

OMEGA İNVARYANTI

Sadık DELEN



T. C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OMEGA İNVARYANTI

Sadık DELEN

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

(Danışman)

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2019

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Sadık DELEN tarafından hazırlanan “Omega İnvaryantı” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

- | | |
|--|------|
| Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Prof. Dr. İlker KÜÇÜK
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM

Enstitü Müdürü

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/02/2019

İmza

Sadık DELEN

ÖZET

Doktora Tezi

OMEGA İNVARYANTI

Sadık DELEN

Bursa Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu çalışmada, verilen çizilebilir bir derece dizisinin mümkün olan çizimlerinin graf teorik, topolojik ve kombinatorik özellikleri hakkında bilgi veren ve adına omega invaryantı denilen bir graf invaryantı tanımlanmış ve çeşitli uygulamaları ve özellikleri incelenmiştir. Topolojide 250 yılı aşkın bir süredir bilinen ve yüzeylerle ilgili çok sayıda uygulamalara sahip olan Euler karakteristiği ile ve grafın devir sayısı ile de ilgili olan bu invaryantın bir çok özelliğın çalışılmasında faydalı olduğu gözlenmiştir.

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde graflarla ilgili temel kavramlar hatırlatılmış ve tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca sık kullanılan graf türleri ve temel özellikleri hatırlatılmıştır. İkinci bölümde omega invaryantının tanımına temel oluşturan derece dizisi kavramı hatırlatılacaktır. Ayrıca bazı graf sınıflarının derece dizileri ifade edilecektir.

Üçüncü bölümde omega invaryantı tanımlanacaktır. Bu tanım için nelerden esinlendiği açıklanarak temel bazı özellikleri incelenmiştir. Bazı özel graf sınıfları için omega invaryantının aldığı değerler formüleleştirilmiş ve tüm omega değerlerinin bir çok açıdan üç farklı kümeye ayrılabilirdiği gösterilmiştir. Ayrıca omega invaryantı ile Euler karakteristiği arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Dördüncü bölümde derece dizilerinin çok sayıda olası çizimi arasında özel bir yere sahip olan temel çizimler; beşinci bölümde bir graftan kenar ve köşe silmenin omega invaryantına etkisi ele alınmıştır. Altıncı ve son bölümde graflarla ilgili bazı uç problemler ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, Omega invaryant, graf invaryant, derece dizisi, Euler karakteristiği

2019, xi + 117 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

OMEGA INVARIANT

Sadik DELEN

Bursa Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL

In this thesis, omega invariant which gives information about the graph theoretical, topological and combinatorial properties of all realizations of a given degree sequence is defined and several applications and properties of it are studied. It is observed that this invariant which is related to the Euler characteristics known in topology for more than 250 years and has many applications related to surfaces and also to the cyclomatic number of graphs, is useful in the study of many properties.

This thesis consists of 6 chapters. The first chapter is the introductory chapter and the fundamental notions are recalled here together with the results which will be needed in later chapters. Also some frequently used graph classes and their fundamental properties are given. In the second chapter, the notion of degree sequence which forms the basis of the definition of the omega invariant is studied. Also the degree sequences of some graph classes will be given.

In the third chapter, omega invariant will be defined. The motivation for defining it and some main properties will be given. It will be calculated for some graph classes and it is shown that the values of omega invariant can be grouped into three sets which appears to be very useful. Also the relation between omega invariant and Euler characteristic is established.

In the fourth chapter, the fundamental realizations which have an important place amongst all realizations of a given degree sequence; in the fifth chapter, the effect of edge and vertex deletion from a graph on omega are studied. In the sixth and last chapter, some extremal problems are studied.

Key words: Graph, Omega invariant, graph invariant, degree sequence, Euler characteristic

2019, xi + 117 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım da emeği geen bütn ğretmenlerime bu vesileyle teŖekkr ederim. Doktora ğrenimim de emeği geen, baŖta Prof. Dr. İsmail Naci CANGL hocam olmak zere matematik blmndeki birbirinden değerli btn hocalarıma teŖekkr ederim. Sonrasında da bu yoğun alıŖma temposunda sabrını ve hoŖgrsn esirgemeyen değerli aileme teŖekkr bir bor bilirim.

Sadık DELEN

01/02/2019

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel kavramlar.....	2
1.2. Graf türleri.....	14
2. DERECE DİZİLERİ.....	19
2.1. Bazı graf türlerinin derece dizileri.....	19
2.2. Mertebeye göre derece dizileri.....	20
3. OMEGA İNVARYANTI.....	24
3.1. Giriş.....	24
3.2. Omega invaryantının temel özellikleri.....	26
3.3. Omega invaryantının Euler karakteristiği ile ilgisi.....	35
4. DERECE DİZİLERİNİN TEMEL ÇİZİMLERİ.....	40
4.1. Giriş.....	40
4.2. $\Omega \geq 0$ durumu.....	41
4.3. $\Omega = -2$ durumu.....	69
4.4. $\Omega \leq -4$ durumu.....	71
5. KENAR VE KÖŞE SİLMENİN OMEGA DEĞERİ ÜZERİNDEKİ ETKİSİ.....	78
5.1. Giriş.....	78
5.2. Kenar silmenin omega değerine etkisi.....	80
5.3. Köşe silmenin omega değerine etkisi.....	85
6. UÇ PROBLEMLER.....	95
6.1. Giriş.....	95
6.2. Maksimum döngü sayısı.....	98
6.3. $\Omega \geq 0$ durumu.....	99
6.4. $\Omega = -2$ durumu.....	106

6.5. $\Omega \leq -4$ durumu	106
7. SONUÇ	109
KAYNAKLAR	110
ÖZGEÇMİŞ	112

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
G	graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$d_v, d(v)$	v köşesinin derecesi
Δ_G, Δ	G grafının maksimum köşe derecesi
δ_G	G grafının minimum köşe derecesi
\bar{G}	G grafının tümleyeni
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir graf
P_n	n köşeli yol graf
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
$K_{t,s}$	iki parçalı tam graf
$T_{t,s}$	larva graf
$c(G)$ veya c	G grafının bileşen sayısı
d_u ya da $d_G(u)$	G grafında u köşesinin derecesi
Δ_G	G grafının maksimum derecesi
δ_G	G grafının minimum derecesi
D	derece dizisi
$\Delta(G, v_1, v_2, \dots, v_k)$	v_1, v_2, \dots, v_k köşelerini silmenin omegaya etkisi
$\Delta(G, e_1, e_2, \dots, e_t)$	e_1, e_2, \dots, e_t kenarlarını silmenin omegaya etkisi
a_i	derece dizisinde d_i derecesinin katlılığı
$\Omega(G)$	G grafının omega değeri
$\Omega(D)$	D derece dizisinin omega değeri

c_a	devire sahip olmayan bileşen sayısı
c_c	devire sahip bileşen sayısı
C_i	devir bulunduran bileşenler
A_i	devir bulundurmeyan bileşenler
$br(G)$	köprü
$cv(G)$	kopma noktası
$\chi(S)$	Euler karakteristiği
r	bölge sayısı
ℓ	döngü sayısı
ch	kiriş sayısı
m_e	katlılık sayısı
η	silinen ortak kenar sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Bir G grafi	3
Şekil 1.2. Basit ve basit olmayan graflar.....	5
Şekil 1.3. $\{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisinin iki farklı çizimi	8
Şekil 1.4. G grafi ve \bar{G} tümleyeni	9
Şekil 1.5. G ve $G - v$	10
Şekil 1.6. G ve $G - e$	11
Şekil 1.7. G ve $G + v$	11
Şekil 1.8. G , $G + \{uw\}$ ve $G + \{uv\}$	12
Şekil 1.9. İki basit ve bağlantılı grafi birleştirme.....	13
Şekil 1.10. N_3 boş grafi	14
Şekil 1.11. P_4 yol grafi	14
Şekil 1.12. C_5 devir grafi.....	15
Şekil 1.13. S_7 yıldız grafi	15
Şekil 1.14. K_6 tam grafi.....	16
Şekil 1.15. $K_{2,4}$ iki parçalı tam grafi	16
Şekil 1.16. $T_{4,2}$ tadpole grafi	17
Şekil 1.17. $T_{1,3}$ ağaç grafi.....	18
Şekil 2.1. N_1 boş grafi	20
Şekil 2.2. N_1 ve K_2	20
Şekil 2.3. 3 köşeli graflar ve derece dizileri.....	20
Şekil 2.4. 4 köşeli graflar ve derece dizileri.....	21
Şekil 2.5. 5 köşeli graflar ve derece dizileri.....	23
Şekil 3.1. $\{1^{(2)}\}$ derece dizisine sahip P_2 yol grafi	35
Şekil 3.2. Tırtıl graf.....	35
Şekil 3.3. Bölge sayısı kolay belirlenemeyen bir graf	37
Şekil 3.4. Bölge sayısı kolayca belirlenebilen bir graf.....	37
Şekil 3.5. $\{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(3)}, 4^{(4)}, 5^{(2)}\}$ derece dizisinin bağlantılı bir çizimi.....	38
Şekil 4.1. $\{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisine ait iki farklı çizim.....	40
Şekil 4.2. $\{2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}\}$ 'in herhangi bir çizimi ve bir temel çizimi.....	42
Şekil 4.3. İki temel çizim	47
Şekil 4.4. $\{2^{(3)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisinin bir diğer çizimi	47
Şekil 4.5. C_6	48
Şekil 4.6. $\{2^{(2)}, 3^{(4)}\}$	48
Şekil 4.7. $\{2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(2)}\}$	48
Şekil 4.8. C_6	49
Şekil 4.9. $\{2^{(2)}, 3^{(4)}\}$	49
Şekil 4.10. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(5)}\}$	49
Şekil 4.11. $\{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi.....	50
Şekil 4.12. $\{2^{(3)}\}$	50
Şekil 4.13. $\{2^{(1)}, 3^{(2)}\}$	50
Şekil 4.14. $\{3^{(2)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi.....	51
Şekil 4.15. $\{2^{(3)}\}$	51

Şekil 4.16. $\{2^{(1)}, 3^{(2)}\}$	51
Şekil 4.17. $\{1^{(1)}, 3^{(3)}\}$	52
Şekil 4.18. $\{1^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi.....	52
Şekil 4.19. $2^{(1)}$	53
Şekil 4.20. $\{1^{(1)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi.....	53
Şekil 4.21. $\{2^{(2)}\}$	53
Şekil 4.22. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi.....	54
Şekil 4.23. Algoritmada belirtilen $\{2^{(8)}\}$ 'e karşı gelen bağlantılı graf	54
Şekil 4.24. $\{2^{(2)}, 3^{(6)}\}$	54
Şekil 4.25. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(7)}\}$	55
Şekil 4.26. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi.....	55
Şekil 4.27. $\{2^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi	55
Şekil 4.28. $\{2^{(8)}\}$ sekizgeni	58
Şekil 4.29. $\{1^{(11)}, 2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(2)}\}$	59
Şekil 4.30. $G_{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}-1)} = \{1^{(11)}, 2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(2)}\}$	59
Şekil 4.31. 6-genli çizim	60
Şekil 4.32. 5-genli çizim	60
Şekil 4.33. 4-genli çizim	61
Şekil 4.34. 3-genli çizim	61
Şekil 4.35. 2-genli çizim	61
Şekil 4.36. 1-genli çizim	62
Şekil 4.37. D derece dizisinin bir temel çizimi	65
Şekil 4.38. Basit graf olamayan $\{1^{(4)}, 6^{(1)}\}$ derece dizisinin bir çizimi	67
Şekil 4.39. Basit graf olamayan $\{1^{(8)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}, 9^{(2)}\}$ 'nin bir çizimi	67
Şekil 4.40. $\{1^{(2)}, 2^{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta})}\}$ derece dizisinin yol grafi	70
Şekil 4.41. Bir tırtıl graf.....	70
Şekil 4.42. $\{1^{(9)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}\}$ 'nin herhangi bir çizimi ve bir temel çizimi	71
Şekil 4.43. $D = \{1^{(6)}\}$ bağlantısız grafi	72
Şekil 4.44. D derece dizisinin bir karma temel çizimi	72
Şekil 4.45. D derece dizisinin 2 –gen ana devirli bir çizimi	73
Şekil 4.46. D derece dizisinin 1 –gen ana devirli bir çizimi	73
Şekil 4.47. D derece dizisinin devir içermeyen ana bileşenli bir çizimi.....	74
Şekil 4.48. D derece dizisine ait K_2 bileşeni olmayan bir herhangi bir çizim	74
Şekil 4.49. D derece dizisinin bir çizimi	75
Şekil 4.50. Karma bir temel çizim formu (ana bileşeni maksimum döngülü)	76
Şekil 4.51. Karma bir temel çizim (ana bileşeni maksimum sallanan kenarlı)	77
Şekil 5.1. İzole köşe bulunduran bazı graflar.....	80
Şekil 5.2. Graftan bir kenar silme	81
Şekil 5.3. Graftan bir döngü silme	82
Şekil 5.4. Bağlantılı bir graf.....	82
Şekil 5.5. Verilen derece dizisine sahip graftan bir kenar silme.....	83
Şekil 5.6. Verilen derece dizisine sahip graftan iki kenar silme	83
Şekil 5.7. Graftan iki tane döngü silmek.....	84
Şekil 5.8. G grafına bir ağaç eklemek	85
Şekil 5.9. Aynı köşede ℓ tane döngüye sahip bir G grafi.....	86

Şekil 5.10. v köşesi silinmiş G grafi	87
Şekil 5.11. Bir graftan döngüye sahip bir köşe silmek	87
Şekil 5.12. v köşesi ve komşuları	88
Şekil 5.13. Bir graftan bir köşe silmek.....	89
Şekil 5.14. $\{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}, 5^{(1)}, 7^{(2)}\}$ derece dizisinin bir G çizimi	91
Şekil 5.15. Bir graftan bir köşe silmek.....	91
Şekil 5.16. Bir graftan bir köşe silmek.....	92
Şekil 5.17. Bir graftan iki komşu köşe silmek	93
Şekil 5.18. Bir graftan komşu olmayan iki köşe silmek	93
Şekil 6.1. $\{1^{(8)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}, 9^{(2)}\}$ derece dizisine sahip 5 graf.....	96
Şekil 6.2. Bazı $B_{r,s}$ grafları	96
Şekil 6.3. Bazı L_q grafları	97
Şekil 6.4. D 'nin temel formdaki bir çizimi	98
Şekil 6.5. Verilen derece dizisinin maksimum bileşenli bir çizimi.....	98
Şekil 6.6. $\{1^{(4)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisinin maksimum döngülü bir temel çizimi	102
Şekil 6.7. $\{1^{(4)}, 3^{(2)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisinin maksimum döngülü bir temel çizimi	102
Şekil 6.8. $\{2^{(2)}, 4^{(3)}, 6^{(1)}\}$ 'in maksimum döngülü bağlantılı bir çizimi	105
Şekil 6.9. $\{1^{(4)}, 3^{(2)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisinin maksimum döngülü bir temel çizimi.	106
Şekil 6.10. $\{1^{(4)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}\}$ 'nin maksimum döngülü bağlantılı bir çizimi....	106
Şekil 6.11. D 'ye karşılık gelen bir karma temel çizim.....	108
Şekil 6.12. $\{1^{(45)}, 2^{(1)}, 3^{(2)}, 5^{(2)}, 9^{(3)}, 10^{(1)}\}$ 'in maksimum döngülü bir çizimi	109

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 2.1. Bazı iyi bilinen graf türlerinin derece dizileri.....	19

1. GİRİŞ

1736 yılında Leonhard Euler tarafından Königsberg'in yedi köprüsü olarak bilinen problemden hareketle yazılmış olan bir makale, modern graf teorisinin kesin başlangıç tarihi olarak kabul edilmektedir. Aslında graflar, çok daha eski yıllarda çeşitli bilim insanlarınca farklı isimler verilerek kullanılmıştır. Örneğin Platonik cisimler adı verilen ve her biri bir graf olan beş adet üç boyutlu cisim (düzgün 4 yüzlü, düzgün 6 yüzlü, düzgün 8 yüzlü, düzgün 12 yüzlü, düzgün 20 yüzlü) çok eski çağlarda bilim insanlarınca astronomik hesaplamalarda kullanılmıştır.

En basit tarifıyla bir graf noktalardan ve bunları birleştiren çizgilerden oluşur. Bu noktalara grafın köşeleri; çizgilere de grafın kenarları adı verilir. Bir kenar iki köşeyi birleştiren düz bir çizgi olabileceği gibi bazen bir eğri de olabilir. Hatta bu eğri bir köşeden başlayıp yine aynı köşeye dönebilir. Bir graf, düzlemde çizilebileceği gibi yönlendirilebilen veya yönlendirilemeyen farklı yüzeyler üzerinde de çizilebilir. Grafların bu şekilde farklı yüzeyler üzerinde çalışılmasıyla Topolojik Graf Teori ortaya çıkmıştır. Bu tezde tanımlanan yeni graf invaryantı omega (Ω), bu teoriyle yakından ilgilidir. Uzun yıllar birkaç klasik problem dışında çok fazla uygulama alanı bulamamış olsa da 1947 yılında H. Wiener'in bir makalesinde bugün Wiener indeksi olarak bilinen ve alkanlar denilen kimyasal molekül sınıfının izomerlerinin kaynama noktalarının karşılaştırılmasında kullanılan bir formül vermesiyle graflar ilgi çekmeye ve yeni uygulama alanları bulmaya başlamıştır. Bu uygulama alanlarının başında kimyasal uygulamalar gelmektedir. Bunun sebebi her bir atomu bir köşe olarak, her bir kimyasal bağı da bir kenar olarak düşünerek bir kimyasal molekülün bir graf ile modelleyebileceği gerçeğidir. Köşe ve kenarlardan oluşan bu matematiksel modelin matematiksel ve benzeri yollarla sadece kombinatorik hesaplamalara dayalı olarak çalışılmasıyla karşılık gelen molekülün kimyasal ve fiziksel bir çok özellikleri hakkında bilgi edinmek mümkün olmaktadır. Dolayısıyla kimyacıların laboratuvarında büyük masraflar yaparak uzun zamanda elde edebildiği sonuçları basit matematiksel yöntemlerle elde edebilmek mümkün hale gelmiştir. Bu da kimyaya dayalı farmakoloji, biyoloji, fizik gibi dallarda da grafların uygulama alanlarının çoğalmasına ve sonuç olarak da graf teoriye olan ilginin artmasına sebep olmuştur.

Graf teorisinin yukarıda bahsedilen uygulama alanları dışında bilgisayar ve matematikte de bir çok uygulaması mevcuttur. Mesela, "minimum geren ağaç problemi", "en kısa yol problemi" ve "network akış problemi" gibi birçok problem graf teorisi yardımıyla çözülmüştür. Biyolojide, popülasyonların ifadesi, hastalıkların yayılma alanlarının gösterilmesi, hayvanların yaşadığı ortamların belirtilmesi yine graf teorisinin uygulama alanları arasındadır. Diller arasındaki parçalı yapılardan ve yapı farklılıklarından dolayı graf teorisinin dil biliminde dahi uygulamaları ortaya çıkmıştır. Yani graf teorisinin hem fen dallarında hem de sosyal dallarda çok sayıda uygulaması mevcuttur ve bu uygulamalara her gün yenileri eklenmektedir.

Grafların moleküllerin çalışılmasındaki avantajları, zamanla kullanılan matematiksel formül ve yöntemlerde çeşitliliğe yol açmıştır. Bu tür formüllere graf teorik değişmezler adı verilir. Kimyasal graf teoride bu değişmezler, topolojik indeksler olarak da bilinirler. Topolojik indeksler, sayısal yapı-aktivite ilişkisi modellerinde (QSPR/QSAR) kullanılırlar. Günümüzde bazıları çok önemli uygulamalara sahip, bazıları ise sadece matematiksel bir ifade olarak kalan çok sayıda graf indeksi mevcuttur.

Bu tezde yer alan graflar aksi belirtilmedikçe yönlendirilmemiş, ağırlıksız, bağlantılı, döngüsüz ve katlı kenar içermeyen graflar olacaktır. Bu özelliklerden herhangi birisine veya birkaçına sahip graflar da graf teorisinin farklı uygulama alanlarında çalışılmaktadır ve bu tezin kapsamı dışında bırakılmıştır.

1.1. Temel kavramlar

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanımlanacak ve graflarla ilgili bazı özellikler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için Aldous ve Wilson (2004), Benjamin ve ark. (2015), Bondy ve Murty (1982), Bondy ve Murty (2008), Capobianco ve Molluzo (1978), Chartrand (1985), Chartrand ve Zhang (2012), Clark ve Holton (1995), Deo (1974), Diestel (2010), Foulds (1992), Gross ve Yellen (2006), Hartsfield ve Ringel (2003), Skiena (1990), Thulasiraman (1992), Trudeau (1993), Tutte (1998), Vasudev (2006), Vasudev (2007), Wallis (2007), West (2001), Wilson (1998), Wilson ve Watkins (1990) veya diğer temel graf teorisi kitapları incelenebilir.

1.1.1. Tanım. Köşe (*vertex*) olarak adlandırılan noktalar ile köşeleri birleştiren ve kenar (*edge*) olarak adlandırılan çizgilerden oluşan bir şekle *graf* (*graph*) denilir.

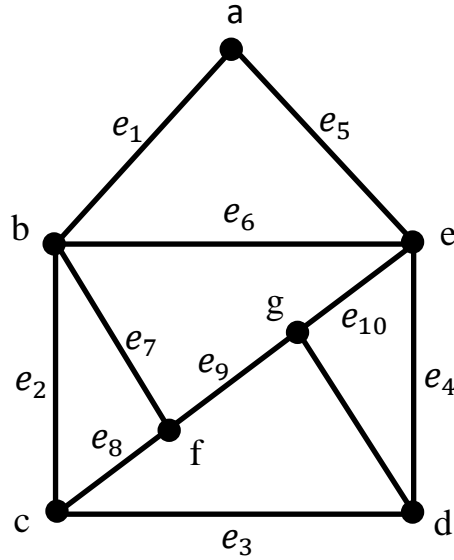
Türkçe literatürde graf yerine zaman zaman çizge kelimesi de kullanılmaktadır.

Genelde G bir graf olmak üzere, G grafının köşe kümesi $V(G)$ ile kenar kümesi ise $E(G)$ ile gösterilir. Buna göre bir G grafı, $G = (V(G), E(G))$ şeklinde de gösterilir. Bir G grafında köşe kümesinin eleman sayısı n ve kenar kümesinin eleman sayısı m ile gösterilir. Yani $|V(G)| = n$ ve $|E(G)| = m$ 'dir.

1.1.2. Tanım. Bir G grafının köşe sayısına G 'nin *mertebesi* (*order*); kenar sayısına da G 'nin *boyutu* (*size*) denilir.

Mertebe ve boyut, grafların kombinatorik metodlar yardımıyla çalışılmasında sıkça kullanılan kavramlardır.

1.1.3. Tanım. $u, v \in V(G)$, G grafının iki köşesi olsun. Eğer bu iki köşe arasında bir kenar mevcutsa u ve v köşelerine *komşu* (*adjacent*) köşeler denir.



Şekil 1.1. Bir G grafı

Şekil 1.1’de verilen G grafinin köşe kümesi $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ ’dur. Örneğin Şekil 1.1’de b ve e köşeleri arasında bu iki köşeyi birleştiren e_6 kenarı mevcuttur ve bu iki köşe birbirine komşu köşelerdir.

1.1.4. Tanım. Bir G grafinde G ’nin kenarlarının aynı köşeden iki kez geçmeyen ab, bc, cd, \dots, fg şeklindeki bir sıralanışına bir *yol* (*path*) denir. Eğer $a = g$ ise bu yola *kapalı yol* (*closed path*) adı verilir. Bir yolun tüm kenarları farklı ise bu yola *iz* (*trace*) adı verilir. Ayrıca ilk ve son köşeleri hariç, tüm köşeleri farklı olan en az üç köşeli kapalı bir ize bir *devir* (*cycle*) denir. Özel olarak d uzunluğundaki bir devire $d - devir$ denilir.

1.1.5. Tanım. u ve v , bir devirin komşu olmayan iki köşesi olsun. u ve v köşelerini birleştiren bir kenara *kiriş* (*chord*) adı verilir.

1.1.6. Tanım. Bir grafta herhangi iki köşe arasında en az bir yol bulunabiliyorsa bu grafa *bağlantılı* (*connected*) *graf*, aksi halde *bağlantısız* (*disconnected*) *graf* denilir.

Yani bağlantılı bir grafta verilen her köşe çifti için köşelerden birinden başlayarak diğerine kenarlar boyunca ulaşılabilir.

1.1.7. Tanım. Bir G grafinin bağlantılı olan her bir alt grafına G grafinin bir *bileşeni* (*component*) adı verilir. Bir grafin bileşen sayısı $c(G)$ ile ya da karışıklık söz konusu değilse kısaca c ile gösterilir.

Bağlantılı bir G grafi için $c(G) = 1$ olup bu tek bileşen grafin tamamıdır. Bir grafin bağlantısız olması için gerek ve yeter şartın $c > 1$ olması olduğu aşikârdır.

Aşağıdaki oldukça faydalı sonuç, kenar ve köşe sayıları verildiğinde bu grafin bileşen sayısı hakkında bir alt sınır vermektedir.

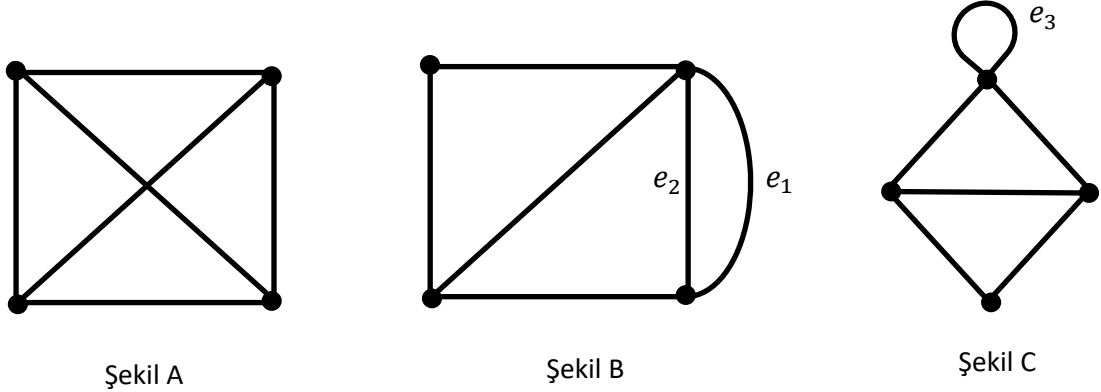
1.1.8. Lemma. G , c bileşene sahip bir graf olsun.

$$c \geq n - m$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu sonuca göre bir grafta köşe sayısı kenar sayısından en az 2 fazla ise bu grafin bağlantısız olacağı açıktır.

1.1.9. Tanım. Bir grafta verilen iki köşeyi birleştiren birden fazla kenar varsa bunlara katlı (*çoklu*) kenar (*multiple edges*) denilir. Bir köşeyi kendine birleştiren bir kenara da *döngü* (*loop*) adı verilir. Bu iki tür kenarı olmayan graflara *basit graf* (*simple graph*) denilir.



Şekil 1.2 Basit ve basit olmayan graflar

Şekil 1.2.A'daki graf, döngü veya katlı kenar bulundurmadığından bir basit graftır. Ancak Şekil 1.2.B'deki e_1 ve e_2 kenarları katlı kenarlar; Şekil 1.2.C'deki e_3 kenarı da bir döngü olduğundan her iki graf da basit graf değildir.

Graflar, en az bir döngüye sahip olup olmamalarına göre sınıflandırılır. Döngü içeren ve döngü içermeyen bu graflara örnek olarak tüm ağaçlar döngü içermeyen graflardır. Diğerleri döngü içeren graflardır.

Kenar ve köşe sayıları arasında bağlantılı bir basit grafta

$$n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

bağıntısı; bağlantısız bir grafta ise

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

bağıntısı geçerlidir.

1.1.10. Tanım. G bir graf ve $uv \in E(G)$ olsun. uv kenarına u ve v köşelerine *bitişiktir (incident)* denilir.

Komşuluk ve bitişiklik kavramları, başta graf enerjisi olmak üzere bir çok alanda uygulamalara sahiptir. Özellikle günümüzde sayıları yüz elliye bulan graf matrisleri arasında en önemlilerinden ikisi komşuluk ve bitişiklik matrisleridir. Bu matrislerdeki ve ayrıca bu matrislerin kuvvetlerindeki her bir girdi, grafla ilgili bir özelliğe karşılık gelmektedir. Bu nedenle bir G grafında bir u köşesine bitişik olan kenarların sayısı, graf teoride önemli bir kavramdır:

1.1.11. Tanım. G bir graf ve $u \in V(G)$ olsun. u köşesine bitişik olan kenar sayısına u köşesinin *derecesi (multiplicity)* denilir ve $deg(u)$, d_u ya da $d_G(u)$ ile gösterilir.

Bir grafta derecelerden iki tanesi özellikle önemlidir:

1.1.12. Tanım. G grafının *maksimum* ve *minimum derecesi* sırasıyla

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in G\} \quad \text{ve} \quad \delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in G\}$$

olarak tanımlanır.

Maksimum ve minimum dereceler dışında derecesi 1 olan köşeler de özellikle moleküler grafları çalışırken ortaya çıkacaktır:

1.1.13. Tanım. Derecesi 1 olan bir köşeye *sallanan (pendant) köşe*, bu köşeye bitişik olan kenara da *sallanan kenar (pendant edge)* denilir.

Bu özel derece çeşitleri kadar olmasa da bağlantısız graflarda karşılaşılabilen bir köşe çeşidi de izole köşelerdir:

1.1.14. Tanım. Derecesi 0 olan bir köşeye *izole (isolated) köşe* denilir.

Bu tezin ana konusunu oluşturan omega invaryantı, derece dizisi yardımıyla tanımlanacağından burada bu kavramı tanımlamak uygun olacaktır.

1.1.15. Tanım. Bir G grafının köşe derecelerinin oluşturduğu kümeye bu grafın *derece dizisi (degree sequence)* adı verilir.

Literatürde bir derece dizisindeki tamsayılar ya küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe sıralanmaktadır. Bu tezde küçükten büyüğe olan sıralama tercih edilecektir. Dolayısıyla bir derece dizisi en genel haliyle $0 \leq i \leq \Delta$ için $a_i \geq 0$ olmak üzere

$$D = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

şeklinde olacaktır. Eğer $a_0 > 0$ ise bu durumda grafın en az bir izole noktası olacak demektir. Ancak eğer $a_0 = 0$ ise bu durumda hiçbir izole nokta olmayacağından bu grafın derece dizisi de

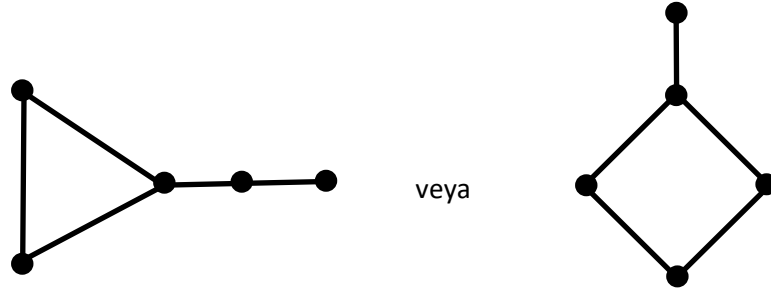
$$D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

şeklinde olur. Bu gösterimlerde D 'nin elemanlarının küçükten büyüğe doğru sıralandığına dikkat ediniz. Bir küme sıralı olmak zorunda olmadığından bir derece dizisi de sıralı olmak zorunda değildir. Ancak kolaylık sağlaması amacıyla bir derece dizisi her zaman küçükten büyüğe, katlılıkları belirtilerek yazılacaktır. Nadiren de olsa Havel-Hakimi gibi bazı yöntemlerde, yöntemin yapısı gereği derece dizisinin büyükten küçüğe dizilmesi istenecektir.

Bir graf verildiğinde köşelerin derecelerini tek tek sayarak bu grafın derece dizisi kolayca belirlenebilir. Tersine, yukarıdaki gibi herhangi bir D kümesi verildiğinde bu kümenin bir grafın derece dizisi olup olmadığı, yani köşe dereceleri tamamen bu kümede kalan tamsayılar olan bir grafın var olup olmadığı, graf teorisinin önemli problemlerinden birisidir. Bu konuda çok sayıda sonuç mevcuttur.

1.1.16. Tanım. D negatif olmayan tamsayılardan oluşan bir küme olsun. D kümesi, bir G grafının derece dizisine eşit ise D 'ye bir *çizilebilir (realizable) derece kümesi* denilir.

Literatürde çizilebilir kelimesi yerine grafik kelimesi de kullanılmaktadır. Tanımdan, çizilebilir bir derece dizisi için, bu derece dizisine sahip en az bir graf olduğu açıktır. Örneğin Şekil 1.3'deki graflar tamamen farklı olmasına rağmen aynı derece dizisine sahiptir.



Şekil 1.3. $\{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisinin iki farklı çizimi

Bu tezde aksi belirtilmedikçe “derece dizisi” denildiğinde bu derece dizisinin çizilebilir olduğu varsayılacaktır.

Negatif olmayan tam sayılardan oluşan belirli bir kümenin bir graf olarak çizilip çizilemeyeceğini belirlemek için bir çok sonuç ve algoritma vardır. Bunlardan en ünlüsü Havel-Hakimi tarafından verilen sonuçtur, bkz. Havel (1955), Hakimi (1962). Elbette, bu bölümde görülecek olan ve graf teorisinin en temel sonuçları arasında yer alan el sıkışma lemmasından ortaya çıkan en bariz kriter, tüm köşe derecelerinin toplamının kenar sayısının iki katına eşit olması, yani bir çift tamsayı olması gerektiğini ifade eder. Havel-Hakimi dışında çizilebilirlik ile ilgili kriterler için Ivanyi ve ark. (2013), Kim ve ark. (2009), Miller (2013), Skiena (1990), Triphati ve ark. (2010), Triphati ve Tyagi (2008) Tyshkevich ve ark. (1981), Tyshkevich ve ark. 2 (1987) ve Zverovich ve Zverovich (1992) kaynaklarına bakılabilir.

