 2 \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} 2 \int_0^{\omega_1} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \omega} d\omega \quad (3.1.29)$$

sonucuna ulaşılır. Burada ω_1 , O ve M noktaları arasındaki açı olarak isimlendirilen ω' nın en büyük değeridir ve bu en büyük değer ise daireye tanjant olma durumudur.

Denk.3.1.29.' daki integralin daha kolay alınabilmesi için, ω değişkeni θ şeklinde ifade edilecektir. Şekil 3.1.4.' den görüldüğü gibi geometrik bağıntılardan

$$a \sin \theta = r \sin \omega$$

$$a \cos d\theta = r \cos \omega d\omega$$

eşitlikleri elde edilirse,

$$d\omega = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \cos \omega} = \frac{a \cos \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}}$$

olur. Bu Denk.3.1.29.' a konular ve $0'$ dan ω_1' e kadar değişen ω değişkeni yerine $0'$ dan $\pi/2'$ ye kadar değişen θ değişkeni yerleştirilirse, şu sonuca ulaşılır.

$$w = \frac{4(1-\mu^2)q}{\pi E} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{r \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}}$$

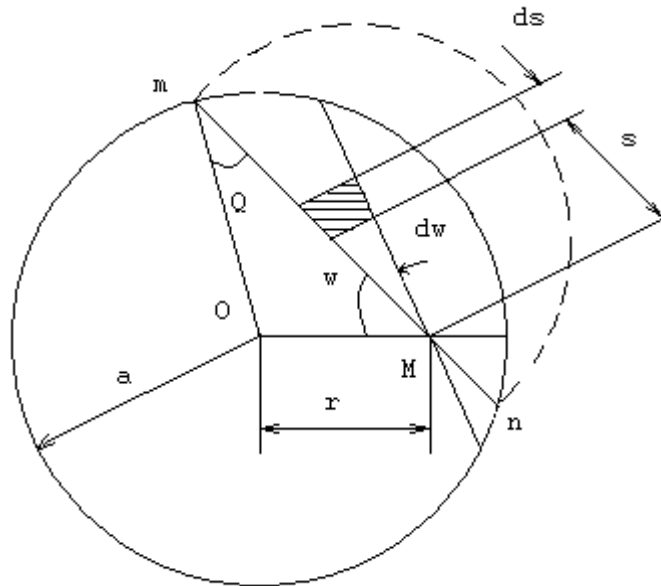
$$w = \frac{4(1-\mu^2)qr}{\pi E} \times \left[\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta} d\theta - \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \theta}} \right] \quad (3.1.30)$$

Bu denklemdeki integraller ‘eliptik integraller’ olarak bilinirler ve her hangi bir a/r değerine karşılık gelen değer matematiksel tablolardan alınabilir. Eğer M noktası yük alanının sınırı üzerinde yani $r=a$ noktasında alınırsa. Denk.3.1.30.

$$w = \frac{4(1-\mu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{4(1-\mu^2)qa}{\pi E} \quad (3.1.31)$$

şekline indirgenir.

Eğer M noktası Şekil 3.1.5’ de görüldüğü gibi yükün etki ettiği alan içerisinde alınırsa, meydana gelen yer değiştirme hala,



Şekil 3.1.5. Yük alanı sınırı içerisindeki bir noktanın incelenmesi

$$w = \frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} \iint d\omega ds$$

şeklindedir, ancak şimdi m çubuğunun boyu $2a\cos\theta$ dir ve ω da 0 dan $\pi/2$ ye kadar değişim gösterir. Bu durumda yer değiştirme denklemi Timoshenko 1969 kaynağına göre;

$$w = \frac{4(1-\mu^2)q}{\pi E} \int_0^{\pi/2} a \cos\theta d\omega$$

$$w = \frac{4(1-\mu^2)qa}{\pi E} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}} \sin^2 \omega d\omega \quad (3.1.32)$$

olur. r/a ' nın her hangi bir değeri için denklemdaki integralin değeri matematiksel tablolardan alınabilir. Yük alanının sınırı üzerinde yani $r=a$ ' daki bir noktanın yer değiştirmesi yine Denk.3.1.31.' deki gibi

$$w = \frac{4(1-\mu^2)qa}{\pi E}$$

bulunur. Yük alanının ortasında yani $r=0$ noktasında yer değiştirme ise

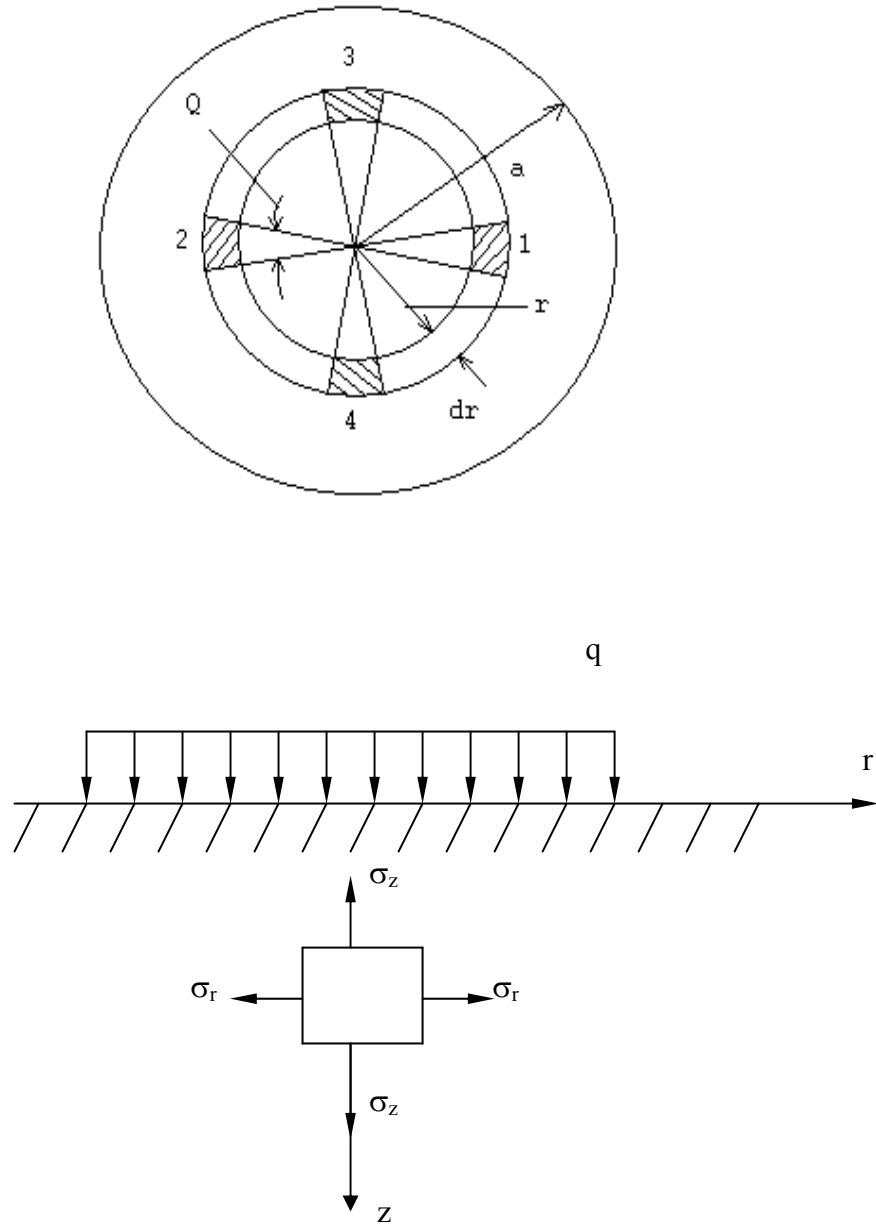
$$w_{\max} = \frac{2(1-\mu^2)qa}{E} \quad (3.1.33)$$

olarak, yani sınır düzlemindeki değerin $\pi/2$ katı şeklinde bulunur ve bu değer en büyük yer değiştirme değeridir.

Ancak z ' nin diğer durumları da incelendiğinde maksimum gerilmenin kayma gerilmesinin en büyük olduğu yerde meydana geldiği görülür. Bunun için yük alanı merkezinin altındaki her hangi bir noktadaki gerilme bileşenlerinin incelenmesi gerekir (Şekil 3.1.6). σ_z gerilmesinin bulunması için Denk.3.1.26.' nın beşinci eşitliğinde P yerine $2\pi r dr q$ değerinin konulup r ' ye göre integral alınması gerekir. Bu durumda

$$\sigma_z = -\frac{3z^3}{2\pi} \int_0^a \frac{2\pi r dr q}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = -q \left[1 - \frac{z^3}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \right] \quad (3.1.34)$$

sonucu elde edilir.



Şekil 3.1.6. Yük alanı merkezi altındaki gerilme bileşenlerinin incelenmesi

Aynı z derinliğindeki bir noktada σ_r ve σ_θ 'nin değerlerinin bulunması sırasında Şekil 3.1.6.'da görülen yük alanının 1 ve 2 numaralı elemanları üzerine $qrd\phi dr$ yükleri uygulanır. Bu iki temel yük tarafından oluşturulan gerilmeler, Denk.3.1.26.'nın üçüncü ve dördüncü terimlerine kullanılarak bulunabilirler;

$$d\sigma_r' = 2 \frac{qrd\phi dr}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3} \right] \quad (3.1.35)$$

$$d\sigma'_\theta = 2 \frac{(1-2\mu)qrd\phi dr}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) \quad (3.1.36)$$

Benzer şekilde, yüklerin 3 ve 4 numaralı elemanların üzerinde oluşturdukları gerilmeler ise Timoshenko 1969 kaynağına göre;

$$d\sigma_r'' = 2 \frac{(1-2\mu)qrd\phi dr}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right) \quad (3.1.37)$$

$$d\sigma_\theta'' = 2 \frac{qrd\phi dr}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3} \right] \quad (3.1.38)$$

Denk.3.1.35. ve Denk.3.1.37.' nin veya Denk.3.1.36. ve Denk.3.1.38.' in toplanması sonucu :

$$d\sigma_r = d\sigma_\theta = \frac{qrd\phi dr}{\pi} \left[(1-2\mu) \frac{z}{R^3} - \frac{3r^2 z}{R^5} \right] \quad (3.1.39)$$

elde edilir. Bütün yük tarafından oluşturulan gerilmelerin hesabı için Denk.3.1.39.' da ϕ nın 0 ' dan $\pi/2$ ' ye kadar, daha sonra r ' nin 0 ' dan a ' ya kadar integrallerinin alınması gerekir. Bu işlemler yapılırsa Timoshenko 1969 kaynağına göre;

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{q}{2} \left[(1+2\mu) + \frac{z^3}{(z^2+a^2)^{3/2}} - \frac{2(1+\mu)z}{(z^2+a^2)^{1/2}} \right] \quad (3.1.40)$$

bulunur. Maksimum Kayma Gerilmesi Teorisi (Tresca Kriteri) kullanılacak olursa, yük alanının merkezinin altındaki en büyük kayma gerilmesinin değeri şöyle bulunur :

$$\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z) = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\mu}{2} + \frac{(1+\mu)z}{(z^2+a^2)^{1/2}} - \frac{3}{2} \frac{z^3}{(z^2+a^2)^{3/2}} \right] \quad (3.1.41)$$

bu tanımlamanın en büyük olduğu z değeri ise

$$z = a \sqrt{\frac{2(1+\mu)}{7-2\mu}} \quad (3.1.42)$$

olarak bulunur. Bulunan bu z değeri de Denk.3.1.41.' de yerine konulursa

$$\tau_{\max} = \frac{q}{2} \left[\frac{1-2\mu}{2} + \frac{2}{9}(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)} \right] \quad (3.1.43)$$

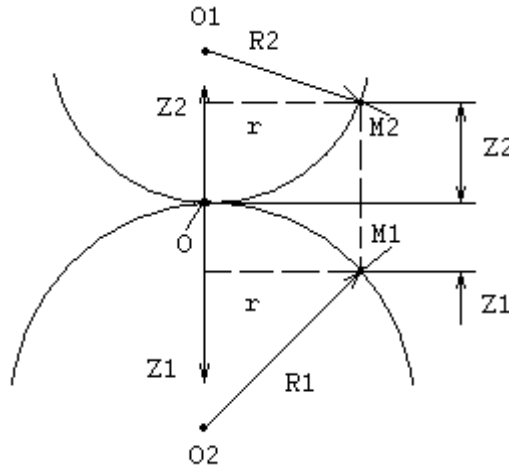
Timoshenko 1969 kaynağına göre elde edilir.

$\mu = 0,3$ olarak alınırsa τ_{\max} yaklaşık olarak $z=0,637a$ değeri için $0,333q$ bulunur.

Artık yayılı yük için de bulunan gerilme ve şekil değiştirme tanımlamalarından da yararlanarak, iki küresel veya bir küresel ile bir silindiriksel yuvarlanma elemanının birbirini üzerinde yuvarlanması sonucu oluşan Hertz Deformasyonu' nun eliptik şeklinin boyutları hesaplanabilir. Bunun için de temas halinde bulunan iki küresel cisme normal doğrultuda bir kuvvetin etki etmesi durumu incelenecektir.

3.1.5. Temas Halinde Bulunan İki Küresel Cisim Arasındaki Basınç :

Buraya kadar elde edilen sonuçlar kullanılarak, birbirleriyle temas halinde bulunan iki cisim arasındaki basıncın dağılımı ve gerilme analizleri yapılabilir. Basit bir örnek olarak, temas halinde bulunan iki küresel cisim ele alınacaktır.



Şekil 3.1.7. Temas halinde bulunan iki küresel cisim

Şekilde 3.1.7' de görüldüğü gibi bu iki küresel yüzeyin yarıçapları R_1 ve R_2 olarak alınacaktır. Eğer bu iki cisim arasında hiçbir basınç yoksa, bu cisimler sadece O noktasında temas halinde bulunurlar. Kürelerin meridyen kesitinde Z_1 ve Z_2 eksenlerinden çok küçük bir r uzaklığında M_1 ve M_2 gibi iki nokta alınırsa geometrik bağıntılardan Brüser 1972 kaynağına göre

$$(R_1 - z_1)^2 + r^2 = R_1^2, \quad (R_2 - z_2)^2 + r^2 = R_2^2$$

bulunur. Bu eşitliklerdeki parantez işlemleri açılırsa

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1 - z_1}, \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2 - z_2}$$

elde edilir. r değeri R_1 ve R_2 ile karşılaştırıldığında çok küçük kaldığı için, bu eşitlikler şu şekilde alınabilir.

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1}, \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2}$$

Bu durumda bu M_1 ve M_2 noktaları arasındaki karşılıklı uzaklık

$$z_1 + z_2 = r^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2 (R_1 + R_2)}{2R_1 R_2} \quad (3.1.44)$$

olur.

Özel olarak bir küre ile düzlem arasındaki değme halinde düzlemin yarıçapı sonsuz olarak alınacağı için Denk.3.1.44. şu şekli alır,

$$z_2 = \frac{r^2}{2R_2}$$

Rulmanlarda da rastlanılan bir durum olan bir bilya ile dış bilezik arasındaki temas halinde ise dış bileziğin yarıçapının negatif alınması gerekir. Bu durumda ise Denk.3.1.44

$$z_2 - z_1 = \frac{r^2(R_1 - R_2)}{2R_1R_2}$$

olur.

Cisimler birbirlerine doğru O' daki normal boyunca bir P kuvveti ile bastırılırlarsa değme noktası yakınında yerel bir şekil değiştirme olacak, bu da değme yüzeyi adı verilen dairesel bir sınırı haiz küçük bir yüzey üzerinde değme hasıl edecektir. R_1 ve R_2 eğrilik yarıçaplarının değme yüzeyinin sınır yarıçapına göre çok büyük olduğu kabul edilirse, yerel şekil değiştirmeleri incelerken evvelce yarı sonsuz cisimler için elde edilmiş sonuçlar uygulanabilir. w_1 alttaki bilyanın yüzeyindeki M_1 gibi bir noktanın z_1 doğrultusundaki yerel şekil değiştirmeden ileri gelen yer değiştirmesini, ve w_2 üstteki bilyanın M_2 gibi bir noktasının z_2 doğrultusundaki aynı yer değiştirmesini gösterebilir (Şekil 3.1.7). O' daki teğet düzlemin yerel sıkışma sırasında hareketsiz kaldığını kabul ettiğimiz taktirde, bu sıkışmadan dolayı cisimlerin z_1 ve z_2 eksenleri üzerinde O' dan uzak mesafelerde her hangi iki noktası birbirlerine bir α miktarı kadar yaklaşacak ve M_1 ve M_2 gibi iki nokta arasındaki uzaklık $\alpha - (w_1 + w_2)$ kadar azalacaktır. Son olarak yerel sıkışmadan dolayı M_1 ve M_2 noktaları değme yüzeyinin içine girerse Brüser 1972 kaynağına göre

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \beta.r^2 \quad (3.1.45)$$

elde edilir. Burada β şuna eşittir,

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2} \quad (3.1.46)$$

şu halde geometrik bir görüşle değme yüzeyinin herhangi bir noktası için

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta.r^2 \quad (3.1.47)$$

bulunur.

