# n- BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA ROTASYON YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

DİDEM KOSOVA SAYGINER

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# n- BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA ROTASYON YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

Didem KOSOVA SAYGINER

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2017

## TEZ ONAYI

Didem KOSOVA SAYGINER tarafından hazırlanan "n-Boyutlu Öklid Uzaylarında Rotasyon Yüzeylerinin Bir Karakaterizasyonu" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

**Üye:** Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Üye:** Prof.Dr. Mustafa ÇALIŞKAN
Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Üye:** Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. Ali BAYRAM**

**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**../../….**

**İmza**

**Didem KOSOVA SAYGINER**

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

n- BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARINDA ROTASYON YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

**Didem KOSOVA SAYGINER**

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmanın amacı $\mathbb{R}^n$'deki rotasyon yüzeylerinin bir sınıflandırmasını vermektir.
Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş bölümüdür.
İkinci bölümde sonraki bölümde kullanılacak olan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.
Üçüncü bölümde $\mathbb{R}^n$'deki rotasyon yüzeyleri ve bunların bir karakterizasyonu verilmiştir. Sırasıyla $\mathbb{R}^3$ , $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^n$'deki rotasyonel yüzeyler ile ilgili orijinal sonuçlar ve bazı örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Dönel yüzey, Rotasyon yüzeyi, Beltrami yüzeyi

**2017, v+41 sayfa.**

# ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF ROTATION SURFACES IN n-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACES

**Didem KOSOVA SAYGINER**

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

**Supervisor:** Prof. Dr. Kadri ARSLAN

The aim of this thesis is to give a characterizations of rotation surfaces in $\mathbb{R}^n$.
This thesis consist of three chapters.
Firs chapter is introduction.
Second chapter consist of some basic definitions and theorems which will be use in the other chapters.
In the third chapter of rotation surfaces in $\mathbb{R}^n$ are considered. Especially, in $\mathbb{R}^3$ , $\mathbb{R}^4$ and $\mathbb{R}^n$ some original results and examples are obtained.

**Key Words:** Surface of revolution, Rotational surface, Beltrami surface

**2017, v+41 pages.**

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Gerek lisans, gerek yüksek lisans eğitimim boyunca engin bilgilerinden çokça faydalandığım, sabırla, hoşgörüyle emek harcayan, fikirleriyle beni her zaman daha iyiye yönlendiren ve aydınlatan, tez çalışmamın ortaya çıkışından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek maddi ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olduğunu hissettiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN’ a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bilgi birikimini, her anlamda yardımını esirgemeden sunan, kendisinden çok şey öğrendiğim değerli hocam Doç. Dr. Betül BULCA’ ya teşekkür ederim.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anneme ve ayrıca her zaman yanımda olan, beni her koşulda destekleyen, kendime güvenmemi sağlayan biricik kardeşime ve hayat arkadaşıma teşekkür ederim.

Didem KOSOVA SAYGINER

… /… / …….

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\mathbb{R}^n$ | n-boyutlu Öklid uzayı |
| $\gamma$ | Eğri |
| $V_i$ | Frenet vektörleri |
| $\kappa_i$ | Frenet eğrilikleri |
| $\lVert \, , \rVert$ | Norm |
| X | Regüler yama |
| M | Yüzey |
| I | 1. temel form |
| $\phi_d$ | d-nci oskülatör uzay |
| $\chi(\mathrm{M})$ | M nin teğet vektör alanlarının uzayı |
| $\chi^{\perp}(\mathrm{M})$ | M nin normal vektör alanlarının uzayı |
| $\nabla$ | M üzerinde afin koneksiyon |
| $\widetilde{\nabla}$ | $\widetilde{\mathrm{M}}$ üzerinde afin koneksiyon |
| $\nabla^{\perp}$ | Normal koneksiyon |
| $<,>$ | $\chi(\mathrm{M})$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu |
| h | İkinci temel form |
| $\mathrm{A}_{\xi}$ | Şekil operatörü |
| $\mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathrm{M}$ | p noktasında teğet uzay |
| $\mathrm{T}_{\mathrm{p}}^{\perp}\mathrm{M}$ | p noktasında normal uzay |
| $N_i$ | Normal vektörleri |

# 1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı $\mathbb{R}^n$'deki rotasyon yüzeylerinin bir sınıflandırmasını vermektir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm temel kavramlardan ibaret olup iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $\mathbb{R}^n$'deki bazı özel eğriler ele alınmıştır. Özellikle, $\mathbb{R}^n$'deki traktriks eğrileri incelenmiştir. Bu tür eğrilerin parametrik gösterimleri ve eğrilikleri verilmiştir. İkinci kısımda $\mathbb{R}^n$'deki yüzeyler ile ilgili temel kavramlar tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı temel özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\mathbb{R}^n$'deki rotasyon yüzeyleri ve bunların bir karakterizasyonu verilmiştir. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda $\mathbb{R}^3$'deki rotasyonel yüzeyler ile ilgili temel tanım ve bilinen sonuçlar verilmiştir. İkinci kısımda $\mathbb{R}^4$'deki rotasyonel yüzeyler ve bunlar ile ilgili bazı örnekler verilmiştir. Üçüncü kısımda ise $\mathbb{R}^n$'deki rotasyonel yüzeyler ile ilgili sonuçlar ve bazı örnekler verilmiştir. Bu bölümün son kısmı tamamen orijinal sonuçlar içermektedir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.0. Giriş

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $\mathbb{R}^{n+1}$'deki eğriler ve onların Frenet denklemleri ve eğrilikleri ile ilgili temel eşitlikler verilmiştir. İkinci kısımda $\mathbb{R}^{n}$'deki yüzeylerin ikinci temel formu, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik ve normal eğrilikleri ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

## 2.1. $\mathbb{R}^{n+1}$'de Eğriler

$\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ regüler parametrik bir eğri olsun. Bu takdirde $\forall\, t \in I$ için $\gamma$'nın yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(t),\ \gamma''(t),\ \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t),\ (d \leq n+1)$ lineer bağımsız ve $\gamma'(t),\ \gamma''(t),\ \gamma'''(t), \dots,\ \gamma^{(d)}(t),\ \gamma^{(d+1)}(t)$ lineer bağımlı ise $\gamma$ eğrisine ***d-ranklı Frenet eğrisi*** adı verilir. Bu durumda d-ranklı bir Frenet eğrisi $\mathbb{R}^{n+1}$'in d-boyutlu alt uzayında yatacaktır. $\mathbb{R}^{n+1}$'in d-boyutlu alt uzayını $\phi_d(t)$ ile gösterelim. Bu alt uzay $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t)$ vektörleri ile gerildiğinden $\phi_d(t)$'ye ***$\gamma$ eğrisinin d. nci oskülatör uzayı*** denir. Açık olarak $\phi_1(t) \subset \phi_2(t) \subset \cdots \subset \phi_d(t)$ dir.

Eğer $\gamma$, d-ranklı bir Frenet eğrisi ise $\gamma'(t),\ \gamma''(t),\ \gamma'''(t), \dots, \gamma^{(d)}(t)$ vektörlerine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulayarak $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \dots, V_d(t)$ ortonormal d-çatısı (Serret-Frenet vektörleri) elde edilir. Yani;

$$E_1(t) = \gamma'(t),\quad V_1(t) = \frac{E_1(t)}{\|E_1(t)\|}$$

$$E_k(t) = \gamma^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \gamma^{(k)}(t), E_i(t) \right\rangle \frac{E_i(t)}{\|E_i(t)\|^2} \qquad (2.1.1)$$

$$V_k(t) = \frac{E_k(t)}{\|E_k(t)\|},\ 2 \leq k \leq d$$

dir (Gluck 1966).

Bu bölümde eğrileri hızların göre birim hızlı (yay-parametreli) ve keyfi hızlı (keyfi parametreli) olarak inceleyeceğiz.

**Tanım 2.1.1.:** $\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ regüler bir eğri olsun. Eğer $\gamma$ eğrisinin yüksek mertebeden türevleri $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t), \ldots, \gamma^{(d)}(t)$ lineer bağımsız ise $\gamma$'ya ***cenerik eğri ( yada oskülatör mertebesi d olan eğri)*** denir (Vargas 2005).

**Teorem 2.1.2.:** $\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$, d-ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisi olmak üzere $\gamma$'nın ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \ldots, V_d(t)$'nin türevleri $\nu(t) = \|\gamma'(t)\|$ için

$$V_1'(t) = \nu(t)\kappa_1(t)V_2(t),$$

$$V_i'(t) = -\nu(t)\kappa_{i-1}(t)V_{i-1}(t) + \nu(s)\kappa_i(t)V_{i+1}(t) \tag{2.1.2}$$

$$V_d'(t) = -\nu(t)\kappa_{d-1}(t)V_{d-1}(t)$$

$(2 \leq i \leq d-1)$ dir. Burada $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d-1} : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\gamma$'nın Frenet eğrilik fonksiyonlarıdır.

**Sonuç 2.1.3.:** $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \ldots, V_d(t)$ vektörlerine **Frenet d-çatısı** ve (2.1.2) deki eşitliklere de **Frenet denklemleri** adı verilir. Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde yazılır;

$$\begin{bmatrix} V_1'(t) \\ V_2'(t) \\ V_3'(t) \\ \cdots \\ V_d'(t) \end{bmatrix} = \nu(t) \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & . & . & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & . & . \\ . & -\kappa_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & \kappa_{d-1} \\ 0 & . & . & -\kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \\ V_3(t) \\ \cdots \\ V_d(t) \end{bmatrix}. \tag{2.1.3}$$

**Açıklama 2.1.4.:** $\gamma$ eğrisinin hız fonksiyonu $\nu(t) = \|\gamma'(t)\| = 1$ ise $\gamma$ eğrisine ***birim hızlı eğri*** denir. Birim hızlı bir eğrinin parametresi yay-parametresi olup $s$ ile gösterilir.