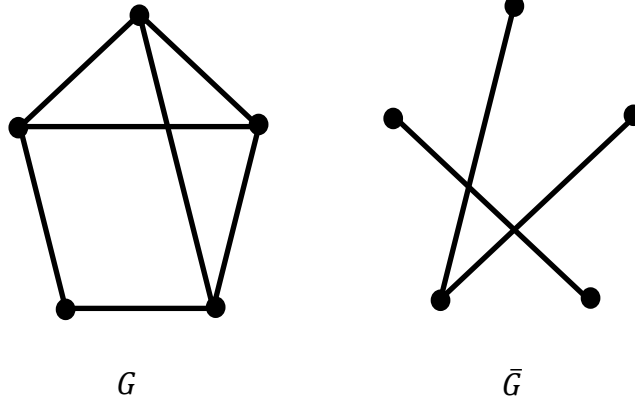
Derece dizisi kavramı, bu tezde ilk kez tanımlanan omega invaryantının tanımlanmasında kullanıldığından ikinci bölümde detaylı olarak ele alınacaktır. Yine de burada zaman zaman bahsi geçeceğiinden dolayı kısa bir tanımını vermek faydalı olacaktır:

1.1.17. Tanım. $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ bir derece dizisi olsun ve G , bu derece dizisine sahip bir graf olsun. O halde G grafının omega invaryantı $\Omega(G)$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}\Omega(G) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 \\ &= \sum_{i=1}^{\Delta} (i - 2) a_i\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

1.1.18. Tanım. Bir G grafının *tümleyeni* (*complement*), G grafiyle aynı köşe kümesine sahip olan ve G grafında kenar oluşturmayan tüm köşelerin birleştirilmesiyle elde edilen bir graftır ve bu graf \bar{G} ya da G^c ile gösterilir, bkz. Şekil 1.4.



G

\bar{G}

Şekil 1.4. G grafi ve \bar{G} tümleyeni

Yani $V(G)$ köşe kümesindeki herhangi iki köşeyi birleştiren bir kenar, ya G grafına ya da \bar{G} grafına aittir.

1.1.19. Tanım. Bir G grafında köşe dereceleri birbirine eşit ise G grafına *regüler* (*regular*) *graf* denilir. Özel olarak her bir köşenin derecesi r ise G 'ye *r-regüler graf* denilir.

Regüler bir grafın kenar sayısı, köşe sayısı ve regülerlik derecesine bağlı olarak ifade edilebilir:

1.1.20. Teorem. G grafi n köşeli ve r -regüler olsun. Bu takdirde G grafının $\frac{nr}{2}$ kenarı vardır.

Graf teorisinin en temel sonuçlarından biri şu şekildedir:

1.1.21. Lemma (El Sıkışma (Hand-shaking) Lemması). Bir G grafında kenar sayısının iki katı, tüm köşe derecelerinin toplamına eşittir. Yani, n köşeli ve m kenarlı bir G grafında

$$\sum_{i=1}^n d_{v_i} = 2m$$

dir.

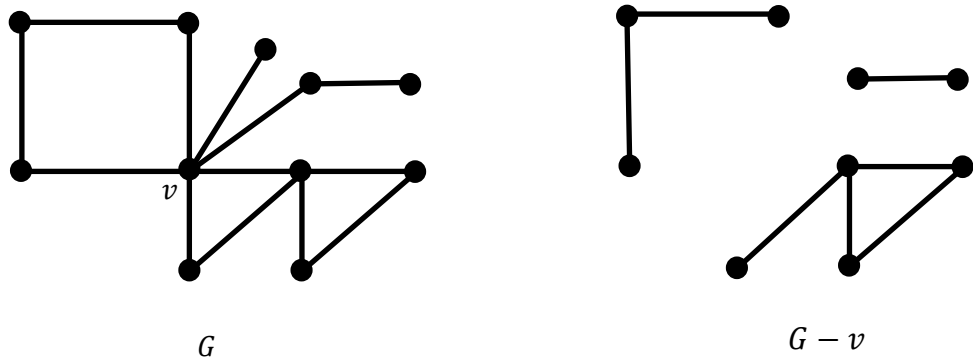
Dereceler toplamı hesaplanırken her bir kenarda iki köşe bulunduğundan bir kenar iki kez sayılmış olur ve sonuç aşikârdır.

Bu sonuç herhangi bir grafta köşe derecelerinin toplamının çift olduğunu belirtir. Bu nedenle negatif olmayan tamsayılardan oluşan bir küme verildiğinde bu kümedeki elemanları toplayıp eğer bu toplam tek sayı çıkıyorsa bu kümenin çizilebilir bir derece kümesi olmadığı kolayca söylenebilir. Bu anlamda El Sıkışma Lemması, çizilebilirlik kriterleri arasında en pratik olanıdır.

Bu lemmanın bir sonucu olarak herhangi bir G grafında derecesi tek olan köşelerin sayısının çift olması gerektiği söylenebilir.

Graflarla yapılan bir çok hesaplamada grafa bir kenar veya köşe eklemenin veya çıkarmanın etkisinden sıklıkla faydalanılır. Bu sayede daha kolay hesaplamalar yapılarak daha büyük graflarla ilgili sonuçlar daha küçük graflar yardımıyla elde edilebilir. Şimdi bu kavramlar kısaca tanımlanacaktır:

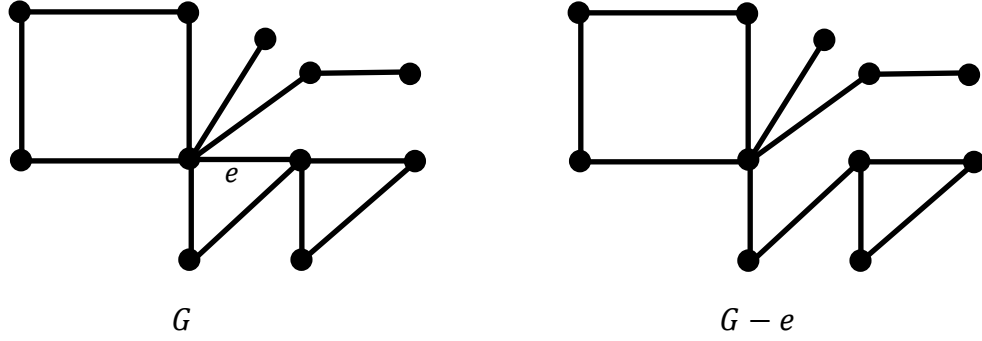
1.1.22. Tanım (Köşe çıkarma). G bir graf ve $v \in V(G)$, G grafının herhangi bir köşesi olsun. G grafından v köşesinin ve bu köşeye bağlı olan tüm kenarların silinmesiyle elde edilen yeni grafa v köşesi çıkarılmış G grafi adı verilir ve $G - \{v\}$ ile gösterilir. Buradaki silme işlemine de *köşe çıkarma* denilir. Eğer G grafından birden fazla v_1, v_2, \dots, v_n köşesi çıkarılıyorsa elde edilen graf $G - \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ile gösterilir. Bazı kaynaklarda $G - \{v\}$ gösterimi yerine $G - v$ de kullanılmaktadır, bkz. Şekil 1.5.



Şekil 1.5. G ve $G - v$

1.1.23. Tanım (Kenar çıkarma). G bir graf ve $e \in E(G)$, G grafının herhangi bir kenarı olsun. G grafından e kenarının silinmesiyle elde edilen yeni grafa e kenarı silinmiş G

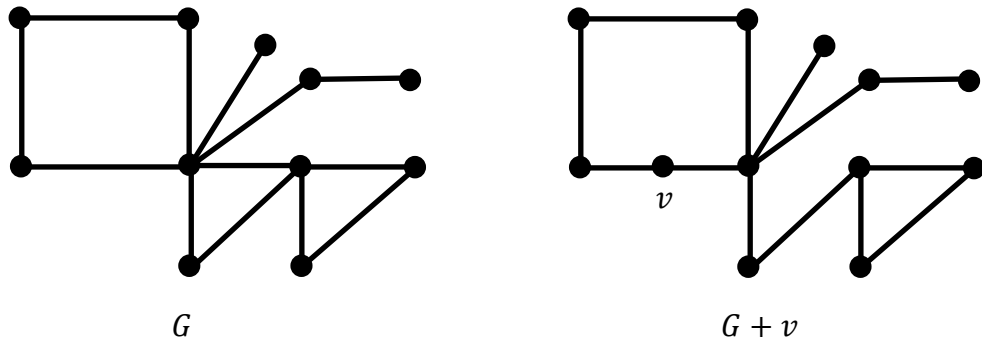
grafi adı verilir ve $G - \{e\}$ ile gösterilir. Buradaki silme işlemine de *kenar silme* denilir. Eğer G grafından birden fazla e_1, e_2, \dots, e_n kenarı siliniyorsa (çıkarılıyorsa) elde edilen graf $G - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ile gösterilir. Bazı kaynaklarda $G - \{e\}$ gösterimi yerine $G - e$ gösterimi de kullanılmaktadır, bkz. Şekil 1.6.



Şekil 1.6. G ve $G - e$

Köşe ve kenar çıkarma işlemlerini kullanarak karmaşık graflarla ilgili bir çok özelliği daha küçük grafların daha kolay elde edilebilecek özelliklerinden faydalanarak elde edebilir. Bu işlemlere benzer olarak bu maksatla kullanılan iki işlem de köşe ve kenar ekleme işlemleridir. Çıkarma işlemleri kadar standart bir tanımlamaya sahip olmayan bu iki işlem, bazı özel durumlarda aşağıdaki şekilde kullanılır:

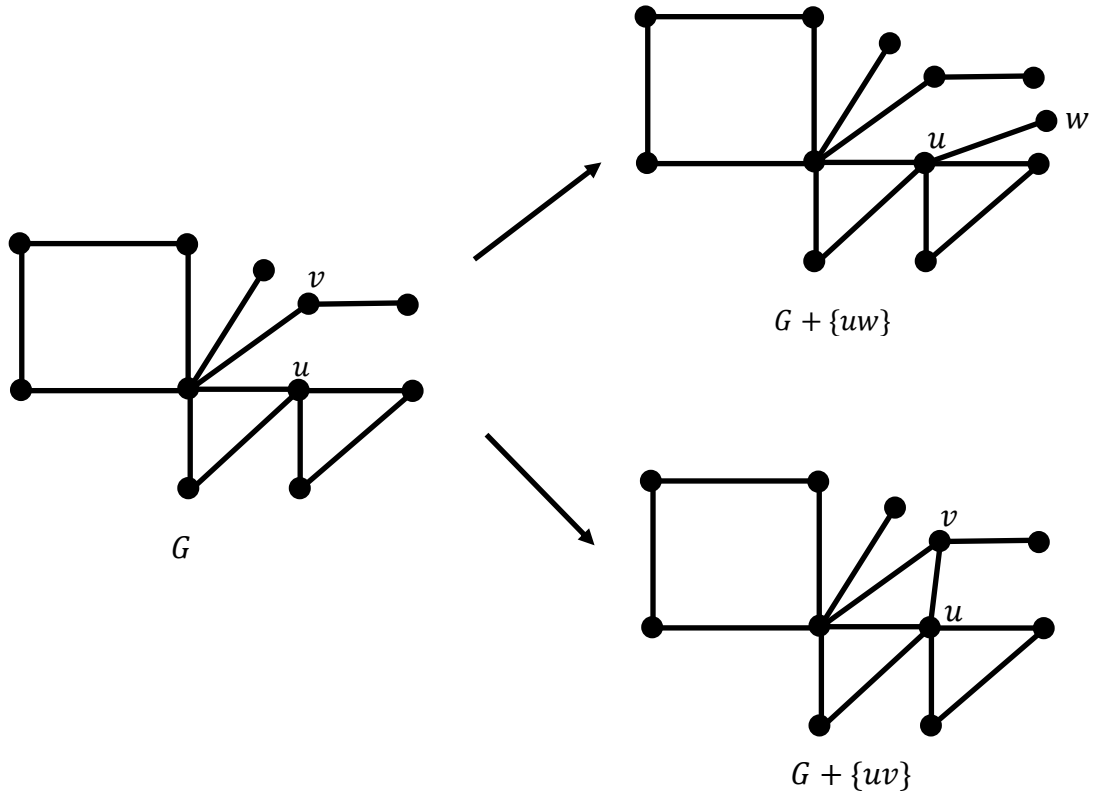
1.1.24. Tanım (Köşe ekleme). G bir graf olsun. G grafının bir e kenarına yeni bir v köşesinin eklenmesiyle elde edilen yeni grafa v köşesi eklenmiş G grafi adı verilir ve $G + \{v\}$ ile gösterilir. Buradaki ekleme işlemine de *köşe ekleme* denilir, bkz. Şekil 1.7.



Şekil 1.7. G ve $G + v$

Bu kavram özellikle bir grafın doğru grafi veya alt grafi çalışıldığında ortaya çıkmaktadır. Bazı kaynaklarda eklenen yeni köşenin var olan bir kenar üzerine değil de graf dışında bir köşe olarak eklendiği de görülebilir.

1.1.25. Tanım (Kenar ekleme). G bir graf olsun. G grafının bir u köşesine, v köşesi G grafına ait olmayan bir köşe olmak üzere yeni bir $e = uv$ kenarının eklenmesiyle elde edilen yeni grafa e kenarı eklenmiş G grafi adı verilir ve $G + \{e\}$ ile gösterilir. Benzer şekilde G grafının mevcut iki u, v köşesini birleştiren bir $e = uv$ kenarı da eklenerek kenar ekleme işlemi tanımlanabilir. Buradaki her iki ekleme işlemine de *kenar ekleme* denili, bkz. Şekil 1.8..



Şekil 1.8. G , $G + \{uw\}$ ve $G + \{uv\}$

Birden fazla kenar ve köşe eklendiğinde gösterim, kenar ve köşe çıkarmadakine benzer şekilde ayarlanabilir.

Aşağıda verilecek olan kavram da kenar çıkarma işleminin en önemli uygulamalarından birisidir ve grafların başta bağlantılılık olmak üzere bir çok özelliğinin çalışılmasında faydalıdır:

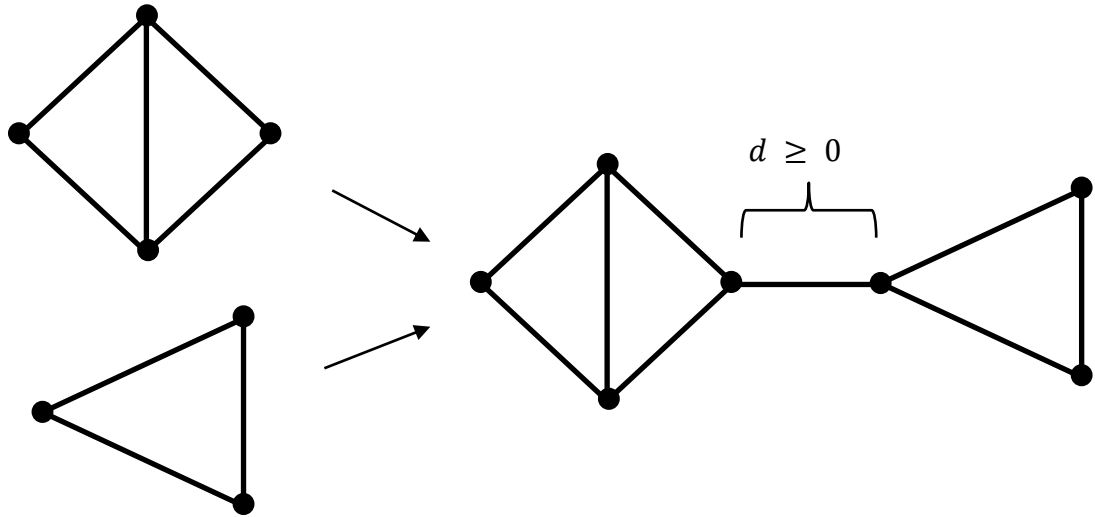
1.1.26. Tanım. G bağlantılı bir graf ve $e = uv$, G grafının bir kenarı olsun. Eğer e kenarı silindiğinde $G - e$ grafi bağlantısız bir graf haline geliyorsa e kenarına G grafının bir köprüsü (*bridge*) denilir.

Aşağıdaki verilecek olan sonuç ilerleyen bölümlerde sıklıkla kullanılacaktır:

1.1.27. Teorem. Basit ve bağlantılı olan bir G grafının herhangi bir köşesine devir içermeyen bir graf eklemek veya herhangi bir kenara yeni bir köşe eklemekle elde edilen yeni graf da basit ve bağlantılıdır.

İspat. Sallanan bir kenar katlı kenar olamayacağından ve ayrıca bir döngü oluşturamayacağından böyle bir kenar eklemenin basitliği bozmayacağı açıktır. Bağlantılılığın bozulmayacağı kenar ekleme tanımından aşikârdır. Benzer şekilde (derecesi 2 olan) yeni bir köşeyi herhangi bir kenara eklemek de ne grafın basitliğini ne de bağlantılılığını bozmayacağından sonuç aşikârdır.

Bu teorem genelleştirilerek iki basit ve bağlantılı grafi birer köşelerinden $d \geq 0$ uzunluklu bir patika yardımıyla birleştirmenin de basit ve bağlantılı olan bir graf vereceği ifade edilebilir, bkz. Şekil 1.9.

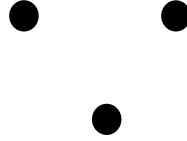


Şekil 1.9. İki basit ve bağlantılı grafi birleştirme

1.2. Graf türleri

1.2.1. Tanım. Hiç bir kenara sahip olmayan graflara *boş (null) graf* adı verilir ve n köşeli bir boş graf N_n ile gösterilir.

Bazı kaynaklarda boş graf yerine sıfır grafi da kullanılmaktadır. N_n boş grafının köşe sayısı n ve kenar sayısı $m = 0$ 'dır. Dolayısıyla N_n boş grafının derece dizisi $\{0^{(n)}\}$ şeklindedir. Derecesi 0 olan köşelere *izole (isolated) köşeler* denilir, bkz. Şekil 1.10.



Şekil 1.10. N_3 boş grafi

Graf teoride ve uygulamalarında iki graf türü oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Bunlar şimdi tanımlanacak olan yol grafları ve devir graflarıdır.

1.2.2. Tanım. Devir içermeyen ve bir tek yoldan oluşan bir grafa *yol grafi (path graph)* denir ve n köşeli bir yol grafi P_n ile gösterilir.

P_n grafi $n - 1$ kenara sahiptir. P_n grafının derece dizisi

$$P_n = \{1^{(2)}, 2^{(n-2)}\}$$

şeklindedir, bkz. Şekil 1.11.



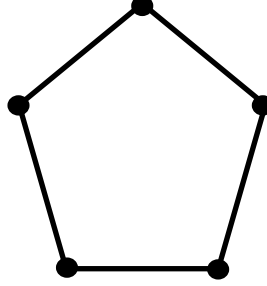
Şekil 1.11. P_4 yol grafi

1.2.3. Tanım. Tek bir devirden oluşan grafa *devir grafi (cycle graph)* denir. n köşeli bir devir grafi C_n ile gösterilir.

Köşe sayısı n ve kenar sayısı $m = n$ 'dir. Yani bir devir grafında köşe ve kenar sayıları birbirine eşittir. Ayrıca devir graflar 2-regüler graflardır. C_n devir grafından bir kenar silindiğinde (çıkarıldığında) P_{n-1} yol grafi elde edilir. C_n devir grafının derece dizisi

$$C_n = \{2^{(n)}\}$$

şeklindedir, bkz. Şekil 1.12.



Şekil 1.12. C_5 devir grafi

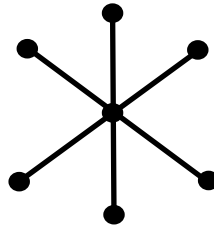
Graflar ile çalışırken devir, devir graf, devirli, devirsiz, devir bulunduran, ana devir, vb. gibi kavramlarla karşılaşılabilir. “Devir” ve “devir grafi” ile C_n grafini; “devirli” veya “devir bulunduran” ifadesini görünce grafin en az bir devir bulundurduğu; “devirsiz” ifadesinden de grafta hiçbir devir bulunmadığı anlaşılacaktır. “Ana devir” ifadesiyle de verilen bir derece dizisinin bu tezde tanımlanacak ve adına temel çizim denilecek olan çizimindeki en uzun uzunluğa sahip devirin bulunduğu bileşen kastedilecektir.

1.2.4. Tanım. Adına merkez köşesi denilecek olan bir köşe ile her biri sadece merkez köşesine komşu olan $n - 1$ tane köşeden oluşan bir grafa *yıldız (star) graf* denilir. n köşeli bir yıldız graf S_n ile gösterilir.

Dolayısıyla bir S_n yıldız grafinin köşe ve kenar sayıları sırasıyla n ve $m = n - 1$ 'dir. Derece dizisi ise

$$S_n = \{1^{(n-1)}, n^{(1)}\}$$

şeklindedir, bkz. Şekil 1.13.

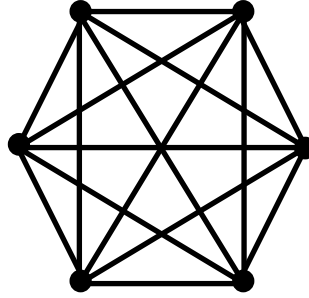


Şekil 1.13. S_7 yıldız grafi

1.2.5. Tanım. Bir grafta her köşe kendisinden başka bütün köşelere birer kenar ile bağlanıyorsa bu grafa *tam (complete) graf* denir ve n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir. K_n tam grafının köşe sayısı n ve kenar sayısı $m = \frac{n(n-1)}{2}$ şeklindedir. K_n tam grafının derece dizisi ise

$$K_n = \{(n-1)^{(n)}\}$$

şeklindedir. K_n tam grafi $(n-1)$ -regüler bir graftır, bkz. Şekil 1.14.



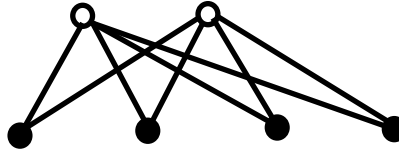
Şekil 1.14. K_6 tam grafi

1.2.6. Tanım. Bir graftaki köşeler iki gruba ayrılıp bir gruptaki köşelerin bazıları diğer gruptaki köşeler ile kenarlar vasıtasıyla birleşiyorsa bu grafa *iki parçalı (bipartite) graf* denir. Eğer iki parçalı grafta birinci gruptaki her bir köşe ikinci grubun her bir köşesiyle kenarlar yardımıyla birleştirilmiş ise bu grafa *iki parçalı tam (complete bipartite) graf* denir. Bu gruplarda r ve s tane köşe varsa böyle bir graf $K_{r,s}$ ile gösterilir.

$K_{r,s}$ iki parçalı tam grafının köşe sayısı $n = r + s$ ve kenar sayısı $m = r \cdot s$ 'dir. Bu grafın derece dizisi ise

$$K_{r,s} = \{r^{(s)}, s^{(r)}\}$$

şeklindedir. Örneğin $K_{2,4}$ iki parçalı tam grafi Şekil 1.15'de görülmektedir:



Şekil 1.15. $K_{2,4}$ iki parçalı tam grafi

S_n yıldız grafindeki merkez köşe bir küme, diğer köşeler ikinci bir küme olarak alınırsa S_n yıldız grafinin aslında $K_{1,n}$ iki parçalı tam grafi olduğu da söylenebilir. Yani

$$S_n = K_{1,n}$$

dir.

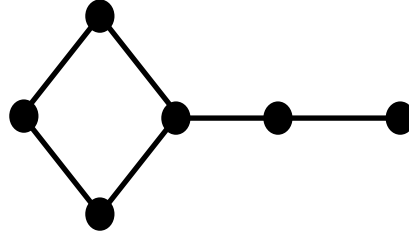
Uygulamada önemli bir yer tutan fakat yukarıdaki graf türleri kadar iyi bilinmeyen bir graf türü de larva graflarıdır:

1.2.7. Tanım. P_{s+1} yol grafinin bir köşesinin C_r devir grafinin bir köşesiyle özdeşlenmesiyle oluşan bir grafa *larva (tadpole) graf* denilir. Bu graf türü $T_{r,s}$ ile gösterilir.

Ayrıca $T_{r,s}$ larva grafinin köşe sayısı $n = r + s$ ve kenar sayısı da $m = r + s$ 'dir. Derece dizisi ise

$$T_{r,s} = \{1^{(1)}, 2^{(r+s-2)}, 3^{(1)}\}$$

şeklindedir, bkz. Şekil 1.16.



Şekil 1.16. $T_{4,2}$ tadpole grafi

Şimdi tanımlanılacak olan graf türü, diğer graflardan önemli bir farka sahiptir. Şimdiye kadar tanımlanan graf türlerinin özellikleri hakkında belli miktarda bilgi mevcuttur. Ağaç adı verilen graf türü ise kontrol edilemeyen ve çok farklılık gösteren yapısı nedeniyle çalışılması en zor olan graf türüdür. Ağaçlarla ilgili hesaba dayalı çalışmalarda diğer graf türlerinde olduğu gibi birkaç durumu değil, köşe sayısına göre artan çok sayıda durumu incelemek gereklidir. Örneğin yukarıdaki graf türlerinde köşe derecelerinin tümü ve dolayısıyla grafin derece dizisi bilinmekteyken, n köşeli bir ağacın köşe dereceleri çok farklı şekillerde ifade edilebilmektedir. Buna rağmen bu tezin konusunu oluşturan omega

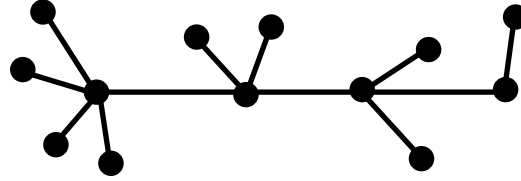
invaryantının tanımının tamamen derece dizilerine bağlı olması nedeniyle ağaçların omega invaryantlarının da diğer özelliklerde olduğu gibi farklılık gösterebileceği düşünülse de ilginç bir şekilde tüm ağaçların omega invaryantının -2 olduğu görülecektir.

1.2.8. Tanım. Bağlantılı bir grafta hiçbir devir bulunmuyorsa bu grafa *ağaç (tree) graf* veya kısaca *ağaç* denir. n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir. Bağlantılılık şartı kaldırıldığında bu grafa *orman (forest)* adı verilir.

Köşe sayısı, graftaki d_i köşesinin derece dizisindeki katlılığı a_i olmak üzere $n = \sum_{i=1}^{\Delta} a_i$, kenar sayısı ise $m = n - 1$ şeklindedir. T_n ağacının derece dizisi

$$T_n = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_{\Delta})}\}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse bu genel bir grafin derece dizisidir. Bunun sebebi ise yukarıdaki paragrafta açıklandığı gibi ağaçların derecelerinin çok değişik olabilmesidir. Şekil 1.17’de 13 köşeli bir ağaç görülmektedir.



Şekil 1.17. $T_{1,3}$ ağaç grafi

Aşikâr olmayan tüm ağaçlar için $a_1 \geq 2$ olduğu kolayca görülebilir. Aynı zamanda $\Delta = 2$ olan ağaç P_n yol grafi; $\Delta = d_2 = n - 1$ olan ağaç ise S_n yıldız grafidir.

Bir orman, gerçek hayatta olduğu gibi ağaçlardan oluşmaktadır.

2. DERECE DİZİLERİ

2.1. Bazı graf türlerinin derece dizileri

Giriş bölümünde belirtildiği gibi bu tezde tanımlanan ve bu tezin konusunu oluşturan omega invaryantı, tamamen verilen bir grafın derece dizisi yardımıyla tanımlanmaktadır. Dolayısıyla tezin başlığına uygun olarak bu bölümden itibaren bu çalışmada elde edilecek tüm sonuçların da derece dizileriyle ilişkili olacağı tahmin edilebilir. Bu nedenle bu bölümde grafların derece dizileri kavramı detaylı olarak incelenecektir. Birinci bölümde sekiz farklı graf türü tanımlanmıştı ve bunların çok temel bazı özelliklerinden bahsedilmişti. İlk olarak bu graf türlerinin derece dizileri toplu olarak Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Bazı iyi bilinen graf türlerinin derece dizileri

GRAF	DERECE DİZİSİ
N_n	$\{0^{(n)}\}$
P_n	$\{1^{(2)}, 2^{(n-2)}\}$
C_n	$\{2^{(n)}\}$
$S_n = K_{1,n}$	$\{1^{(n-1)}, n^{(1)}\}$
K_n	$\{(n-1)^{(n)}\}$
$K_{r,s}$	$\{r^{(s)}, s^{(r)}\}$
$T_{r,s}$	$\{1^{(1)}, 2^{(r+s-2)}, 3^{(1)}\}$
T_n	$\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$

2.2. Mertebeye göre derece dizileri

Bu kısımda grafları mertebelerine göre küçükten büyüğe sınıflandırarak tüm olası derece dizileri listelenecektir. İlerleyen bölümlerde yapılacak olan hesaplamalarda bu derece dizilerine sıklıkla ihtiyaç duyulacaktır. Bu bölümde ele alınacak graflar basit graflardır.

2.2.1. $n = 1$ olan basit grafların derece dizileri

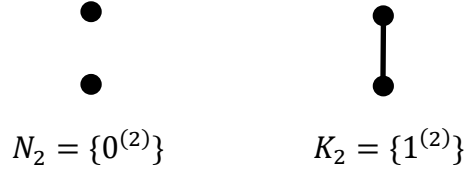
$n = 1$ olan tek bir graf vardır: $N_1 = \{0^{(1)}\}$, bkz. Şekil 2.1.



Şekil 2.1. N_1 boş grafi

2.2.2. $n = 2$ olan basit grafların derece dizileri

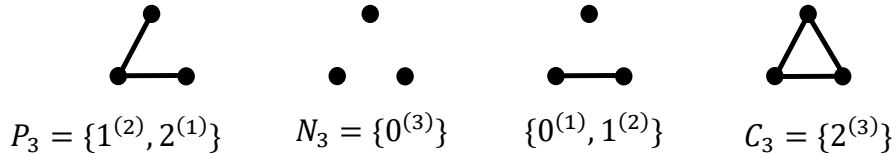
$n = 2$ olan iki adet graf vardır: $N_2 = \{0^{(2)}\}$ ve $K_2 = \{1^{(2)}\}$, bkz. Şekil 2.2.



Şekil 2.2. N_2 ve K_2

2.2.3. $n = 3$ olan basit grafların derece dizileri

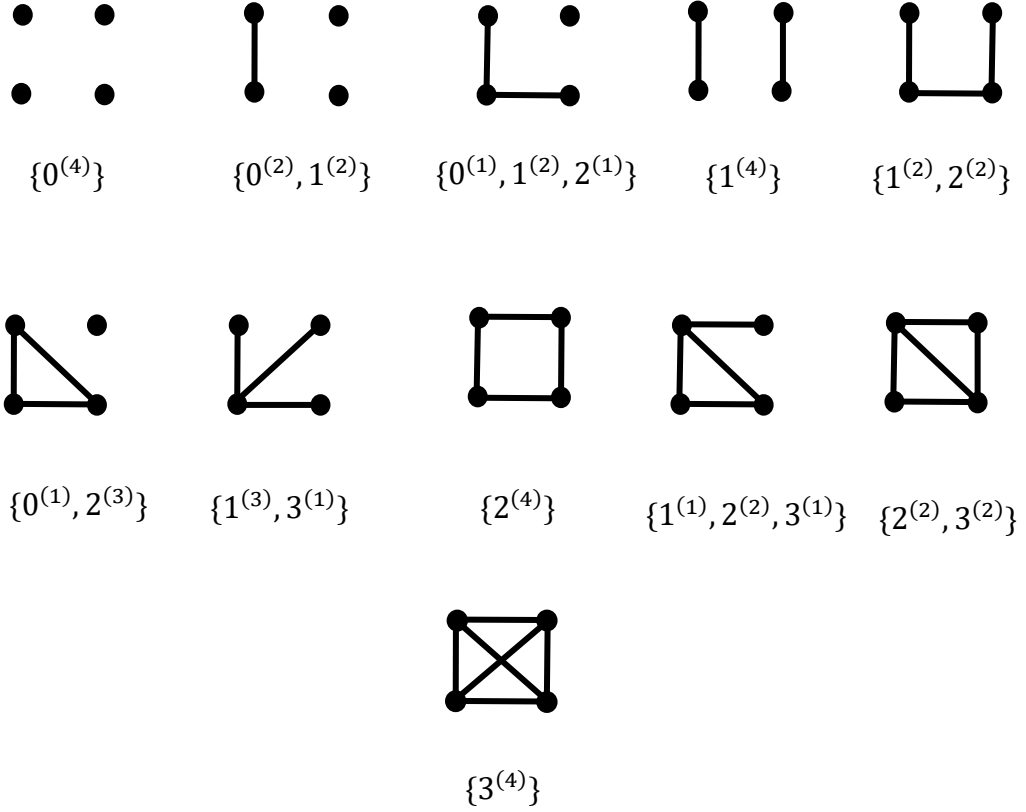
$n = 3$ olan dört adet graf vardır. Bunların derece dizileri $P_3 = \{1^{(2)}, 2^{(1)}\}$, $N_3 = \{0^{(3)}\}$, $\{0^{(1)}, 1^{(2)}\}$ ve $C_3 = \{2^{(3)}\}$ şeklindedir, bkz. Şekil 2.3.



Şekil 2.3. 3 köşeli graflar ve derece dizileri

2.2.4. $n = 4$ olan basit grafların derece dizileri

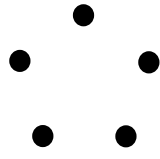
$n = 4$ olan on bir adet graf vardır, bkz. Şekil 2.4:



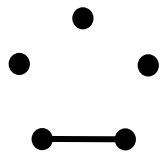
Şekil 2.4. 4 köşeli graflar ve derece dizileri

2.2.5. $n = 5$ olan basit grafların derece dizileri

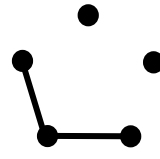
$n = 5$ olan otuz dört adet graf vardır, bkz. Şekil 2.5.



