

**OLUŞUM TİPİ KİSMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN
YÜKSEK BAŞARIMLI HESAPLAMA AÇISINDAN
İNCELENMESİ**

Nursena GÜNHAN



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**OLUŞUM TİPİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİNİN YÜKSEK BAŞARIMLI HESAPLAMA AÇISINDAN
İNCELENMESİ**

Nursena GÜNHAN
0000-0002-1919-2431

Prof. Dr. Emrullah YAŞAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2022
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Nursena Günhan tarafından hazırlanan "OLUŞUM TİPİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİNİN YÜKSEK BAŞARIMLI HESAPLAMA AÇISINDAN İNCELENMESİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Emrullah YAŞAR

Başkan : Prof. Dr. Emrullah YAŞAR
0000-0003-4732-5753
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Üye : Dr. Öğr. Üye. Nisa ÇELİK
0000-0003-1209-991X
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Üye : Dr. Öğr. Üye. İlker Burak GİRESUNLU
0000-0002-2190-0003
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü



Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07/01/2022

Nursena GÜNHAN

**TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI
BEYANI**

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan “**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**” kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Nursera Günhan


ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OLUŞUM TİPİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMLERİNİN YÜKSEK BAŞARIMLI HESAPLAMA AÇISINDAN
İNCELENMESİ
Nursena GÜNHAN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Emrullah YAŞAR

Tezde, oluşum tipi kısmi diferansiyel denklemler için B-Spline kolokasyon metodu, varyasyonel iterasyon, Laplace varyasyonel iterasyon, Adomian ayrışım ve Laplace-Adomian ayrışım metodları ele alındı. Üstel B-Spline kolokasyon metoduyla çözülmüş Gardner denklemi, Laplace-Adomian ayrışım ve Laplace varyasyonel iterasyon metodu ile çözülerek çözümlerin karşılaştırması yapıldı. B-spline kolokasyon metodu uygulandığında elde edilen lineer denklem sistemlerinin çözümü için çeşitli direk ve yinelemeli yöntemler anlatıldı. Elde edilen " $AX=B$ " formundaki lineer denklem sistemlerinde A matrisinin büyük boyutlu ve seyrek matris olduğu durumlarda kullanılan bazı algoritmalar, gerekli olan kütüphaneler, yüksek başarımlı hesaplama sistemleri ve buna paralel olarak büyük boyutlu matrisler için literatürdeki hesaplamalar verildi.

Anahtar Kelimeler: Yüksek Başarımlı Hesaplama, Sonlu Farklar Yöntemi, B-Spline

2022, vi + 65 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

INVESTIGATION OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF EVOLUTION TYPE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN TERMS OF HIGH PERFORMANCE COMPUTINGS

Nursena GÜNHAN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emrullah YAŞAR

For evolution type partial differential equations, B-Spline collocation method, variational iteration, Laplace variational iteration, Adomian decomposition and Laplace-Adomian decomposition methods are discussed. The Gardner equation, which was solved by the exponential B-Spline collocation method, was solved by the Laplace-Adomian decomposition and Laplace variational iteration method, and the solutions were compared. Various direct and iterative methods are explained for the solution of linear equation systems obtained when the B-spline collocation method is applied. In the obtained linear equation systems in the form of " $AX=B$ ", some algorithms used in cases where the matrix A is large-sized and sparse matrix, the necessary libraries, high-performance computation systems and, in parallel, the calculations in the literature for large-sized matrices are given.

Key words: High Performance Computing, Finite Difference Method, B-Spline

2022, vi + 65 pages.

TEŞEKKÜR

Başta tez çalışmam sırasında desteğini, bilgisini, yardımını esirgemeyen, her aşamada yol gösterici olan danışman hocam Prof.Dr. Emrullah YAŞAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her döneminde bilgi ve tecrübesiyle yanımda olan dayım Prof.Dr. Süleyman ÇİFTÇİ'ye, yüksek lisans eğitimimin ders aşamasında kendisinden çok şey öğrendiğim sayın hocam Prof.Dr. Gökhan SOYDAN'a, tanıdığım günden beri, iyiliği, bilgisi ve rehberliği ile örnek aldığım, her zamanki gibi tez çalışmam sırasında da çok desteğini gördüğüm sayın Dr.Öğr.Üye. Nisa ÇELİK hocama teşekkürlerimi sunarım.

Yoğun çalışma dönemim boyunca desteklerini esirgemeyen kardeşlerime ve nişanlım Ömer AY'a teşekkürlerimi sunarım.

Nursena GÜNHAN
07/01/2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	ii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Kısmi Diferansiyel Denklem Kavramı	3
2.2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	3
2.2.1. Parabolik denklemler.....	4
2.2.2. Eliptik denklemler	5
2.2.3. Hiperbolik denklemler.....	6
2.3. Sonlu Farklar Methodu	7
2.3.1. Açık (Explicit) sonlu fark metodu	9
2.3.2. Kapalı (Implicit) sonlu fark metodu	10
2.3.3. Crank-Nicolson sonlu fark metodu	11
2.4. Direkt Metodlar	12
2.4.1. Gauss algoritması.....	13
2.4.2. Gauss-Jordan algoritması.....	15
2.4.3. LU ayrışım metodu	16
2.4.4. Thomas algoritması	18
2.5. İteratif Yöntemler.....	20
2.5.1. Jacobi basit iterasyon yöntemi.....	20
2.6. Gauss-Sidel iterasyon yöntemi	21
3. MATERYAL ve YÖNTEM	22
3.1. B-Spline Kolokasyon Metodu	22
3.1.1. Kuintik b-spline kolokasyon metodu.....	23
3.2. Analitik Çözüm Metodları.....	30
3.2.1. Adomian ayrışım metodu.....	30
3.2.2. Laplace-Adomian ayrışım metodu.....	32
3.3. Varyasyonel iterasyon metodu.....	35
3.3.1. Laplace varyasyonel iterasyon metodu	36
3.4. Yüksek Başarımlı Hesaplama	38
3.5. Paralel Programlama	39
3.5.1. Dağıtık hafıza.....	39
3.5.2. Paylaşımlı hafıza	40
3.6. Temel Doğrusal Cebir Kütüphaneleri	41
3.7. Laplace Denklemi ile Yapılan Bir Test Problemi	44
4. BULGULAR	47
4.1. Ele Alınan Örnekler ve Karşılaştırmalar	47
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ.....	66

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklamalar
A_n	Adomian Polinomları
U	Alt üçgensel matris
Δ	Diskriminant
$[A : B]$	İlaveli matris
$O(h)$	Kesme Hatası
$\mathbb{L}$	Laplace dönüşümü
$A_{m \times n}$	$m \times n$ tipinde matris
δ	Varyasyonel türev

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1.	Parabolik denklemler için ayrışım bölgesi.....	5
Şekil 2.2.	Eliptik denklemler için ayrışım bölgesi.....	6
Şekil 2.3.	Hiperbolik denklemler için ayrışım bölgesi.....	7
Şekil 2.4.	Izgara bölge.....	9
Şekil 3.1.	Metodun şeması.....	38
Şekil 3.2.	Metodun başka bir gösterimi.....	39
Şekil 3.3.	OpenMP ve MPI.....	41
Şekil 3.4.	Ele alınan matrisin özellikleri.....	44
Şekil 3.5.	Kübik matrisin özellikleri	44
Şekil 3.6.	SuperLU ve MUMPS kıyaslaması.....	45
Şekil 3.7.	Küresel matrisin özellikleri	45
Şekil 3.8.	SuperLU ve MUMPS kıyaslaması.....	46
Şekil 4.1.	Yaklaşık çözüm($\theta = 1, \mu = 5, \beta = 1$)	49
Şekil 4.2.	Gerçek çözüm($\theta = 1, \mu = 5, \beta = 1$)	49
Şekil 4.3.	Hata grafiği($\theta = 1, \mu = 5, \beta = 1$)	50
Şekil 4.4.	Yaklaşık çözüm($\theta = 4, \mu = -3, \beta = 1$)	51
Şekil 4.5.	Gerçek çözüm($\theta = 4, \mu = -3, \beta = 1$)	51
Şekil 4.6.	Hata grafiği($\theta = 4, \mu = -3, \beta = 1$)	52
Şekil 4.7.	Hata grafiği($\theta = 1, \mu = -5, \beta = 1$)	54
Şekil 4.8.	Hata grafiği($\theta = 1, \mu = -5, \beta = 1$)	55

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Yöntemlerin kıyaslanması.....	55
--	----

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler doğada meydana gelen fiziksel olayların matematiksel modellemesidir. Diferansiyel denklemlerde ele alınan problemin varlığı, var ise tekliği yaygın araştırma konularındandır. Diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanılan analitik yollar mevcut olmasına rağmen bazı başlangıç ve sınır koşulları altında tam çözümü elde etmek mümkün olmayabilir. Tam çözümlerin elde edilemediği bu problemlerde yaklaşık çözüme ulaşma yoluna gidilir. Bu tezde oluşum tipi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için bazı nümerik çözüm yöntemleri ele alındı. Bu tekniklerin uygulanmasıyla $AX = B$ lineer denklem sistemlerine ulaşıldı. Lineer denklem sistemlerinin çözümü için ortaya konmuş çeşitli direk ve itereatif algoritmalar mevcuttur ancak üzerinde çalışılan matrislerin boyutlarının büyük olması bilgisayar hafızasında devasa bir yük, uzun hesaplama süreleri gibi bir takım güçlükler doğurmuştur. Genel anlamda hesaplamalı bilim, mühendislik, finans vb. bir çok alanda benzer hesaplama güçlükleriyle karşılaşilmektedir. Ortaya çıkan problemlerin iş yükü, daha verimli ve gelişmiş sistemlere gereksinim oluşturmıştır. Bu bağlamda tek bir işlemciyle uzun süren hesaplamalar, çok sayıda işlemcinin senkronize çalıştığı, iş yükünün işlemcilere paylaştırıldığı yüksek başarılı hesaplama sistemleri ile daha hızlı ve etkili olarak yapılabilmektedir.

Tezin birinci bölümünde bazı kısmi diferansiyel denklem kavramları, sonlu farklar metodu, bazı özel matris yapıları gibi temel kavramlar verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde lineer denklem sistemleri için direk ve iteratif metodlar ele alınmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde Kuintik B-Spline Kolokasyon, Adomin Ayrışım, Laplace Adomian Ayrışım, Varyasyonel İterasyon, Laplace Varyasyonel İterasyon metodlarının lineer olmayan oluşum tipi kısmi diferansiyel denklemleri üzerine uygulamaları sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde yüksek başarılı hesaplama sistemini oluşturan paralel programlama kavramı ve kütüphaneleri ele alınmış, geniş(yüksek boyutlu) lineer denklem sistemleri için kullanılan çeşitli kütüphaneler, yazılımlar incelenmiştir.

Tezin beşinci bölümünde yapılan uygulamalar sonunda elde edilen sonuçların gerçek çö-

zme yakınlığı ve hesaplama süreleri kıyaslanarak, yüksek başarımlı hesaplama sistemlerinin etkinliği ortaya konmuş, bazı karşılaştırmalar ve sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Kısmi Diferansiyel Denklem Kavramı

Tanım 2.1.1. Bir veya birden fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre birinci veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren denklemlere “diferansiyel denklemler” denir (Çağlıyan ve Çelebi,2021, s.31).

Tanım 2.1.2. Bir bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini ihtiva eden denklemlere “adi diferansiyel denklemler” denir. n.mertebeden adi diferansiyel denklemlerin genel formu $F(x, y, y', \dots, y^n)$ şeklindedir (Çağlıyan ve Çelebi,2021, s.31).

Tanım 2.1.3. En az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevlerini içeren denklemlere “kısmi diferansiyel denklemler” denir. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel ifadesi $F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots)$ şeklindedir (Çağlıyan ve Çelebi,2021, s.32).

2.2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım 2.2.1. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (veya değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir(Çağlıyan ve Çelebi,2021, s.32).

Tanım 2.2.2. Bir kısmi türevli diferansiyel denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre lineer ise bu denklem yarı lineer (kuasi-lineer) denir (Çağlıyan ve Çelebi,2021, s.32) .

Tanım 2.2.3. Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineer denklem denir. İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip

ikinci mertebeden hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli;

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + H(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (2.2.1)$$

dir (Çağlıyan ve Çelebi,2021, s.32).

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)^2] - 4A(x, y)C(x, y)$$

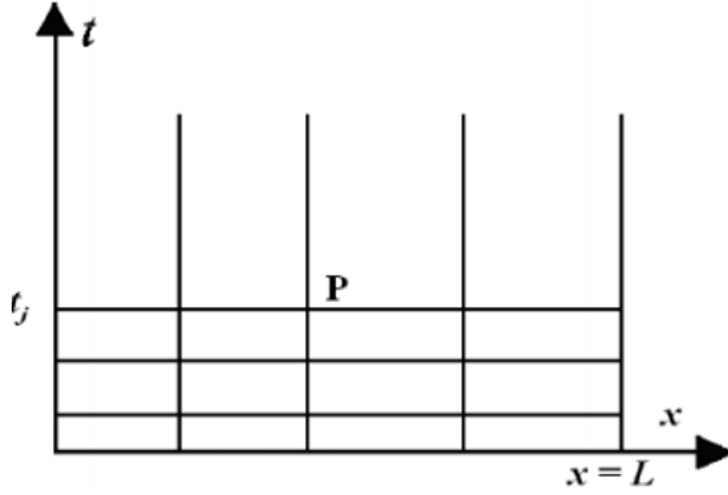
fonksiyonuna denkleminin diskriminantı denir. Eğer bir $\mathcal{U}$ bölgesinin her (x_0, y_0) noktası için;

- $\Delta(x_0, y_0) > 0 \rightarrow hiperbolik$
- $\Delta(x_0, y_0) = 0 \rightarrow parabolik$
- $\Delta(x_0, y_0) < 0 \rightarrow eliptik$

şeklinde sınıflandırılır (Çağlıyan ve Çelebi,2021, s.32) .

2.2.1. Parabolik denklemler

”Zamana bağlı ısı veya madde yayılması problemlerinde karşılaşılr. Verilen başlangıç ve sınır şartlarından başlanarak, bir yönü açık bir alanda adım adım ilerleyerek çözümü bulunan denklemlerdir. Dolayısıyla herhangi bir noktadaki çözüm, o noktadan önceki noktalardaki değerlere bağlı olarak elde edilir. Örneğin Şekil 2.1’de P noktasındaki (herhangi bir t anında) çözüm, P nin alt tarafındaki noktalara bağlı olarak bulunur. Yani P noktasındaki özellik daha önceki zaman adımlarında (t_j ’den önce) hesaplanan noktalardaki değerlere bağlı olup sonraki zaman adımlarında (t_j ’den sonra) hesaplamının yapılacağı noktalara bağlı değildir” (Kaş,2015, s.8).



Şekil 2.1. Parabolik denklemler için ayrışım bölgesi (Kaş, 2015, s.8)

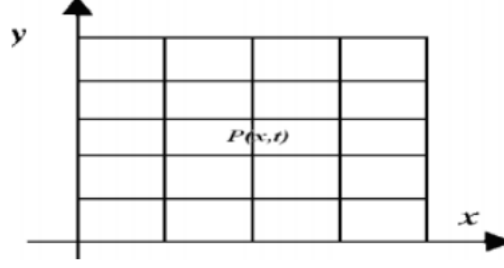
Parabolik denklemlerin tipik örneği difüzyon denklemidir. Isıl difüzyon denklemi olan geçici rejim ısı iletimi denkleminde

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.2.2)$$

kolayca görüleceği üzere $\Delta(x, y) = 0$ olup denklem paraboliktir.

2.2.2. Eliptik denklemler

"Eliptik kısmi diferansiyel denklemler genellikle denge veya kararlı hal problemleri ve bunların çözümüyle karşımıza çıkar. Bu denklemler için sınır değer problemleri iyi konulmuş denklemlerdir. Çözüm yapılacak alan içinde bir P noktasındaki çözüm diğer noktalara ve sınır değerlerine bağlıdır (Şekil 2.2). Dolayısıyla çözüm için bütün sınır değerler bilinmelidir. İç noktalarda çözümün adım adım değil eşzamanlı olarak bulunması gerekir. Bu bakımdan çözümü diğer denklem tiplerine göre daha zor olan denklemlerdir. Diskriminant negatif olduğu için eliptik denklemlerde reel karakteristik eğri yoktur.



Şekil 2.2. Eliptik denklemler için ayrışım bölgesi (Kaş, 2015, s.11)

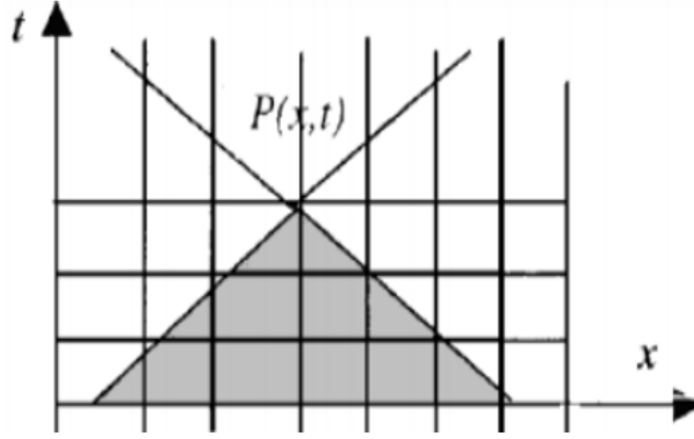
En iyi bilinen eliptik denklemler Laplace ve Poisson denklemleridir. Laplace denklemi potansiyel teorisinin temel denklemlerinden birisi olduğundan fiziksel uygulamaları çoktur. Örneğin yüzeyleri izole edilmiş bir ortamda zamandan bağımsız bir ısı dağılımı varsa (ki buna kararlı ısı denir) herhangi bir (x,y) noktasındaki ısı miktarını veren $T(x,y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2.3)$$

denklemi iki boyutlu ısı denklemi olarak ifade edilir. Burada $A = 1, B = 0, C = 1$ olup $\Delta(x, y) < 0$ olduğu görülür "(Kaş,2015, s.9).

2.2.3. Hiperbolik denklemler

"Bir tarafı açık alanda, başlangıç değerlerden başlayarak adım adım ilerlemeyle çözüm bulunan denklemlerdir. Düzlemde P noktasındaki çözüm bulunmak isteniyorsa P noktasından önce gelen ve iki doğru arasında kalan noktalardaki çözüm bilinmelidir. Bu iki doğru hiperbolik denklemlerde önemli olup karakteristik doğrular olarak adlandırılır (bunlar eğri de olabilir). Karakteristik eğriler arasındaki alanın kesim noktasından önceki kısmı $P(x,t)$ noktasındaki çözümü etkileyen alan, sonraki kısım ise $P(x,t)$ deki çözümün etkilediği alan olacaktır.