**Teorem 2.1.5.:** $\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ d-ranklı keyfi hızlı bir Frenet eğrisinin ortonormal çatısı $V_1(t), V_2(t), V_3(t), \ldots, V_d(t)$ için

$$F_k(t) = \gamma^{(k)}(t) - \sum_{j<k} \langle \gamma^{(k)}(t), V_j(t) \rangle \, V_j(t) \tag{2.1.4}$$

olmak üzere

$$\kappa_k(s) = \frac{\|F_{k+1}\|}{\|F_k\|\|F_1\|}\ ,\ 1 \leq k \leq d-1 \tag{2.1.5}$$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

**Tanım 2.1.6.:** $\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ cenerik bir eğri olsun. Bu taktirde $\gamma$ 'ya $\forall\, p \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktasından çizilen teğetlerin uç noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen $\beta: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ eğrisi $\mathbb{R}^{n+1}$ 'in bir $\mathbb{R}^n$ alt uzayında yatıyor ise $\gamma$ eğrisine ***genelleştirilmiş traktriks eğrisi*** denir. $\beta$ eğrisi ise $\gamma$'nın iz vektörü olarak adlandırılır.

Traktriks eğrisinin yarıçap vektörü,

$$\gamma(u) = (f_1(u), \dots, f_{n+1}(u)) \tag{2.1.6}$$

parametrizasyonu ile tanımlansın. Bu durumda, $\gamma$ birim hızlı olduğundan $\|\gamma'(u)\| = 1$ dır. Böylece, $c > 0$ reel sayısı için $\gamma$'nın iz vektörü $\beta$;

$$\beta(u) = (\gamma + \gamma')(u) = \big((f_1 + cf_1')(u), \dots, (f_{n+1} + cf_{n+1}')(u)\big) \tag{2.1.7}$$

şeklinde tanımlanır. Dolasıyla, $\gamma \in \mathbb{R}^{n+1}$ eğrisinin genelleştirilmiş traktriks eğrisi olması için gerek ve yeter koşul $\beta$ eğrisinin $\mathbb{R}^n$ alt uzayında yatmasıdır. Diğer bir deyişle

$$(f_{n+1} + cf_{n+1}')(u) = 0$$

denkleminin sağlanmasıdır. Böylece, bu diferansiyel denkleminin çözümünden,

$$f_{n+1}(u) = \lambda e^{-u/c} \tag{2.1.8}$$

elde edilir. Burada $\lambda \in \mathbb{R}$ sabit bir fonksiyondur. O halde, $\gamma$ genelleştirilmiş traktriks eğrisinin yarıçap vektörü,

$$\gamma(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u), \lambda e^{-u/c}) \tag{2.1.9}$$

halini alır. Bununla birlikte, $\gamma$ eğrisi birim hızlı olduğundan

$$(f_1')^2 + \ldots + (f_n')^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c} \tag{2.1.10}$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi, $\gamma$ eğrisinin ilk n-bileşeni

$$\phi(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u), 0)$$

şeklinde tanımlandığında

$$\gamma(u) = \phi(u) + \lambda e^{-u/c} e_{n+1}, \tag{2.1.11}$$

dir. Burada

$$e_{n+1} = (0,0, \ldots, 0,1)$$

birim vektördür. Her iki tarafın normu hesaplanırsa (2.1.10) yardımıyla,

$$\|\phi'(u)\|^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c} \tag{2.1.12}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $\beta$ iz eğrisi

$$\beta = \phi(u) + \phi'(u) \tag{2.1.13}$$

biçimine dönüşür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^{n+1}$'de keyfi bir $\vec{a}$ birim vektörü

$$\vec{a}(u) = (a_1(u), \ldots, a_n(u); 0) \tag{2.1.14}$$

olmak üzere $\phi$ vektör fonksiyonu

$$\phi(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\ \vec{a}(u) du \tag{2.1.15}$$

parametrizasyonuna sahip olur.

**Örnek 2.1.7.:** $\mathbb{R}^2$'deki bilinen traktriks eğrisi

$$\gamma(u) = \left( \int \sqrt{1 - (\frac{\lambda^2}{c^2}) e^{-2u/c}}\ a(u) du, \lambda e^{-u/c} \right) \tag{2.1.16}$$

yarıçap vektörü ile tanımlanır.

**Örnek 2.1.8.:** $\mathbb{R}^3$'deki genelleştirilmiş traktriks eğrisi

$$f_1(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, cos\alpha(u) du$$

$$f_2(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, sin\alpha(u) du \tag{2.1.17}$$

$$f_3(u) = \lambda e^{-u/c}$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada

$$a(u) = (cos\alpha(u), sin\alpha(u); 0)$$

dır (Arslan ve ark. 2017).

**Örnek 2.1.9.:** $\mathbb{R}^4$'deki genelleştirilmiş traktriks eğrisi

$$f_1(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, cos\alpha(u) du$$

$$f_2(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, cos\alpha(u) sin\alpha(u) du \tag{2.1.18}$$

$$f_3(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, sin^2 \alpha(u) du$$

$$f_4(u) = \lambda e^{-u/c}$$

parametrizasyonuna sahiptir. Burada

$$a(u) = (cos\alpha(u), cos\alpha(u) sin\alpha(u), sin^2\alpha(u); 0)$$

dır (Arslan ve ark. 2017).

## 2.2. $\mathbb{R}^n$'de Yüzeyler

$M$ yüzeyi $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ yaması ile verilsin. $M$'nin $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, $X_u$ ve $X_v$ ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece $M$'nin ***birinci temel formu***

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.2.1}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

***1. temel form katsayıları*** olup $\langle \, , \rangle$ bir Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2.2) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 \tag{2.2.3}$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u,v)$ yaması ***regülerdir*** denir (Gray 1993).

Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $X(u,v)$ yaması regüler kabul edilecektir ve

$$EG - F^2 = W^2 \tag{2.2.4}$$

ile gösterilecektir. Genelliği bozmadan $M$'nin 1. temel form katsayıları

$$E = g_{11}, \; F = g_{12}, \; G = g_{22} \tag{2.2.5}$$

ile gösterilebilir.

**Tanım 2.2.1.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. $\mathbb{R}^n$'de Riemann koneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\forall X_i, X_j \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için $M$ yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu $\nabla$ olmak üzere $M$'nin ***ikinci temel form dönüşümü***

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M) \;\; ; h(X_i, X_j) = \widetilde{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j, \tag{2.2.6}$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.2.6) eşitliği ***Gauss denklemi*** olarak bilinir (Chen 1973).

**Tanım 2.2.2.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu taktirde $N_1, N_2, ..., N_{n-2}$ $M$ 'nin normal vektörleri ve $\forall X_i \in \chi(M)$ olmak üzere $M$ 'nin ***şekil operatörü dönüşümü***

$$A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M);\ A_{N_\alpha} X_i = -\widetilde{\nabla}_{X_i} N_\alpha + \nabla^{\perp}_{X_i} N_\alpha \quad (2.2.7)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_{N_\alpha} X_i$, $N_\alpha$ 'ya karşılık gelen şekil operatörü ve $\nabla^{\perp}$ ise $\chi^{\perp}(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Literatürde (2.2.7) eşitliği ***Weingarten denklemi*** olarak bilinir (Chen 1973).

**Tanım 2.2.3.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u,v)$ yamasının 2. mertebeden kısmi türevleri $X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}$ ve normal vektör alanları $N_1, N_2, \ldots, N_{n-2}$ olmak üzere $M$'nin ***ikinci temel form katsayıları***

$$\begin{aligned} L^{\alpha}_{11} &= \langle X_{uu}, N_\alpha \rangle, \\ L^{\alpha}_{12} &= \langle X_{uv}, N_\alpha \rangle, \quad 1 \le \alpha \le n-2 \\ L^{\alpha}_{22} &= \langle X_{vv}, N_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

şeklinde tanımlanır (Mello 2003).

Herhangi $X_i, X_j \in T_p(M)$ için

$$< A_{N_\alpha} X_i, X_j > = < h(X_i, X_j), N_\alpha > = L^{\alpha}_{ij}\ ,\ 1 \le i, j \le 2, 1 \le \alpha \le n-2, \quad (2.2.9)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$h(X_i, X_j) = \sum_{\alpha=1}^{n-2} L^{\alpha}_{ij} N_\alpha\ ,\ 1 \le i, j \le 2 \quad (2.2.10)$$

dir.

**Tanım 2.2.4.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu durumda $M$'nin ***Christoffel sembolleri*** $\Gamma^{k}_{ij}$ ($1 \le i, j, k \le 2$)

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \quad \Gamma_{11}^{2} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$
$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \quad \Gamma_{12}^{2} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \tag{2.2.11}$$
$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \quad \Gamma_{22}^{2} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Gamma_{21}^{1} = \Gamma_{12}^{1}$ ve $\Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{12}^{2}$ dir (Gray 1993).

**Sonuç 2.2.5.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $F = 0$ için $M$'nin Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{E_u}{2E} = \frac{1}{E}\langle X_{uu}, X_u\rangle \qquad \Gamma_{11}^{2} = \frac{-E_v}{2G} = -\frac{1}{G}\langle X_{uv}, X_u\rangle$$
$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{E_v}{2E} = \frac{1}{E}\langle X_{uv}, X_u\rangle \qquad \Gamma_{12}^{2} = \frac{G_u}{2G} = \frac{1}{G}\langle X_{uv}, X_v\rangle \tag{2.2.12}$$
$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{-G_u}{2E} = -\frac{1}{E}\langle X_{uv}, X_v\rangle \qquad \Gamma_{22}^{2} = \frac{G_v}{2G} = \frac{1}{G}\langle X_{vv}, X_v\rangle$$

**İspat:** (Bulca 2012)

**Önerme 2.2.6.:** $M$ yüzeyi $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\forall X_u, X_v \in \chi(M)$ ve $\{N_1, N_2, ..., N_{n-2}\} \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$X_{uu} = \widetilde{\nabla}_{X_u} X_u = \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + L_{11}^{1} N_1 + L_{11}^{2} N_2 + ... + L_{11}^{n-2} N_{n-2}$$
$$X_{uv} = \widetilde{\nabla}_{X_u} X_v = \Gamma_{12}^{1} X_u + \Gamma_{12}^{2} X_v + L_{12}^{1} N_1 + L_{12}^{2} N_2 + ... + L_{12}^{n-2} N_{n-2} \tag{2.2.13}$$
$$X_{vv} = \widetilde{\nabla}_{X_v} X_v = \Gamma_{22}^{1} X_u + \Gamma_{22}^{2} X_v + L_{22}^{1} N_1 + L_{22}^{2} N_2 + ... + L_{22}^{n-2} N_{n-2}$$

dir (Gray 1993).