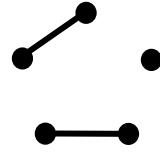
$\{0^{(5)}\}$



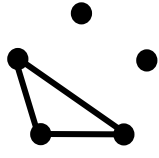
$\{0^{(3)}, 1^{(2)}\}$



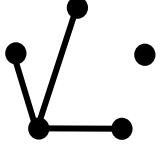
$\{0^{(2)}, 1^{(2)}, 2^{(1)}\}$



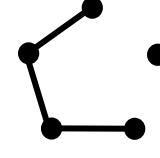
$\{0^{(1)}, 1^{(4)}\}$



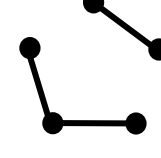
$\{0^{(2)}, 2^{(3)}\}$



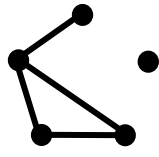
$\{0^{(1)}, 1^{(3)}, 3^{(1)}\}$



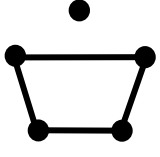
$\{0^{(1)}, 1^{(2)}, 2^{(2)}\}$



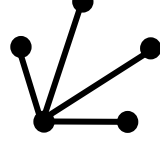
$\{1^{(4)}, 2^{(1)}\}$



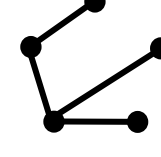
$\{0^{(1)}, 1^{(1)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}\}$



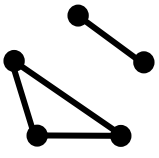
$\{0^{(1)}, 2^{(4)}\}$



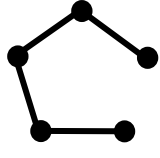
$\{1^{(4)}, 4^{(1)}\}$



$\{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}\}$



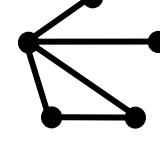
$\{1^{(2)}, 2^{(3)}\}$



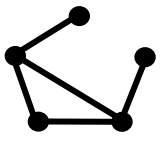
$\{1^{(2)}, 2^{(3)}\}$



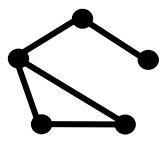
$\{0^{(1)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}\}$



$\{1^{(2)}, 2^{(2)}, 4^{(1)}\}$



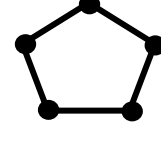
$\{1^{(2)}, 2^{(1)}, 3^{(2)}\}$



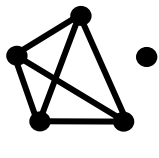
$\{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(1)}\}$



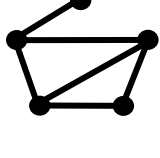
$\{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(1)}\}$



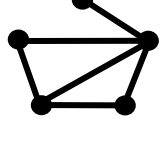
$\{2^{(5)}\}$



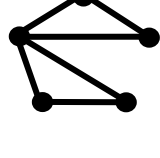
$\{0^{(1)}, 3^{(4)}\}$



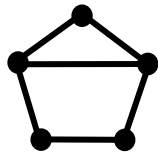
$\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}\}$



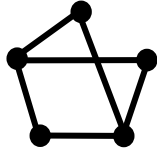
$\{1^{(1)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}, 4^{(1)}\}$



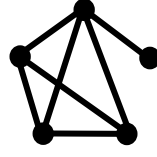
$\{2^{(4)}, 4^{(1)}\}$



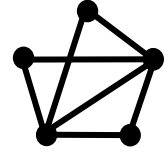
$$\{2^{(3)}, 3^{(2)}\}$$



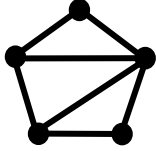
$$\{2^{(3)}, 3^{(2)}\}$$



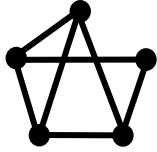
$$\{1^{(1)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}\}$$



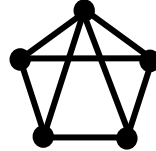
$$\{2^{(3)}, 4^{(2)}\}$$



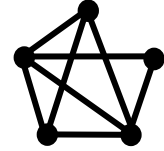
$$\{2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}\}$$



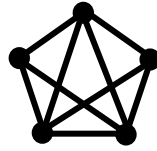
$$\{2^{(1)}, 3^{(4)}\}$$



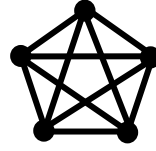
$$\{3^{(4)}, 4^{(1)}\}$$



$$\{2^{(1)}, 3^{(2)}, 4^{(2)}\}$$



$$\{3^{(2)}, 4^{(3)}\}$$



$$\{4^{(5)}\}$$

Şekil 2.5. 5 köşeli graflar ve derece dizileri

3. OMEGA İNVARYANTI

3.1. Giriş

Bu bölümde teze adını veren omega invaryantı tanımlanıp temel özellikleri incelenecektir. Çalışmaların başlangıcında bir derece dizisinin çizilebilirliğinin yanı sıra bu çizimlerdeki döngü, katlı kenar, kiriş, sallanan kenar ve köprü gibi çeşitli graf bileşenlerinin sayı ve durumlarını da incelemek amaçlanmıştır. Gözlem aşamasında çizilen çok sayıda grafın bazı ortak özelliklerinin varlığı farkedilince bu özelliklerden hangilerinin her zaman doğru olduğu ve hangilerinin de bazı graf sınıfları için doğru olduğu tespit edilmeye çalışılmıştır. İlk olarak ele alınan moleküler graflardan faydalanılarak bazı toplamların her zaman sabit kaldığı tespit edilmiştir. Buradan hareketle en genel derece dizileri için bu sayının sabit bir sayı olup olmadığı araştırılmış ve yapılan çok sayıda çizimden ortaya çıkan gözlemler sonucunda omega invaryantı olarak adlandırılan ve verilen bir derece dizisi veya birbirine izomorfik tüm graflar için sabit olan bir sayı belirlenmiştir. Bu sayının graflarla ilgili, başta 250 yıldır bilinen Euler karakteristiği olmak üzere bir çok sayı ve kavramla yakın ilgisi olduğu görülmüştür.

Derece dizilerinin en önemli özelliği olan çizilebilirlik kavramıyla ilgili başta Havel-Hakimi yöntemi olmak üzere bir çok yöntem bilinmektedir. Burada tanımlanan omega invaryantı, verilen bir derece dizisinin çizilebilir olup olmadığının belirlenmesinde bilinen en basit ve yeni yöntem olarak kullanılabilir: Hesaplanan omega invaryantı tek sayı oluyorsa bu derece dizisi çizilebilir değildir. İleride omega invaryantının her bir çift sayı değeri için en az bir çizimin var olduğu gösterilecektir.

Omega invaryantının bir grafın devir sayısı ile de doğrudan bağlantılı olduğu görülünce verilen bir çizilebilir derece dizisinin tüm çizimlerinin kaç tane kapalı bölge bulunduracağı da omega invaryantı sayesinde bir bağıntı ile verilmiştir.

Bir grafın bağlantılılığını grafi çizmeden sadece derece dizisine bakıp küçük bir hesaplama yardımıyla tespit etmek omega invaryantı ile yapılabilir. Burada çizilebilir bir derece dizisi için bu derece dizisinin tüm çizimlerinin kaç bileşene sahip olacağını veren bir eşitsizlik elde edilecektir. Bu eşitsizlik sayesinde bileşen sayısı birden büyük çıktığında, ki bu durum omeganın -4 'den küçük ya da eşit olması durumuna karşılık gelmektedir, bu durumda olan çizilecek tüm grafların bağlantısız olacağı söylenebilir.

Omeganın üç farklı durumunun olduğunu ve bu üç durumun birbirinden farklı özellikler gösterdiği belirlenmiştir. Bu üç durumun her birisinde bu çalışmada adına temel çizim denilecek bir çizim algoritması geliştirildi ve bu çizimler yardımıyla bir çok probleme çözüm bulundu. Verilen tüm çizilebilir derece dizilerinin bir temel çizime sahip oldukları gösterildi. Graflarla ilgili bir çok normal ya da uç (extremal) problemin çözümünde de omega invaryantı faydalıdır. Örneğin bağlantılı olarak çizilebilen bir derece dizisinin aynı zamanda bağlantısız bir halde de çizilebildiği veya bunun tam tersi omega invaryantının değerine göre söylenebilir. Çizilebilir bir derece dizisine karşılık gelen muhtemel graflar çizildiğinde bu graflarda en çok (en az) kaç tane döngü, katlı kenar, köprü, sallanan kenar bulunduğu omega invaryantı yardımıyla söylenebilir.

Hatırlanacağı gibi $|V(G)| = n$ köşeye ve $|E(G)| = m$ kenara sahip bir graf $G = (V, E)$ ile gösterilmektedir. Bir G grafının derece dizisi $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ şeklinde gösterilir. 1.1.17.Tanımda, verilen bir $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisi için bu derece dizisine sahip bir graf G olmak üzere G grafının Ω invaryantı $\Omega(G)$ ile gösterilmiş ve

$$\begin{aligned}\Omega(G) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 \\ &= \sum_{i=1}^{\Delta} (i - 2) a_i\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştı. Daha sonra bu sayının özel bir değerinin önemli bir graf sınıfı olan ağaçların yaprak sayısını (sallanan kenar sayısı) veren bir bağıntı olduğunun bilindiği görüldü. Bir ağacın yapraklarının sayısını veren formül

$$a_1 = 2 + a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta$$

şeklindedir. a_1 sayısı bir ağaç grafında ki yaprakları yani sallanan kenar sayısını vermektedir. Bu formülde a_i 'ler eşitliğin diğer tarafına alınırsa,

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = -2$$

şeklinde bir sabit elde edilir.

Bir D derece dizisinin veya bir G grafının omega invaryantı sırasıyla $\Omega(D)$ ve $\Omega(G)$ ile gösterilecektir. Bir çok yerde derece dizisi ve bu derece dizisi yardımıyla çizilen grafın

ayırt edilmesi önemsiz olacağından bu iki notasyonu birbirinden ayırt etmeye çok ihtiyaç duyulmayacaktır.

Her derece dizisine ait bir omega değerinin varlığı tanımdan aşikârdır. Ama her omega değerine karşılık bir tek grafın varlığı garanti değildir. Aslında her bir omega değeri için sonsuz çoklukta graf olduğu zamanla gözlemlenecektir.

Bazı sık karşılaşılan graf türlerinin omega değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\Omega(C_n) = 0$$

$$\Omega(P_n) = -2$$

$$\Omega(S_n) = -2$$

$$\Omega(T_n) = -2$$

$$\Omega(K_n) = n(n - 3)$$

$$\Omega(K_{r,s}) = 2[rs - (r + s)]$$

$$\Omega(T_{r,s}) = 0.$$

Dikkat edilirse P_n , S_n ve T_n graflarının hepsinin omega değerlerinin -2 olduğu görülür. Genelleştirme yoluyla bu sonuç ileride $\Omega(G) = -2$ olan bir grafın bağlantılı iken devir bulundurmadığını yani bir ağaç graf olduğunu, bağlantısız iken de bileşenlerinden en az bir tanesinin ağaç olduğunu gösterecektir.

3.2. Omega invaryantının temel özellikleri

Bu bölümde omega invaryantının bazı temel özelliklerinden bahsedilecektir. Bir G grafindaki kapalı bölgelerin (devirlerin) sayısı r olsun. Burada grafın dışında kalan bölge hesaba katılmayacaktır. Örneğin bir devir graf için $r = 1$, bir ağaç için $r = 0$, K_4 tam grafı için $r = 3$ olarak alınacaktır. Bazı kaynaklarda, özellikle topolojik çalışmalarda bazen grafın dışında kalan bölgenin de hesaba katıldığı görülmektedir. Yani yukarıdaki üç örnek bu anlamda düşünüldüğünde r değerleri sırasıyla 2, 1 ve 4 olacaktır. Devir bulunduran graflar için genel olarak $n \geq 3$ olacaktır. Ancak bu tezde 1 bölgeli ve 2 bölgeli

graf kavramları da kabul edilecek ve bunlar sırasıyla bir döngü ve bir katlı kenar çifti olarak alınacaktır.

Aşağıdaki bağıntı omega invariantının aslında kenar ve köşe sayılarına doğrudan bağlı olduğunu gösterir:

3.2.1. Teorem. m kenar ve n köşeye sahip bir G grafi için

$$\Omega(G) = 2(m - n)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. El sıkışma lemması gereği

$$\begin{aligned} 2m &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + \Delta a_\Delta \\ &= (a_3 + 2a_4 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1) + 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta = n$ olduğundan

$$2m = \Omega(G) + 2n$$

ve buradan da $\Omega(G) = 2(m - n)$ olur.

Aşağıdaki sonuç bilinen tüm çizilebilirlik testlerinden daha kısa bir şekilde, verilen bir derece dizisinin çizilebilir olup olmadığını belirleyebilir:

3.2.2. Teorem. Herhangi bir D derece dizisinin çizilebilir olması için $\Omega(D)$ 'nin çift sayı olması gerekir.

İspat. $\Omega(D) = 2(m - n)$ olduğundan omeganın 2'nin bir katı olduğu ve dolayısıyla da çift olması gerektiği aşikârdır.

Örneğin derece dizisi $D = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 5^{(5)}, 8^{(7)}\}$ olan bir graf için $\Omega(D) = 54$ çift sayı olduğundan çizilebilir bir graftır.

Bu teoreme dayanarak verilen bir derece dizisinin omega değerinin tek sayı çıkması durumunda bu derece dizisinin çizilebilir olmadığı söylenebilir. Örneğin derece dizisi $D = \{1^{(10)}, 2^{(1)}, 6^{(5)}, 15^{(7)}\}$ olan bir graf için $\Omega(D) = 101$ tek sayı olduğundan bu derece dizisine karşılık herhangi bir graf çizilemez.

3.2.3. Teorem. G grafi c tane $G_1, G_2, G_3, \dots, G_c$ bileşenine sahip bağlantısız bir graf olsun.

$$\Omega(G) = \sum_{i=1}^c \Omega(G_i)$$

dir. Bir başka deyişle Ω toplamsal bir fonksiyondur.

İspat. G grafının bileşenleri $G_1, G_2, G_3, \dots, G_c$ olduğundan $D(G)$ kümesi, $D(G_i)$ kümelerinin birleşiminden oluşur. Omeganın tanımından sonuç kolayca görülür.

Örneğin, bir G bağlantısız grafi; derece dizisi $D_1 = \{1^{(3)}, 3^{(1)}\}$ olan G_1 , derece dizisi $D_2 = \{2^{(1)}, 7^{(2)}\}$ olan G_2 ve derece dizisi $D_3 = \{2^{(2)}, 3^{(2)}\}$ olan G_3 bileşenlerinden oluşsun. O halde $\Omega(G_1) = -2$, $\Omega(G_2) = 10$ ve $\Omega(G_3) = 2$ olur. Buradan da

$$\Omega(G) = -2 + 10 + 2 = 10$$

elde edilir. Gerçekten de G grafının derece dizisi $D = \{1^{(3)}, 2^{(3)}, 3^{(3)}, 7^{(2)}\}$ olduğundan

$$\Omega(G) = 10$$

olduğu açıktır.

3.2.4. Teorem. G , $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bağlantılı bir graf olsun. G grafının yüz (kapalı bölge veya devir) sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$$

dir.

İspat. Euler karakteristiği gereği $n - m + r = 1$ olduğundan verilen bir D derece dizisi için $n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ ve $2m = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + \Delta a_\Delta$ olduğu hatırlanır ve bu değerler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa $r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$ sonucu elde edilir. Euler karakteristiğinin topolojideki kullanımında bölge sayısına grafın dışı da katılmaktadır. Bu nedenle bu tür kaynaklarda yukarıdaki bağıntı ufak bir değişiklikle $n - m + r = 2$ şeklinde verilmektedir.

G grafinın bağılantısız olma durumunda omeganın toplamsallık özelliğinden faydalanarak aşağıdaki daha genel sonuç elde edilebilir:

3.2.5. Sonuç. $G, D = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip c tane bileşenden oluşan bağılantısız bir graf olsun. Aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

İspat. $\Omega(G)$ toplamsal özelliğe sahip olduğundan ve c sabit bir sayı olduğundan r de toplamsaldır. Yani $i = 1, 2, 3, \dots, c$ için

$$r(G_i) = \frac{\Omega(G_i)}{2} + 1$$

olduğu söylenebilir. Yukarıdaki denklemler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{i=1}^c r(G_i) = \sum_{i=1}^c \frac{\Omega(G_i)}{2} + \sum_{i=1}^c 1$$

ve böylece $r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$ sonucu elde edilir. Buradan bağılantılılıkla ilgili aşağıdaki önemli sonuç elde edilir:

3.2.6. Sonuç. Bütün graflar için

$$c \geq -\frac{\Omega(G)}{2}$$

olur. Denk olarak

$$c \geq n - m$$

eşitsizliği geçerlidir. Aşağıdaki özellik, 3.2.5. Sonucun bir özel durumunu vermektedir:

3.2.7. Sonuç. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip c tane bileşenden oluşan bağılantısız bir graf olsun. $\Omega(G) = -2$ ise

$$c - r = 1$$

dir.

3.2.8. Teorem. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bağlantılı bir graf ve $\Omega(G) \geq 0$ olsun. Bu durumda G grafı en az bir devir bulundurmaktadır.

İspat. 3.2.4. Teorem gereği G grafının kapsadığı kapalı bölge sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$$

olup bu denklemde $\Omega(G) \geq 0$ yerine yazılırsa $r \geq 1$ olacaktır. Bu da, en az bir devir olduğunu gösterir.

Bu teoremden bağlantılılık şartı kaldırıldığında yani graf bağlantısız olduğunda en az iki devir bulundurmaktadır:

3.2.9. Teorem. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bağlantısız bir graf ve $\Omega(G) \geq 0$ olsun. Bu durumda G grafı en az iki devir bulundurmaktadır.

İspat. 3.2.5. Sonuç gereği G grafının kapsadığı kapalı bölge sayısı

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c$$

olup bu denklemde $\Omega(G) \geq 0$ şartını ve bağlantısız olduğundan $c \geq 2$ şartı kullanıldığında $r \geq 2$ olacaktır.

3.2.10. Teorem. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bağlantılı bir graf

$$\Omega(G) = -2 \Leftrightarrow G \text{ bir ağaçtır.}$$

Birinci ispat. $\Omega(G) = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = -2$ olsun. 3.2.4. Teorem gereği G grafının kapsadığı kapalı bölge sayısı,

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1$$

denkleminde $\Omega(G) = -2$ değeri yerine yazılırsa $r = 0$ olur. Yani bir devire sahip değildir. Dolayısıyla bu bir ağaçtır.

İkinci ispat. $\Omega(G) = 2(m - n) = -2$ olduğundan $n - m = 1$ bulunur. Bu değer Euler karakteristiğinin $n - m + r = 1$ formülünde yerine konulursa $r = 0$ bulunur.

Üçüncü ispat. 3.2.7. Sonuç gereği $c - r = 1$ olduğu hatırlanırsa bağlantılılık gereği $c = 1$ olduğundan $r = 0$ elde edilir. Bu da grafın bir ağaç olduğunu gösterir.

3.2.11. Teorem. Eğer $\Omega(G) \leq -4$ ise G kesinlikle bağlantısızdır.

İspat. Yukarıda verilen 3.2.6. Sonuçdaki $c \geq -\frac{\Omega(G)}{2}$ denkleminde $\Omega(G) \leq -4$ olduğu kullanılırsa bileşen sayısı $c \geq 2$ olur. Yani G grafı en az iki bileşenden oluşmaktadır. Bu da G 'nin bağlantısız olduğunu gösterir.

3.2.12. Teorem. $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisi verilsin. Eğer $\Omega(D) \geq -2$ ise D potansiyel bağlantılıdır. Yani D derece dizisinin çizimlerinden en az biri bağlantılıdır.

Bu teoreme göre G bağlantılı bir graf ve $\Omega(G) \geq -2$ ise G grafı ya bir devir içeren graftır ya da bir ağaçtır.

Bir G grafındaki ağaç olan bileşenlerin sayısı c_a ve devir bulunduran bileşenlerin sayısı da c_c olsun. Bu durumda $c = c_a + c_c$ olur. Aşağıdaki sonuç c_c sayısının çeşitli değerleri için c_a sayısının alacağı olası değerleri verecektir:

3.2.13. Teorem. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bir graf ve $r(G), G$ grafındaki devir sayısı olsun. Eğer k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $\Omega(D) = -2k \leq -4$ ise

- i. $c_a \geq k$ 'dir.
- ii. Eğer $c_c = 0$ ise $c_a = k$ olur.
- iii. Eğer $c_c = 1$ ise $c_a = r(C_1) - 1 + k$ 'dir. Burada C_1 , devir bulunduran tek bileşendir.
- iv. $c_c \geq 2$ ise $c_a = \sum r(C_i) - c_c + k$ 'dir. Burada C_i devir bulunduran bileşenlerdir.

İspat. i. Devir bulundurmeyen bileşenlerin, yani ağaç olan bileşenlerin her biri için $\Omega = -2$ olduğu ve her bir devir bulunduran bileşen için $\Omega \geq 0$ olduğu bilinmektedir. Eğer $\Omega(D) = -2k \leq -4$ ise ve tüm bileşenler devir içermiyorsa Ω 'nın toplamsallığı gereği

tam k tane devir içermeyen bileşen mevcuttur, yani $c_a = k$ olur. Eğer $\Omega(D) = -2k \leq -4$ ise ve en az bir bileşen devir içeriyorsa bu durumda devir içermeyen bileşen sayısının $c_a \geq k$ olacağı açıktır.

ii. $c_c = 0$ olduğundan devir bulunduran bir bileşene sahip değildir. Dolayısıyla bütün bileşenler birer ağaçtır. Ağaçların Ω değeri -2 olduğundan her bir devir bulundurmayan C_i bileşeni için $\Omega(C_i) = -2$ olur. Ağaç olan bileşenlerin sayısı olan c_a için $c_a = \frac{\Omega(G)}{-2} = \frac{-2k}{-2} = k$ elde edilir.

iii. $c_c = 1$ olduğundan tek devir bulunduran bir tane bileşen mevcuttur. Bu bileşen C_1 olsun. $c_a = \frac{\Omega(C_1) - \Omega(G)}{2}$ olur. Buradan 3.2.4. Teorem gereği $c_a = \frac{2r(C_1) - 2 + 2k}{2}$ elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

iv. $c_c \geq 2$ olsun ve bu devir içeren bileşenleri C_i ile gösterilsin. Böylece $c_a = \frac{\sum \Omega(C_i) - \Omega(G)}{2} = \frac{\sum (2r(C_i) - 2) + 2k}{2} = \sum r(C_i) - c_c + k$ olur.

3.2.14. Teorem. D , çizilebilir bir derece dizisi olsun. c ve c_a , sırasıyla D 'nin bir G çiziminin tüm bileşenlerinin ve devir içermeyen bileşenlerinin sayılarını; C_i ve A_i ise sırasıyla devir bulunduran ve bulundurmayan bileşenleri gösterebilir. Hatırlanacağı gibi $\Omega(A_i) = -2$ idi. $\Omega(C_i) = k_i$ olsun. Bu durumda

i. eğer $\Omega(D) \leq -4$ ise D 'nin tüm çizimleri bağlantısızdır ve

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^{c-c_a} C_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{c_a} A_i \right)$$

dir. Ayrıca $\Omega(G) = k_1 + k_2 + \dots + k_{c-c_a} - 2c_a \leq -4$ olur.

ii. eğer $\Omega(D) = -2$ ise D 'nin herhangi bir çizimi bağlantılı da bağlantısız da olabilir. Böyle bir G çizimi bağlantılı ise G devir bulundurmaz ve $G = A_1$ şeklindedir. Böyle bir G çizimi bağlantısız ise

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^{c-c_a} C_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{c_a} A_i \right)$$

dir. Ayrıca $\Omega(G) = k_1 + k_2 + \dots + k_{c-c_a} - 2c_a = -2$ olur.

iii. Eğer $\Omega(D) \geq 0$ ise D 'nin herhangi bir çizimi bağlantılı da bağlantısız da olabilir. Ayrıca tüm çizimler devir içerir. Böyle bir G çizimi bağlantılı ise G devir bulundurur ve $G = C_1$ şeklindedir. Böyle bir G çizimi bağlantısız ise yine G devir bulundurur ve

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^{c-c_a} C_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{c_a} A_i \right)$$

dir. Ayrıca $\Omega(G) = k_1 + k_2 + \dots + k_{c-c_a} - 2c_a \geq 0$ olur. Bu teoremin aşikâr sonuçları aşağıdaki gibidir:

3.2.15. Sonuç. i. Eğer bir G grafi sadece devir içeren bileşenlerden oluşuyorsa $\Omega(G) \geq 0$ olur.

ii. Eğer bir G grafının tüm bileşenleri ağaçlardan oluşuyorsa $\Omega(G) \leq -2$ olur.

3.2.16. Sonuç. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Omega(D) = -2k$ ise G grafını oluşturan bileşenlerin en az k tanesi ağaçtır.

İspat. G 'yi oluşturan bileşenlerde hiç ağaç olmadığı varsayılırsa 3.2.13. Teorem gereği bütün bileşenler devirden oluşmalıdır. Bütün bileşenler devirden oluştuğu için ve 3.2.3. Teorem gereği omeganın toplamsal özelliğinden dolayı $\Omega(D) \geq 0$ olmak zorundadır. Demek ki G 'yi oluşturan bileşenlerin tümü devirden oluşamaz. Yani varsayımla çelişir.

Bu çalışmada bir G grafindaki köprülerin sayısı $br(G)$ ile; kopma noktalarının sayısı da $cv(G)$ ile gösterilecektir. Buna göre

3.2.17. Teorem. $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ ve G , D 'nin bir çizimi olsun. G bağlantılı ve $\Omega(D) = -2$ ise

$$\Omega(G) = 2(br(G) - cv(G) - a_1)$$

ve böylece

$$cv(G) + a_1 - br(G) = 1$$

olur.

İspat. $\Omega(D) = -2$ ve bağlantılı olduğundan D 'nin tüm çizimleri devir içermeyen çizimlerdir. Böyle bir grafta tüm kenarlar birer köprü, tüm köşeler birer kopma noktası veya birer sallanan köşedir. Dolayısıyla 3.2.10. Teorem gereği sonuç görülür.

Aşağıdaki sonuç 3.2.13. Teoremin özel bir hali olup sık kullanıldığından ayrıca verilmesi uygun görülmüştür:

3.2.18. Teorem. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bir graf ve $\Omega(D) = -2$ olsun. G grafının toplam devir sayısı (kapalı bölge sayısı) $r(G)$ olsun. G 'nin ağaç şeklindeki bileşenlerinin sayısı c_a ve devir içeren bileşenlerinin sayısı da c_c ile gösterilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $c_a \geq 1$ 'dir.

ii. Eğer $c_c = 0$ ise $c_a = 1$ olur.

iii. Eğer $c_c = 1$ ise C_1 devir bulunduran tek bileşen olmak üzere

$$c_a = 1 + \frac{\Omega(C_1)}{2} = r(C_1)$$

olur.

iv. $c_c \geq 2$ ise C_i 'ler devir bulunduran bileşenler olmak üzere

$$c_a = \sum_{i=1}^{c_c} r(C_i) - c_c + 1$$

olur.

İspat. Sadece sonuncu iddiayı ispatlayacağız. Diğerleri benzer şekilde önceki sonuçlar yardımıyla ispatlanabilir. 3.2.4. Teorem ve $c = c_a + c_c$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} c_a &= \frac{\sum_{i=1}^{c_c} \Omega(C_i)}{2} + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{c_c} (r(C_i) - 1) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{c_c} r(C_i) - c_c + 1 \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

Örnek olarak $\{1^{(2)}\}$ derece dizisine sahip P_2 yol grafi ele alınsın, bkz. Şekil 3.1.



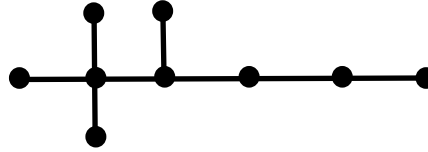
Şekil 3.1. $\{1^{(2)}\}$ derece dizisine sahip P_2 yol grafi

$\Omega(P_2) = -2$, $cv(P_2) = 0$, $a_1 = 2$ ve $br(P_2) = 1$ olduğu açıktır ve bu değerler 3.2.17. Teorem'i sağlar.

3.2.19. Tanım. Bir graftaki tüm köşelerin merkezi bir yola olan uzaklıkları 0 veya 1 ise böyle bir grafa *tırtıl graf* (*caterpillar tree*) adı verilir.

Bir tırtıl grafın aynı zamanda bir ağaç olduğuna dikkat ediniz.

Örneğin $C = \{1^{(5)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisi düşünölsün. C 'nin bağlantılı her bir çizimi $\Omega(C) = -2$ olduğundan bir tırtıl graftır. Bkz. Şekil 3.2.



$\{1^{(5)}, 2^{(2)}, 3^{(1)}, 4^{(1)}\}$

Şekil 3.2. Tırtıl graf

Burada $cv(C) = 4$, $a_1 = 5$ ve $br(C) = 8$ olduğuna ve 3.2.17. Teoremi sağladığına dikkat ediniz.

3.2.20. Sonuç. Bağlantılı olan graflar için

$$\frac{\Omega(G)}{2} = r(G) - c(G)$$

dir. Burada grafın dışındaki bölgenin sayılmadığı bir kez daha hatırlanmalıdır.

3.3. Omega invaryantının Euler karakteristiği ile ilgisi

Kompakt yönlendirilebilir yüzeylerin sınıflandırılması bu yüzeylerin cinsi adı verilen ve genellikle g ile gösterilen bir sabit sayıya bağlıdır. Cins, bir anlamda yüzeyin delik sayısıdır. Her bir kompakt yönlendirilebilir yüzey ya cinsi 0 olan küreye, ya cinsi 1 olan

tora, ya da cinsi birden büyük bir tamsayı olan torların bağlantılı toplamına homeomorftür. Bir S yüzeyinin $\chi(S)$ ile gösterilen Euler karakteristiği, o yüzey üzerine çizilebilen n köşeli, m kenarlı ve r bölgeyi her bir grafta $n - m + r$ sayısının bir değişmez (invariant) oluşundan hareketle

$$\chi(S) = n - m + r$$

şeklinde tanımlanmıştır. Cinsi g olan kompakt ve yönlendirilebilir bir yüzeyde bu sayı

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

şeklindedir. $\chi(S)$ sayısının verilen herhangi bir yüzey için bir invariant olması da bu sebeptendir. S yüzeyi üzerine hangi büyüklükte bir graf çizilirse çizilsin $n - m + r$ sayısı hep aynı çıkacaktır. Genellikle bir yüzeyin Euler karakteristiği için $\chi(S)$ sembolünü kullanıldığı gibi bu yüzey üzerine çizilebilen bir G grafının Euler karakteristiği için de $\chi(G)$ gösterimi tercih edilir. Burada dikkat edilmesi gereken husus şudur: Bir graf cinsi g olan bir yüzeye çizilebiliyorsa cinsi daha büyük olan her bir yüzeye de çizilebilir. Bu sebeple bir grafın cinsinden ve Euler karakteristiğinden bahsederken bu grafın çizilebildiği en düşük cinsli yüzey dikkate alınır.

Girişte de belirtildiği gibi tanımlanan omega invariantının Topolojide ikiyüzelli yıldır bilinen Euler karakteristiği ile yakın ilgisi vardır. Bu kısımda bu ilişki belirlenecektir.

3.3.1. Teorem. Herhangi bir G grafi için

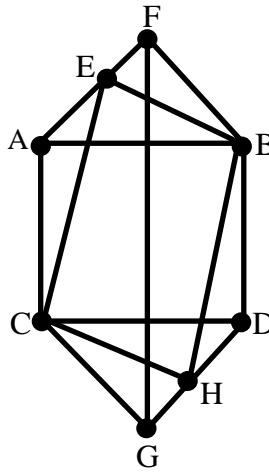
$$\Omega(G) = 2(r - \chi(G))$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. G grafi, köşe sayısı n , kenar sayısı m ve devir sayısı (kapalı bölge sayısı) r olan bir graf olsun. Hatırlanacağı üzere $\chi(G)$ Euler karakteristiği, $\chi(G) = n - m + r$ bağıntısını sağlar. 3.2.1. Teorem gereği $\frac{\Omega(G)}{2} = m - n$ olduğu da biliniyor. Dolayısıyla sonuç görülür.

Grafların çeşitli özelliklerinin çalışılması sırasında grafları farklı özelliklere göre sınıflandırmak oldukça faydalı olmaktadır. Bunlar arasında köşe ve kenar sayıları, bölge sayısı, giriş, sallanan kenar, köprü sayıları vs. yer almaktadır. Bölge sayısına göre yapılan

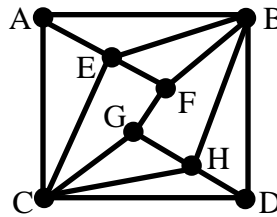
bir sınıflandırmada hiçbir bölgeye sahip olmayan graflar, tek devir bulunduran graflar, iki devir bulunduran graflar, üç devir bulunduran graflar, vs. sırasıyla *devirsiz (acyclic)*, *tek devirli (unicyclic)*, *iki devirli (bicyclic)*, *üç devirli (tricyclic)* vs. olarak adlandırılır. Bir grafın bağımsız devir sayısına *grafın devir sayısı (cyclomatic number)* denilir. Bu tür sınıflandırma problemleriyle uğraşırken graftaki bölge (devir) sayısını belirlemek doğal olarak oldukça önemlidir. Tabii ki bazı karmaşık graflarda kapalı bölgeleri, özellikle de üst üste geldiği durumlarda saymak hiç de kolay olmayabilir. Bu duruma örnek olarak Şekil 3.3'deki graf verilebilir.



Şekil 3.3. Bölge sayısı kolay belirlenemeyen bir graf

Bu grafta bölgeleri birbirine bağlayan köprüler veya kopma noktaları olmadığından bölgeler hemen belirlenemez. Bu yüzden sadece kirişlerin sayılması gerekir. Şekil 3.3'ün içerisinde 7 tane kiriş vardır. 7 kirişin olması 8 tane kapalı bölge olduğunu ifade eder.

Şekil 3.4'de yukarıdaki şeklin farklı bir çizimi verilmiştir ve bu çizimdeki bölgelerin sayısının 8 olduğu bölgeler ayrık olduğundan kolayca sayılabilir.

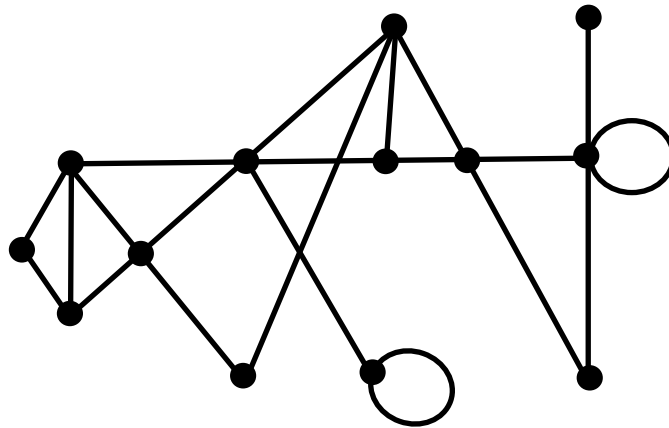


Şekil 3.4. Bölge sayısı kolayca belirlenebilen bir graf

Bu örnek gösteriyor ki bir çizilebilir derece dizisi verildiğinde bu derece dizisinin herhangi bir çiziminin kaç adet bölge bulundurduğu ilk bakışta söylenemeyebilir. Bu çizim farklı şekillerde çizilebilir ve bu sayım yukarıdaki örnekte olduğu gibi daha kolay bir şekilde gerçekleştirilebilir. Ya da verilen bir grafi yeniden çizerek bu çizim gerçekleştirilebilir. Ancak her örnekte bunu yapabilmek o kadar da kolay değildir. Özetlenecek olursa verilen bir derece dizisinin tüm çizimlerinin bölge sayısı veya verilen bir grafın bölge sayısı klasik yöntemle her zaman kolayca bulunamayabilir. Tanımlanan omega invaryantı bu konuda da yardımcı olacaktır. Verilen örnekteki G grafının derece dizisi $D = \{3^{(4)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}\}$ olup $\Omega(D) = 14$ 'tür. 3.2.4. Teorem gereği aranan bölge sayısı $r = \frac{\Omega(G)}{2} + 1 = \frac{14}{2} + 1 = 8$ olarak bulunur.

Dikkat edilirse omega invaryantından faydalanarak bölge sayısı hesaplandığında grafi çizmeye dahi gerek olmamaktadır. Ω bir graf invaryantı olduğundan 3.2.4. Teorem gereği bölge sayısını veren r de bir graf invaryantıdır. Bir başka deyişle verilen bir derece dizisinin eşit bileşen sayısına sahip tüm çizimlerinde aynı sayıda kapalı bölge bulunmak zorundadır. Daha önce de belirtildiği gibi kapalı bölge denince genelde $n \geq 3$ olmak üzere C_n devirleri anlaşılrsa da burada bunlara ek olarak döngüleri (1 – gen) ve iki katlı kenar arasında kalan bölgeler (2 – gen) de alınacaktır.