Şekil 2.3. Hiperbolik denklemler için ayrışım bölgesi (Kaş, 2015, s.9)

Hiperbolik denklemler için en temel örnek olarak dalga denklemi verilebilir. μ pozitif reel bir sayı olmak üzere 1-boyutlu dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.2.4)$$

olarak ifade edilir. Burada $A = 1, B = 0, C = -\mu^2$ olup $\Delta(x, y) > 0$ olduğu görülür" (Kaş,2015, s.9).

2.3. Sonlu Farklar Metodu

"Sonlu fark yöntemleri, lineer ve lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımı bulunurken öncelikle problemin çözüm bölgesi Şekil 2.1 de gösterildiği gibi genellikle dikdörtgensel şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (mesh veya grid) noktaları üzerinde hesaplanır. Daha sonra diferansiyel denklemde ve sınır koşullarında yer alan türev terimleri yerine, Taylor serisi yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan lineer veya lineer olmayan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir. Elde edilen cebirsel denklem sistemi

direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülür" (Uçar,2005, s.1).

U , x ve t ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere; $\delta x = h$, uzay değişkeni üzerinde adım uzunluğu ve $\delta t = k$ zaman değişkeni üzerinde adım uzunluğunu gösterebilir. Uzay ve zaman değişkeni için koordinatlar sırası ile $x = x_m = x_0 + mh$, $0 \leq m \leq M$ ve $t = t_n = nk$, $0 \leq n \leq N$ olarak ifade edilsin. Herhangi bir düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri $U(x_m, t_n) = U_m^n$ ile temsil edilir. U fonksiyonuna ait birinci ve ikinci meriteden sonlu fark yaklaşımları,

$$U_x = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h), \text{ (ileri fark yaklaşımı)} \quad (2.3.1)$$

$$U_x = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} + O(h), \text{ (geri fark yaklaşımı)} \quad (2.3.2)$$

$$U_x = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h^2), \text{ (merkezi fark yaklaşımı)} \quad (2.3.3)$$

$$U_t = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k), \text{ (ileri fark yaklaşımı)} \quad (2.3.4)$$

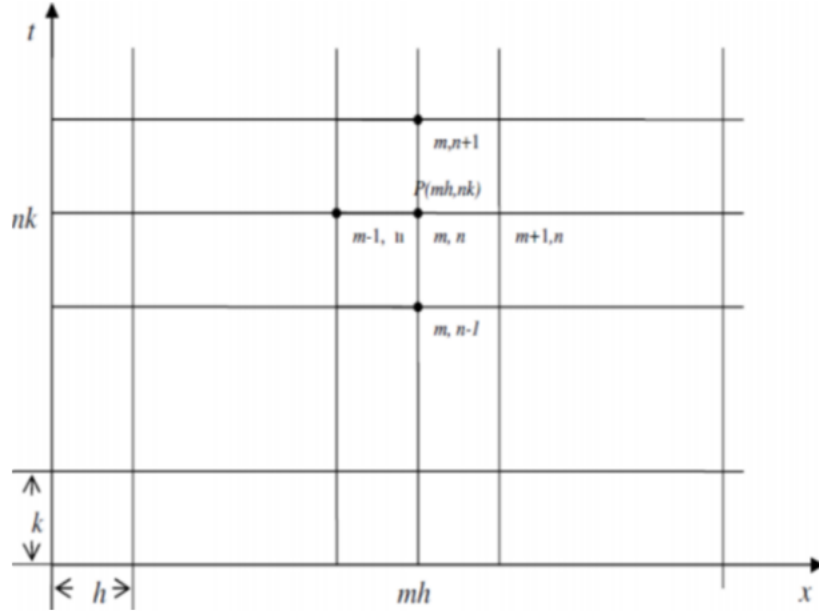
$$U_t = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k), \text{ (geri fark yaklaşımı)} \quad (2.3.5)$$

$$U_{xx} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2}, \text{ (ileri fark yaklaşımı)} \quad (2.3.6)$$

$$U_{xx} = \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2}, \text{ (geri fark yaklaşımı)} \quad (2.3.7)$$

$$U_{xx} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2}, \text{ (merkezi fark yaklaşımı)} \quad (2.3.8)$$

formülasyonları ile verilir.



Şekil 2.4. Izgara bölge (Kaş, 2015, s.18)

Sonlu farklar metodunu aşağıda örnekleyeceğimiz üç grupta incelemek mümkündür.

2.3.1. Açık (Explicit) sonlu fark metodu

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq a, t \geq 0 \quad (2.3.9)$$

ısı denklemi c_1 sabit ve g_1, g_2 t ye bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} -c_1 \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) &= g_1(t), \\ c_1 \frac{\partial U}{\partial x}(a, t) &= g_2(t). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

(İşlemlerde kolaylık sağlaması için $-c_1$ alındı). Neumann sınır koşulları ve $U(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq a$ başlangıç koşulu ile birlikte ele alınsın. (2.3.9) denkleminde $\frac{\partial U}{\partial t}$ yerine (2.3.5) geri fark ve $\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ yerine (2.3.8) merkezi fark formülleri yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$U_m^{n+1} = \mu U_{m-1}^n + (1 - 2\mu)U_m^n + \mu U_{m+1}^n \quad (2.3.11)$$

elde edilir. Burada $\mu = \frac{k\alpha}{h^2}$ olup t_n anında U_m^n değerleri kullanılarak t_{n+1} anındaki U_m^{n+1} elde edilir. Dikkat edilirse $m = 0$ ve $m = M$ için çözüm bölgesinde yer almayan $(-1, n)$ ve $(M+1, n)$ noktalarına ait U_{-1}^n ve U_{M+1}^n değerlerine ihtiyaç duyulacaktır. Bu değerler (2.3.10) ile ifade edilen sınır koşullarında U_x türevleri yerine merkezi fark formüllerinin yazılmasıyla elimine edilebilir. Yani $m = 0$ için $U_{-1}^n = U_1^n + \frac{2hg_1(t)}{c_1}$ ve $m = M$ için $U_{M+1}^n = U_{M-1}^n + \frac{2hg_2(t)}{c_1}$ elde edilir. Sonuç olarak Neumann sınır koşulları altında ısı denklemi için açık sonlu fark formülasyonları aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$U_0^{n+1} = 2\mu U_1^n + (1 - 2\mu)U_0^n + \frac{2\mu h}{c_1}g_1(t), m = 0 \quad (2.3.12)$$

,

$$U_m^{n+1} = \mu U_{m-1}^n + (1 - 2\mu)U_m^n + \mu U_{m+1}^n, 1 \leq m \leq M - 1 \quad (2.3.13)$$

,

$$U_M^{n+1} = 2\mu U_{M-1}^n + (1 - 2\mu)U_M^n + \frac{2\mu h}{c_1}g_2(t), m = M \quad (2.3.14)$$

2.3.2. Kapalı(Implicit) sonlu fark metodu

(2.3.9) denkleminde U_{xx} yerine $n+1$ -inci adım için merkezi fark formülü ve U_t türevi için ileri fark formülü kullanılmak suretiyle hataların ihmal edilmesiyle $\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2}$ ve buna bağlı olarak:

$$U_m^n = -\mu U_{m-1}^{n+1} + (1 + 2\mu)U_m^{n+1} - \mu U_{m+1}^{n+1}, 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N \quad (2.3.15)$$

denkleminde ulaşılır. Burada $\mu = \frac{\alpha k}{h^2}$ dir. (2.3.10) sınır koşulları altında problem incelendiğinde U_{-1}^{n+1} ve U_{M+1}^{n+1} değerlerine gereksinim duyulacaktır. Bu değerleri elimine etmek adına $U_x = \frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2h}$ alınıp gerekli işlemler yapıldığında $U_{-1}^{n+1} = U_1^{n+1} + \frac{2hg_1(t)}{c_1}$ ve $U_{M+1}^{n+1} = U_{M-1}^{n+1} + \frac{2hg_2(t)}{c_1}$ elde edilir. Bununla birlikte (2.3.10) Neumann sınır koşulları

altında (2.3.9) ısı denkleminin kapalı sonlu fark formülasyonları

$$U_0^n = (1 + 2\mu)U_0^{n+1} + 2\mu U_1^{n+1} - \frac{2\mu h}{c_1}g_1(t), m = 0 \quad (2.3.16)$$

$$U_M^n = -\mu U_{M-1}^{n+1} + (1 + 2\mu)U_M^{n+1} - \mu U_{M+1}^{n+1}, 1 \leq m \leq M - 1 \quad (2.3.17)$$

$$U_m^n = -2\mu U_{m-1}^{n+1} + (1 + 2\mu)U_m^{n+1} - \frac{2\mu h}{c_1}g_2(t), m = M \quad (2.3.18)$$

denklemleriyle verilir.

2.3.3. Crank-Nicolson sonlu fark metodu

Crank-Nicolson sonlu fark metodu (Crank ve Nicolson, 1947, s.1), kapalı sonlu fark yönteminin uyarlanmış bir halidir. Metodda (2.3.9) ısı denkleminde sağ tarafa, sırasıyla açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarında kullanılan n-inci ve n+1-inci zaman adımındaki merkezi fark formüllerinin ortalaması yazılır. O halde (2.3.9) denklemi

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \left(\frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2h^2} + \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{2h^2} \right) \quad (2.3.19)$$

ile verilir. (2.3.19) denklemi n+1-inci zaman adımına ait değerler sağ ve n-inci adıma ait değerler sol tarafında toplanarak düzenlenirse

$$\mu U_{m-1}^n + (2 - 2\mu)U_m^n + \mu U_{m+1}^n = -\mu U_{m-1}^{n+1} + (2 + 2\mu)U_m^{n+1} - \mu U_{m+1}^{n+1}, 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N \quad (2.3.20)$$

denkleminde ulaşılır. Dikkat edilirse şemada $m = 0$ ve $m = M$ alınmasıyla çözüm bölgesinde yer almayan $U_{-1}^n, U_{-1}^{n+1}, U_{M+1}^n, U_{M+1}^{n+1}$ değerleri ortaya çıkacaktır. Bu değerleri yok etmek amacıyla (2.3.10) Neumann sınır koşullarında U_x yerine n-inci ve n+1-inci zamandaki merkezi fark formülleri konulduğunda $U_{-1}^n = U_1^n + \frac{2hg_1(t)}{c_1}$, $U_{-1}^{n+1} = U_1^{n+1} + \frac{2hg_1(t)}{c_1}$, $U_{M+1}^n = U_{M-1}^n + \frac{2hg_2(t)}{c_1}$, $U_{M+1}^{n+1} = U_{M-1}^{n+1} + \frac{2hg_2(t)}{c_1}$ elde edilir. Bulunan değerler (2.3.20) denkleminde yerine yazıldığında Neumann sınır koşulları altında (2.3.9)

1s1 denklemleri için Crank-Nicolson sonlu fark formülasyonu

$$(2 + 2\mu)U_0^{n+1} - 2\mu U_1^{n+1} = (2 - 2\mu)U_0^n + 2\mu U_1^n + 4\mu \frac{hg_1(t)}{c_1}, m = 0 \quad (2.3.21)$$

$$-\mu U_{m-1}^{n+1} + (2 + 2\mu)U_m^{n+1} - \mu U_{m+1}^{n+1} = \mu U_{m-1}^n + (2 - 2\mu)U_m^n + \mu U_{m+1}^n, 1 \leq m \leq M - 1 \quad (2.3.22)$$

$$-2\mu U_{M-1}^{n+1} + (2 + 2\mu)U_M^{n+1} = 2\mu U_{M-1}^n + (2 - 2\mu)U_M^n + 4\mu \frac{hg_2(t)}{c_1}, m = M \quad (2.3.23)$$

denklemleriyle verilir..

2.4. Direkt Metodlar

Tanım 2.4.1. K değişmeli ve birimli bir halka olsun. $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $a_{ij}, b_i \in K$ skalarları ve $x_1, \dots, x_n$ bilinmeyenleri ile kurulan m tane denklemden oluşan

[illegible]

şeklindeki bir sisteme bir lineer denklem sistemi denir (Çiftçi, 2015, s.252).

(2.4.1) sisteminde a_{ij} lere sistemin katsayıları ve b_i lere de sağ taraf sabitleri denir. (2.4.1) sistemini matrisleri kullanarak;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $A = [a_{ij}]$ matrisine sistemin katsayılar matrisi;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ kolon matrislerine de; sırasıyla, bilinmeyenler matrisi}$$

ve sağ taraf sabitleri matrisi denir (Çiftçi, 2015, s.252). (2.4.1) sistemi daha toplu olarak $AX = B$ ile gösterilir. Lineer denklem sistemlerinin çözümü için direk ve iteratif bir çok metod ve algoritma mevcuttur. İlk olarak direkt metodlar ele alındı.

Tanım 2.4.2. Aşağıdaki şartları sağlayan bir matrise bir eşelon matris denir.

1. Tüm elemanları sıfır olan satırlar matrisin alt kısmında toplanmıştır.
2. Diğer tüm satırların farklı ilk elemanı 1 dir. Buna öncü 1 denir.
3. Birinciye izleyen her öncü 1 kendisinden öncekinin sağında yer alır (Çiftçi,2015, s.228).

Tanım 2.4.3. Aşağıdaki şartları sağlayan bir matrise indirgenmiş eşelon matris denir:

1. Tüm elemanları sıfır olan satırlar matrisin alt kısmında toplanmıştır.
2. Diğer tüm satırların sıfırdan farklı ilk elemanı 1 dir.
3. Birinciye izleyen her öncü bir kendisinden öncekinin sağında yer alır.
4. Öncü 1 i kapsayan bir kolonun diğer tüm elemanları sıfırdır (Çiftçi, 2015, s.229).

Tanım 2.4.4. A katsayılar matrisine B matrisinin son kolon olarak eklenmesi ile elde edilen, $[A : B]_{m \times (n+1)}$ matrisine, katsayılar matrisi $A_{m \times n}$ olan $AX = B$ lineer denklem sisteminin ilaveli matrisi denir (Çiftçi, 2015, s.259).

2.4.1. Gauss algoritması

Bir $AX = B$ lineer denklem sistemi verildiğinde çözüm için aşağıdaki algoritma izlenir.

1. $[A : B]$ ilaveli matrisine A yı eşelon forma dönüştürene kadar elemanter satır operasyonları uygulanır.
2. A yerine A' ve B yerine B' bulunmuşsa $A'X = B'$ denklem sistemi yazılır.
3. A' matrisinin $S'_1, S'_2, \dots, S'_r$ ile gösterilen ilk r satırının sıfırdan farklı ilk elemanlarının kolon numaraları $k_1, k_2, \dots, k_r$ olmak üzere $A'X = B'$ sisteminin $S'_1X = b'_1, S'_2X = b'_2, \dots, S'_{r-1}X = b'_{r-1}, S'_rX = b'_r$ şeklindeki ilk r denkleminin sonuncusu olan $S'_rX = b'_r$ den X_{k_r} den çekilir. Bu değer $S'_{r-1}X = b'_{r-1}$ de kullanılarak $X_{k_{r-1}}$ çekilir. Böyle geriden öne doğru bulunan bilinmeyenler yerlerine konularak en son $S'_1X = b'_1$ den X_{k_1} bilinmeyeni çekilir.
4. $A'X = B'$ sisteminde çözümün var olabilmesi için B' kolonunun son m-r elemanının tümü sıfır olmalıdır. Bu durumda n-r bilinmeyene keyfi değerler verilerek $x'_{k_r}, \dots, x'_{k_1}$ tespit edilir ve sisteminin çözüm kümesine ulaşılır (Çiftçi, 2015, s.259).

Örnek 2.4.5. Gauss algoritmasını kullanarak R üzerindeki

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{-1}{3}x_3 &= -2 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözelim. Verilen sistemin ilaveli matrisi,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & \vdots & 6 \\ 2 & 2 & 3 & \vdots & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{3} & \vdots & -2 \end{array} \right]$$

olarak yazılır. Sırasıyla $\epsilon_1 : S_2 \rightarrow S_2 - 2S_1, \epsilon_2 : S_3 \rightarrow S_3 + \frac{1}{2}S_1, \epsilon_3 : S_2 \rightarrow -\frac{1}{6}S_2, \epsilon_4 : S_3 \rightarrow S_3 - 3S_2, \epsilon_5 : S_3 \rightarrow -\frac{6}{8}S_3$ operasyonları sistemi temsil eden ilaveli matrise

uygulanır ve $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & \vdots & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{9}{4} \end{array} \right]$ ilaveli matrisi elde edilir.

O halde sistem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_2 + \frac{7}{6}x_3 &= \frac{4}{3} \\ x_3 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

halini alır. Son denklemden x_3 çekilip 2. denklemde yerine yazılarak $x_2 = -\frac{31}{24}$ ve x_2 , x_3 değerleri 1. denklemde yerine yazılmak suretiyle $x_1 = -\frac{1}{12}$ değerine ulaşılır. Böylece sistemin çözüm kümesi $\{x_1 = -\frac{1}{12}, x_2 = -\frac{31}{24}, x_3 = \frac{9}{4}\}$ dir.

2.4.2. Gauss-Jordan algoritması

Gauss algoritmasıyla aynı algoritma takip edilir. Gauss-G Jordan algortimasında farklı olarak A ile temsil edilen katsayılar matrisinin eşelon değil, indirgenmiş eşelon formu ile işlem-ler uygulanır. İndirgenmiş eşelon matris yapısı daha gelişmiş bir matris yapısıdır. Dolayısıyla indirgenmiş eşelon forma ulaşmak için uygulanacak operasyonlar daha fazla işlem yükü oluşturur.

Örnek 2.4.6. Gaus-Jordan metodunu kullanarak,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ \frac{7}{2}x_1 + -6x_2 + 4x_3 &= 1 \\ \frac{-1}{4}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 7 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözelim. Verilen sistemin ilaveli matrisi,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ \frac{7}{2} & -6 & 4 & 1 \\ \frac{-1}{4} & 2 & \frac{1}{3} & 7 \end{array} \right]$$

olarak yazılır. Sırasıyla $\epsilon_1 : S_2 \rightarrow S_2 - \frac{7}{2}S_1$, $\epsilon_2 : S_3 \rightarrow S_3 + \frac{1}{4}S_1$, $\epsilon_3 : S_2 \rightarrow S_2 - \frac{-1}{13}S_2$,
 $\epsilon_4 : S_1 \rightarrow S_1 - 2S_2$, $\epsilon_5 : S_3 \rightarrow S_3 - \frac{5}{2}S_2$, $\epsilon_6 : S_3 \rightarrow \frac{78}{53}S_3$, $\epsilon_7 : S_1 \rightarrow S_1 - \frac{14}{13}S_3$,
 $\epsilon_8 : S_2 \rightarrow S_2 + \frac{1}{26}S_3$ satır operasyonları uygulanarak $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -356/53 \\ 0 & 1 & 0 & : & 139/106 \\ 0 & 0 & 1 & : & 429/53 \end{bmatrix}$ ilaveli
matrisi elde edilir.

