Uludağ Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi
Cilt XII, Sayı 1-2, Mart-Kasım 1991

FONKSİYONEL BİÇİM SORUNU

Fahamet AKIN*

1. GİRİŞ

İktisadi değişkenler arasındaki ilişki, çoğu zaman doğrusal bir fonksiyon biçimi ile açıklanamayacak kadar karmaşıktır. Bu nedenle, doğrusal bir regresyon modeli her zaman değişkenler arasındaki ilişkiyi yeteri kadar açıklayamamaktadır.

İktisat teorisi, belirli bir değişken çifti arasındaki ilişkinin doğrusal olmayan bir biçimle temsil edilebileceğini öngörebilir. Örneğin, toplam maliyet ile üretim arasındaki ilişki incelendiğinde, belirli bir noktadan sonra üretim miktarının iki katına çıkmasının toplam maliyetin de iki katına çıkması ile sonuçlanmadığı görülür.

Güvenilir teorik göstergelerin bulunmaması halinde dağılım diyagramının incelenmesi, doğrusal bir ilişki uydurmaya çalışmanın uygun düşmeyeceğini gösterebilir. Böyle bir durumda doğrusal olmayan ilişkileri belli bir modele uydurmaya çalışmada iki yaklaşım vardır[1]. Birincisi, verilere doğrudan doğruya uygun doğrusal olmayan bir ilişki uydurmak, ikincisi de değişkenlerin tümünü veya bazılarını bir dönüşüme uğratarak doğrusallaştırılmış değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal bir biçime yaklaşımını sağlamaktır.

Doğrusal olmayan ilişkiler için birinci yaklaşım, daha önce bir dönüştürmeye gitmeden orijinal verilerin doğrudan doğruya doğrusal olmayan bir fonksiyon biçimine uydurulmasıdır. Ancak en basit doğrusal olmayan biçimlerde bile

---

* *Öğr. Gör. Dr.; H. Ü. İktisati ve İdari Bilimler Fakültesi.*

1 Johnston (1984, s. 61).

OEKK veya Maksimum Olabilirlilik gibi standart yöntemler çoğu kez son derece karmaşık, hatta çözümsüz eşitlikleri ortaya çıkarır. Örneğin,

$Y_i = \beta_0 \cdot \beta_1^{X_i} + u_i$ ilişkisine OEKK yöntemi uygulanarak,

$$\Sigma Y_i \cdot \beta_1^{X_i} = \beta_0 \cdot \Sigma \beta_1^{2X_i}$$

$$\beta_0 \cdot \Sigma Y_i \cdot X_i \beta_1^{X_i - 1} = \beta_0^2 \cdot \Sigma X_i \cdot \beta_1^{2X_i - 1}$$

şeklinde normal denklem elde edilir. Sözkonusu doğrusal olmayan regresyon modelinin parametreleri iterasyon işlemlerine dayalı çeşitli doğrusal olmayan yöntemlerle tahmin edilebilir[2].

Bu çalışmada, ikinci yaklaşım üzerinde durularak fonksiyonel biçim sorunları ele alınmaktadır.

2. FONKSİYONEL BİÇİMLER VE DEĞİŞKEN DÖNÜŞÜMÜ

Ekonometrik araştırmalarda, ekonometrisyen a priori bilgiler ve dağılım diyagramına göre elindeki orijinal verilere en uygun fonksiyonel bir biçim uydurma çabası içindedir. Doğrusal ve doğrusal olmayan fonksiyonel biçimler arasından en uygun seçimi yapmada dikkat edilecek nokta, gerek model kurmada gerekse yapılabilecek matematiksel hesaplarda kolaylık sağlayacak modeli seçmektir. Gerçek dünyada doğrusal olmayan ilişkiler olsa bile, bunun ne tür bir doğrusalsızlık olduğunun çoğu kez belirlenememesinden dolayı çok sayıda alternatifler içinden rasgele doğrusal olmayan bir biçim seçmek yerine doğrusal olmayan biçime doğrusal bir biçimle yaklaşma yoluna gidilmesi daha savunulur bir görüştür.

Bağımlı ve bağımsız değişkenler dönüştürülerek doğrusal olmayan ilişkiler doğrusal hale getirilebilir. Logaritmaları ve tersleri alınarak dönüşüme uğratılan çeşitli doğrusal olmayan ilişkilere birkaç örnek şöyle verilebilir[3];

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2$$

şeklinde gösterilebilen parabolik biçim, maliyet fonksiyonu ve tüketim fonksiyonu gibi bazı çalışmalarda kullanılmaktadır.

$$Y_i = \beta_0 \cdot \beta_1^{X_i} \qquad \text{ve} \qquad Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \log X_i$$

2 Akın (1988).
3 Ertek (1978, s. 107-12).

fonksiyonları yarı logaritmik biçim şeklindedir. X ve Y değişkenleri ile ilgili verilerden biri aritmetik seri, diğeri geometrik seri özelliğini taşıdığında yarı logaritmik biçimin kullanılması daha uygundur.