Yerel şekil değiştirmeler göz önüne alınırsa, simetri şartından dolayı, birbirlerine değen cisimler arasındaki basıncın q şiddetinin ve karşı gelen şekil değiştirmenin,

değme yüzeyinin O merkezine göre simetrik olduğu sonucu çıkarılabilir. M_1 ' i alttaki bilyanın değme yüzeyi üzerinde bir nokta olarak alınırsa bu noktanın w_1 yer değiştirmesi Denk.3.1.28.' e göre

$$w_1 = \frac{(1-\mu_1^2)}{\pi E_1} \iint q ds d\omega \quad (3.1.48)$$

olur. Burada μ_1 ve E_1 alttaki bilya için elastik sabitlerdir, ve integrasyon bütün değme alanı üzerinde yapılır. Benzer bir formül üst bilya için de elde edilir. bu takdirde :

$$w_1 + w_2 = (k_1 + k_2) \iint q ds d\omega \quad (3.1.49)$$

Burada

$$k_1 = \frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2}$$

dir. Denk.3.1.47. ve Denk.3.1.49. denklemlerinden Brüser 1972 kaynağına göre

$$(k_1 + k_2) \iint q ds d\omega = \alpha - \beta.r^2 \quad (3.1.50)$$

olur. Şu halde q için Denk.3.1.50. denklemini sağlayacak bir ifade bulmalıdır. Şimdi bu şartın değme yüzeyi üzerindeki q basınçlarının yayılışının, değme yüzeyi üzerine inşa edilmiş a yarıçaplı bir yarım kürenin ordinatlarıyla temsil edildiği kabul edilerek sağlandığı gösterilecektir. q_0 değme yüzeyinin O merkezindeki basıncı olduğu takdirde

$$q_o = k.a$$

dır. Burada $k = q_0/a$ basınç dağılımının gösteriminin ölçeğini ifade eden sabit bir çarpandır. Bir mn kirişi boyunca q basınç değişimi yarım daire ile ifade edilecektir. Bu kiriş boyunca integral alma işlemi yapılırsa Brüser 1972 kaynağına göre,

$$\int q ds = \frac{q_o}{a} A$$

bulunur. Burada A yarım dairenin alanıdır ve $\frac{\pi}{2}(a^2 - r^2 \sin^2 \omega)$, ye eşittir. Bu eşitlik

Denk.3.1.50 denkleminde yerleştirilirse

$$\frac{\pi(k_1 + k_2)q_o}{a} \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2 \sin^2 \omega) d\omega = \alpha - \beta.r^2$$

veya

$$(k_1 + k_2) \frac{q_o \pi^2}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta.r^2$$

bulunur. Bu denklem r' nin her hangi bir değeri için sağlanacaktır, ve dolayısıyla α yer değiştirmesi ve değme yüzeyinin a yarıçapı için aşağıdaki bağıntılar mevcutsa, kabul edilen basınç yayılımı Brüser 1972 kaynağına göre doğrudur.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (k_1 + k_2) q_o \frac{\pi^2 a}{2} \\ a &= (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_o}{4\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.51)$$

q_o maksimum basınç değeri, değme alanı üzerindeki basınçların toplamını P basınç kuvvetine eşitleyerek elde edilir. Bu takdirde yarı küresel basınç yayılımı için bu

$$\frac{q_o}{a} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = P$$

sonucunu verir. Buradan

$$q_o = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (3.1.52)$$

çıkar. Yani maksimum basınç, değme yüzeyi üzerindeki ortalama basıncın 3/2 katıdır. Denk.3.1.52.' yi Denk.3.1.51.' e yerleştirilir ve Denk.3.1.46.' da verilen β değeri de yerine konulursa birbirine değen iki bilya için Brüser 1972 kaynağına göre;

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P(k_1 + k_2)R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3.1.53)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{P^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}} \quad (3.1.54)$$

$$q_o = \frac{3P}{2\pi a^2} = \frac{3P}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{4(R_1 + R_2)}{3\pi P(k_1 + k_2)R_1 + R_2}} \quad (3.1.55)$$

bulunur. Her iki bilyanın aynı elastik özelliklere sahip olduğu kabul edilir ve $E_1=E_2=E$ $\mu_1=\mu_2=0,3$ olarak alınırsa bu denklemler

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \\ \alpha &= 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \\ q_o &= 0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.56)$$

halini alır. Bir bilyanın bir düzlem yüzeye bastırılması halinde düzlem yüzeyin yarıçapı yerine sonsuz konularak veya bir rulmanda bilyanın dış bilezik ile temasında dış bileziğin yarıçap değerinin negatifi alınarak sonuca ulaşılır.

Değme yüzeyinin büyüklüğü ve üzerine etkileyen basınçlar da elde edildiğine göre artık gerilmeler Denk.3.1.34., Denk.3.1.39. ve Denk.3.1.41. denklemleri kullanılarak bulunabilir. Z-ekseni boyunca mesafeleri ölçmekte değme yüzeyinin yarıçapı olan a birim olarak alınmıştır. En büyük gerilme değme yüzeyinin merkezindeki σ_z basınç gerilmesidir, fakat aynı noktadaki öteki iki asal gerilme σ_r ve σ_θ , $\frac{1+2\mu}{2}\sigma_z$ değerine eşittir. Dolayısıyla çelik bir malzemenin akmasının bağlı olduğu maksimum kayma gerilmesi bu noktada nispeten düşüktür. Maksimum kayma gerilmesine haiz nokta z ekseninde değme yüzeyi yarıçapının, yani a 'nın, takriben 0,637 katı kadar derinliktedir. Bu nokta çelik gibi bir malzemede en zayıf nokta olarak düşünülmelidir. Bu noktadaki maksimum kayma gerilmesi ($\mu = 0,3$) için takriben 0,333 q kadardır. Gerilmelerin z ekseninde değişim grafiği tez sonunda verilen programda çizdirilmiştir.

3.2. Reynolds Denklemi :

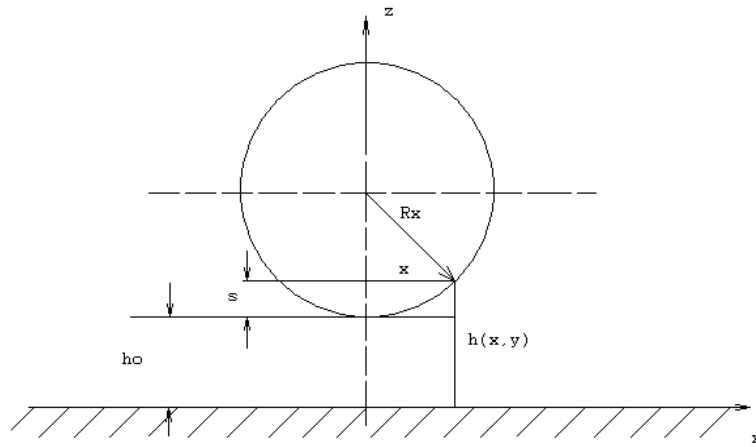
Bütün mekanik kanunları belirli miktardaki materyal (sistem) için yazılır. Sistemin dışında olan her şey çevre olarak adlandırılır. Kapalı bir yüzey oluşturan sistemin sınırları zamanla değişmesine rağmen, aynı miktardaki kütle, ya da akışkan miktarını muhafaza eder. Uzayda bir bölge olan kontrol hacminin sınırları kontrol yüzeyi olarak bilinir. Bu kontrol hacmi bazen açık sistem olarak da adlandırılır. Akışın doğasına bakmaksızın bütün akış durumları mekanik kanunlarına ve sınır şartlarına bağlıdır. Burada önce sistem analizini kontrol hacmi analizine dönüştüren Reynolds Transport Teoremini verelim. 6 numaralı kabul gereği sınır yüzeylerde kayma olmadığı için $v_a = v_b = 0$ ve $u_a = u_b = u$ olarak alınabilir. Bu durumda Reynolds Denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (3.2.50)$$

halini alır. Bu denklem Elasto-Hidrokinamik yağlama probleminde kullanılan Reynolds Denklemi'dir. (Timoshenko 1969)

3.3. Geometrik Denklem :

Aralarında belirli bir film kalınlığının da bulunduğu R_x ve R_y yarıçaplarına sahip bir düzlem ile bir cisim arasındaki mesafe Şekil 3.3.1.' e göre şöyle hesaplanabilir.



Şekil 3.3.1. Deforme olmamış bir cisim ve bir düzlem arasındaki mesafe

Şekilde görüldüğü gibi cisim ve düzlem arasındaki en küçük mesafeye h_0 ve keyfi her hangi bir nokta için $h(x,y)$ dersek Brüser 1972 kaynağında;

$$h(x, y) = h_0 + S_x + S_y \quad (3.3.1)$$

olur. Şekle göre yapılan bazı geometrik işlemler neticesinde

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= S_x(2R_x - S_x) \\ y^2 &= S_y(2R_y - S_y) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.2)$$

denklemleri elde edilir.

Mevcut problem için

$$2R_x \gg S_x \quad \text{ve} \quad 2R_y \gg S_y$$

olduğundan,

$$\left. \begin{aligned} x^2 &\approx 2R_x S_x \\ y^2 &\approx 2R_y S_y \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3)$$

yazılabilir. Yani nispeten küçük temas yüzeyleri için cismin dairesel hattı bir parabolik hat ile değiştirilmiştir. Böyle bir kabul durumundaki hata ihmal edilebilecek derecede küçüktür ve şöyle hesaplanır.

$$f = \frac{R_x - \sqrt{R_x^2 - x^2} - \frac{x^2}{2R_x}}{R_x - \sqrt{R_x^2 - x^2}} \quad (3.3.4)$$

$$f = 0,5 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2} \right) \quad (3.3.5)$$

buna göre,

$$x / R = 0,1 \quad \text{için hata} \quad f = \% 0,25$$

$x / R = 0.01$ için hata $f = \% 0.0025$

olur.

Bu durumda uzaklık için

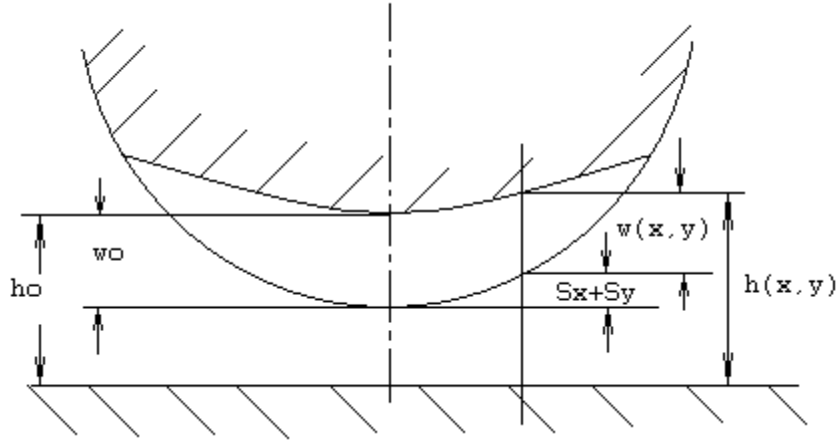
$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y}$$

denkleminin yazılması çok büyük bir hataya sebebiyet vermez.

Ayrıca elastik deformasyon da göz önüne alınır, Şekil 3.3.2.' den görüldüğü gibi

$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + w(x, y) - w_0 \quad (3.3.6)$$

denklemini elde edilir.



Şekil 3.3.2. Deforme olmuş bir cisim ve düzlem arasındaki mesafe

3.4. Yağın Hal Denklemleri :

3.4.1. Yoğunluk :

Yüksek basınçların hakim olduğu böyle bir ortamda yağ filmine artık sıkıştırılmaz akışkan gözüyle bakılamaz. Yani yoğunluğun sıcaklığa olan bağımlılığı yanında basınca olan bağımlılığı da göz önüne alınmalıdır.

Basit bir ampirik formülü DOWSON, HIGGINSON ve WHITAKER şu şekilde sunmuşlardır. (Brüser 1972)

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 1 + \frac{0,0057 p}{1 + 0,0165 p} \quad (3.4.1)$$

Ancak ASME adındaki bir araştırma grubunun deneysel sonuçlarına dayanan formülleri daha iyi sonuç vermektedir. Bu incelemelerde 40 farklı yağ için yoğunluk ve viskozite 10 000 atm' ye ve 220 °C' ye kadar ölçülmüştür. BRADBURY, MARK VE KLEINSCHMIDT bu ölçümleri aşağıdaki ampirik formülle özetlemişlerdir. (Brüser 1972)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_o} \left[\frac{1}{1 - C^* \Delta T^*} - \frac{1}{n^*} \ln \left(\frac{p}{m^* / n^*} + 1 \right) \right] \quad (3.4.2)$$

burada

$$m^* = m_o^* \left(1 + a^* \Delta \frac{1}{T^*} \right) \quad (3.4.3)$$

$$n^* = n_o^* \left(1 + b^* \Delta \frac{1}{T^*} \right) \quad (3.4.4)$$

olarak tanımlanmaktadır. ρ_o yoğunluğu her sıcaklıkta biliniyorsa, yani $\Delta T^* = 0$ ise, formül şu duruma gelir.

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n_o^*} \ln \left(\frac{p}{m_o^* / n_o^*} + 1 \right)} \quad (3.4.6)$$

sabitler için ortalama değerler aşağıdaki gibi alınırsa,

$$m_o^* = 168,2 \text{ kp/mm}^2$$

ve

$$n_o^* = 11,5$$

kesin formül olarak Brüser 1972 kaynağına göre;

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \frac{1}{1 - 0,087 \cdot \ln(0,0684p + 1)} \quad (3.4.7)$$

bulunur.

Keza HARTUNG ASME incelemelerine dayanarak aşağıdaki bağımlılık kanunu elde etmiştir. (Brüser 1972)

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left[1 + \frac{42,8 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta p^*}{(p^*)^{0,25} \cdot \nu^{0,0385}} \right] \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{23,2}{(p^*)^{0,25}} + 0,421 \right) \cdot 10^{-4} \cdot \Delta \vartheta^*}{\rho_o^2 \left(1 + \frac{42,8 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta p^*}{(p^*)^{0,25} \cdot \nu^{0,0385}} \right)} \right]^{-1} \quad (3.4.8)$$

burada,

p^* = inç kare başına pound cinsinden basınç

Δp^* = $p^* - p_o^*$ (psi)

$\Delta \vartheta^*$ = $\vartheta^* - \vartheta_o^*$ (°F)

ϑ_o^* = Başlangıç sıcaklığı (50 ile 120 °F arasında)

ν = cst (santi stoks cinsinden) viskozite (100 °F \cong 38 °C sıcaklığında)

Sıcaklık sabit kabul edildiği için, $\Delta \vartheta^*$ sıfır olmasını sağlayacak şekilde ρ_o seçilebilir.

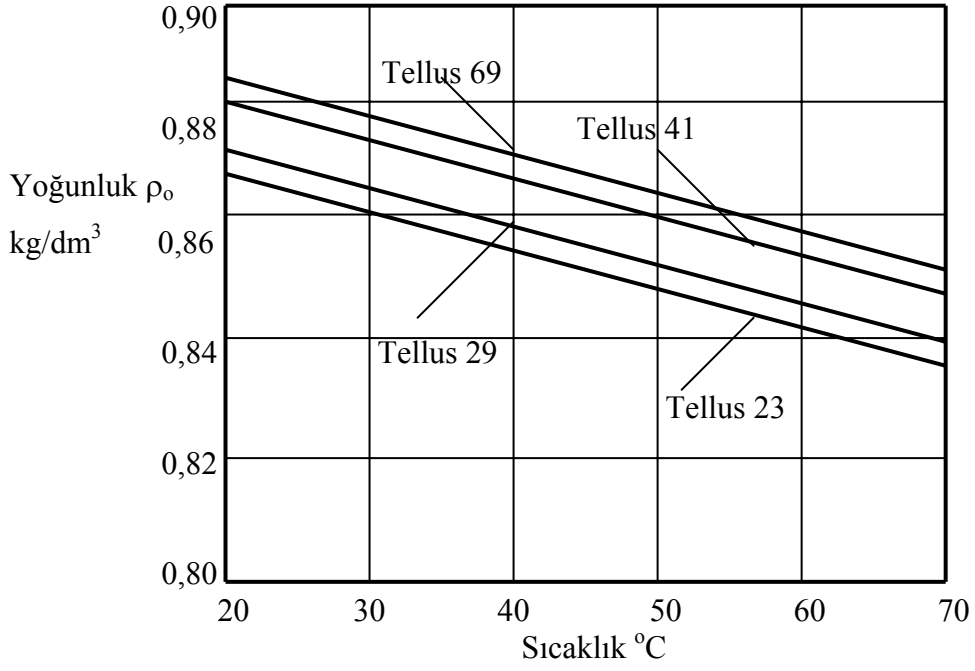
Ayrıca $\Delta p^* \approx p^*$ şeklinde bir basitleştirme ile denklem Brüser 1972 kaynağından

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 1 + \frac{42,8 \cdot 10^{-6} \cdot (p^*)^{0,75}}{\nu^{0,0385}} \quad (3.4.9)$$

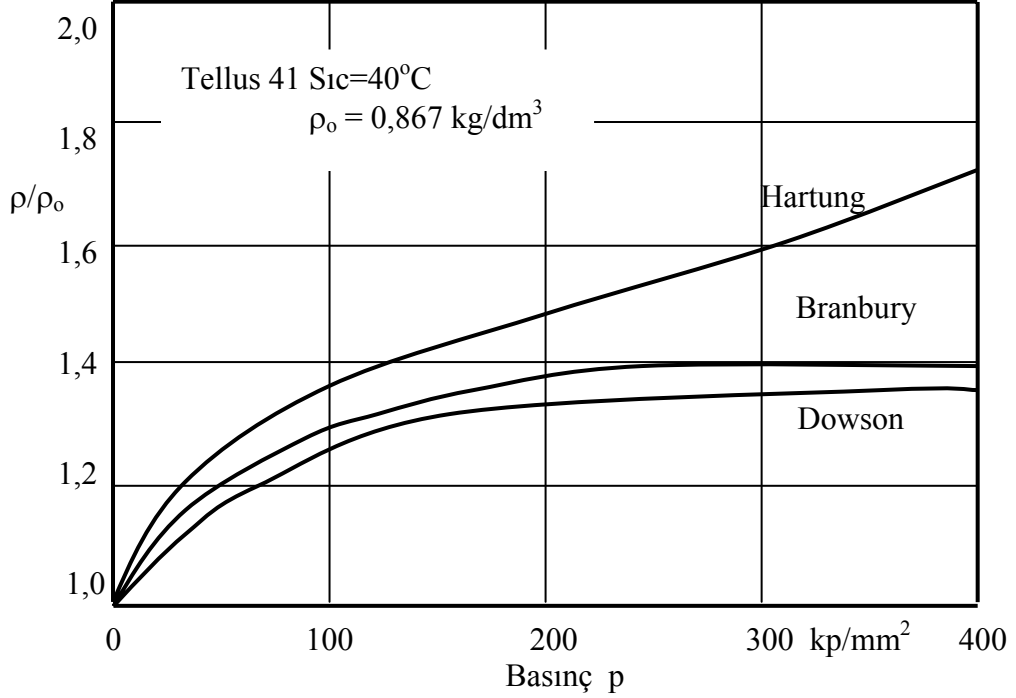
veya

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 1 + \frac{9,73 \cdot 10^{-3} \cdot p^{0,75}}{\nu^{0,0385}} \quad (3.4.10)$$

haline gelir. Bu denklemde p kp/mm² ve ν cst (38 °C' de) birimlerinde kullanılmalıdır.



Şekil 3.4.1. Bazı yağların yoğunluklarının sıcaklıkla değişimleri (Brüser 1972)



Şekil 3.4.2. Mineral yağlar için yoğunluğunun basınca ile değişimi (Brüser 1972)

3.4.2. Viskozite :

Viskozite için sık kullanılan ekspronensiyel kanun Brüser 1972 kaynağından;

$$\frac{\eta}{\eta_o} = e^{\alpha.p} \quad (3.4.11)$$

şeklindedir. Bu denklem nafta bazlı yağlar için memnun edici sonuç verir.

Daha sonra WOOSTER bu denklemdeki α için şöyle bir bağıntı bulmuştur.

$$\alpha = 0,06 + 0,0965 \cdot \log \eta_o$$

Burada η_o ' ın birimi cP' dir.