Böylece (2.2.13), (2.2.6) ve (2.2.7) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 2.2.7.:** $M$ yüzeyi $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$h(X_u, X_u) = L_{11}^{1} N_1 + L_{11}^{2} N_2 + \ ... \ + \ L_{11}^{n-2} N_{n-2}$$

$$h(X_u, X_v) = L_{12}^1 N_1 + L_{12}^2 N_2 + \ \dots \ + \ L_{12}^{n-2} N_{n-2} \tag{2.2.14}$$

$$h(X_v, X_v) = L_{22}^1 N_1 + L_{22}^2 N_2 + \ \dots \ + \ L_{22}^{n-2} N_{n-2}$$

dir.

**Sonuç 2.2.8.:** $M$ yüzeyi $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. Bu takdirde

$$h(X_u, X_u) = X_{uu} - \Gamma_{11}^1 X_u - \Gamma_{11}^2 X_v$$

$$h(X_u, X_v) = X_{uv} - \Gamma_{12}^1 X_u - \Gamma_{12}^2 X_v \tag{2.2.15}$$

$$h(X_v, X_v) = X_{vv} - \Gamma_{22}^1 X_u - \Gamma_{22}^2 X_v$$

dir.

**Sonuç 2.2.9.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi regüler yaması ile verilsin. $F = 0$ ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \frac{1}{E}\langle X_{uu}, X_u\rangle X_u + \frac{1}{G}\langle X_{uv}, X_u\rangle X_v \\
h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \frac{1}{E}\langle X_{uv}, X_u\rangle X_u - \frac{1}{G}\langle X_{uv}, X_v\rangle X_v \\
h(X_v, X_v) &= X_{vv} + \frac{1}{E}\langle X_{uv}, X_v\rangle X_u - \frac{1}{G}\langle X_{vv}, X_v\rangle X_v
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

dir.

**İspat:** (Bulca 2012).

**Tanım 2.2.10.:** $X(u, v)$: $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ regüler yaması ile verilen $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyinin ***Gauss eğrilik fonksiyonu***

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{i=1}^{n-2} (L_{11}^i L_{22}^i - (L_{12}^i)^2) \tag{2.2.17}$$

dir (Mello 2009).

**Tanım 2.2.11.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde her $\{X_1, X_2\} \in \chi(M)$ ve $\{N_1, N_2, ..., N_{n-2}\} \in \chi^{\perp}(M)$ ortonormal bazları için $M$'nin ***ortalama eğrilik vektör alanı***

$$\overrightarrow{H} = \sum_{i=1}^{n-2} H_\alpha N_\alpha \tag{2.2.18}$$

dir. Burada

$$H_\alpha = \frac{1}{2W^2} \sum_{i=1}^{n-2} \left( GL_{11}^\alpha - 2FL_{12}^\alpha + EL_{22}^\alpha \right) \tag{2.2.19}$$

$M$'nin ***i.nci ortalama eğrilik fonksiyonu***dur. Bununla birlikte $M$'nin ***ortalama eğrilik fonksiyonu*** $H = \left\| \overrightarrow{H} \right\|$ dir (Mello 2003).

Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 2.2.12.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$'nin bir $\{X_u, X_v\}$ bazı için $M$'nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{W^2} \left( \langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle - \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle \right) \tag{2.2.20}$$

dir (Bulca 2012).

**Sonuç 2.2.13.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $T_p(M)$ nin bir $\{X_u, X_v\}$ bazı için $M$'nin ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2} \left( Eh(X_v, X_v) - 2Fh(X_u, X_v) + Gh(X_u, X_u) \right) \tag{2.2.21}$$

dir (Bulca 2012).

**Tanım 2.2.14.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi ile normal demeti $\chi^{\perp}(M)$ 'nin ***eğrilik tensörleri*** sırasıyla

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.2.22}$$

ve

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = h(X, A_{\xi}Y) - h(Y, A_{\xi}X),\ \xi \in \chi^{\perp}(M) \tag{2.2.23}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece her $X,Y,Z,W \in \chi(M)$ ve $\xi,\eta \in \chi^{\perp}(M)$ için $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyinin ***Gauss ve Ricci denklemleri*** sırasıyla

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle h(X,W),h(Y,Z)\rangle - \langle h(X,Z),h(Y,W)\rangle, \tag{2.2.24}$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_{\xi}, A_{\eta}]X, Y\rangle \tag{2.2.25}$$

dir (Chen 1973). Burada $[\,,\,]$ Lie parantez operatörü

$$\begin{aligned}[\,,\,]: \chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M)\\ (X,Y) &\mapsto [X,Y] = XY - YX = \nabla_X Y - \nabla_Y X\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $R^{\perp}=0$ ise $M$ yüzeyi ***düz (flat) normal koneksiyonludur*** denir.

**Tanım 2.2.15.:** $M \subset \mathbb{R}^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\chi(M)$ ve $\chi^{\perp}(M)$ uzaylarının $\{X_1, X_2\}$ ve $\{N_{\alpha}\}, 1\le\alpha\le n-2$ ortonormal bazları için $M$'nin ***normal eğriliği***

$$K_N = \left\{\sum_{1=\alpha<\beta}^{n-2}\langle R^{\perp}(X_1,X_2)N_{\beta}, N_{\alpha}\rangle^2\right\}^{1/2} \tag{2.2.26}$$

şeklinde tanımlanır (DeSmet ve ark. 1999).

**Açıklama 2.2.16.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $\chi(M)$ ve $\chi^{\perp}(M)$ uzaylarının $\{X_1, X_2\}$ ve $\{N_1, N_2\}$ ortonormal bazları için $M$'nin normal eğriliği

$$K_N = \langle R^{\perp}(X_1,X_2)N_2, N_1\rangle \tag{2.2.27}$$

şeklinde tanımlanır (Guadalupe ve Rodriguez 1983).

**Önerme 2.2.17.:** $X(u,v)$ regüler yaması ile verilen bir $M \in \mathbb{R}^4$ yüzeyinin normal eğrilik fonksiyonu

$$K_N = \frac{E\left(L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{12}^2 L_{22}^1\right) - F\left(L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{11}^2 L_{22}^1\right) + G\left(L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{11}^2 L_{12}^1\right)}{W^3} \qquad (2.2.28)$$

dir.

**Sonuç 2.2.18.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi $X(u,v):(u,v) \in D \subset R^2$ regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde $K_N = 0$ olması için gerek ve yeter şart $R^{\perp} = 0$ olmasıdır.

# 3. $\mathbb{R}^m$'DE ROTASYONEL YÜZEYLER

## 3.0. Giriş

Bu bölümde m-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ 'deki rotasyonel yüzeyler ele alınmıştır. Rotasyonel yüzeylere dair Gauss, ortalama ve normal eğrilikleri hesaplanmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$'deki rotasyonel yüzey tanımı N. H. Kuiper tarafından 1970 yılında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$\mathbb{R}^{n+d} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^d$ , $d \geq 2$ $n+d$ boyutlu Öklid uzayının kartezyen koordinatları $x_1, x_2, \ldots, x_{n+d}$ ve ortonormal bazları $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+d}$ olmak üzere $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ yüzeyi

$$X(u,v) = \phi(u) + f_{n+1}(u)\rho(v) \tag{3.0.1}$$

yamasıyla verilsin. Burada

$$\phi(u) = (f_1(u), \ldots, f_n(u); 0, \ldots 0) \tag{3.0.2}$$

olmak üzere $M$ yüzeyinin $\gamma(u) = \phi(u) + f_{n+1}(u)\vec{e}_{n+1}$ profil eğrisi (yarıçap vektörü) birim hızlı olsun. Ayrıca

$$\rho(v) = (0, \ldots, 0; g_1(v), \ldots, g_d(v)) \tag{3.0.3}$$

şeklinde tanımlanan $\rho = \rho(v)$ vektör fonksiyonu

$$\|\rho(v)\| = 1, \|\rho'(v)\| = 1 \tag{3.0.4}$$

olmak üzere $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ birim küresi üzerinde bir eğri belirtir. Böylece $\gamma$ profil eğrisinin $\rho$ küresel eğrisi etrafında döndürülmesiyle oluşan $M$ yüzeyine $\mathbb{R}^{n+d}$ 'de ***rotasyonel yüzey*** adı verilir (Kuiper 1970).

Aşağıdaki alt bölümlerde sırasıyla $\mathbb{R}^3$ , $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^{n+d}$ 'deki rotasyonel yüzeyleri ele alınmıştır.

### 3.1. $\mathbb{R}^3$'de Rotasyonel Yüzeyler

Giriş bölümünde verilen rotasyonel yüzey tanımının $\mathbb{R}^3$'deki versiyonu aşağıdaki tanımdaki gibi yorumlanabilir.

**Tanım 3.1.1.:** $\gamma: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , $\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u))$ birim hızlı regüler eğrisinin $\rho(v) = (\cos v, \sin v)$ birim çemberi etrafında döndürülmesiyle elde edilen ***dönel yüzey***

$$X : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ X(u,v) = (f_1(u), f_2(u)\cos v, f_2(u)\sin v) \qquad (3.1.1)$$

parametrizasyonuna sahip olup $\mathbb{R}^3$'de ***rotasyonel yüzey*** belirtir.