O halde sistemin çözüm kümesi $\{x_1 = -\frac{-356}{53}, x_2 = -\frac{139}{106}, x_3 = \frac{429}{53}\}$ dir.

2.4.3. LU ayrışım metodu

Tanım 2.4.7. Esas köşegen üzerindeki tüm elemanları 0 olan bir kare matrise alt üçgensel matris, esas köşegenin altındaki tüm elemanları 0 olan bir kare matrise üst üçgensel matris denir(Çiftçi 2015).

LU ayrışım metodu bir A kare matrisinin L alt üçgensel, U üst üçgensel matrisi göstermek üzere $A=LU$ şeklinde bir alt üçgensel ve üst üçgensel matrisin çarpımı olarak yazılması esasına dayanır. $AX = B$ m denklem ve m bilinmeyenden oluşan bir denklem sistemi belirtmek üzere, $A=LU$ olarak ayrılsın. O halde $LUX=B$ şeklini alan bu sistem;

$$UX = Y$$

$$LY = B$$

olarak ifade edilen iki sistem olarak yazılmalıdır. Çözüme ulaşmak için ilk olarak satır operasyonlarıyla U matrisine ulaşılır. U elde edilirken uygulanan n tane $S_i + cS_j$ operasyonun tersi aynı boyuttaki birim matrise uygulanarak sırayla $P_1, P_2, \dots, P_n$ matrislerine ulaşılır. Ve buna bağlı olarak $P_1P_2 \dots P_n = L$ matrisi de elde edilir. $LY = B$ çözülerek elde edilen Y vektörü $UX = Y$ de yerine konulmalıdır.. LU ayrışım metodu bilgisayarda kullanılan, MATLAB, Maple gibi paket programlarda var olan bir methodur.

Örnek 2.4.8. LU ayrışım metodunu kullanarak $\mathbb{R}$ üzerindeki

$$4x + 2y + 6z = 2$$

$$8x + 2y + 14z = 10$$

$$12x + -4y + -24z = -4$$

lineer denklem sistemini çözelim. İlk olarak

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 2 & 14 \\ -12 & -4 & -24 \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisine sırasıyla $\epsilon_1 : S_2 \rightarrow S_2 - 2S_1$, $\epsilon_2 : S_3 \rightarrow S_3 + 3S_1$, $\epsilon_3 : S_3 \rightarrow S_3 + S_2$ satır operasyonlarını uygularak U üst üçgensel matrisi $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ olarak bulunur.

Diğer yandan U üçgensel matrisini elde etmek için uygulanan operasyonların tersleri $\epsilon_1 : S_2 \rightarrow S_2 + 2S_1$, $\epsilon_2 : S_3 \rightarrow S_3 - 3S_1$, $\epsilon_3 : S_3 \rightarrow S_3 - S_2$ olarak ifade edilip teker teker I_3 birim matrisine uygulandığında sırasıyla

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisleri bulunarak $P_1 P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = L$ alt üçgensel matrisi elde edilir.

Şimdi $LY = B$ sistemi çözülerek Y vektörü $[-1, 7, 2]^T$ olarak bulunur, elde edilen Y vektörü $UX = Y$ sisteminde yerine konarak $X = [10, -16, -2]$ çözüm vektörüne ulaşılır.

2.4.4. Thomas algoritması

"Hesaplamaalı akışkanlar dinamiğinde ve Hesaplamaalı mühendisliğin bazı problemlerinde zaman zaman üç-diyagonalli katsayılar matrisine sahip lineer denklem sistemleriyle karşılaşılır. Üçdiyagonalli katsayılar matrisine sahip böyle bir lineer denklem sistemi matris biçiminde normal olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{NN-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

Ancak katsayılar matrisinin çoğu sıfır olan elemanları için bilgisayar hafızasında gereksiz yer işgal etmemek ve gereksiz işlemlerden kaçınmak amacıyla (N×N) boyutlarında bir katsayılar matrisi yerine (N×3) boyutlarında bir katsayılar matrisi kullanacak biçimde bir düzenleme ve buna uygun bir çözüm algoritması kullanılması tercih edilir. Çözüm için çok tercih edilen bir yöntem Thomas algoritmasıdır. Thomas algoritması aslında Gauss eliminasyon yönteminin üç kolonlu bir dikdörtgensel matris kullanılarak yapılan özel bir halidir.(2.4.3) sistemi $a_{i,i-1} \rightarrow l_i$, $a_{ii} \rightarrow d_i$, $a_{i,i+1} \rightarrow u_i$, $b_i \rightarrow r_i$ alınarak yeniden yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & d_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & u_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

Gauss eliminasyon yönteminde uygulanan algortimaya benzer olarak diyagonal altında kalan tüm elemanların sıfır olmasını sağlayacak işlemler izlenerek bu denklem sistemindeki ilk denklem l_2 ile ve ikinci denklem de d_1 ile çarpılıp birinci denklem ikincisinden çıkarıldıktan sonra her iki taraf d_1 ile bölünerek; $l_2d_1x_1 + l_2u_1x_2 = l_2r_1$, $d_1l_2x_1 + d_1d_2x_2 + d_1u_2x_3 = d_1r_2 \Rightarrow (d_2 - \frac{l_2u_1}{d_1})x_2 + u_2x_3 = r_2 - \frac{r_1l_2}{d_1}$ elde edilir. Böylece ikinci denklemdeki x_1 bilinmeyeni yok edilmiş veya diğer bir deyişle katsayılar matrisinde diyagonal elemanının altındaki katsayı sıfırlanmış olmaktadır. Bu eşitlik $d'_2 = d_2 - \frac{l_2u_1}{d_1}$ ve $r'_2 = r_2 - \frac{r_1l_2}{d_1}$ olmak üzere $d'_2x_2 + u_2x_3 = r_2$ olarak alınabilir. Buna bağlı olarak denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d'_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & u_3 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

halini alır. Yukarıda yapılan yok etme işlemi denklem sistemindeki ikinci ve üçüncü denklem arasında tekrarlanırsa, yani ikinci denklem l_3 ile ve üçüncü denklem de d'_2 ile çarpılıp yine birinci denklem ikincisinden çıkarılıp, karşılıklı d'_2 ile bölünerek benzer şekilde $d'_3 = d_3 - \frac{l_3u_2}{d'_2}$ ve $r'_3 = r_3 - \frac{r_2l_3}{d'_2}$ olmak üzere $d'_3x_3 + u_3x_4 = r_3$ elde edilir. Bu denklemde de x_2 bilinmeyeninin ortadan kalktığı ve katsayılar matrisinde üçüncü satırda diyagonal altındaki elemanın sıfır yapıldığı görülmektedir. Benzeri işlemler daha sonraki denklemler için de tekrarlanabilir. Bunun için yukarıda çıkartılan bağıntılar karşılaştırılarak bir genelleştirme yapılırsa $d'_i = d_i - \frac{l_iu_{i-1}}{d_{i-1}}$, $r'_i = r_i - \frac{r_{i-1}l_i}{d_{i-1}}$ ($i=2,3,\dots,N$) sonucuna ulaşılır.

Bununla birlikte (2.4.3) denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d'_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d'_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d'_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & d'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ \dots \\ r'_i \\ \dots \\ r'_N \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

şeklinde ifade edilir. Sistemde kolayca görüleceği üzere $x_N = \frac{r'_N}{d'_N}$ dir. Bulunan bu değer bir önceki denklemde yerine yazılmak suretiyle $x_{N-1} = \frac{r'_{N-1} - u_{N-1}x_N}{d'_{N-1}}$ bulunur. Genel olarak $x_i = \frac{r'_i - u_i x_{i+1}}{d'_i}$ dir."(Yükselen,Ders Notları, s.18)

2.5. İteratif Yöntemler

2.5.1. Jacobi basit iterasyon yöntemi

Çok büyük katsayılar boyutlu matrisi içeren lineer denklem sistemlerinin eliminasyon yöntemleriyle çözümünü çoğu zaman ekonomik olmaz. Bu gibi durumlarda iteratif yöntemler seçilir. Bunlardan en basitlerinden birisi Jacobi yöntemidir. $A.X = B$ lineer denklem sistemi, A katsayılar matrisi $A = L + D + U$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \dots & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

şeklinde üç matrisin toplamı olmak üzere

$$LX + DX + UX = B \rightarrow X = D^{-1} \cdot [B - LX - UX] \quad (2.5.2)$$

şeklini alır. Bu durumda x_i bilinmeyenleri için uygun seçilecek başlangıç değerleri (2.5.2) eşitliğinde kullanılarak yeni x_i değerleri hesaplanabileceği ve bu işlemlerin iteratif olarak devam ettirilebileceği görülmektedir. Jacobi basit iterasyon yöntemi olarak bilinen bu yöntemin herhangi bir iterasyon adımı için

$$X^{(k+1)} = D^{-1} [B - LX^{(k)} - UX^{(k)}] \quad (2.5.3)$$

yazılabilir. Daha açık olarak ifade etmek gerekirse

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}; i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5.4)$$

dir (Yükselen, Ders Notları, s.24).

2.6. Gauss-Sidel iterasyon yöntemi

Jacobi yöntemi çabuk yakınsamayan bir yöntemdir. Yöntemin yakınsamasını hızlandırmak için her iterasyon adımında bir önceki çözümle yeni bulunan çözümlerin

$$X^{(k+1)} = D^{-1} \cdot [B - LX^{(k+1)} - UX^{(k)}] \quad (2.6.1)$$

biçiminde, daha açık haliyle

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}; i = 1, 2, \dots, N \quad (2.6.2)$$

şeklinde bir kombinasyonundan yararlanmak mümkündür. Görüldüğü gibi iterasyonun herhangi bir k. adımında X bilinmeyenler vektörünün i. elemanı, x_i , hesaplanırken X 'in bu iterasyon adımında hesaplanmış olan ilk (i-1) elemanı ile bir önceki iterasyon adımında hesaplanmış olan (i+1). ve daha sonraki elemanları kullanılmaktadır (Yükselen, Ders Notları, s.25).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. B-Spline Kolokasyon Metodu

Tanım 3.1.1. Reel sayıların monoton artan bir $x_1, x_2, \dots, x_N$ dizisinin noktalarında tanımlı m. mertebeden $s(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahiptir ve reel doğru üzerinde tanımlı bir fonksiyondur (Dağ, 1994, s.10).

- $s(x)$ her $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında m.mertebeden ya da daha küçük mertebeden bir polinomdur.
- $s(x)$ ve kendisinin 1,2,...,m-1 mertebeden türevleri tanımlı oldukları her aralıkta ve x_i , (i=1,2,...,N) bölünme noktalarında süreklidir.

Tanım 3.1.2. $\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} x_i = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x_{-i} = -\infty$ olmak üzere, 0. dereceden B-spline fonksiyon;

$$B_i^0 = \begin{cases} 1 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

olarak tanımlanır (Boor,1978, s. 89). Yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar ise

$$B_i^k = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \quad (3.1.2)$$

bağıntısı ile verilir (Höllig,2003, s.27).

3.1.1. Kuintik b-spline kolokasyon metodu

Kuintik B-spline kolokasyon metodu temel olarak yaklaşık çözümün, kuintik B-spline baz fonksiyonlarının bir lineer terkibi olarak ifade edilmesinden meydana gelir. $a \leq x \leq b$ olmak üzere bir $a = x_0 < x_1 < x_2, \dots < x_{N-1} < x_N = b$ parçalanışını ele alalım. Burada her bir düğüm $j = 0, \dots, N - 1$ için x_j ile gösterildiğinde $h = x_{j+1} - x_j = (b - a)/N$ olarak yazılır. Ele alınan problemin tam çözümü $u(x, t)$ ve yaklaşık çözümü $U_m(x, t)$ ile gösterilsin.

$$U_m(x, t) = \sum_{j=-2}^{m+2} \alpha_j(t) B_j(x) \quad (3.1.3)$$

olup $\alpha_j(t)$, sınır koşulları ve diferansiyel denklemden belirlenecek olan zamana bağlı bilinmeyenlerdir. Diğer yandan düğüm noktalarında B-spline $B_j(x)$ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_{m-1}, B_m, B_{m+1}, B_{m+2}, a \leq x \leq b$ 'de baz formları olmak üzere;

$$B_j(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{j-3})^5 & x \in [x_{j-3}, x_{j-2}), \\ (x - x_{j-3})^5 - 6(x - x_{j-2})^5 & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}), \\ (x - x_{j-3})^5 - 6(x - x_{j-2})^5 + 15(x - x_{j-1})^5 & x \in [x_{j-1}, x_j), \\ (x_{j+3} - x)^5 - 6(x_{j+2} - x)^5 + 15(x_{j+1} - x)^5 & x \in [x_j, x_{j+1}), \\ (x_{j+3} - x)^5 - 6(x_{j+2} - x)^5 & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ (x_{j+3} - x)^5 & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}), \\ 0 & \text{aksitakdirde} \end{cases} \quad (3.1.4)$$

biçimindedir. B_j kuintik B-spline fonksiyonlarının birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü mer-

tebeden türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$B'_j(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} 5(x - x_{j-3})^4 & x \in [x_{j-3}, x_{j-2}) \\ 5(x - x_{j-3})^4 - 30(x - x_{j-2})^4 & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}) \\ 5(x - x_{j-3})^4 - 30(x - x_{j-2})^4 + 75(x - x_{j-1})^4 & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ -5(x_{j+3} - x)^4 + 30(x_{j+2} - x)^4 - 75(x_{j+1} - x)^4 & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ -5(x_{j+3} - x)^4 + 30(x_{j+2} - x)^4 & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ -5(x_{j+3} - x)^4 & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}) \\ 0 & \text{diger} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$$B''_j(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} 20(x - x_{j-3})^3 & x \in [x_{j-3}, x_{j-2}) \\ 20(x - x_{j-3})^3 - 120(x - x_{j-2})^3 & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}) \\ 20(x_{j-3} - x)^3 - 120(x - x_{j-2})^3 + 300(x - x_{j-1})^3 & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ 20(x - x_{j-3})^3 - 120(x_{j+2} - x)^3 + 300(x_{j+1} - x)^3 & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 20(x_{j+3} - x)^3 - 120(x_{j+2} - x)^3 & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ 20(x_{j+3} - x)^3 & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}) \\ 0 & \text{diger} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

$$B'''_j(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} 60(x - x_{j-3})^2 & x \in [x_{j-3}, x_{j-2}) \\ 60(x - x_{j-3})^2 - 360(x - x_{j-2})^2 & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}) \\ 60(x - x_{j-3})^2 - 360(x - x_{j-2})^2 + 900(x - x_{j-1})^2 & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ -60(x_{j+3} - x)^2 + 360(x_{j+2} - x)^2 - 900(x_{j+1} - x)^2 & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ -60(x_{j+3} - x)^2 + 360(x_{j+2} - x)^2 & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ -60(x_{j+3} - x)^2 & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}) \\ 0 & \text{diger} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

$$B_j^{(IV)}(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} 120(x - x_{j-3}) & x \in [x_{j-3}, x_{j-2}) \\ 120(x - x_{j-3}) - 720(x - x_{j-2}) & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}) \\ 120((x - x_{j-3}) - 720(x - x_{j-2}) + 1800(x - x_{j-1})) & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ 120(x_{j+3} - x) - 720(x_{j+2} - x) + 1800(x_{j+1} - x) & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 120(x_{j+3} - x) - 720(x_{j+2} - x) & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}) \\ 120(x_{j+3} - x) & x \in [x_{j+2}, x_{j+3}) \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

$B_j(x)$ B-Spline fonksiyonu ve ilk dört türevi $[x_{j-2}, x_{j+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Aralıkta $B_j(x)$ fonksiyonlarının parçalanma noktalarındaki değerler sırasıyla;

$$\begin{aligned} B_j(x_{j-3}) &= \frac{1}{h^5}(x_{j-3} - x_{j-3})^2 = 0, \\ B_j(x_{j-2}) &= \frac{1}{h^5}(x_{j-2} - x_{j-3})^5 - 6(x_{j-2} - x_{j-2})^5 = \frac{1}{h^5}(h^5) = 1, \\ B_j(x_{j-1}) &= \frac{1}{h^5}((x_{j-1} - x_{j-3})^5 - 6(x_{j-1} - x_{j-2})^5 + 15(x_{j-1} - x_{j-1})^5) = 26, \\ B_j &= \frac{1}{h^5}((x_{j+3} - x_j)^5 - 6(x_{j+2} - x_j)^5 + 15(x_{j+1} - x_j)^5) = 66, \\ B_j(x_{j+1}) &= \frac{1}{h^5}((x_{j+3} - x_{j+1})^5 - 6(x_{j+2} - x_{j+1})^5) = 26 \\ B_j(x_j + 2) &= \frac{1}{h^5}((x_{j+3} - x_{j+2})^5) = 1 \end{aligned}$$

olup türev değerleri için de benzer şekilde hesaplamalar yapılarak aşağıdaki tablo elde edilir.

x	x_{j-3}	x_{j-2}	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	x_{j+2}	x_{j+3}
$B_j(x)$	0	1	26	66	26	1	0
$B'_j(x)$	0	$5/h$	$50/h$	0	$-50/h$	$5/h$	0
$B''_j(x)$	0	$20/h^2$	$40/h^2$	$-\frac{120}{h^2}$	$40/h^2$	$20/h^2$	0
$B'''_j(x)$	0	$\frac{60}{h^3}$	$-\frac{120}{h^3}$	0	$\frac{120}{h^3}$	$-\frac{60}{h^3}$	0
$B_j^{IV}(x)$	0	$\frac{120}{h^4}$	$-\frac{480}{h^4}$	$\frac{720}{h^4}$	$-\frac{480}{h^4}$	$\frac{120}{h^4}$	0

(3.1.3) bağıntısı ve tablodaki değerler kullanılarak U_x ve dördüncü mertebeye kadar olan türevlerin düğüm noktalarında yaklaşık değerleri, α_m zaman parametlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi verilir.

$$U_m = \alpha_{m+2} + 26\alpha_{m+1} + 66\alpha_m + 26\alpha_{m-1} + \alpha_{m-2} \quad (3.1.9)$$

$$hU'_m = 5(\alpha_{m+2} + 10\alpha_{m+1} - 10\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2}) \quad (3.1.10)$$

$$h^2U''_m = 20(\alpha_{m+2} + 2\alpha_{m+1} - 6\alpha_m + 2\alpha_{m-1} + \alpha_{m-2}) \quad (3.1.11)$$

$$h^3U'''_m = 60(\alpha_{m+2} - 2\alpha_{m+1} + 2\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2}) \quad (3.1.12)$$

$$h^4U_m^{IV} = 120(\alpha_{m+2} + 2\alpha_{m+1} - 6\alpha_m + 2\alpha_{m-1} + \alpha_{m-2}) \quad (3.1.13)$$

$$u_t + uu_x + \mu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, x \in [a, b], t \in [0, T] \quad (3.1.14)$$

Kuramoto–Sivashinsky (KS) denklemi aşağıdaki başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte

ele alınsın.