ASME' nin zengin araştırmaları sonucu CHU VE CAMERON ise parafin bazlı mineral yağlar için şu bağıntıyı bulmuşlardır.

$$\frac{\eta}{\eta_o} = (C^* . p + 1)^{n^*} \quad (3.4.12)$$

Burada ;

$$n^* = 16$$

$$C^* = 0,088 \cdot 10^{a^*} \cdot \eta_o^{-0,062} \quad (\eta_o \text{ cP cinsinden})$$

$$a^* = -\left(0,48 + \frac{1,8 \cdot \vartheta}{400}\right) \quad (\vartheta \text{ } ^\circ\text{C cinsinden})$$

bu çalışmaların sonucunda CAMERON deney sonuçları ile çok iyi bir şekilde uyum gösteren bir formülü elde etmeyi başarmıştır. (Brüser 1972)

$$(\log \eta)^{\frac{3}{2}} = m^* (p + a^*) \quad (3.4.13)$$

Burada ;

$$1 < \eta_o < 6 \text{ cP için}$$

$$m^* = (1,3 + 7,1 \cdot \log \eta_o) \cdot 10^{-2}$$

ve $\eta_o > 6 \text{ cP için}$

$$m^* = 0,076 \cdot \log \eta_o \quad \text{olarak alınır.}$$

a^* sabiti atmosfer basıncındaki başlangıç şartlarında bulunmaktadır ve şu şekilde hesaplanır. (Brüser 1972)

$$a^* = 13,2 \cdot \sqrt{\log \eta_o}$$

bu tanımlamalara göre $\eta_o > 6$ cP için

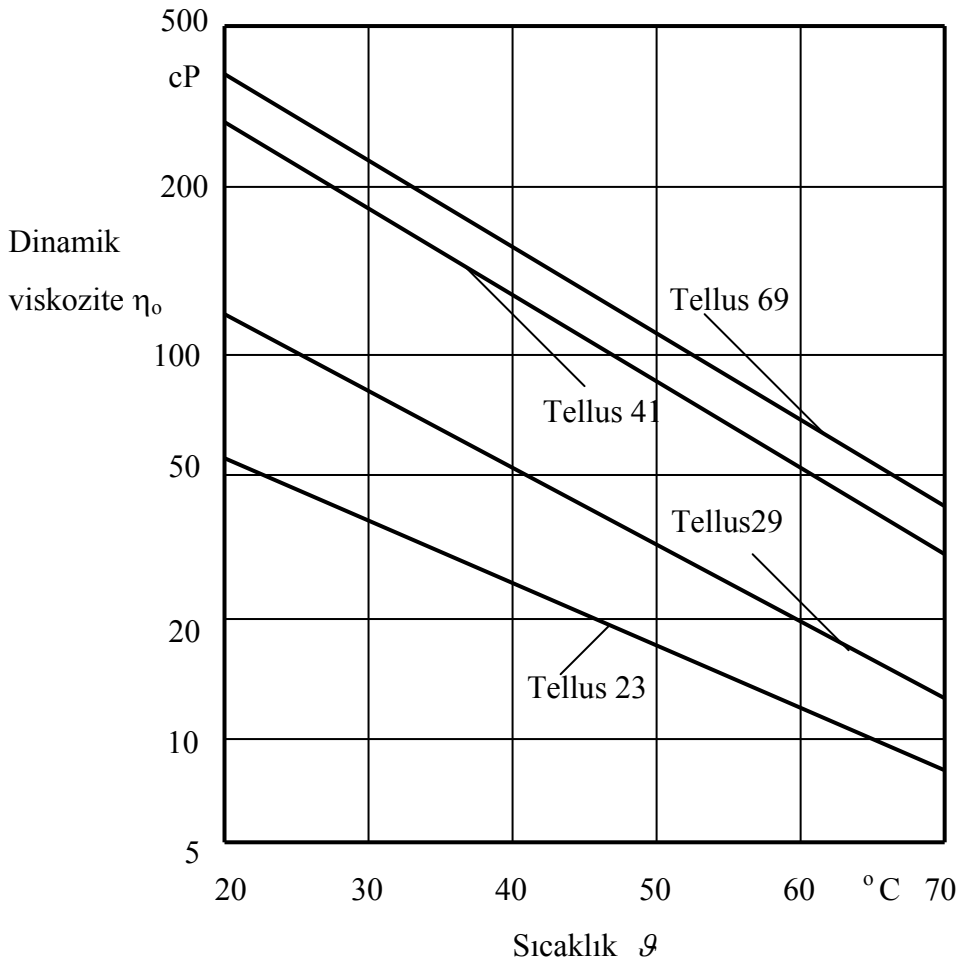
$$\log \eta = 0,18 \cdot (\log \eta_o)^{2/3} \cdot (1,422 \cdot p + 13,2 \cdot \sqrt{\log \eta_o})^{2/3} \quad (3.4.14)$$

denklemini geçerli olmaktadır.

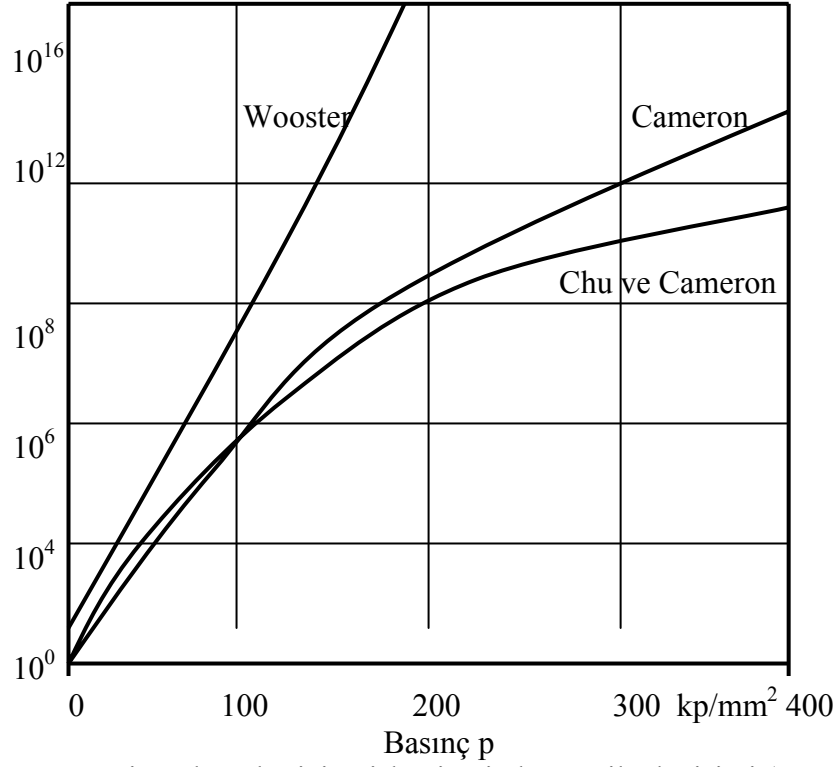
Boyutsuz formda,

$$\frac{\eta}{\eta_o} = \frac{1}{\eta_o} \cdot \exp \left[0,16478 \cdot p \cdot \ln \eta_o + \sqrt{(\ln \eta_o)^3} \right]^{2/3} \quad (3.4.15)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem viskozitenin basınç ile değişim denklemdir.



Şekil 3.4.3. Bazı yağların viskozitelerinin sıcaklıkla değişimi (Brüser 1972)



Şekil 3.4.4. Mineral yağlar için viskozitenin basınç ile değişimi (Brüser 1972)

3.5. Denklem sistemi :

1-) Elastik Deformasyon Denklemi :

$$(w)_{z=0} = \frac{(1 - \mu^2)P}{\pi E r} \quad (3.1.27)$$

2-) Reynolds Denklemi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (3.2.50)$$

3-) Geometrik Denklem :

$$h(x, y) = h_o + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + w(x, y) - w_o \quad (3.3.6)$$

4-) Yağın Hal Denklemleri :**a-) Yoğunluk Denklemi :**

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 1 + \frac{9,73 \cdot 10^{-3} \cdot p^{0,75}}{\nu^{0,0385}} \quad (3.4.10)$$

b-) Viskozite Denklemi :

$$\frac{\eta}{\eta_o} = \frac{1}{\eta_o} \cdot \exp \left[0,16478 \cdot p \cdot \ln \eta_o + \sqrt{(\ln \eta_o)^3} \right]^{2/3} \quad (3.4.15)$$

4. MATERYAL ve YÖNTEM :

Bu tez çalışmasında bilyalı ve makaralı rulmanlarda meydana gelen Hertz Deformasyonu'nun hesaplanabilmesi için Matlab 7 (R2008) bilgisayar programında sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Ancak öncelikle kullanılacak olan temel boyut ve değerlerin bulunuşları açıklanmıştır.

4.1. Temel Hesaplamalar :

Daha önce de belirtildiği gibi bilyalı rulmanlarda bilya ile bileziğin teması sonucunda eliptik bir temas yüzeyi meydana gelir, bu temas yüzeyinin boyutları ve bu boyutların oluşmasına neden olan basınç dağılımı Brüser 1972 kaynağında şöyle hesaplanır.

$$P(x, y) = p_o \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} \quad (4.1)$$

burada p_o en büyük basınç değeridir ve Denk.3.1.52. ye göre

$$p_o = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (4.2)$$

olarak hesaplanır. Ortalama basınç değeri ise Brüser 1972 kaynağında;

$$p_m = \frac{2}{3} p_o \quad (4.3)$$

dır. Eliptik yüzeyin yarıçap değerleri ise Brüser 1972 kaynağında;

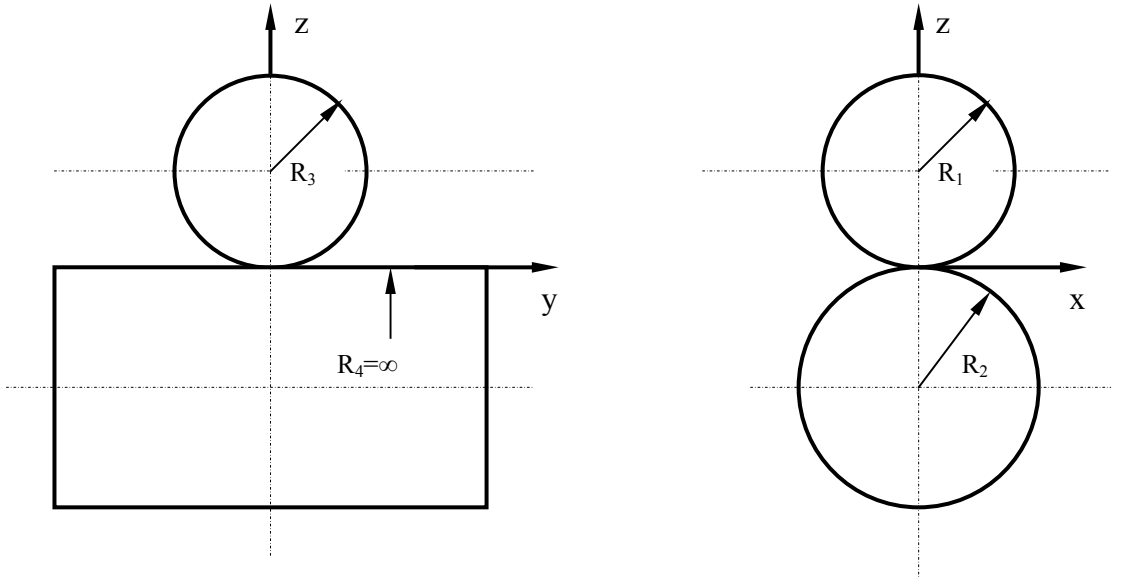
$$a = \xi \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi \cdot F \cdot (k_1 + k_2)}{4 \cdot AB}} \quad (4.4)$$

$$b = g \cdot \sqrt[3]{\frac{3\pi \cdot F \cdot (k_1 + k_2)}{4 \cdot AB}} \quad (4.5)$$

olarak bulunur. Burada

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1-\mu_1^2}{E_1 \cdot \pi} \\ k_2 &= \frac{1-\mu_2^2}{E_2 \cdot \pi} \\ AB &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

şeklinde hesaplanır. Bu denklemlerdeki R_1 , R_2 , R_3 ve R_4 yarıçapları Şekil 4.1 yardımıyla şöyle açıklanabilir.



Şekil 4.1. İki Yuvarlanma Cisminin Yarıçaplarının İzahı

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \\ \frac{1}{R_x} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_y} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

olarak hesaplanır.

Deformasyon sonucunda iki cismin aralarındaki teması korumaları için birbirlerine yaklaşması gereken toplam yassılma miktarı ise Brüser 1972 kaynağında

$$\delta = 1,5 \frac{2K}{\pi \cdot \xi} \sqrt[3]{\frac{(1-\mu^2)^2}{E^2} \cdot \frac{F^2}{3R}} \quad (4.8)$$

denklemini ile hesaplanır.

a, b ve δ denklemlerinde kullanılan ξ , ϑ ve $\frac{2K}{\pi \cdot \xi}$ değerleri ise $\cos \varphi$ olarak

tanımlanan yardımcı bir değere bağlı olarak bulunabilir. Bu $\cos \varphi$ değeri ise

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4}\right)\cos 2\omega}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad (4.9)$$

Brüser 1972 kaynağından şeklinde bulunur.

R_1 ve R_3 yarıçaplarına sahip dönel cismin bulunduğu düzlem ile R_2 ve R_4 yarıçaplarına sahip dönel cismin bulunduğu düzlem arasındaki açı ω ile ifade edilmektedir. Şekil 4.1' deki durumda $\omega = 0$ olduğu için, denklem daha kullanışlı bir hale getirilebilir. Bu durumda Brüser 1972 kaynağından;

$$\cos \varphi = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad (4.10)$$

olur. Burada $a > b$ için $\cos \varphi$ pozitifdir, ve φ açısına göre ξ , ϑ ve $\frac{2K}{\pi \cdot \xi}$ değerleri

Çizelge 4.1.' den bulunabilir. (Brüser 1972)

Çizelge 4.1. φ Açısına göre ξ , \mathcal{G} ve $\frac{2K}{\pi.\xi}$ değerleri

φ	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
ξ	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378	1,284	1,202	1,128	1,061	1
\mathcal{G}	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759	0,802	0,846	0,893	0,944	1
$\frac{2K}{\pi.\xi}$	0,730	0,780	0,820	0,880	0,900	0,920	0,940	0,960	0,980	0,985	0,990	0,995	1

Makaralı rulmanlarda ise makara ile bileziğin teması sonucunda dikdörtgensel bir temas yüzeyi meydana gelir ve bu durumda basınç değerleri ve temas yüzeyi boyutları Brüser 1972 kaynağında şöyle bulunur.

$$P(x) = p_o \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2} \quad (4.11)$$

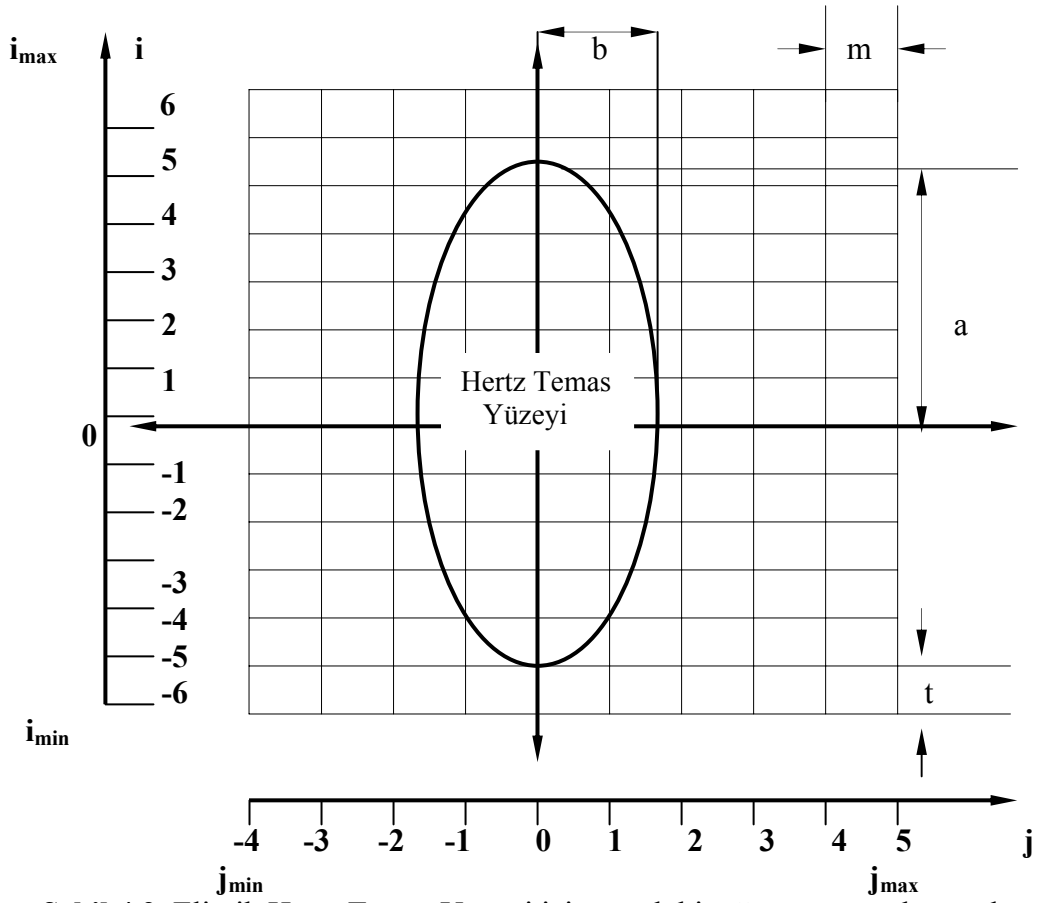
$$p_o = \frac{2F}{\pi.b.l} \quad (4.12)$$

$$p_m = \frac{p_o}{1,27} \quad (4.13)$$

$$b = \sqrt{\frac{2F(k_1 + k_2)}{AB.l}} \quad (4.14)$$

4.2. Basınç Dağılımının Oluşturulması :

Bu temel hesaplamalar yapıldıktan sonra sonlu farkların uygulanacağı Hertz Temas Alanı'nı kapsayan ağ yapısı oluşturulabilir. Bu ağ yapısı eliptik bir Hertz Temas Alanı için Şekil 4.2.' de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Eliptik Hertz Temas Yüzeyi için örnek bir ağ yapısının oluşturulması

Bu ağ yapısına göre eliptik veya dikdörtgenel Hertz Temas Yüzeyi için uygulanan kuvvet, verilen çap boyutları, Elastisite Modülü ve Poisson Oranları değerlerine göre bir basınç ve deformasyon alanı oluşturulabilir.

4.3. Elastik Deformasyonun Oluşturulması :

Denk.3.1.27.'ye göre

$$(w)_{z=0} = \frac{(1-\mu^2)P}{\pi E r} \quad (3.1.27)$$

olarak bulunmuştu. Bu denklem kuvvete göre değil de basınca göre yazılır ve integral formunda düzenleme yapılırsa Brüser 1972 kaynağından,

$$w(x, y) = \frac{(1 - \mu^2)}{\pi E} \iint \frac{P(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}} \quad (4.15)$$

şeklini alır. Bu denklemde x ve y deformasyonu hesaplanacak olan noktanın koordinatlarını, $P(x_1, y_1)$ deformasyona neden olan basınç değerini, x_1 ve y_1 ise bu deformasyona neden olan basıncın koordinatlarını göstermektedir. dx_1 ve dy_1 ise ağ yapısı içinde x ve y doğrultularındaki birim ağ elemanının boyutlarıdır. Bu durumda bir noktada meydana gelen deformasyonu hesaplayabilmek için bu noktaya etki eden tüm basınçların meydana getirdikleri deformasyonları toplamak gerekmektedir. Yani Denk.4.15

$$w(iw, jw) = \frac{(1 - \mu^2)}{\pi E} \sum_{i=i_{\min}}^{i=i_{\max}} \sum_{j=j_{\min}}^{j=j_{\max}} \frac{P(i, j).m.t}{\sqrt{(iw - i)^2 + (jw - j)^2}} \quad (4.16)$$

şekline döner.