$Y_i = \beta_0 \cdot \beta_1^{X_i}$ fonksiyonunun logaritması alındığında,

$$\log Y_i = \log \beta_0 + X_i \log \beta_1$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$Y_i^* = \log Y_i, \quad \beta_0^* = \log \beta_0, \quad \beta_1^* = \log \beta_1$$

olarak alınırsa fonksiyon

$$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* \cdot X_i$$

şekline dönüşür.

Y_i nin milli geliri, X_i nin zamanı belirttiği bir çalışmada $\beta_1 = (1 + r)$ şeklinde yazıldığında, fonksiyon,

$$Y_i = \beta_0 (1 + r)^{X_i}$$

şeklini alır ve r değişkeni milli gelirdeki büyüme hızını verir.

Çift logaritmik biçim olarak $Y_i = \beta_0 \cdot X_i^{\beta_1}$ fonksiyonunun logaritması alındığında $\log Y_i = \log\beta_0 + \beta_1 \cdot \log X_i$ denklemi bulunur. X ve Y değişkenleri ile ilgili veriler geometrik seriler özelliğini taşıdığında çift logaritmik biçim kullanılmaktadır. β_1 parametresi Y nin X e göre elastikiyetini belirler. Ülkelerde milli gelirin büyümesinin devletin cari masraflarını nasıl etkilediği konusunda yapılan bir çapraz kesit çalışmasında, kişi başına düşen milli gelir ile kişi başına düşen cari devlet masrafları arasındaki ilişki, çift logaritmik biçimle bulunmaya çalışılırsa kişi başına milli gelir arttıkça kişi başına masraflar da artmakta, fakat devletin cari masraflarındaki artış hızı daha yüksek olmaktadır. Cobb-Douglas türü bir üretim fonksiyonu çift logaritmik biçime örnek verilebilir.

$$Y_i = (\beta_0 + \beta_1 X_i)^{-1} \quad ,$$

$$Y_i = \beta_1 \cdot (\beta_0 + X_i)^{-1} \quad ,$$

$$Y_i = (\beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2)^{-1}$$

şeklindeki fonksiyonların parametrelerini tahmin edebilmek için $Y_i^* = 1/Y$ şeklinde değişken dönüşümü yapmak gerekir. Böylece doğrusal veya parabolik bir biçim elde edilebilir.

3. FONKSİYONEL BİÇİM SORUNLARI VE ÖNERİLEN ÇÖZÜMLER

Doğrusal olmayan ilişkilerin doğrudan orijinal verilere doğrusal olmayan fonksiyonel biçimler uydurularak tahmin edilebilmesi çok karmaşık hesaplamaları içerir. Fakat polinomların veya sabit elastikiyetli ilişkilerin genel biçimleri, parametre tahminlerinden önce verilerde uygun dönüştürmeler yapılarak OEKK yöntemi ile kolaylıkla tahmin edilebilir.

Doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal bir biçime uydurmak için yapılan dönüştürmelerde bir takım sorunlarla karşılaşılmaktadır. Bu sorunlardan birincisi; yapılan dönüşümlerin doğrusal yöntemlerin bazı temel varsayımlarını ihlal edebilmesidir. Logaritmik dönüştürmelerle elde edilen doğrusal biçimlerin parametre tahminleri eğilimli sonuçlar verebilmektedir[4]. Örneğin,

$$Y_i = \beta_0 \cdot X_{1i}^{\beta_1} \cdot X_{2i}^{\beta_2} \cdot e^{u_i}$$

üretim modelinin parametrelerini tahmin etmek için logaritmik dönüştürme yapılarak model, aşağıdaki gibi doğrusal biçime sokulur.

$$\log Y_i = \log \beta_0 + \beta_1 \cdot \log X_{1i} + \beta_2 \cdot \log X_{2i}$$

burada,

$$Y_i^* = \log Y_i, \quad \beta_0^* = \log \beta_0, \quad X_{1i}^* = \log X_{1i}, \quad X_{2i}^* = \log X_{2i}$$

olsun.

$$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1 \cdot X_{1i}^* + \beta_2 \cdot X_{2i}^*$$

şeklindeki dönüştürülmüş doğrusal modelde β_1 ve β_2 tahminleri eğilimsizdir. $E(\beta_1) = \beta_1$, $E(\beta_2) = \beta_2$ dir. Öte yandan $E(\beta_0^*) = \beta_0^*$ şeklinde β_0^* eğilimsiz olmasına rağmen logaritmik dönüştürme β_0 kesmesinin eğilimli fakat tutarlı bir tahminini vermektedir.