3.3.2. Örnek. İkinci bir örnek olarak $D = \{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(3)}, 4^{(4)}, 5^{(2)}\}$ derece dizisi ele alınsın. Bu derece dizisinin bağlantılı bir çizimi Şekil 3.5'deki gibidir.



Şekil 3.5. $\{1^{(1)}, 2^{(3)}, 3^{(3)}, 4^{(4)}, 5^{(2)}\}$ derece dizisinin bağlantılı bir çizimi

Burada $\Omega(D) = 16$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla bu graftaki bağımsız bölge sayısı

$$r = \frac{16}{2} + 1 = 9$$

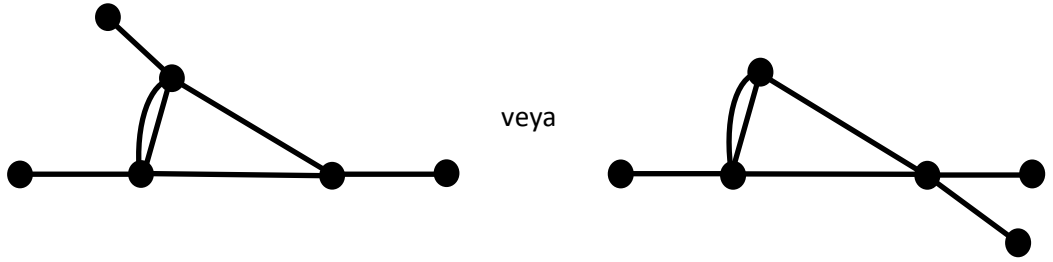
olur. Dolayısıyla bağlantılı tüm çizimlerde 9 adet bölge bulunacağı açıktır.

4. DERECE DİZİLERİNİN TEMEL ÇİZİMLERİ

4.1. Giriş

Hatırlanacağı gibi bu tezin ana hedefi, verilen bir çizilebilir derece dizisinin genellikle çok sayıda olan çizilmiş halleri ve bunların özellikleri hakkında çeşitli bilgiler elde etmektir. Bu hedefe yönelik çalışmalar sonucunda adına omega invaryantı (kısaca omega) denilen ve her bir derece dizisi için sabit olan bir sayı tanımlanmıştır. Bu omega invaryantı sayesinde derece dizisinin çizimlerinin ortak özelliklerini belirlemek bu tezin sonuçlarını zenginleştirmiştir.

Derece dizilerine karşılık gelen graflar üzerinde yapılan tüm çalışmalarda belirtildiği gibi çizilebilir derece dizileri bazen bir tek şekilde çizilebildiği gibi bazen de birden fazla şekilde çizilebilir. Örneğin Şekil 4.1'de $D = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisine karşılık olarak çizilebilen iki farklı graf görülmektedir.



Şekil 4.1. $\{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisine ait iki farklı çizim

Verilen bir çizilebilir derece dizisinin farklı şekillerde çizilebilmesi bunlardan hangisi ya da hangilerinin daha avantajlı olduğu sorusunu akla getirecektir. Tabii ki bu sorunun cevabı, hedeflenen özelliklere bağlı olarak değişecektir. Bazen verilen derece dizisinin çizimlerinin belli bir özelliğine dair bir sayı belirlemek istenebilir, bazen de böyle bir sayı değişken olduğunda onun en küçük ve en büyük değerlerini bulmak gerekebilir. Graf teoride bu tür problemlere uç (*extremal*) problemler denilmektedir.

Bu bölümde referans noktası olarak seçilen ve adına temel çizim formu denilen bir form tanımlanacaktır. Derece dizilerinin üç farklı olası durumu için farklı bir temel çizim formu verilecektir. Bir derece dizisinin temel çizim formu bilindiğinde, diğer çizimleri hakkında

bilgiler elde etmek mümkün olmaktadır. Yani bir anlamda temel çizim formu bir referans noktası olarak kullanılacaktır.

Mümkün olduğunda bir grafin bağlantılı çizilebilmesinin birçok avantajları vardır. $\Omega(D) \geq 0$ ve $\Omega(D) = -2$ durumlarında verilen derece dizisi potansiyel bağlantılıdır. Bir başka deyişle en az bir bağlantılı çizime sahiptir. Bu nedenle bu iki durumda kalan derece dizilerinin temel çizimlerinin bağlantılı olarak tercih edilmesi de gayet doğaldır. Ancak $\Omega(D) \leq -4$ olması durumunda verilen derece dizisi potansiyel bağlantılı değildir. Yani hiçbir şekilde bağlantılı olarak çizilemez. Bu nedenle incelenilecek bu üçüncü durumda tanımlanacak olan temel çizim formunun da bağlantılı olması beklenmemelidir.

Bu bölümde derece dizilerinin olası üç durumunun her birisi için temel çizim adı verilen çizimlerinin nasıl yapılacağı incelenecektir. Bu durumlar

$$\Omega(D) \geq 0, \quad \Omega(D) = -2 \quad \text{ve} \quad \Omega(D) \leq -4$$

şeklinindedir. İlk durumda elde edilen temel çizimlere devirli temel çizim adı verilecektir. Bu durumda verilen derece dizisinin nasıl bir yöntemle çizileceğine ilişkin bir algoritma tanımlanacaktır. Tabii ki basit graflarla çalışmak amaçlandığından döngü ve katlı kenarlardan kaçınmak gerektiğini unutmamak gerekir. Daha sonra $\Omega(D) = -2$ durumunda adına devir bulundurmeyen (veya devirsiz) temel çizim denilecek bazı temel çizimler elde edilecektir. Bu durum için de bir algoritma tanımlanacaktır. Son olarak adına karma tipli temel çizim denilen $\Omega(D) \leq -4$ durumundaki temel çizimler için bir algoritma verilecektir.

4.2. $\Omega(D) \geq 0$ durumu

4.2.1. $\Omega(D) \geq 0$ olma durumunda temel çizim

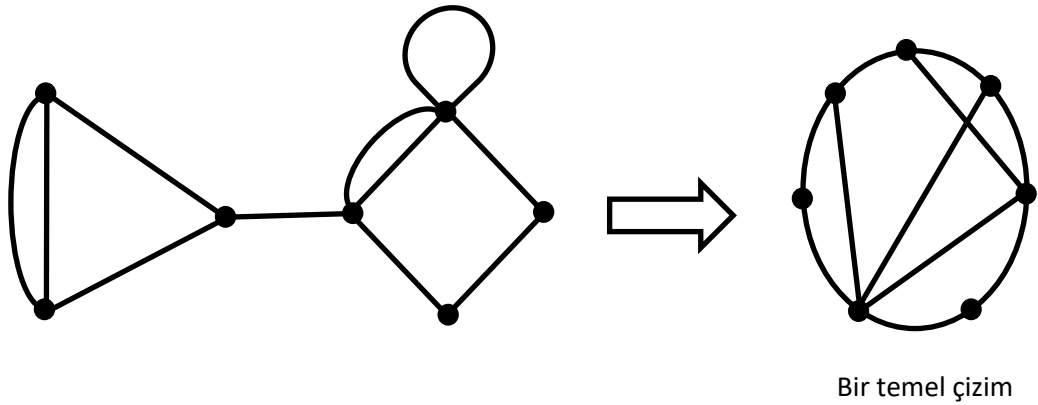
Buraya kadar olan çalışmalar neticesinde, çizilebilen, bağlantılı ve en az bir devir bulunduran tüm derece dizilerinin bir $C_{a_2+a_3+\dots+a_\Delta} = C_{n-a_1}$ deviri etrafında çizilebilir olduğu gözlemlenmiştir. Burada $n - a_1$ sayısı, böyle bir derece dizisinin herhangi bir çiziminin sahip olabileceği en büyük devirin uzunluğunu göstermektedir.

4.2.1.1. Tanım. $\Omega(D) \geq 0$ bir çift sayı olsun. D derece dizisinin, bir $(n - a_1)$ -genin köşelerine a_1 tane sallanan kenar ve elde edilen bu çizime toplam $\Omega(D)/2$ tane kiriş,

döngü ve katlı kenar eklenerek bulunan bağlantılı bir çizimine D derece dizisinin bir devirli temel çizimi (cyclic fundamental form) adı verilir.

Tanımdan da görüleceği üzere, $\Omega(D) \geq 0$ özelliğindeki bir D derece dizisinin temel çizimi bağlantılıdır ve tek değildir. Amaca uygun olarak kiriş, döngü ve katlı kenar sayıları değiştirildiğinde farklı temel çizimler elde edilecektir. 4.2.2.17 Teoremden görüleceği gibi bu üç tür kenarın toplam sayısı $\Omega(D)/2$ 'dir. Eğer grafın basit graf olması isteniyorsa döngü ve katlı kenarların mevcut olamayacağı gerçeğinden hareketle $\Omega(D)/2$ tane kirişe sahip bir temel çizim bulunması gerekecektir. Örneğin eğer döngü olmaması veya sayısının en az olması isteniyorsa bu durumda maksimum sayıda kiriş ve katlı kenar kullanarak elde edilen bir temel çizim kullanılmalıdır.

4.2.1.2. Örnek. $\{2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 8 \geq 0$ olup bu derece dizisinin çok sayıda çiziminden iki tanesi Şekil 4.2'de görülmektedir. Bunlardan sağdaki bir 7 –gen olup derece dizisinde hiç derecesi 1 olan köşe olmadığından sallanan kenara ihtiyaç duyulmayan bir temel çizimdir. 7 –gen üzerindeki köşelerin yerleri değiştirilerek daha birçok farklı temel çizim yapılabilir. Soldaki ise temel çizim formunda olmayan herhangi bir çizimdir. Bu derece dizisi verildiğinde ve bu derece dizisine karşılık gelen bir temel çizim elde edilmesi istendiğinde doğrudan sağdaki çizim yapılır. Ya da soldaki graf verilip bunun temel formda çizilmiş hali istendiğinde yine sağdaki çizim yapılabilir.



Şekil 4.2. $\{2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}\}$ derece dizisinin herhangi bir çizimi ve bir temel çizimi

4.2.2. $\Omega(D) \geq 0$ durumunda temel çizim algoritması

Bu kısımda $\Omega(D) \geq 0$ ve bir çift sayı olması durumunda bir temel çizimin nasıl elde edileceğine, yani varlığına, dair bir algoritma geliştirilecektir. Hatırlanacağı gibi bu durumdaki bir temel çizim bağlantılı olacaktır.

4.2.2.1. Teorem. $\Omega(D) \geq 0$ ve bir çift sayı olsun. D derece dizisinin en az bir devirli temel çizimi mevcuttur.

İspat. Bu devirli temel çizimi genel hatlarıyla aşağıdaki temel prensiplere dayanan bir algoritma yardımıyla oluşturulacaktır.

1) $a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ uzunluklu bir C deviri çiziniz. Elde edilen grafın derece dizisi $\{2^{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}\}$ şeklindedir.

2) Eğer $a_1 > 0$ ise C deviri üzerinde katlı kenardan mümkün olduğunca kaçınabilmek adına birbirinden mümkün olduğunca uzak olan köşelere a_1 tane sallanan kenar ekleyiniz. Elde edilen grafın derece dizisi $\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta-a_1)}, 3^{(a_1)}\}$ şeklindedir.

3) Eğer $\Omega(D) = 0$ ise algoritma sona erer. Değilse toplam $\Omega(D)/2$ tane kiriş, döngü ve/veya katlı kenar ekleyiniz. Bu son durumda elde edilen grafın derece dizisi $\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ şeklindedir ve algoritma sona erer.

Derece dizisi $\Delta \leq 4$ olan moleküler graflara kısıtlanırsa daha detaylı bir ispat verilebilir: Burada çeşitli alt durumlar mevcuttur.

İlk olarak $a_3 + a_4$ çift ise

i. $a_1 = 0$ için derece dizisi $D = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ şekline dönüşür.

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir ve $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)}\}$ elde edilir.

2. adım: $\frac{a_3+a_4}{2}$ tane kiriş yardımı ile $a_3 + a_4$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylelikle yeni derece dizisi $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)-(a_3+a_4)}, 3^{(a_3+a_4)}\} = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)}\}$ olur. Burada el sıkışma lemması gereği $a_3 + a_4$ toplamının çift olması gerektiğine dikkat ediniz.

3. adım: $\frac{a_4}{2}$ tane kiriş yardımı ile mümkünse katlılık olmadan a_4 tane derecesi 3 olan köşe birleştirilir. Bu durumda $D = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)-a_4}, 4^{(a_4)}\} = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ elde edilmiş olur. Bu da aranan çizimdir.

ii. $a_1 \neq 0$ için derece dizisi $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ şekline dönüşür.

$a_1 < a_4$ ise

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir ve $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)}\}$ elde edilir.

2. adım: $\frac{a_3+a_4}{2}$ tane kiriş ile $a_3 + a_4$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylelikle yeni derece dizisi $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)-(a_3+a_4)}, 3^{(a_3+a_4)}\} = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)}\}$ olur.

3. adım: a_1 tane derecesi 3 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. Bu durumda yeni derece dizisi $\{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4-a_1)}, 4^{(a_1)}\}$ olur.

4. adım: $a_4 - a_1$ tane derecesi 3 olan köşe mümkünse katlılık olmadan birleştirilir. Bu durumda derece dizisi $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4-a_1)-(a_4-a_1)}, 4^{(a_1)+(a_4-a_1)}\} = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ olarak elde edilmiş olur. Bu da aranan çizimdir.

$a_1 > a_4$ ise

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ deviri çizilir ve $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)}\}$ elde edilir.

2. adım: Devir üzerinde $\frac{a_3+2a_4-a_1}{2}$ tane kiriş yardımı ile $a_3 + 2a_4 - a_1$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylelikle yeni $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)-(a_3+2a_4-a_1)}, 3^{(a_3+2a_4-a_1)}\} = \{2^{(a_1+a_2-a_4)}, 3^{(a_3+2a_4-a_1)}\}$ olur. Burada el sıkışma lemması gereği $a_3 + 2a_4 - a_1$ sayısının tek olması gerekir.

3. adım: Derecesi 2 olan $a_1 - a_4$ tane köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. Bu durumda derece dizisi $D = \{1^{(a_1-a_4)}, 2^{(a_1+a_2-a_4)-(a_1-a_4)}, 3^{(a_3+2a_4-a_1+(a_1-a_4))}\} = \{1^{(a_1-a_4)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)}\}$ olur.

4. adım: Derecesi 3 olan a_4 tane köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. Böylece $D = \{1^{(a_1 - a_4 + a_4)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3 + a_4 - a_4)}, 4^{(a_4)}\} = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ olur.

$a_1 = a_4$ ise

1. adım: $C_{a_2 + a_3 + a_4}$ çizilir ve $D = \{2^{(a_2 + a_3 + a_4)}\}$ elde edilir.

2. adım: $\frac{a_3 + a_4}{2}$ tane kiriş yardımı ile derecesi 2 olan $a_3 + a_4$ tane köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylelikle yeni derece dizisi $D = \{2^{(a_2 + a_3 + a_4) - (a_3 + a_4)}, 3^{(a_3 + a_4)}\} = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3 + a_4)}\}$ olur.

3. adım: Derecesi 3 olan a_1 tane köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. Bu durumda $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3 + a_4 - a_1)}, 4^{(a_1)}\}$ olur. Ayrıca $a_1 = a_4$ olduğundan derece dizisi $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_1)}\}$ olarak elde edilir.

İkinci olarak $a_3 + a_4$ tek ise

i. $a_1 = 0$ için derece dizisi $D = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ şeklinde olacaktır.

1. adım: $C_{a_2 + a_3 + a_4}$ deviri çizilir ve $D = \{2^{(a_2 + a_3 + a_4)}\}$ elde edilir.

2. adım: $\frac{a_3 + a_4 - 1}{2}$ tane kiriş ile $a_3 + a_4 - 1$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylelikle yeni derece dizisi $D = \{2^{(a_2 + a_3 + a_4) - (a_3 + a_4 - 1)}, 3^{(a_3 + a_4 - 1)}\} = \{2^{(a_2 + 1)}, 3^{(a_3 + a_4 - 1)}\}$ olur.

3. adım: Bir tane derecesi 2 olan köşe ile bir tane derecesi 3 olan köşe birleştirilir. Bu durumda $D = \{2^{(a_2 + 1 - 1)}, 3^{(a_3 + a_4 - 1) + 1 - 1}, 4^{(1)}\} = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3 + a_4 - 1)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisi elde edilmiş olur.

4. adım: Derecesi 3 olan $a_4 - 1$ tane köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylece $D = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3 + a_4 - 1) - (a_4 - 1)}, 4^{(1 + a_4 - 1)}\} = \{2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ elde edilir.

ii. $a_1 \neq 0$ için $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ şeklinde bir derece dizisi mevcuttur.

$a_1 < a_4$ ise

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir ve $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)}\}$ elde edilir.

2. adım: $\frac{a_3+a_4-1}{2}$ tane kiriş ile $a_3 + a_4 - 1$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylelikle derece dizisi $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)-(a_3+a_4-1)}, 3^{(a_3+a_4-1)}\} = \{2^{(a_2+1)}, 3^{(a_3+a_4-1)}\}$ olur.

3. adım: Bir tane derecesi 2 olan köşeye bir tane sallanan kenar eklenir. Yani $D = \{1^{(1)}, 2^{(a_2+1-1)}, 3^{(a_3+a_4-1)+1}\} = \{1^{(1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)}\}$ elde edilmiş olur.

4. adım: Derecesi 3 olan $a_1 - 1$ tane köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. $D = \{1^{(1+a_1-1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)-(a_1-1)}, 4^{(a_1-1)}\} = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4-a_1+1)}, 4^{(a_1-1)}\}$ olur.

5. adım: Eğer $a_4 - a_1 + 1 = 0$ ise algoritma biter. Aksi taktirde $\frac{a_4-a_1+1}{2}$ tane kiriş ile $a_4 - a_1 + 1$ tane derecesi 3 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Bu durumda derece dizisinin son hali

$D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4-a_1+1)-(a_4-a_1+1)}, 4^{(a_1-1)+a_4-a_1+1}\} = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ şeklinde elde edilir ve böylece istenen çizim elde edilmiş olur.

$a_1 > a_4$ ise

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir ve $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)}\}$ elde edilir.

2. adım: $\frac{a_3+2a_4-a_1}{2}$ tane kiriş ile $a_3 + 2a_4 - a_1$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir. Böylelikle elde edilen derece dizisi $D = \{2^{(a_2+a_3+a_4)-(a_3+2a_4-a_1)}, 3^{(a_3+2a_4-a_1)}\} = \{2^{(a_2-a_4+a_1)}, 3^{(a_3+2a_4-a_1)}\}$ olur.

3. adım: $a_1 - a_4$ tane derecesi 2 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. Yani $D = \{1^{(a_1-a_4)}, 2^{(a_2-a_4+a_1)-(a_1-a_4)}, 3^{(a_3+2a_4-a_1)+(a_1-a_4)}\} = \{1^{(a_1-a_4)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)}\}$ elde edilmiş olur.

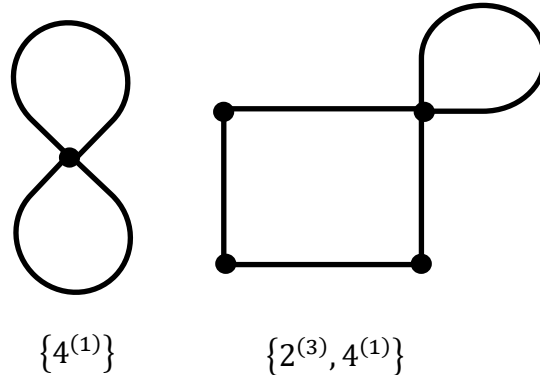
4. adım: Derecesi 3 olan a_4 tane köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. $D = \{1^{(a_1-a_4)+(a_4)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3+a_4)-(a_4)}, 4^{(a_4)}\} = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}\}$ olur.

$a_1 = a_4$ ise

$a_3 + a_4$ tek olma şartına uymadığı için bu ihtimal yoktur. Çünkü el sıkışma lemması gereği a_1 ile a_3 aynı anda tek ya da aynı anda çift olması gerektiğinden, a_4 çift olduğunda eşitlikten dolayı a_1 de çift olacaktır. a_1 çift olması gerektiğinden, el sıkışma lemması gereği a_3 de çift olmak zorunda olacaktır. Bu da a_1, a_3 ve a_4 sayılarının aynı anda tek veya aynı anda çift olacağını gösterdiğinden en baştaki şarta uymaz. Böylelikle $a_3 + a_4$ tek iken $a_1 = a_4$ olamaz.

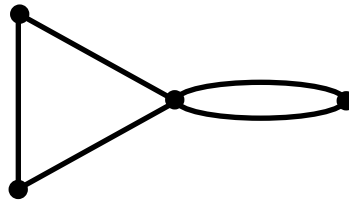
Not: “Derecesi 2 olan bir köşeyi derecesi 3 olan bir köşe ile birleştirin” denilen adımlarda eğer derecesi 3 olan hiçbir köşe yoksa derecesi 2 olan mevcut bir köşeden çıkan ve yine aynı köşeye dönen bir döngü eklenir. (Çıkkılan 2 dereceli köşenin derecesi artık 3 olduğundan kurala uyulmuş olur.)

4.2.2.2. Örnek. $D = \{4^{(1)}\}$ ve $D = \{2^{(3)}, 4^{(1)}\}$ derece dizileri ele alınsın, bkz. Şekil 4.3.



Şekil 4.3. İki temel çizim

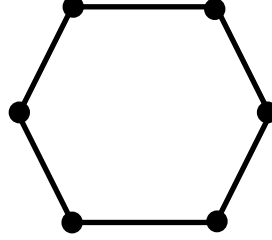
Yukarıdaki iki çizim de $\Omega(D) \geq 0$ durumundaki temel çizim yöntemine uygun olarak çizilmiştir. Soldaki şekilde en büyük devir 1 –gen olduğundan başka bir çizim yapılamaz. Ancak sağdaki çizimde bir dörtgen bulunduğundan 4.2.2.1. Teorem gereği bu çizim aynı zamanda bir 3 –gen ve bir 2 –gen kullanılarak da yapılabilir, bkz. Şekil 4.4.



Şekil 4.4. $\{2^{(3)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisinin bir diğer çizimi

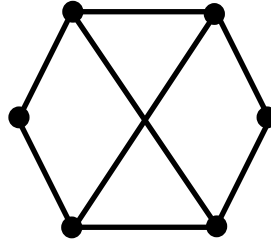
4.2.2.3. Örnek. $D = \{2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisi verilsin. $a_3 + a_4 = 4$ çift ve $a_1 = 0$ olduğundan

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir. Yani $C_{2+2+2} = C_6 = \{2^{(6)}\}$ çizilir. Bkz. Şekil 4.5.



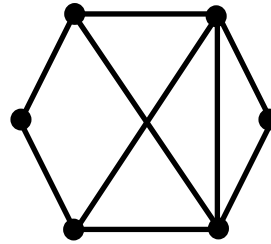
Şekil 4.5. C_6

2. adım: $\frac{a_3+a_4}{2} = 2$ tane kiriş yardımı ile $a_3 + a_4 = 4$ tane derecesi 2 olan köşe birleştirilir. Bkz. Şekil 4.6.



Şekil 4.6. $\{2^{(2)}, 3^{(4)}\}$

3. adım: $\frac{a_4}{2} = 1$ tane kiriş ile $a_4 = 2$ tane derecesi 3 olan köşe birleştirilir, bkz. Şekil 4.7.

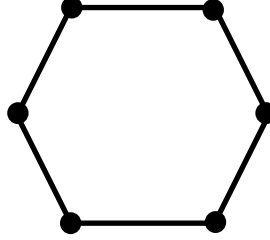


Şekil 4.7. $\{2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(2)}\}$

Elde edilen son şekil, aranan çizimdir.

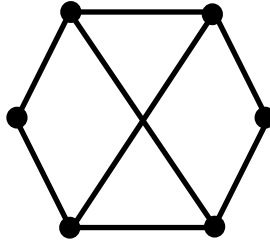
4.2.2.4. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisi verilsin. O halde $a_3 + a_4$ tek, $a_1 \neq 0$ ve $a_1 > a_4$ olduğundan aşağıdaki adımlar atılır:

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4} = C_{1+3+2} = C_6$ çizilir, bkz. Şekil 4.8.



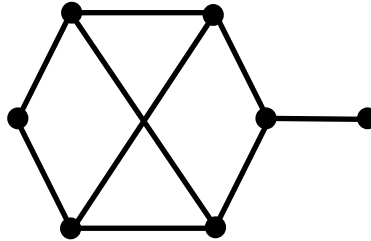
Şekil.4.8. C_6

2. adım: $\frac{a_3+2a_4-a_1}{2} = 2$ tane kiriş ile $a_3 + 2a_4 - a_1 = 4$ tane derecesi 2 olan köşe birleştirilir. Bkz. Şekil 4.9.



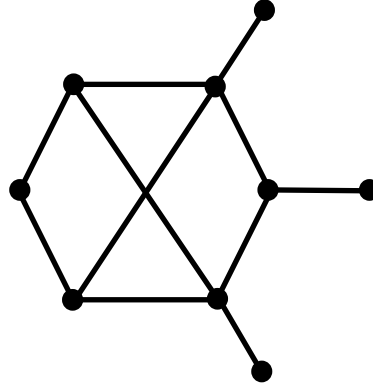
Şekil 4.9. $\{2^{(2)}, 3^{(4)}\}$

3. adım: $a_1 - a_4 = 1$ tane derecesi 2 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir, bkz Şekil 4.10.



Şekil 4.10. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(5)}\}$

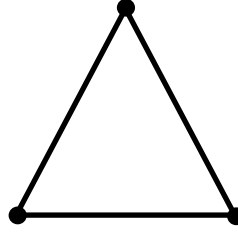
4. adım: $a_4 = 2$ tane derecesi 3 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir, bkz. Şekil 4.11.



Şekil 4.11. $\{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi

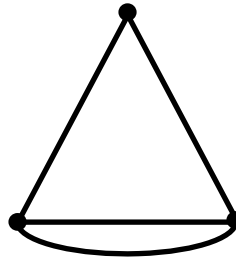
4.2.2.5. Örnek. $D = \{3^{(2)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisi verilsin. $a_3 + a_4$ tek ve $a_1 = 0$ olduğundan aşağıdaki adımlarla aranan çizime ulaşılır:

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4} = C_{2+1} = C_3$ çizilir ve $D = \{2^{(3)}\}$ elde edilir, bkz. Şekil 4.12.



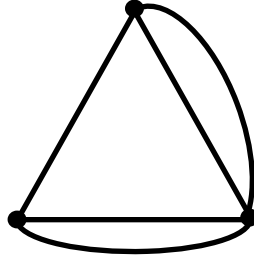
Şekil 4.12. $\{2^{(3)}\}$

2. adım: $\frac{a_3+a_4-1}{2} = 1$ tane kiriş ile $a_3 + a_4 - 1 = 2$ tane derecesi 2 olan köşenin mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilmesi gerekir, ancak hangi köşeler seçilirse seçilsin katlılıktan kaçınılamayacağı açıktır, bkz. Şekil 4.13.



Şekil 4.13. $\{2^{(1)}, 3^{(2)}\}$

3. adım: Derecesi 2 olan bir köşe derecesi 3 olan bir köşeye birleştirilir, bkz. Şekil 4.14.

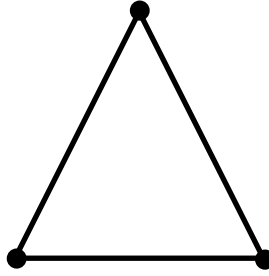


Şekil 4.14. $\{3^{(2)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi

4. adım: $a_4 - 1 = 0$ olduğundan işlem sona erer.

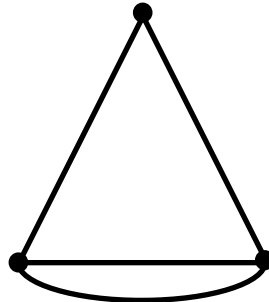
4.2.2.6. Örnek. $D = \{1^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisi verilsin. $a_3 + a_4$ tek, $a_1 \neq 0$ ve $a_1 > a_4$ olduğundan aşağıdaki adımlar atılır:

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4} = C_{2+1} = C_3$ çizilir ve $D = \{2^{(3)}\}$ elde edilir, bkz. Şekil 4.15.



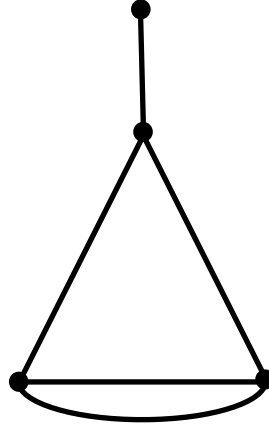
Şekil 4.15. $\{2^{(3)}\}$

2. adım: $\frac{a_3+2a_4-a_1}{2} = 1$ tane kiriş ile $a_3 + 2a_4 - a_1 = 2$ tane derecesi 2 olan köşe, mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir, bkz. Şekil 4.16.



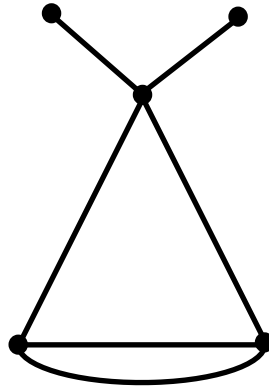
Şekil 4.16. $\{2^{(1)}, 3^{(2)}\}$

3. adım: $a_1 - a_4 = 1$ tane derecesi 2 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir, bkz. Şekil 4.17.



Şekil 4.17. $\{1^{(1)}, 3^{(3)}\}$

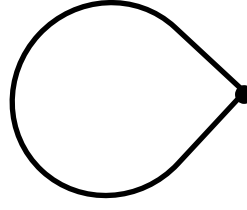
4. adım: $a_4 = 1$ tane derecesi 3 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir, bkz. Şekil 4.18.



Şekil 4.18. $\{1^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi

4.2.2.7. Örnek. $D = \{1^{(1)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisi verilsin. $a_3 + a_4$ tek, $a_1 \neq 0$ ve $a_1 > a_4$ olduğundan,

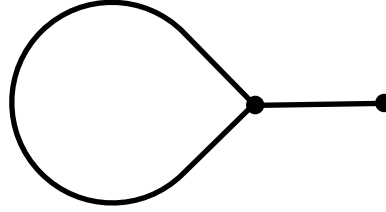
1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir. Yani $C_{1+0} = C_1$ çizilir. Hatırlanacağı gibi C_1 1 –geni, bir döngü olarak alınmalıdır, bkz. Şekil 4.19.



Şekil 4.19. $\{2^{(1)}\}$

2. adım: $\frac{a_3+2a_4-a_1}{2} = 0$ tane giriş ile $a_3 + 2a_4 - a_1 = 0$ tane derecesi 2 olan köşeyi mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirmek gerekir ama açıktır ki bu adım gereksizdir.

3. adım: $a_1 - a_4 = 1$ tane derecesi 2 olan köşeye bir tane sallanan kenar eklenir, bkz. Şekil 4.20.



Şekil 4.20. $\{1^{(1)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi

4. adım: $a_4 = 0$ tane derecesi 3 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir. Yani bu adımı gerçekleştirilemez.

4.2.2.8. Örnek. $D = \{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisi ele alınsın. $a_3 + a_4$ tek, $a_1 \neq 0$ ve $a_1 > a_4$ olduğundan aşağıdaki adımlar takip edilir:

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir. Yani $C_{1+1} = C_2$ çizilir, bkz. Şekil 4.21.



Şekil 4.21. $\{2^{(2)}\}$

2. adım: $\frac{a_3+2a_4-a_1}{2} = 0$ tane kiriş ile $a_3 + 2a_4 - a_1 = 0$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir, ancak bu adım gerçekleştirilemez.

3. adım: $a_1 - a_4 = 1$ tane derecesi 2 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklenir, bkz. Şekil 4.22.

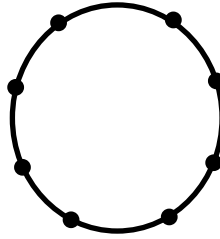


Şekil 4.22. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi

4. adım: $a_4 = 0$ tane derecesi 3 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklemek gerekir ancak bu işlem de yapılamaz.

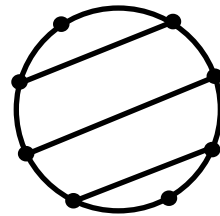
4.2.2.9. Örnek. $D = \{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisi verilsin. $a_3 + a_4$ tek, $a_1 \neq 0$ ve $a_1 < a_4$ olduğundan aşağıdaki adımlar takip edilmelidir:

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir. Yani $C_{1+3+4} = C_8$ çizilir, bkz. Şekil 4.23.



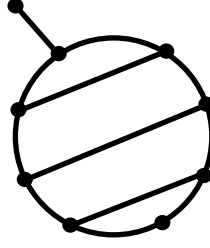
Şekil 4.23. Algoritmada belirtilen $\{2^{(8)}\}$ derece dizisine karşılık gelen tek bağlantılı graf

2. adım: $\frac{a_3+a_4-1}{2} = 3$ tane kiriş ile $a_3 + a_4 - 1 = 6$ tane derecesi 2 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir, bkz. Şekil 4.24.



Şekil 4.24. $\{2^{(2)}, 3^{(6)}\}$

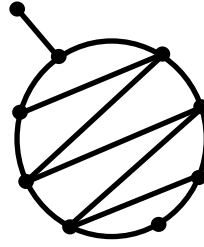
3. adım: 1 tane derecesi 2 olan köşeye bir tane sallanan kenar eklenir, bkz. Şekil 4.25.



Şekil 4.25. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(7)}\}$

4. adım: $a_1 - 1 = 0$ tane derecesi 3 olan köşeye birer tane sallanan kenar eklemek gerekir ancak bu işlem de yapılamaz.

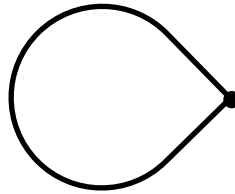
5. adım: $a_4 - a_1 + 1 = 4$ tane derecesi 3 olan köşe mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirilir, bkz. Şekil 4.26.



Şekil 4.26. $\{1^{(1)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi

4.2.2.10. Örnek. $D = \{2^{(1)}\}$ derece dizisi verilsin. $a_3 + a_4$ çift ve $a_1 = 0$ olduğundan aşağıdaki adımlar takip edilmelidir:

1. adım: $C_{a_2+a_3+a_4}$ çizilir. Yani $C_{1+0+0} = C_1 = \{2^{(1)}\}$ çizilir, bkz. Şekil 4.27.



Şekil 4.27. $\{2^{(1)}\}$ derece dizisinin bir temel çizimi

2. adım: $\frac{a_3+a_4}{2} = 0$ tane kiriş ile $a_3 + a_4 = 0$ tane derecesi 2 olan köşeyi mümkünse katlılık olmayacak şekilde birleştirmek gerekir ki bu da yapılamaz.

