Uludağ Üniversitesi
İktisat ve İdari Bilimler Dergisi
Cilt VII, Sayı 2, Kasım 1986

EKONOMİDE MATEMATİK ENİYİLEME

İsmail İLHAN*

ÖZET

Matematik anlamda eniyileme probleminin önemi çok eski zamanlardan beri bilinmektedir. Buna karşın ekonomiye uygulanması ve bu alanda kazandığı önem yenidir. Bu önem ekonominin temel prensibi olan sınırlı kaynakların en iyi biçimde, en iyi yerde ve zamanda kullanılmasının sağlanmasındaki rolünden kaynaklanmaktadır. Bu çalışmada ekonominin verileri arasındaki ilişkiler matematiksel olarak ele alınmış, bir matematik eniyilemenin koşulları incelenmiş ve ekonomik yorumları verilmeye çalışılmıştır.

RESUME

On sait depuis longtemps que l'opptimisation d'une fonction en mathèmatique a une grande importance. Pourtant, les applications de l'opptimisation dans la vie èconomique sont assez rècentes. L'importance de ces applications augmentent de jour en jour. L'existence de celle-ci est dûe au rôle de l'utilisation des resources limitèes d'une meilleur façon, meilleur lieu et meilleur temps qui est le principe essentiel de l'èconomie. Dans cette ouvrage nous essaions d'ètudier les bases des relations qui existent autre les donnèes de l'èconomie et d'examiner les conditions d'opptimisation mathèmatique. Enfin nous visons à les intèerpreter.

Çeşitli etkenlere bağlı olarak gerçekleşen bir olayı tanımlayan bir fonksiyonun eniyilenmesi (optimizasyonu) konusundaki çalışmalar oldukça eskidir. Matematiğin önemli bir dalını oluşturan "Matematik eniyileme" "Matematik programlama" olarak da isimlendirilmektedir. Genelde, çok değişkenli bir fonksiyonun herhangi bir kısıtlamaya bağlı olmaksızın ya da, bir veya birden çok sayıda kısıtlamalara bağlı olarak eniyilenmesini sağlayacak çözüm vektörünün (kümesinin) belirlenmesi sorunudur. Bu sorunun araştırılması J. Bernoulli (1658-1701) ile başlamış, Euleur (1752-1833) ve Lagrange (1763-1813) tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra Jakobi (1804-1851), Hamilton (1805-1865) ve Weierstrass (1815-1897) gibi ünlü matematikçiler konuya önem ve ün kazandırmışlardır. Günümüzde, bilgisayarların sağladığı olanakların yardımı ile de pek çok alanda olduğu gibi ekonomi alanında da çok olumlu sonuçlar sağlayan bir açıklayıcı eleman olmuştur. Burada bu elemanın du-

---

* *Doç. Dr.; U.Ü. İktisadi İdari Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi.*

rağan (statik) bir durumun açıklanmasındaki rolü ele alınacaktır. Dinamik bir yapının incelenmesindeki açıklayıcı rolü ayrı bir incelemenin konusudur.

1. MATEMATİK ENİYİLEME

Matematik eniyileme, yapılması istenen tüm işlemlerin amacını belirleyen bir matematiksel fonksiyon (amaç fonksiyonu), amaca ulaşmada başvurulabilecek değişik seçenekler (kararlar) ve bu seçenekleri oluşturan bağımsız elemanlar (karar değişkenleri) dan oluşan bir süreçtir. Bu süreç iki aşamalıdır. Birinci aşama ilgilenilen olayın analizini içerir. Karar vericinin karar değişkenlerini belirlemesi, gözönüne alınan ekonomik sistemi açıklayan parametreler üzerinde bu değişkenlerin etkilerini belirlemesi gerekir.

İkinci aşama belirlenmiş modelin çözümü, sonuçların yorumlanması ve eniyi kararın oluşturulmasıdır. Bu ikinci aşama genelde teknik ve matematik aletlerin kullanılmasını gerektirir. 1970'li yıllara kadar mümkün kararların sayısı çok olduğu zaman problemin çözümü son derece güç olduğundan sürecin uygulanması hemen hemen imkansız oluyordu. Ancak bu gün bilgisayarların kullanımı ile bu güçlük önemli ölçüde aşılmış bulunmaktadır.