$\beta_0^* = \log \beta_0$ olduğundan antilogu alındığında, $\beta_0 = e^{\beta_0^*}$ bulunup. β_0 için önerilen tahmin $\beta_0 = e^{\beta_0^*}$ şeklinde olacaktır. Ancak $E(\beta_0^*) = \beta_0^*$ olmasına rağmen, β_0, β_0 ın eğilimsiz bir tahmin edicisi değildir, yani $E(\beta_0) \neq e^{E(\beta_0^*)} = e^{\beta_0^*} = \beta_0$. Fakat $n \rightarrow \infty$ olurken eğilim ve varians sıfıra doğru gitmektedir, yani β_0 tutarlıdır.

Çoğu iktisadi uygulamalarda elastikiyete önem verilirken, dönüştürülmüş sabit kesme ciddi bir sorun olarak görülmez.

---

4 Kelejian ve Oates (1974, s. 97-8).

İkinci sorun; doğrusal olmayan regresyon modelinde varsayılan çarpımsal hata teriminin dönüşüme tabi tutulmuş doğrusal regresyon modelinde toplamsal hata terimi verebilmesidir. Dönüştürülmüş modelde toplamsal hata teriminin beklenen değeri sıfır sonucunu vermez[5]. Öte yandan varsayılan toplamsal hata terimli doğrusal olmayan regresyon modeli doğrusal modele dönüştürüldüğünde, uydurulan model doğrusal ana kütle regresyon fonksiyonunu temsil etmez.

Bir değişkenin koşullu beklenen değerinin diğer değişkenlerin değerleri ile doğrusal olmayan bir biçimde değiştiğini kuramsal ve/veya deneysel nedenlere dayanarak belirten U biçiminde maliyet fonksiyonu, Engel eğrisi, Cobb-Douglas üretim fonksiyonu gibi birçok konu vardır. Koşullu değişkenlerin dönüştürülme olanağı, doğrusal regresyona bir esneklik vermektedir.

İkinci sorunu açıklamak ve çözümler getirmek için,

$$Y = \beta_0 . X^{\beta_1} \tag{3.1}$$

şeklinde fonksiyon ele alınsın. Bu fonksiyon değişken dönüşümü ile doğrusal bir biçimde şöyle yazılabilir:

$$\log Y = \log\beta_0 + \beta_1 \log X \tag{3.2}$$

(3.1) nolu fonksiyonda $\beta_0 . X^{\beta_1}$, Y nin ana kütle regresyon fonksiyonu olarak varsayılırsa, (3.2) nolu fonksiyon da, $(\log\beta_0) + \beta_1\log X$, log Y nin ana kütle regresyon fonksiyonu olmayacaktır, yani $E(Y/X) = \beta_0 . X^{\beta_1}$ eşitliği, $E(\log Y/X) = (\log\beta_0) + \beta_1\log X$ denklemini ifade etmez[6]. Doğrusal olmayan fonksiyonlar için fonksiyonun beklenen değeri, beklenen değerin fonksiyonu değildir. Gerçekten de bir rassal değişkenin logaritmasının beklenen değeri, rassal değişkenin beklenen değerinin logaritmasından daha az olduğu (rassal değişken sıfır variansa sahip olmadıkça, 'daha az' duruma eşit olur), $E(\log Y/X) < \log E(Y/X)$ şeklinde gösterilebilir. Bu logaritmik fonksiyonun konkavlığının bir sonucudur. Beklenen değeri E(Y) olan ve daima pozitif değerler alan bir rassal değişken Y olsun, $Y^* = \log Y$ ile gösterilsin. $Y = E(Y)$ noktasında $Y^* = \log Y$ için teğet doğrusu alma yeni bir rassal değişkeni belirler;

$$Z = \log E(Y) + [1/E(Y)] . [Y - E(Y)]$$

Z, Y nin doğrusal bir fonksiyonu olduğu sürece,

$$E(Z) = \log E(Y) + [1/E(Y)] . [Y - E(Y)] = \log E(Y)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

---

5 Koutsoyiannis (1978, s. 134-37).

6 Goldberger (1968, s. 119-22).

Logaritmik fonksiyonun konkavlığı karşısında teğet doğrusu, teğet alınan nokta dışındaki her yerde logaritmik fonksiyonun üstünde kalır[7]. Bu yüzden Y^*, $Y = E(Y)$ olduğu nokta dışında Z den daima azdır;

$$Y^* \leq Z \text{ ise,} \quad E(Y^*) \leq E(Z) = \log E(Y) \quad \text{dir.}$$

Çift logaritmik fonksiyonlar için çarpımsal hata terimi spesifikasyonun toplamsal hata terimi spesifikasyonu üzerine bazı avantajları olduğu söylenebilir.