3. adım: $\frac{a_4}{2} = 0$ tane kiriş ile mümkünse katlılık olmadan $a_4 = 0$ tane derecesi 3 olan köşeyi birleştirmek gerekir ve bu da mümkün değildir. Yani aranan çizim Şekil 4.27'deki çizimdir.

4.2.2.11. Teorem. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bir graf olsun. $a_1 > 0$ ve $i = 2, 3, 4, \dots, \Delta$ için $a_i \geq 0$ olsun. Eğer $\Omega(D) = 0$ ise G grafi potansiyel bağlantılıdır ve en az bir devire sahiptir. Bağlantılı olma durumunda bu çizim tek devire sahiptir ve bu tek devirin uzunluğu 1 ile $a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ arasındaki herhangi bir sayı olabilir. Bağlantısız olma durumunda ise en az iki devir mevcuttur.

Bu teoremde belirtilen tek devirin uzunluğunun $a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ olduğu çizimin yukarıda tanımlanan devir içeren temel çizim olduğuna ve diğer çizimlerin birer temel çizim olmadığına dikkat ediniz.

İspat. $\Omega(D) = 0$ olsun. İlk olarak D 'nin çizimlerinden en az birisinin bağlantılı olduğunu göstermek gerekir. Bu bağlantılı çizim adım adım oluşturulur: $(a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta)$ -gen çizerek başlanır. Bu çokgen $C_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ ile gösterilsin. Bir devir oluşturulduğu için deviri oluşturan her köşenin derecesi 2 olduğundan a_2 tane derecesi 2 olan köşeyi ayırarak başlanabilir. Derecesi 3 olan köşeleri elde etmek için a_3 tane köşenin her birine birer sallanan kenar eklenir. Derecesi 4 olan köşeleri elde etmek için a_4 tane köşenin her birine 2'şer tane sallanan kenar eklenir. Derecesi 5 olan köşeleri elde etmek için a_5 tane köşenin her birine 3'er tane sallanan kenar eklenir. Bu adımları Δ 'ya kadar devam ettirilirse, derecesi Δ olan köşeleri elde etmek için a_Δ tane köşenin her birine $\Delta - 2$ 'şer tane sallanan kenar eklenir. Böylelikle $a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ uzunluklu devire eklenen sallanan kenarların toplam sayısı,

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta$$

olarak elde edilir. Yani elde edilen çizimin, ki buna da $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ denilsin, derece dizisi

$$D = \{1^{(a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$$

olur. $\Omega(D) = 0$ olduğundan dolayı

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = 0$$

olur. Buradan

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta = a_1$$

bulunur. Bu da verilen a_1 tane sallanan kenarın tam olarak tümünün kullanıldığını gösterir ve elde edilen $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ çiziminin derece dizisi $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ şeklindedir. Bir tek devire sallanan kenarlar eklenerek elde edilen bu çizim aranan bağlantılı çizimdir.

İkinci olarak D 'nin bağlantılı bir çiziminde mevcut olan bir tek devirin uzunluğunun 1 ile $n - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ arasında kalan her bir tamsayı olabileceği gösterilecektir: İspatın tamamlanan kısmında böyle bir bağlantılı çizimin, adına $C_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ denilen bir $(n - a_1)$ -gen yardımıyla elde edilebildiği gösterildi ve bu çizime $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ adı verildi. Şimdi de adım adım bu devirin uzunluğunun 1'e varana dek birer birer düşürebileceği gösterilecektir. $i = 1, 2, \dots, a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ için d_i, v_i köşesinin derecesi olsun. $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ grafının derece dizisi $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{a_2+a_3+\dots+a_\Delta}\}$ küçükten büyüğe sıralanmış olsun. $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ üzerinde derecesi en düşük d_1 sayısı olan v_1 köşesini, varsa kendisine bitişik olan tüm sallanan kenarlar ve kendisine komşu olan tüm sallanan köşeler ile birlikte silinsin ve derece dizisinin değişmemesi için adına tekrar v_1 denilecek olan yeni bir köşe, mevcut sallanan kenarlardan herhangi birine, diyelim ki $uv_{a_2+a_3+\dots+a_\Delta}$ kenarı üzerine, eklensin. (Burada neden $a_1 > 0$ şartının alındığı anlaşılabilir. Eğer $a_1 = 0$ olsaydı hiçbir sallanan kenar olmayacağından v_1 köşesini taşımak mümkün olamayacaktı). Bu işlem sonucunda $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ grafindaki tek devirin uzunluğunu 1 azaltarak bir $(a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta - 1)$ -gene dönüştürülen ve adına $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta-1)}$ denilecek olan yeni bir graf elde edilir. İkinci adımda ilkinen benzer şekilde $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta-1)}$ grafindaki en küçük d_2 derecesine sahip v_2 köşesi, yine kendisine bitişik olan tüm sallanan kenarlar ve kendisine komşu olan tüm sallanan köşeler ile birlikte silinir ve adına yine v_2 denilecek olan yeni bir köşe, bu kez uv_2 kenarı üzerine eklenir. Bu işlem sonucunda $G_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta-1)}$ grafindaki tek devirin uzunluğu yine 1

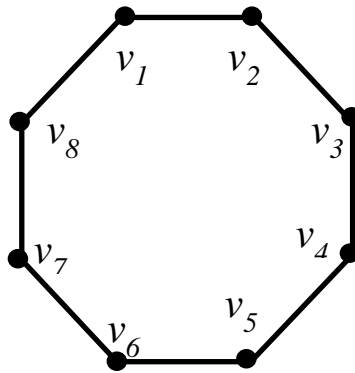
azaltarak bir $(a_2 + a_3 + \dots + a_{\Delta} - 2)$ –gene dönüşen ve adına $G_{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}-2)}$ denilecek yeni bir graf elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $v_3, v_4, \dots, v_{a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}-1}$ köşeleri bir ucu u köşesi olan kenar üzerine taşındığında sırasıyla adına $G_{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}-3)}$, $G_{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}-4)}$, \dots , G_2 ve G_1 denilecek olan graflar elde edilir. Bu da istenen sonuçtur. Buradaki işlemleri tam anlamıyla anlayabilmek için 4.2.2.12. Örnek’e bakınız.

Çizimin bağlantısız olması durumunda ise en az iki devir bulunduğunu göstermek için omeganın toplamsallık özelliğinden faydalanılır. D 'nin bağlantısız bir çizimi G ve $\Omega(D) = 0$ olsun. Bu durumda $\Omega(G) = 0$ olduğu açıktır. G 'nin en az iki bileşeni olduğundan iki durum söz konusudur. Ya tüm bileşenlerin omega değerleri sıfırdır, ki bu durumda her bir bileşen, 3.2.4. Teorem gereği $0/2+1 = 1$ devire sahip olur ve bu da G 'nin en az iki devire sahip olduğunu gösterir, ya da bazı bileşenlerin omega değerleri pozitif bazılarının da negatiftir ve bu durumda da pozitif omega değerine sahip olan her bir G_i bileşenindeki devir sayısı $\frac{\Omega(G_i)}{2} + 1 \geq 2$ olur ki bu da istenen sonucu verir.

4.2.2.12. Örnek. $D = \{1^{(11)}, 2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(2)}\}$ derece dizisi verilsin.

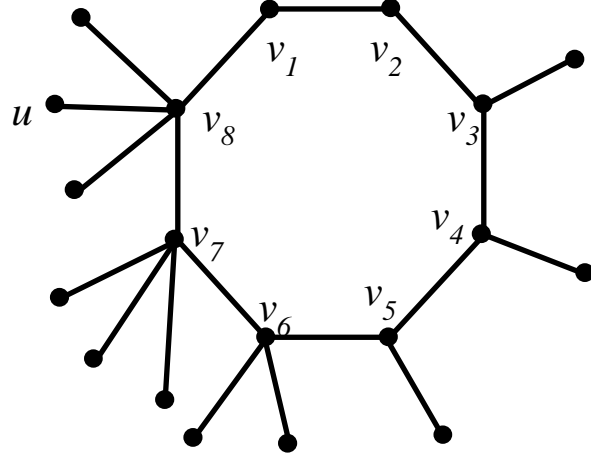
$$\begin{aligned}\Omega(D) &= a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_{\Delta} - a_1 \\ &= 3 + 2 + 6 - 11 = 0\end{aligned}$$

olur. İlk olarak $(2 + 3 + 1 + 2)$ –gen çizilir, bkz. Şekil 4.28.



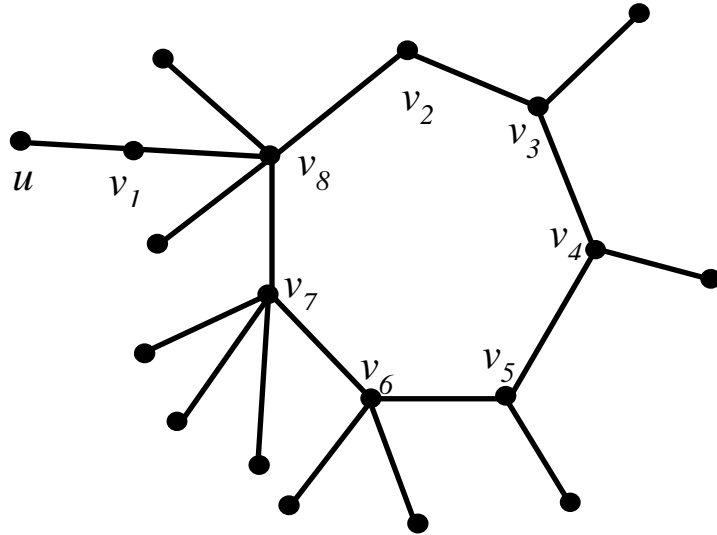
Şekil 4.28. $\{2^{(8)}\}$ sekizgeni

İkinci olarak, derecesi 3 olan köşelere birer tane, derecesi 4 olan köşelere ikişer tane ve derecesi 5 olan köşelere üçer tane sallanan kenar eklenir. Derecesi en büyük olan köşelerden birisindeki sallanan kenarın diğer ucundaki sallanan köşe u ile gösterilsin, bkz. Şekil 4.29.



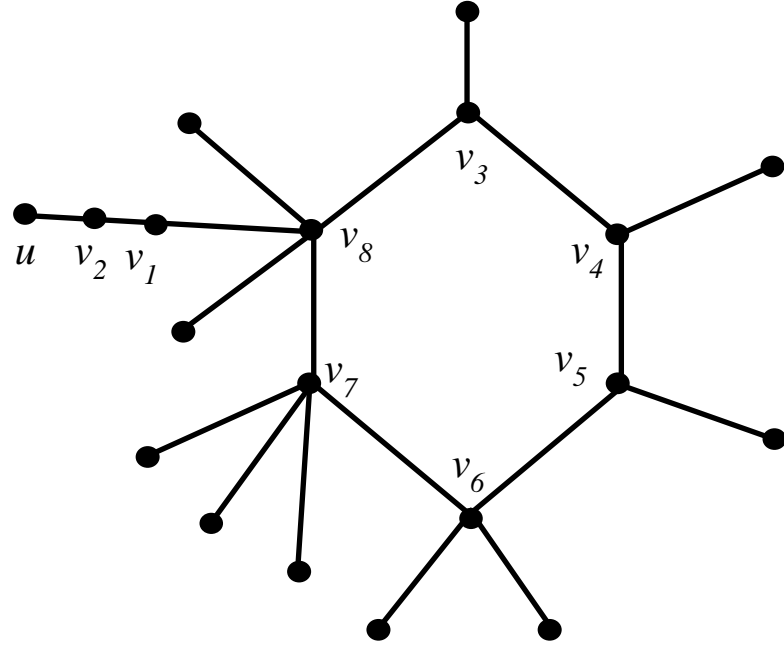
Şekil 4.29. $\{1^{(11)}, 2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(2)}\}$

Üçüncü olarak, v_1 köşesini silinir ve herhangi bir sallanan kenara sahip olmadığından uv_8 kenarı üzerine adına yine v_1 denilebilecek bir köşe eklenir, bkz. Şekil 4.30.



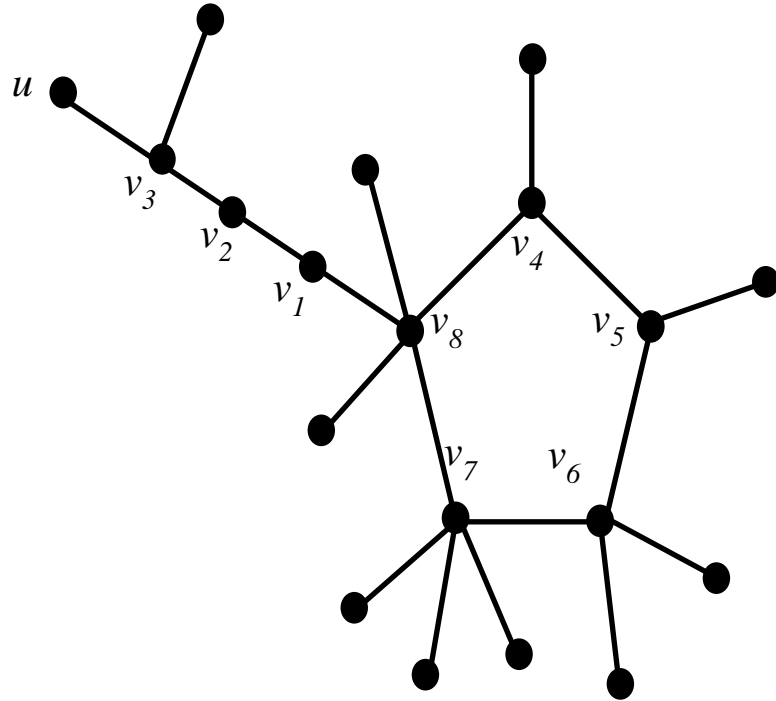
Şekil 4.30. $G_{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}-1)} = \{1^{(11)}, 2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(1)}, 5^{(2)}\}$

Dördüncü olarak, 2 dereceli v_2 köşesi silinip uv_1 kenarı üzerine taşınır.

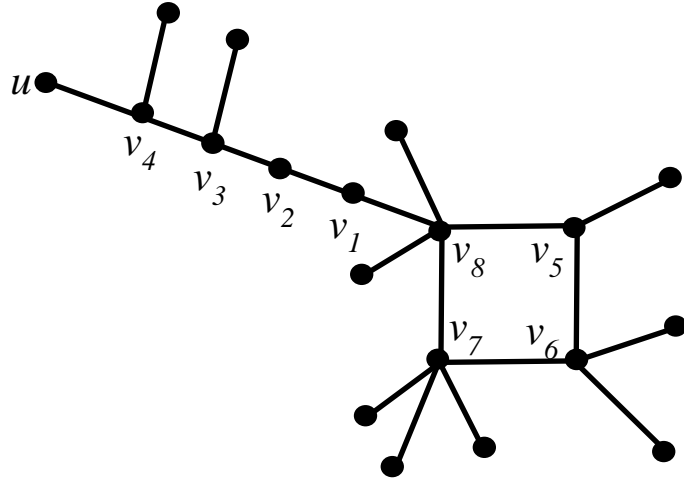


Şekil 4.31. 6-genli çizim

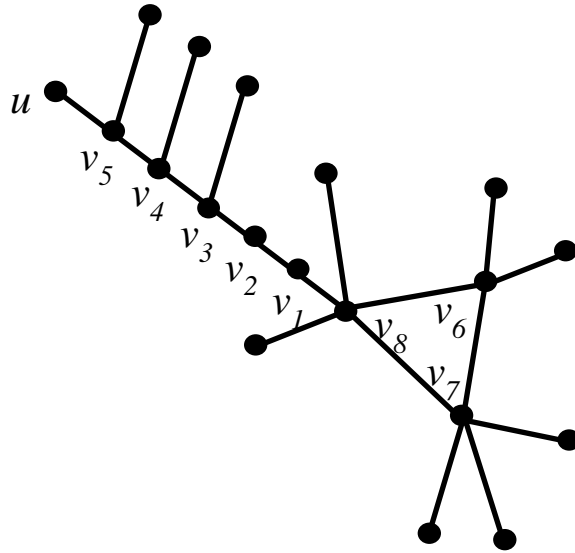
Bu şekilde devam edilerek en büyük devirin uzunluğu 1'e düşene kadar Şekil 4.29-Şekil 4.36'da görülen tüm çizimler elde edilebilir.



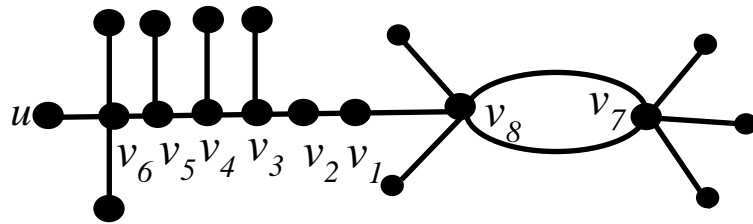
Şekil 4.32. 5-genli çizim



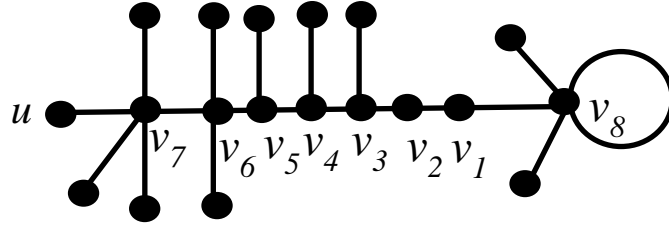
Şekil 4.33. 4-genli çizim



Şekil 4.34. 3-genli çizim



Şekil 4.35. 2-genli çizim



Şekil 4.36. 1-genli çizim

Dikkat edilirse tüm bu graflar aynı derece dizisine ve dolayısıyla da aynı omega değerine sahiptirler ve sadece bunlardan Şekil 4.29'daki temel çizim kuralına uygun olan çizimdir.

4.2.2.11. Teorem göre $\Omega(D) = 0$ olan bir D derece dizisi bağlantılı bir graf olarak çizilebiliyorsa bu çizim tek bir devire sahiptir. Eğer bu devirin uzunluğu en az 3 olarak alınırsa bu çizim kiriş, katlı kenar veya döngü içeremez. Eğer bu devirin uzunluğu 2 ise, bu çizim döngü ve kiriş içeremez, sadece bir çift katlı kenara sahip olur. Eğer bu devirin uzunluğu 1 ise, bu çizim katlı kenarlar ve kiriş içeremez, sadece bir döngüye sahip olur.

Yukarıda zaman zaman derece dizisinde bulunan 2'lerin derece dizisinin çizilebilirliğini etkilemediği belirtildi. Aynı zamanda çizilebilir bir derece dizisinde bulunan 2'lerin de bu derece dizisinin çizimlerinin sahip olduğu özellikleri etkilemediği bilinir. Örneğin $\Omega(D) = 0$ olan bir derece dizisinin bağlantılı çizimlerinin tümü tek devire sahiptir ve bu derece dizisine eklenecek veya silinecek 2'lerin bu çizimlerin tek devire sahip olmasına bir etkileri olmaz. Bu nedenle 4.2.2.11. Teorem yerine $a_2 = 0$ olarak aşağıdaki sonuç da verilebilir:

4.2.2.13. Sonuç. $G, D = \{1^{(a_1)}, 3^{(a_3)}, 4^{(a_4)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bağlantılı bir graf olsun. $a_1 > 0$ ve $i = 3, 4, \dots, \Delta$ için $a_i \geq 0$ olsun. Eğer $\Omega(D) = 0$ ise G grafi potansiyel bağlantılıdır ve en az bir devire sahiptir. Bağlantılı olma durumunda bu çizim tek devire sahiptir ve bu tek devirin uzunluğu 1 ile $a_3 + \dots + a_\Delta$ arasındaki herhangi bir sayı olabilir. Bağlantısız olma durumunda ise en az iki devir mevcuttur.

Buraya kadar olan kısımda zaman zaman potansiyel bağlantılılıktan bahsedildi. Bu kavramla ilgili aşağıdaki test, Edmonds (1964)'de verilmiştir:

4.2.2.14. Lemma. $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ bir derece dizisi olsun. D 'nin potansiyel bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^n d_i \geq 2(n-1)$ olmasıdır.

Bu test, omega yardımıyla da ifade edilebilir:

4.2.2.15. Teorem. $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ bir derece dizisi olsun. D 'nin potansiyel bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $\Omega(D) \geq -2$ olmasıdır.

İspat. Önceden bilindiği üzere el sıkışma lemması gereği $2m = \sum_{i=1}^n d_i$ olduğundan bu eşitlik 4.2.2.14. Lemmada yerine konulursa,

$$2m \geq 2(n-1)$$

elde edilir. 3.2.1. Teorem gereği $\Omega(D) = 2(m-n)$ olur. Dolayısıyla,

$$2m - 2n \geq -2$$

$$2(m-n) \geq -2$$

$$\Omega(D) \geq -2$$

elde edilir.

4.2.2.16. Teorem. G bağlantılı bir graf olsun.

$$G \text{ devire sahiptir} \Leftrightarrow \Omega(G) \geq 0 \text{ 'dır.}$$

İspat.

$$G \text{ devirlidir} \Leftrightarrow r \geq 1 \text{ 'dir}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Omega(G)}{2} + 1 \geq 1 \text{ 'dir}$$

$$\Leftrightarrow \Omega(G) \geq 0 \text{ 'dır.}$$

Alternatif olarak bu sonuç başka yoldan da ispat edilebilir: $\Omega(G) = 2(m-n)$ ve $\Omega(G) \geq 0$ olduğu kullanılırsa $r = 1 + m - n \geq 1$ sonucuna ulaşılır.

Bir G grafında döngülerin sayısı ℓ ile, kirişlerin sayısı ch ile, katlı kenarların sayısı da m_e ile gösterilsin. Buna göre,

4.2.2.17. Teorem. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip olan bir graf ve $\Omega(D) \geq 0$ olsun. Bu derece dizisinin bağlantılı her bir G çizimi için

$$\frac{\Omega(G)}{2} = \ell + ch + m_e$$

dir.

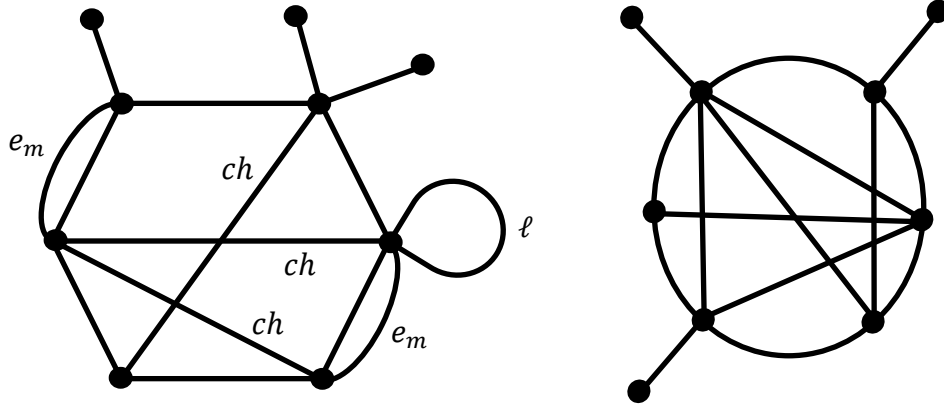
İspat. $\Omega(D) = 0$ durumunda elde edilecek olan bağlantılı çizimin kiriş ve döngüye sahip olmadığı 4.2.2.11. Teoreminden bilinmektedir. Ayrıca bu durumda 3.2.4. Teorem gereği bölge sayısı 1 olduğundan katlı kenar da bulunmaz. Dolayısıyla sonuç aşikârdır. O halde $\Omega(D) > 0$ durumu incelenmelidir. İlk olarak bir $(a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta)$ –gen çizilir. a_1 tane sallanan kenarı bu devir üzerindeki köşelere 4.2.2.11. Teorem’deki yöntemle eklemek için bu devir üzerindeki a_3 tane derecesi 2 olan köşelere birer tane sallanan kenar, a_4 tane köşeye 2’şer tane sallanan kenar, a_5 tane köşeye 3’er tane sallanan kenar, ve bu şekilde devam edilerek a_Δ tane köşeye $\Delta - 2$ ’şer tane sallanan kenar eklemeye kalkıldığında elde yeterli sayıda sallanan kenar olmadığı fark edilir. Çünkü $\Omega(D) > 0$ kabul edildiğinden $a_1 < a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta$ olur ve sol taraftaki a_1 , eklenebilecek tüm sallanan kenarların sayısını, sağ taraftaki toplam ise eklemeye çalışılan sallanan kenarların toplam sayısını göstermektedir. Bir başka deyişle $a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1$ tane sallanan kenar eklenememiş olur. Bu da devir üzerindeki bazı köşelerin derecelerine ulaşamayacağı anlamına gelir. Bu dereceleri olmaları gereken hale ulaştırabilmek için kiriş, döngü veya katlı kenarlardan faydalanmak mümkündür. Bir köşeyi 2 derece artırmak için 2 tane sallanan kenar yerine bir döngü de çizilebilir. Ya da bu köşeden derecesi 2 eksik olan bir başka köşeye 2 adet katlı kenar çizilerek de bu gerçekleştirilebilir. Üçüncü bir ihtimal de derecesi eksik olan iki köşe arasına yeterli sayıda kiriş çizmektir. Her bir döngünün, her bir kirişin ve her bir katlı kenarın derece toplamına katkısı 2 olacağından eklenmesi gereken kiriş, döngü ve katlı kenarların toplam sayısı

$$\frac{a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1}{2} = \frac{\Omega(G)}{2}$$

kadardır.

Yukarıda da belirtildiği gibi eksik dereceleri tamamlamak için döngü, kiriş ve katlı kenarların hangilerinin kaçar tane kullanılacağına standart bir yolu mevcut değildir. Bu tamamen verilen derece dizisinin ne şekilde çizilmek istendiğiyle ilgilidir. 6. Bölümdeki bir çok problem, bu amaca yöneliktir.

4.2.2.18. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}, 6^{(1)}\}$ olsun. Buradan $\frac{\Omega(D)}{2} = \ell + ch + m_e = 6$ elde edilir, bkz. Şekil 4.37.



Şekil 4.37. D 'nin derece dizisinin bir temel çizimi ve bir basit çizimi

O halde Euler karakteristiği ile ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir:

4.2.2.19. Sonuç. Eğer $\Omega(D) \geq 0$ ise, D derece dizisine sahip çizilebilir bir G grafının Euler karakteristiği

$$\chi(G) = r - \ell - ch - m_e$$

dir.

Bu sonuç 3.3.1. Teorem ve 4.2.2.17. Teoreminden kolayca elde edilebilir.

4.2.2.20. Örnek. 4.2.2.18. Örnekteki graf için

$$\begin{aligned} \chi(D) &= r - \ell - ch - m_e \\ &= 7 - 1 - 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

4.2.2.21. Teorem. $G, \Omega(D) \geq 0$ özelliğinde bir $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip olan ve temel çizim formunda çizilebilen basit bir graf olsun. $k = a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ için

$$\Omega(D) = \Omega(G) \leq k(k - 3)$$

olur.

İspat. Hatırlanacağı üzere $k = a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ sayısı, G grafının sahip olduğu en uzun devirin uzunluğudur. Ayrıca bir k –gende çizilebilecek maksimum kiriş sayısı $\frac{k(k-3)}{2}$ olabilir. 4.2.2.17. Teorem gereği

$$\Omega(G) = 2(\ell(G) + ch(G) + m_e(G))$$

olduğu bilinmektedir. G 'nin basit graf olması $\ell(G) = m_e(G) = 0$ olduğu anlamına gelir. O halde $\Omega(G) = 2ch(G)$ elde edilir. Böylece

$$ch(G) \leq \frac{k(k-3)}{2}$$

ve buradan da

$$\frac{\Omega(G)}{2} \leq \frac{k(k-3)}{2}$$

sonucuna ulaşılır. $k = n - a_1$ değeri yerine yazıldığında

$$\frac{\Omega(G)}{2} \leq \frac{(n - a_1)(n - a_1 - 3)}{2}$$

elde edilir. Dikkat edilirse temel çizim formunda bulunan en uzun devir olan $(n - a_1)$ –genin maksimum köşegen sayısı, aynı zamanda $(n - a_1)$ –genin içine çizilebilecek maksimum kiriş sayısının doğal bir üst sınırıdır.

4.2.2.22. Örnek. 4.2.2.18. Örnekteki graf için

$$\frac{\Omega(G)}{2} \leq \frac{(9 - 3)(9 - 3 - 3)}{2}$$

ve böylece

$$\Omega(G) = 12 \leq 18$$

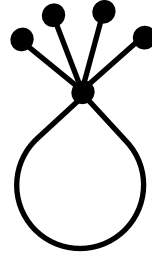
elde edilir, bkz. Şekil 4.37. Denk olarak aşağıdaki test verilebilir:

4.2.2.23. Sonuç. Eğer $k = a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ için

$$\Omega(D) > k(k - 3)$$

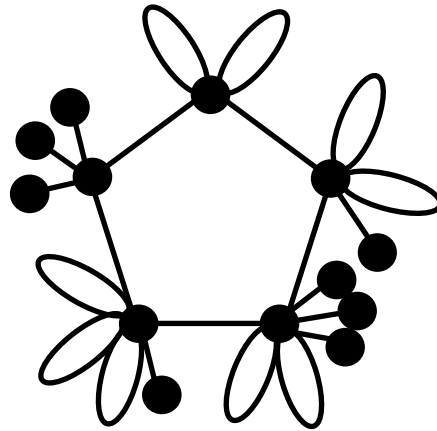
ise D derece dizisi hiçbir şekilde bir basit graf olarak çizilemez.

4.2.2.24. Örnek. $D = \{1^{(4)}, 6^{(1)}\}$ olsun. $\Omega(D) = 0 > 1(-2)$ olduğundan $\Omega(D) > k(k - 3)$ şartı sağlanır ve D derece dizisi bir basit graf olarak çizilemez, bkz. Şekil 4.38.



Şekil 4.38. Basit graf olamayan $D = \{1^{(4)}, 6^{(1)}\}$ derece dizisinin bir çizimi

İkinci olarak $D = \{1^{(8)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}, 9^{(2)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 18$ ve $k = 5$ olduğundan $\Omega(D) = 18 > 5 \cdot 2$ olur ve bu durumda yine $\Omega(D) > k(k - 3)$ şartı sağlanacağından D derece dizisi bir basit graf olarak çizilemez, bkz. Şekil 4.39:



Şekil 4.39. Basit graf olamayan $D = \{1^{(8)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}, 9^{(2)}\}$ derece dizisinin bir çizimi

4.2.12. Sonuçtan faydalanarak aşağıdaki kullanışlı sonuca ulaşılabilir:

4.2.2.25. Sonuç. r ve k , yukarıdaki gibi olsun. Eğer

$$r > \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

ise G grafi basit graf değildir.

İspat. 4.2.2.23. Sonuçta $\Omega(G) = 2r - 2$ değeri yerine yazılırsa

$$2r - 2 > k(k-3)$$

iken G grafinin bir basit graf olamayacağı söylenebilir. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde

$$r > \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

iken G grafinin bir basit graf olamayacağı bulunur.

Denk olarak olmayana ergi yöntemiyle ispatlanabilecek olan şu sonuç verilebilir:

4.2.2.26. Sonuç. r ve k , yukarıdaki gibi olsun. G grafi basit graf ise

$$r \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

dir.

4.2.2.27. Sonuç. $G, D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip olan ve temel çizim formunda çizilebilen bir basit graf olsun. $k = a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ için

$$ch(G) \leq \frac{k(k-3)}{2}$$

dir.

İspat. 4.2.2.17. Teorem gereği

$$\Omega(G) = 2(\ell(G) + ch(G) + m_e(G))$$

$$ch(G) = \frac{\Omega(G)}{2} - \ell(G) - m_e(G)$$

$$\leq \frac{\Omega(G)}{2}$$

$$\leq \frac{k(k-3)}{2}$$

elde edilir.

4.3. $\Omega(D) = -2$ durumu

4.3.1. $\Omega(D) = -2$ olma durumunda temel çizim

Şimdi de $\Omega(D) \geq 0$ (ve bir çift sayı) durumuna benzer olarak $\Omega(D) = -2$ durumunda D derece dizisinin temel çizimi tanımlanacaktır. Tabii bu yeni durumda elde edilebilecek tüm bağlantılı çizimler devir bulundurmayaacağından $\Omega(D) \geq 0$ durumuyla farklı olan birçok özellik olması beklenebilir.

4.3.1.1. Tanım. $\Omega(D) = -2$ olsun. D derece dizisinin $a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta + 2$ uzunluğundaki bir $P_{a_2+a_3+\dots+a_\Delta+2} = P_{n-a_1+2}$ yol grafi üzerindeki derecesi 2 olan köşelere $a_1 - 2$ tane sallanan kenar eklenerek elde edilebilen bir çizimine D derece dizisinin *devir içermeyen bir temel çizimi* adı verilir. Burada elde edilen bu temel çizime literatürde *tırtıl graf* da denilmektedir.

$\Omega(D) = -2$ durumunda tanımlanan temel bir çizimin bağlantılı olması ve devir içermemesi gerektiğine dikkat ediniz.

4.3.2. Temel çizim algoritması

Şimdi de $\Omega(D) = -2$ durumunda tanımlanan temel çizimin varlığını garantileyen ve bu çizimin nasıl oluşturulacağını gösteren bir algoritma verilecektir:

4.3.2.1. Teorem. $\Omega(D) = -2$ olsun.

- a) D derece dizisinin devir içermeyen en az bir tane temel çizimi mevcuttur.
- b) Çizimin bağlantılı olması durumunda bu çizim sadece bir ağaç olabilir.
- c) Çizimin bağlantısız olma durumunda en az bir tane devir içermeyen bileşen ve en az bir tane devir içeren bileşen vardır. Daha net ifade etmek gerekirse, bir tek devir içeren bileşen varsa devir içermeyen bileşenlerin sayısı, çizimdeki bölge sayısına eşittir, yani

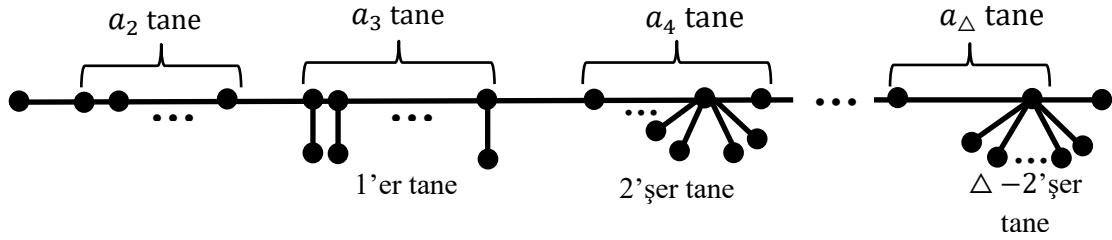
$c_a = r$ 'dir ve s tane devir içeren bileşen varsa devir içermeyen bileşenlerin sayısı $r - s + 1$ 'dir.

