Uludağ Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi
Cilt XIV, Sayı 1-2, Mart-Kasım 1993

FISHER TAM OLASILIK TESTİ

Mustafa AYTAÇ*

1. GİRİŞ

İstatistik bilim dalı gelişmesini iki büyük alanda yoğunlaştırmıştır. Bunlar betimleyici istatistik ve istatistiksel kanıtlamadır.

İstatistiğin daha iyi anlaşılması ve gelişmesi için itici rol oynayan dal betimleyici istatistiktir. Betimleyici istatistik, geniş şekilde niceliksel bilgi toplayıp bu bilgilerden belirli sayılar çıkarma işlemidir.

Modern istatistiğin üzerinde durduğu ve çalışmalarını yoğunlaştırdığı alan ise istatistiksel kanıtlamadır. İstatistiksel kanıtlama genel olarak iki temel bölüme ayrılabilir. Bunlar, ana kütle parametrelerinin tahmini ve istatistik hipotez testleridir.

İstatistiksel araştırmalarda çoğu kez örneklemlerden giderek ana kütlenin bazı özellikleri tahmin edilmeye çalışılır. En çok ilgilenilen değerler ise ana kütlenin ortalaması, oranı, varyansı, vb. gibi parametrelerdir. Bunların tahmininde de nokta tahmini ve/veya aralık tahmini kullanılır.

İstatistik hipotez testlerinin kullanım alanları, özellikle I. Dünya Savaşından sonra çok büyük gelişmeler göstermiştir. İstatistik hipotez testleri puanların alındığı ana kütlelerin yapısı üzerinde varsayımlar ileri süren tekniklerdir. Ana kütle değerleri parametreler olduğu için bu tür istatistik testleri parametrik istatistik testleri olarak adlandırılır. Bir başka deyişle parametrik istatistik testleri koşullanmalara bağlı sonuçlar doğurur ve değerlendirilmeleri sırasında da aşağıdaki cümleye sık sık rastlanır: Eğer ana kütlelerin, şekliyle ilgili varsayımlar geçerli ise, ... sonucuna varabiliriz.

---

* *Prof. Dr.; Uludağ Üniv. İktisadi ve İdari Bilimler Fak. Öğretim Üyesi*

İstatistiksel testin sonuçlandırılmasında ulaşılan karar, ileri sürülen hipotezin saklı tutulmasına, değiştirilmesine veya reddine yol açabilir[1].

Parametrik istatistik hipotez testleri kullanışlarını belirleyen çok güçlü varsayımlara sahiptir ki, bu varsayımların geçerliliği çoğu uygulamalarda tartışma konusu olur[2].

Fazla ve kuvvetli varsayımları bağlılığı azaltmak ve daha genel bir takım sonuçlara ulaşmak için, özellikle II. Dünya Savaşı'ndan sonra çok gelişen kanıtlama yöntemleri ortaya sürülmüştür ki, bunlar parametrik olmayan istatistik tekniklerdir.

Parametrik olmayan istatistik testlerinden biri olan Fisher tam olasılık testi, 2x2'lik kontenjans tablolarının bağımsızlığının araştırılmasında kullanılan ki-kare bağımsızlık testinin bazı özel durumlar için bir seçeneğidir.

2. 2x2'lik KONTENJANS TABLOLARI

Bir araştırıcı, iki işlemin birbirinden farklı olup olmadığını veya bir işlemin diğerinden daha iyi olup olmadığını belirlemeyi arzu ettiği zaman, iki örneklemli istatistik testlerini kullanır. İşlem çok çeşitli koşullardan herhangi biri olabilir. Sözgelimi kültüre uyum, iklim değişikliği, tıbbi müdahale, propaganda, ekonomiye yeni bir model ilave edilmesi vb. gibi. Her durumda işleme tabi tutulan grup, işleme tabi tutulmayan grupla veya değişik bir işleme tabi tutulan grupla kıyaslanır.

Herhangi bir araştırmayı yaparken bağlantılı iki örneklem kullanmanın yararları çok fazladır. Fakat, bunu sağlamak her zaman olanaklı olmayabilir. Bu gibi durumlarda araştırmacı, bağımsız iki örneklem kullanmayı tercih eder. Bağımsız olarak incelemek için örneklem ya örneklemlerin her biri farklı iki ana kütleden rassal olarak alınır ya da kökenleri gelişigüzel olan örneklem birimlerine iki işlemin rassal verilişinden ortaya çıkabilirler. Bu yaklaşımlardan hangisi tercih edilirse edilsin, örneklem hacimlerinin birbirine eşit olması gerekmez.