$M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyinin tanjant uzayı,

$$X_u = (f_1{}'(u), f_2{}'(u)\cos v, f_2{}'(u)\sin v),$$

$$X_v = (0, -f_2(u)\sin v, f_2(u)\cos v)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece, $\mathbb{R}^3$'deki standart iç çarpım yardımıyla $M$'nin 1. temel form katsayıları;

$$g_{11} = \langle X_u , X_u \rangle = 1 ,$$

$$g_{12} = \langle X_u , X_v \rangle = 0 , \qquad (3.1.2)$$

$$g_{22} = \langle X_v , X_v \rangle = (f_2(u))^2$$

olarak bulunur. Ayrıca, γ eğrisi birim hızlı olduğundan

$$f_1{}'(u)^2 + f_2{}'(u)^2 = 1$$

dir. Bununla birlikte $X(u,v)$ regüler olduğundan

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2} = f_2(u) \neq 0$$

olmalıdır. Böylece, $M$'nin normal uzayı,

$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = (f_2{}'(u), -f_1{}'(u)\cos v, -f_1{}'(u)\sin v)$$

vektör alanı ile gerilir.

Ayrıca $X(u,v)$'nin 2.mertebeden kısmi türevleri,

$$X_{uu}(u,v) = (\, f_1''(u),\ f_2''(u)\cos v\,,\ f_2''(u)\sin v\,),$$

$$X_{uv}(u,v) = (\,0, -f_2'(u)\sin v\,,\ f_2'(u)\cos v),$$

$$X_{vv}(u,v) = (0, -f_2(u)\cos v\,, -f_2(u)\sin v\,),$$

dir. Buradan, $M$ yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$L_{11} = \langle\, X_{uu}(u,v), N(u,v)\,\rangle = -\kappa_1(u),$$

$$L_{12} = \langle\, X_{uv}(u,v), N(u,v)\,\rangle = 0, \tag{3.1.3}$$

$$L_{22} = \langle\, X_{vv}(u,v), N(u,v)\,\rangle = f_1'(u)\, f_2(u)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\kappa_1(u) = f_1'(u)\, f_2''(u) - f_1''(u)\, f_2'(u) \tag{3.1.4}$$

γ eğrisinin Frenet eğriliğidir.

Böylece, (3.1.3) eşitlikleri (2.2.17) ve (2.2.18)'de yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği;

$$K = -\frac{f_2''(u)}{f_2(u)} \tag{3.1.5}$$

ve ortalama eğriliği ise

$$2H = \frac{f_1'(u) - \kappa_1(u)\, f_2(u)}{f_2(u)} \tag{3.1.6}$$

dir (Bulca ve ark. 2009).

Böylece (3.1.5) ve (3.1.6) yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilmiş olur.

**Teorem 3.1.2.:** $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (3.1.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde $M$'nin Gauss eğriliği $K$ olmak üzere,

$$f_2''(u) + K f_2(u) = 0 \tag{3.1.7}$$

dir.

**Sonuç 3.1.3.:** $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (3.1.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde, $M$ yüzeyi düz ise

$$f_2(u) = c_1 u + c_2 \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dir. Böylece, $M$'nin parametrizasyonu

$$X(u,v) = \left(\sqrt{1-c_1^2}u + \ c_3, (c_1 u + c_2) \cos v \,, (c_1 u + c_2) \sin v\right)$$

olarak bulunur.

Düz rotasyonel yüzeylerle ilgili aşağıdaki sonuçlar V. Velickovic tarafından verilmiştir (Velickovic 2005).

**Sonuç 3.1.4.:** $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (3.1.1) parametrizasyonu ile verilen bir düz rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler geçerlidir;

i. $M$'nin profil eğrisi $\gamma(u) = (\pm u + d_1, c_2)$ biçiminde ise $M$ yüzeyi dairesel silindirin bir parçasıdır.
ii. $M$'nin profil eğrisi $\gamma(u) = (d_1, \pm u + c_2)$ biçiminde ise $M$ yüzeyi düzlemin bir parçasıdır.
iii. $M$'nin profil eğrisi $\gamma(u) = (c_1 u,\ d_1 u)$ biçiminde ise $M$ yüzeyi dairesel koninin bir parçasıdır.

**Sonuç 3.1.5.:** $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (3.1.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Eğer $M$ yüzeyi bir $c > 0$ sabit sayısı için

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{\mathrm{c}^2}$$

biçiminde negatif Gauss eğriliğine sahip ise

$$f_2(u) = \ c_1 \cosh\left(\frac{u}{c}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{u}{c}\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

bulunur.

Bununla birlikte

i. Eğer $c_1 = -c_2 = \lambda \neq 0$ ise $f_2(u) = \lambda e^{-u/c}$ dır. Bu durumda $M$ yüzeyi ***parabolik pseudo-küresel yüzey*** olarak adlandırılır.

ii. Eğer $c_2 = 0,\ c_1 = \lambda \neq 0$ ise $f_2(u) = \lambda \cosh\left(\frac{u}{c}\right)$ olur ve $M$ yüzeyi ***hiperbolik pseudo- küresel yüzey*** olarak adlandırılır.

iii. Eğer $c_1 = 0,\ c_2 = \lambda \neq 0$ ise $f_2(u) = \lambda \sinh\left(\frac{u}{c}\right)$ olur ve $M$ yüzeyi ***eliptik pseudo- küresel yüzey*** olarak adlandırılır.

**Örnek 3.1.6. :** Rotasyonel yüzeyin profil eğrisi,

$$\gamma(u) = \left(\int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du, \lambda e^{-u/c}\right)$$

traktriks eğrisi ise bu durumda dönel yüzey $\mathbb{R}^3$'de ***Beltrami yüzeyi*** olarak bilinir. Bu yüzeyin bir parametrelendirmesi,

$$X(u,v) = \left(\int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du\ , \lambda e^{-u/c} \cos v\ , \lambda e^{-u/c} \sin v\right)$$

şeklindedir.

Sonuç olarak Beltrami yüzeylerinin Gauss eğriliği $K = -\frac{1}{c^2}$ dir. Bu nedenle Beltrami yüzeyleri parabolik pseudo-küresel yüzeyler sınıfına girmektedir. Pseudo-küre, 1868 yılında Eugenio Beltrami tarafından incelenmiş olup hiperbolik geometri için bir model teşkil eder (Beltrami 1868). Bu çalışmalardan da bilindiği üzere pseudo-küre negatif, sabit Gauss eğriliğine sahip bir yüzeydir.

## 3.2. $\mathbb{R}^4$'de Rotasyonel Yüzeyler

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$'de rotasyonel yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeyler profil eğrisi $\gamma$'nın karakterizasyonuna göre tanımlanmaktadır. Eğer $\gamma$ eğrisi uzay eğrisi ve küresel eğri $\rho$ bir çember ise elde edilen yüzeye ***1. tip rotasyonel yüzey*** denir. Eğer $\gamma$ düzlemsel eğri ve bununla birlikte küresel $\rho$ eğrisi bir uzay eğrisi ise elde edilen yüzeye ***2. tip rotasyonel yüzey*** denir. Bu yüzeyler sırasıyla aşağıda incelenmiştir.

### 3.2.1. Birinci Tip Rotasyonel Yüzeyler

**Tanım 3.2.1.1:** $\gamma: \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(u) = (\, f_1(u), f_2(u), f_3(u)\,)$ birim hızlı regüler eğrisinin $\rho(v) = (\cos v, \sin v)$ birim çemberi etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$X(u,v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u)\cos v, f_3(u)\sin v) \tag{3.2.1.1}$$

parametrizasyonuna sahip olup bu yüzeye $\mathbb{R}^4$'de ***1. tip rotasyonel yüzey*** denir. (3.2.1.1) parametrizasyonu ile verilen yüzeyler aynı zamanda $\mathbb{R}^4$'de ***küresel çarpım yüzeyleri*** olarak da adlandırılır (Bulca ve ark. 2012), (Ganchev, Milousheva 2008).

$M \subset \mathbb{R}^4$, 1. tip rotasyonel yüzeyinin tanjant uzayı,

$$X_u(u,v) = \left(\, f_1{}'(u),\ f_2{}'(u), f_3{}'(u)\cos v\,,\ f_3{}'(u)\sin v\,\right),$$

$$X_v(u,v) = (\,0{,}0,\ -f_3(u)\sin v\,,\ f_3(u)\cos v)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece, $\mathbb{R}^4$'deki standart iç çarpım yardımıyla $M$'nin 1. temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_u\,,\,X_u\rangle = 1\,,\\ g_{12} &= \langle X_u\,,\,X_v\rangle = 0\,,\\ g_{22} &= \langle X_v\,,\,X_v\rangle = (f_3(u))^2 \end{aligned} \tag{3.2.1.2}$$

olarak bulunur.

$X(u,v)$'nin 2. mertebeden kısmi türevleri,

$$X_{uu}(u,v) = (\, f_1''(u),\ f_2''(u),\ f_3''(u)\cos v\,,\ f_3''(u)\sin v\,),$$

$$X_{uv}(u,v) = (\,0{,}0, -f_3'(u)\sin v\,,\ f_3'(u)\cos v),$$

$$X_{vv}(u,v) = (0, 0, -f_3(u)\cos v\,, -f_3(u)\sin v\,)$$

olarak bulunur. Bununla birlikte $M$'nin normal uzayı ise,

$$N_1 = \frac{1}{\kappa_\gamma}(\, f_1''(u),\ f_2''(u),\ f_3''(u)\cos v\,,\ f_3''(u)\sin v\,), \tag{3.2.1.3}$$

$$N_2 = \frac{1}{\kappa_\gamma}(\ f_2'(u)\, f_3''(u) - f_2''(u) f_3'(u),\ f_1''(u) f_3'(u) - f_1'(u) f_3''(u),$$

$$\left( f_1'(u) f_2''(u) - f_1''(u) f_2'(u)\right)\cos v\,, \left( f_1'(u) f_2''(u) - f_1''(u) f_2'(u)\right)\sin v\,)$$

vektör alanları tarafından gerilir. Burada

$$\kappa_\gamma = \sqrt{(\, f_1'')^2 + (\, f_2'')^2 + (\, f_3'')^2} \tag{3.2.1.4}$$

$\gamma$ eğrisinin eğriliğidir.