$$(3.3) \qquad Y = \beta_0 \,.\, X^{\beta_1} + u$$

şeklinde toplamsal hata terimli doğrusal olmayan regresyon modeli ele alınsın. Burada u, X den bağımsız olarak dağılmış sıfır ortalamalı bir hata terimidir. (3.3) nolu ifadenin koşullu beklenen değeri,

$$E(Y/X) = \beta_0 X^{\beta_1} + E(u/X) = \beta_0 X^{\beta_1} \text{ dir.}$$

$\beta_0 X^{\beta_1}$, Y nin ana kütle regresyon fonksiyonudur. (3.3) nolu ifadenin logaritması alınırsa, $Y^* = \log Y = \log(\beta_0 X^{\beta_1} + u)$ olur ve bu ifade, Y^* ın doğrusal ana kütle regresyon fonksiyonunu vermez. Çünkü,

$$\log(\beta_0 X^{\beta_1} + u) \neq (\log\beta_0) + \beta_1 \log X + \log(u).$$

Alternatif olarak hata teriminin modele çarpımsal olarak girdiği başka bir spesifikasyon ele alınsın,

$$(3.4) \qquad Y = \beta_0 \,.\, X^{\beta_1} \,.\, \varepsilon$$

burada ε, X den bağımsız olarak dağılmış, ortalaması 1 olan çarpımsal hata terimidir. (3.4) nolu ifadenin koşullu beklenen değeri,

$$E(Y/X) = \beta_0 X^{\beta_1} \,.\, E(\varepsilon/X) = \beta_0 X^{\beta_1} \,.\, E(\varepsilon) = \beta_0 \,.\, X^{\beta_1}$$

olur. $\beta_0 X^{\beta_1}$, Y nin ana kütle regresyon fonksiyonudur. (3.4) nolu ifadenin logaritması alınırsa, $Y^* = \log Y = (\log\beta_0) + \beta_1 \log X + (\log \varepsilon)$ elde edilir. Burada $\log \varepsilon$, ε gibi X den ve logX den bağımsızdır. Ancak $\log \varepsilon$ nin beklenen değeri sıfır değildir. ε hata terimi, log-normal dağıldığında, $E(\log \varepsilon) = -1/\text{Var}(\log \varepsilon)$ olduğu gösterilebilir[8]. Konkavlık konusu, $E(\log \varepsilon) < \log E(\varepsilon) = \log 1 = 0$ sonucunu verir.

---

7 Draper ve Smith (1966, s. 295-98).
8 Goldberger (1968).

$\log Y = (\log\beta_0) + \beta_1 . \log X + (\log \varepsilon)$ modeli, doğrusal regresyon için uygun değildir. Doğrusal regresyon için uygun bir biçim şöyle yazılabilir[9];

$$Y^* = \log Y = (\log\beta_0) + \beta_1\log X + [(\log \varepsilon) - E(\log \varepsilon)].$$

Burada,

$$\alpha = (\log \beta_0) + E(\log \varepsilon), \quad X^* = \log X, \quad \varepsilon^* = [(\log \varepsilon) - E(\log \varepsilon)]$$

olursa,

$$Y^* = \alpha + \beta_1 X^* + \varepsilon^*$$

şeklinde yeni doğrusal regresyon elde edilir. $E(\varepsilon^*) = E[(\log \varepsilon) - E(\log \varepsilon)] = 0$ olduğu sürece ε^*, sıfır beklenen değere sahip, X^* den bağımsız ($\log\varepsilon$, X^* dan bağımsız olduğu sürece) bir hata terimi olur. Böylece Y^* için doğrusal ana kütle regresyon fonksiyonu elde edilir, yani

$$E(Y^*/X^*) = \alpha + \beta_1 X^*$$

Üçüncü sorun, çarpımsal hata terimi spesifikasyonu ile ilgilidir. Çarpımsal hata terimi spesifikasyonunda sadece Y nin koşullu beklenen değerinin değil, ayrıca koşullu variansının da X ile değiştiği görülmektedir. Bunu açıklamak için,

$$Y = \beta_0 . X^{\beta_1} . \varepsilon \qquad \text{ifadesinden} \qquad E(Y/X) = \beta_0 . X^{\beta_1}$$

ifadesi çıkarılsın. Bu çıkarım işlemi sonucu,

$$Y - E(Y/X) = \beta_0 . X^{\beta_1} (\varepsilon - 1) = E(Y/X) . (\varepsilon - 1)$$

elde edilir. Daha sonra bu ifadenin karesi alınarak X üzerine koşullu beklenen değeri,

$$E\{[Y - E(Y/X)]^2/X\} = E^2(Y/X) . E[(\varepsilon - 1)^2/X] = E^2(Y/X) . \sigma 2$$

elde edilir. σ^2, ε nin variansıdır. ε nin X den bağımsız olduğu varsayıldığı sürece σ^2, tüm X ler için aynıdır. Bu duruma göre, Y nin koşullu variansı Y nin koşullu beklenen değerinin karesi ile orantılı olan X ile değişecektir. Y nin koşullu dağılımları karşısında bu heteroskadastisiti, çarpımsal hata terimi spesifikasyonunun rassal bir etkisiyle oluşabilir.