Bağımsız bir örneklemin analizinde kullanılan parametrik t-testi veya normallik testidir[3]. Fakat, bu testler daha önce de belirtildiği gibi çok güçlü varsayımlarla donatılmıştır. Herhangi bir araştırmada yukarıda adı geçen

---

1 Yoğurtçugil, M.K., 1976, 9.

2 Aytaç, Mustafa, 1991, 122-148.

3 Serper, Özer; 1993, 65-105.

testlerin çok güçlü olan varsayımlarının yerine getirilememesi ve/veya başka nedenlerden dolayı uygulanmayabilir.

Normallik veya t-testinin uygulanamadığı durumlarda kullanılan parametrik olmayan istatistik yöntemlerden birisi de ki-kare testidir.

Ki-kare bağımsızlık testinde satır ve sütun sayılarının her ikisi de ikiye eşitse (r=c=2), bu şekilde oluşturulmuş çift yönlü tablolara 2x2'lik kontenjans tabloları denir. Ki-kare bağımsızlık testinde serbestlik derecesi = (r-1) (c-1) şeklinden hesaplandığından 2x2'lik kontenjans tablolarının serbestlik derecesi bire eşittir.

Genel olarak büyük harfler gözlenen değerleri ve küçük harfler de beklenen frekansların değerlerini ifade etmek üzere 2x2'lik kontenjans tablosu aşağıdaki gibi gösterilir.

Tablo: 2.1

2x2'lik Olağanlık Tablosunun Düzenlenişi

Birinci Niteliğin Sınıflandırılması	İkinci Niteliğin Sınıflandırılması		TOPLAM
	1	2	
1	A_{11} (a_{11})	A_{12} (a_{12})	A_{10}
2	A_{21} (a_{21})	A_{22} (a_{22})	A_{20}
TOPLAM	A_{01} (a_{01})	A_{02} (a_{02})	n

2x2'lik kontenjans tablosundan yararlanmak üzere, test istatistik değeri aşağıdaki formüllerden birisinden yararlanılarak hesaplanır ve ki-kare tablo değeri, kritik değer ile karşılaştırılarak bir sonuca ulaşılır.

$$X^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{(|A_{ij} - a_{ij}| - 0.5)^2}{a_{ij}} \qquad (2.1)$$

$$X^2 = \frac{n\,(|A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}| - 0.5n)^2}{(A_{11}+A_{22})\,(A_{12}+A_{22})\,(A_{11}+A_{12})\,(A_{21}+A_{22})} \qquad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) formülleri ile bulunan değer, Ki-kare tablosundan α-anlamlılık düzeyinde ve bir serbestlik derecesi ile bulunan değer ile karşılaştırılır[4]. Hesaplanan değer tablo değerinden büyük çıkarsa H_0 bağımsızlık hipotezi reddedilir.

Ki-kare testi uygulandığı zaman, bu testin güvenli bir sonuca ulaşabilmesi için beklenen frekansların büyük çıkması gerekir. Başka bir ifade ile ki-kare bağımsızlık testi, beklenen frekansların büyük olması esasına göre düzenlenmiştir. Özellikle beklenen frekansların değerlerinin 10'dan küçük olmamasına dikkat edilmelidir[5]. Bazı istatistikçiler bunun 5 veya daha küçük olmaması durumunu da yeterli bulmaktadırlar.

3. FISHER TAM OLASILIK TESTİ

Fisher tam olasılık testi, ki-kare yaklaşımını hiç kullanmaz. Bunun yerine gözlenen frekansların tam olasılık dağılımını kullanır. İki değişkenin bağımsız olduğu ve tablo 2.1'deki marjinal toplamların da belli ve sabit olduğu varsayılarak, belli bir frekans kümesinin ortaya çıkışının tam olasılığı hipergeometrik dağılım ile aşağıdaki gibi bulunabilir[6].

---

4 (2.1) ve (2.2) formülleri Yates düzeltmesi kullanılarak elde edilen formüllerdir. 2x2 olağanlık tablolarında bu düzeltme dikkate alınarak ki-kare değerleri hesaplanmalıdır. Bu konuda bakınız.
- Conover, W.J., 1974, 374-376.
- Mantel, N., 1974, 378-380.
- Yates, F., 1934, 217-235.