Ancak $iw = i$ ve $jw = j$ noktasında yani, yükün etki ettiği nokta ile meydana gelen deformasyonun hesaplanacağı nokta aynı olduğunda, sonuç sonsuz çıkmaktadır. Bu nedenle bu noktadaki deformasyon integral işlemi alınarak bulunmak zorundadır. Bu integral işlemi ağ yapısının birim elemanına göre Brüser 1972 kaynağında şöyle alınmıştır.

$$w' = \frac{(1 - \mu^2)}{\pi E} P(i, j) \int_{y=-t/2}^{y=t/2} \int_{x=-m/2}^{x=m/2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.17)$$

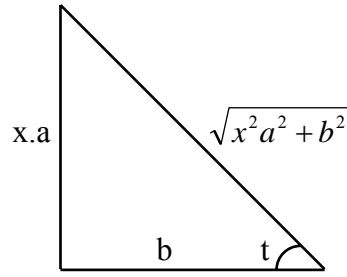
Bu integrallerden ilk önce dx 'e göre olanı 0 ile $m/2$ aralığında alınmıştır.

$$\int_{x=0}^{x=m/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.18)$$

Bu integralde

$$x = \frac{b}{a} \tan(t) \quad \text{şeklinde dönüşüm yapılırsa}$$

Burada ;



$$\tan(t) = \frac{x.a}{b}$$

$$\sin(t) = \frac{x.a}{\sqrt{x^2.a^2 + b^2}}$$

$$\cos(t) = \frac{b}{\sqrt{x^2.a^2 + b^2}}$$

a=1 ve b=y için

$$\tan(t) = \frac{x}{b}$$

$$\sin(t) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos(t) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

şeklindedir. (Burada kullanılan t açısının ağ yapısı içinde y doğrultusunda kullanılan birim uzunlukla bir ilişkisi yoktur.) (Brüser 1972)

Denk.4.18' de a=1, b=y olduğu için

$$x = y \cdot \tan(t) \quad \text{ve } dx \text{ ise}$$

$$dx = y \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} dt \quad \text{olur.}$$

Bu değerler Denk.4.18.' de yerlerine konulursa ;

$$\int \frac{y \frac{1}{\cos^2(t)} dt}{\sqrt{y^2 \tan^2(t) + y^2}}$$

$$\int \frac{y \frac{1}{\cos^2(t)} dt}{y \sqrt{\tan^2(t) + 1}} = \int \frac{1}{\cos(t)} dt = \int \sec(t) dt \quad \text{olur.}$$

sec(t)' nin integrali ise

$$\ln(\sec(t) + \tan(t)) = \ln\left(\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t)\right)$$

sonucuna ulaşılır. cos(t) ve tan(t) değerleri x ve y cinsinden yerlerine konulur ve sınır değerler de yerleştirilirse ;

$$\ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} + \frac{x}{y} \right)_0^{\frac{m}{2}} \quad \text{olur ve}$$

$$\int_{x=0}^{x=m/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln \left(\frac{\frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + y^2}}{y} \right) \quad (4.19)$$

sonucuna ulaşılır. (Brüser 1972)

Artık Denk.4.17 şu şekle dönüşmüştür.

$$\int_{y=-t/2}^{y=t/2} \ln \left(\frac{\frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + y^2}}{y} \right) dy \quad (4.20)$$

bu logaritmik integralde $z = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + y^2}$ dönüşümü yapılarak ve $t/m = f$ olarak

alınarak 0 ile $t/2$ aralığı için Brüser 1972 kaynağında

$$\frac{m}{2} \left[\sqrt{1+f^2} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{1+f^2}}{\sqrt{1+f^2}-1} \right) + \ln(\sqrt{1+f^2}-1) \right] \quad (4.21)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda Denk.4.17' deki integral işlemi $-t/2$ ile $t/2$ ve $-m/2$ ile $m/2$ aralıkları için;

$$w' = \frac{(1-\mu^2)}{\pi E} P(iw = i, jw = j) \cdot 2m \cdot \left[\sqrt{1+f^2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+f^2}}{\sqrt{1+f^2}-1} \right) + \ln(\sqrt{1+f^2}-1) \right] \quad (4.22)$$

olarak sonuçlanmış olur.

Buna göre her hangi bir noktadaki toplam deformasyon w' ve $w(iw,jw)$ değerlerinin toplamı sonucunda bulunur.

4.4. En Küçük Aralık Uzaklığı h_0 ' ın Hesaplanması :

Hesaplamanın devamı için öncelikle h_0 ' ın bulunması gerekmektedir. Bunun için Reynolds Denklemi'ni, yani Denk.3.2.50.'yi ele alınmıştır.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (3.2.50)$$

bu denklemdeki parantez içindeki türev alma işlemleri yapıp, her taraf $\frac{\rho h^3}{\eta}$

parantezine alınır ve düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho h^3}{\eta} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \dots \\ & = 12U \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{\partial h}{\partial x} \rho \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Brüser 1972 kaynağında sonucuna ulaşılır.

Burada c ($y=0$, $x=x_c$) gibi bir nokta aranmalıdır. Bu nokta $y=0$ simetri çizgisi üzerinde olduğu için y' ye göre birinci türevler sıfır olur ve denklem

$$\frac{\rho h^3}{\eta} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + 3h^2 \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} = 12U \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{\partial h}{\partial x} \rho \right) \quad (4.24)$$

halini alır.

Bu noktadan sonra

$$h^* = \rho.h$$

ve

$$\frac{\partial h^*}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{\partial h}{\partial x} \rho$$

dönüşümleri yapıp, Denk.4.26.'nın sol tarafına

$$\left(\frac{3}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \cdot \frac{\rho h^3}{\eta}$$

tanımlaması çıkarılıp eklenirse

$$\frac{\rho h^3}{\eta} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \left(3h^2 \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{3h^3}{\eta} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \frac{\partial P}{\partial x} = 12U \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{\partial h}{\partial x} \rho \right)$$

olur. Yukarıda tanımlanan dönüşümler yerlerine konulursa

$$\frac{h^{*3}}{\eta \rho^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial h^*}{\partial x} \left(\frac{3h^{*2}}{\eta \rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} - 12U \right) = 0 \quad (4.25)$$

sonucuna ulaşılır.

Aranılan c ($y=0$, $x=x_c$) noktasında, Denk.4.25.'nin birinci terimi sıfır olmalıdır. Sayısal yöntemlerle yapılan araştırma sonucu

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_c + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right)_c - \frac{2}{\rho_c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_c \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_c - \frac{1}{\eta_c} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_c \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_c = 0 \quad (4.26)$$

noktası bulunmalıdır. Bu duruma başlangıç bölgesinde rastlanır ve bu noktada Reynolds Denklemi de şu hale gelir.

$$\frac{3h_c^{*2}}{\eta_c \rho_c^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_c - 12U = 0 \quad (4.27)$$

ve Denk.4.29.'dan c noktasındaki film kalınlığı ise,

$$h_c = 2 \sqrt{\frac{U \cdot \eta_c}{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_c}} \quad (4.28)$$

Brüser 1972 kaynağında şeklinde bulunur. Geometrik Denklem, yani Denk.3.3.6, kullanılarak bu h_c değeri koordinat sisteminin sıfır noktasına uygulandığında, h_0 yağ filmi kalınlığı bulunabilir.

4.5. Deformasyondan Aralık Konturu $h(x,y)$ ' nin Hesaplanması :

$h(x,y)$ ' nin bulunması için Geometrik Denklem olarak tanımladığımız Denk.3.3.6.' dan faydalanılmıştır.

$$h(x, y) = h_o + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + w(x, y) - w_o \quad (3.3.6)$$

Bu denklem oluşturulan ağ yapısına uygun bir şekilde yazılırsa

$$h(i, j) = h_o + \frac{X^2(i)}{2R_1} + \frac{Y^2(j)}{2R_3} + W_1(i, j) - W_1(0,0) \quad (4.29)$$

eşitliği Brüser 1972 kaynağında elde edilir.

4.6. Katsayıların Hesaplanması :

$h(x,y)$ aralık hattının başka bir deyişle yağ filmi kalınlığı değişiminin de bulunmasından sonra artık Reynolds Denklemi kullanılarak yeni basınç dağılımı hesaplanabilir. Ancak bundan önce sonlu farklar yönteminin rahatlıkla uygulanabilmesi için Reynolds Denklemi'nin uygun bir şekle dönüştürülmesi gerekir.

Bu durumda Reynolds Denklemi yani Denk.3.2.50. ele alınıp ; (Brüser 1972)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) \quad (3.2.50)$$

bu denklemdeki parantez içindeki türev alma işlemleri yapıldığında

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{h^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} + 3h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \rho h^3 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \dots \\ & + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{h^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial y} + 3h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \rho h^3 \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \dots \\ & = 12U \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{\partial h}{\partial x} \rho \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

olur. Her taraf $\frac{\rho h^3}{\eta}$ parantezine alınır ve düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho h^3}{\eta} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \dots \\ & = 12U \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} h + \frac{\partial h}{\partial x} \rho \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

halini alır. Daha sade bir gösterimle

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + F_1 \frac{\partial P}{\partial x} + F_2 \frac{\partial P}{\partial y} = F_3 \quad (4.32)$$

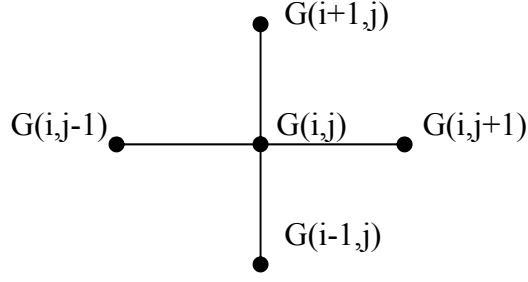
olur. Burada

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \\ F_2 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial y} \\ F_3 &= \frac{12U\eta}{h^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

şeklindedir.

Bu haliyle Reynolds Denklemi sonlu farkların uygulanabilmesi için uygun bir duruma gelmiş bulunmaktadır.

Her hangi bir G fonksiyonu için Taylor Açılımı'ndan yararlanılarak ve ileri sonlu farklar kullanılarak birinci ve ikinci türevler Brüser 1972 kaynağından şu şekilde alınabilir.



Şekil 4.3. Komşu Düğüm Noktalarının Sistemi (Brüser 1972)

$$G(i, j+1) = G(i, j) + m \frac{\partial G(i, j)}{\partial x} + \frac{m^2}{2!} \frac{\partial^2 G(i, j)}{\partial x^2} + \frac{m^3}{3!} \frac{\partial^3 G(i, j)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.34.a)$$

$$G(i, j-1) = G(i, j) - m \frac{\partial G(i, j)}{\partial x} + \frac{m^2}{2!} \frac{\partial^2 G(i, j)}{\partial x^2} - \frac{m^3}{3!} \frac{\partial^3 G(i, j)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.34.b)$$

Buna göre x 'e göre birinci türev

$$G(i, j+1) - G(i, j-1) = 2m \frac{\partial G(i, j)}{\partial x} + hata$$

$$\frac{\partial G(i, j)}{\partial x} = \frac{G(i, j+1) - G(i, j-1)}{2m} + hata \quad (4.35)$$

olur.

İkinci türev ise

$$G(i, j+1) + G(i, j-1) = 2G(i, j) + \frac{2m^2}{2!} \frac{\partial^2 G(i, j)}{\partial x^2} + hata$$

$$\frac{\partial^2 G(i, j)}{\partial x^2} = \frac{G(i, j+1) - 2G(i, j) + G(i, j-1)}{m^2} + hata \quad (4.36)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde y 'ye göre birinci ve ikinci türevler ise

$$\frac{\partial G(i, j)}{\partial y} = \frac{G(i+1, j) - G(i-1, j)}{2t} + hata \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 G(i, j)}{\partial y^2} = \frac{G(i+1, j) - 2G(i, j) + G(i-1, j)}{t^2} + hata \quad (4.38)$$

olarak bulunur.

Yoğunluğun ve viskozitenin basınçla değişimlerini hesaplayabilmek için ise

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 1 + \frac{9,73 \cdot 10^{-3} \cdot p^{0,75}}{\nu^{0,0385}} \quad (3.4.10)$$

$$\frac{\eta}{\eta_o} = \frac{1}{\eta_o} \cdot \exp\left[0,16478 \cdot p \cdot \ln \eta_o + \sqrt{(\ln \eta_o)^3}\right]^{2/3} \quad (3.4.15)$$

Brüser 1972 kaynağından denklemleri kullanılır.

4.7. Denklem Sisteminin Oluşturulması :

Düzenlenen Reynolds Denklemi'nde basıncın x'e ve y'ye göre birinci ve ikinci türevleri sonlu farklar yöntemindeki şekliyle yazılırsa Timoshenko 1969 kaynağından,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{P(i, j+1) - 2P(i, j) + P(i, j-1)}{m^2} + \frac{P(i+1, j) - 2P(i, j) + P(i-1, j)}{t^2} \dots \\ & + F_1 \frac{P(i, j+1) - P(i, j-1)}{2m} + F_2 \frac{P(i+1, j) - P(i-1, j)}{2t} = F_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

halini alır. Bu denklemde paydalar eşitlenecek olursa,

$$\left. \begin{aligned} & P(i, j+1).t^2 - 2P(i, j).t^2 + P(i, j-1).t^2 + P(i, j+1).m^2 - 2P(i, j).m^2 \dots \\ & + P(i, j-1).m^2 + F_1 \frac{1}{2} m.t^2 P(i, j+1) - F_1 \frac{1}{2} m.t^2 P(i, j-1) \dots \\ & + F_2 \frac{1}{2} t.m^2 P(i+1, j) - F_2 \frac{1}{2} t.m^2 P(i-1, j) = F_3.t^2.m^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

elde edilir. Aynı P noktasına ait katsayılar bir parantezde toplanırsa,

$$\begin{aligned}
 & P(i, j+1) \left(t^2 + F_1 \frac{1}{2} m t^2 \right) + P(i, j-1) \left(t^2 - F_1 \frac{1}{2} m t^2 \right) \dots \\
 & + P(i+1, j) \left(m^2 + F_2 \frac{1}{2} t m^2 \right) + P(i-1, j) \left(m^2 - F_2 \frac{1}{2} t m^2 \right) \dots \\
 & + P(i, j) (-2t^2 - 2m^2) = F_3 t^2 m^2
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

olur. Her taraf m^2 'ye bölünürse ($f=t/m$ olmak üzere),

$$\begin{aligned}
 & P(i, j+1) \left(\frac{t^2}{m^2} + F_1 \frac{1}{2} m \frac{t^2}{m^2} \right) + P(i, j-1) \left(\frac{t^2}{m^2} - F_1 \frac{1}{2} m \frac{t^2}{m^2} \right) \dots \\
 & + P(i+1, j) \left(1 + F_2 \frac{1}{2} t \right) + P(i-1, j) \left(1 - F_2 \frac{1}{2} t \right) \dots \\
 & + P(i, j) \left(-2 \frac{t^2}{m^2} - 2 \right) = F_3 t^2
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

ve daha sonra,

$$\begin{aligned}
 & P(i, j+1) \left(1 + F_1 \frac{m}{2} \right) f^2 + P(i, j-1) \left(f^2 - F_1 \frac{m}{2} f^2 \right) \dots \\
 & + P(i+1, j) \left(1 + F_2 \frac{m \cdot f}{2} \right) + P(i-1, j) \left(1 - F_2 \frac{m \cdot f}{2} \right) \dots \\
 & + P(i, j) (-2f^2 - 2) = F_3 m^2 f^2
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
 & P(i, j+1) \cdot F_{11} + P(i, j-1) \cdot (2f^2 - F_{11}) + P(i+1, j) \cdot F_{22} \dots \\
 & + P(i-1, j) \cdot (2 - F_{22}) + P(i, j) (-2f^2 - 2) = F_{33}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

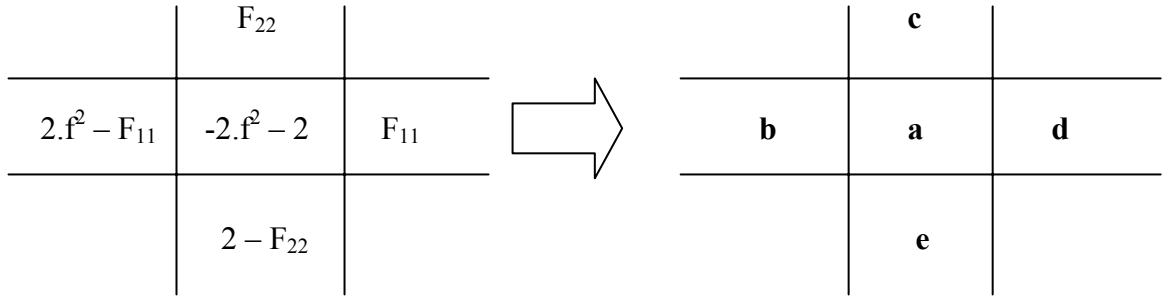
elde edilir.

Burada

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= \left(1 + F_1 \frac{m}{2}\right) \cdot f^2 \\ F_{22} &= 1 + F_2 \frac{m}{2} f \\ F_{33} &= m^2 f^2 F_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.46.)$$

şeklindedir.

Şekil 4.4. Katsayılar Matrisi'nin yerleştirilmesinde kullanılacak olan, her hangi bir nokta için, katsayıların şemasını göstermektedir.

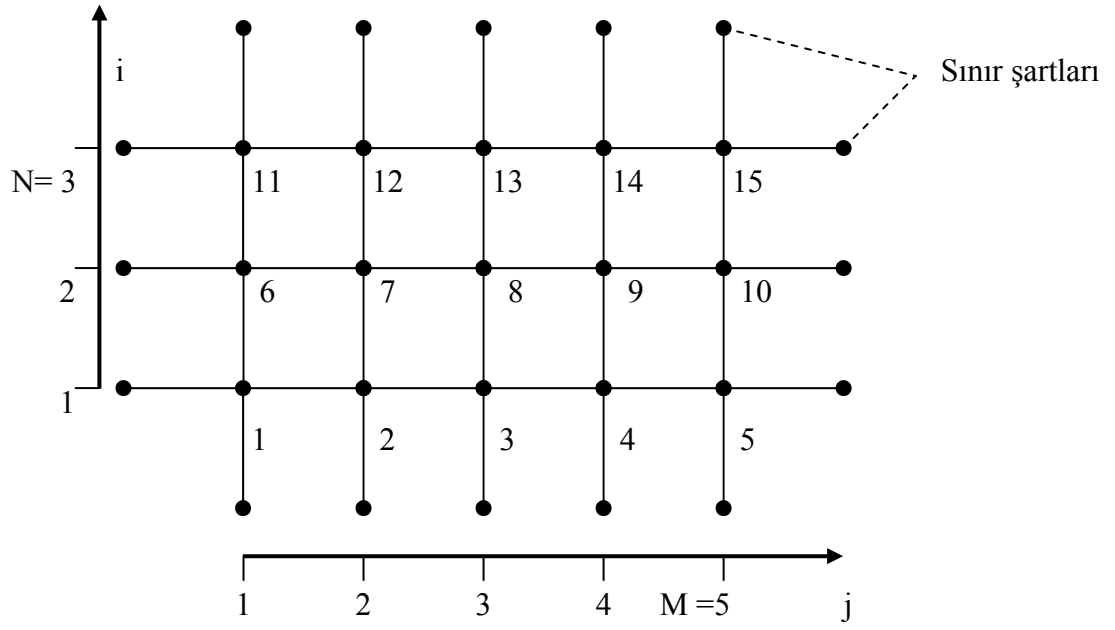


Şekil 4.4. Basınç için Katsayılar Matrisi'nin yerleştirme şeması (Brüser 1972)

Bu şema yardımıyla her bir lineer denklem matrisin bir satırını oluşturacak şekilde, katsayıların yerleştirilmesi sağlanarak Katsayılar Matrisi oluşturulabilir.