İspat. a) i. $P_{a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}+2}$ yol grafi çizilirse $D = \{1^{(2)}, 2^{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta})}\}$ derece dizisine sahip bir yol graf elde edilir, bkz. Şekil 4.40.



Şekil 4.40. $\{1^{(2)}, 2^{(a_2+a_3+\dots+a_{\Delta})}\}$ derece dizisinin yol grafi

ii. Elde edilen $P_{a_2+a_3+\dots+a_{\Delta}+2}$ yolu üzerinde derecesi 1 olan köşelere hiçbir işlem yapılmaz. Derecesi 2 olan köşelere ise, $2 \leq i \leq \Delta$ olmak üzere a_i tanesine $i - 2$ büyükten küçüğe doğru (sıralamanın önemi yok) tane sallanan kenar eklenir, bkz. Şekil 4.41.

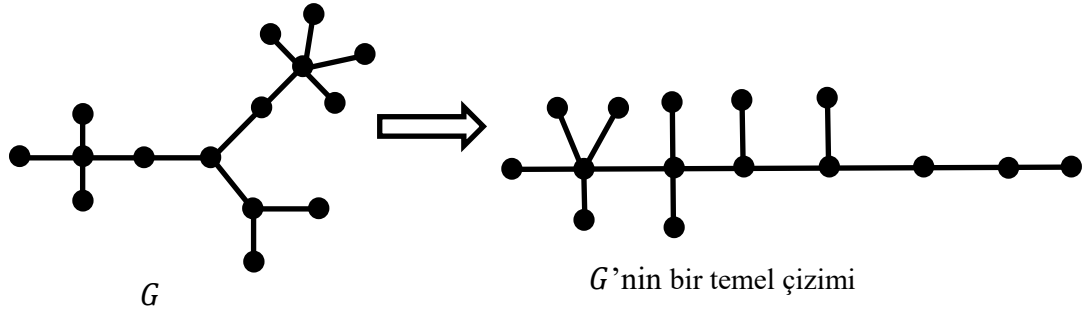


Şekil 4.41. Bir tırtıl graf

b) Çizim bağlantılı ise sonuç, 3.2.10. Teorem gereği aşikârdır.

c) Önceki sonuçlardan kolayca görülür.

4.3.2.2. Örnek. G , derece dizisi $\{1^{(9)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}\}$ olan bağlantılı bir graf olsun. $\Omega(G) = -2$ olduğundan G bir ağaçtır. Şekil 4.42'de G grafının farklı iki çizimi verilmiştir. Bunlardan sağda kalanı temel çizim formundaki çizim olup soldaki ise bağlantılılık dışında herhangi bir özelliğe sahip olmayan bir çizimdir.



Şekil 4.42. $\{1^{(9)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}\}$ derece dizisinin herhangi bir çizimi ve bir temel çizimi

4.4. $\Omega(D) \leq -4$ durumu

4.4.1. $\Omega(D) \leq -4$ olma durumunda temel çizim

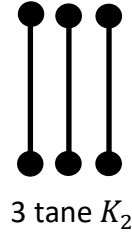
Son olarak $\Omega(D) \leq -4$ (ve bir çift sayı) olması durumunda ilk iki duruma benzer şekilde bir temel çizim tanımlamak istenecek olursa ilk iki durumdaki temel çizim tanımlarına bakıldığında her iki çizimin de bağlantılı olarak tanımlandığına dikkat ediniz. $\Omega(D) \leq -4$ durumunda tanımlanacak olan temel çizim için farklı bir durum söz konusudur. Hatırlanacağı gibi 3.2.11. Teorem gereği $\Omega(D) \leq -4$ olduğunda D derece dizisinin tüm çizimlerinin kesinlikle bağlantısız olduğu ispatlanmıştı. Bu nedenle burada tanımlanacak olan temel çizimin de bağlantısız olması mecburiyeti vardır.

4.4.1.1. Tanım. G , $\Omega(D) \leq -4$ özelliğinde bir $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisine sahip bir graf olsun. D derece dizisinin $-\Omega(D)/2$ tane K_2 tam grafi şeklindeki bileşenden ve 4.2.1.1. Tanımda verilen devirli temel forma sahip ancak kiriş, döngü ve katlı kenar bulundurmayan (dolayısıyla omega değeri sıfır olan ve $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_\Delta$ uzunluklu bir tek devir içeren) bir bileşenden oluşan çizimine *karma temel çizim* (*mixed type fundamental form*) adı verilir. Burada devirli temel forma sahip bileşene *ana bileşen* adı verilir ve sadece ana bileşenin özel bazı durumlarda bir döngü veya katlı kenar olmasına müsaade edilir.

Burada $a_2, a_3, a_4, \dots, a_\Delta$ sayılarından en az birisinin pozitif olması durumunda ana bileşen tanımda belirtilen özelliklere sahip bir devir bulundurur. Aslında ana bileşen 4.4.1.1. Tanımda olduğu gibi bir devire sahip olarak çizilebileceği gibi devirsiz bir şekilde de çizilebilir. Özel olarak tüm $a_2, a_3, a_4, \dots, a_\Delta$ sayıları sıfır ise derece dizisi $D = \{1^{(a_1)}\}$

şeklinde olacağından devirli bir ana bileşene sahip olamaz. Sadece K_2 'lerden oluşur. Temel çizimin ve bu çizimdeki ana bileşenin, hedeflenen özellik ya da özelliklere göre değişik şekiller alabileceğine dikkat ediniz. Bu nedenle belli bir niteliğe sahip olan temel çizimi adlandırırken o niteliğe sahip temel çizim olduğunu belirtmekte fayda vardır. Şimdi bu durum örneklerle incelenecektir:

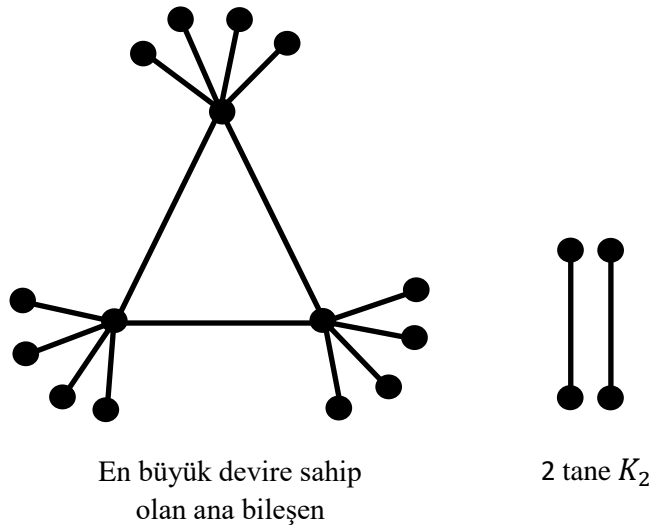
4.4.1.2. Örnek. $D = \{1^{(6)}\}$ bir derece dizisi olsun. O halde $\Omega(D) = -6$ olur. Buna göre D 'nin tek olası çizimi üç bileşene sahip olan aşağıdaki çizimdir, bkz. Şekil 4.43.



Şekil 4.43. $D = \{1^{(6)}\}$ bağlantısız grafi

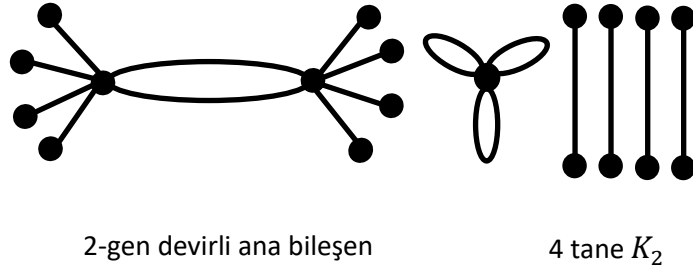
Derece dizisinde izole köşelere karşılık gelen sıfırların olması durumunda temel çizimi elde etmek için 4.4.1.1. Tanımda verilen temel çizime sıfırların sayısı (a_0) kadar izole köşe eklemek yeterli olur.

4.4.1.3. Örnek. $D = \{1^{(16)}, 6^{(3)}\}$ ise $\Omega(D) = -4$ olur. D derece dizisine ait, en uzun devir içeren karma bir temel çizim aşağıda verilmiştir, bkz. Şekil 4.44.



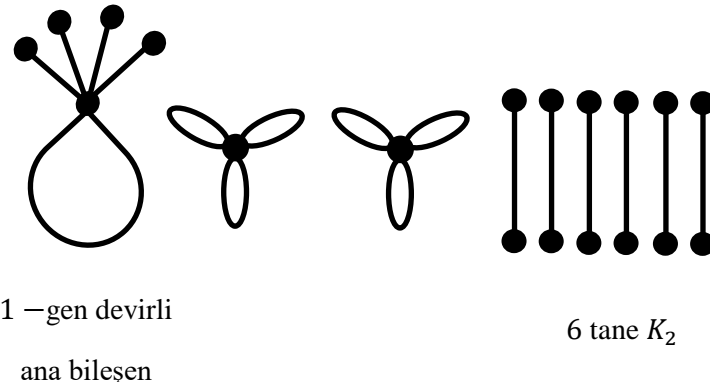
Şekil 4.44. D derece dizisinin bir karma temel çizimi

Aynı D derece dizisine sahip devir içeren başka bir çizim aşağıda verilmiştir. Bu çizim, en uzun devirinin uzunluğu 2 olup bu derece dizisinin sahip olabileceği maksimum devir uzunluğu olan $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_\Delta = 3$ 'den az olduğundan bir temel çizim değildir, bkz. Şekil 4.45.



Şekil 4.45. D derece dizisinin 2 –gen ana devirli bir çizimi

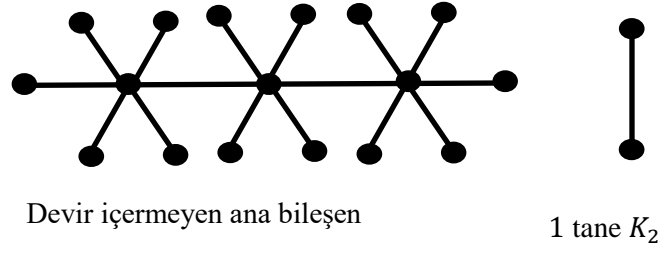
Aynı D derece dizisine sahip devir içeren üçüncü bir çizim de, bkz. Şekil 4.46,



Şekil 4.46. D derece dizisinin 1 –gen ana devirli bir çizimi

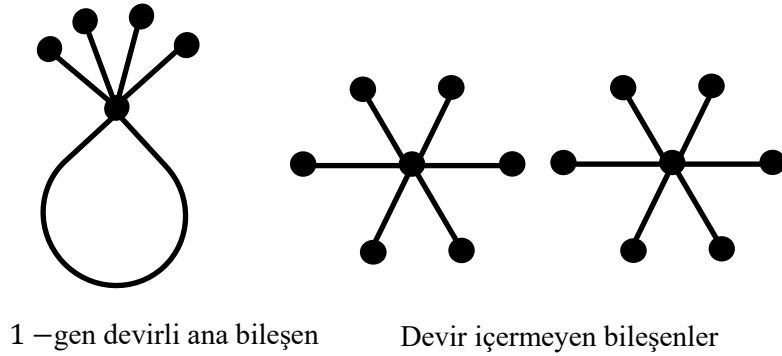
şeklindedir ve aynı sebepten bu da bir temel çizim değildir.

Bu D derece dizisine sahip devir içermeyen başka bir çizim aşağıda verilmiştir, bkz. Şekil 4.47.



Şekil 4.47. D derece dizisinin devir içermeyen ana bileşenli bir çizimi

Son olarak D derece dizisine ait, devir içeren ve hiçbir K_2 bileşeni olmayan başka bir çizim de aşağıda verilmiştir, bkz. Şekil 4.48.



Şekil 4.48. K_2 bileşeni olmayan bir herhangi bir çizim

Bu örneklerden görüleceği gibi bir karma temel çizimde devir içermeyen her bir bileşenin, her zaman bir K_2 tam grafi olması gerekirken diğer çizimlerde bu bileşenler birer K_2 tam grafi veya birer ağaç olabilir.

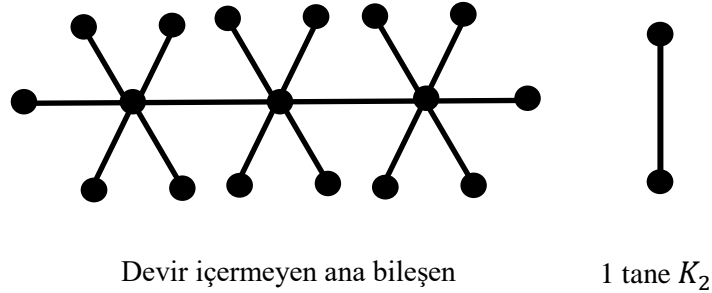
Bu kısımda $\Omega(D) \leq -4$ olan derece dizileriyle çalışılıyor olursa da aşağıdaki sonuç, $\Omega(D) = -2$ olan derece dizilerini de kapsadığından $\Omega(D) \leq -2$ şartına bağlı olarak ifade edilmiştir.

4.4.1.4. Sonuç. D , $\Omega(D) \leq -2$ çift bir sayı olacak şekilde bir derece dizisi olsun. D derece dizisinin en az bileşene sahip çizimi 4.3.2.1. Teoremde oluşturulan tırtıl grafi şeklindeki bir bileşenle her biri birer K_2 tam grafi olan $(-2 - \Omega(D))/2$ tane devir içermeyen bileşenden oluşur.

Buradaki çizime *devirsiz ana bileşenli bir temel çizim* adı verilir.

4.4.1.5. Sonuç. $\Omega(D) \leq -2$ çift bir sayı olacak şekilde bir derece dizisi olsun. D derece dizisinin en az bileşene sahip çizimi $-\Omega(D)/2$ tane bileşene sahiptir ve bu bileşenlerin tümü devir içermeyen bileşenlerdir.

4.4.1.6. Örnek. $D = \{1^{(16)}, 6^{(3)}\}$ için $\Omega(D) = -4$ olur. D derece dizisinin en az bileşene sahip çizimi elde edilmek istendiğinde tüm bileşenlerin devir içermeyen graflar olması gerekir ve bu durumda 4.4.1.4. Sonuç gereği bu bileşenlerden birisi tırtıl grafi şeklinde olup diğerleri K_2 tam graflarıdır, bkz. Şekil 4.49.



Şekil 4.49. D derece dizisinin bir çizimi

Gerçekten de bu çizim $\frac{-\Omega(D)}{2} = \frac{-(-4)}{2} = 2$ adet devir içermeyen bileşene sahiptir.

4.4.2. Temel çizim algoritması

Buraya kadar olan kısımda temel çizim yaparken, hedeflenen özelliklere uygun olan temel çizimi oluşturmanın mümkün olduğu gösterildi. Bu kısımda $\Omega(D) \leq -4$ halinde elde edilebilecek iki temel çizim verilecektir. Bu çizimlerin hedeflenen özelliği ana bileşenin maksimum sayıda döngüye sahip olması ve ana bileşenin maksimum sayıda sallanan kenara sahip olmasıdır. Bu iki temel çizim tercihi sırayla incelenecektir:

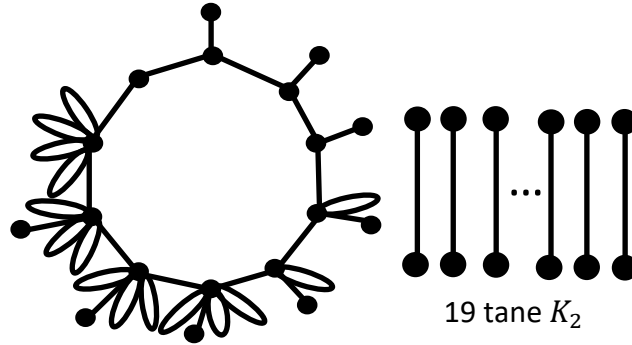
İlk olarak ana bileşenin maksimum sayıda döngüye sahip olması durumu ele alınsın.

- i. $C_{a_2+a_3+\dots+a_\Delta} = C_{n-a_1}$ çizilir.
- ii. Tek dereceli olan köşelere birer tane sallanan kenar çizilir. Burada giriş sayısını minimum sayıda tutacak şekilde bir yöntem izlenmelidir. Bunun yerine farklı tercihler de yapılabilir. Sonrasında bu tek dereceli köşelerin her birine, $k \in \mathbb{Z}^+$ için $i = 2k + 1$ olmak üzere $\frac{i-3}{2}$ tane döngü çizilir.

- iii. Çift dereceli olan köşelerin her birine, $k \in \mathbb{Z}^+$ için $i = 2k$ olmak üzere $\frac{i-2}{2}$ tane döngü çizilir.

Böylelikle karma temel çizimin devir kısmı çizilmiş oldu. Şimdi diğer bileşenler çizilmelidir. $i = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$, olmak üzere $\frac{a_1 - \sum_{k=1}^{a_2 k + 1}}{2}$ tane K_2 çizilir. Böylece karma temel çizim formunun ağaçlardan oluşan kısmı da çizilmiş oldu ve şekil tamamlanmış oldu.

4.4.2.1. Örnek. $D = \{1^{(46)}, 2^{(1)}, 3^{(3)}, 5^{(2)}, 9^{(3)}, 10^{(1)}\}$ derece dizisi olsun. $\Omega(D) = -8 \leq -4$ olduğundan, D derece dizisine sahip olan bu graf bağlantısız olmak zorundadır. O halde uzunluğu maksimum olan bir tane devir içeren ana bileşen ile K_2 'lerden oluşmaktadır, bkz. Şekil 4.50. Gerçekten de,



Şekil 4.50. Karma bir temel çizim formu (ana bileşeni maksimum döngülü)

İkinci olarak ana bileşenin maksimum sayıda sallanan kenara sahip olması durumu ele alınacaktır.

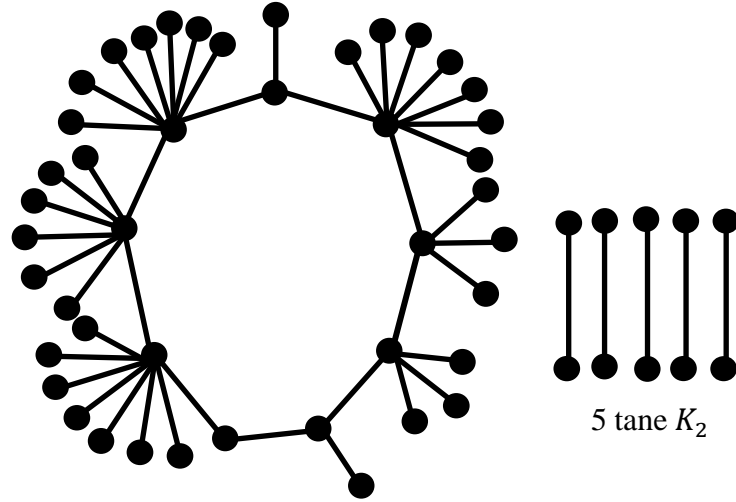
- i. $(a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta)$ -gen çizilir.
- ii. Bir devir oluşturulduğu için deviri oluşturan her köşenin derecesi 2 olduğundan a_2 tane derecesi 2 olan köşe ayırılır ve bunlara hiçbir işlem yapılmaz.
- iii. Derecesi 3 olan köşeleri elde etmek için a_3 tane köşenin her birine birer sallanan kenar eklenir. Derecesi 4 olan köşeleri elde etmek için a_4 tane köşenin her birine 2'şer tane sallanan kenar eklenir. Derecesi 5 olan köşeleri elde etmek için a_5 tane köşenin her birine 3'er tane sallanan kenar eklenir. Bu adımları Δ 'ya kadar devam ettirilirse, derecesi Δ olan köşeleri elde etmek için a_Δ tane köşenin her birine $\Delta - 2$ 'şer tane sallanan kenar

eklenir. Böylelikle $C_{(a_2+a_3+\dots+a_\Delta)}$ ile gösterilecek olan $a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ uzunluklu devire eklenen sallanan kenarların toplam sayısı $a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta$ olur.

iv. Ana devirin yanına $\frac{a_1 - (a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta)}{2}$ tane K_2 çizilir.

Böylelikle $\Omega(D) \leq -4$ durumuna sahip tüm derece dizileri için ikinci bir karma temel çizimin algoritması verilmiş oldu.

4.4.2.2. Örnek. $D = \{1^{(45)}, 2^{(1)}, 3^{(2)}, 5^{(2)}, 8^{(1)}, 9^{(3)}\}$ derece dizisi olsun. $\Omega(D) = -10 \leq -4$ olduğundan, D derece dizisine sahip olan her bir graf bağlantısız olmak zorundadır. O halde karma temel çizim formunda çizildiğinde bir tane maksimum uzunluklu devir içeren ana bileşenden ve K_2 'lerden oluşacaktır, bkz. Şekil 4.51. Gerçekten de,



Şekil 4.51. Karma bir temel çizim (ana bileşeni maksimum sallanan kenarlı)

elde edilir.

5. KENAR VE KÖŞE SİLMENİN OMEGA ÜZERİNDEKİ ETKİSİ

5.1. Giriş

Küçük olan objeler üzerinde yapılan çalışmaların daha büyük objeler hakkında fikirler vermesi matematikte sıkça kullanılan metotlardandır. Bu düşünceden hareketle bu bölümde kenar silme ve köşe silme işlemlerinin omega üzerindeki etkileri incenecektir.

1.1.22 ve 1.1.23.Tanımlarda bir G grafından köşe ve kenar silinmesi (çıkarılması) işlemleri tanımlanmıştı. Bu bölümün ana amacı bu işlemlerin etkisini araştırmak olduğundan bu kavramları kısaca hatırlatmakta fayda vardır:

G 'nin bazı köşeleri u, u_1, u_2, \dots, u_k ve bazı kenarları da e, e_1, e_2, \dots, e_t olsun. Hatırlanacağı gibi bir G grafından bir u köşesi silindiğinde bu köşeye bitişik tüm kenarlar da silinmekteydi. Bu işlemin sonucunda elde edilen graf $G - u$ ile gösterilmişti. Benzer şekilde bir G grafından u_1, u_2, \dots, u_k köşeleri ve bunlara bitişik tüm kenarlar silindiğinde elde edilen graf da $G - \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ile gösterilmişti. Bir G grafından bir e kenarı silindiğinde bu işlemin $G - e$ ile; e_1, e_2, \dots, e_t kenarları silindiğinde de $G - \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ ile gösterildiğini hatırlayınız. Bu işlemlere köşe ve kenar silme (çıkarma) işlemleri denilir.

G grafına ait derece dizisinin elemanlarının, G 'nin köşe dereceleri olan ve negatif olmayan tam sayıların azalmayan bir şekilde sıralanışları olarak tanımlandığını hatırlayınız. G grafından kenar ve köşe silindiğinde (çıkarıldığında) grafın bağlantısız hale dönüşebileceği ve elde edilen yeni grafın bazı bileşenlerinin izole köşeler olabileceği açıktır. İzole köşeler hiç bir kenara bitişik olmadıklarından derece dizisi tanımını biraz daha genişletmek gerekir. Bir izole köşenin derecesi sıfırdır. Örneğin N_n sıfır grafının tüm köşeleri izoledir, yani hiçbir kenara bitişik değildir. Ya da bir sallanan kenar silindiğinde, bu kenarın bağlı olduğu köşe yine G grafına aittir, fakat izole bir köşe olarak kalır. Bu nedenle birçok grafta izole edilmiş köşelerle karşılaşılabilir. Eğer bu köşelerin omegaya etkisi olmasaydı bu köşeler kolayca göz ardı edilebilirdi. Her bir izole köşenin omega değeri -2 olduğundan izole köşeler aynı zamanda birer ağaç olarak da düşünülebilir.

5.1.1. Lemma. $G = \{v\}$ grafi herhangi bir kenarı olmayan sadece bir köşeye sahip bir graf olsun.

$$\Omega(G) = \Omega(\{v\}) = -2$$

dir.

İspat. 1.1.14. Tanımdan dolayı bir izole köşenin derece dizisi $\{0^{(1)}\}$ olarak gösterilir. Yani $D(G) = D(\{v\}) = \{0^{(1)}\}$ olur ve $\Omega(\{0^{(1)}\}) = -2$ olduğu görülür. Hatırlanacağı üzere bağlantılı bir graf için $\Omega(G) = -2$ ise bu grafın bir ağaç olduğu, yani hiçbir devir bulundurmadığı gösterilmişti. Bu nedenle izole köşelerin her biri bir ağaçtır denilebilir.

Bu genelleme sonrasında bir derece dizisinin en genel hali verilecek olunursa $D = \{0^{(a_0)}, 1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ yazılabilir. G grafının omega değeri ise a_0 da katılarak

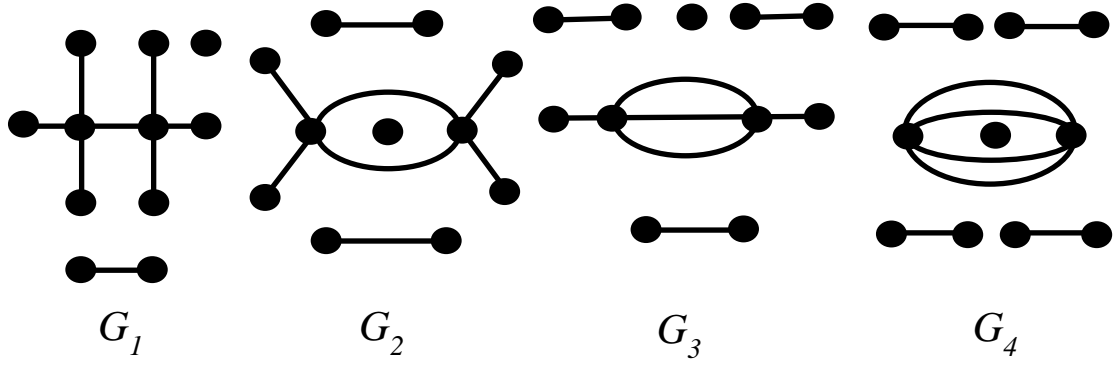
$$\Omega(G) = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 - 2a_0$$

$$= \sum_{i=0}^{\Delta} (i - 2) a_i$$

olarak ifade edilir. Bu tanımlamanın daha önce verilen ve a_0 içermeyen omega tanımıyla uyumlu olduğuna dikkat ediniz.

$a_0 > 0$ olduğunda en az bir izole köşe mevcut olacağından G grafının bağlantılı olamayacağı açıktır. Bu nedenle bağlantılı graflarla çalışılırken, derece dizisinde sıfırlara ihtiyaç duyulmaz. Birçok makalede derece dizilerinin tanımında sıfırın yazılmamasının nedeni budur.

5.1.2. Örnek. $D = \{0^{(1)}, 1^{(8)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisi verilsin. $\Omega(D) = -6$ olarak hesaplanır. Bu derece dizisinin çok sayıda çiziminden dördü Şekil 5.1'de verilmiştir. Tüm bu çizimlerin ortak özelliği birer izole köşe bulundurmaları ve dolayısıyla bağlantısız olmalarıdır. Bu durum $\Omega(D) = -6$ olduğundan $\Omega(D) \leq -4$ olması durumunda grafın bağlantısız oluşuyla da uyumludur.



Şekil 5.1. İzole köşe bulunduran bazı graflar

5.2. Kenar silmenin omega değerine etkisi

5.2.1. Tanım. G bir graf ve $t \leq m$ için $e_1, e_2, \dots, e_t \in E(G)$ olsun. G grafından bir e_i kenarının silinmesi sonucunda Ω 'da oluşan değişim

$$\Delta(G, e_i) = \Omega(G) - \Omega(G - e_i)$$

ile; G grafından e_1, e_2, \dots, e_t kenarlarının silinmesi sonucunda Ω 'da oluşan değişim ise

$$\Delta(G, e_1, e_2, \dots, e_t) = \Omega(G) - \Omega(G - \{e_1, e_2, \dots, e_t\})$$

ile gösterilecektir.

Aşağıdaki sonuçta bir graftan kenar(lar) silmenin omega değerine etkisi ele alınacaktır:

5.2.2. Teorem. G bir graf olsun. G grafından bir kenarın silinmesi $\Omega(G)$ değerini 2 azaltır.

Birinci ispat. $e = uv$, G grafının bir kenarı olsun ve d_u ve d_v , sırasıyla u ve v köşelerinin dereceleri olsun. e kenarı silindiğinde $D(G)$ 'deki d_u ve d_v sayıları birer tane azalır ve $d_u - 1$ ve $d_v - 1$ sayıları da birer tane artar. Bu nedenle $\Omega(G)$ değeri 2 azalır.

İkinci ispat. D , çizilebilir bir derece dizisi ise omega değerinin $\Omega(D) = 2(m - n)$ olduğu bilinmektedir. Özel olarak D derece dizisine ait graftan bir kenar silindiğinde yeni derece dizisi D' ise

$$\Omega(D') = 2(m - 1 - n)$$

$$\Omega(D') = 2(m - n) - 2$$

olur. Böylelikle omega değeri,

$$\Delta = \Omega(D) - \Omega(D') = 2$$

kadar azalmış olur. Daha genel olarak ifade edilirse, m kenar sayısına sahip bir graftan $0 \leq e \leq m$ olmak üzere e tane kenar silindiğinde yeni derece dizisi D' ve bu derece dizisine ait omega değeri de $\Omega(D')$ olur. Böylece

$$\Omega(D') = 2(m - e - n)$$

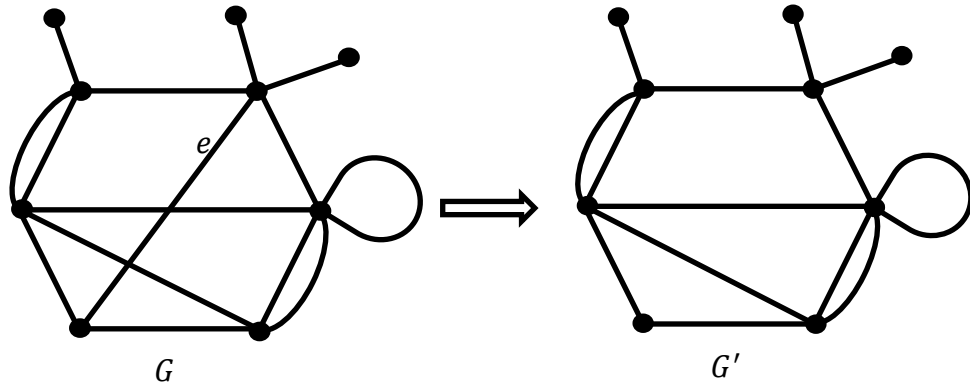
$$\Omega(D') = 2(m - n) - 2e$$

olur. Böylelikle omega değeri

$$\Delta = \Omega(D) - \Omega(D') = 2e$$

kadar azalmış olur. Burada silinen kenarın bir döngü, sallanan kenar, köprü, vs. olmasının hiçbir farkı yoktur. Silinen her bir kenara karşı omega 2 azalır. Hatta silinen kenarların komşu olmasının da bir önemi yoktur. Ancak aşağıda köşe silme konusunu incelerken komşu köşeleri silmeyle komşu olmayan köşeleri silmenin farklı etkileri olduğu görülecektir.

5.2.3. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}, 6^{(1)}\}$ olsun. G de bu derece dizisine ait graf olsun. O halde $\Omega(G) = 12$ olur. Bu derece dizisine ait grafdaki e kenarı silindiğinde, yeni derece dizisi $D' = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 4^{(3)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}\}$ elde edilir. $\Omega(G') = 10$ olur, bkz. Şekil 5.2.



Şekil 5.2. Graftan bir kenar silme

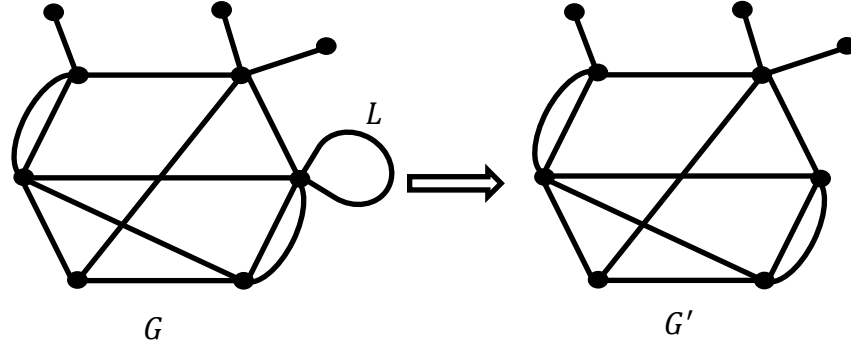
Görüldüğü gibi gerçekten de $\Omega(G) - \Omega(G') = 2$ olmaktadır.

5.2.2. Teorem, silinen kenarın bir döngü olması durumunda da geçerlidir:

5.2.4. Sonuç. G bir graf olsun. G grafından bir döngü silmek $\Omega(G)$ değerini 2 azaltır.

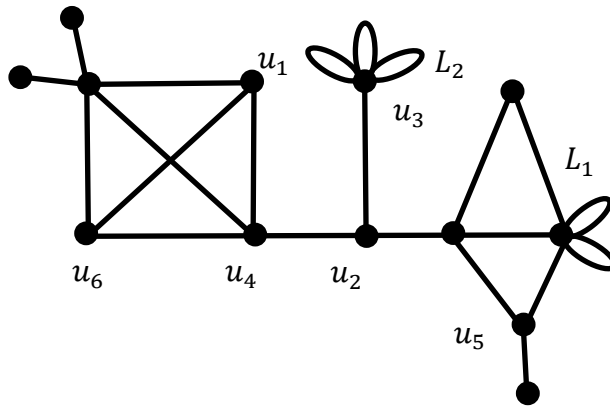
İspat. L , G grafında bir döngü olsun ve bu döngünün sahip olduğu tek u köşesinin derecesi d olsun. L döngüsünü silmek, $D(G)$ 'deki d 'lerin sayısını 1 azaltır ve $D(G)$ 'deki $d - 2$ 'lerin sayısını da 1 artırır. Sonuç olarak $\Omega(G)$ değeri 2 azalır.

5.2.5. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}, 6^{(1)}\}$, G grafi da bu derece dizisine sahip bir graf olsun. O halde $\Omega(G) = 12$ olur. Şekil 5.3'deki graftan L döngüsünün silinmesiyle elde edilen graf G' olsun. Bu durumda yeni derece dizisi $D' = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(3)}, 5^{(2)}\}$ olarak elde edilir ve $\Omega(G') = 10$ olur. Görüldüğü gibi gerçekten de $\Omega(G) - \Omega(G') = 2$ olur.