Görüldüğü gibi, ana kütle regresyon fonksiyonu için uygun olan çift logaritmik biçimle ilgili deneysel çalışmalarda araştırmacı, koşullu variansın sistema-

9. Goldberger (1968, s. 120).

tik bir değişimi ile karşılaşır. Örneğin, yüksek gelir gruplarının bir mal üzerine harcamalarındaki değişimi, düşük gelir gruplarına oranla daha geniştir.

Y^* = logY nin koşullu variansının tüm X ler için aynı olduğu varsayıldığından,

$$E\{[Y^* - E(Y^*/X^*)]^2/X^*\} = E(\varepsilon^{*2}/X^*) = E(\varepsilon^{*2})$$

yazılabilir. Kısaca, dönüştürülmüş doğrusal ana kütle regresyon fonksiyonunun $(E(Y^*/X^*))$, tahmin edilen parametreleri, orijinal doğrusal olmayan ana kütle regresyon fonksiyonunun $(E(Y/X))$, parametrelerini temsil edeceği söylenebilir.

İktisat teorisi veya dağılım diyagramı değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olmayan bir ilişki olduğunu ileri sürdüğünde hangi fonksiyonel biçimin kullanılması gerektiği sorunu ortaya çıkar. Bu durumda sorun, tahmin tekniği ile ilgili değildir. Araştırmacı, alternatif doğrusal olmayan biçimler arasından hangisinin en uygun olduğunu bilmek istemektedir. Bir değişkenin alternatif tanımları olduğunda, ampirik olarak onun uygun tanımı, regresyonların kalıntılarının kareleri toplamı incelenerek elde edilebilir. Tahmin edilen parametre ve değişken sayısı, aynı olduğu sürece kalıntıların kareleri toplamı, farklı denklemlerde karşılaştırılabilir.

Sıklıkla karşılaşılan dördüncü sorun; doğrusal regresyon ve lorgaritmik doğrusal regresyon arasında seçim yapmadır[10]. Aşağıdaki gibi iki alternatif fonksiyonel biçim varsayılsın,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_{1t}$$

$$\log Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} + u_{2t}$$

Bu durumda araştırmacı, iki denkleme de bağımlı değişkenlerin farklı olmasından dolayı, kalıntıların kareleri toplamının minimum kuralını kullanarak iki alternatif fonksiyonel biçim arasından seçim yapamaz. Ölçekleme faktörü ile sorunun kaynağına inilebilir. Y nin variansı, Y nin ölçüm birimleri ile değişir, fakat log Y nin variansı değişmez. Çünkü log c . Y = logc + logY dir, ilave bir sabit variansı değiştirmez. Ölçüm birimlerinin uygun bir seçimi ile bir denklemin kalıntılarının kareleri toplamı diğer denkleminkinden daha küçük olabilmesinden dolayı, kalıntıların kareleri toplamının doğrudan bir karşılaştırması anlamsızdır.

Y nin variansının ölçüm birimleri ile değişmediği bir şekilde Y değişkenini standardize ederek bu iki denklem genel bir duruma getirilebilir. Y^* ve log Y^* değişkenlerinin aynı duruma getirildiği bir Jakobian dönüşümü yapılırsa kalıntıların kareleri toplamı doğrudan doğruya karşılaştırılabilir[11].

10 Rao ve Miller (1971).

11 Box ve Cox (1964).

Kalıntıların kareleri toplamının karşılaştırmasına izin veren bir Y dönüşümü aşağıdaki gibi açıklanabilir;

$$Y_t^* = c.\, Y_t, \quad \text{burada} \quad c = (\text{antilog}\, \Sigma \log Y_t/N)^{-1} \text{ dir.}$$

c sabiti, Y nin geometrik ortalamasının tersidir. Geometrik ortalaması ile Y yi standardize ederek ve standartlaştırılmış değeri Y^* ile tanımlayarak iki denklem Y^* cinsinden tekrar aşağıdaki gibi şöyle yazılabilir,

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* . X_{1t} + \beta_2^* . X_{2t} + u_{1t}^*$$

$$\log Y_t^* = \alpha_0^* + \alpha_1^* . X_{1t} + \alpha_2^* . X_{2t} + u_{2t}^*$$

Böylece yeniden belirlenen iki denklemin kalıntılarının kareleri toplamı doğrudan doğruya karşılaştırılabilir olduğundan uygun fonksiyonel biçim olarak kalıntıların karelerinin toplamının minimumunu veren fonksiyonel biçim seçilir.