Bu yerleştirme işleminin izahı, Şekil 4.5.' de gösterildiği gibi, 15 noktanın bulunduğu bir basınç alanı ile yapılacaktır.

Bu noktalara ait katsayıların Katsayılar matrisine yerleştirilmesi ise, Şekil 4.4.'deki şema yardımıyla, Şekil 4.6.'daki gibi yapılır.



Şekil 4.5. 15 düğüm noktasından oluşan örnek bir ağ yapısı (Brüser 1972)

Bilinmeyenlerin Sayısı \longrightarrow

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	B
1	a1	d1				c1										F ₃₃ 1
2	b2	a2	d2				c2									F ₃₃ 2
3		b3	a3	d3				C3								F ₃₃ 3
4			b4	a4	d4				c4							F ₃₃ 4
5				b5	a5					c5						F ₃₃ 5
6	e6					a6	d6				c6					F ₃₃ 6
7		e7				b7	a7	D7				c7				F ₃₃ 7
8			e8				b8	A8	d8				c8			F ₃₃ 8
9				e9				B9	a9	d9				c9		F ₃₃ 9
10					e10				b10	a10					c10	F ₃₃ 10
11						e11					a11	d11				F ₃₃ 11
12							e12				b12	a12	d12			F ₃₃ 12
13								E13				b13	a13	d13		F ₃₃ 13
14									e14				b14	a14	d14	F ₃₃ 14
15										e15				b15	a15	F ₃₃ 15

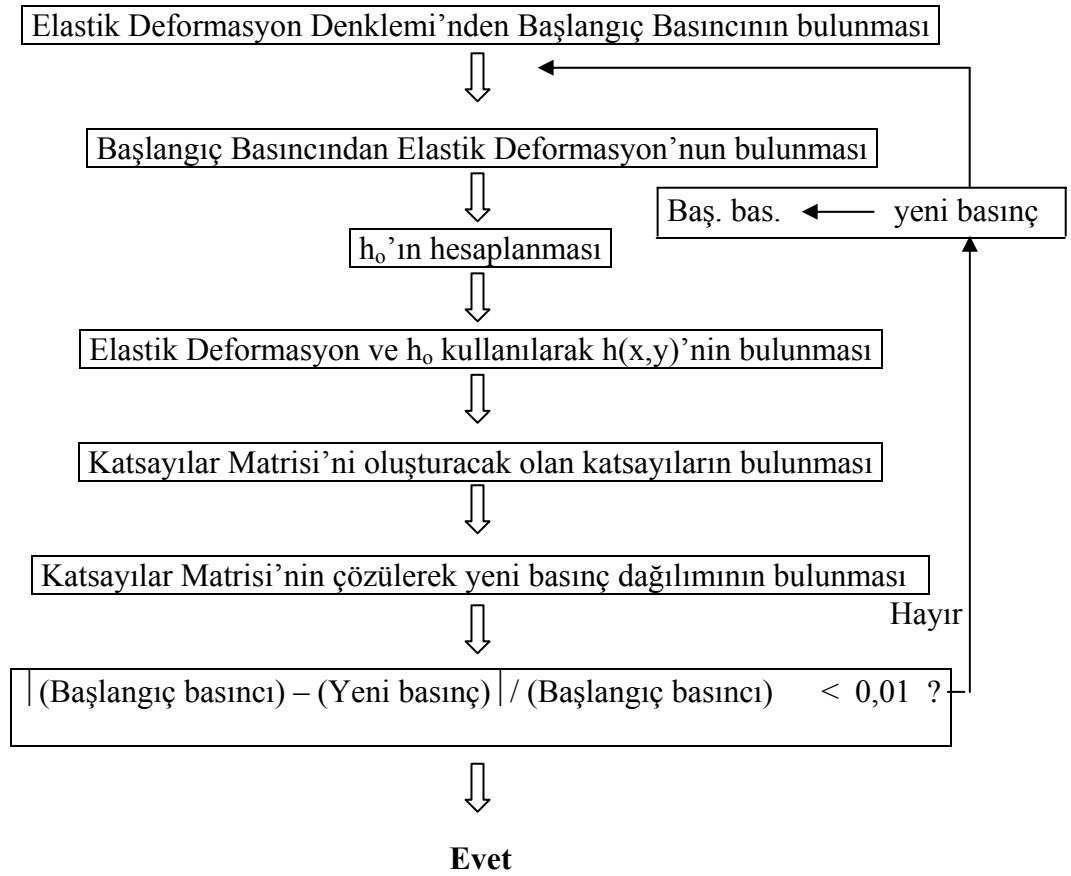
Şekil 4.6. 15 düğüm noktalı bir ağ yapısı için Katsayılar Matrisi (Brüser 1972)

Şekil 4.6.'daki Katsayılar Matrisi'nden görüldüğü gibi bir satırda (denklemden) en fazla beş bilinmeyenle karşılaşmaktadır. Yani incelenen her hangi bir düğüm noktası en fazla 4 komşu nokta ile ilişkili olmaktadır. Sağ sütundaki B ile gösterilen sütun matrisi ise çözüm vektörüdür.

Bu Katsayılar Matrisi'nin tersi alınıp B çözüm vektörü ile çarpıldığı takdirde bilinmeyen değerler, yani yeni basınç dağılımını oluşturacak olan basınç değerleri bulunmuş olur. Ancak bu basınç dağılımını Reynolds Denklemi sonucunda elde edilmiş olmaktadır.

4.8. Basınç Dağılımları Arasında Yaklaşım Yapılması :

Reynolds Denklemi yardımıyla bulunan bu basınç dağılımı ile işlemin başlangıcında kullanılan ve Elastik deformasyona neden olan basınç dağılımı arasında bir mukayese yapmak gerekmektedir. Böylece en uygun basınç dağılımı elde edilmiş olacaktır. Basınçlar arasındaki bu yaklaşım işlemi aşağıdaki algoritma yardımıyla şu şekilde açıklanabilir.



Şekil 4.7. Basınçlar arasındaki yaklaşımın algoritması

4.9. Aralık Hattının (Yağ Filmi Kalınlığının) Reynolds Denklemi'nden Hesaplanması

Denk.3.2.50.' deki Reynolds Denklemi' nin parantez içindeki terimlerinin türevleri alınıp gerekli düzenleme işlemleri yapıldıktan sonra Denk.4.32. elde edilmiştir.

Bu denklem $h(x,y)$ ' nin bulunması amacı ile $\frac{\partial h}{\partial x}$ ve $\frac{\partial h}{\partial y}$ ortak parantezlerine alınırsa

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{3}{h} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{12U\eta}{h^3} \right) + \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{3}{h} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \dots \\ & = - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} \right) \dots \\ & + 12 \frac{U\eta}{h^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Brüser 1972 kaynağına göre şekline gelir. Burada

$$K = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (4.48)$$

olarak alınır ve Denk.4.47.' i K terimine bölünürse

$$\frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{\left(\frac{3}{h} \frac{\partial P}{\partial x} \right)}{K} - \frac{12U\eta}{h^3 K} \right] + \frac{\partial h}{\partial y} \left[\frac{\left(\frac{3}{h} \frac{\partial P}{\partial x} \right)}{h.K} \right] = -1 + \frac{\left(12U\eta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}{h^2.K} \quad (4.49)$$

ve her tarafı h^3 ile çarpılırsa şu sonuç elde edilir.

$$\frac{\partial h}{\partial x} \left[\frac{\left(3h^2 \frac{\partial P}{\partial x} \right)}{K} - \frac{12U\eta}{K} \right] + \frac{\partial h}{\partial y} \left[\frac{\left(3h^2 \frac{\partial P}{\partial y} \right)}{K} \right] = -h^3 + h \cdot \frac{\left(12U\eta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}{K} \quad (4.50)$$

Bölüm 4.7’ de basınç dağılımının bulunması sırasında kullanılan sonlu fark yöntemi ile birinci ve ikinci türev alma teknikleri burada da h için uygulanırsa Brüser 1972 kaynağında şu sonuçlar elde edilir.

$$h(i, j+1) \cdot H_{11} + h(i, j-1) \cdot (-H_{11}) + h(i+1, j) \cdot H_{22} + h(i-1, j) \cdot (-H_{22}) + h(i, j) = H_{33} \quad (4.51)$$

Burada ;

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \frac{3h^2 \frac{\partial P}{\partial x}}{2m \cdot K} - \frac{12U\eta}{2m \cdot K} \\ H_{22} &= \frac{3h^2 \frac{\partial P}{\partial y}}{2t \cdot K} \\ H_{33} &= -h^3 + h \cdot \left[1 + \frac{12U\eta \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}}{K} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

şeklindedir.

Basıncın bulunması için uygulanan Katsayılar Matrisi oluşturma şekli burada da h için aşağıdaki şemaya göre uygulanır ve bu matrisinin de tersi alınıp sonuç vektörü ile çarpılırsa, Reynolds Denklemi’nden yağ filmi kalınlığı bulunmuş olur.

	H ₂₂	
-H ₁₁	1	H ₁₁
	-H ₂₂	

Şekil 4.8. Yağ filmi kalınlığı için Katsayılar Matrisi'nin yerleştirme şeması

4.10. Basınçların Değişimi :

Reynolds Denklemi'nden bulunan yağ filmi kalınlığı (h'') ile Elastik Deformasyon Denklemi'nden bulunan aralık hattı (h') arasında bir mukayese yapılması gerekmektedir.

Ancak bu mukayesenin

$$\left| \frac{h'' - h'}{h'} \right| \leq \varepsilon \quad (4.53)$$

şeklinde değil de,

$$\left. \begin{aligned} & \left| \frac{\frac{\partial h''}{\partial x} - \frac{\partial h'}{\partial x}}{\frac{\partial h'}{\partial x}} \right| \leq \varepsilon \\ & \left| \frac{\frac{\partial h''}{\partial y} - \frac{\partial h'}{\partial y}}{\frac{\partial h'}{\partial y}} \right| \leq \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

diferansiyel bölümler halinde yapılması daha iyi sonuç vermektedir. (Brüser 1972) Mukayese sonucunda iki yağ filmi arasında bulunan aykırılık istenilen sınırlar içerisinde değilse, iyileştirilmiş basınç ile deformasyon yeniden hesaplanır ve durum yeniden ele alınır.

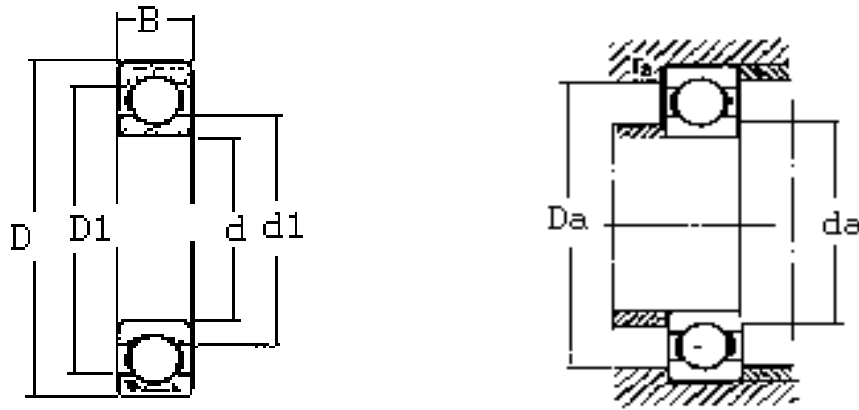
5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMALAR :

5.1. Temasın Başlangıç Durumunda Meydana Gelen ve Sadece Hertz Deformasyon Denklemine Dikkate Alındığı Hal :

Bu bölümde tez sonunda verilen bilgisayar programı kullanılarak yük değerleri için, çeşitli malzemelere sahip, farklı bilya veya makara boyutlarının değerlendirildiği sabit bilyalı ve silindirik makaralı yataklarda bilyada veya makarada, iç veya dış bileziklerde meydana gelen Elastik Deformasyonlar, Hertz Temas Yüzeyi alanları ve en büyük basınç değerleri hesaplanmış ve bu hesap sonuçları birbirleriyle mukayese edilmiştir. Programda veri olarak kullanılacak olan rulman boyutları ve kuvvet değerleri FAG' nin hazırlamış olduğu rulman kataloğundan alınmıştır. Hesaplar sırasında seramik, çelik ve bronz olmak üzere üç çeşit malzeme kullanılmıştır. Bu malzemelerin Elastisite Modülleri ve Poisson Oranları şu şekilde alınmıştır :

$E_{\text{seramik}} = 314 \text{ GPa}$ (Silikon nirat (Si_3N_4))	$\mu_{\text{seramik}} = 0.26$
$E_{\text{çelik}} = 212 \text{ GPa}$ (Yüksek hız çeliği)	$\mu_{\text{çelik}} = 0.3$
$E_{\text{bronz}} = 110 \text{ GPa}$ (Bronz, fosfor)	$\mu_{\text{bronz}} = 0.33$

5.1.1. Sabit Bilyalı Yataklar İçin Kullanılan Seçenekler ve Bulunan Sonuçlar :



Şekil 5.1 . Sabit bilyalı yatakların boyutları

Sabit bilyalı yataklar için kuvvet ve boyut olarak şu değerler alınmıştır.

6306 kod numaralı rulman

d	= 30 mm
D	= 62 mm
B	= 16 mm
F	= 30.000 N
d ₁	= 40,3 mm
D ₁	= 52,1 mm
d _{amin}	= 35 mm
D _{amax}	= 57 mm

Çelik, seramik ve bronz malzeme türleri bu seçenekler için ayrı ayrı uygulanmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1, Çizelge 5.2 ve Çizelge 5.3'te verilmiştir .

Çizelge 5.1. Sabit bilyalı rulmanlar için sonuçlar

Dış Bilezik Malz.	Bilya Malz.	Bilya Çapı mm	Kuv. KN	Yassılma mm	Elip.yüz. a y.çapı mm	Elip.yüz. b y.çapı mm	P _m değeri N/mm ²	P _o değeri N/mm ²
Çelik	Çelik	8	30	0,1958	1,9094	0,3809	13130	19695
Çelik	Çelik	9	30	0,1878	1,9916	0,3973	12069	18103
Çelik	Çelik	10	30	0,1807	2,0688	0,4127	11185	16777
Bronz	Bronz	8	30	0,3311	2,4826	0,4953	7766,5	11650
Bronz	Bronz	9	30	0,3174	2,5895	0,5166	7138,7	10708
Bronz	Bronz	10	30	0,3056	2,6899	0,5366	6615,8	9923,8
Seramik	Seramik	8	30	0,1532	1,6887	0,3369	16786	25179
Seramik	Seramik	9	30	0,1469	1,7614	0,3514	15429	23144
Seramik	Seramik	10	30	0,1414	1,8296	0,3650	14299	21449
Bronz	Çelik	8	30	0,2554	2,2350	0,4459	9582,8	14374
Seramik	Çelik	8	30	0,1732	1,8058	0,3602	14680	18058
Çelik	Bronz	8	30	0,2546	2,2328	0,4454	9601,8	14403
Bronz	Seramik	8	30	0,2252	2,1586	0,4306	10273	15409
Bronz	Çelik	9	30	0,2449	2,3312	0,4651	8808,1	13212
Seramik	Çelik	9	30	0,1666	1,8870	0,3764	13443	20164

Çizelge 5.2. Sabit bilyalı rulmanlar için sonuçlar

(D = 63 Dış Bilezik Çapı Artırılmış)

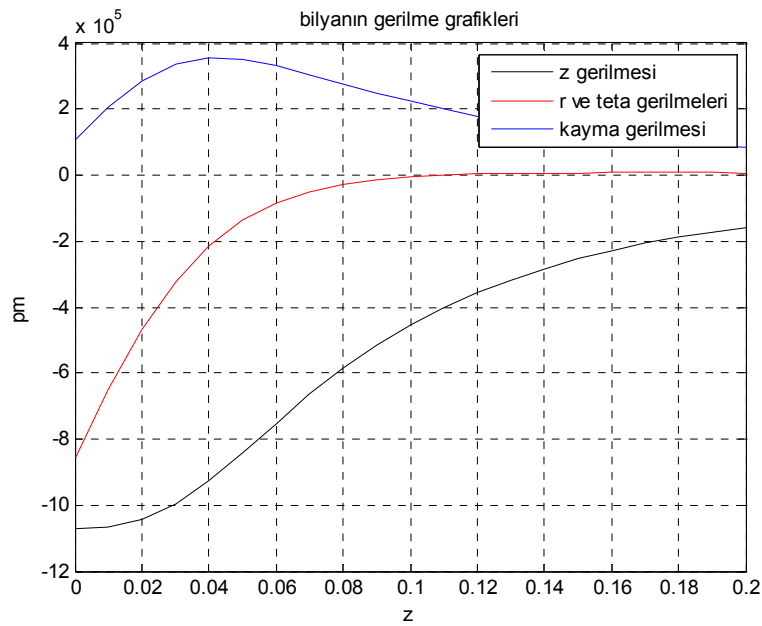
Dış Bilezik Malz.	Bilya Malz.	Bilya Çapı mm	Kuv. KN	Yassılma mm	Elip.yüz. a y.çapı mm	Elip.yüz. b y.çapı mm	P_m değeri N/mm^2	P_o değeri N/mm^2
Çelik	Çelik	9	30	0,1890	1,9970	0,3984	12003	18004
Bronz	Çelik	9	30	0,3175	2,5884	0,5164	7144,6	10717
Bronz	Bronz	9	30	0,2450	2,3302	0,4649	8815,4	13223

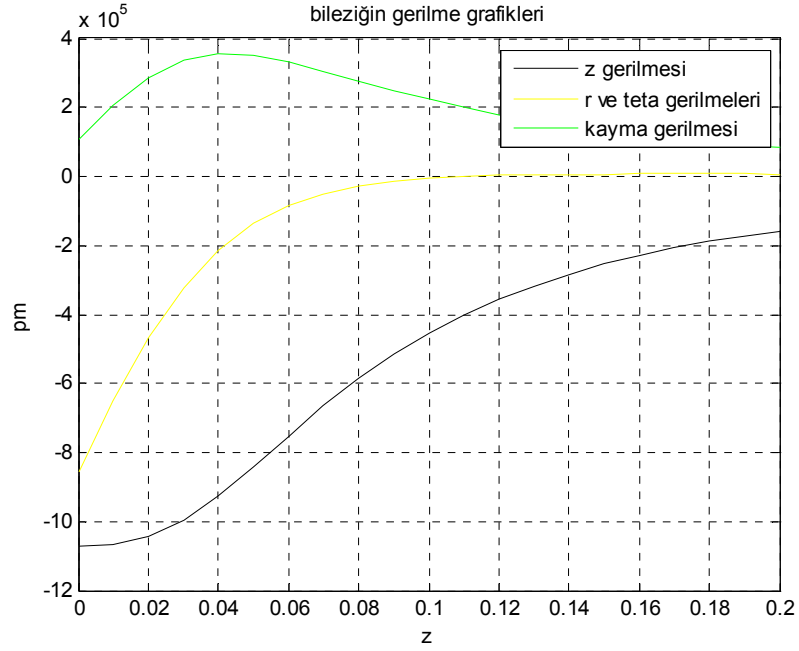
Çizelge 5.3. Sabit bilyalı rulmanlar için sonuçlar

(D = 64 Dış Bilezik Çapı Artırılmış)

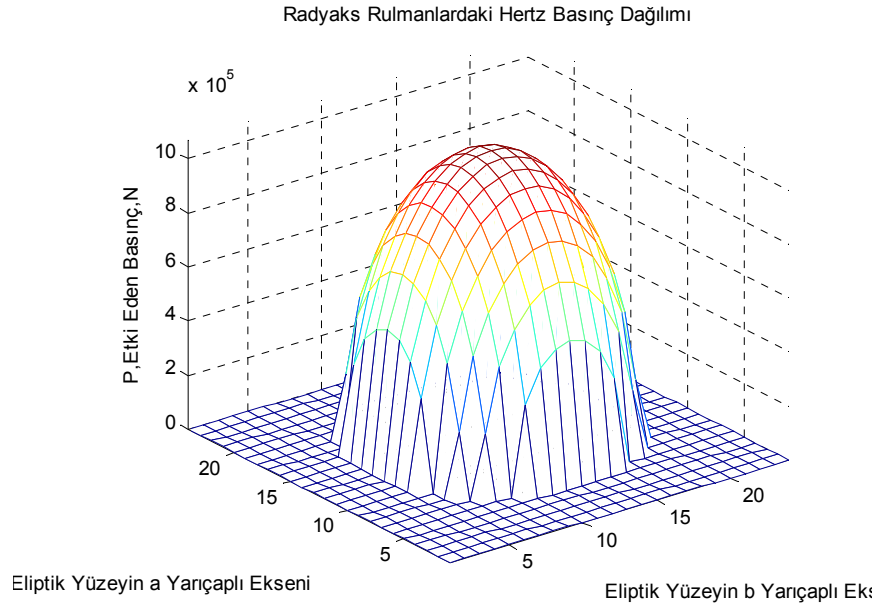
Dış Bilezik Malz.	Bilya Malz.	Bilya Çapı mm	Kuv. KN	Yassılma mm	Elip.yüz. a y.çapı mm	Elip.yüz. b y.çapı mm	P_m değeri N/mm^2	P_o değeri N/mm^2
Çelik	Çelik	10	30	0,1821	2,0734	0,4136	11135	16702
Bronz	Bronz	10	30	0,3059	2,6874	0,5361	6627,9	9941,9

Çizelgelerde elde edilen sonuçları Grafik 1'den Grafik 11'e kadarki kısımda takip etmek mümkündür.