1.1. n Değişkenli Amaç Fonksiyonu ve Eniyilenmesi

Karar alıcının amaçları yönünde tüm olası davranışlarını ifade edebilecek ya da kapsayacak $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonunu en üst değerine (max.) ulaştıran $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ değişken değerlerinin belirlenmesi problemin çözümünü oluşturur.

Eğer mümkün kararların alanı sınırlı değilse $(x_1, x_2, ..., x_n)$ karar değişkenleri ne olursa olsun;

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \geqslant f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1)$$

olacaktır. Bu eşitsizliğin sağlanması iki temel koşulu gerektirir. Ardışık iki türeve sahip olduğunu varsaydığımız f(x) fonksiyonu için;

a. Birinci sıradan kısmi türevlerin tamamı sıfır olmalı,

$$\frac{df(x_1, x_2..)}{dx_i} = \left(\frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2}, ..., \frac{df}{dx_n}\right) = 0$$

b. İkinci sıradan kısmi türevlerin oluşturduğu matrisin det. değeri negatif olmalıdır.

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right| = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \ldots\ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} \ldots\ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} \ldots\ldots & f_{nn} \end{bmatrix} < 0$$

ya da kısaca

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i \,.\, \partial x_j} \right] < 0$$

olarak yazılır.

Birinci koşulun (a) ekonomik anlamını kolayca ifade edebiliriz; i'inci değişkenin (x_i) eniyilenmiş noktadaki ($\overline{x}_i$) değerinde sağlanacak bir marjinal değişmenin amaç fonksiyonu üzerindeki [f(x)] etkisi sıfır olmalıdır. Diğer bir deyişle x_i ile tanıtılan kararın eniyilenmiş noktada marjinal faydası sıfırdır.

1.2. n Değişkenli Amaç Fonksiyonu ve Sınırlı Eniyileme

a. Eşitlik Sınırlamalı Problem ve Lagrange Çarpanı

Bu ikinci durumda $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu

$$g_j (x_1, x_2, ..., x_n) = g_j \quad , \quad j = 1,2, ... \qquad (3)$$

eşitliklerini de sağlayan bir $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ çözüm kümesi tarafından eniyilenmiş olacaktır. Yani $(x_1, x_2, ..., x_n)$ karar değişkenleri kümesi ne olursa olsun

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \geqslant f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (4)$$

olmalıdır.

Gerek f(x) amaç fonksiyonu ve gerekse $g_j(x) - g_j = g(x) = 0$ fonksiyonları ilk iki sıradan türevli olmak üzere, (3) sınırlamalarını sağlayan $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ kararları için f(x) in bir göreceli eniyilenmiş değere (maksimuma) sahip olmasının 1. derece koşulu (gerek koşul);

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f (x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j . \frac{\partial g (x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} = 0$$

olmalıdır.

Burada $F(x) = f(x) - \lambda g(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda_j . g_j (x_1, x_2, ..., x_n)$ olarak tanımlanan fonksiyona "Lagrange fonksiyonu", p sayıdaki $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ parametrelerine de "Lagrange Çarpanları" adı verilir. Bu sonuncu eşitliklerden,

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i (\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_p) \qquad (6)$$

eniyilenmiş kararları belirlenir. Bu kararlar (6) eşitliğinden de anlaşıldığı üzere p sayıdaki,

$$g_j [\overline{x}_1 (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p), \overline{x}_2 (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p), ..., \overline{x}_n (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$$

denklemlerini sağlayan $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$ parametrelerinin bir fonksiyonudur.

$$\lambda_j = \frac{\partial F(\overline{x})}{\partial g_j} = \frac{\partial F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}{\partial g_j} \qquad (j = 1, 2, ..., p)$$

eşitliği ile belirlenebilecek olan λ_j parametrelerinin ilginç bir yorumu vardır. λ_j parametreleri, g_j sınırlamalarında son birimdeki marjinal bir değişmenin, eniyilenmiş noktada, amaç fonksiyon üzerindeki etkisini göstermektedir.

Çok değişkenli bir ve birden çok sayıda eşitlik sınırlamalarına sahip bir matematiksel eniyileme probleminin çözümü için en uygun yöntem bu "Lagrange Çarpanları" kullanma yöntemidir. Bütün sınırlı eniyileme problemlerinde kullanılabilmesi ve sınır sabitlerindeki marjinal değişmelerin amaç kararlar üzerindeki etkilerinin ölçülebilmesi yöntemin üstünlüğü olmaktadır.