5 Yoğurtçugil, Kemal; 1978, 95.

6 Aynı ana kütleden aynı yöntem kullanılarak aynı örneklem hacminde örneklemler alındığında, marjinal toplamların sabit kalması sözkonusu olamaz. İstatistikçiler ve araştırmacılar, bu yönüyle Fisher tam olasılık testini kuşku ile karşılamışlardır. Bunun çözümünü ise Tocher bulmuştur. Tocher, Fisher tam olasılık testi üzerinde yapılacak küçük bir değişikliğin 2x2'lik kontenjans tablosundaki veriler için en kuvvetli bir yanlı test olacağını ispatlamıştır. Topsever, Yurdal; 1977, 112-114.

$$P = \frac{\binom{A_{01}}{A_{11}}\binom{A_{02}}{A_{12}}}{\binom{n}{A_{10}}} \tag{4.1}$$

$$= \frac{(A_{10})!\,(A_{20})!\,(A_{01})!\,(A_{02})!}{(A_{11})!\,(A_{12})!\,(A_{21})!\,(A_{22})!\,(n)!}$$

Fisher tam olasılık testinin hareket noktası şudur: H_0 hipotezi altında böyle bir ortaya çıkışın veya daha aşırı olarak ortaya çıkmanın olasılığı nedir? Bir başka ifade ile, hücredeki gözlenen frekans değerlerinden biri sıfırdan farklı ise, marjinal toplamlar, sabit kalmak koşulu ile hücredeki o değerle oynayarak sıfıra eşitlemek (bu bir veya birkaç adım atılarak yapılabilir) ve her bir durumdaki ortaya çıkış olasılığını (4.1) formülü ile bulmaktır. Sonuç olarak daha aşırı uçta ortaya çıkması olası sapmalar ile 2x2'lik tablosundaki ortaya çıkış olasılıklarını toplayarak sonuca ulaşmaktır[7].

Elde edilen olasılıkların toplamı, seçilen α-anlamlılık düzeyi ile karşılaştırılır. Eğer bulunan bu olasılık, α'dan büyükse değişkenler arasındaki herhangi bir ilişkinin varlığı sözkonusu değildir. Yani değişkenler bağımsızdır. Eğer bulunan bu olasılık, α'dan küçükse bağımsızlık hipotezi reddedilmelidir. Bunun anlamı ise değişkenler arasında anlamlı bir ilişkinin olduğudur.

Toplam olasılığın bulunmasında gözlenen dağılım ile daha aşırı uçtaki sapmaların dağılımının bulunması - daha önce de değinildiği gibi - formül (4.1) ile hesaplanmaktadır. Fakat bu uzun ve zahmetlidir. En uygun yöntem Rinley tarafından hazırlanan ve Latscha tarafından geliştirilen Biometrika tablolarıdır[8]. Bu tablolar örneklem hacmi elliye eşit veya elliden küçük olması durumunda kullanılabilir ($n \leq 50$).

---

7 Everitt, B.S., 1977, 15-19.

8 Latscha, Biometrika, 1955, 74-86.

Olasılıkların hesaplanması gerekli ise, (4.1) formülünden daha kısa bir yöntem Feldman ve Klinger tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır[9].

$$P_{i-1} = \frac{(A_{11})_i \, (A_{22})_i}{(A_{12})_{i-1} \, (A_{21})_{i-1}} \cdot P_i \qquad (4.2)$$

(4.2) formülünde P_i gözlenen 2x2'lik kontenjans tablosundaki frekansların (4.1) formülü ile bulmuş olduğumuz olasılıktır. i indisi 2x2'lik kontenjans tablosundaki en küçük olasılığı gösterir. Benzer olarak P_{i-1}, P_{i-2}, P_{i-3},... durumları bağımsızlıktan bir tane ayrılmanın daha fazla önerildiği (daha aşırı uçta ortaya çıkışı) tabloları elde etmek için yapılan düzenlemelerin frekanslarıdır.