**Grafik 1.** Bilyanın Gerilme Grafiği

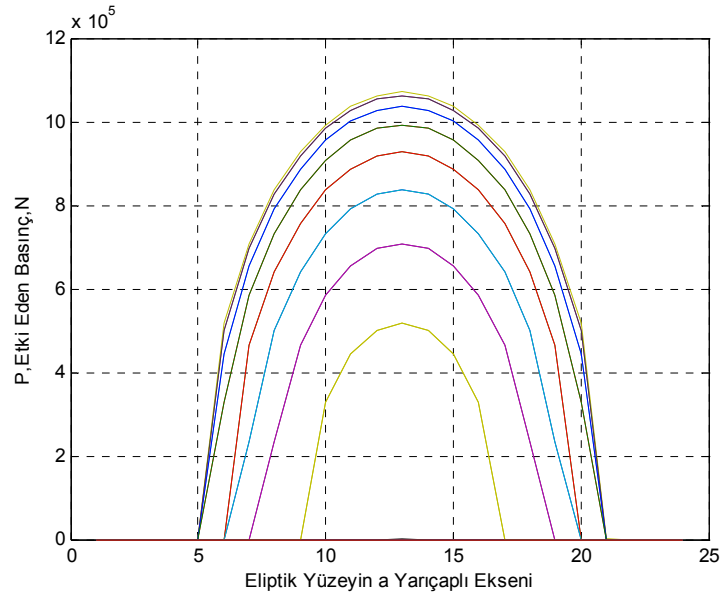


Grafik 2. Bileziğin Gerilme Grafiği



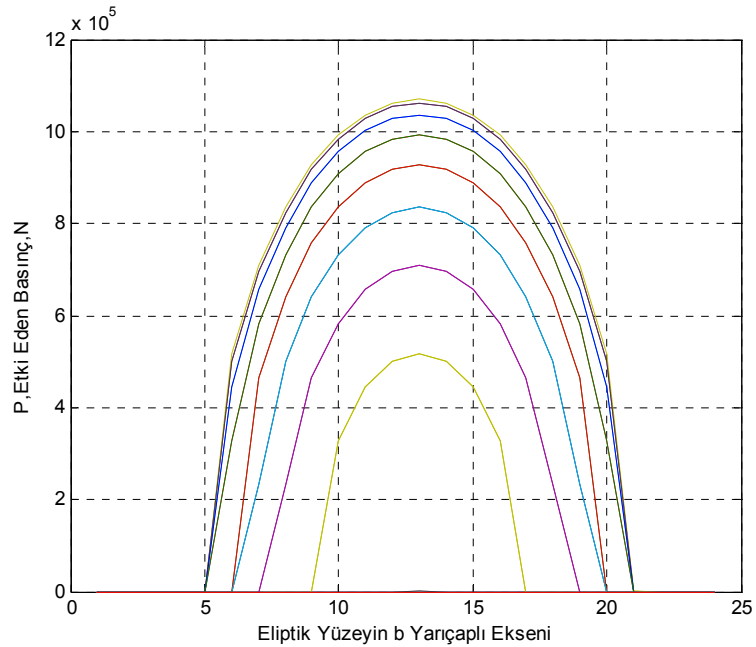
Grafik 3. “a” ve “b” Yarıçaplı Eksende Hertz Basınç Dağılımı

a ve b yarıçaplı eksenlerde etki eden basıncın bilyanın bilezikle temas yüzeyinin merkezine yaklaştıkça Hertz basıncında oluşan değişim açık şekilde görülmektedir.

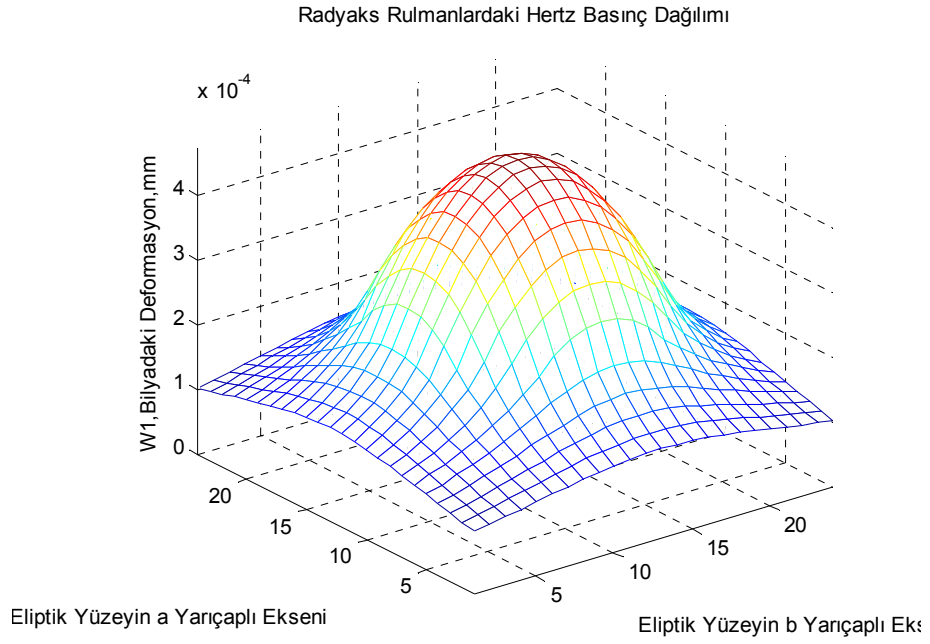


Grafik 4. “a” Yarıçaplı Eksende Hertz Basıncı

Üç boyutlu olan 3 numaralı grafiğin sadece a ve b yarıçaplı kısmı alınarak 2 boyutlu hale getirildiği 4 ve 5 nolu grafikten etki eden basıncın değeri yaklaşık olarak gözle okunabilir. Bu grafiklerden okunan değerler tam olarak çizelgelerde verilmiştir. (Bkz. Çizelge 5.1,5.2,5.3)

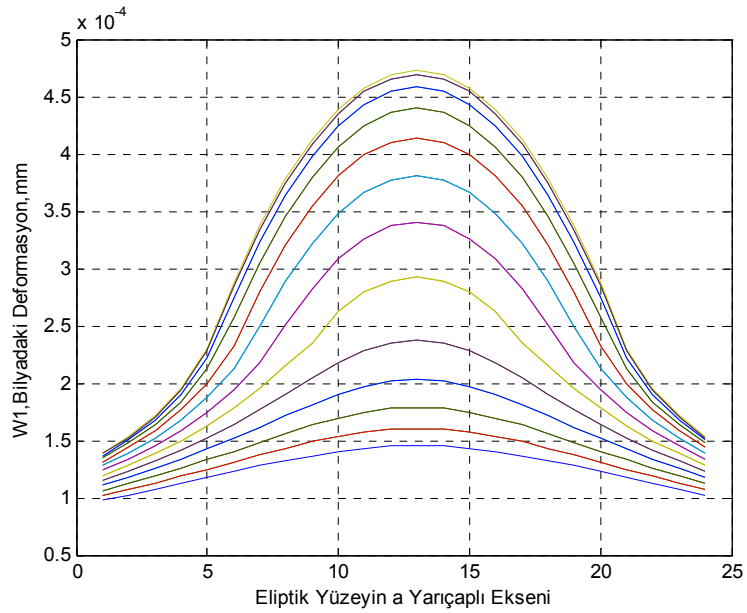


Grafik 5. “b” Yarıçaplı Eksende Hertz Basıncı



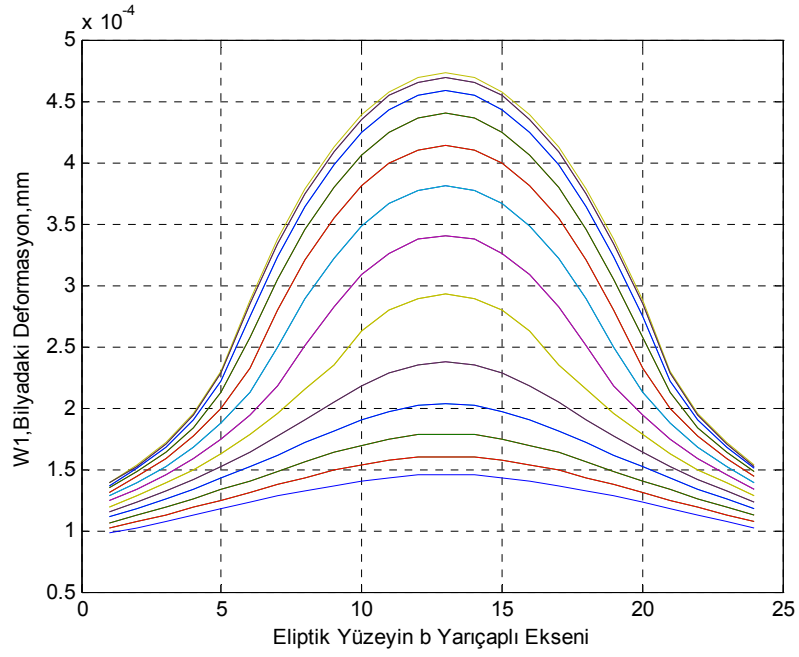
Grafik 6. Bilyadaki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı

Bilyadaki deformasyon grafiğinin 3 nolu basıncın dağılımı grafiğiyle beraber incelersek aradaki ilişki rahatlıkla görülmektedir. Bilya ve bileziğin temas ettiği kısmın merkezinde çok etkili Hertz Basınçlarıyla çok büyük deformasyon meydana gelir.

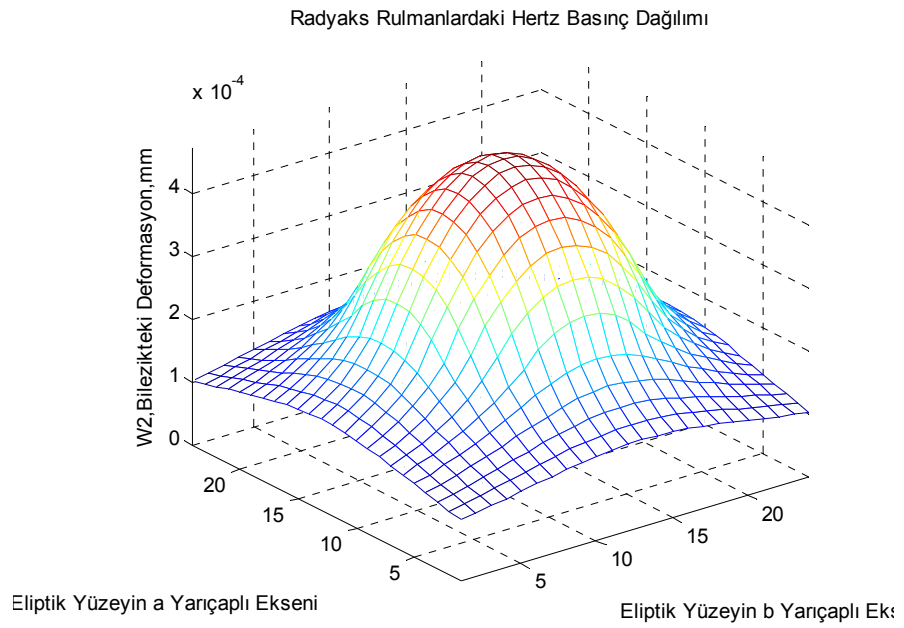


Grafik 7. Bilyadaki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı

Çizelgedeki sonuçlarla karşılaştırabilmek için deformasyonun 2 boyutlu grafiği eklenmiştir.

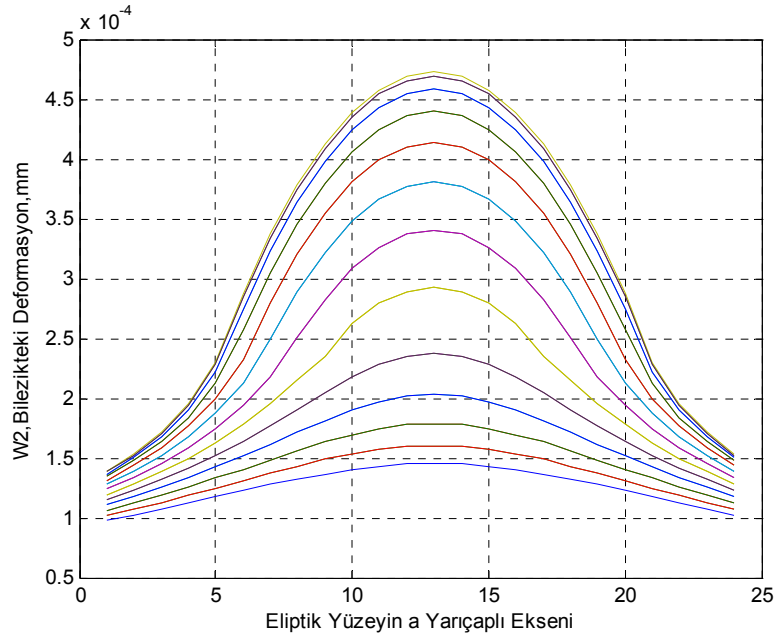


Grafik 8. Bilyadaki Deformasyonun “b” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı

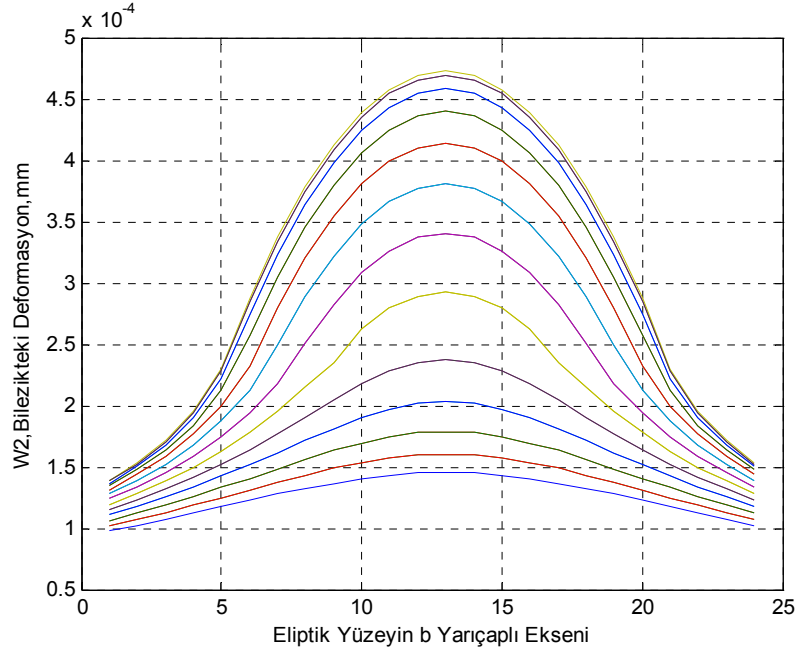


Grafik 9. Bilezikteki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı

6 nolu grafikteki bilya için elde edilen grafik bilezik içinde çizdirilmiştir. Benzer deformasyonların oluştuğu açıktır. Grafiği yorumlardan malzemenin etkisi göz ardı edilmemelidir. Sonuçlar kısmında bundan da bahsedilmektedir.



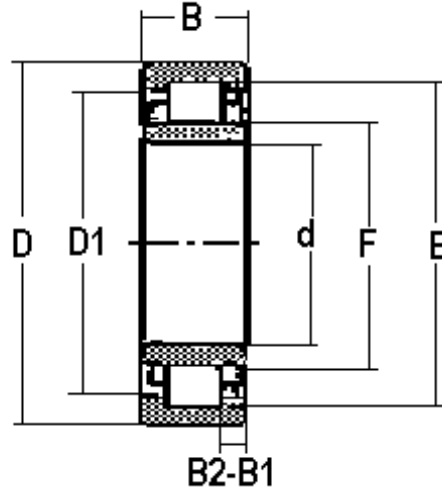
Grafik 10. Bilezikteki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı



Grafik 11. Bilezikteki Deformasyonun “b” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı

a ve b yarıçaplı eksendeki deformasyonların çizelgelerde belirtilen sonuçların araştırmacı tarafından değerlendirilmesi için 2 boyutlu grafikler incelenebilir.

5.1.2. Silindirik Makaralı Rulmanlar İçin Kullanılan Seçenekler ve Bulunan Sonuçlar :



Şekil 5.2. Silindirik makaralı rulmanların boyutları

Makaralı yataklar için kuvvet ve boyut olarak şu değerler alınmıştır.