$$u(x, 0) = u_0, x \in [a, b], \quad (3.1.15)$$

$$u(x_0, t) = g_0, u(x_N, t) = g_1, \quad (3.1.16)$$

$$u_x(x_0, t) = 0, u_x(x_N, t) = 0, \quad (3.1.17)$$

$$u_{xx}(x_0, t) = 0, u_{xx}(x_N, t) = 0 \quad (3.1.18)$$

(3.1.14) denklemini zaman değişkeni için ileri fark, uzay değişkeni için Crank-Nicholson sonlu fark yaklaşımı kullanarak aşağıdaki gibi ayrıştırılır.

$$\left[\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} \right] + \left[\frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2} \right] + \mu \left[\frac{(u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n}{2} \right] + \beta \left[\frac{(u_{xxx})^{n+1} + (u_{xxx})^n}{2} \right] = 0 \quad (3.1.19)$$

Burada lineer olmayan (uu_x) terimi;

$$(uu_x)^{n+1} = u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - (uu_x)^n \quad (3.1.20)$$

bağıntısıyla lineerleştirir (Rubin ve Graves,1975, S.10). (3.1.20), (3.1.19) denkleminde yerine konulursa;

$$\left[\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} \right] + \left[\frac{u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1}}{2} \right] + \mu \left[\frac{(u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n}{2} \right] + \beta \left[\frac{(u_{xxx})^{n+1} + (u_{xxx})^n}{2} \right] = 0 \quad (3.1.21)$$

elde edilir. Burada $(n+1)$ li terimler denklemin sağında (n) 'li terimleri solunda olacak şekilde toparlanırsa;

$$u^{n+1} + \frac{\delta t}{2} [u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} + \mu(u_{xx})^{n+1} + \beta(u_{xxx})^{n+1}] = u^n - \frac{\delta t}{2} [\mu(u_{xx})^n + \beta(u_{xxx})^n] \quad (3.1.22)$$

elde edilir. Burada U ve türevlerinin yerine (3.1.9), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13),

yaklaşık değerleri konulsun. Buradan, $w = 1 + \frac{\delta t}{2}u_x^n$, $x = \frac{5\delta t}{2h}u^n$, $y = \frac{10\mu\delta t}{h^2}$, $z = \frac{60\beta\delta t}{h^4}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\alpha_{m+2}^{n+1}(w+x+y+z) + \alpha_{m+1}^{n+1}(26w+10x+2y-4z) + \alpha_m^{n+1}(66w-6y+6z) + \alpha_{m-1}^{n+1} \\ &(26w-10x+2y-4z) + \alpha_{m-2}^{n+1}(w-x+y+z) = \alpha_{m+2}^n(1-y-z) + \alpha_{m+1}^n(26-2y \\ &+4z) + \alpha_m^n(66+6y-6z) + \alpha_{m-1}^n(26-2y+4z) + \alpha_{m-2}^n(1-y-z), 0 \leq m \leq N \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

sistemi elde edilir. $(\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_m, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2})^T$ bilinmeyenler olmak üzere (3.1.23) sistemi (N+1) denklem ve (N+5) bilinmeyen içerir dolayısıyla sistem bağdaşmaz. Sistemin tek çözüme sahip olması için denklem ve bilinmeyen sayısının eşit olması gereklidir. Bunun için sınır koşulları yardımıyla α_{-2}, α_{-1} ve $\alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}$ bilinmeyenleri elimine edilir. Bunun için;

(3.1.16), (3.1.18) ile verilen $u(x_0, t) = g_0$, $u(x_N, t) = g_1$, $u_{xx}(x_0, t) = 0$, $u_{xx}(x_N, t) = 0$ sınır koşulları kullanılsın. O halde x_0 noktası için (3.1.9), (3.1.11) denklemlerinde $m=0$ alınarak;

$$\begin{aligned} \alpha_{-2} + 26\alpha_{-1} + 66\alpha_0 + 26\alpha_1 + \alpha_2 &= g_0 \\ \alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} - 6\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

denklem sistemi elde edilir. Benzer şekilde x_N noktası için $m = N$ alınarak;

$$\begin{aligned} \alpha_{m-2} + 26\alpha_{m-1} + 66\alpha_m + 26\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} &= g_0 \\ \alpha_{m-2} + 2\alpha_{m-1} - 6\alpha_m + 2\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

sistemine ulaşılır. Elde edilen bu bağıntılar yardımıyla α_{-1}, α_{-2} bilinmeyenleri, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}$ bilinmeyenleri, $\alpha_{N-1}, \alpha_N, \alpha_{N-2}$ cinsinden yazılır. Böylece A katsayılar matrisi;

$$\begin{bmatrix}
12a - 3b + c & d - b & e - a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b - 3a & c - a & d & e & 0 & 0 & 0 \\
a & b & c & d & e & 0 & 0 \\
0 & a & b & c & d & e & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & a & b & c & d & e \\
0 & 0 & 0 & a & b & c - e & d - 3e \\
0 & 0 & 0 & 0 & a - e & b - d & c - 3d + 12e
\end{bmatrix} \quad (3.1.26)$$

olmak üzere (3.1.23), (N+1)denklemler ve (N+1) bilinmeyenden oluşan $AX^{n+1} = B^n$ sistemine indirgenir. Burada R (3.1.23) de sağ taraf vektörünü belirtmek üzere; $B_N = (R + \frac{g_0}{24}(2a - b), R - \frac{g_0}{24}a, R, \dots, R, R - \frac{g_1}{24}e, R + \frac{g_1}{24}(2e - d))^T$ dir. Dikkat edilirse $AX^{n+1} = B^n$ sisteminde X^{n+1} vektörünün hesaplanabilmesi için X^n vektörüne ihtiyaç duyulacaktır. Dolayısıyla iterasyonun başlaması için bir X^0 başlangıç vektörüne ihtiyaç vardır. Bunun için (3.1.15) ile verilen başlangıç koşulundan faydalanılır ve X^0 vektörü;

$$\begin{bmatrix}
54 & 60 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
101/4 & 135/2 & 105/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 105/4 & 135/2 & 101/4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 54
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ \alpha_{N-1} \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x_0) \\ u_0(x_1) \\ \vdots \\ \cdot \\ \vdots \\ u_0(x_{N-2}) \\ u_0(x_{N-1}) \\ u_0(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.1.27)$$

sisteminin çözümüyle elde edilir (Mittal ve Arora,2015, s.2799).

3.2. Analitik Çözüm Metodları

Bu bölümde Adomian Ayırışım Metodu, Laplace Adomian Ayırışım Metodu, Varyasyonel İterasyon ve Laplace Varyasyonel İterasyon metodu ele alınacaktır. İncelenen bu metodların bir önceki bölümde ele alınan B-Spline Kolokasyon Metodu ile kıyaslandığında, elde edilen yaklaşık çözümlerin gerçek çözüme yakınlığı ve bu çözümler elde edilirken karşılaşılan hesaplama yükü açısından büyük avantajlar sağlayacağı görülecektir. B-Spline Kolokasyon metodunda karşılaşılan geniş bant matrislerini içeren lineer denklem sistemlerinin çözümü için gerekli olan donanım ve çeşitli paralel programlar, burada yerini daha az iterasyon sayısı gerektiren, daha hızlı yapılabilecek hesaplamalara bırakacaktır.

3.2.1. Adomian ayırışım metodu

Adomian ayırışım metodu(Adomian, 1994, s.6) lineer ya da lineer olmayan, kısmi ve adi diferansiyel denklemler için yarı-analitik bir çözüm metodudur. Bu yöntem, ele alınan başlangıç veya sınır değer probleminin bir ve yalnız bir çözümü mevcut ise o zaman yakınsak bir seri ile ifade edilmesine olanak sağlar. Genel halde, L_t t' ye ve L_x x'e göre en yüksek mertebeli türev operatörü, $\mathcal{R}$ en düşük mereteben türev içeren lineer operatör, $\mathcal{N}$ lineer olmayan terim ve $h(x, t)$ kaynak fonksiyon olmak üzere;

$$L_x w(x, t) + L_t w(x, t) + \mathcal{R}(w(x, t)) + \mathcal{N}(w(x, t)) = h(x, t) \quad (3.2.1)$$

lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem incelensin. L_t, L_x içinde en düşük meretebeli türev operatörü L_t olsun. Buna göre (3.2.1);

$$L_t w(x, t) = h(x, t) - L_x w(x, t) - \mathcal{R}(w(x, t)) - \mathcal{N}(w(x, t)) \quad (3.2.2)$$

olarak düzenlensin. Her tarafa L_t^{-1} operatörü uygulanırsa;

$$w(x, t) = \phi_0 + L_t^{-1} h(x, t) - L_t^{-1} L_x w(x, t) - L_t^{-1} \mathcal{R}(w(x, t)) - L_t^{-1} \mathcal{N}(w(x, t)) \quad (3.2.3)$$

olur. Burada;

$$\phi_0 = \begin{cases} w(x, 0) & L = \frac{\partial}{\partial t} \\ w(x, 0) + tw_t(x, 0) & L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ w(x, 0) + tw_t(x, 0) + \frac{1}{2!}t^2w_{tt}w(x, 0) & L = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \end{cases}$$

dir. $w(x, t)$ seri formda; $w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t)$ ve lineer olmayan $\mathcal{N}(w(x, t))$ terimi A_n Adomian polinomlarını ifade etmek üzere $\mathcal{N}(w(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ile temsil edilir. A_n Adomian polinomları;

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\mathcal{N} \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i w_i \right) \right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.5)$$

formülü ile hesaplanır (Wazwaz, 2009, s.288). Bu veriler (3.2.3) de yerine konulursa denklem;

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = \phi_0 + {}_t^{-1}h(x, t) - {}_t^{-1}x \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) - {}_t^{-1}\mathcal{R}(\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t)) - {}_t^{-1}\mathcal{N}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n) \quad (3.2.6)$$

halini alır. $n \geq 0$ için (3.2.6) denklemi ile;

$$\begin{aligned} w_0(x, t) &= \phi_0 - L_t^{-1}h(x, t) \\ w_1(x, t) &= -L_t^{-1}L_x w_0(x, t) - L_t^{-1}\mathcal{R}(w_0(x, t)) - L_t^{-1}A_0 \\ w_2(x, t) &= -L_t^{-1}L_x w_1(x, t) - L_t^{-1}\mathcal{R}(w_1(x, t)) - L_t^{-1}A_1 \\ w_3(x, t) &= -L_t^{-1}L_x w_2(x, t) - L_t^{-1}\mathcal{R}(w_2(x, t)) - L_t^{-1}A_2 \\ &\vdots \\ w_{n+1}(x, t) &= -L_t^{-1}L_x w_n(x, t) - L_t^{-1}\mathcal{R}(w_n(x, t)) - L_t^{-1}A_n \end{aligned}$$

tekrarlama bağıntısı elde edilir (Wazwaz, 2009, s.321). Metodu $(1 + 1)$ boyutlu Burgers denklemi üzerinde tatbik edelim.

Örnek 3.2.1. $w_t + ww_x = \mu w_{xx}$, $w(x, 0) = x$ Burgers denkleminin her tarafına L_t^{-1} operatörü uygulansın. O halde;

$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = x - L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) - L_t^{-1} \mathcal{N}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n), n \geq 0$ elde edilir. Buradan;

$$w_0(x, t) = x; w_{n+1}(x, t) = -L_t^{-1}(w_{nxx}(x, t)) - L_t^{-1} A_n \quad (3.2.7)$$

tekrarlama bağıntısına ulaşılır. Lineer olmayan $w w_x$ terimi için Adomian polinomları;

$$\begin{aligned} A_0 &= w_{0x} w_0 \\ A_1 &= w_{0x} w_1 + w_{1x} w_0 \\ A_2 &= w_{0x} w_2 + w_{1x} w_1 + w_{2x} w_0 \\ A_3 &= w_{0x} w_3 + w_{1x} w_2 + w_{2x} w_1 + w_{3x} w_0 \\ A_4 &= w_{0x} w_4 + w_{1x} w_3 + w_{2x} w_2 + w_{3x} w_1 + w_{4x} w_0 \\ A_5 &= w_{0x} w_5 + w_{1x} w_4 + w_{2x} w_3 + w_{3x} w_2 + w_{4x} w_1 + w_{5x} w_0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

dır. O halde bu durumda (3.2.8), (3.2.7)'de yerine konulursa;

$$w_0(x, t) = x$$

$$w_1(x, t) = -xt$$

$$w_2(x, t) = xt^2$$

$$w_3(x, t) = -xt^3$$

olur. Elde edilen bu iterasyonların sonsuz toplamı $w(x, t) = x - xt + xt^2 - xt^3 + xt^4 - \dots = \frac{x}{1+t}$ çözümünü verir.

3.2.2. Laplace-Adomian ayrışım metodu

Laplace Adomian Ayrışım Metodu Khuri (2001) tarafından geliştirilmiştir. Genel olarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve başlangıç koşulu aşağıdaki gibi verilsin;

$$L_t w(x, t) + \mathcal{R} w(x, t) + \mathcal{N} w(x, t) = h(x, t); w(x, 0) = f(x) \quad (3.2.9)$$

Burada $L_t = u_t$, $\mathcal{R}$ lineer ve $\mathcal{N}$ lineer olmayan operatörü göstermektedir.

- Adım I

(3.2.9) denkleminin her tarafına Laplace dönüşümü uygulanarak;

$$\mathbb{L}\{L_t u(x, t)\} = \mathbb{L}\{h(x, t) - \mathcal{R}w(x, t) - \mathcal{N}w(x, t)\} \quad (3.2.10)$$

elde edilir. Burada w_t türevi için Laplace dönüşümü kullanılarak;

$$\mathbb{L}\{w_t(x, t)\} = s\mathbb{L}\{w(x, t)\} - w(x, 0)$$

yazılır ve

$$sw(x, s) - w(x, 0) = \mathbb{L}\{h(x, t) - \mathcal{R}w(x, t) - \mathcal{N}w(x, t)\} \quad (3.2.11)$$

denkleminde ulaşılır. $w(x, 0) = f(x)$ başlangıç koşulu yerine konulursa;

$$w(x, s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{1}{s}\mathbb{L}\{\mathcal{R}w(x, t) + \mathcal{N}w(x, t)\} \quad (3.2.12)$$

elde edilir. (3.2.12) denkleminin her iki tarafına $\mathbb{L}^{-1}$ ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $w(x, t)$ fonksiyonu;

$$w(x, t) = f(x) - \mathbb{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathbb{L}\{\mathcal{R}w(x, t) + \mathcal{N}w(x, t)\}\right] \quad (3.2.13)$$

olarak ifade edilir.

- Adım II

Adomian ayrıştırma metodundan bilindiği üzere, bilinmeyen $w(x, t)$ fonksiyonu;

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (3.2.14)$$

ve lineer olmayan $\mathcal{N}(w(x, t))$ terimi,

$$\mathcal{N}(w(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(w_0, w_1, \dots, w_n) \quad (3.2.15)$$

olarak yazılır. Burada $\{A_n\}^{\infty}$ Adomian polinomları; (3.2.5) bağıntısıyla verilir(Waz-

waz 2009, s.288). (3.2.14) ve (3.2.15), (3.2.13) denkleminde yerine konulursa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = f(x) - \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathbb{L} \{ \mathcal{R} w_n w(x, t) + A_n(w_0, w_1, \dots, w_n) \} \right]; n = 0, 1, \dots \quad (3.2.16)$$

elde edilir ve bununla birlikte;

$$\begin{cases} w_0(x, t) = f(x) \\ w_{n+1}(x, t) = -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathbb{L} \{ \mathcal{R} w_n(x, t) + A_n(w_0, w_1, \dots, w_n) \} \right]; \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.2.17)$$

tekrarlama bağıntısına ulaşılır. N tekrarlama sayısını ifade etmek üzere; N. adıma karşılık gelen yaklaşık çözüm $w_N(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n(x, t)$, ($N \geq 1$) olup sonuç olarak;

$$w(x, t) = \sum \lim_{N \rightarrow +\infty} w_N(x, t)$$

olarak yazılır.

Örnek 3.2.2. Adomian ayrışım metodunu örneklemek için kullanılan model tekrar ele alınsın. Tekrar gösterilecek olursa, $w_t + ww_x = \mu w_{xx}$, $w(x, 0) = x$ Burgers denkleminin her tarafına Laplace dönüşümü uygulanarak;

$$\mathbb{L}\{t u(x, t)\} = \mathbb{L}\{w_{xx}(x, t) - w(x, t)w_x(x, t)\}$$

yazılır metotta anlatıldığı üzere türev için Laplace dönüşümü kullanılıp ve $w(x, 0) = x$ başlangıç şartı yerine konulursa;

$$sw(x, s) = \frac{x}{s} - \frac{1}{s} \mathbb{L}\{w_{xx}(x, t) - w(x, t)w_x(x, t)\} \quad (3.2.18)$$

elde edilir. (3.2.18) denkleminin her iki tarafına $\mathbb{L}^{-1}$ ters Laplace dönüşümü uygulanırsa $w(x, t)$ fonksiyonu, $w(x, t) = x - \mathbb{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \mathbb{L}\{w_{xx}(x, t) - w(x, t)w_x(x, t)\}\right]$ olarak elde edilir. Lineer olmayan ww_x terimi için Adomian polinomları;

$$A_0 = w_{0x}w_0$$

$$A_1 = w_{0x}w_1 + w_{1x}w_0$$

$$A_2 = w_{0x}w_2 + w_{1x}w_1 + w_{2x}w_0$$

$$A_3 = w_{0x}w_3 + w_{1x}w_2 + w_{2x}w_1 + w_{3x}w_0$$

$$A_4 = w_{0x}w_4 + w_{1x}w_3 + w_{2x}w_2 + w_{3x}w_1 + w_{4x}w_0$$

$\vdots$

olup $w(x, t)$ fonksiyonu için yazılan bağıntıda yerine konulursa;

$$\begin{aligned} w_0(x, t) &= x \\ w_1(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \mathbb{L}\{w_{0xx}(x, t) + A_0(w_0, w_1, \dots, w_n)\}\right] = -xt \\ w_2(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \mathbb{L}\{w_{1xx}(x, t) + A_1(w_0, w_1, \dots, w_n)\}\right] = xt^2 \\ w_3(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \mathbb{L}\{w_{2xx}(x, t) + A_2(w_0, w_1, \dots, w_n)\}\right] = -xt^3 \\ &\vdots \\ w_n(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \mathbb{L}\{w_{n-1xx}(x, t) + A_{n-1}(w_0, w_1, \dots, w_n)\}\right] \text{ elde edilir. O halde} \\ w(x, t) &= x - xt + xt^2 - xt^3 \dots = \frac{x}{1+t} \text{ dir.} \end{aligned}$$

3.3. Varyasyonel iterasyon metodu

Genel halde lineer $\mathcal{N}$ lineer olmayan operatör ve h kaynak fonksiyonu olmak üzere;

$$w(x, t) + \mathcal{N}w(x, t) = h(x) \quad (3.3.1)$$

denklemini inceleyelim. He'e (1999) göre bu denklem için düzeltme fonksiyoneli;

$$w_{k+1}(x, t) = w_k(x, t) + \int_0^t \Lambda(w_k(x, \wp) + \mathbb{N}\hat{w}(x, \wp) - h(x))d\wp \quad (3.3.2)$$

olarak yazılır. Burada Λ Lagrange çarpanı olup $\hat{w}$ kısıtlanmış yani $\delta\hat{w} = 0$ dir.