P sayıda eşitlik sınırlamalarına bağlı f(x) fonksiyonunun, bir eniyilenmiş değere sahip bulunmasının ikinci derece koşulu olarak Lagrange fonksiyonunun birinci ve ikinci sıradan kısmi türevlerinin oluşturduğu Hessian Matrisinin kısmi minörlerinin determinant değerleri aşağıdaki işaretlere sahip olmalıdır.

$$|H_2| > 0, \quad |H_3| < 0, \ldots\ldots (-1)^n |H_n| > 0^{*}, \quad (n = 2k, \ k \in N) \tag{7}$$

b) Eşitsizlik Sınırlamalı Problem

Bir önceki problemde eşitlikler olarak gözönüne aldığımız $g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_j$ sınır koşullarının birer eşitsizlik olarak alınması zorunluluğu uygulamada daha yaygın olarak karşılaşılan bir durumdur. Zira problemin (amaç fonksiyonunun) eniyilenmesini etkileyen kaynak ve faktörlerin belli limitleri aşmama ya da onların altına düşmeme zorunlulukları her zaman vardır. Bu durumda problemin

$$h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant r_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{8}$$

koşuluna bağlı olarak,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

fonksiyonunu eniyileyen $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ çözüm vektörünü belirlemek olacaktır.

Böyle bir problemin bir çözüme sahip bulunup bulunmadığının belirlenmesi için Kuhn-Tucker teoremleri olarak bilinen teoremlerden yararlanılır**. Eşitlizlik kısıtlamalarından bazılarının $\geqslant 0$ biçiminde olması her zaman olasıdır. Çözüme geçmeden bunun düzeltilmesi gerekir, (eşitsizliğin iki yanı da -1 ile çarpılarak yönü değiştirilir). Daha sonra bu eşitsizlikler k adet aylak değişken kullanılarak eşitliklere dönüştürülür. Bu aşamada eşitsizlik sınırlamaları (8) durumundan,

$$S_k = r_k - h_k(x) = (s_1, s_2, \ldots, s_q) \tag{9}$$

eşitliklerine dönüşecektir. Bu durumda genel problem:

$$\max f(x), \quad h_k(x) + s_k = r_k \qquad x \geqslant 0, \quad s_k \geqslant 0 \tag{10}$$

---

*
$$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0 \text{ ve } \qquad H_n = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ g_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Burada $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ olmaktadır.

** Kuhn-Tucker teoremleri için bkz. İntriligatör Michael D.; Mathematical Optimization and Economic Theory-Prentice Hall Inc. Englewood C. N.J., 1971.

yani $h_k(x) + s_k = r_k$ sınır koşullarına bağlı olarak f(x) amaç fonksiyonunun eniyilenmesi olacaktır. Lagrange fonksiyonumuz

$$F(x) = f(x) + \mu \sum_{k=1}^{q} [r_k - h_k(x) - s_k] \qquad (11)$$

olmaktadır. F(x) in bir eniyilenmiş değere (maksimum'a) sahip olması için birinci derece koşulu

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{q} \mu \frac{\partial h_k(x)}{\partial x_i} = 0 \qquad (12)$$

İkinci derece, ya da yeter koşul ise bundan önceki durumda belirtildiği gibi Hessian matrisi minörlerinin determinant değerlerinin işareti ile ilgilidir. Burada, μ_k parametreleri Kuhn-Tucker çarpanları adını alır. $\mu_k \geqslant 0$ dır. Bu çarpanlar da ekonomik olarak Lagrange çarpanlarına benzer biçimde yorumlanır. Yani her biri eniyilenmiş noktada ait olduğu kısıt faktördeki marjinal bir değişikliğin amaç fonksiyon üzerindeki etkisinin ölçüsü olmaktadır.

KAYNAKLAR

Bouzitat, J.; Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Operationelle Cahier no: 12, Paris-1969.

Frisch, R., Nataf, A.; Maxima et Minima, Dunod-1960.

Helner, J.Y., Faure, R.; La Commande Optimale en Economie, Dunod-1972.

Intriligatör Michael D.; Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1971.

Savaş, V.; Matematiksel İktisada Giriş İİTİA., Ekonomi Fakültesi Yayınları.