Araştırmacı, bu iki fonksiyonel biçimin kalıntılarının kareleri toplamı arasındaki farkın anlamlı olup olmadığını görmek için parametrik olmayan bir test kullanabilir. Bu test,

$$d = \frac{N}{2} . \log \frac{\Sigma e_{1t}^{*2}}{\Sigma e_{2t}^{*2}}$$

Burada, Σe_{1t}^{*2} ve Σe_{2t}^{*2}, tahmin edilen denklemlerdeki kalıntıların kareleri toplamıdır. d istatistiği, bir serbestlik dereceli bir χ^2 dağılımı izler. Hesaplanan d değeri, seçilen kritik değeri aşarsa, iki denklemin ampirik olarak eşit olduğu boş hipotez red edilir.

Doğrusal ve logaritmik doğrusal biçimler arasında seçim konusunda birçok testler vardır. Hesaplama yönünden en kolay testler, Box-Cox testi, BM testi ve PE testidir[12]. Bu üç testin dışında doğrusal ve logaritmik doğrusal modeller için Lagrange çarpanı testleri, W testi, Andrews testi gibi başka testler de vardır[13].

4. UYGULAMA

Üçüncü bölümdeki açıklamalara dayanarak iki alternatif fonksiyonel biçim arasından en uygununu seçme konusunda bir araştırma yapmak amacıyla

12 Maddala (1988, s. 177-80).

13 Godfrey ve Wickens (1981, s. 487-96).

1970-1987 yılları arasında 1968 fiyatlarıyla Kamu İmalat Sanayii verileri ele alınmıştır. Sözkonusu veriler Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo: 1
Kamu İmalat Sanayii Verileri (1968 Fiyatları İle)

Yıllar	Q	K	L
1970	13160.70	6696.400	185444.0
1971	15170.90	8299.400	198264.0
1972	12258.60	10901.20	212371.0
1973	12795.80	12961.70	217456.0
1974	15398.70	15077.10	228891.0
1975	14321.60	19233.20	247666.0
1976	12895.20	23097.90	255599.0
1977	15792.90	27556.40	282030.0
1978	14140.90	30412.30	282357.0
1979	12164.80	34559.70	294013.0
1980	15364.40	39008.40	287189.0
1981	20246.00	42742.90	271474.0
1982	20822.30	45448.50	265859.0
1983	20800.50	47179.30	278903.0
1984	17748.60	47453.80	279164.0
1985	19954.70	49177.80	276019.0
1986	27949.10	50594.10	270594.0
1987	22919.00	51398.70	267821.0

Kaynak: Tablodaki veriler, DİE, Yıllık İmalat Sanayii İstatistikleri (çeşitli yıllar) ile TÜSİAD op. Ciltten yararlanılarak hazırlanmıştır.

Q (Üretim) bağımlı değişken, K (Sabit Sermaye Stoğu) ve L (İşgücü) bağımsız değişken olmak üzere, Kamu İmalat Sanayii verilerine çeşitli fonksiyonel biçimler uydurulmaya çalışılmıştır. İstatistiki olarak anlamlı sonuç veren denklemler şöyledir;

$$Q = \beta_0 + \beta_1 K + u$$

$$Q/K = \beta_0 + \beta_1 . L/K + u$$

$$\log Q = \log \alpha_0 + \alpha_1 . \log K + u$$

$$\log(Q/K) = \log \alpha_0 + \alpha_1 . \log (L/K) + u.$$

Anlamlı sonuç veren denklemler arasından,

(4.1) $$Q/K = \beta_0 + \beta_1 . L/K + u_1$$

şeklinde doğrusal regresyon,

$$\text{(4.2)} \qquad \log (Q/K) = \log \alpha_0 + \alpha_1 \,.\, \log (L/K) + u_2$$

şeklinde çift-logaritmik doğrusal regresyon alınmıştır. (4.2) nolu denklem,

$$Q = \alpha_0 \,.\, L^{\alpha_1} \,.\, K^{\alpha_2} \,.\, e^u$$

ifadesinin dönüştürülmüş doğrusal şeklidir. Hata terimi modele çarpımsal olarak girmiştir.

$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ sınırlayıcı koşulu ile $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ eşitliği çarpımsal hata terimli üretim fonksiyonunda yerine konulursa, $Q/K = \alpha_0 \,.\, (L/K)^{\alpha_1}$ denklemi elde edilir. Bu denklem doğrusal hale dönüştürüldüğünde (4.2) nolu çift-logaritmik doğrusal denkleme ulaşılır.

(4.1) ve (4.2) nolu denklemlerin en küçük kareler tahminlerinin sonuçları Micro-TSP programından elde edilmiştir.