Örnek 3.3.1. $w_t + ww_x = w_{xx}$, $w(x, 0) = x$ Burgers denklemi inceleyelim. Ele alınan bu denklem için düzeltme fonksiyoneli;

$$w_{k+1}(x, t) = w_k(x, t) + \int_0^t \Lambda\left(\frac{\partial w_k(x, \wp)}{\partial \wp} + \hat{w}(x, \wp)\frac{\partial \hat{w}(x, \wp)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \hat{w}(x, \wp)}{\partial x^2}\right)d\wp \quad (3.3.3)$$

olur. Diğer yandan;

$1 + \Lambda|_{t=\wp} = 0, \Lambda'|_{t=\wp} = 0$ sisteminden $\Lambda = -1$ olup (3.3.2) düzeltme fonksiyoneli yerine konulursa;

$$w_{k+1}(x, t) = w_k(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial w_k(x, \wp)}{\partial \wp} + w_k(x, \wp)\frac{\partial w_k(x, \wp)}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_k(x, \wp)}{\partial x^2}\right)d\wp$$

elde edilir. $w_0(x, t) = x$ başlangıç şartı ile birlikte,

$$w_0(x, t) = x$$

$$w_1(x, t) = x - xt$$

$$w_2(x, t) = x - xt + xt^2 - \frac{1}{3}xt^3$$

$\vdots$

$$w_k(x, t) = x - xt + xt^2 - xt^3 \dots$$

olarak bulunur.

3.3.1. Laplace varyasyonel iterasyon metodu

Varyasyonel iterasyon metodunun başarısı Λ çarpanının bulunmasına bağlıdır. Laplace dönüşümü kullanılarak metod geliştirilmiş daha hızlı yakınsamalar elde etmek amaçlanmıştır. Metodun kolay anlaşılması için yine Burgers denklemi üzerinden açıklanacaktır.

$w_t + ww_x = w_{xx}$, $w(x, 0) = x$ Burgers denklemi için düzeltme fonksiyoneli (3.3.3) ile

verilmiştir. Burada denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanarak;

$$\begin{aligned}\mathbb{L}[w_{k+1}(x, t)] &= \mathbb{L}[w_k(x, t)] \\ &+ \mathbb{L} \int_0^t \Lambda(x, t - \wp) \left(\frac{\partial w_n(x, \wp)}{\partial \wp} + \widehat{w}(x, \wp) \frac{\partial \widehat{w}(x, \wp)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \widehat{w}(x, \wp)}{\partial x^2} \right) d\wp \quad (3.3.4)\end{aligned}$$

olur. Laplace dönüşümü için konvolüsyon özelliği; (Çağlıyan, Çelik ve Doğan, 2013, s.208)

$$f * g = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \quad (3.3.5)$$

olup; Konvolüsyon özelliği kullanılırsa;

$$\mathbb{L}[w_{k+1}(x, t)] = \mathbb{L}[w_k(x, t)] + \mathbb{L}(\Lambda(x, t)) * [-\mathbb{L}w_k(x, t)(w_k)_x(x, t) - (w_k)_{xx}(x, t)] \quad (3.3.6)$$

olur. $w_k(x, t)$ 'ye göre varyasyonel türev alınır;

$$\mathbb{L}[w_{k+1}(x, t)] = \mathbb{L}[\delta w_k(x, t)]1 + s\mathbb{L}[\Lambda(x, t)] \text{ elde edilir. Buradan,}$$

$$1 + s\mathbb{L}[\Lambda(x, t)] = 0, \Lambda(x, t) = \mathbb{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right] = -1 \quad (3.3.7)$$

olur. (3.3.7), (3.3.4) de yerine konulduğunda;

$$\begin{aligned}\mathbb{L}[w_{k+1}(x, t)] &= \mathbb{L}[w_k(x, t)] + \mathbb{L}\left[\int_0^t (-1) \left(\frac{\partial w_n(x, \wp)}{\partial \wp} + \widehat{w}(x, \wp) \frac{\partial \widehat{w}(x, \wp)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \widehat{w}(x, \wp)}{\partial x^2} \right) d\wp\right] \text{ bağıntısına ve buradan;}\end{aligned}$$

$$\mathbb{L}[w_{k+1}(x, t)] = \mathbb{L}[w_k(x, t)] + \mathbb{L}[(-1)]\mathbb{L}[(w_k)_t - w_k(w_k)_x + w_{xx}] \text{ elde edilir. } w_0(x, t) = w(x, 0) = x \text{ olup;}$$

$$[w_1(x, t)] = \mathbb{L}[x] + \mathbb{L}[-1]\mathbb{L}[x] = x - xt$$

$$[w_2(x, t)] = \mathbb{L}[x - xt] + \mathbb{L}[-1]\mathbb{L}[-x + x(t-1)^2] = x - xt + xt^2 - \frac{1}{3}xt^3$$

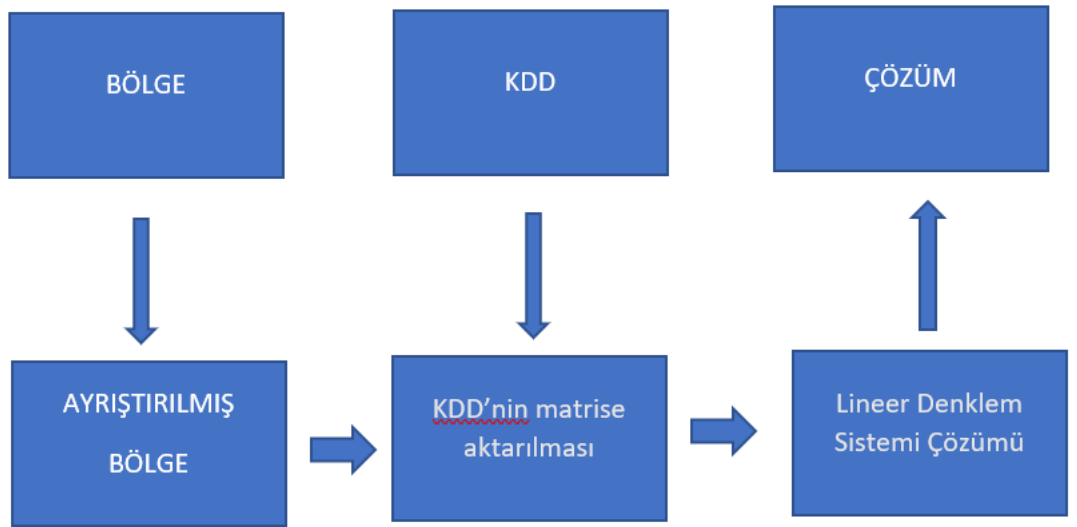
⋮

olur (Khuri ve Sayfy, 2012, s.2298). Dikkat edilirse varyasyonel iterasyon metodunda üçüncü iterasyonda elde edilen terimler Laplace varyasyonel iterasyon metodunda ikinci iterasyonda elde edilmiştir. Ele alınan problem karmaşıklıkça iterasyon sayısındaki

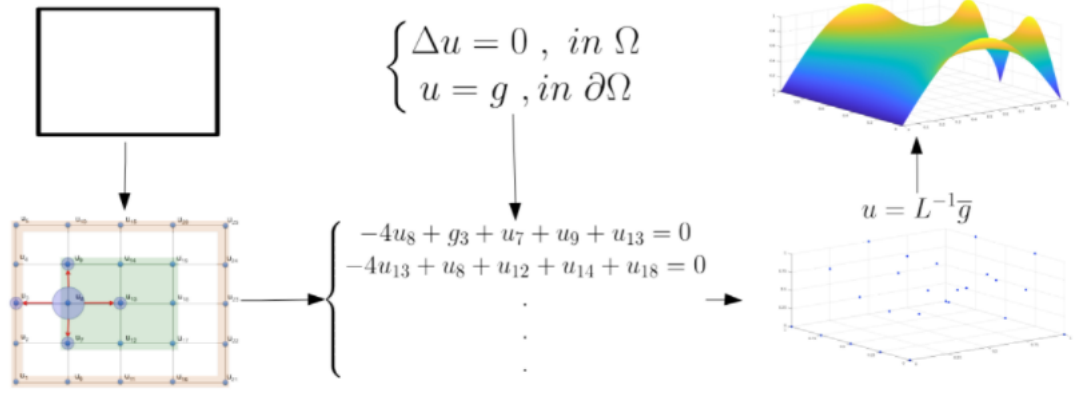
azalma daha büyük olacak ve buna bağılı olarak hesaplama yükü önemli ölçüde azalacaktır.

3.4. Yüksek Başarımlı Hesaplama

Yüksek başarımlı hesaplama nümerik lineer cebir, mühendislik ve hesaplamalı bilim problemlerinin kalbidir. Bilimsel kütüphaneler, lineer denklem sistemlerinin çözümleri, en küçük kareler ve özdeğer problemleri gibi daha kompleks algoritmaların etkili uygulamalarının yapıtaşıdır. Donanım gelişmelerinden ve paralel kaynaklardan yararlanmak için paralel yazılım kütüphaneleri, yıllar boyunca kurulan mimarilerin kendine has özellikleri de dikkate alınarak geliştirilmiştir. Örneğin; bellek hiyerarşisi, yürütme süresi üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğundan buna bağılı olarak aritmetik yoğunluk uygun şekilde kullanılır. Bu bölümde paralel hesaplama sistemleri ve bazı lineer cebir kütüphaneleri ele alınacaktır. Giriş bölümünde bahsedildiği üzere kısmi diferansiyel denklemler, mühendislik, finans, fizik vb. bir çok alandan probemlerin tanımlanmasında kullanılır. Bu problemlerin tümünde analitik çözüm elde etmek mümkün olmadığından çeşitli nümerik yöntemler ile problemler iki yada üç boyutlu ızgaralar üzerine ayrıştırılarak bu bölgede çözümler araştırılır. Aşağıda verilen şemalar bu adımları göstermektedir.



Şekil 3.1. Metodun şeması



Şekil 3.2. Metodun başka bir gösterimi, (Cammarasana,2017, s.4)

Yukarıdaki şablonlarda da gösterildiği üzere ele alınan kısmi diferansiyel denklemin çözümü problemi, büyük seyrek bir doğrusal denklem sistemi probleminin çözümüne indirgenmiştir. 1970'lerden günümüze kadar bu sistemlerin çözümlerinin elde edilmesi amacıyla direk ve iteratif olmak üzere çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

3.5. Paralel Programlama

Paralelizm verinin dağıtılmasına, hesaplanmasına, belleğin aşılmasına ve hesaplama süresinin azalmasına olanak sağlar. Paralel hesaplama ile birçok hesaplama veya işlem aynı anda gerçekleşir. Büyük, geniş problemler, aynı anda çözülebilen daha küçük problemlere bölünebilir. Paralelizm, paylaşımlı ve dağıtık hafıza olmak üzere iki ana paradigma olarak düşünülebilir. Bu iki paradigma donanım kaynağının mimari gelişimini takip eder. Bunun yanında karma yaklaşım; hesaplamanın bir kaç işlem arasında dağıtılmasından ve daha sonra bunların herbirinin paylaşılan hafıza hesaplamasından yararlanmasıyla oluşur.

3.5.1. Dağıtık hafıza

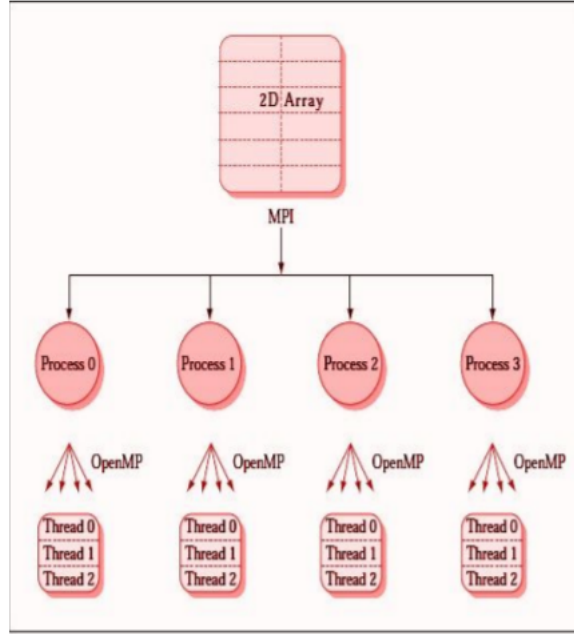
Dağıtık hafıza sistemlerinde her işlemci yerel bir hafızaya sahiptir ve kendi programını yürütür. Program, yürütme işlemcisinin yerel belleğindeki değerleri değiştirebilir ve mesaj şeklindeki verileri ağdaki diğer işlemcilere gönderebilir. Dağıtık hafıza paradigması

yüksek ölçeklenebilirlik ve taşınabilirlik sağlar, ancak açık iletişim yük dengeleme sorunları yaratabilir.

3.5.2. Paylaşımlı hafıza

Paylaşımlı hafıza sistemlerinde işlemciler arasındaki iletişim, global bellekteki, global değişkenlerin okunması ile sağlanır. Bu sistemlerde işlemler işlemcilerde ayrı ayrı yürütülür ama aynı hafıza kaynağını kullanılır. Bir işlemcinin hafızada bir değişiklik yapması söz konusu ise diğer işlemciler bu değişikliği görür. Paylaşımlı hafıza sistemleri örtük iletişime ve dinamik yük dengesine izin verir ancak yalnızca paylaşılan bellek kaynağı üzerinde çalışılabilir ve veri iletişim tutarlılığı yönetilmelidir. Dağıtık hafıza, paylaşımlı hafıza kaynağında kullanılabilirken tersi mümkün değildir. Paylaşımlı, dağıtık ya da karma sistem kullanımının seçimi, çözülecek probleme, ulaşılabilecek donanıma, yazılıma ve etkili performansa bağlıdır.

Paralel programlama standartlarından olan MPI ve OpenMP protokollerini açıklamak gerekirse; MPI ileti aktarım arayüzü, paralel uygulamaların ve kitaplıkların geliştirilmesini kolaylaştıran taşınabilir bir ileti aktarım standardıdır.(Dongarra, Otto, Snir ve Walker, 1995) OpenMP, C/C++ ve Fortran’da çok platformlu paylaşımlı hafıza sistemleri üzerinde paralel programlamayı destekler. OpenMP API, masaüstünden süper bilgisayara, paralel uygulamalar geliştirmek için basit ve esnek bir arayüze sahip, taşınabilir, ölçeklenebilir bir model tanımlar.(<https://www.openmp.org/>) OpenMP’nin programlanması ve hata ayıklaması MPI’den daha kolaydır, direktifler kademeli olarak eklenebilir (kademeli paralelleştirme olarak adlandırılır). Ancak OpenMP yalnızca paylaşımlı belleğe sahip bilgisayarlarda çalıştırılabilir, OpenMP’yi destekleyen ve çoğunlukla döngüleri paralelleştirmek için kullanılan bir derleyici gerektirir. MPI, OpenMP’den daha geniş bir sorun yelpazesinde kullanılabilen paylaşımlı veya dağıtık hafıza mimarileri üzerinde çalışır. Bu durumda, her işlemcinin kendi yerel değişkenleri vardır ve dağıtık belleğe sahip bilgisayarlar paylaşımlı belleğe sahip bilgisayarlarından daha düşük maliyetlidir. (Mallikarjuna ve Rajesham, 2013, s.42)



Şekil 3.3. OpenMP ve MPI (Mallikarjuna ve Rajesham, 2013, s.42)

3.6. Temel Doğrusal Cebir Kütüphaneleri

Paralellikten yararlanmak için birkaç paralel bilimsel kütüphane doğrusal cebirin temel rutinlerini kolaylaştırır ve böylece kullanıcılar, analiz konularına odaklanabilir. Doğrusal cebir için paralel bilimsel kütüphanelerin amacı, temel lineer cebir rutinleri için, veri dağılımı ve paralel ortamdaki iletişimi sağlamaktır. Oluşum tipi denklemlerin sayısal çözüm yöntemlerinden bazılarının büyük doğrusal denklem sistemlerinin çözümüne ulaşmayı gerektirdiği görülmüştü. Doğrusal denklem sistemlerinin çözümüne yönelik bilimsel kütüphaneler, kullanıcı girişimlerine ve gerçekleştirilen işlemlerin seviyesine göre üç mantıksal seviyede yapılandırılabilir;

- Kullanıcı, bir çözücü seçerek ve katsayı matrisini ve sağ taraftaki vektörü kütüphaneye geçirerek yüksek seviyede çalışır.
- Bilimsel kütüphaneler algoritmayı uygular ve dağıtılacak veri indekslerini ayarlar;
- BLAS(Dongarra, Croz, Hammarling ve Duff, 1990, s.1) ile temel doğrusal cebir

işlemleri gerçekleştirilir ve MPI gibi iletişim protokolleri ile veri iletişimi sağlanır.

BLAS(Dongarra ve diğerleri, 1990) yazılım kütüphanesinin temel vektör ve matris işlemleri için kullanılan çok başarılı bir örneğidir ve çok geniş bir kullanım alanına sahiptir. Doğrusal cebirin sıkça karşılaşılan işlemlerini tanımlar. Yapı blokları ve bunlar için standart bir arayüz belirler. Yazılım organizasyonuna bağlı olarak üç BLAS seviyesi belirlemek mümkündür. BLAS1; iki vektör arasındaki standart işlemler, BLAS2; matris-vektör operasyonları ve BLAS3; iki matris arasındaki işlemleri operasyonlarını kapsar.

Tanım 3.6.1. Matrisin elemanlarının çoğunun sıfır olduğu matrislere seyrek matris denir. Seyrek matrisler farklı depolanma tekniklerine sahiptir.(<https://tr.icyscience.com/sparse-matrix>,2021).

Bilgisayar programlamasında, bir matris iki boyutlu bir dizi ile tanımlanabilir. Matrisin depolanması için çok fazla alana ihtiyaç duyulduğundan farklı bir gösterim kullanılır. Aşağıdaki örnekte standart gösterimi verilen matrisin, seyrek matris yapısına aktarımı gösterilmiştir.