1. NU 307 kodlu rulman

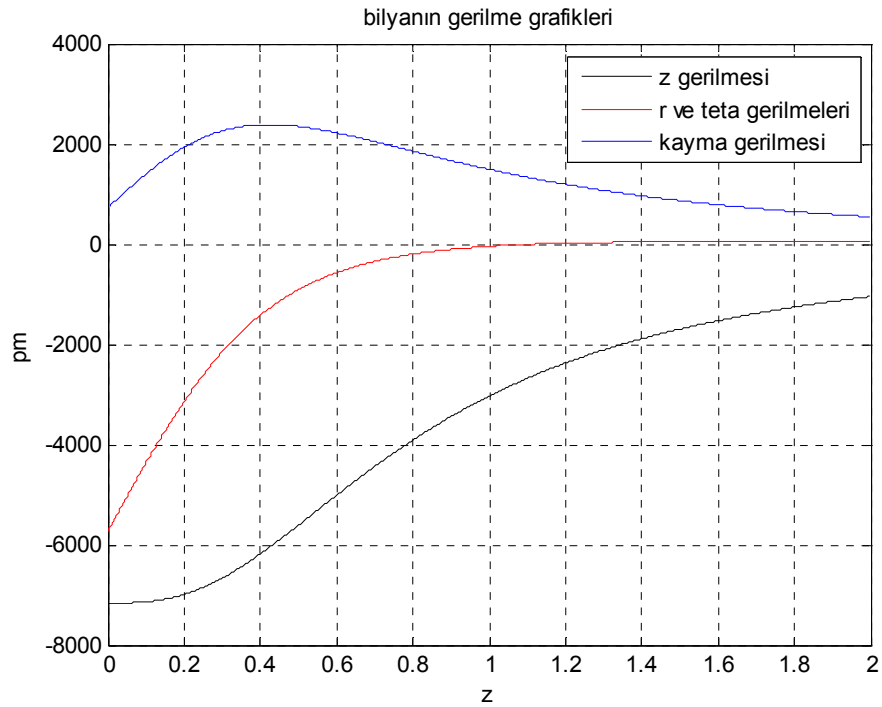
d	= 35 mm
D	= 80 mm
B	= 21 mm
F	= 30.000 N
d ₁	= 51 mm
D ₁	= 66,3 mm
F	= 46,2 mm
B ₁	= 6 mm
B ₂	= 9,5 mm

Çelik, seramik ve bronz malzeme türleri bu seçenekler için ayrı ayrı uygulanmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 5.4'te verilmiştir .

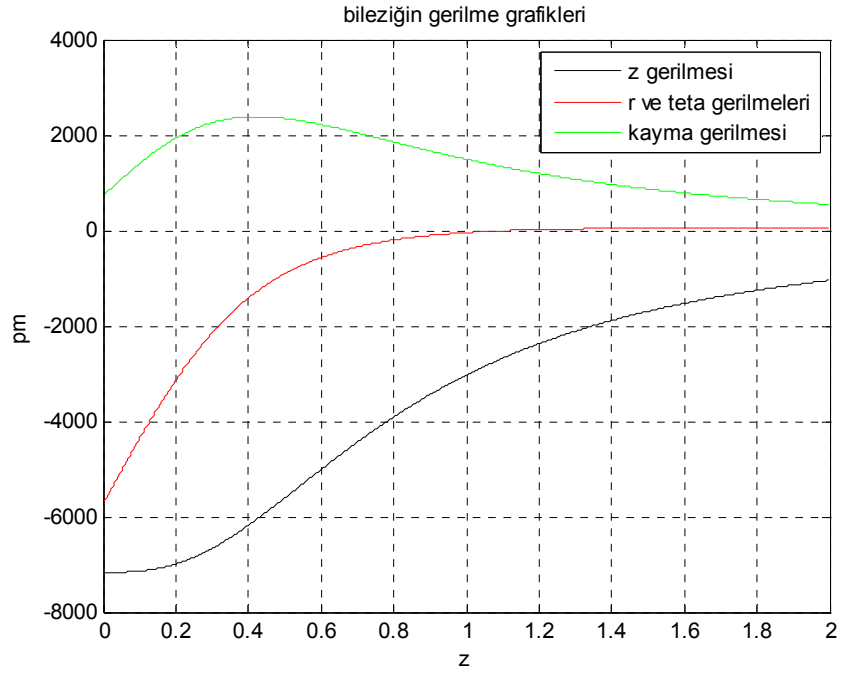
Çizelge 5.4. Silindirik makaralı rulmanlar için sonuçlar

Dış Bilezik Malz.	Makara Malz.	R mm	Kuv. KN	a uzunluğu mm	b uzunluğu mm	P_m basıncı N/mm^2	P_o basıncı N/mm^2
Çelik	Çelik	7	30	3,5	0,4259	10088	12812
Çelik	Çelik	6	30	3	0,4230	11850	15050
Çelik	Çelik	8	30	4	0,4289	8776,6	11134
Bronz	Bronz	7	30	3,5	0,6285	6836,7	8682,6
Bronz	Bronz	6	30	3	0,6242	8060,6	10199
Bronz	Bronz	8	30	4	0,6328	5941	7545,1
Seramik	Seramik	7	30	3,5	0,3526	12187	15477
Seramik	Seramik	6	30	3	0,3502	14315	18180
Seramik	Seramik	8	30	4	0,3550	10590	13450
Bronz	Çelik	7	30	3,5	0,5368	8003,8	10165
Seramik	Çelik	7	30	3,5	0,3910	10990	13957
Seram.	Bronz	7	30	3,5	0,5095	8432,3	10709

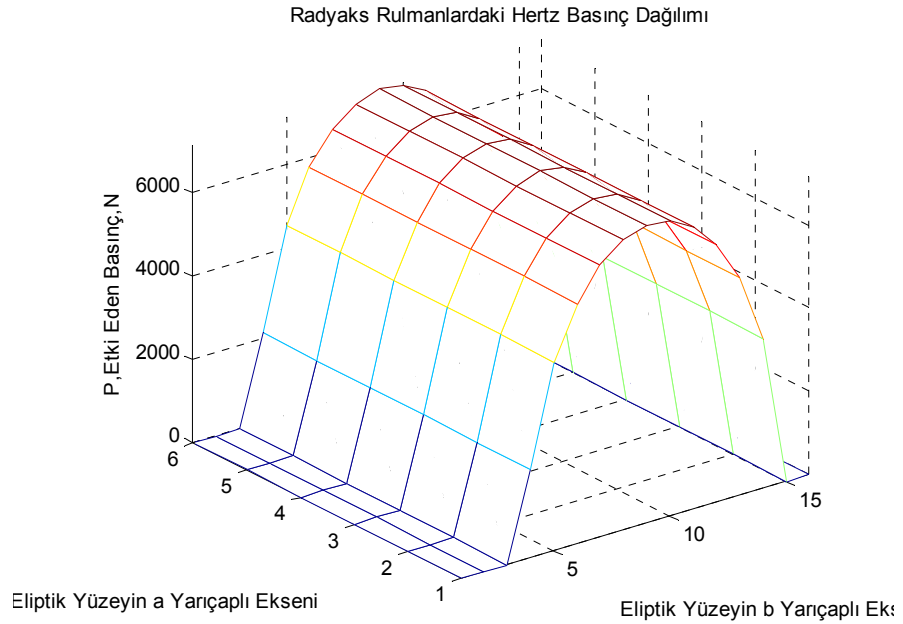
Çizelgelerde elde edilen sonuçları Grafik 12'den Grafik 18'e kadarki kısımda takip etmek mümkündür.



Grafik 12. Makaranın Gerilme Grafiği

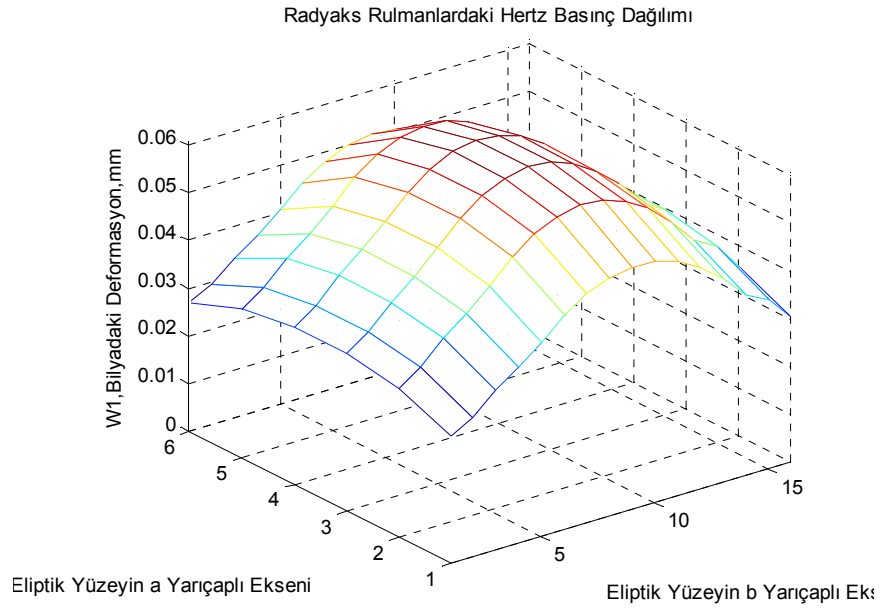


Grafik 13. Bileziğin Gerilme Grafiği



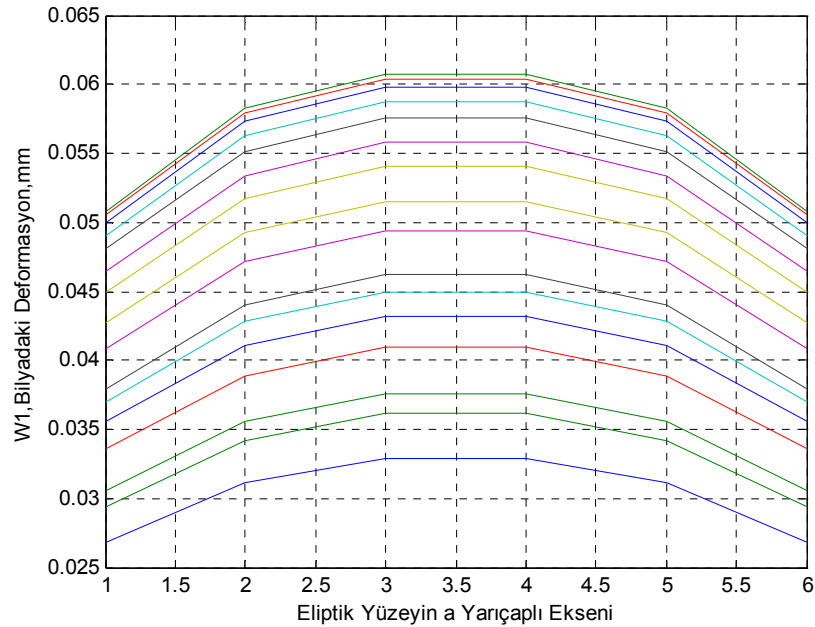
Grafik 14. “a” ve “b” Yarıçaplı Eksende Hertz Basınç Dağılımı

Açıkça görülmektedir ki bilyalı ve makaralı rulmanların aynı amaçla çizdirilen Hertz Basınç dağılımı grafiklerinde oluşan basınç ve bu basıncın yayılma şekli makara üzerinde daha iyidir. (Bkz. Grafik 3)



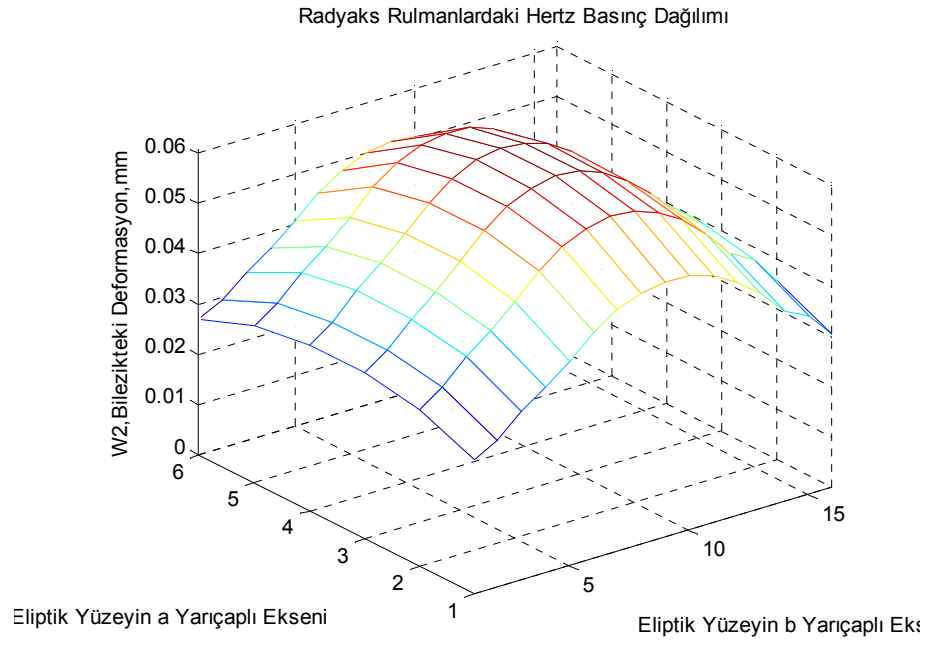
Grafik 15. Makaradaki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı

Grafik 14'ten de yorumlanabileceği gibi makarada oluşacak deformasyonun 3 boyutlu grafiği bu şekildedir. Basınç makarada yayıldığı için deformasyonu daha az olmaktadır. Rulman üreticilerinin kataloglarında da bahsedilen durum burada açıkça görülür.

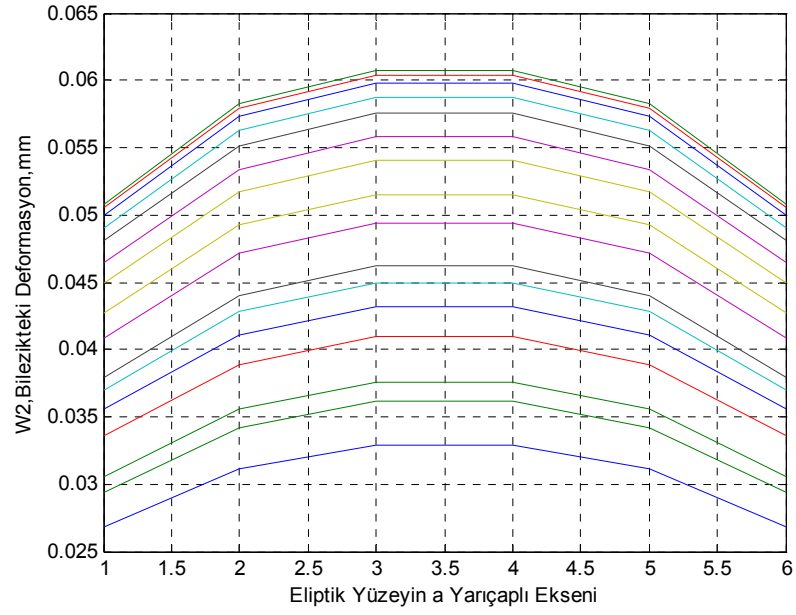


Grafik 16. Makaradaki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı

Makaranın “b” yarıçaplı eksenine makaranın düz kısmı olduğu için grafiği burada çizdirilmemiştir.



Grafik 17. Bilezikteki Deformasyonun Eksenlere Göre Dağılımı



Grafik 18. Bilezikteki Deformasyonun “a” Yarıçaplı Eksendeki Dağılımı

5.3. Sonuçların Karşılaştırılması :

1-) Tabloları incelediğimizde çalışmamızda yaptığımız, bilyalı rulmanlardaki bilya büyüklüklerinin artırılınca basınçtaki ve yassımadaki azalmaları görmekteyiz. Yani rulman geometrisine (rulmanın genişliği, kullanılacağı yatağın büyüklüğü) uygun olarak daha büyük bilya kullanımında deformasyonları azaltmak mümkündür. Fakat yassılmanın malzemenin elastisite modülüylede ilişkili olduğu hatırlanmalıdır.

2-) Daha önceki çalışmalarda da ulaşılan bir sonuç olan kullanılan malzemeye göre inceleme yapıldığında seramikten yapılmış bilezik, bilya ve makaraların, çelikten ve bronzdan yapılmış olanlara göre daha az deformasyona uğradıkları bu çalışmada da görülmektedir. Elastisite modülü daha büyük olan seramik malzeme teorik olarak uzun ömürlü rulman üretimi için daha uygun görünmektedir ancak karşılıklı çalışan iki elemanın uyumlu olması gerektiği unutulmamalıdır. Ve daha sert malzemedен üretilecek rulmanların makine üzerinde etkileri olabileceği de bilinir. Ayrıca ekonomiklikte ayrı bir faktördür.

3-) Yine bilyalı rulmanlarda dış bilezik çapının etkisine dikkat ettiğimizde ise çapın artırılması halinde çok küçük etkiler meydana gelmiştir. Basınçta bir azalma yassımadada artış olduğu görülür. Bu da kuvvetin etki ettiği alanın artmasından dolayı meydana gelmiştir.

4-) Makaralı rulmanlarda da bilyalı rulmanlarda olduğu gibi makara büyüklüğü artırıldığında basınçta azalma olmaktadır, makara uzunluğunun artması ile kuvvetin makara üzerinde dağıldığı için basıncın azaldığını gösterir. Yine rulman geometrisinin kullanıldığı makine içindeki uygunluğu ve kendi içindeki uygunluğuna göre bu gibi bir değişikliğe gidilebilir.

5-) Sabit bilyalı rulman sonuçlarıyla makaralı rulmanların sonuçları karşılaştırıldığında ise makaralı rulmanlarda yükün daha iyi dağılarak daha az basınç oluşturduğunu görürüz. Bu pratik uygulamalarda da bilinen durumun matematiksel olarak sağlamasıdır. Eğer makaralı rulman kullanmak daha uygun ve ekonomik olacaksa ömürlerinin daha fazla olacağı veya daha fazla yük taşıyabileceği açıkça

görlür.

6-) Bu çalışmada rulmanlarda yağlamasız olarak hesapların yapıldığı ve kuvvetin kendimiz tarafından belirlendiğı için basınç ve yassılma değerlerinde abartılı sonuçların elde edilebileceğı hatırlanmalıdır. Değerlendirilmeler yapılırken rulman kataloglarında deneylerle desteklenmiş sonuçlarla birlikte yorum yapmak yararlı olur.