Yeterli büyüklükteki örneklem hacimleri için Fisher tam olasılık testine normal yaklaşımı da kullanılabilir. Bu durumda,

$$\hat{p} = \frac{\left(\dfrac{A_{11}}{A_{21}}\right)}{\left(\dfrac{A_{10}}{A_{20}}\right)}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$Z = \frac{\left(\dfrac{A_{11}}{A_{10}}\right) - \left(\dfrac{A_{21}}{A_{20}}\right)}{\sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{A_{10}} + \dfrac{1}{A_{20}}\right)}}$$

formülü ile bu dönüşüm uygulanabilir.

A_{11}, A_{21}, A_{12} ve A_{22} nin beşe eşit veya büyük olması durumunda normal yaklaşımın başarılı olduğu söylenebilir[10].

---

9 Feldman, S.E. and Klinger, E., 1963, 289-291.

10 Wayne, W. Daniel, 1978, 114.

4. BİR UYGULAMA

Bir fabrikanın sahip olduğu iki makineyi (A ve B) iki vardiya çalıştırdığını varsayalım. Makinelerin sık sık arızalanması nedeniyle servis şefi, bu arızaların her vardiyada aynı şekilde ortaya çıkıp çıkmadığını öğrenmek istiyor. Belirli bir süre içerisinde makinelerde belirlenen arıza sayıları aşağıdaki tablodaki gibi belirlenmiştir. Parantez içindeki ifadeler beklenen frekansları göstermektedir. $\alpha=0.05$ anlamlılık seviyesine göre vardiyalar arasında makinelerin arızalanması bakımından önemli bir fark olup olmadığını araştıralım.

Vardiya	Makine		TOPLAM
	A	B	
1	2 (4)	6 (4)	8
2	18 (16)	14 (16)	32
TOPLAM	20	20	40

Yukarıda verilen tablodaki ortaya çıkışın olasılığı (4.1) formülüne göre hesaplandığında,

$$P_1 = \frac{8!\ 32!\ 20!\ 20!}{2!\ 6!\ 18!\ 14!\ 40!} = 0.0957$$

değeri bulunur.

İki tane beklenen değerin değeri 4'e eşit ve A_{11}'in değeri de 2 olduğundan daha aşırı uçtaki sapmaların değerini A_{11} üzerinde oynayarak - ve doğal olarak marjinal toplamlar sabit kalmak koşulu ile - aşağıdaki iki tablo yardımı ile hesaplayabiliriz. Hazırlanan tablolar ve bulunan değerler şöyledir.

Vardiya	Makine		TOPLAM
	A	B	
1	1	7	8
2	19	13	32
TOPLAM	20	20	40

$$P_2 = \frac{8!\ 32!\ 20!\ 20!}{1!\ 7!\ 19!\ 13!\ 40!} = 0.0201$$

Vardiya	Makine		TOPLAM
	A	B	
1	0	8	8
2	20	12	32
TOPLAM	20	20	40

$$P_3 = \frac{8!\ 32!\ 20!\ 20!}{0!\ 8!\ 20!\ 12!\ 40!} = 0.0016$$

Aşırı uçtaki sapmaları hesaplanması P_3 ile son bulmaktadır. Çünkü, hücrelerden birisi (A_{11}=0) sıfır değerine indirgenmiştir.

Gözlenen frekans değerleri olasılığı P_1 ile daha aşırı uçta ortaya çıkan sapma olasılıklarının (P_2 ve P_3) toplamı,

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 \\ &= 0{,}0957 + 0{,}0201 + 0{,}0016 \\ &= 0{,}1174 \end{aligned}$$

dır[11]. Bulunan bu olasılık α=0.05'den büyük olduğu için H_0 hipotezini kabul ederiz. Başka bir ifade ile makinelerin arızalanması vardiyalardan bağımsızdır[12].

---

11 P_2 ve P_3 olasılıkları P_1 kullanılarak (4.2) formülüne göre de elde edilebilir.

$$P_2 = \frac{(2)\,(4)}{(7)\,(19)} \cdot (0{,}0957) = 0{,}0201$$

$$P_3 = \frac{(1)\,(13)}{(20)\,(8)} \cdot (0{,}0201) = 0{,}0016$$

12 Eğer sonuca (2.2) formülü ile ulaşmak istersek de, yine, aynı sonuca ulaştığımızı görmekteyiz. Bu durumda Ki-kare hesaplanmış değeri 1.41'i; ki-kare tablo değeri de (s.d=1 ve α=0.05) 3.841 değeri ile karşılaştırmak gerekir. Tablo değeri gözlenen değerlerden gidilerek

6. SONUÇ

Bilindiği gibi bir istatistiksel testin gücü H_0 hipotezi yanlış olduğu zaman onu reddetme olasılığına eşittir. Araştırmacı, herhangi bir testi uyguladığında onun gücünün mümkün olduğunca yüksek olmasını arzular. Fisher tam olasılık testinin gücü konusunda değişik araştırmalar yapılmıştır. Tocher'in değişikliği ele alınarak uygulanan Risher tam olasılık testinin, bir yanlı testler içinde en kuvvetli test olduğu gösterilmiştir.