Örnek 3.6.2. Verilen tablonun ilk satırı, matrisin toplam satır sayısı, sütun sayısı ve sıfırdan farklı elemanlarının sayısını göstermektedir. Onun dışında örneğin tablonun 2.satırı matrisin ilk satırında 6.sütununda sıfırdan farklı elemanın 7 olduğunu ifade eder.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$	satır	sütun	farklı
	5	7	6
	0	5	7
	1	1	6
	2	0	2
	3	1	1
	3	5	4
	4	4	4

Sparse-BLAS seyrek matrisler için hesaplama rutinleri sağlayan bir kütüphanedir. Seyrek matris sistemleri için yazılmış çeşitli kütüphaneler vardır. Bunlardan bazıları incelenecek olursa;

"SuperLU(Xiaoye,2005, s.1), büyük, seyrek, simetrik olmayan lineer denklem sistemlerinin doğrudan çözümü için genel amaçlı bir kütüphanedir. Kütüphane C ile yazılmıştır ve C veya Fortran programından çağrılabilir. Çeşitli paralellik biçimlerini desteklemek için MPI(Snir, Otto, Huss-Lederman, Walker ve Dongorra, 1998), OpenMP ve CUDA kullanır." Hem gerçek hemde kompleks değerli matrisler için çeşitli rutinler sağlayan direkt bir sistem çözücüdür. Kütüphane rutini, bir LU ayrışımı yapar sonrasında ileri ve geri süpürme ile üçgensel sistemin çözümünü bulur. (Xiaoye, 2005, s.1).

PARDISO (Schenk, Gartner, Fichtner ve Stricker, 2000) doğrusal bir denklem sisteminin büyük seyrek simetrik ve simetrik olmayan matrisini çözmek için etkili bir pakettir. PARDISO gerçek veya kompleks, simetrik veya simetrik olmayan, pozitif kesin veya belirsiz seyrek doğrusal denklem sistemleri de dahil olmak üzere çeşitli seyrek matrisler için kullanımı olan direkt bir çözücüdür. Çözücü, son zamanlarda geniş bir uygulama yelpazesini etkili bir şekilde desteklemiş, çeşitli seyrek matris türlerini içeren endüstriyel ve kurumsal alanlarda geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Büyük ve karmaşık doğrusal denklem sistemlerinde basit ve kullanımı kolay bir pakettir. (Zadeh, Zeynal, Nor ve Shaaban,2011).

MUMPS ("Multifrontal Massively Parallel Solver") (Amestoy, Duff, L'Excellent ve Koster, 2001), Asimetrik, simetrik olmayan, pozitif tanımlı simetrik ya da genel simetrik bir kare matris olmak üzere, dağıtık hafızalı sistemler üzerinde $AX = B$ lineer denklem sistemlerinin direk çözümünün elde edilmesi için oluşturulmuş bir pakettir. Bu yazılımın çoğunluğu Fortran 95'te yazılmış olup bir C arabirimi de mevcuttur. MUMPS'un paralel versiyonu mesaj iletimi için MPI (Snir ve diğerleri, 1998) gerektirir bunun yanında BLAS (Dongarra ve diğerleri,1990), LAPACK (Planitz,1995, s.1), BLACS ve ScaLAPACK (Blackford ve diğerleri, 1997) kütüphanelerini kullanır (Amestoy, Duff ve L'Excellent, 2007).

3.7. Laplace Denklemi ile Yapılan Bir Test Problemi

Cammarasana 2017’de yazdığı tezinde;

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 \\ w = g \end{cases} \quad (3.7.1)$$

Laplace denklemini bir Ω bölgesinde Dirichlet sınır koşullarıyla birlikte ele almıştır. Denklem iki ve üç boyutlu Ω bölgesinin bir D ayrışımı üzerinde incelenmiş ve aşağıda satır sayısı, doluluk oranı, sıfırdan farklı eleman sayısı bilgilerinin yer aldığı tabloda sunulan katsayı matrisleri kullanılarak algoritmaların etkinliği test edilmiştir.

Bölge	Matrisin Satırı	Sıfırdan Farklı Elemanlar	Doluluk oranı
Kare	4 194 304	20 938 768	% 0.00012
Kübik	2 097 152	14 099 408	%0.0298
Kübik	134 217 728	930 123 728	%0.000005
Dairesel	4 152 441	29 053 205	%0.00017
Küresel	2 094 834	33 225 967	%0.00076

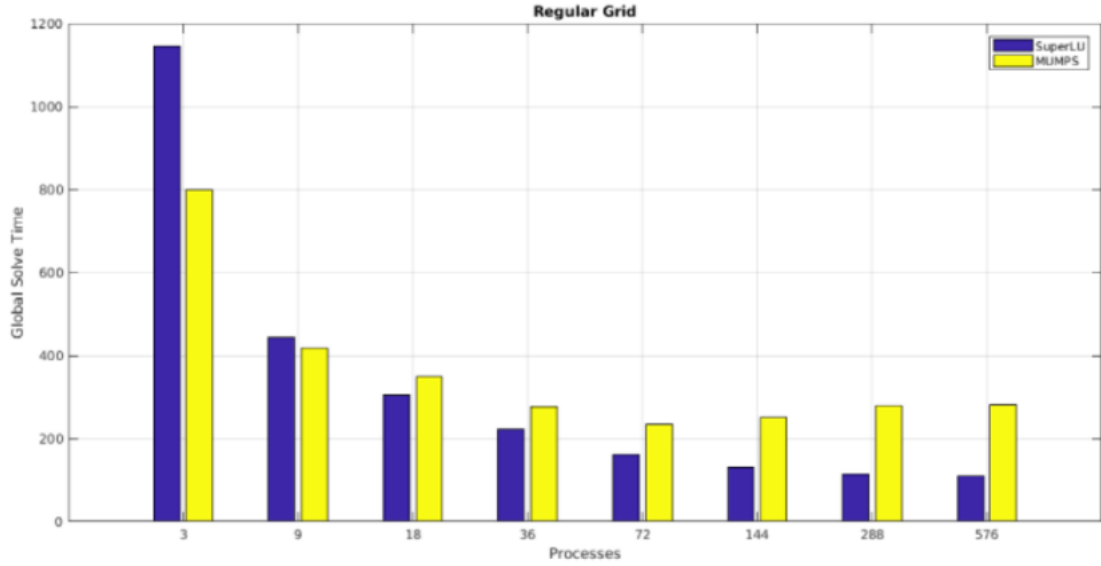
Şekil 3.4. Ele alınan matrisin özellikleri (Cammarasana 2017'den değiştirilerek alınmıştır.)

Cammarasana (2017) tarafından hazırlanan bu çalışmada ele alınan test problemi 2 tane 18 çekirdekli Intel Xeon E5-2697 2.30 GHz işlemcili, 1512 düğüme sahip düğüm başına 36 çekirdekli, (toplam çekirdek=54432) düğüm başına 128 GB RAM’e sahip Marconi adlı süper bilgisayar ile yapılmıştır. Çalışma hem düzgün (kübik) ya da düzgün olmayan (küresel) bölgeler üzerinde yapılmış SuperLU ve MUMPS paketleri karşılaştırılmıştır. Şekil 3.5 (Cammarasana, 2017, s.23)’de düzgün bir kübik bölge üzerinde test edilen matrisin özellikleri verilmiştir.

Ayrışım Bölgesi	128*128*128
Satır Sayısı	2 097 152
Sıfırdan farklı eleman sayısı	14 099 408

Şekil 3.5. Kübik matrisin özellikleri (Cammarasana 2017'den değiştirilerek alınmıştır)

Düzenli bölgeler üzerinde yapılan testler sonucunda, hesaplama süreleri göz önüne alındığında SuperLU (Xiaoye S. Li,2005)’nun MUMPS (Amestoy ve diğerleri, 2001)’a göre daha etkili olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 3.6 (Cammaraşana,2017, s.24) de bir düzenli bölge üzerinde 576 işlemci (16 düğüm) ye kadar yapılan SuperLU ve MUMPS kütüphanelerinin karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 3.6. SuperLU ve MUMPS kıyaslaması (Cammaraşana,2017, s.24)

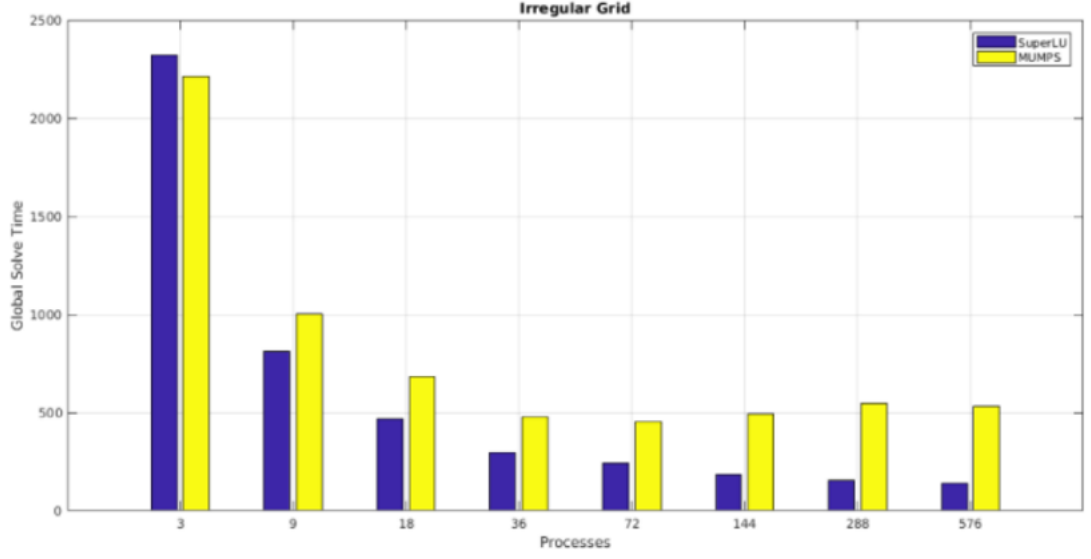
Cammaraşana (2017) yaptığı çalışmada düzenli olmayan bir küresel bölge üzerinde aşağıdaki tabloda özellikleri sunulan matris üzerinden SuperLU ve MUMPS kütüphanelerini kıyaslamıştır.

Bölge	Küresel
Satır Sayısı	2 094 977
Sıfırdan farklı eleman sayısı	33 225 976

Şekil 3.7. Küresel matrisin özellikleri (Cammaraşana 2017'den değiştirilerek alınmıştır.)

Yapılan testler sonucunda düzenli olmayan bölgeler üzerinde de yine SuperLU (Xiaoye,2005)’nun MUMPS (Amestoy ve diğerleri,2001)’a kıyasla en iyi performans gösterdiği kaydedilmiştir.(Cammaraşana,2017, s.25) Küresel bölge üzerinde SuperLU ve MUMPS

kütüphanelerinin hesaplama süreleri 576 işlemci (16 düğüm) ye kadar Şekil 3.8 deki grafikte verilmiştir.



Şekil 3.8. SuperLU ve MUMPS kıyaslaması (Cammaraşana, 2017, s.32)

4. BULGULAR

4.1. Ele Alınan Örnekler ve Karşılaştırmalar

Örnek 4.1.1.

$$w_t + \theta w w_x + \mu w^2 w_x + \beta w_{xxx} = 0 \quad (4.1.1)$$

Gardner denklemi;

$$w(x, 0) = 0.1 - 0.1 \tanh\left(\frac{x\sqrt{30}}{60}\right) \quad (4.1.2)$$

başlangıç koşuluyla birlikte $-80 \leq x \leq 80$ ve $t \in [0, 12]$ iken ele alınsın. Laplace varyasyonel metodu uygulanarak çözümler araştırılsın. Klasik varyasyonel iterasyon metodu için (3.3.2) ile verilen şema uygulanırsa;

$$w_{n+1}(x, t) = w_n(x, t) + \int_0^t \Lambda(x, \epsilon) \left(\frac{\partial w_n(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \theta \frac{\partial(\widehat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x} \widehat{w} + \mu \widehat{w}^2 \frac{\partial(\widehat{w}(x, \epsilon))}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3(\widehat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x^3} \right) d\epsilon \quad (4.1.3)$$

olur. Burada $\widehat{w}$ kısıtlanmış yani $\delta \widehat{w} = 0$ dır. (4.1.3) denkleminin her iki tarafına $\mathbb{L}$ Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] = \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L} \left[\int_0^t \Lambda(x, t) \left(\frac{\partial w_n(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \theta \frac{\partial(\widehat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x} \widehat{w} + \mu \widehat{w}^2 \frac{\partial(\widehat{w}(x, \epsilon))}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3(\widehat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x^3} \right) d\epsilon \right] \quad (4.1.4)$$

olur. (3.3.5) ile tanımlanan konvülasyon özelliği ile;

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] &= \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L} \left[\Lambda(x, t) * \left(\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + \theta \frac{\partial(\widehat{w}_n(x, t))}{\partial x} \widehat{w} + \mu \widehat{w}_n^2 \frac{\partial(\widehat{w}(x, t))}{\partial x} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \beta \frac{\partial^3(\widehat{w}_n(x, t))}{\partial x^3} \right) \right] \\
&= \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] \mathbb{L} \left[\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + \theta \frac{\partial(\widehat{w}_n(x, t))}{\partial x} \widehat{w} + \mu \widehat{w}_n^2 \frac{\partial(\widehat{w}(x, t))}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \beta \frac{\partial^3(\widehat{w}_n(x, t))}{\partial x^3} \right] \\
&= \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] \left[s \mathbb{L} w_n(x, t) - w_n(x, 0) + \theta \mathbb{L} \frac{\partial(\widehat{w}_n(x, t))}{\partial x} \widehat{w} + \mu \mathbb{L} \widehat{w}^2 \frac{\partial(\widehat{w}(x, t))}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \beta \mathbb{L} \frac{\partial^3(\widehat{w}_n(x, t))}{\partial x^3} \right]
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

yazılır. (4.1.5) de $w_n(x, t)$ 'ye göre varyasyonel türev alınırsa $\mathbb{L}[\Lambda w_{n+1}(x, t)] = \mathbb{L}[\Lambda w_n(x, t)] \{1 + s \mathbb{L} \Lambda(x, t)\}$ elde edilir. Buradan;

$$1 + s \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] = 0, \Lambda(x, t) = \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s} \right] = -1 \tag{4.1.6}$$

olup (4.1.6), (4.1.5) denkleminde yerine konulursa;

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] &= \mathbb{L}[w_n] + \mathbb{L}[-1] \mathbb{L} \left[\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + \theta \frac{\partial(w_n(x, t))}{\partial x} w + \mu w_n^2 \frac{\partial(w_n(x, t))}{\partial x} + \right. \\
&\quad \left. \beta \frac{\partial^3 w_n(x, t)}{\partial x^3} \right]
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

bağıntısına ulaşılır. Bu bağıntı yardımıyla iterasyonlar ilerletilirse;

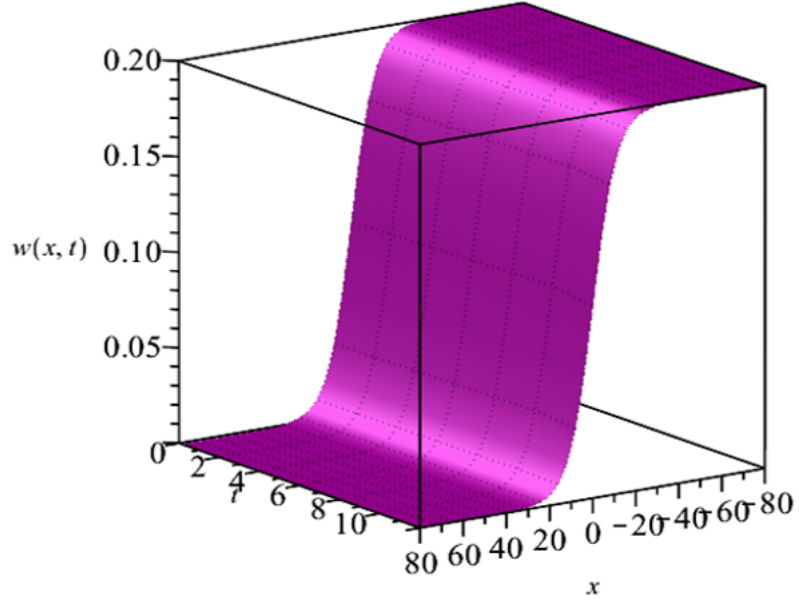
$$\begin{aligned}
\mathbb{L}[u_1] &= \mathbb{L}[u_0] - \frac{1}{s} \mathbb{L} \left[\frac{\partial w_0(x, t)}{\partial t} + \theta \frac{\partial(w_0(x, t))}{\partial x} w_0 + \mu w_0^2 \frac{\partial(w_0(x, t))}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 w_0(x, t)}{\partial x^3} \right] \\
\mathbb{L}[u_2] &= \mathbb{L}[u_1] - \frac{1}{s} \mathbb{L} \left[\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} + \theta \frac{\partial(w_1(x, t))}{\partial x} w_1 + \mu w_1^2 \frac{\partial(w_1(x, t))}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 w_1(x, t)}{\partial x^3} \right] \\
\mathbb{L}[u_3] &= \mathbb{L}[u_2] - \frac{1}{s} \mathbb{L} \left[\frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} + \theta \frac{\partial(w_2(x, t))}{\partial x} w_2 + \mu w_2^2 \frac{\partial(w_2(x, t))}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 w_2(x, t)}{\partial x^3} \right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olur. Ele alınan bu problemde 4 iterasyon yapılmış ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilen

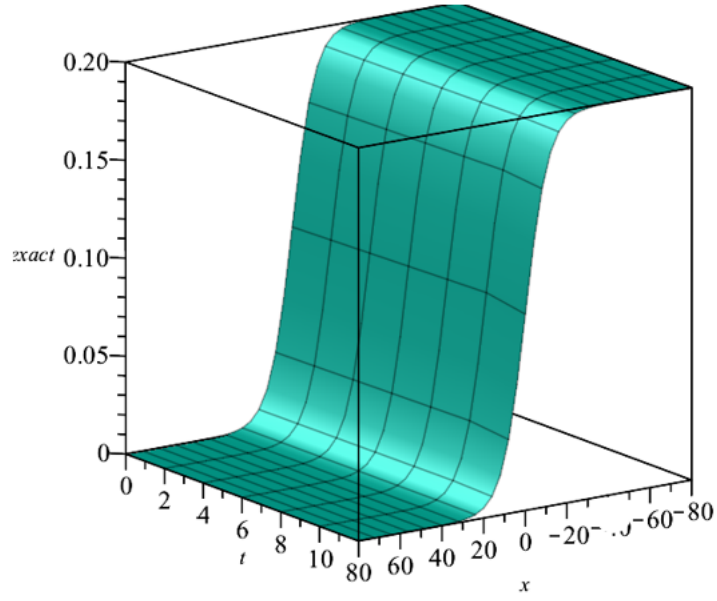
tablo ve grafiklerde gösterilmiştir. (4.1.1) denklemi için gerçek çözüm;

$$w(x, t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \tanh\left(\frac{(x - \frac{t}{30})}{60}\right) \quad (4.1.8)$$

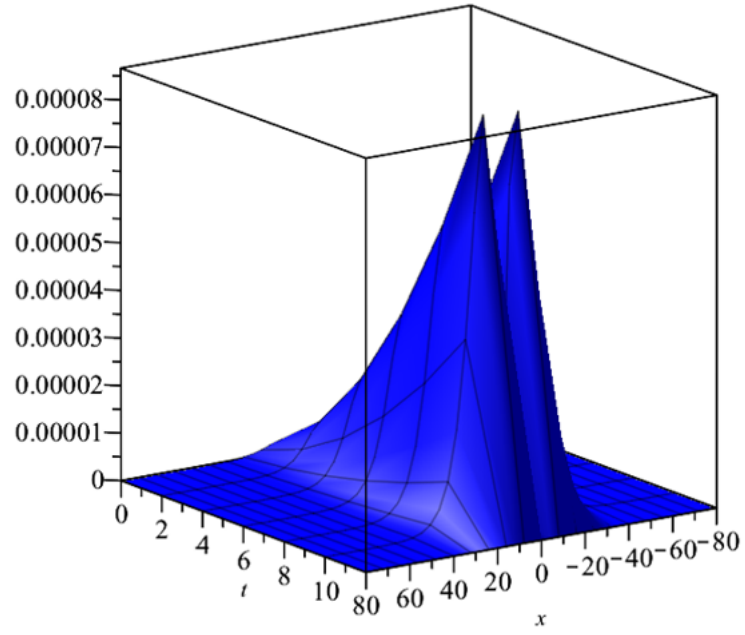
dir.