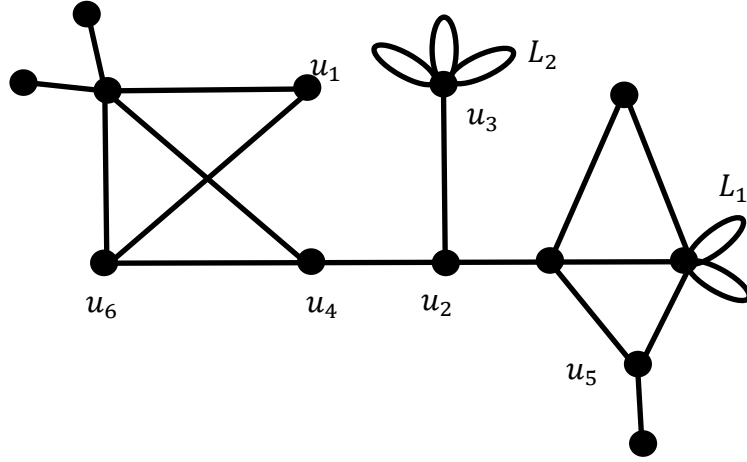
Şekil 5.3. Graftan bir döngü silme

5.2.6. Örnek. $\Omega(D) = 18$ olan $D = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}, 5^{(1)}, 7^{(2)}\}$ ye ait graf Şekil 5.4'deki gibi olsun.



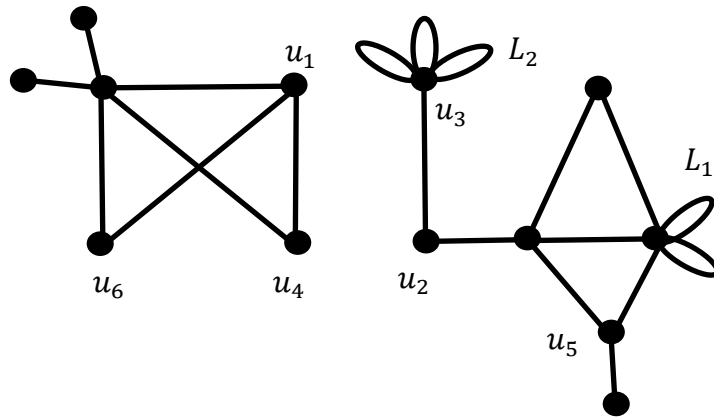
Şekil 5.4. Bağlantılı bir graf

- i. $e_1 = u_1u_4$ kenarı silinsin. Bu durumda yeni derece dizisi $D' = \{1^{(3)}, 2^{(2)}, 3^{(4)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}, 7^{(2)}\}$ olduğundan $\Omega(D') = 16$ olarak hesaplanır. G grafından $e = 1$ tane kenarı silmek omega değerini $\Delta(G, u_1u_4) = 2(1) = 2$ kadar azaltır. Gerçekten de $\Delta(G, u_1u_4) = \Omega(D) - \Omega(D') = 18 - 16 = 2$ olduğu görülür, bkz. Şekil 5.5.



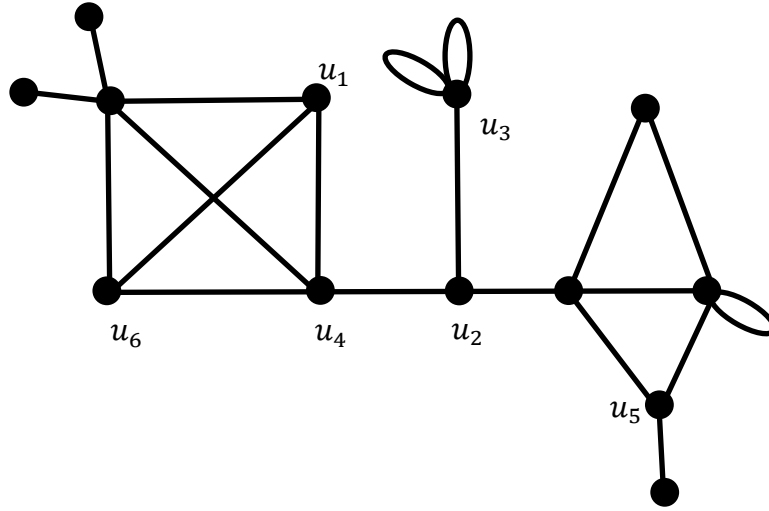
Şekil 5.5. Verilen derece dizisine sahip grafitin bir kenar silme

- ii. $e_1 = u_2u_4$ ve $e_2 = u_4u_6$ kenarları silinsin. Bu durumda yeni derece dizisi $D' = \{1^{(3)}, 2^{(4)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}, 7^{(2)}\}$ olduğundan $\Omega(D') = 14$ olarak bulunur. G grafından $e = 2$ tane kenarı silindiğinden dolayı omega değerindeki azalma $\Delta(G, \{u_1u_4, u_4u_6\}) = 2 \cdot (2) = 4$ olur. Gerçekten de $\Delta(G, \{u_1u_4, u_4u_6\}) = \Omega(D) - \Omega(D') = 18 - 14 = 4$ olduğu görülür, bkz. Şekil 5.6.



Şekil 5.6. Verilen derece dizisine sahip grafitin iki kenar silme

- iii. Şimdi de $e_1 = L_1$ ve $e_2 = L_2$ döngüleri silinsin. Bu durumda yeni derece dizisi $D' = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}, 5^{(3)}\}$ olduğundan $\Omega(D') = 14$ olarak hesaplanır. G grafından $e = 2$ tane döngü olan kenar silindiğinden dolayı omega değeri $\Delta(G, \{e_1, e_2\}) = 2(2) = 4$ kadar azalır. Gerçekten de bu durumda da $\Delta(G, \{e_1, e_2\}) = \Omega(D) - \Omega(D') = 18 - 14 = 4$ olduğu görülür, bkz. Şekil 5.7.



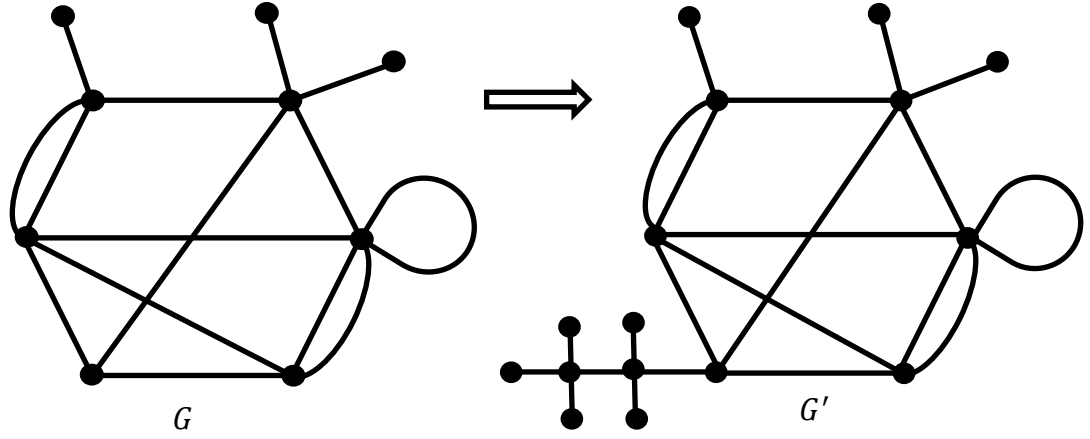
Şekil 5.7. Graftan iki tane döngü silmek

5.2.7. Teorem. Bir G grafi üzerindeki bir köşeye ağaç eklemek $\Omega(G)$ değerini değiştirmez.

Birinci ispat. Bir G grafi üzerindeki bir köşeye herhangi büyüklükte bir ağaç eklemek, G grafının bölge sayısını yani $r(G)$ 'yi değiştirmez. Böylece $c(G)$, G grafindaki bileşenlerin sayısı olmak üzere $\Omega(G) = 2(r(G) - c(G))$ sayısı değişmez.

İkinci ispat. $\Omega(G) = 2(m - n)$ olduğunu hatırlayınız. Her ne kadar ağaç graflarda köşe sayısı kenar sayısından her zaman 1 fazla olsa da, buradaki eklemede var olan grafın herhangi bir köşesine bir ağaç eklendiğinden ve eklenen köşe, zaten G grafinda mevcut olduğundan grafa ağaç eklenirken eşit sayıda köşe ve kenar eklenmiş olur. Bundan dolayı omega değerindeki $2(m - n)$ değeri değişmeyecektir. Netice itibariyle bir grafın üzerindeki herhangi bir köşeye ağaç eklemek omega değerini değiştirmez.

5.2.8. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}, 6^{(1)}\}$ ve G , bu derece dizisine sahip bir graf olsun. O halde $\Omega(G) = 12$ olur, bkz. Şekil 5.8.



Şekil 5.8. G grafına bir ağaç eklemek

D derece dizisine sahip G grafiındaki bir köşeye şekildeki gibi bir ağaç eklendiğinde yeni derece dizisi $D' = \{1^{(8)}, 4^{(5)}, 5^{(2)}, 6^{(1)}\}$ haline gelir. Bu derece dizisine sahip grafa G' denilirse $\Omega(G') = 12$ bulunur ve böylece omega değerinin değişmediği görülür.

5.2.2. Teorem, 5.2.4. Sonuç ve 5.2.7. Teorem gereği karmaşık bir grafin omega değerini hesaplamak için bu graftan tüm sallanan kenarlar ve bunun sonucu olarak grafa bir kopma noktası veya köprü ile bağlı olan tüm patikalar, yıldız graflar ve ağaçlar silinir ve elde edilen bu daha küçük grafin omega değeri ilkinde göre silinen kenar sayısının iki katı kadar azalmış olur. Yani problem çok daha küçük bir grafin ya da grafların omegalarını hesaplama problemine indirgenmiş olur. Bu sonuçların bir başka uygulama alanı da bilinen graf sınıflarına yakın bir çizime sahip olan grafların omega değerlerinin hesaplanmasıdır. Örneğin bir K_6 tam grafindan iki kenarı eksik olan bir graf verildiğinde bu grafin omegasını bulmak için çok iyi bilinen $\Omega(K_6) = 6 \cdot 3 = 18$ sayısından 4 çıkararak 14 bulmak yeterlidir.

5.3. Köşe silmenin omega değerine etkisi

Bu kısımda verilen bir graftan köşe veya köşeler silmenin omega değerine olan etkisi ele alınacaktır. İzole köşeler silmek yukarıda da açıklandığı gibi omega değerini sadece 2 düşürdüğünden sildiğimiz köşelerin derecelerinin en az 1 olduğunu varsayabiliriz.

5.3.1. Tanım. G bir graf ve $k \leq n$ için $v_1, v_2, \dots, v_k \in V(G)$ olsun. G grafindan bir v_i köşesinin silinmesi sonucunda Ω 'da oluşan değişim

$$\Delta(G, v_i) = \Omega(G) - \Omega(G - v_i)$$

ile; G grafindan v_1, v_2, \dots, v_k köşelerinin silinmesi sonucunda Ω 'da oluşan değişim ise

$$\Delta(G, v_1, v_2, \dots, v_k) = \Omega(G) - \Omega(G - \{v_1, v_2, \dots, v_k\})$$

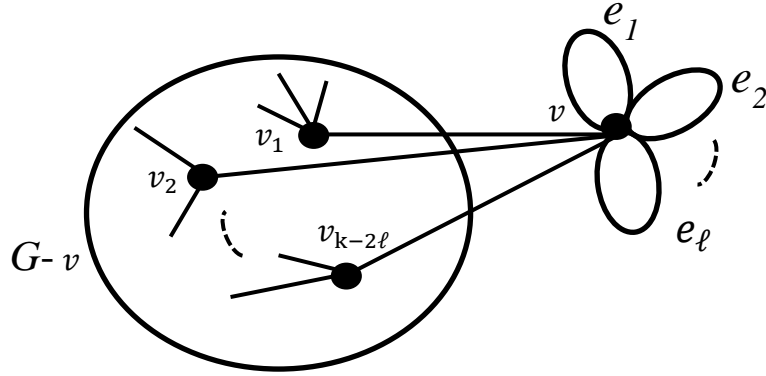
ile gösterilir.

5.3.2. Teorem. v , G grafinda $\ell \geq 0$ tane döngüye bitişik olan $d_v = k$ dereceli bir köşe olsun. v köşesini silmenin omega değerine olan etkisi

$$\Delta(G, v) = 2(k - \ell - 1)$$

kadardır.

İspat. $G, v \in G$ köşesinde döngüler bulunduran bir graf olsun, bkz. Şekil 5.9.

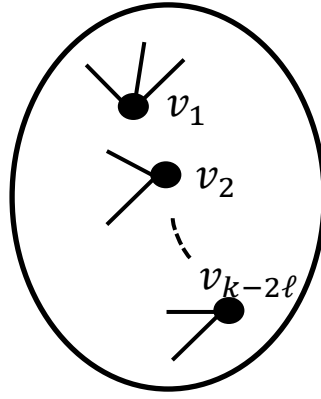


Şekil 5.9. Aynı köşede ℓ tane döngüye sahip bir G grafi

v köşesinin ve $v_1, v_2, \dots, v_{k-2\ell}$ komşularının omega değerine olan katkısı

$$d_{v_1} - 2 + d_{v_2} - 2 + \dots + d_{v_{k-2\ell}} - 2 + d_v - 2$$

olur. Şimdi de G grafindan v köşesi silinsin, bkz. Şekil 5.10.



Şekil 5.10. v köşesi silinmiş G grafi

$G - v$ grafında v köşesinin her bir komşusunun G 'deki derecesi 1 azalacağından, v köşesinin komşularının $\Omega(G - v)$ 'ye olan katkısı

$$d_{v_1} - 3 + d_{v_2} - 3 + \dots + d_{v_{k-2\ell}} - 3$$

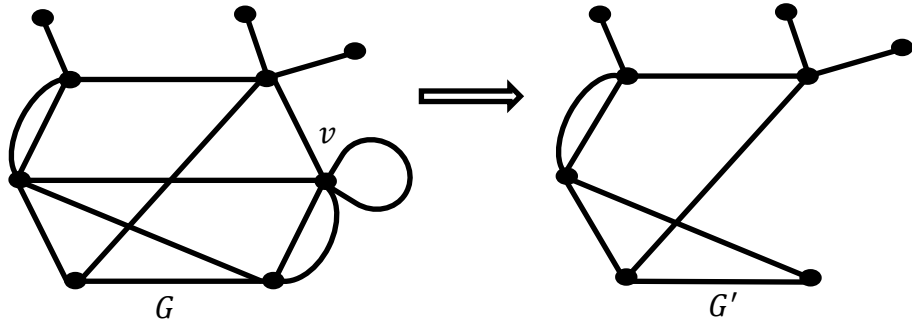
olur. Dolayısıyla $\Omega(G)$ 'de

$$\begin{aligned} \Delta(G, v) &= [d_{v_1} + d_{v_2} + \dots + d_{v_{k-2\ell}} + k - 2(k - 2\ell + 1)] \\ &\quad - [d_{v_1} + d_{v_2} + \dots + d_{v_{k-2\ell}} - 3(k - 2\ell)] \\ &= 2(k - \ell - 1) \end{aligned}$$

kadar azalma olacaktır.

5.3.3. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}, 6^{(1)}\}$ olsun. G de bu derece dizisine ait graf olsun.

$\Omega(G) = 12$ olur, bkz. Şekil 5.11.



Şekil 5.11. Bir graftan döngüye sahip bir köşe silmek

Döngüye sahip olan v köşesi G grafından silindiğinde yeni derece dizisi, $D' = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(1)}, 4^{(3)}\}$ için $\Omega(G') = 4$ elde edilir. $\Delta(G, v) = 2(k - \ell - 1) = 2(6 - 1 - 1) = 8$ olur.

5.3.2. Teorem'in aşağıdaki özel durumu, silinen köşede hiçbir döngü olmaması durumundaki değişimi verir:

5.3.4. Teorem. G , döngüye sahip olmayan bir graf olsun. Derecesi d_v olan bir $v \in G$ köşesini silmek, $\Omega(G)$ 'nin

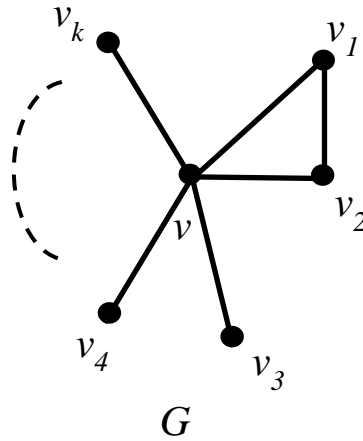
$$2d_v - 2$$

kadar azalmasına yol açar. Yani

$$\Delta(G, v) = 2d_v - 2$$

dir.

İspat. $k = d_v$ olmak üzere v köşesinin komşu köşeleri v_1, v_2, \dots, v_k olsun, bkz. Şekil 5.12.



Şekil 5.12. v köşesi ve komşuları

G grafında v_1, v_2, \dots, v_k köşelerinin dereceleri sırasıyla d_1, d_2, \dots, d_k olsun. v köşesinin ve komşularının G grafında omega değerine katkısı

$$d_1 - 2 + d_2 - 2 + \dots + d_k - 2 + d_v - 2 = d_1 + d_2 + \dots + d_k + d_v - 2k - 2$$

kadar; v köşesinin komşularının $G - v$ grafında omega değerine katkısı ise

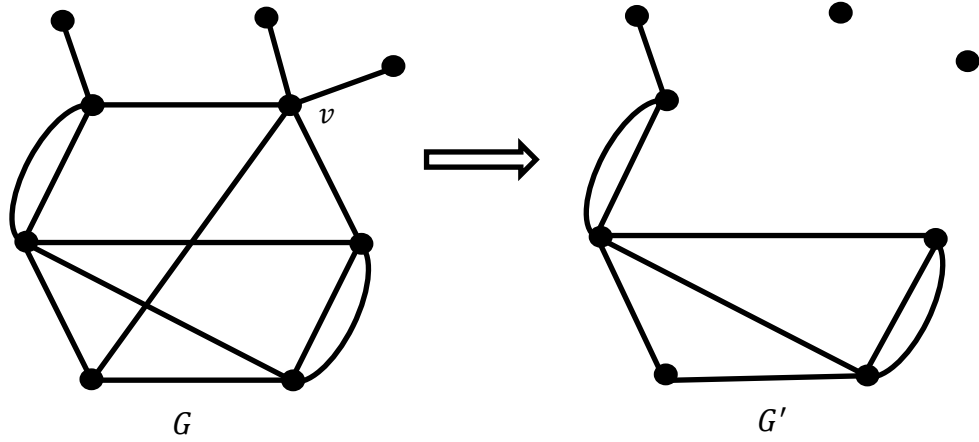
$$d_1 - 3 + d_2 - 3 + \dots + d_k - 3 = d_1 + d_2 + \dots + d_k - 3k$$

kadardır. Böylece omega değerindeki azalma

$$\begin{aligned} \Delta(G, v) &= \Omega(G) - \Omega(G - v) \\ &= d_v - 2k - 2 + 3k \\ &= d_v - 2d_v - 2 + 3d_v \\ &= 2d_v - 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.3.5. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 3^{(1)}, 4^{(3)}, 5^{(2)}\}$ olsun. G de bu derece dizisine ait graf olsun. Bu grafdaki v köşesi silindiğinde bu köşeye bağlı tüm kenarların da silindiğini hatırlayınız, bkz. Şekil 5.13.



Şekil.5.13 Bir graftan bir köşe silmek

O halde $\Omega(G) = 10$ olur. v köşesini sildikten sonra da $\Omega(G') = 2$ elde edilir. $\Omega(G) - \Omega(G') = 8$ olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\Delta(G, v) = 2d_v - 2 = 2 \cdot 5 - 2 = 8$$

dir.

$\Omega(G - \{u_1, u_2, \dots, u_k\})$ değerini hesaplamak için 5.3.2. Teorem ve 5.3.4. Teorem G grafına ardarda uygulanmalıdır. Burada tek dikkat edilmesi gereken nokta, bu k tane köşenin aynı anda silinmesi istendiğinde bu köşelerin birbirine komşu olmaması gerektiğidir. Aksi halde ilk adımda bir köşe çıkarıldığında bu köşeye bitişik olan kenarlar da çıkarılacağından ikinci adımda derecelerde değişme olacaktır. Aşağıdaki sonuç genel durumla ilgilidir:

5.3.6. Teorem. Bir G grafından u_1, u_2, \dots, u_k köşelerinin aynı anda silinmesiyle Ω 'da oluşan azalma miktarı $\Delta(G, u_1, u_2, \dots, u_k)$; $i = 1, 2, \dots, k$ için G grafından bir u_i köşesi silindiğinde Ω 'da oluşan azalma miktarı da $\Delta(G, u_i)$ olsun. Ayrıca u_1, u_2, \dots, u_k köşelerinin silinmesi sırasında silinen ve bu köşelerden herhangi ikisine aynı anda bitişik olan kenarların sayısı η olsun. Bu durumda

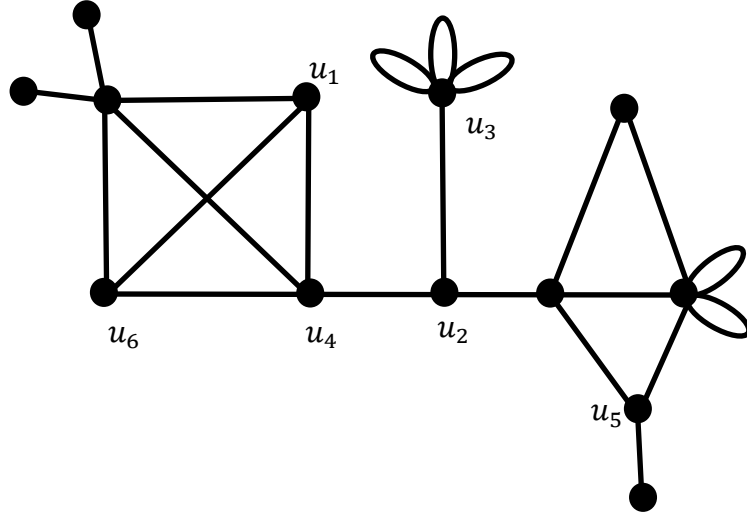
$$\Delta(G, u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{i=1}^k \Delta(G, u_i) - 2\eta$$

dır. Yani G grafından u_1, u_2, \dots, u_k köşelerinin aynı anda silinmesiyle Ω 'da oluşan azalma miktarı bulunmak istendiğinde G grafından $i = 1, 2, \dots, k$ için u_i köşesi silindiğinde Ω 'da oluşan azalma miktarlarını ayrı ayrı hesaplayıp toplamak ve elde edilen bu toplamdan silinen iki komşu köşeye bitişik olan tüm kenarların sayısını çıkarmak yeterli olacaktır.

İspat. İspat iki köşe için yapılacaktır. İspat, tümevarımla sonlu köşeye genelleştirilebilir. u ve v , komşu iki köşe olsun. u köşesi silindiğinde uv kenarıyla birlikte $d_u - 1$ tane daha u 'ya bitişik kenarın da silindiği hatırlanırsa benzer şekilde v köşesi silindiğinde uv kenarıyla birlikte $d_v - 1$ tane daha v 'ye bitişik kenar silinecektir. Her iki köşe birden silindiğinde ise uv kenarıyla birlikte $d_u - 1 + d_v - 1 = d_u + d_v - 2$ tane daha kenar silinmelidir. Bu da toplam $d_u + d_v - 1$ tane kenarın silinmesi gerektiğini gösterir. 5.2.2. Teorem gereği bir kenar silmenin, grafın Ω değerini 2 azalttığı hatırlanırsa sonuç görülür.

Tek tek silme ile toplu silme arasındaki farkı iki komşu köşe silerek bir de iki komşu olmayan köşe silerek gösteren bir örnek aşağıda verilmiştir:

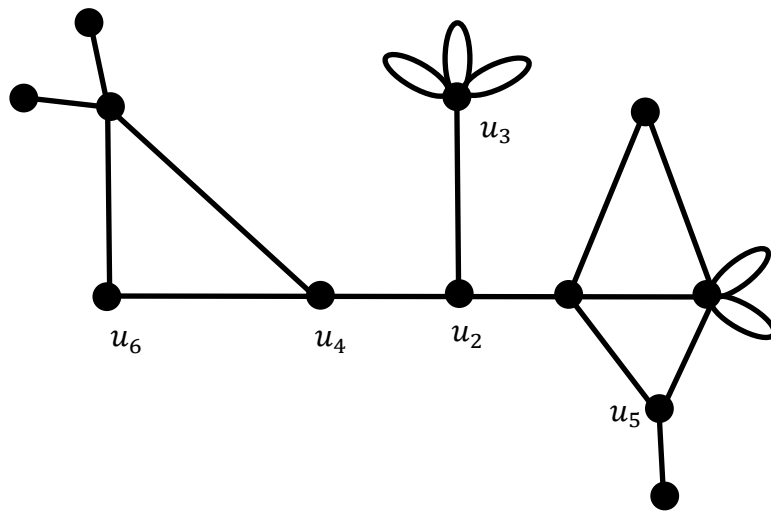
5.3.7. Örnek. $D = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}, 5^{(1)}, 7^{(2)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 18$ 'dir. Şekil 5.14'deki G grafi bu derece dizisine sahip bir graftır:



Şekil 5.14. $D = \{1^{(3)}, 2^{(1)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}, 5^{(1)}, 7^{(2)}\}$ derece dizisinin bir G çizimi

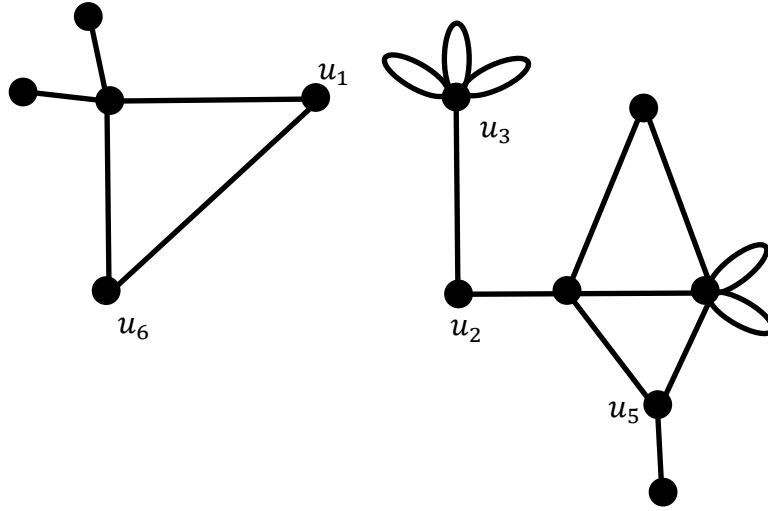
Şimdi sırasıyla G grafindan sadece u_1 köşesini, sadece u_4 köşesini, u_1 ve u_4 komşu köşelerini ve son olarak da u_2 ve u_6 komşu olmayan köşelerini silerek komşu köşeler silmekle komşu olmayan köşeler silmenin farkı örneklenecektir:

a) Sadece u_1 köşesi silinirse: $d(u_1) = 3$ olduğundan, u_1 köşesinin silinmesiyle omega değerinde $\Delta(G, u_1) = 2du_1 - 2 = 2.3 - 2 = 4$ kadar azalma olur. Bu durumda yeni derece dizisi $D_1 = \{1^{(3)}, 2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(2)}, 7^{(2)}\}$ olduğundan $\Omega(D_1) = 14$ olarak hesaplanır. Gerçekten de $\Delta(G, u_1) = \Omega(G) - \Omega(G - u_1) = \Omega(D) - \Omega(D_1) = 18 - 14 = 4$ olduğu görülür, bkz. Şekil 5.15.



Şekil 5.15. Bir graftan bir köşe silmek

b) Sadece u_4 köşesi silinirse: $d(u_4) = 4$ olduğundan, u_4 köşesinin silinmesiyle omega değerinde $\Delta(G, u_4) = 2du_4 - 2 = 2 \cdot 4 - 2 = 6$ kadar azalma olur. Bu durumda yeni derece dizisi $D_4 = \{1^{(3)}, 2^{(4)}, 3^{(1)}, 4^{(2)}, 7^{(2)}\}$ olduğundan $\Omega(D_4) = 12$ olarak hesaplanır. Gerçekten de $\Delta(G, u_4) = \Omega(G) - \Omega(G - u_4) = \Omega(D) - \Omega(D_4) = 18 - 12 = 6$ olduğu görülür, bkz. Şekil 5.16.

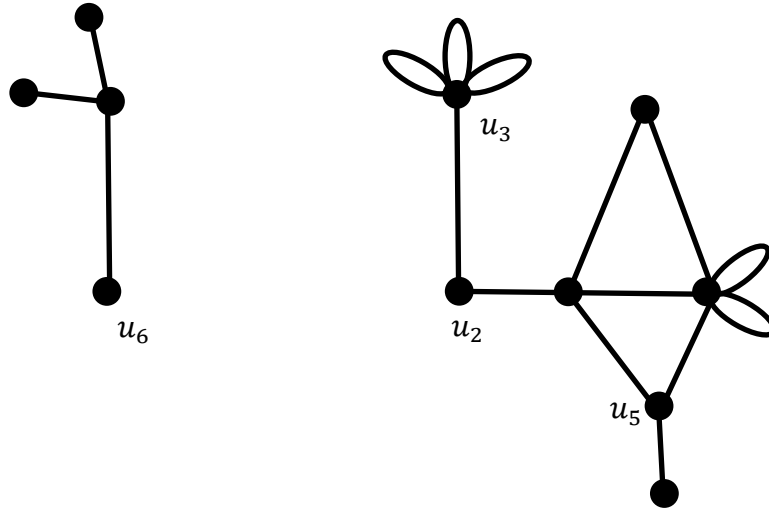


Şekil 5.16. Bir graftan bir köşe silmek

c) u_1 ve u_4 komşu köşeleri beraber silinirse: $\Delta(G, u_1) = 4$ ve $\Delta(G, u_4) = 6$ olduğundan, bu köşelerin silinmesiyle omega değerinde

$$\begin{aligned}\Delta(G, u_1, u_4) &= \Delta(G, u_1) + \Delta(G, u_4) - 2\eta \\ &= 4 + 6 - 2 \cdot 1 = 8\end{aligned}$$

kadar azalma olur. Bu durumda u_1 ve u_4 komşu köşelerinin beraber silinmesi durumunda elde edilecek yeni derece dizisi $D_{1,4} = \{1^{(4)}, 2^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}, 7^{(2)}\}$ olduğundan $\Omega(D_{1,4}) = 10$ olarak hesaplanır. Gerçekten de $\Delta(G, u_1, u_4) = \Omega(G) - \Omega(G, u_1, u_4) = 18 - 10 = 8$ olduğu görülür, bkz. Şekil 5.17.

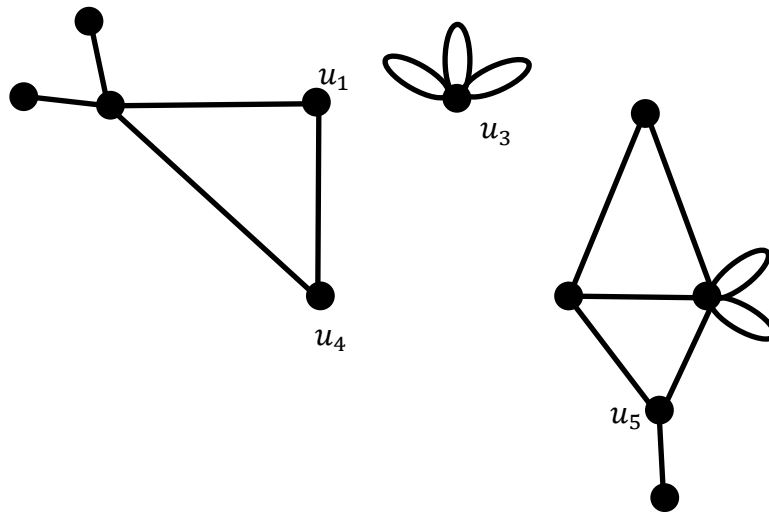


Şekil 5.17. Bir graftan iki komşu köşe silmek

d) u_2 ve u_6 komşu olmayan köşeleri beraber silinirse: $\Delta(G, u_2) = 4$ ve $\Delta(G, u_6) = 4$ olduğundan, bu köşelerin silinmesiyle omega değerinde

$$\begin{aligned}\Delta(G, u_2, u_6) &= \Delta(G, u_2) + \Delta(G, u_6) - 2\eta \\ &= 4 + 4 - 2 \cdot 0 = 8\end{aligned}$$

kadar azalma olur. Bu durumda u_2 ve u_6 komşu olmayan köşelerin beraber silinmesi durumunda elde edilecek yeni derece dizisi $D_{2,6} = \{1^{(3)}, 2^{(3)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}\}$ olduğundan $\Omega(D_{2,6}) = 10$ olarak hesaplanır. Gerçekten de $\Delta(G, u_2, u_6) = \Omega(G) - \Omega(G, u_2, u_6) = 18 - 10 = 8$ olduğu görülür, bkz. Şekil 5.18.



Şekil 5.18. Bir graftan komşu olmayan iki köşe silmek

5.3.8. Sonuç. Eğer u_1, u_2, \dots, u_k köşeleri, G 'de birbiri ile komşu olmayan köşeler ise

$$\Delta(G, u_1, u_2, \dots, u_k) = \sum_{i=1}^k \Delta(G, u_i)$$

elde edilir.

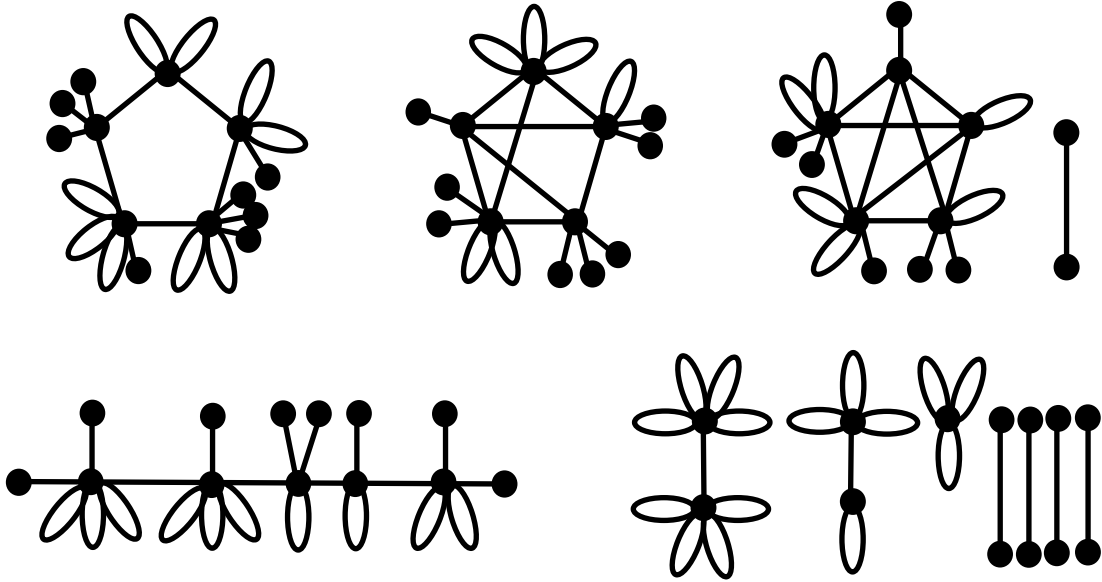
6. UÇ PROBLEMLER

6.1. Giriş

Graf teoride şimdiye kadar en iyi bilinen topolojik değişmez (invariant) Euler karakteristiğidir. Bu karakteristik sayı, yukarıda da belirtildiği gibi topolojide yüzey hakkında, graf teoride de yüzeye çizilen tüm grafların ortak özellikleri hakkında bilgi vermektedir. Burada tanımlanan omega invariantı da bir anlamda verilen bir derece dizisine karşılık olarak çizilebilen tüm grafların ortak özelliklerini belirlemede faydalıdır ve bu nedenle bir invarianttır. 250 yıldır bilinen Euler karakteristiği bir çok alanda önemli uygulamalara sahiptir ama omega invariantı Euler karakteristiğinin kullanılmasıyla doğrudan elde edilemeyecek olan çizilebilirlik, bağlantılılık, devirlilik, bileşen sayısı, giriş sayısı, döngü sayısı vb. ile ilgili bilgiler doğrudan elde edilebilir. Euler karakteristiği ile yapılan sınıflandırmalar omega ile de yapılabilir. Bu çalışmada $\Omega(G) \leq -4$ ise G grafının kesinlikle bağlantısız olduğu; $\Omega(G) = -2$ ise ve G çiziminin bağlantılı olması isteniyorsa G grafının kesinlikle bir ağaç olduğu önceden ispat edilmiştir. Benzer şekilde G grafi çizilebilir ve bağlantılı ise $\Omega(G) \geq 0$ olduğunda G grafi kesinlikle en az bir devire sahiptir. Diğer yandan G grafının tüm bileşenlerinin devirli olması durumunda $\Omega(G) \geq 0$ olur. Ayrıca $\Omega(G) \leq -4$ olan bir G grafının bileşenlerinin tümü birden devirli olamaz.