Program çıktılarından elde edilen bulgular şöyledir;

(4.1)	Q/K	$= -0.038 + 0.068\,(L/K)$		$R^2 = 0.924$
	s. e.	(0.064)	(0.005)	$\Sigma\, e_1{}^2 = 0.303891$
	t	(– 0.592)	(13.923)	

ve

(4.2)	$\log(Q/K)$	$= -2.492 + 0.892 \,.\, \log(L/K)$		$R^2 = 0.837$
	s. e.	(0.229)	(0.098)	$\Sigma\, e_2{}^2 = 0.784604$
	t	(–10.864)	(9.066)	

olarak tahmin edilmiştir.

(4.1) ve (4.2) nolu denklemde bağımlı değişkenlerin farklı olmasından dolayı, kalıntıların kareleri toplamının minimum kuralını kullanarak iki alternatif fonksiyonel biçim arasından seçim yapılamaz. Q bağımlı değişken standartlaştırılarak bu iki denklem genel bir duruma getirilebilir.

Q dönüşümü şöyle yapılmıştır; $(Q/K)^* = c.\,(Q/K)$ olduğundan

c sabiti, $\quad c = [\text{antilog}\,(\Sigma \log\,(Q/K)/N)]^{-1} = [\text{antilog}\,(-0.466941)]^{-1}$

$c \cong 1.6$ bulunur.

$(Q/K)^*$ cinsinden doğrusal ve çift logaritmik doğrusal regresyon denklemleri tekrar şöyle yazılabilir;

(4.5) $\quad (Q/K)^* = \beta_0^* + \beta_1^* (L/K) + u_1^*$

(4.4) $\quad \log(Q/K)^* = (\log \alpha_0)^* + \alpha_1^* . \log(L/K) + u_2^*$

(4.3) ve (4.4) nolu denklemde bağımlı değişken (Q/K), c sabit değeri 1.6 ile çarpılarak elde edilen yeni standartlaştırılmış iki denklem tekrar bilgisayar yardımı ile tahmin edilebilir.

(4.3)	$(Q/K)^*$	$= -0.061 +$	$0.109(L/K)$	$R^2 = 0.924$
	s. e.	(0.103)	(0.008)	$\Sigma e_1^{*2} = 0.777960$
	t	(–0.592)	(13.923)	

ve

(4.4)	$\log((Q/K)^* =$	$-2.022 +$	$0.892 . \log(L/K)$	$R^2 = 0.837$
	s. e.	(–8.815)	(9.066)	$\Sigma e_2^{*2} = 0.784603$

olarak tahmin edilmiştir.

(4.4) nolu çift logaritmik doğrusal regresyon modelinin R^2 si, (4.3) nolu doğrusal regresyon modelininkinden biraz düşüktür. Standartlaştırılmış her iki denklemin kalıntılarının karelerinin toplamı arasında da çok az fark vardır. Σe_2^{*2} ler, Σe_1^{*2} lerden biraz yüksektir. Eğer R^2 ler ve Σe^{*2} ler arasında çok büyük farklılıklar olsaydı, ilk bakışta yüksek R^2 ve düşük Σe^{*2} yi veren modelin uygun model olduğu söylenebilirdi.

Bu iki modelin ampirik olarak eşit olup olmadıklarını test etmek için d istatistiği hesaplanmıştır.

$$d = \frac{18}{2} . \log \frac{0.777960}{0.784603} \cong 0.0774 \quad \text{bulunmuştur.}$$

$\chi^2_{(1;0.90)} = 2.706$ ile d istatistiği karşılaştırıldığında $d < \chi^2$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. İki modelin eşit olduğuna karar verilir. Dikkat edilirse, log Q ve log Q^* değişkenlerinin variansları aynıdır. Ayrıca (4.2) ve (4.4) nolu denklemde kalıntıların kareleri toplamı da eşittir.

İktisat teorisinin a priori bilgilerine dayanarak üretim fonksiyonunun tüm parametre tahminlerinin pozitif olması beklenmektedir. Bu çalışmada (4.3) ve

(4.4) nolu modelin bağımsız değişkenini parametre tahmini beklentilere uygun çıkmıştır. d istatistiğine bakarak iki modelin eşit olduğuna karar verilmiştir. Burada hangi modelin dikkate alınacağı konusunda ekonometrisyen karar vermelidir. Uygulamada amaç, Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun bağımsız değişkene göre bağımlı değişkenin elastikiyetini (α_1), bulmak ise çift-logaritmik doğrusal model ele alınmalıdır. Çift-logaritmik doğrusal modelin önemli bir özelliği, α_1 eğim katsayısının bağımsız değişkene göre bağımlı değişkenin elastikiyetini ölçmesidir. Doğrusal regresyon modelinde, β_1 eğim katsayısıdır. Doğrusal regresyon modelinde elastikiyet, bağımsız ve bağımlı değişken değerlerinin ortalaması ile hesaplanabilir. Bu nedenle çift-logaritmik doğrusal regresyon modeli tercih edilir.