Yapılan bir araştırmada ki-kare bağımsızlık testi ile Fisher tam olasılık testinden hangisinin tercih edileceği sorusu sorulabilir. Bu gibi durumlarda karar vermek için aşağıdaki dört durumun iyi bir şekilde değerlendirilmesi gerekir.

a) Eğer örneklem hacmi kırktan büyükse ($n > 40$), daha önce verilen (2.1) ve (2.2) formüllerinden birisi ele alınarak ki-kare bağımsızlık testi kullanılmalıdır.

b) Eğer örneklem hacmi en az 20 veya en çok 40 ($20 \leq n \leq 40$) ve aynı zamande en küçük beklenen frekans değeri beşten küçük ise bu durumda Fisher tam olasılık testi kullanılır.

c) Eğer örneklem hacmi yirmiden küçükse ($n < 20$), bütün durumlar için Fisher tam olasılık testi kullanılır.

d) Ki-kare testi iki yanlı bir test olmasına rağmen, Fisher tam olasılık testi aynı zamanda tek yanlı bir test olarak da düzenlenebilmektedir. Bu nedenden dolayı tek yanlı hipotezler kurulduğunda Fisher tam olasılık testi kullanılmalıdır.

H_0 hipotezi altında dağılımından daha aşırı uçtaki sapmaların ortaya çıkabileceğini düşünmek ve aşırı uçtaki bu olası sapmaları hesaba katarak olasılıkları hesaplamak ve daha sonra bunların toplamlarını almak oldukça fazla işlem gerektirdiğinden dolayı, Fisher tam olasılık testi için bilgisayar programları da yapılmıştır[13].

---

hesaplanan 1.41 değerinden büyük olduğu için H_0 hipotezi (Bağımsızlık) kabul edilir. Fakat, bu şekilde hesaplama yöntemi ile sonuca ulaşıldığında, beklenen değerlerden iki tanesinin değeri beşten küçük olduğu için testin sonucunun şüpheli olduğu söylenir.

13 Robertson, W.H., Technometrics, 1960, 103-107.

KAYNAKLAR

Aytaç, Mustafa; Uygulamalı Parametrik Olmayan İstatistik Testleri, Uludağ Üniversitesi, Bursa, 1991.

Conover, W.J. (1974); Some Reasons For Not Using The Yates Continuity Correction on 2x2 Contingency Tables J. Amer. Statist. Assoc., 1969, 374-376.

Daniel, W.W.; Applied Nonparametric Statistics, Houghton Mifflin Co., Boston, 1978.

Everitt, B.S.; The Analysis of Contingency Tables. Chapman and Hall, London, 1977.

Feldman, S.E. and Klinger, E. (1963); Short-Cut Calculation of the Fisher Yates "exact testX, Psychometrika, 28, 289-291.

Latscha, R.; Tests of Significance in a 2x2 Contingency Table: Extension of Finney's Table, Biometrika, 40 (1955).

Mantel, N. (1974); Comment and Suggestion on The Yates Continuity Correction. J. Amer. Statist. Assoc., 69, 378-380.

Robertson, W.H.; Programming Risher's Exact Method of Comparing Two Percentages, Technometrics, 2 (1960).

Serper, Özer; Uygulamalı İstatistik, 2. Filiz Kitabevi, İstanbul, 1993.

Siegel, S. (Çev. Yurdal Topsever); Nonparametric Statistics for Behavioral Sciences, Mc Graw Hill, New York, 1956.

Yates, F. (1934); Contingency Tables Involving Smaal Numbers and the Chi-Square Test. J. Roy. Statist. Soc. Suppl. 1, 217-235.

Yoğurtçugil, Kemal; Ki-Kare Üzerine Bir Deneme, İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi, İstanbul, 1978.

————; Örnekleme, İstanbul Üniversitesi İktisat Fak., İstanbul, 1976.