Şekil 4.1: Yaklaşık Çözüm ($\theta = 1, \mu = -5, \beta = 1$)

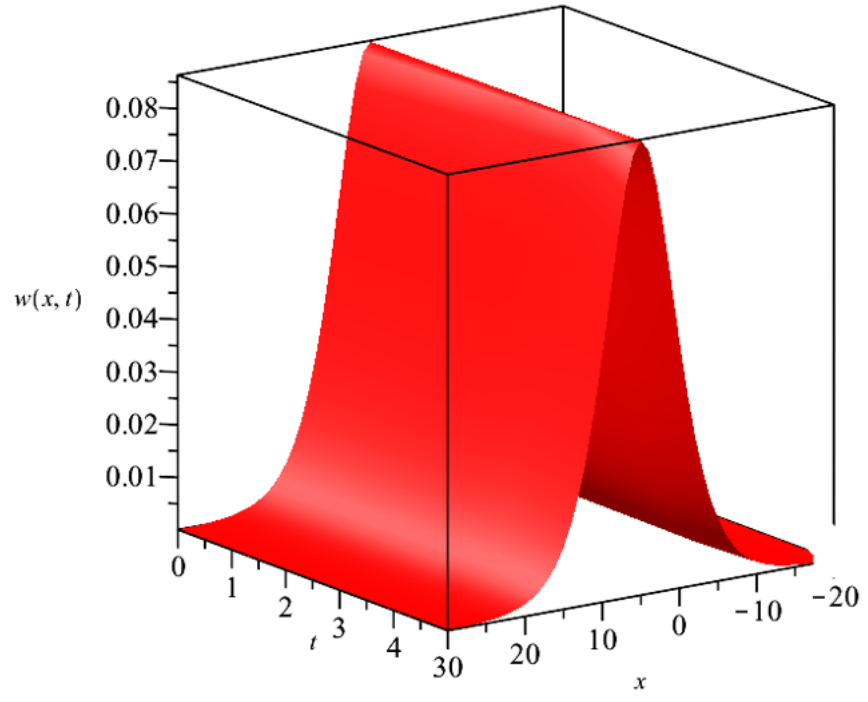


Şekil 4.2: Gerçek Çözüm ($\theta = 1, \mu = -5, \beta = 1$)

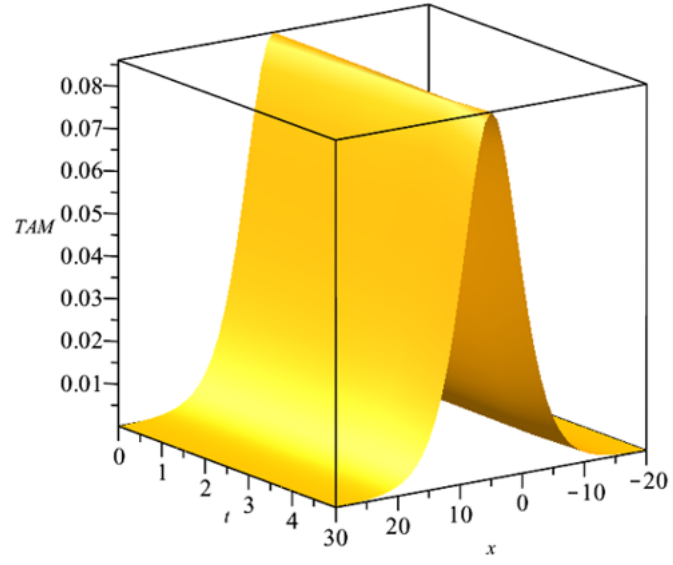


Şekil 4.3: Hata Grafiği ($\theta = 1, \mu = -5, \beta = 1$)

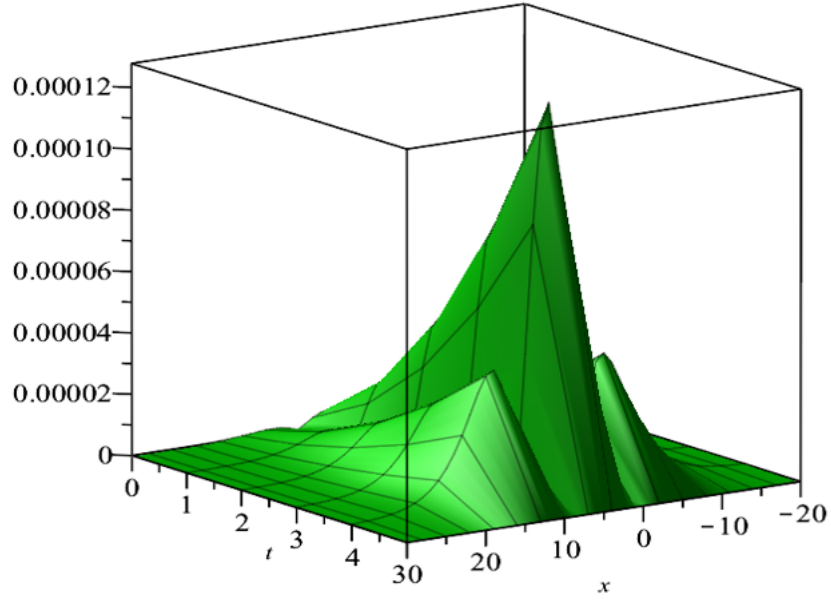
Örnek 4.1.2. (4.1.1), Gardner denklemi; $w(x, 0) = \frac{2}{12 + 3\sqrt{14}\cosh(\frac{-x}{3} + \frac{5}{3})}$ başlangıç koşuluyla birlikte $-20 \leq x \leq 30$ ve $t \in [0, 5]$ iken ele alınsın. Örnek 4.1.1 deki adımlar izlenerek gerçek çözümü; $w(x, t) = \frac{2}{12 + 3\sqrt{14}\cosh(\frac{-x}{3} + \frac{5}{3} + \frac{t}{27})}$ ile verilen Gardner denklemi için elde edilen çözümler aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.4: Yaklaşık Çözüm ($\theta = 4, \mu = -3, \beta = 1$)



Şekil 4.5: Gerçek Çözüm ($\theta = 4, \mu = -3, \beta = 1$)



Şekil 4.6: Hata Grafiği ($\theta = 4, \mu = -3, \beta = 1$)

Örnek 4.1.3. Bu örnekte Örnek 4.1.1 de ele alınan problemin çözümleri Laplace-Adomian ayrışım metoduyla araştırılmıştır. (4.1.1) denklemi;

$$w_t = -\theta w w_x - \mu w^2 w_x - \beta w_{xxx} \quad (4.1.9)$$

olarak düzenlensin.

- Adım I

(4.1.9) denkleminin her tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{L}\{w_t\} = \mathbb{L}\{-\theta w w_x - \mu w^2 w_x - \beta w_{xxx}\}$$

olur. w_t türevi için Laplace dönüşümü kullanılarak;

$$\begin{aligned} s w(x, s) - w(x, 0) &= \mathbb{L}\{-\theta w w_x - \mu w^2 w_x - \beta w_{xxx}\} \\ w(x, s) &= \frac{w(x, 0)}{s} - \frac{1}{s} \mathbb{L}\{-\theta w w_x - \mu w^2 w_x - \beta w_{xxx}\} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Burada $w(x, 0)$, (4.1.2) ile verilmiştir. (4.1.10) denkleminin her iki tarafına $\mathbb{L}^{-1}$ ters

laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$w(x, t) = w(x, 0) - \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathbb{L} \{ -\theta w w_x - \mu w^2 w_x - \beta w_{xxx} \} \right] \quad (4.1.11)$$

olur.

- Adım II

Lineer olmayan ww_x terimi için Adomian polinomları;

$$A_0 = w_{0x} w_0$$

$$A_1 = w_{0x} w_1 + w_{1x} w_0$$

$$A_2 = w_{0x} w_2 + w_{1x} w_1 + w_{2x} w_0$$

$$A_3 = w_{0x} w_3 + w_{1x} w_2 + w_{2x} w_1 + w_{3x} w_0$$

$$A_4 = w_{0x} w_4 + w_{1x} w_3 + w_{2x} w_2 + w_{3x} w_1 + w_{4x} w_0$$

$\vdots$

ve lineer olmayan $w^2 w_x$ terimi için Adomian polinomları;

$$\mathbb{A}_0 = w_{0x} w_0^2$$

$$\mathbb{A}_1 = w_0^2 + w_{1x} + 2w_0 w_1 w_{0x}$$

$$\mathbb{A}_2 = w_0^2 w_{2x} + 2w_0 w_1 w_{1x} + 2w_0 w_2 w_{0x} + w_1^2 w_{0x}$$

$$\mathbb{A}_3 = 2w_1 w_2 w_{0x} + w_1^2 w_{1x} + 2w_1 w_{2x} w_0 + 2w_2 w_{1x} w_0 + 2w_3 w_{0x} w_0 + w_{3x} w_0^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_4 = & w_2^2 w_{0x} + 2w_1 w_{1x} w_2 + 2w_1 w_{0x} w_3 + w_1^2 w_{2x} + 2w_0 w_{3x} w_1 + 2w_0 w_{2x} w_2 + \\ & 2w_0 w_{1x} w_3 + 2w_0 w_{0x} w_4 + w_0^2 w_{4x} \end{aligned}$$

$\vdots$

formülleri ile verilir. Bilindiği üzere $w(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonu (3.2.14) da verilmişti. Diğer yandan lineer olmayan terimler $ww_x = \mathcal{N}(w(x, t))$ ve $w^2 w_x = \mathcal{N}_1(w(x, t))$ olarak gösterilmek üzere;

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(w(x, t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(w_0, w_1, \dots, w_n) \\ \mathcal{N}_1(w(x, t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{A}_n(w_0, w_1, \dots, w_n) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

yazılır. (3.2.14) ve (4.1.12), (4.1.11) denkleminde yerine konulursa;

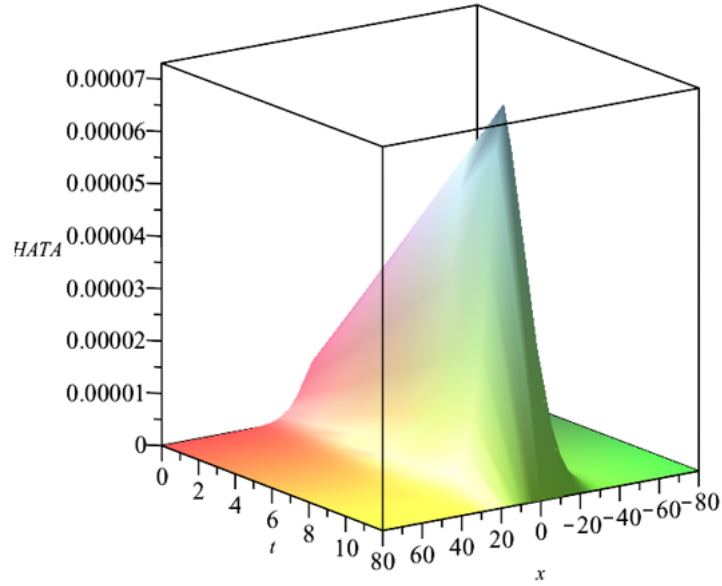
$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = w(x, 0) + \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathbb{L} \{ \theta A_n(w_0, w_1, \dots, w_n) + \mu \mathbb{A}_n(w_0, w_1, \dots, w_n) + \beta w_{nxxx} \} \right]$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

olur. O halde;

$$\begin{cases} w_0(x, t) = w(x, 0) \\ w_{n+1}(x, t) = \mathbb{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathbb{L} \{ \theta A_n + \mu \mathbb{A}_n + \beta w_{nxxx} \} \right]; n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.1.13)$$

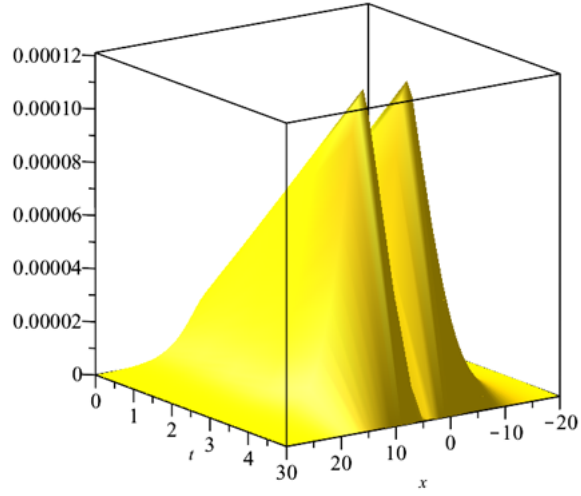
tekrarlama bağıntısına ulaşılır. N iterasyon sayısını göstermek üzere $N = 4$ için elde edilen sonuçlara göre gerçek ve yaklaşık çözüm arasındaki farkı gösteren grafik aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.7: Hata Grafiği ($\theta = 4, \mu = -5, \beta = 1$)

Örnek 4.1.4. (4.1.1), Gardner denklemi; $w(x, 0) = \frac{2}{12 + 3\sqrt{14}\cosh(\frac{-x}{3} + \frac{5}{3})}$ başlangıç koşuluyla birlikte $-20 \leq x \leq 30$ ve $t \in [0, 5]$ iken ele alınsın. Örnek 4.1.3 teki adımlar izlenerek gerçek çözümü; $w(x, t) = \frac{2}{12 + 3\sqrt{14}\cosh(\frac{-x}{3} + \frac{5}{3} + \frac{t}{27})}$ ile verilen Gardner

denklemleri için elde edilen çözümler için hata grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.8. Hata grafiği ($\Theta=4, \mu=-5, \beta=1$)

Ele alınan problemler Hepson ve arkadaşları tarafından 2019’da üstel B-spline kolokasyon metodu ile çözmüştür. Aşağıda verilen tabloda Gardner denkleminin ele alınan iki hali için iterasyon sayısı dikkate alınarak LaplaceVİM, Laplace Adomian ve üstel B-spline kolokasyon metodu (Ersoy Hepson,Kormaz ve Dağ, 2019, s.10) ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

	EN FAZLA HATA		
METOD	Üstel B-Spline (N=100)	Laplace-Adomian (N=3)	Laplace-VİM (N=4)
$\Theta=1, \beta=1, \mu=-5$	$3,8436 \times (10)^{-4}$	$7,3013 \times (10)^{-5}$	$8,6664 \times (10)^{-5}$
$\Theta=4, \beta=1, \mu=-3$	$1,1502 \times (10)^{-4}$	$1,2111 \times (10)^{-4}$	$1,2776 \times (10)^{-4}$

Çizelge 4.1. Yöntemlerin kıyaslanması

Bundan sonraki örneklerde lineer olmayan, karmaşık, homojen ve homojen olmayan denklemler Laplace-Adomian ve Laplace-Vim metodları ile çözülecektir.

Örnek 4.1.5. a ve b sabitler olmak üzere;

$$iw_t + aw_{xx} + bu \ln |w|^2 = 0 \quad (4.1.14)$$

denklemi $w(x, 0) = \frac{b-d}{2b} - \frac{b}{2a}x^2 = f(x)$ başlangıç koşuluyla ele alınsın. Gerekli düzenlemeler yapılırsa denklem;

$$w_t = iau_{xx} + ibw \ln |w|^2 \quad (4.1.15)$$

halini alır. (4.1.15) denklemi (3.2.9) ile kıyaslandığında $L_t w(x, t)$ ve $\mathcal{R}$ operatörleri aşağıdaki şekilde yazılır;

$$L_t w(x, t) = w_t(x, t), \mathcal{R}w = ia \frac{\partial}{\partial x^2} w(x, t) \quad (4.1.16)$$

Diğer yandan lineer olmayan terim;

$$\mathcal{N}w = w \ln |w|^2 = w \ln |w \bar{w}| = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(w_0, w_1, \dots, w_n) \quad (4.1.17)$$

olarak ifade edilir. Burada A_n Adomian polinomları (3.2.5) formülü ile aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} A_0 &= w_0 \ln |w_0 \bar{w}_0|, \\ A_1 &= \frac{w_0 w_1 \bar{w}_0'}{\bar{w}_0} + w_1 \ln |w_0 \bar{w}_0| + w_1, \\ A_2 &= \frac{w_0 w_1^2}{2\bar{w}_0} \bar{w}_0'' + \frac{w_1}{w_0} \bar{w}_0' - \frac{w_0 w_1^2}{2\bar{w}_0^2} \bar{w}_0^{2'} + \frac{w_0 w_2}{\bar{w}_0} \bar{w}_0' + w_2 \ln |w_0 \bar{w}_0| + \frac{w_1^2}{2w_0} + w_2 \\ A_3 &= \frac{w_0 w_1^3}{6\bar{w}_0} \bar{w}_0''' + \frac{w_1^3}{2\bar{w}_0} \bar{w}_0'' + \frac{w_0 w_2 w_1}{\bar{w}_0} \bar{w}_0'' + \frac{w_0 w_1^3}{3\bar{w}_0^3} - \frac{w_1^3}{2\bar{w}_0^2} \bar{w}_0^{2'} + \frac{2w_1 w_2}{\bar{w}_0} \bar{w}_0' - \frac{w_0 w_1 w_2}{\bar{w}_0^{2'}} + \\ &\quad \frac{w_0 w_3}{\bar{w}_0} \bar{w}_0' - \frac{w_0 w_1^3}{2\bar{w}_0^2} \bar{w}_0' \bar{w}_0'' + w_3 \ln |w_0 \bar{w}_0| - \frac{w_1^3}{6w_0^2} + \frac{w_1 w_2}{w_0} + w_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nihayetinde (3.2.17) ile verilen tekrarlama bağıntısı (4.1.14) için uyarlanırsa;

$$\begin{aligned}
w_0(x, t) &= f(x) \\
w_1(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ a w_{0xx}(x, t) + b A_0 \} \right] \\
w_2(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ a w_{1xx}(x, t) + b A_1 \} \right] \\
w_3(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ a w_{2xx}(x, t) + b A_2 \} \right] \\
&\vdots \\
w_n(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ a w_{n-1xx}(x, t) + b A_{n-1} \} \right]
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.1.14) denkleminin gerçek çözümü

$$w(x, t) = \left(\frac{b-d}{2b} - \frac{b}{2a} x^2 \right) e^{-idt} \tag{4.1.19}$$

dir. $1 \leq x \leq 3$ ve $N=4$ için mutlak hatalar aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

t	a	b	d	maks-hata
0,1	1	1	1	0,002228650
0,2	1	1	1	0.008933000
0,3	1	1	1	0,020168184
0,4	1	1	1	0,036025895
0,5	1	1	1	0,056634023

Örnek 4.1.6. Örnek 4.1.5'te ele alınan denklemin homojen olmayan formu incelensin.

$$iw_t + aw_{xx} + bw \ln |w|^2 = cw \quad (4.1.21)$$

denklemini $w(x, 0) = \frac{b-d}{2b} - \frac{b}{2a}x^2 = f(x)$ başlangıç şartıyla birlikte ele alınsın. (4.1.14);

$$w_t = iaw_{xx} + ibw \ln |w|^2 - ciw. \quad (4.1.22)$$

olarak düzeltilsin.