Bu takdirde $M$ yüzeyinin ikinci temel form katsayıları;

$$L_{11}^1 = \langle\, X_{uu}(u,v), N_1(u,v)\,\rangle = \kappa_\gamma(u),$$

$$L_{12}^1 = \langle\, X_{uv}(u,v), N_1(u,v)\,\rangle\ = 0,$$

$$L_{22}^1 = \langle\, X_{vv}(u,v), N_1(u,v)\,\rangle = -\frac{f_3''(u) f_3(u)}{\kappa_\gamma(u)}$$

$$L_{11}^2 = \langle\, X_{uu}(u,v), N_2(u,v)\,\rangle = 0, \tag{3.2.1.5}$$

$$L_{12}^2 = \langle\, X_{uv}(u,v), N_2(u,v)\,\rangle = 0,$$

$$L_{22}^2 = \langle\, X_{vv}(u,v), N_2(u,v)\,\rangle = -\frac{f_3''(u)\,\kappa_1(u)}{\kappa_\gamma(u)}$$

olarak bulunur. Burada,

$$\kappa_1(u) = f_1'(u)\, f_2''(u) - f_1''(u)\, f_2'(u) \tag{3.2.1.6}$$

türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece, (3.2.1.2) ve (3.2.1.5) eşitlikleri (2.2.17) ve (2.2.18)’de yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği;

$$K = -\frac{f_3''(u)}{f_3(u)} \tag{3.2.1.7}$$

ve ortalama eğrilik vektörü ise

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\left\{\left(\kappa_\gamma + \frac{K}{\kappa_\gamma}\right)N_1 - \frac{\kappa_1(u)}{f_2(u)\kappa_\gamma(u)}N_2\right\} \tag{3.2.1.8}$$

dir (Bulca ve ark. 2012).

Bu ifadelerden yola çıkılarak aşağıda bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

**Teorem 3.2.1.2.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.1.1) parametrizasyonu ile verilen 1. tip rotasyonel yüzey olsun. Bu durumda $M$ yüzeyinin Gauss eğriliği yardımıyla,

$$f_3''(u) + Kf_3(u) = 0 \tag{3.2.1.9}$$

elde edilir.

**Sonuç 3.2.1.3.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.1.1) parametrizasyonu ile verilen 1.tip rotasyonel yüzey olsun. $M$ yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter koşul

$$f_3(u) = c_1u + c_2$$

olmasıdır. Burada $c_1,\ c_2 \neq 0$ reel sabitlerdir.

(3.2.1.8) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 3.2.1.4.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.1.1) parametrizasyonu ile verilen bir 1. tip rotasyonel yüzey olsun. $M$’nin bir p noktasındaki ortalama eğriliği,

$$2H = \sqrt{\left(\kappa_\gamma + \frac{K}{\kappa_\gamma}\right)^2 + \frac{\kappa_1^2(u)}{{f_3}^2(u){\kappa_\gamma}^2(u)}} \tag{3.2.1.10}$$

olur.

**Teorem 3.2.1.5.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.1.1) parametrizasyonu ile verilen 1.tip rotasyonel yüzey olsun. $M$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart $M$'nin düz bir yüzey veya profil eğrisi

$$f_1(u) = \frac{\lambda\sqrt{2c_2 - c_1^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} ln\left(\sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} + u + c_1\right) + c_3$$

$$f_2(u) = \frac{\sqrt{2c_2 - c_1^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} ln\left(\sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} + u + c_1\right) + c_4 \qquad (3.2.1.11)$$

$$f_3(u) = \pm\sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2}$$

olan bir yüzey olmasıdır. Burada $c_1, c_2, c_3, c_4$ ve $\lambda$ reel sabitlerdir.

**İspat:** ($\Rightarrow$): $M$ yüzeyi $\mathbb{R}^4$ 'de minimal bir yüzey olsun. Bu durumda (3.2.1.10) eşitliğinden $K = -{\kappa_\gamma}^2$ ve $\kappa_1 = 0$ dir. Ayrıca (3.2.1.6)'dan

$$f_1' f_2'' - f_1'' f_2' = 0$$

olur. Buradan, bu denklemin çözümünden

$$\ln(f_1') + c_1 = \ln(f_2') + c_2 \quad , c_1, c_2 \; reel\ sabit$$

elde edilir. Böylece,

$$f_1' = \lambda f_2' \; ; \lambda = \; e^{c_2 - c_1} \qquad (3.2.1.12)$$

bulunur. Profil eğrisi $\gamma$ birim hızlı olduğundan (3.2.1.12) yardımıyla

$$(1+\lambda^2)(f_2')^2 + (f_3')^2 = 1 \qquad (3.2.1.13)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$K = -\frac{f_3''}{f_3},$$

$${\kappa_\gamma}^2 = (f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{f_3''}{f_3} = \lambda^2 (f_2'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2 \qquad (3.2.1.14)$$

$$(1+\lambda^2)(f_2')^2 + (f_3')^2 = 1$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. (3.2.1.14) diferansiyel denklemlerinden

$$f_2' = \pm \frac{\sqrt{1-(f_3')^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \tag{3.2.1.15}$$

elde edilir. Basitliğin hatırına

$$f_2' = \frac{\sqrt{1-(f_3')^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \tag{3.2.1.16}$$

alınsın. Ayrıca (3.2.1.16) eşitliğinin türevi alınırsa

$$f_2'' = -\frac{f_3' f_3''}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1-(f_3')^2}} \tag{3.2.1.17}$$

elde edilir. Bu ifade (3.2.1.14) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$f_3''(1-(f_3')^2 - f_3 f_3'') = 0$$

elde edilir. Buradan

$$f_3'' = 0 \quad \text{yada} \quad (1-(f_3')^2 - f_3 f_3'') = 0$$

olur.

**1. Durum:** $f_3'' = 0$ olsun. Bu taktirde, $f_3 = au + b$ bulunur. Buradan $M \subset \mathbb{R}^4$'de düz bir yüzey olur. Bu ifade (3.2.1.15) ve (3.2.1.12)'de yerine yazılırsa

$$f_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} u + c$$

ve

$$f_1 = c_1 u + c_2\,, \;\; c_1 = \lambda \frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}},\; c_2 = \lambda c + d$$

olarak bulunur.

**2. Durum:** $(1-(f_3')^2 - f_3 f_3'') = 0$ olsun. Bu taktirde, diferansiyel denklemin çözümünden

$$f_3 = \pm\sqrt{u^2 + 2c_3 u + 2c_4},$$

elde edilir. Son ifadenin türevinden elde edilen,

$$f_3' = \pm\frac{u + c_3}{\sqrt{u^2 + 2c_3 u + 2c_4}},$$

eşitliği (3.2.1.14)'de yerine yazılırsa,

$$f_2' = \frac{c}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{(u+c_3)^2+c^2}}$$

bulunur. Buradan

$$f_2 = \frac{c}{\sqrt{1+\lambda^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+2c_3u+2c_4}+u+c_3}{c}\right| + c_5$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1+\lambda^2}} \ln\left|\sqrt{u^2+2cu+2c_4}+u+c_3\right| + c_6, \quad c_6 = c_5 - \ln|c|$$

dır. Ayrıca, $f_1' = \lambda f_2'$ eşitliği kullanılırsa

$$f_1 = f_2\lambda + c_7 = \frac{c}{\sqrt{1+\lambda^2}} \ln\left|\sqrt{u^2+2c_3u+2c_4}+u+c_3\right| + c_8,\ c_8 = c_7 + \lambda c_6$$

şeklinde bulunur. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur.

($\Longleftarrow$): Benzer şekilde görülür. □

**Önerme 3.2.1.6.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.1.1) parametrizasyonu ile verilen 1. tip rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde $M$ yüzeyi düz normal koneksiyonludur.

**İspat:** $M$ yüzeyi (3.2.1.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu taktirde $g_{12} = 0$ ve $L_{12}^1 = L_{12}^2 = 0$ dir. Bu ifadeler (2.2.28) eşitliğinde yerine yazılırsa $K_N = 0$ elde edilir. □

**Örnek 3.2.1.7.:** Profil eğrisi,

$$\gamma(u) = \left(\int \sqrt{1-\tfrac{\lambda^2}{c^2}e^{-2u/c}}\cos\alpha(u)du, \int \sqrt{1-\tfrac{\lambda^2}{c^2}e^{-2u/c}}\sin\alpha(u)du, \lambda e^{-u/c}\right)$$

genelleştirilmiş traktriks eğrisi olan $\mathbb{R}^4$'deki yüzey

$$x_1(u,v) = \int \sqrt{1-\tfrac{\lambda^2}{c^2}e^{-2u/c}}\, cos\alpha(u)du,$$

$$x_2(u,v) = \int \sqrt{1-\tfrac{\lambda^2}{c^2}e^{-2u/c}}\, sin\alpha(u)du, \tag{3.2.1.18}$$

$$x_3(u,v) = \lambda e^{-u/c}\cos v,$$

$$x_4(u,v) = \lambda e^{-u/c}\sin v$$

parametrizasyonuna sahip olup buna ***1. tip genelleştirilmiş Beltrami yüzeyi*** adı verilir (Arslan ve ark. 2017).

**Sonuç 3.2.1.8.:** $\mathbb{R}^4$'de tanımlanan 1. tip genelleştirilmiş Beltrami yüzeyinin Gauss eğriliği sabittir; yani $K = -\frac{1}{c^2}$ dir.

**İspat:** (3.2.1.7) ve (3.2.1.18) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.2.1.9.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.1.18) paremetrizasyonu ile verilen 1. tip Beltrami yüzeyi olsun. O halde, *M*'nin birinci ortalama eğriliği $H_1$'in sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşul $\alpha(u)$ açı fonksiyonunun

$$\alpha'(u)^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{(\varphi')^2}{\varphi^2}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada

$$\varphi(u) = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}$$

türevlenebilir bir fonksiyondur.