KAYNAKLAR

- ARCHARD, G.D., F.C. GATR, W. HIRST. 1961. The Elastohydrodynamic Lubrication of Rollers. Proceedings of the Royal Society A, 262:51-72
- ARCHARD, J.F., E.W. COWKING. 1965/66. Elastohydrodynamic Lubrication at Point Contacts. Proceedings Institution of Mechanical Engineers, 180:47-56
- BABALIK, C.F. 2000. Makine Elemanları ve Konstrüksiyon Örnekleri. Cilt 2, VİPAŞ A.Ş. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı. s. 1-84, Bursa
- BRÜSER, P. 1972. Doktorarbeit, Untersuchungen Über Die Elastohydrodynamische Schmierfilmdicke Bei Elliptischen Hertzschen Kontaktflächen, Von Der Fakultät Für Maschinenbau Und Electrotechnik Der Technischen Universität Carolo-Wilhelmia Zu Braunschweig
- CHENG, H.S., F.K. ORCUTT. 1965/66. A Correlation Between the Theoretical and Experimental Results on the Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling and Sliding Contacts, Proceedings Institution of Mechanical Engineers. 180:158-168
- CHRISTENSEN, H. 1963. The Lubrication of Rolling Contacts and Measurement of Film Thickness. Acta polytech.scand.mech.engng.,15.Serie
- CROOK, A. W. 1961. The Lubrication Rollers II. Transactions of the Royal Society of London, 254:223-236
- DAWSON, P.H. 1963. The effect of the Metallic Contact and Sliding on the Shape of the S-N Curve fo Pitting Fatigue. Proceedings Symposium on Fatigue in Rolling Contact, Institution of Mechanical Engineers, 4:45-49
- DOWSON, D., G.R. HIGGINSON, A.V. WHITAKER. 1962, Elastohydrodynamic Lubrication and a Survey of Isothermal Solutions, Journal Mechanical Engineering Science 4, 2:121-126
- EDİŞ, K. 1975. Akışkanlar Mekaniği. İ.T.Ü. s. 1-9, İstanbul
- GRUBIN, A.N. 1949. Veröffentlichung Nr. 30 des Zentralen Wissenschaftlichen Forschungsinstitutes für Technologie und Maschinenbau, s. 203-208, Moskau
- GÜNDOĞDU, Ö., O. KOPMAZ, M.A. CEVİZ. 2003. Mühendislik ve Fen Uygulamalarıyla Matlab. Paradigma Akademi, s. 19-77, Bursa
- HAMROCK, J.B. 1994. Fundamentals of Fluid Film Lubrication. McGraw-Hill, Inc. p. 368-482

- HERREBRUGH, K. 1970. Elastohydrodynamic Squeeze Films Between Two Cylinders in Normal Approach. Transactions of the ASME. p. 292-302
- İLERİ, İ. 1968. Makine Elemanları Hesabı. Matbaa Teknisyenleri Basımevi, ikinci cilt ve düzeltilmiş baskı, s. 579-584, İstanbul
- İLERİ, İ. 1973. Makine Elemanları Hesabı. İ.T.Ü. Matbaası Gümüşsüyü, birinci cilt ve üçüncü düzeltilmiş baskı, s. 169-174, 218-234, İstanbul
- KAPITSA, P.L. 1955. Schmierung von Walzen und Kugeln. Zhurn. Tekh. Fiz. 25: 747-762
- KARAGÖZ, İ. 2001. Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları. VİPAŞ A.Ş. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, s. 149-192, Bursa
- SIBLEY, L.B. 1966. Elastohydrodynamic Lubrication, Machine Design. p.220-223
- TIMOSHENKO, S., J.H. GOODIER çevirenler İ. KAYAN, E. ŞUHUBÎ. 1969. Elastisite Teorisi. Arı Kitabevi Matbaası
- UMUR, H. 1998. Akışkanlar Mekaniği. Alfa-Aktüel Kitabevleri, s. 47-58, İstanbul
- ZHILUN, X.U, 1992. Applied Elasticity. Wiley Eastern Limited, p. 163-205
- YÜKSEL, İ. 2000. Matlab ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözümü. VİPAŞ A.Ş. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, s. 1-84, Bursa
- ANONİM. FAG Rulman Katalogu
- KIRIMLI, E. 2003. Rulmanlı Yataklarda Hertz Basınçlarının Performans Üzerine Etkisi, Y. Lisans Tezi 150s.
School.mech.uwa.edu.au/~dwright/DANotes/MST/contact/contact.html, Erişim Tarihi: 20.03.2010. Konu: Kontak Mekaniği
- en.wikipedia.org/wiki/Contact_mechanics, Erişim Tarihi: 20.03.2010 Kontak Mekaniği
- www.scribd.com/doc/9724081/Hertz-Contact-Stresses, Erişim Tarihi: 28.03.2010.
Konu: Temas Gerilmeleri

EK. Hesaplamalar İçin Matlab'da Yazılan Kodlar

```

SEC=input('Bilyalı rulman için 1 numarayı, makaralı rulman için 2 numarayı seçiniz=')
if SEC==1
F=input('Kuvveti newton cinsinden giriniz=')
R1=input('Bilyanın yarıçapını mm cinsinden giriniz=')
R3=R1;
R2=input('Bileziğin yarıçapını mm cinsinden giriniz (iç bilezik için pozitif,dış bilezik
için negatif)=')
R4=inf;
E1=input('Bilyanın elastisite modülünü Newton/milimetrekare cinsinden giriniz=')
E2=input('Bileziğin elastisite modülünü Newton/milimetrekare cinsinden giriniz=')
POS1=input('Bilyanın poisson değerini giriniz=')
POS2=input('Bileziğin poisson değerini giriniz=')
AB=(1/R1+1/R2+1/R3+1/R4);
ACI=acos((1/R1+1/R2-1/R3-1/R4)/(1/R1+1/R2+1/R3+1/R4));
if ACI>(90*pi)/180
    ACI=-((ACI/pi)*180)+180)/180;
end
k1=(1-(POS1^2))/(pi*E1);
k2=(1-(POS2^2))/(pi*E2);
if ACI==(30*pi)/180
    m=2.731;
    n=0.493;
    c=0.730;
elseif ACI<(35*pi)/180
    m=2.564;
    n=0.5115;
    c=0.755;
elseif ACI==(35*pi)/180
    m=2.397;
    n=0.530;
    c=0.78;
elseif ACI<(40*pi)/180
    m=2.2665;
    n=0.5485;
    c=0.80;
elseif ACI==(40*pi)/180
    m=2.136;
    n=0.567;
    c=0.82;
elseif ACI<(45*pi)/180
    m=2.031;
    n=0.5855;
    c=0.85;
elseif ACI==(45*pi)/180
    m=1.926;

```

```

n=0.604;
c=0.88;
elseif ACI<(50*pi)/180
m=1.840;
n=0.6225;
c=0.89;
elseif ACI==(50*pi)/180
m=1.754;
n=0.641;
c=0.90;
elseif ACI<(55*pi)/180
m=1.6825;
n=0.6595;
c=0.91;
elseif ACI==(55*pi)/180
m=1.611;
n=0.678;
c=0.92;
elseif ACI<(60*pi)/180
m=1.5485;
n=0.6975;
c=0.930;
elseif ACI==(60*pi)/180
m=1.486;
n=0.717;
c=0.940;
elseif ACI<(65*pi)/180
m=1.432;
n=0.738;
c=0.950;
elseif ACI==(65*pi)/180
m=1.378;
n=0.759;
c=0.960;
elseif ACI<(70*pi)/180
m=1.331;
n=0.7805;
c=0.970;
elseif ACI==(70*pi)/180
m=1.284;
n=0.802;
c=0.980;
elseif ACI<(75*pi)/180
m=1.243;
n=0.824;
c=0.9825;
elseif ACI==(75*pi)/180
m=1.202;

```

```

n=0.846;
c=0.985;
elseif ACI<(80*pi)/180
m=1.165;
n=0.8695;
c=0.9875;
elseif ACI==(80*pi)/180
m=1.128;
n=0.893;
c=0.990;
elseif ACI<(85*pi)/180
m=1.0945;
n=0.9185;
c=0.9925;
elseif ACI==(85*pi)/180
m=1.061;
n=0.944;
c=0.995;
elseif ACI<(90*pi)/180
m=1.0305;
n=0.972;
c=0.9975;
elseif ACI==(90*pi)/180
m=1.000;
n=1.000;
c=1.000;
end

a=m*((3*pi/4)*((F*(k1+k2))/AB))^(1/3)
b=n*((3*pi/4)*((F*(k1+k2))/AB))^(1/3)
yas=c*1.5*(((1-POS1^2)/E1)*((1-POS2^2)/E2))*((F^2*2*AB)/3))^(1/3)

t=a/4.5;
m=b/4.5;
xenk=-1.5*b;
xenb=1.4*b;
yenk=-1.5*a;
yenb=1.2*a;
po=(3*F)/(2*pi*a*b)
pm=(2/3)*po

%gerilme
z=0:0.01:3*a;
K=((3*a)*100)+1;
for i=1:K
gerz(i)=-po*(1-((z(i).^3)/(z(i).^2+(a*b)).^(3/2)));
gerrvt1(i)=-((po/2)*((1+2*POS1)+((z(i).^3)/(z(i).^2+(a*b)).^(3/2))-
((2*(1+POS1)*z(i))/((z(i).^2+(a*b)).^(1/2))));

```

```

gerrvt2(i)=-((po/2)*((1+2*POS2)+((z(i).^3)/(z(i).^2+(a*b)).^(3/2))-
((2*(1+POS2)*z(i))/((z(i).^2+(a*b)).^(1/2))));
gerka1(i)=(po/2)*(((1-2*POS1)/2)+(((1+POS1)*z(i))/((z(i).^2+(a*b)).^(1/2))))+((-
3/2)*((z(i).^3)/(z(i).^2+(a*b)).^(3/2)));
gerka2(i)=(po/2)*(((1-2*POS2)/2)+(((1+POS2)*z(i))/((z(i).^2+(a*b)).^(1/2))))+((-
3/2)*((z(i).^3)/(z(i).^2+(a*b)).^(3/2)));
end
%grafik
figure
plot(z,gerz,'k',z,gerrvt1,'r',z,gerka1,'b')
grid
xlabel('z')
ylabel('pm')
title('bilyanın gerilme grafikleri')
legend('z gerilmesi','r ve teta gerilmeleri','kayma gerilmesi');
[EBkager1,i]=max(gerka1)

figure
plot(z,gerz,'k',z,gerrvt2,'y',z,gerka2,'g')
grid
xlabel('z')
ylabel('pm')
title('bileziğin gerilme grafikleri')
legend('z gerilmesi','r ve teta gerilmeleri','kayma gerilmesi');
[EBkager2,i]=max(gerka2)

%basınç
x=xenk;
y=yenk;
M=((xenb-xenk)/m)+1
N=((yenb-yenk)/t)+1
for i=1:N
    for j=1:M
        kk(i,j)=(1-((x/b)^(2))-((y/a)^(2)));
        if kk(i,j)<=0
            kk(i,j)=0;
        end
        P(i,j)=po*(kk(i,j))^(1/2);
        X(i,j)=x;
        Y(i,j)=y;
        x=x+m;
        fark1=abs(abs(x)-abs(xenb));
        if fark1<0.00001
            x=xenb;
        end
        if x>xenb
            x=xenk;
            y=y+t;
        end
    end
end

```

```

end
fark2=abs(abs(y)-abs(yenb));
if fark2<0.00001
    y=yenb;
end
if y>yenb
    break
end
end
end
end

```

```

for i=1:N
    for j=1:M
        Xko(1,j)=X(i,j);
        Yko(i,1)=Y(i,j);
    end
end
end

```

```

Xkor=Xko
Ykor=Yko
N=max(i)
M=max(j)
end

```

```

if SEC==2
F=input('Kuvveti newton cinsinden giriniz=')
R1=input('Bilyanın yarıçapını mm cinsinden giriniz=')
R3=inf;
R2=input('Bileziğin yarıçapını mm cinsinden giriniz (iç bilezik için pozitif,dış bilezik için negatif)=')
R4=inf;
L=input('makaranın boyunu mm cinsinden giriniz=')
E1=input('Makaranın elastisite modülünü Newton/milimetrekare cinsinden giriniz=')
E2=input('Bileziğin elastisite modülünü Newton/milimetrekare cinsinden giriniz=')
POS1=input('Makaranın poisson değerini giriniz=')
POS2=input('Bileziğin poisson değerini giriniz=')

```

```

%hesaplar

```

```

AB=(1/R1+1/R2+1/R3+1/R4);
k1=(1-(POS1^2))/(pi*E1);
k2=(1-(POS2^2))/(pi*E2);
a=L/2
b=((4*F*(k1+k2))/(AB*L))^(1/2)
t=a/5.5;
m=b/5.5;
xenk=-1.5*b;
xenb=1.4*b;

```



```

yenk=-0.05*a;
yenb=a;
po=(2*F)/(pi*a*b);
pm=po/1.27;

%gerilmeler
z=0:0.001:3*b;
K=((3*b)*1000)+1;
for i=1:K
    gerz(i)=-po*(1-((z(i).^3)/(z(i).^2+(b*b)).^(3/2)));
    gerrvt1(i)=-((po/2)*((1+2*POS1)+((z(i).^3)/(z(i).^2+(b*b)).^(3/2))-
    ((2*(1+POS1)*z(i))/((z(i).^2+(b*b)).^(1/2)))));
    gerrvt2(i)=-((po/2)*((1+2*POS2)+((z(i).^3)/(z(i).^2+(b*b)).^(3/2))-
    ((2*(1+POS2)*z(i))/((z(i).^2+(b*b)).^(1/2)))));
    gerka1(i)=(po/2)*(((1-2*POS1)/2)+(((1+POS1)*z(i))/((z(i).^2+(b*b)).^(1/2))))+((-
    3/2)*(z(i).^3/(z(i).^2+(b*b)).^(3/2)));
    gerka2(i)=(po/2)*(((1-2*POS2)/2)+(((1+POS2)*z(i))/((z(i).^2+(b*b)).^(1/2))))+((-
    3/2)*(z(i).^3/(z(i).^2+(b*b)).^(3/2)));
end

%gerilme grafikleri
figure
plot(z,gerz,'k',z,gerrvt1,'r',z,gerka1,'b')
grid
xlabel('z')
ylabel('pm')
title('bilyanın gerilme grafikleri')
legend('z gerilmesi','r ve teta gerilmeleri','kayma gerilmesi');
[EBkager1,i]=max(gerka1)

figure
plot(z,gerz,'k',z,gerrvt2,'r',z,gerka2,'g')
grid
xlabel('z')
ylabel('pm')
title('bileziğin gerilme grafikleri')
legend('z gerilmesi','r ve teta gerilmeleri','kayma gerilmesi');
[EBkager2,i]=max(gerka2)

x=xenk;
y=yenk;

%basınç hesabı
M=((xenb-xenk)/m)+1
N=((yenb-yenk)/t)+1
for i=1:N
    for j=1:M
        kk(i,j)=(1-((x/b)^(2)));
    end
end

```

```

if kk(i,j)<=0
    kk(i,j)=0;
end
P(i,j)=po*(kk(i,j))^(1/2);
X(i,j)=x;
Y(i,j)=y;
x=x+m;
fark1=abs(abs(x)-abs(xenb));
if fark1<0.00001
    x=xenb;
end
if x>xenb
    x=xenk;
    y=y+t;
end
fark2=abs(abs(y)-abs(yenb));
if fark2<0.00001
    y=yenb;
end
if y>yenb
    break
end
end
end
Bas=P;
[EBP,j]=max(P)
[ENBP,i]=max(max(P))
for i=1:N
    for j=1:M
        Xko(1,j)=X(i,j);
        Yko(i,1)=Y(i,j);
    end
end
N=max(i)
M=max(j)
end

%hertz deformasyonları
f=t/m;
for i=1:N
    for j=1:M
        WX(i,j)=X(i,j);
        WY(i,j)=Y(i,j);
    end
end
for k=1:N;
    for l=1:M
        W1(k,l)=0;

```

```

        W2(k,l)=0;
        WTOP(k,l)=0;
    end
end
for k=1:N
    for l=1:M
        for i=1:N
            for j=1:M
                kok(i,j)=(((WX(k,l)-X(i,j))^2)+((WY(k,l)-Y(i,j))^2));
                if kok(i,j)==0
                    w1(i,j)=((1-
(POS1^2))/(pi*E1))*2*m*(((1+f^2)^(1/2))*log(((1+f^2)^(1/2))/(((1+f^2)^(1/2))-1)));
                    w2(i,j)=((1-
(POS2^2))/(pi*E2))*2*m*(((1+f^2)^(1/2))*log(((1+f^2)^(1/2))/(((1+f^2)^(1/2))-1)));
                    wtop(i,j)=w1(i,j)+w2(i,j);
                end
                if kok(i,j)>0
                    w1(i,j)=((1-(POS1^2))/(pi*E1))*((P(i,j)*m*t)/(kok(i,j)^(1/2));
                    w2(i,j)=((1-(POS2^2))/(pi*E2))*((P(i,j)*m*t)/(kok(i,j)^(1/2));
                end
                W1(k,l)=W1(k,l)+w1(i,j);
                W2(k,l)=W2(k,l)+w2(i,j);
                WTOP(k,l)=W1(k,l)+W2(k,l);

            end
        end
    end
end

%grafikler
%basinç grafikleri

figure
plot(P)
ciz=size(P);
mesh(1:1:ciz(2),1:1:ciz(1),P);
axis([1 ciz(2) 1 ciz(1) 0 max(max(P))]);
xlabel('Eliptik Yüzeyin b Yarıçaplı Ekseni');
ylabel('Eliptik Yüzeyin a Yarıçaplı Ekseni');
zlabel('P,Etki Eden Basınç,N');
title('Radyaks Rulmanlardaki Hertz Basınç Dağılımı');

figure
y=1:1:ciz(1);
plot(y,P)
grid on
xlabel('Eliptik Yüzeyin a Yarıçaplı Ekseni');
ylabel('P,Etki Eden Basınç,N');

```

```

figure
x=1:1:ciz(2);
plot(x,P)
grid on
xlabel('Eliptik Yüzeyin b Yarıçaplı Ekseni');
ylabel('P,Etki Eden Basınç,N');

%deformasyon grafikleri
figure
plot(W1);
graf=size(W1);
mesh(1:1:graf(2),1:1:graf(1),W1);
axis([1 graf(2) 1 graf(1) 0 max(max(W1))]);
xlabel('Eliptik Yüzeyin b Yarıçaplı Ekseni');
ylabel('Eliptik Yüzeyin a Yarıçaplı Ekseni');
zlabel('W1,Bilyadaki Deformasyon,mm');
title('Radyaks Rulmanlardaki Hertz Basınç Dağılımı');

figure
y=1:1:ciz(1);
plot(y,W1)
grid on
xlabel('Eliptik Yüzeyin a Yarıçaplı Ekseni');
ylabel('W1,Bilyadaki Deformasyon,mm');

figure
x=1:1:ciz(2);
plot(x,W1)
grid on
xlabel('Eliptik Yüzeyin b Yarıçaplı Ekseni');
ylabel('W1,Bilyadaki Deformasyon,mm');

figure
plot(W2);
graf=size(W2);
mesh(1:1:graf(2),1:1:graf(1),W2);
axis([1 graf(2) 1 graf(1) 0 max(max(W2))]);
xlabel('Eliptik Yüzeyin b Yarıçaplı Ekseni');
ylabel('Eliptik Yüzeyin a Yarıçaplı Ekseni');
zlabel('W2,Bilezikteki Deformasyon,mm');
title('Radyaks Rulmanlardaki Hertz Basınç Dağılımı');

figure
y=1:1:ciz(1);
plot(y,W2)
grid on
xlabel('Eliptik Yüzeyin a Yarıçaplı Ekseni');

```

```
ylabel('W2,Bilezikteki Deformasyon,mm');
```

```
figure
```

```
x=1:1:ciz(2);
```

```
plot(x,W2)
```

```
grid on
```

```
xlabel('Eliptik Yüzeyin b Yarıçaplı Ekseni');
```

```
ylabel('W2,Bilezikteki Deformasyon,mm');
```

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Denizli’de doğdu. 1996 yılında Hürriyet İlkokulu’ndan,1999 yılında Atatürk İlköğretim Okulu’ndan mezun oldu. 2003 yılında Denizli Anadolu Lisesi’nden mezun olup aynı yıl başladığı Uludağ Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümündeki öğrenimini 2008 yılında tamamladı. 2008 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı’nda yüksek lisansa başladı. Halen yüksek lisans öğrencisidir.