5. SONUÇ

Ekonometrik araştırmalarda, doğrusal ve doğrusal olmayan fonksiyonel biçimler arasından en uygun seçimi yapmada, doğrusal olmayan ilişkileri doğrusal bir biçime uydurmak için yapılan dönüştürmelerde bir takım sorunlarla karşılaşılmaktadır. Bu sorunlardan birincisi, yapılan dönüşümlerin doğrusal yöntemlerin bazı temel varsayımlarını ihlal edebilmesidir. Logaritmik dönüştürmelerle elde edilen doğrusal biçimlerin parametre tahminleri eğimli sonuçlar verebilmektedir. İkinci sorun, doğrusal olmayan regresyon modelinde varsayılan çarpımsal hata teriminin dönüştürülmüş doğrusal regresyon modelinde toplamsal hata terimi verebilmesidir. Dönüştürülmüş modelde toplamsal hata teriminin beklenen değeri sıfır sonucunu vermez. Aynı zamanda varsayılan toplamsal hata terimli doğrusal olmayan regresyon modeli doğrusal modele dönüştürüldüğünde, uydurulan model doğrusal ana kütle regresyon fonksiyonunu temsil etmez. Üçüncü sorun, çarpımsal hata terimi spesifikasyonunda sadece Y nin koşullu beklenen değerinin değil, ayrıca koşullu variansının da X ile değişmesidir. Karşılaşılan heteroskadastisiti sorunu, çarpımsal hata teriminin spesifikasyonunun rassal bir etkisiyle oluşabilmektedir. Dördüncü sorun, doğrusal regresyon ve logaritmik doğrusal regresyon arasında seçim yapmadır. Burada bir Y dönüşümü ile iki fonksiyonel biçim karşılaştırılabilir hale getirilmektedir.

Doğrusal ve logaritmik doğrusal biçimler arasında seçim konusunda birçok testler vardır. Box-Cox testi, BM testi, PE testi, LM (Lagrange Multiplier) testi, W testi, Andrews testi gibi testler örnek olarak verilebilir.

Doğrusal regresyon modeli ile çarpımsal hata terimli doğrusal olmayan regresyon modeli arasında seçim yapmak, Y dönüşümü uygulamak amacıyla 1970-1987 yılları Kamu İmalat Sanayii verileri kullanılarak bir uygulama yapılmıştır.

Uygulama sonucunda hesaplanan d istatistiği χ^2 tablo değerinden küçük çıkmış ve doğrusal regresyon ile çift-logaritmik doğrusal regresyon modelinin eşit olduğu hipotezi kabul edilmiştir. Gerçekten de iki modelin R^2 si ve kalıntıların kareleri toplamı arasında çok az bir fark olduğu görülmüştür. Çift-logaritmik doğrusal regresyon modelinin tahmini α_1 parametresinin elastikiyeti vermesinden dolayı tercih edilebilir bir model olması gerektiği söylenebilir.

KAYNAKLAR

Akın, Fahamet; "Doğrusal Olmayan Modellerde Çözüm Yöntemleri ve Uygulamaları", Basılmamış Doktora Tezi, İstanbul, 1988.

Box, G.E., Cox, D.R.; "An Analysis of Transformations", Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 1964.

Draper, N.R., Smith, H.; "Applied Regression Analysis", Willey, New York, 1966.

Ertek, Tümay; "Ekonometriye Giriş", O.D.T.Ü. İ.İ.F., Yay. No: 22, Kalite Matbaası, Ankara, 1978.

Johnston, J.; "Econometric Methods", Third Edition, International Student Edition, McGraw-Hill Book Comp., Singapore, 1984.

Godfrey, L.G., Wickens, M.R.; "Testing Linear and Log Linear Regressions for Functional Form", Review of Economic Studies, XLVIII, 1981.

Goldberger, S.A.; "Topics in Regression Analysisi", The McMillian Comp., New York, 1968.

Goldberger, S.A.; "On the Interpretation and Estimation of Cobb-Douglas Functions", Econometrica, Vol. 36, July-October, 1968.

Kelejian, H., Qates, W.; "Introduction to Econometrics", Harper-Row Publishers Inc., London, 1974.

Koutsoyiannis, A.; "Theory of Econometrics", Harper-Row Publishers Inc., U.K., 1978.

Maddala, G.S.; "Introduction to Econometrics", McMillian Publishing Comp., U.S.A., 1988.

Rao, P., Miller, R.L.R.; "Applied Econometrics", Wadsworth Publishing Comp., California, U.S.A., 1971.