**İspat:** *M* yüzeyinin profil eğrisi

$$f_1(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, cos\alpha(u) du,$$

$$f_2(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, sin\alpha(u) du, \qquad (3.2.1.19)$$

$$f_3(u) = \lambda e^{-u/c}$$

parametrelendirmesine sahiptir. Böylece (3.2.1.19), (3.2.1.1) ve (3.2.1.5) ifadeleri (2.2.19)'da yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

**Örnek 3.2.1.10.:** Profil eğrisi,

$$f_1(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} \sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, cos\alpha(u) du,$$

$$f_2(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} \sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, sin\alpha(u) du, \qquad (3.2.1.20)$$

$$f_3(u) = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right)$$

genelleştirilmiş küresel eğrisi olan $\mathbb{R}^4$'deki 1. tip rotasyonel yüzey

$$x_1(u,v) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, cos\alpha(u)du,$$
$$x_2(u,v) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, sin\alpha(u)du, \tag{3.2.1.21}$$
$$x_3(u,v) = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right) cos\, v,$$
$$x_4(u,v) = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right)\sin v$$

parametrizasyonuna sahip olup buna ***1. tip küresel yüzey*** adı verilir (Bayram ve ark. 2017).

**Sonuç 3.2.1.11.:** $\mathbb{R}^4$'de tanımlanan 1. tip küresel yüzeyinin Gauss eğriliği sabittir; yani $K = \frac{1}{c^2}$ dir.

**İspat:** (3.2.1.7) ve (3.2.1.21) eşitliklerinden istenilen sonuç elde edilir.□

**Sonuç 3.2.1.12.:** $M$ yüzeyi (3.2.1.1) yamasıyla verilen 1. tip genelleştirilmiş küresel yüzey olsun. $M$'nin ikinci ortalama eğriliği $H_2$ sıfıra eşit ise bu taktirde $\alpha(u)$ açı fonksiyonu bir reel sabittir.

**İspat:** *M* yüzeyinin profil eğrisi

$$f_1(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, cos\alpha(u)du,$$
$$f_2(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, sin\alpha(u)du, \tag{3.2.1.22}$$
$$f_3(u) = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right)$$

parametrelendirmesine sahiptir. Böylece (3.2.1.22), (3.2.1.1) ve (3.2.1.4) ifadeleri (2.2.19)'da yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.□

### 3.2.2. İkinci Tip Rotasyonel Yüzeyler

**Tanım 3.2.2.1.:** (3.0.2) parametrizasyonuyla verilen genelleştirilmiş rotasyonel yüzeyinde $n = 1$ ve $m = 3$ alındığında yarıçap vektörü,

$$X(u.v) = f_1(u)\overrightarrow{e_1} + f_2(u)\rho(v) \tag{3.2.2.1}$$

parametrelendirmesiyle tanımlanan yüzeye $\mathbb{R}^4$'de ***2. tip rotasyonel yüzeyi*** adı verilir. Bu durumda yüzeyin profil eğrisi,

$$\gamma(u) = (f_1(u), f_2(u); 0,0)$$

yüzeyin küresel eğrisi ise

$$\rho(v) = (0; g_1(v), g_2(v), g_3(v))$$

parametrizasyonuna sahip olur.

$$\|\rho(v)\| = 1,\ \|\rho'(v)\| = 1$$

dir. Bununla birlikte $\rho$ küresel eğrisinin Frenet denklemleri

$$\rho'(v) = T(v)$$
$$T'(v) = \kappa_\rho N(v) - \rho(v)$$
$$N'(v) = -\kappa_\rho T(v)$$

şeklindedir. Literatürde (3.2.2.1) parametrelendirilmesiyle verilen 2. tip rotasyon yüzeyi ***meridyen yüzeyi*** olarak da bilinir (Ganchev ve Milousheva 2010), (Arslan ve ark. 2014). *M* yüzeyinin tanjant uzayı,

$$X_u = f_1{}'(u)\overrightarrow{e_1} + f_2{}'(u)\rho(v)$$
$$X_v = f_2(u)\rho'(v)$$

vektörleri tarafından gerilir.

Böylece *M* yüzeyinin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = \langle X_u, X_u\rangle = 1$$
$$g_{12} = \langle X_u, X_v\rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle X_v, X_v\rangle = f_2{}^2(u)$$

şeklinde hesaplanır. İkinci mertebeden kısmi türevler ise

$$X_{uu} = f_1{}''(u)\overrightarrow{e_1} + f_2{}''(u)\rho(v)$$

$$X_{uv} = f_2{}'(u)\rho'(v)$$

$$X_{vv} = f_2(u)\rho''(v)$$

dir. Ayrıca yüzeyin normal uzayı

$$N_1 = N(v),$$

$$N_2 = f_2{}'(u)\overrightarrow{e_1} - f_1{}'(u)\rho(v)$$

vektörleri tarafından gerilir. Burada $N(v)$, $\rho$ küresel eğrisinin normal vektörüdür.

O halde, $M$ yüzeyinin ikinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned}
L_{11}^1 &= \langle X_{uu}, N_1 \rangle = 0, \\
L_{12}^1 &= \langle X_{uv}, N_1 \rangle = 0, \\
L_{22}^1 &= \langle X_{vv}, N_1 \rangle = \kappa_\rho(v) f_2(u), \\
L_{11}^2 &= \langle X_{uu}, N_2 \rangle = -\kappa_\gamma(u), \\
L_{12}^2 &= \langle X_{uv}, N_2 \rangle = 0 \\
L_{22}^2 &= \langle X_{vv}, N_2 \rangle = f_1'(u) f_2(u)
\end{aligned} \qquad (3.2.2.2)$$

elde edilir. Burada,

$$\kappa_\rho(v) = \sqrt{g_1''(v)^2 + g_2''(v)^2 + g_3''(v)^2}$$

$\rho$ küresel eğrisinin eğriliği ve

$$\kappa_\gamma(u) = f_1'(u) f_2{}''(u) - f_1''(u) f_2{}'(u) \qquad (3.2.2.3)$$

$\gamma$ profil eğrisinin eğriliğidir.

Böylece (3.2.2.2) ve (2.2.17) eşitlikler yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 3.2.2.2.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.2.1) parametrizasyonu ile verilen 2. tip rotasyonel yüzey olsun. $M$ yüzeyinin Gauss eğriliği $K$ olmak üzere,

$$f_2''(u) + K f_2(u) = 0 \qquad (3.2.2.4)$$

dir.

(3.2.2.2) ve (2.2.28) eşitlikler yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.2.2.3.:** (3.2.2.1) parametrizasyonu ile verilen 2. tip rotasyonel yüzeyi düz normal koneksiyonludur.

Benzer şekilde (3.2.2.2) ve (2.2.18) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.2.2.4.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.2.1) parametrizasyonu ile verilen 2. tip rotasyonel yüzey olsun. $M$ yüzeyini ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{1}{2f_2(u)}\left\{\kappa_\rho(v)N_1 + \left(f_1'(u) - \kappa_\gamma(u)f_2(u)\right)N_2\right\} \tag{3.2.2.5}$$

dir.

**Teorem 3.2.2.5.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.2.1) parametrizasyonu ile verilen 2. tip rotasyonel yüzey olsun. $M$'nin bir $p$ noktasındaki ortalama eğriliği,

$$4\|H\|^2 = \frac{\kappa_\rho^2(v) + \left(f_1'(u) - \kappa_\gamma(u)f_2(u)\right)^2}{f_2^2(u)} \tag{3.2.2.6}$$

dir.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 3.2.2.6.:** $M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (3.2.2.1) parametrizasyonu ile verilen 2. tip rotasyonel yüzey olsun. Bu durumda $M$ yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart $\rho$ eğrisinin küre üzerinde büyük çember ve $\gamma$ profil eğrisinin

$$f_1(u) = \sqrt{2c_2 - c_1^2}\ln\left(\sqrt{u^2 + 2c_1u + 2c_2} + u + c_1\right) + c_3 \tag{3.2.2.7}$$

$$f_2(u) = \pm\sqrt{u^2 + 2c_1u + 2c_2}$$

parametrizasyonlu olmasıdır. Burada $c_1$, $c_2$ ve $c_3$ reel sabitlerdir.

**İspat :** ($\Longrightarrow$): $M$ yüzeyi $\mathbb{R}^4$'de (3.2.2.1) parametrizasyonuyla verilen minimal bir yüzey olsun. O halde (3.2.2.6) ifadesi gereği $\kappa_\rho = 0$ ve $f_1'(u) - \kappa_\gamma(v)f_2(u) = 0$ elde edilir. Burada (3.2.2.3) ve $\gamma$ nın birim hızlı olması kullanılırsa

$$\left(f_2'(u)\right)^2 + f_2(u)f_2''(u) = 1$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünden kolayca (3.2.2.7) parametrizasyonu elde edilir.

($\Longleftarrow$): Benzer şekilde görülür.□

**Örnek 3.2.2.7.:** Profil eğrisi (2.1.17) parametrizasyonuna sahip traktriks eğrisi alındığında $\mathbb{R}^4$'deki 2. tip rotasyonel yüzeyi

$$x_1(u,v) = \int\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2}e^{-2u/c}}\,du\ ,$$

$$x_2(u,v) = \lambda e^{-u/c}g_1(v), \tag{3.2.2.8}$$

$x_3(u,v) = \lambda e^{-u/c} g_2(v),$

$x_4(u,v) = \lambda e^{-u/c} g_3(v)$

parametrizasyonu ile ifade edilir. Bu yüzeye genelleştirilmiş ***2. tip Beltrami yüzeyi*** denir.

**Sonuç 3.2.2.8.:** $\mathbb{R}^4$'de genelleştirilmiş 2. tip Beltrami yüzeylerinin Gauss eğriliği sabittir ve $K = -\frac{1}{c^2}$ dir.