(4.1.22) ile (3.2.9) kıyaslanırsa;

$$L_t w(x, t) = w_t(x, t), \mathcal{R}w = ia \frac{\partial}{\partial x^2} w(x, t) - icw(x, t), \quad (4.1.23)$$

ve

$$\mathcal{N}w = w \ln |w|^2 = w \ln |w \bar{w}| = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(w_0, w_1, \dots, w_n). \quad (4.1.24)$$

olur. (4.1.24) de yazılan A_n , Adomian polinomları (3.2.5) formülü ile aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A_0 = w_0 \ln |w_0 \bar{w}_0|,$$

$$A_1 = \frac{w_0 w_1 \bar{w}_0'}{\bar{w}_0} + w_1 \ln |w_0 \bar{w}_0| + w_1,$$

$$A_2 = \frac{w_0 w_1^2}{2\bar{w}_0} \bar{w}_0'' + \frac{w_1}{w_0} \bar{w}_0' - \frac{w_0 w_1^2}{2\bar{w}_0^2} \bar{w}_0^{2'} + \frac{w_0 w_2}{\bar{w}_0} \bar{w}_0' + w_2 \ln |w_0 \bar{w}_0| + \frac{w_1^2}{2w_0} + w_2$$

$$A_3 = \frac{w_0 w_1^3}{6\bar{w}_0} \bar{w}_0''' + \frac{w_1^3}{2\bar{w}_0} \bar{w}_0'' + \frac{w_0 w_2 w_1}{\bar{w}_0} \bar{w}_0'' + \frac{w_0 w_1^3}{3\bar{w}_0^3} - \frac{w_1^3}{2\bar{w}_0^2} \bar{w}_0^{2'} + \frac{2w_1 w_2}{\bar{w}_0} \bar{w}_0' - \frac{w_0 w_1 w_2}{\bar{w}_0^{2'}} + \frac{w_0 w_3}{\bar{w}_0} \bar{w}_0' - \frac{w_0 w_1^3}{2\bar{w}_0^2} \bar{w}_0' \bar{w}_0'' + w_3 \ln |w_0 \bar{w}_0| - \frac{w_1^3}{6w_0^2} + \frac{w_1 w_2}{w_0} + w_3$$

⋮

Benzer şekilde (3.2.17) ile verilen tekrarlama bağıntısı kullanılarak:

$$\begin{aligned}
w_0(x, t) &= f(x) \\
w_1(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ aw_{0xx}(x, t) - cw_0(x, t) + bA_0 \} \right] \\
w_2(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ aw_{1xx}(x, t) - cw_1(x, t) + bA_1 \} \right] \\
w_3(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ aw_{2xx}(x, t) - cw_2(x, t) + bA_2 \} \right] \\
&\vdots \\
w_n(x, t) &= -\mathbb{L}^{-1} \left[\frac{i}{s} \mathbb{L} \{ aw_{n-1xx}(x, t) - cw_{n-1}(x, t) + bA_{n-1} \} \right]
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

çözümüne ulaşılır. Bununla birlikte (4.1.21) için gerçek çözüm

$$w(x, t) = \left(\frac{b-d+c}{2b} - \frac{b}{2a}x^2 \right) e^{-idt} \tag{4.1.26}$$

olup, $2 \leq x \leq 3$ ve $N = 3$ için hata miktarları aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

t	a	b	c	maks-hata
0,1	1	1	1	0,002228650
0,2	1	1	1	0.008933000
0,3	1	1	1	0,020168184
0,4	1	1	1	0.036025895
0,5	1	1	1	0,056634023

Örnek 4.1.7. Örnek 4.1.5'te alınan problemin çözümleri Laplace-VIM metoduyla araştırılsın. (4.1.14) denklemi için daha önceki bölümlerde verilen klasik varyasyonel iterasyon metodu ile oluşturulan şema aşağıdaki gibidir.

$$w_{n+1}(x, t) = w_n(x, t) + \int_0^t \Lambda(x, \epsilon) \left(i \frac{\partial w_n(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} + a \frac{\partial^2 (\hat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x^2} + b \hat{w}_n \ln |w_n|^2 \right) d\epsilon \quad (4.1.28)$$

Burada $\Lambda(x, t - \epsilon)$ olup (4.1.28) denkleminin her tarafına Laplace dönüşümü uygulansın.

$$\mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] = \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L} \left[\int_0^t \Lambda(x, t - \epsilon) \left(i \frac{\partial w_n(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} + a \frac{\partial^2 (\hat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x^2} + b \hat{w}_n \ln |w_n|^2 \right) d\epsilon \right]$$

Konvülyasyon özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] &= \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L} \left[\Lambda(x, t) * \left(i \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 (\hat{w}_n(x, t))}{\partial x^2} + b \hat{w}_n \ln |w_n|^2 \right) \right] \\ &= \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] \mathbb{L} \left[i \frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 (\hat{w}_n(x, t))}{\partial x^2} + b \hat{w}_n \ln |w_n|^2 \right] \quad (4.1.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] \left[is \mathbb{L}[w_n(x, t)] + i w_n(x, 0) + a \mathbb{L} \frac{\partial^2 (\hat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x^2} + b \mathbb{L} \hat{w}_n \ln |w_n|^2 \right] \end{aligned}$$

$w_n(x, t)$ 'ye göre varyasyonel türev alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[\delta w_{n+1}(x, t)] &= \mathbb{L}[\delta w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] [is \mathbb{L}[\delta w_n(x, t)]] \\ &= \mathbb{L}[\delta w_n(x, t)] \{1 + is \mathbb{L}[\Lambda(x, t)]\} \end{aligned}$$

olur. O halde;

$$1 + is \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] = 0 \text{ ise } \mathbb{L}[\Lambda(x, t)] = \frac{-1}{is} = \frac{i}{s} \text{ ve buradan } \Lambda = \mathbb{L}^{-1}\left(\frac{i}{s}\right) = i \text{ elde edilir.}$$

Ulaşılan değ er (4.1.29) denkleminde yerine konulursa;

$$\mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] = \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[i]\mathbb{L}\left[i\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + a\frac{\partial^2(w_n(x, t))}{\partial x^2} + bw_n \ln|w_n|^2\right]$$

  z m Őemasına ulaşılır ve buradan;

$$u_0(x, t) = -\frac{x^2}{2}$$

$$u_1(x, t) := -\frac{i}{2}(2t + x^2(-i + t \ln(\frac{x^4}{4})))$$

 

olur.

 rnek 4.1.8.  rnek 4.1.6’da ele alınan problemin   z mleri Laplace-Vim metoduyla araştırılsın. (4.1.29) denklemini ele alınan problem i in yazılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] = \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\overline{\Lambda(x, t)}]\mathbb{L}\left[i\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} \right. \\ \left. + a\frac{\partial^2(\widehat{w}_n(x, t))}{\partial x^2} + b\widehat{w}_n \ln|w_n|^2 - cw_n(x, t)\right] \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

$$\begin{aligned} = \mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\overline{\Lambda(x, t)}]\left[is\mathbb{L}[w_n(x, t)] + iw_n(x, 0) \right. \\ \left. + a\mathbb{L}\frac{\partial^2(\widehat{w}_n(x, \epsilon))}{\partial x^2} + b\mathbb{L}\widehat{w}_n \ln|w_n|^2 - \mathbb{L}[cw_n]\right] \end{aligned}$$

olur. $w_n(x, t)$ ye g re varyasyonel t rev alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[\delta w_{n+1}(x, t)] = \mathbb{L}[\delta w_n(x, t)] + \mathbb{L}[\overline{\Lambda(x, t)}][is\mathbb{L}[\delta w_n(x, t)]] - m\mathbb{L}[\delta w_n(x, t)] \\ = \mathbb{L}[\delta w_n(x, t)]\{1 + (is - m)\mathbb{L}[\overline{\Lambda(x, t)}]\} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$1 + (is - m)\mathbb{L}[\overline{\Lambda(x, t)}] = 0, \mathbb{L}[\overline{\Lambda(x, t)}] = -1\frac{1}{is - m} \text{ ve buradan } \Lambda = ie^{-imt} \text{ olarak}$$

bulunur. (4.1.30)’de yerine konularak;

$$\mathbb{L}[w_{n+1}(x, t)] =$$

$$\mathbb{L}[w_n(x, t)] + \mathbb{L}[ie^{-imt}]\mathbb{L}\left[i\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} + a\frac{\partial^2(w_n(x, t))}{\partial x^2} + bw_n\ln|w_n|^2 - mw_n\right]$$

şeması yazılır. Bununla birlikte;

$$w_0(x, t) = \frac{b-d}{2b} - \frac{b}{2a}x^2$$

$$w_1(x, t) = -1 + \frac{\ln\left(\frac{(x^2-1)^2}{4}\right)(x^2-1)(e^{-it}-1)}{2} - \frac{e^{-it}(x^2-3)}{2}$$

$$\vdots$$

olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında, birçok bilim dalında yer bulmuş, fiziksel olayları modelleyen oluşum tipi kısmi diferansiyel denklemler bazı nümerik çözüm yöntemleri ele alınmış elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde anlatılan B-Spline kolokasyon metodu oldukça yakın sonuçlar verirken, lineer olmayan terimlerin lineerleştirilmesine ve bunun için çeşitli bağıntılara ihtiyaç duyduğu görülmüştür. Denklemlerde yer alan bazı tip lineer olmayan terimler için lineerleştirme yapılabilirken bazıları için yapılamıyor olması, metodun tatbik edilebileceği modelleri kısıtlar. Çeşitli başlangıç ve sınır koşulları altında ele alınan denklemlere B-spline kolokasyon metodunun çeşitli varyasyonları (üstel, kübik, kuintik, trigonometrik) uygulandığında metod bir aşamada " $AX=B$ " tipinde bir lineer denklem sisteminin çözümüne dayanmıştır. Çalışılan bölgenin daha küçük parçalara ayrılmasıyla daha yakın sonuçlar elde etmek amaçlanırken, bu durumun matrislerin boyutunu arttırarak büyük bir hesaplama yükü ortaya koyduğu anlaşılmıştır. Bu büyük ve seyrek sistemler için yüksek başarılı hesaplama sistemleri üzerinde çeşitli algoritmalarla hızlı ve yakın çözümler elde etmek amaçlanmıştır. Tezin dördüncü bölümünde bu sistemler anlatılmış ve Laplace denklemi için yapılan bir test problemi gösterilmiştir. Yine tezin üçüncü bölümünde Adomian Ayrışım, Laplace Adomian ayrışım, varyasyonel iterasyon, Laplace varyasyonel iterasyon metodu anlatılmış, Burgers, Gardner, lineer olmayan Schrödinger denklemleri üzerinde uygulamaları yapılmıştır. Gardner denkleminin literatürde yer alan üstel B-spline kolokasyon metoduyla elde edilmiş çözümleri, Laplace-VIM ve Laplace - Adomian yöntemleriyle elde edilen çözümlerle kıyaslanmıştır. Bu kıyas ile Laplace-Adomian ve Laplace-VIM metodlarının, üstel B-Spline kolokasyon metoduna göre daha kısa sürede, daha az maliyetle, daha az iterasyon ve hesaplama yüküyle yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Boston:Kluwer Academic Publishers.
- Amestoy, P.R., Duff,L.S., L'Excellent,J.Y., Koster, J. (2001). A Fully Asynchronous Multifrontal Solver Using Distributed Dynamic Scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1):15–41.doi:10.1137/S0895479899358194
- Amestoy, P.R., Duff,L.S., L'Excellent,J.Y. (2007). Multifrontal massively parallel solver users guide. *ERCIM News*, 1-27. Erişim adresi: <https://hal-lara.archives-ouvertes.fr/hal02102754>
- Anonim, (2012). ABOUT OPENMP. www.openmp.org,(Erişim tarihi:27.10.2021)
- Anonim, (2021). Sparse Matrix ne anlama geliyor?, <https://tr.icyscience.com/sparse-matrix>,(Erişim tarihi:27.10.2021)
- Blackford , L.S., Choi, J., Cleary, A., D'Azevedo, E., Demmel, J., Dhillon, I., Dongarra ,J., Hammarling, S., Henry , G., Petitet , A., Stanley, K., Walker, D. ve Whaley, R.C. (1997).ScaLAPACK Users' Guide, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 319 s.doi:/10.1137/1.9780898719642
- Boor, C., (1978). *A practical guide to splines*. USA: Springer.
- Crank, J. and Nicolson, P. (1947). A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43, 50-67. doi: /10.1017/S0305004100023197
- Cammarasana, S. (2017). *High Performance Computing for the Efficient Solution of PDEs on arbitrary domains* (Yüksek Lisans Tezi, Sapienza Universita Di Roma, Italy). Erişim adresi: <https://www.mat.uniroma1.it/>
- Çağlıyan, M. ve Çelebi, O. (2021). *Adi Diferansiyel Denklemler*. Bursa: Dora Yayıncılık.
- Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S. (2013). *Kısmi Diferansiyel Denklemler*. Bursa: Dora Yayıncılık.
- Çiftçi, S. (2015). *Lineer Cebir*. Bursa: Dora Yayıncılık
- Dağ, I. (1994). *Studies of B-spline finite elements*. (Yayımlanmamış doktora tezi.) University of Wales, U.K.
- Dongorra, J.J., Croz, D.J., Hammarling, S., Duff, I.S. (1990). A set of level 3 basic linear algebra subprograms. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 16: 1-17. doi:10.1145/77626.79170
- Dongorra, J.J., Otto, S.W., Snir, M., Walker, D. (1995). *An Introduction to the MPI Standard*. USA, TN: University of Tennessee, 107 Ayres Hall Knoxville.
- Ersoy Hepson,Ö., Korkmaz A., Dağ,I. (2020). Exponential B-spline collocation solutions to the Gardner equation. *Intenational Journal Of Computer Mathematics*,U.K,97(4):837-850.doi: 10.1080/00207160.2019.1594791
- He, J.H. (1999). Variational iteration method–a kind of non-linear analytical technique:some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics*., 34: 699-708.doi:10.1016/S0020-7462(98)00048-1

- Höllig, K., (2003). *Finite element methods with B-splines*. U.S.A: Society for Industrial & Applied Mathematics.
- Kaş, H.B. (2015). *Klein-Gordon Denkleminin Sonlu Farkla Metodu İle Çözümü* (Yüksek Lisans Tezi), YÖK Tez veritabanından erişildi (457735.)
- Khuri, S.A. (2001). A Laplace decomposition algorithm applied to a class of nonlinear differential equations. *J. of App. Math.*, 1 Article ID 373078 15p.
- Khuri, S.A., Sayfy, A. (2012). A Laplace variational iteration strategy for the solution of differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 147(1):131-136. doi:10.1016/j.aml.2012.06.020
- Mallikarjuna Rao, G., Rajesham, J. 2013. Weighted Local Active Pixel Pattern (WLAPP) for Face Recognition in Parallel Computation Environment. *International Journal of Science and Engineering*, 5(2):18-24. doi:10.12777/ijse.5.2.41-46
- Mittal, R.C., Arora, G. (2015). Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(10):2798-2808. doi: 10.1016/j.cnsns.2009.11.012
- Planitz, M. 1995. LAPACK users guide, by E. Anderson et al. Pp 235. \$19.50\$. 1992. ISBN 0-89871-294-7 *The Mathematical Gazette*, 79(484):210-210.
- Rubin, S.G., Graves, R.A. (1975). Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics. NASA TR R-436, Washington. Erişim adresi: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19750025272>
- Schenk, O., Gartner, K., Fichtner, W., Stricker, A.D. (2000). PARDISO: A high-performance serial and parallel sparse linear solver in semiconductor device simulation. *Future Generation Computer Systems* 18(1):69-78. doi:10.1016/S0167-739X(00)00076-5
- Snir, M., Otto, S., Huss-Lederman, S., Walker, D., Dongarra, J. (1998). *MPI: The Complete Reference*. London, U.K: The MIT Press.
- Uçar, Y. (2005). *1-Boyutlu Burgers Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri* Yüksek Lisans Tezi, YÖK Tez veritabanından erişildi (196889).
- Wazwaz, A-M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Heidelberg, Berlin: Springer
- Xiaoye, S. L. (2005). An overview of SuperLU: Algorithms, implementation, and user interface. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31(3):302-325. doi: /10.1145/1089014.1089017
- Yükselen, M.A. Lineer denklem takımlarının çözüm yöntemleri. HM504 Uygulamalı Sayısal Yöntemler, İTÜ, Ders Notları, İstanbul, 27s.
- Zadeh, A.K., Zeynal, H., Nor, K.M., Shaaban, M. (2011). Performance evaluation of SuperLU and PARADISO in power system load flow calculations. *Przeglad Elektrotechniczny*, 87(11):290-294. Erişim adresi: <http://pe.org.pl/articles/2011/11/62l.pdf>

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : NURSENA GÜNHAN
Doğum Yeri ve Tarihi : İSTANBUL 1996
Yabancı Dil : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu
Lise : DÜNDAR UÇAR LİSESİ
2010-2014
Lisans : BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
2015-2018
Yüksek Lisans : BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
2018-2022

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
2019-2021
İSTANBUL MEDENİYET ÜNİVERSİTESİ
2021-

İletişim (e-posta) : nursena.gunhan@medeniyet.edu.tr

Yayınları :

Dabrowski, A., Günhan, N., Soydan, G. 2020. On a class of Lebesgue-Ljunggren- Nagell type equations. *Journal of Number Theory*, 215: 149-159.