**İspat:** Böylece (3.2.2.8) ve (2.2.17) ifadeleri kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.□

**Örnek 3.2.2.9.:** Profil eğrisi,

$$f_1(u) = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, du,$$

$$f_2(u) = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right) \tag{3.2.2.10}$$

çember olan $\mathbb{R}^4$'deki 2. tip rotasyonel yüzey

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\sin^2\left(\frac{u}{c}\right)}\, du, \\ x_2(u,v) &= \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right) g_1(v), \\ x_3(u,v) &= \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right) g_2(v), \\ x_4(u,v) &= \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right) g_3(v) \end{aligned} \tag{3.2.2.11}$$

parametrizasyonuna sahip olup buna ***2. tip küresel yüzey*** adı verilir (Bayram ve ark. 2017).

**Önerme 3.2.2.10.:** $M \subset \mathbb{R}^4$, (3.2.2.11) parametrelendirilmesiyle verilen 2. tip küresel yüzey olsun. O halde $M$ yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{\kappa_\gamma \phi'(u)}{\lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right)} \tag{3.2.2.12}$$

dir. Burada,

$$\kappa_\gamma(u) = -\frac{\lambda}{c^2}\phi'(u)\cos\left(\frac{u}{c}\right) + \frac{\lambda}{c}\phi''(u)\sin\left(\frac{u}{c}\right)$$

$\gamma$ profil eğrisinin eğriliğidir.

**İspat.** $M \subset \mathbb{R}^4$, (3.2.2.11) parametrelendirilmesiyle verilen yüzeyin kısmi türevleri,

$$X_u = \phi'(u)\vec{e}_1 - \frac{\lambda}{c}\sin\left(\frac{u}{c}\right)\rho(v),$$

$$X_v = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right)\rho'(v),$$

$$X_{uu} = \phi''(u)\vec{e}_1 - \frac{\lambda}{c^2}\cos\left(\frac{u}{c}\right)\rho(v),$$

$$X_{uv} = -\frac{\lambda}{c}\sin\left(\frac{u}{c}\right)\rho'(v),$$

$$X_{vv} = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right)\rho''(v)$$

şeklinde elde edilir. $M$ yüzeyinin normal uzayını geren vektör uzayı ise

$$N_1 = N(v)$$

$$N_2 = -\frac{\lambda}{c}\sin\left(\frac{u}{c}\right)\vec{e}_1 - \phi'(u)\rho(v)$$

olur. Burada $N(v)$, $\rho$ küresel eğrisinin normal vektörüdür.

$M$ yüzeyinin 1. temel form katsayıları,

$$g_{11} = \langle X_u(u,v), X_u(u,v)\rangle = 1,$$

$$g_{12} = \langle X_u(u,v), X_v(u,v)\rangle = 0, \qquad (3.2.2.13)$$

$$g_{22} = \langle X_v(u,v), X_v(u,v)\rangle = \lambda^2\cos^2\left(\frac{u}{c}\right),$$

2. temel form katsayıları,

$$L_{11}^1 = L_{12}^1 = L_{12}^2 = 0,$$

$$L_{22}^1 = \kappa_\rho(v)\lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right), \qquad (3.2.2.14)$$

$$L_{11}^2 = -\kappa_\gamma(u)\,,$$

$L_{22}^{1} = \phi'(u)\lambda \cos\left(\frac{u}{c}\right)$

elde edilir. Buradan (3.1.4) kullanılarak

$$\kappa_{\gamma}(u) = -\frac{\lambda}{c^2}\phi'(u)\cos\left(\frac{u}{c}\right) + \frac{\lambda}{c}\phi''(u)\sin\left(\frac{u}{c}\right)$$

elde edilir. (3.2.2.13) ve (3.2.2.14) ifadeleri (2.2.17)'de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.□

### 3.3. $\mathbb{R}^{n+d}$'de Rotasyonel Yüzeyler

Bu kısımda, giriş bölümünde tanımlanan $\mathbb{R}^{n+d}$'deki rotasyonel yüzeyler ele alınacaktır.

$M \subset \mathbb{R}^{n+d}$ yüzeyi (3.0.1) koordinat yaması ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. $M$ yüzeyinin tanjant uzayı,

$$X_u = \phi'(u) + f'_{n+1}(u)\rho(v) \tag{3.3.1}$$

$$X_v = f_{n+1}(u)\rho'(v)$$

vektör alanları ile gerilir. Böylece, $\mathbb{R}^{n+d}$'de ki standart iç çarpım yardımıyla $M$'nin 1. temel form katsayıları;

$$g_{11} = \langle X_u\ ,\ X_u\rangle = 1\ ,$$

$$g_{12} = \langle X_u\ ,\ X_v\rangle = 0\ , \tag{3.3.2}$$

$$g_{22} = \langle X_v\ ,\ X_v\rangle = f^2_{n+1}(u)$$

olarak bulunur. $X(u,v)$'nin 2. mertebeden kısmi türevleri,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \phi''(u) + f''_{n+1}(u)\rho(v) \\ X_{uv} &= f'_{n+1}(u)\rho'(v) \\ X_{vv} &= f_{n+1}(u)\rho''(v) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

şeklinde elde edilirken, $M$'nin ikinci temel form dönüşümü,

$$\begin{aligned} h(X_u,X_u) &= X_{uu} - \frac{1}{g_{11}}\langle X_{uu},X_u\rangle X_u + \frac{1}{g_{22}}\langle X_{uv},X_u\rangle X_v, \\ h(X_u,X_v) &= X_{uv} - \frac{1}{g_{11}}\langle X_{uv},X_u\rangle X_u - \frac{1}{g_{22}}\langle X_{uv},X_v\rangle X_v, \\ h(X_v,X_v) &= X_{vv} + \frac{1}{g_{11}}\langle X_{uv},X_v\rangle X_u - \frac{1}{g_{22}}\langle X_{vv},X_v\rangle X_v \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

dir. (3.3.1) - (3.3.3) yardımıyla (3.3.4) eşitliği

$$h(X_u,X_u) = X_{uu}$$

$$h(X_u,X_v) = 0 \tag{3.3.5}$$

$h(X_v, X_v) = X_{vv} + f_{n+1} f'_{n+1} X_u$

halini alır. Ayrıca (3.3.5)'in ikinci eşitliğinden ve (2.2.10) eşitliğinden $1 \leq \alpha \leq n + d - 2$ için $L_{12}^{\alpha} = 0$ olduğu görülür. Böylece $N_\alpha, N_\beta \in T_p^{\perp} M$ ; $(\alpha < \beta)$ normal vektörleri için (2.2.23) denklemi, (2.2.25) Ricci denklemi ve

$$h\left(X_u, A_{N_\alpha} X_v\right) = \sum_{\beta=1}^{n} \left\{ \sum_{j,k=1}^{2} L_{2j}^{\alpha} g^{jk} L_{k1}^{\beta} \right\} N_\beta \quad (*)$$

$$h\left(X_v, A_{N_\alpha} X_u\right) = \sum_{\delta=1}^{n} \left\{ \sum_{j,k=1}^{2} L_{1j}^{\alpha} g^{jk} L_{k2}^{\beta} \right\} N_\delta$$

dir. Böylece (2.2.21) ve (2.2.24) Ricci denklemleri kullanılarak

$$\langle R^{\perp}(X_u, X_v) N_\alpha, N_\beta \rangle = \langle [A_{N_\alpha}, A_{N_\beta}] X_u, X_v \rangle \quad (**)$$

$$= \langle h\left(X_u, A_{N_\alpha} X_v\right), N_\beta \rangle - \langle h\left(X_v, A_{N_\alpha} X_u\right), N_\beta \rangle$$

bulunur. Buradan (*) eşitlikleri (**) da yerine yazılırsa,

$$\langle R^{\perp}(X_u, X_v) N_\alpha, N_\beta \rangle = 0$$

elde edilir.Dolayısıyla (3.0.1) parametrizasyonu ile tanımlanmış rotasyonel yüzeyin normal eğriliği (2.2.27) gereği sıfır olur.

Böylece aşağıdaki sonuç verilir.

**Teorem 3.3.1.:** $M$, $\mathbb{R}^{n+d}$'de (3.0.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey ise $M$ yüzeyi düz normal koneksiyona sahiptir.

Buradan (3.3.2) ve (3.3.5) eşitlikleri (2.2.20) ve (2.2.21) de yerine yazılırsa yüzeyin Gauss eğriliği $K$ ve ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}$,

$$K = -\frac{f''_{n+1}}{f_{n+1}} \quad (3.3.6)$$

$$2\vec{H} = \frac{1}{f_{n+1}^2} \{X_{vv} + f_{n+1}^2 X_{uu} + f_{n+1} f'_{n+1} X_u\} \quad (3.3.7)$$

elde edilir. Böylece (3.3.1) ve (3.3.3) denklemleri (3.3.7)'de yerine yazılarak

$$2f_{n+1}\vec{H} = \rho''(v) + ((f'_{n+1})^2 - f_{n+1}^2 K)\rho(v) + f_{n+1}\phi''(u) + f'_{n+1}\phi'(u) \tag{3.3.8}$$

eşitliği bulunur.

Bu ifadeler yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.3.2.:** $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$, (3.0.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu durumda $M$'nin $K$ Gauss eğriliği,

$$f''_{n+1}(u) + Kf_{n+1}(u) = 0 \tag{3.3.9}$$

eşitliğini sağlar.

**Sonuç 3.3.3.:** $M \subset \mathbb{R}^{n+d}$, (3.0.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu durumda $M$'nin Gauss eğriliği $K = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$f_{n+1}(u) = au + b \tag{3.3.10}$$

olmasıdır.

**Teorem 3.3.4.:** $M$, $\mathbb{R}^{n+d}$'de (3.0.1) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. $\kappa_\gamma$ ve $\kappa_\rho$ sırasıyla $\gamma$ ve $\rho$ eğrilerinin eğrilikleri olmak üzere $M$ 'nin bir p noktasındaki ortalama eğriliği

$$2H = \frac{1}{f_{n+1}}\left\{\kappa_\rho^2 + f_{n+1}^2\left(\kappa_\gamma^2 + 2K\right) - (f'_{n+1})^2\right\}^{1/2} \tag{3.3.11}$$

dir.

**İspat :** (3.3.8) ve $\kappa_\gamma^2 = \langle X_{uu}, X_{uu}\rangle^2$ yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.□

**Teorem 3.3.5.:** $\mathbb{R}^{n+d}$ de (3.3.1) parametrizasyonu ile verilen bir $M$ rotasyonel yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_\rho = a, \tag{3.3.12}$$

$$\kappa_\gamma^2 = \frac{1}{f_{n+1}^2}\{(f'_{n+1})^2 + 2f_{n+1}f''_{n+1} - a^2\}$$

olmasıdır. Burada $a$ sabit fonksiyondur.

**İspat**: (3.3.1) parametrizasyonu ile verilen bir $M$ rotasyonel yüzeyinin minimal olması için (3.3.11) eşitliğinden

$$\frac{1}{f_{n+1}}\left\{\kappa_\rho^2 + f_{n+1}^2\left(\kappa_\gamma^2 + 2K\right) - (f'_{n+1})^2\right\}^{1/2} = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\kappa_\rho^2(v) = \left(f'_{n+1}(u)\right)^2 - f_{n+1}^2(u)\left(\kappa_\gamma^2(u) + 2K(u)\right) = a^2$$

elde edilir. Ayrıca $a \in R$ sabit olduğundan

$$\kappa_\rho(v) = a,$$

$$\left(f'_{n+1}(u)\right)^2 - f_{n+1}^2(u)\left(\kappa_\gamma^2(u) + 2K(u)\right) = a^2$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde (3.3.6) eşitliği yerine yazılırsa

$$\kappa_\gamma^2 = \frac{1}{f_{n+1}^2}\{(f'_{n+1})^2 + 2f_{n+1}f''_{n+1}(u) - a^2\}$$

elde edilir.

**Örnek 3.3.6.:** $M \subset \mathbb{R}^5$ genelleştirilmiş rotasyon yüzeyinin yarıçap vektörü,

$$X(u,v) = f_1(u)\overrightarrow{e_1} + f_2(u)\rho(v) \qquad (3.3.13)$$

halini alır. Burada $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0,0)$ birim vektördür. Bu durumda yüzeyin profil eğrisi,

$$\gamma(u) = (f_1(u),\ f_2(u);\ 0,0,0)$$

ve birim hızlı küresel eğrisi ise

$$\rho(v) = (0; g_1(v), g_2(v), g_3(v), g_4(v))$$

parametrizasyonuna sahip olur.

**Sonuç 3.3.7.:** $M \subset \mathbb{R}^5$ yüzeyi (3.3.13) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyonel yüzey olsun. Bu durumda $M$ yüzeyinin Gauss eğriliğinden

$$f_2''(u) + Kf_2(u) = 0$$

elde edilir.

**İspat:** (3.3.9) dan kolayca görülür.□

**Örnek 3.3.8.:** Profil eğrisi

$$\gamma(u) = \left(\int \sqrt{1 - \tfrac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du, \lambda e^{-u/c}\right) \tag{3.3.14}$$

traktriks eğrisi olan ve

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \int \sqrt{1 - \tfrac{\lambda^2}{c^2} e^{-2u/c}}\, du, \\ x_2(u,v) &= \lambda e^{-u/c} g_1(v), \\ x_3(u,v) &= \lambda e^{-u/c} g_2(v), \\ x_4(u,v) &= \lambda e^{-u/c} g_3(v), \\ x_5(u,v) &= \lambda e^{-u/c} g_4(v), \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

parametrelendirmesi ile verilen $M$ rotasyonel yüzeyine $\mathbb{R}^5$***'de genelleştirilmiş Beltrami yüzeyi*** adı verilir (Arslan ve ark. 2016).

**Sonuç 3.3.9.:** $\mathbb{R}^5$'de tanımlanan genelleştirilmiş Beltrami yüzeylerinin Gauss eğriliği sabittir; yani $K = -\frac{1}{c^2}$ dir.

**İspat:** Teorem 3.3.2 gereği istenilen sonuç kolayca elde edilir.□

**Örnek 3.3.10.:** Profil eğrisi

$$\gamma(u) = \left(\int \sqrt{1 - \tfrac{\lambda^2}{c^2} \sin^2\left(\tfrac{u}{c}\right)}\, du,\ \lambda \cos\left(\tfrac{u}{c}\right)\right) \tag{3.3.16}$$

$\gamma$ düzlemsel eğrisi olan ve

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \int \sqrt{1 - \tfrac{\lambda^2}{c^2} \sin^2\left(\tfrac{u}{c}\right)}\, du, \\ x_2(u,v) &= \lambda \cos\left(\tfrac{u}{c}\right) g_1(v), \\ x_3(u,v) &= \lambda \cos\left(\tfrac{u}{c}\right) g_2(v), \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

$x_4(u,v) = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right) g_3(v),$

$x_5(u,v) = \lambda\cos\left(\frac{u}{c}\right) g_4(v)$

parametrelendirmesi ile verilen $M$ rotasyonel yüzeyine $\mathbb{R}^{\mathbf{5}}$***'de genelleştirilmiş küresel yüzey adı*** verilir (Arslan ve ark. 2016).

**Sonuç 3.3.11.:** $\mathbb{R}^5$'de (3.3.17) parametrelendirilmesiyle verilen genelleştirilmiş küresel yüzeyleri pozitif Gauss eğriliğine sabittir; yani $K = \frac{1}{c^2}$ dir.

**İspat :** Teorem 3.3.2 gereği istenilen sonuç kolayca elde edilir.□

## KAYNAKLAR

**Arslan, K., Bulca, B., Kosova, D. 2017.** On generalized rotational surfaces in Euclidean spaces. *J. Korean Math. Soc.*, 54(3):999-1013.

**Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., Kosova, D., Öztürk, G. 2016.** Rotational surfaces in higher dimensional Euclidean space. *Rend.Circ. Mat. Palermo*, II.ser, DOI 10.1007/s 12215- 016- 0292- 4.

**Arslan, K., Bulca, B., Milousheva, V. 2014.** Meridian surfaces in $E^4$ with pointwise 1-type Gauss map. *Bull. Korean Math.,* 51: 911-922.

**Bayram, B., Arslan, K., Bulca, B. 2017.** On generalized spherical surfaces in Euclidean spaces. *Honam Math. J.,* 39(3):363-377.

**Beltrami, E. 1868.** Saggio de interpetrazione della geometria non-Euclidea. *Giornale de Matematiche,* 6:284-312. (English translation " Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry").

**Bulca, B. 2012.** $E^4$ deki yüzeylerin bir karakterizasyonu, *Doktora Tezi,* UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

**Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B.K., Öztürk, G. 2012.** Spherical product surfaces in $E^4$. *An. St. Univ. Ovidius Constanta,* 20: 41-54.

**Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B.K., Öztürk, G., Ugail, H. 2009.** Spherical product surfaces in $E^3$ . IEEE Computer Society, Int. Conference on CYBERWORLDS, 7-11 September, 2009, Bradford, England.

**Chen, B.Y. 1973.** Geometry of submanifolds, Dekker, New York.

**DeSmet, P.J., Dillen, F., Verstrealen, L., Vrancken, L. 1999.** A pointwise inequality in submanifold theory. *Arch. Math.(Brno),* 35:115-128.

**Ganchev, G. and Milousheva, V. 2008**. On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space. *Kodai Math. J.*, 31:183-198.

**Ganchev, G. and Milousheva, V. 2010.** Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in $R^4$. *Cent. Eur. J. Math.,* 8(6):993-1008.

**Gluck, H. 1966.** Higher curvatures of curves in Euclidean space. *Am. Math. Monthly,* 73:243-249.

**Gray, A. 1993.** Modern differential geometry of curves and surfaces, CRC Press Inc., USA.

**Guadalupe, I. V., Rodriguez, L. 1983.** Normal curvature of surfaces in space forms. *Pacific J. Math.,* 106(1):95-103.

**Hacısalihoğlu, H. H. 1983.** Diferansiyel geometri, Hacısalihoğlu Yayıncılık, Ankara.

**Kuiper, N. H. 1970.** Minimal total absolute curvature for immersions. *Invent. Math.,* 10:209-238.

**Mello, L. F. 2003.** Mean directionally curved lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^4$. *Publ. Math.,* 47:415-440.

**Mello, L. F. 2009.** Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^4$. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 39(5):1597-1612.

**Vargas, R. U. 2005.** On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves. *Bull. Braz. Math. Soc., New Series,*36(3): 285-307.

**Velickovic, V. 2005.** On surface of rotation of a given constant Gaussian curvature and their visualization, Proc. Conference Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, Serbia and Montenegro, 523-534.

# ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Didem KOSOVA SAYGINER

**Doğum Yeri ve Tarihi** : Bursa, 15/08/1992

**Yabancı Dili** : İngilizce

**Eğitim Durumu ( Kurum ve Yıl)**

**Lise** : BTSO Hüseyin Sungur Lisesi, 2006- 2010

**Üniversite** : Uludağ Üniversitesi, 2010- 2014

**Çalıştığı Kurum ve Yıl** : Bursa Kültür Okulları, 2017- 2018

Bursa Özel Emine Örnek Lisesi 2015- 2016

**İletişim (e–posta)** : didemkosovas@gmail.com

**Yayınları** : **Arslan, K., Bulca, B., Kosova, D. 2017.** On generalized rotational surfaces in Euclidean spaces. *J. Korean Math. Soc.*, 54(3):999-1013.

**Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., Kosova, D., Öztürk, G. 2016.** Rotational surfaces in higher dimensional Euclidean space. *Rend.Circ. Mat. Palermo*, II.ser, DOI 10.1007/s 12215- 016- 0292- 4.