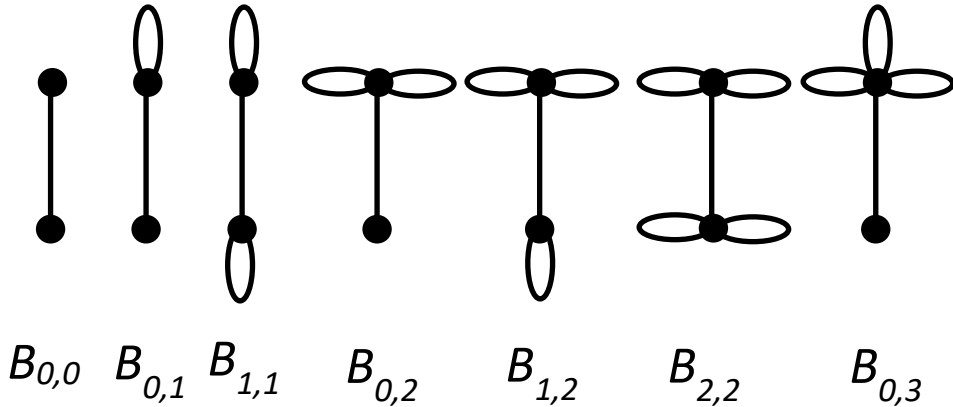
Bir derece dizisi verildiğinde bu derece dizisine sahip birçok grafın çizilebildiği buraya kadar olan kısımda bir çok defa belirtildi. Bu çizimlerin bazı ortak özellikleri ve bu özellikleri ifade eden net formüller bulunduğu gibi, bazı özelliklerin de ortak olmadığı ve çizimden çizime değiştiği söylenebilir. Bu tür durumlarda net formüller bulunamayacağından ancak istenen özelliğin aldığı değerlerin bulunduğu aralıkları belirlemek gereklidir. Yani bir özelliğin maksimum ve minimum değerlerinin belirlenmesi hedeflenebilir. Bu tür problemlere uç (*extremal*) problemler denilmektedir. Bu bölümde verilen bir derece dizisinin olası tüm çizimleri hakkında bazı uç problemler incelenecektir ve mümkün olan $\Omega(G) \geq 0$, $\Omega(G) = -2$ ve $\Omega(G) \leq -4$ durumlarında verilen derece dizisine sahip tüm çizimler için, tüm bağlantılı çizimler için ve tüm temel çizimler için maksimum döngü sayısı bulunacaktır.

Belirli bir derece dizisinin çizimlerinin ne kadar farklı olabileceğini görmek için, $D = \{1^{(8)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}, 9^{(2)}\}$ derece dizisi ele alınsın. $\Omega(D) = 18$ 'dir. Şekil 6.1'deki graflar olası tüm çizimlerin bazılarıdır.



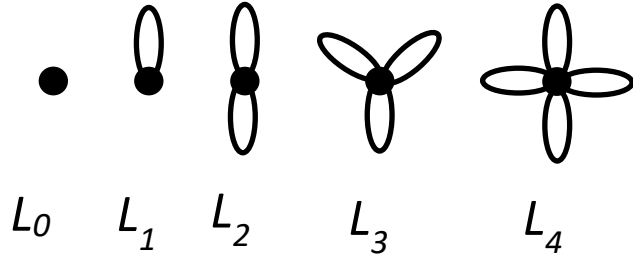
Şekil 6.1. $\{1^{(8)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}, 9^{(2)}\}$ derece dizisine sahip 5 graf

Şimdi $\Omega(D) \geq 0$ olan ilk durum ile devam edilecektir. $r, s \in \mathbb{N}$ olsun. Bir kenarın bir ucuna r tane döngü ve diğer ucuna s tane döngü eklenerek elde edilen graf $B_{r,s}$ ile gösterilecektir, bkz. Şekil 6.2.



Şekil 6.2. Bazı $B_{r,s}$ grafları

$q \in \mathbb{N}$ olsun. Tek bir köşeye q tane döngü eklenerek elde edilen graf L_q ile gösterilsin. İlk bir kaç tane L_q , Şekil 6.3'de görülmektedir:



Şekil 6.3. Bazı L_q grafları

Bu iki graf sınıfı sayesinde aşağıdaki sonuç verilebilir:

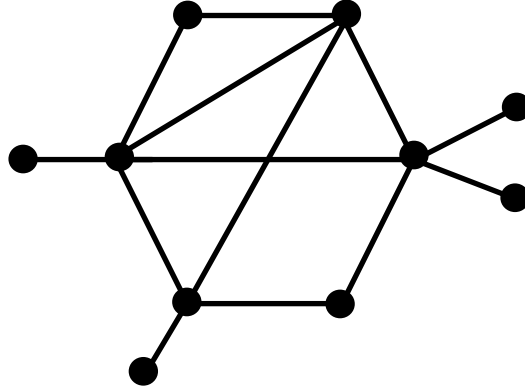
6.1.1. Teorem. Çizilebilir bir derece dizisi $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ olsun. Bu derece dizisine sahip olan herhangi bir G grafinin maksimum bileşen sayısı

$$c_{max} = \sum_{a_i \text{ çift}} a_i + \frac{1}{2} \sum_{a_i \text{ tek}} a_i$$

dir.

İspat. Maksimum bileşen sayısını belirlemek için her bir bileşen mümkün olduğunca küçük seçilmelidir. İlk bakışta G 'nin köşelerinin sayısı olan n 'in doğal bir üst sınır olduğu söylenebilir. Şimdi $2q$ şeklindeki her bir çift köşe derecesi için, bir köşeye sahip bir L_q bileşeni seçilsin. Böylelikle çift dereceli köşelerden kaynaklanan $\sum a_{2i}$ tane bileşen vardır. İkinci olarak, tek dereceli bir köşe tek başına bir bileşen oluşturamaz. Çünkü böyle bir durumda, bu bileşen tek başına bir graf olduğundan el sıkışma lemması gereği köşelerinin derecelerinin çift olması gereken toplamı tek olurdu. Dolayısıyla tek dereceli bir köşeye sahip en küçük bileşen, iki tane tek dereceli köşeye sahip olan $B_{r,s}$ 'dir. Böylece bu bileşenlerin maksimum sayısı da $\frac{1}{2} \sum a_{2i-1}$ olacaktır.

6.1.2. Örnek. $D = \{1^{(4)}, 2^{(2)}, 4^{(2)}, 5^{(2)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 6$ olur, bkz. Şekil 6.4.

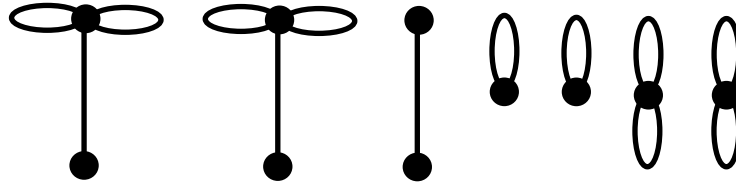


Şekil 6.4. D 'nin temel formdaki bir çizimi

D 'ye karşılık gelen bağlantılı ya da bağlantısız başka çizimler de vardır. D 'nin maksimum bileşen sayısı,

$$\begin{aligned}
 c_{max} &= a_2 + a_4 + \frac{a_1 + a_3 + a_5}{2} \\
 &= 2 + 2 + \frac{4 + 0 + 2}{2} \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. D 'nin maksimum bileşene sahip bir çizimini gösteren graf, Şekil 6.5'de verilmiştir.



Şekil 6.5. Verilen derece dizisinin maksimum bileşenli bir çizimi

6.2. Maksimum döngü sayısı

Bu bölümde verilen bir derece dizisinin çizimlerindeki döngülerin sayısını hesaplamaya yönelik bir uç problemi ele alınacaktır. D negatif olmayan bir tam sayı kümesi olsun.

$LF(D)$, $LC(D)$ ve $L(D)$ sayıları şu şekilde tanımlanır: Çizilebilir bir D derece dizisi verilsin. D 'ye karşılık gelen grafların bir temel çizimindeki maksimum döngü sayısı $LF(D)$ ile; D 'ye karşılık gelen bağlantılı graflardaki maksimum döngü sayısı $LC(D)$ ile;

ve son olarak D 'ye karşılık gelen tüm graflardaki maksimum döngü sayısı da $L(D)$ ile gösterilsin. Aşağıdaki eşitsizlik tanımlardan aşikârdır:

6.2.1. Lemma. Herhangi bir D derece dizisi için

$$LF(D) \leq LC(D) \leq L(D)$$

olur. Ayrıca bu üç fonksiyon da toplamsaldır.

6.3. $\Omega(D) \geq 0$ durumu

Öncelikle L fonksiyonu ele alınsın. Çift sayı olan her bir d_i derecesi için bir tek köşe noktasında birbirine komşu $\frac{d_i}{2}$ tane döngüsü olan bir bileşen çizildiğini ve tek sayı olan her bir d_i ve d_j derece çifti için $r = \frac{d_i-1}{2}$ ve $s = \frac{d_j-1}{2}$ olmak üzere $r + s$ döngüye sahip bir $B_{r,s}$ bileşeni olduğu hatırlanırsa D derece dizisinin tüm olası çizimlerinde en fazla toplam,

$$\begin{aligned} L(D) &= \sum_{d_i \text{ çift}} \frac{d_i}{2} + \sum_{d_j \text{ tek}} \frac{d_j-1}{2} \\ &= \frac{1}{2} [2m - \sum_{d_i \text{ tek}} 1] \\ &= m - \frac{1}{2} \sum_{d_i \text{ tek}} 1 \end{aligned}$$

döngü bulunduğu ispatlanılmış olur:

6.3.1. Teorem. Herhangi bir D derece dizisinin çizimlerinin sahip olabileceği maksimum döngü sayısı,

$$L(D) = m - \frac{1}{2} \sum_{d_i \text{ tek}} 1$$

dir.

6.3.2. Örnek. $D = \{1^{(2)}, 3^{(2)}, 4^{(1)}, 5^{(1)}, 6^{(1)}, 7^{(1)}\}$ olsun. $L(D) = 15 - \frac{1}{2}(6) = 12$ olur.

Şimdi $LF(D)$ sayısı bulunacaktır:

6.3.3. Teorem. $\Omega(D) \geq 0$ olsun. D derece dizisinin temel çizimlerinin sahip olabileceği maksimum döngü sayısı olan $LF(D)$ için aşağıdakiler geçerlidir:

i. Eğer $a_1 > \sum_{d_i > 1, tek} 1$ ise $LF(D) = \frac{\Omega(D)}{2}$ olur.

ii. Eğer $a_1 \leq \sum_{d_i > 1, tek} 1$ ise $LF(D) = \frac{1}{2}(\Omega(D) + a_1 - \sum_{d_i > 1, tek} 1)$ olur.

İspat. i. Köşe derecelerinin $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + \Delta a_\Delta$ şeklindeki toplamının $2m$ olduğu bilinmektedir. İlk olarak $a_1 > \sum_{d_i > 1, tek} 1$ olsun. Yani sallanan köşelerin sayısı, tüm tek dereceli köşelerin sayısının yarısından büyük olsun. Maksimum sayıda döngü bulmak istendiğinden minimum sayıda kiriş ve katlı kenar olması hedeflenmektedir. Varsayım gereği $a_1 > \sum_{d_i > 1, tek} 1$ olduğundan yeterli sayıda sallanan kenara sahip olduğu açıktır ve bu yüzden ne kirişlere ne de katlı kenarlara ihtiyaç duyulmaz. Bu nedenle, a_1 tane sallanan kenarın her biri için toplam köşe sayısından 2 eksiltilir. $\Omega(D) \geq 0$ durumunda bir temel formun $(a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta)$ -gen içerdiği hatırlanırsa bu çokgenin kenarlarının her biri için köşe derecelerinin toplamından 2 çıkarılması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu yüzden geriye kalan köşe derecelerinin toplamı,

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + \Delta a_\Delta - 2a_1 - 2(a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta) &= 2m - 2n \\ &= \Omega(D) \end{aligned}$$

olur ve her bir döngünün iki ucu olduğu için

$$LF(D) = \frac{\Omega(D)}{2}$$

elde edilir.

Alternatif bir ispat daha verilebilir: $\Omega(D) \geq 0$ ve $a_1 > \sum_{d_i > 1, tek} 1$ olsun. Devir bulunduran bir temel formda D derece dizisinin herhangi bir G çiziminde kenarlar tarafından çevrelenen tüm bölgeler bir ana devir ve etrafındaki döngülerden oluştuğundan ve

$$r = \frac{\Omega(D)}{2} + 1$$

olduğundan maksimum sayıda döngü elde etmek için hiçbir kiriş ya da katlı kenar olmaması gerektiğinden hareketle

$$r = LF(D) + 1$$

elde edilir.

ii. İkinci olarak $a_1 \leq \sum_{d_i > 1, tek} 1$ olsun. Bu durumda, önceki durumda olduğu gibi hareket etmek için yeterli sayıda sallanan köşe bulunmamaktadır. Çift dereceli köşeler düşünülürse aynı köşeye iki sallanan kenar eklemek, maksimum değerini bulmak istenilen döngü sayısını azaltır. Bir köşeye sallanan kenar ve bir kiriş eklemek de aynı etkiye sahiptir. Bu nedenle çift dereceye sahip köşelere sallanan kenar eklenmemelidir. Şimdi de derecesi tek olan köşeler ele alınsın. Birden fazla sallanan kenar eklemek, tekrar döngü sayısını azaltacağından tek dereceli köşelere en fazla birer tane sallanan kenar eklenebilir. Bir derece dizisinde el sıkışma lemması gereği tek dereceli köşelerin sayısının çift olmak zorunda olduğu hatırlanırsa bu sayı, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $2k$ olarak alınır ve bu köşelerden a_1 tanesi sallanan kenarlara sahip olacaktır. Bu a_1 köşenin herbiri maksimum $\frac{d_i-3}{2}$ döngüye sahip olacaktır. Ayrıca geriye kalan $2k - a_1$ tek dereceli köşenin herbiri de maksimum $\frac{d_i-3}{2}$ tane döngüye sahiptir. Sonuç olarak, $2k$ tane tek d_i dereceli köşenin herbiri maksimum $\sum_{d_i > 1, tek} (\frac{d_i-3}{2})$ tane döngüye sahip olacaktır. Benzer şekilde, çift d_i derecesine sahip köşenin maksimum döngü sayısı da $\sum_{d_i > 1, çift} (\frac{d_i-2}{2})$ olarak hesaplanır. Bu nedenle D derece dizisinin temel formundaki maksimum döngü sayısı,

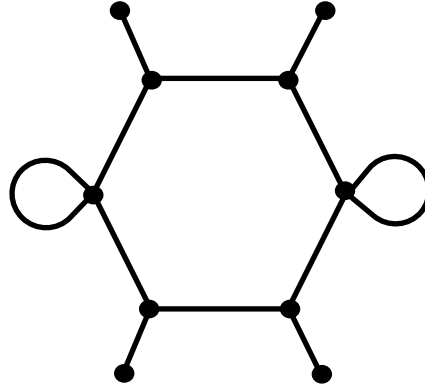
$$\begin{aligned} LF(D) &= \sum_{d_i > 1, tek} (\frac{d_i-3}{2}) + \sum_{d_i çift} (\frac{d_i-2}{2}) \\ &= \frac{1}{2} [\sum_{d_i > 1, tek} d_i + \sum_{d_i çift} d_i - \sum_{d_i > 1, tek} 3 - \sum_{d_i çift} 2] \\ &= \frac{1}{2} [\sum_{1 \leq d_i \leq \Delta} d_i - a_1 - 2(\sum_{1 \leq d_i \leq \Delta} 1 - a_1) - \sum_{d_i > 1, tek} 1] \\ &= \frac{1}{2} [2m - a_1 - 2(n - a_1) - \sum_{d_i > 1, tek} 1] \\ &= \frac{1}{2} [\Omega + a_1 - \sum_{d_i > 1, tek} 1] \end{aligned}$$

elde edilir.

6.3.4. Örnek. $D = \{1^{(4)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 4$ olur. Bu durumda $a_1 \leq \sum_{d_i > 1, tek} 1$ şartı gereği

$$LF(D) = \frac{1}{2}(4 + 4 - 4) = 2$$

olur, bkz. Şekil 6.6.

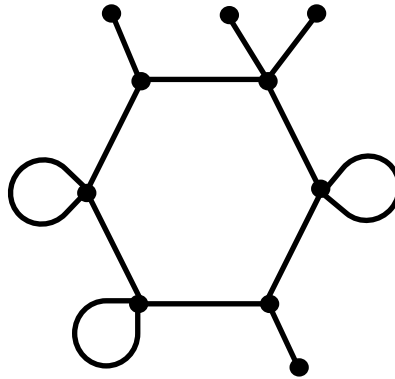


Şekil 6.6. $D = \{1^{(4)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisinin maksimum döngülü bir temel çizimi

6.3.5. Örnek. $D = \{1^{(4)}, 3^{(2)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 6$ olur. O halde $a_1 > \sum_{d_i > 1, tek} 1$ olduğundan

$$LF(D) = \frac{\Omega(D)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

elde edilir, bkz. Şekil 6.7.



Şekil 6.7. $D = \{1^{(4)}, 3^{(2)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisinin maksimum döngülü bir temel çizimi

Bir derece dizisinin bazıları bağlantılı bazıları da bağlantısız olarak bir çok yolla çizilebildiği bilinmektedir. Şimdi temel çizim formları da dahil olmak üzere tüm olası bağlantılı çizimlerin maksimum döngü sayısı hesaplanacaktır.

6.3.6. Teorem. $\Omega(D) \geq 0$ olsun. Verilen bir $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ derece dizisinin tüm bağlantılı çizimlerinin sahip olabileceği maksimum döngü sayısı,

1. Eğer tüm dereceler çift ise

a) $n = 1$ ise yani $\sum_{i=1}^{\Delta} a_i = 1$ ise $LC(D) = \frac{\Omega(D)}{2} + 1$ olur.

b) $n > 1$ ise yani $\sum_{i=2}^{\Delta} a_i > 1$ ise $LC(D) = \frac{\Omega(D)}{2}$ olur.

2. Eğer tek dereceli en az bir köşe varsa $LC(D) = \frac{\Omega(D)}{2} + 1$ 'dir.

İspat. 1a) $n = 1$ olduğundan yani graf tek bir köşeye sahip olduğundan çizilecek her bir kenar yine aynı köşeye bağlanacaktır. Dolayısıyla her bir kenarı bir döngü olacaktır. O halde bu tek köşede kenar sayısı kadar yani m tane döngü olacaktır. Yani tüm kapalı bölgeler döngülerden ibaret olacağından 3.2.4. Teorem gereği $\frac{\Omega(D)}{2} + 1$ tane döngü çizilebilir.

1b) $n > 1$ iken maksimum döngüye sahip çizimi yapmak için en pratik yol, maksimum döngüye sahip bir temel çizim yapmaktır. Bir temel çizim yaparken ilk olarak $k = (a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta) - \text{gen}$ çizerek başlanır. Daha sonra da bu en uzun devirin üzerine $2k_i$ derecesine sahip her bir köşe için $\frac{2k_i - 2}{2} = k_i - 1$ tane döngü çizilerek şekil tamamlanmış olur.

2. İkinci olarak, tek dereceli en az bir köşe mevcut olsun. El sıkışma lemması gereği tek dereceli köşelerin sayısı çift olacağından en az 2 tane tek dereceli köşe bulunacaktır. Aranılan çizimi yapmak için ilk olarak $\frac{1}{2}[a_1 + 2 + \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1 + \sum_{d_i \text{ çift}} 2]$ uzunluklu bir yol çizilir. Herbir çift d_i derecesine sahip köşeye $\frac{d_i - 2}{2}$ tane döngü eklenir. Burada iki alt durum söz konusudur:

2.a. $a_1 = 0$ durumu. Yolun iki ucunda da sallanan köşe olamaz. Bu yüzden tek dereceli köşelerden ikisi, diyelim ki d_a, d_b derecelerine sahip iki köşe, yolun iki ucuna sırasıyla $\frac{d_a - 1}{2}$ ve $\frac{d_b - 1}{2}$ tane döngü ekleyerek yerleştirilir. Geriye $\sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1 - 2$ tane tek dereceli

köşe kalır. Bu sayının çift olduğuna dikkat ediniz. İkinci adımda bu tek dereceli köşeler d_{k_i} ve d_{t_i} şeklinde ikişer ikişer gruplanarak Şekil 6.2’de verilen $B_{r,s}$ graflarına dönüştürülür. $B_{r,s}$ ’nin iki köşesinden birisi ilk adımda çizilen yol üzerinde kalacaktır. Diğeri ise bu köşenin yol üzerinde olmayan komşu köşesi olur. Yol üzerindeki köşenin derecesi d_{k_i} ise bu köşeye $\frac{d_{k_i}-3}{2}$ tane döngü, diğerine de $\frac{d_{t_i}-1}{2}$ tane döngü eklendiğinde böylelikle aranan graf elde edilmiş olur. Bu grafın maksimum döngü sayısı ise

$$\begin{aligned}
LC(D) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{d_i > 1, tek} d_i - \sum_{d_i > 1, tek} 1 - \frac{\sum_{d_i > 1, tek} 1 - 2}{2} \cdot 2 + \sum_{d_i \text{ çift}} (d_i - 2) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{d_i > 1, tek} (d_i - 2) + 2 + \sum_{d_i \text{ çift}} (d_i - 2) \right] \\
&= \frac{1}{2} [2m - 2n + 2] \\
&= \frac{\Omega(D)}{2} + 1
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

2.b. $a_1 > 0$ durumu. Burada da üç durum mevcuttur:

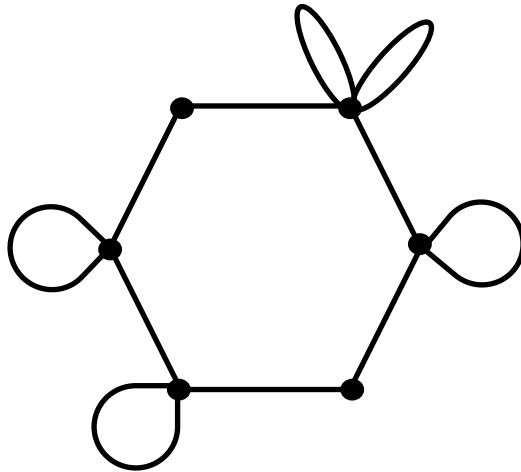
2.b.i. $\sum_{d_i > 1, tek} 1 = a_1$ olsun. $a_1 = 1$ ise bu tek sallanan köşe ilk durumdaki gibi yolun bir ucuna yerleştirilir. El sıkışma lemması gereği en az bir tane daha derecesi tek olan köşe mevcut olacağından geriye kalan tek dereceli köşelerden birisi, diyelim ki derecesi d olanı, yolun diğer ucuna $(d - 1)/2$ tane döngü yardımıyla yerleştirilir. Derecesi bir çift d_i sayısı olan her bir köşeye $\frac{d_i-2}{2}$ tane döngü eklenir, eğer kaldıysa derecesi tek sayı olan köşeler de ikişer ikişer gruplanıp **2.a**’daki gibi hareket edilirse hedeflenen çizime ulaşılır. $a_1 \geq 2$ ise bu durumda iki uca da birer sallanan köşe konularak ve diğer işlemler $a_1 = 1$ durumundaki gibi takip edilerek benzer yolla sonuca gidilir.

2.b.ii. $\sum_{d_i > 1, tek} 1 > a_1$ olsun. 2.b.i. şikkındaki gibi hareket edilerek istenen çizime ulaşılır.

2.b.iii. $\sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1 < a_1$ olsun. Bu durumda $n + 2 - a_1$ uzunluklu bir yol çizilerek başlanır. Bu uzunluğu bulmak için önceki adımlarda çizilen $\frac{1}{2}[a_1 + 2 + \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1 + \sum_{d_i \text{ çift}} 2]$ uzunluklu bir yol ile başlanırsa olması gerekenden fazla döngü ve yine olması gerekenden az sallanan köşe elde edilir. İstenen sonuca ulaşmak için $\frac{a_1 - \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1 - 2}{2}$ tane döngünün her biri yerine bir çift sallanan kenar eklenir ve her bir işlemde yoldan bir köşe eksiltir. Bu da $n + 2 - a_1$ uzunluklu bir yol elde edileceği anlamına gelir. Yukarıdaki adımlarda olduğu gibi çift ve tek dereceleri köşeleri yerleştirerek istenen graf elde edilir.

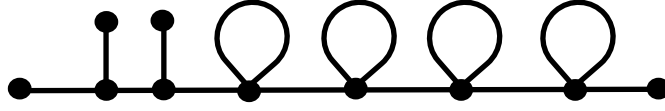
Görüldüğü gibi bu ispatın **2.b** kısmında takip edilen ortak yöntem, verilen uzunlukta bir yol çizerek bu yolun iki ucuna döngüler yardımıyla iki adet tek dereceli köşe eklemek ve kalan tek dereceli köşeleri ikişer ikişer gruplayıp $B_{r,s}$ grafları olarak, kalan çift dereceli köşeleri de gerekli sayıda döngü ekleyerek yol üzerine yerleştirmek şeklinde özetlenebilir.

6.3.7. Örnek. $D = \{2^{(2)}, 4^{(3)}, 6^{(1)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 10$ olur ve böylece $LC(D) = \frac{\Omega(D)}{2} = \frac{10}{2} = 5$ elde edilir, bkz. Şekil 6.8. Bu çizimin aynı zamanda bir temel çizim olduğuna dikkat ediniz.



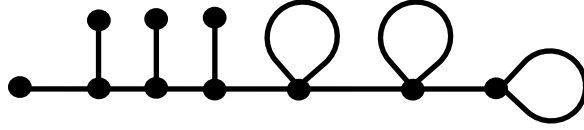
Şekil 6.8. $\{2^{(2)}, 4^{(3)}, 6^{(1)}\}$ 'nin maksimum döngülü bağlantılı bir çizimi

6.3.8. Örnek. $D = \{1^{(4)}, 3^{(2)}, 4^{(4)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 6$ olur. O halde $LC(D) = \frac{\Omega(D)}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 4$ elde edilir, bkz. Şekil 6.9.



Şekil 6.9. $\{1^{(4)}, 3^{(2)}, 4^{(4)}\}$ 'nin maksimum döngülü bağlantılı bir çizimi

6.3.9. Örnek. $D = \{1^{(4)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = 4$ olur. Bu durumda $LC(D) = \frac{\Omega(D)}{2} + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3$ olur, bkz. Şekil 6.10.



Şekil 6.10. $\{1^{(4)}, 3^{(4)}, 4^{(2)}\}$ 'nin maksimum döngülü bağlantılı bir çizimi

6.4. $\Omega(D) = -2$ durumu

$\Omega(D) = -2$ olsun. O halde bu derece dizisi hem bağlantılı hem de bağlantısız çizilebilir. $\Omega(D) = -2$ ve D bağlantılı olduğunda D derece dizisine ait olan graf devir bulundurmeyen (ağaç) bir graftır. Bu da D 'ye ait grafin hiçbir döngüye sahip olmadığını gösterir. Buradan da aşağıdaki sonuca ulaşılır:

6.4.1. Teorem. $\Omega(D) = -2$ olsun. D derece dizisinin tüm bağlantılı G çizimleri için

$$L(G) = LF(G) = LC(G) = 0$$

dır.

İspat. $\Omega(D) = -2$ olduğunda G bağlantılı bir çizim ise G 'nin hiçbir devir bulundurmadığı görülmüştü. Buna göre sonuç aşikârdır.

O halde $\Omega(D) = -2$ özelliğindeki bir D derece dizisinin G çiziminin bağlantısız olduğu varsayılırsa bu durumda şu sonuç elde edilir:

6.4.2. Teorem. $\Omega(D) = -2$ ve G , bu derece dizisinin bağlantısız bir çizimi olsun.

$$LF(G) = \frac{a_1 - 2 - \sum_{d_i > 1, tek} 1}{2}$$

ve

$$L(G) = m - \frac{1}{2} \sum_{d_i \text{ tek}} 1$$

dir.

İspat. Yukarıdaki duruma benzer şekilde ispatı yapılabilir.

6.5. $\Omega(D) \leq -4$ durumu

$\Omega(D) \leq -4$ olan bir derece dizisinin tüm çizimlerinin kesinlikle bağlantısız olduğu gösterilmişti. Ayrıca $\Omega(D) \leq -4$ iken temel çizimlerin karma olduğunu, yani bir tane ana bileşen ile yanında belli sayıda K_2 'den oluşur. Bu K_2 'lerde herhangi bir döngü olamayacağından bütün döngüler ana devir üzerindedir. Hatırlanacağı gibi ana bileşen, uzunluğu $a_2 + a_3 + \dots + a_\Delta$ olan bir devir ile bu devirin köşelerine eklenen döngü ve sallanan kenarlardan oluşur. Derecesi çift olan köşelerde döngü kullanılamayacağı için sallanan kenara ihtiyaç olmayacaktır. Benzer şekilde derecesi tek olan köşelerde de mümkün olan en az sayı olan birer tane sallanan kenarı koymak yeterli olacaktır. O halde ana bileşende $\sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1$ tane 1 (sallanan kenar) kullanılır ve geriye kalan $a_1 - \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1$ tane 1'i ise ikişer ikişer kullanarak $(a_1 - \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1)/2$ tane K_2 oluşturulur. O halde AB ile gösterilecek olan ana bileşenin derece dizisi $\{1^{(\sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$ olur. $a_1 > \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1$ olduğundan toplamsallık özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} LF(D) &= LF(AB) + \sum LF(K_2) \\ &= LF(AB) \\ &= \frac{\Omega(AB)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(a_3 + 2a_4 + \dots + (\Delta - 2)a_\Delta - \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1) \\ &= \frac{1}{2}(\Omega(D) + a_1 - \sum_{d_i > 1, \text{tek}} 1) \end{aligned}$$

elde edilir.

6.5.1. Teorem. Eğer $\Omega(D) \leq -4$ ise

$$LF(D) = \frac{1}{2}(\Omega(D) + a_1 - \sum_{d_i > 1, tek} 1)$$

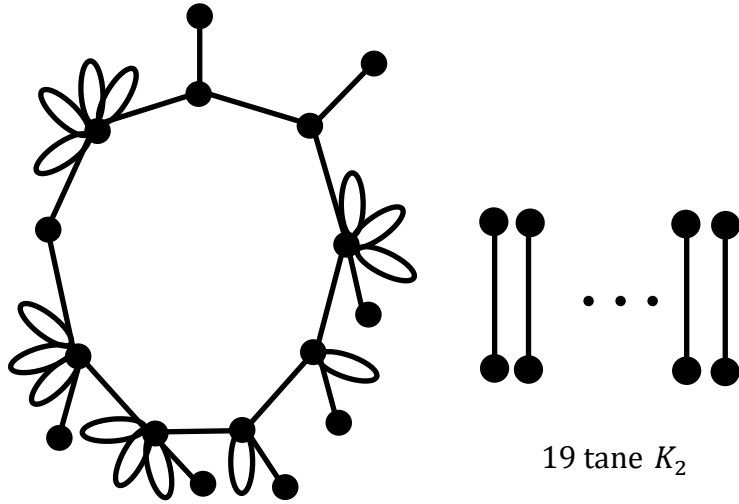
dir.

6.5.2. Örnek. $D = \{1^{(45)}, 2^{(1)}, 3^{(2)}, 5^{(2)}, 9^{(3)}, 10^{(1)}\}$ derece dizisi için $\Omega(D) = -8$ olur.

O halde

$$\begin{aligned} LF(D) &= \frac{1}{2}(\Omega(D) + a_1 - \sum_{d_i > 1, tek} 1) \\ &= \frac{1}{2}(-8 + 45 - 7) \\ &= 15 \end{aligned}$$

elde edilir. Karşılık gelen temel çizim Şekil 6.11'deki gibidir.



Şekil 6.11. D 'ye karşılık gelen bir karma temel çizim

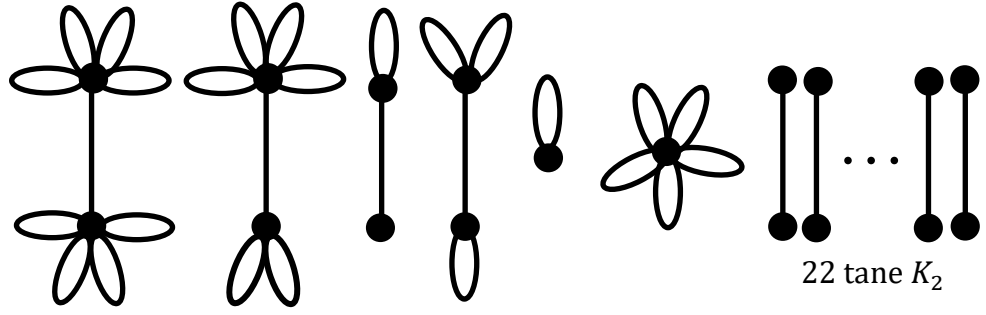
İkinci olarak, $\Omega(D) \leq -4$ olduğunda $LC(D)$ 'yi ele almak istenirse hatırlanacağı gibi bu durumda D 'nin bağlantılı bir çizimi elde edilemez. Dolayısıyla $LC(D)$ sayısı, bu durumda tanımlı değildir.

Sonuncu olarak, D derece dizisinin tüm çizimlerinin sahip olabileceği maksimum döngü sayısı olan $L(D)$ için

$$L(D) = 50 - \frac{1}{2} \cdot 52$$

$$= 24$$

bulunur, bkz. Şekil 6.12:



Şekil 6.12. $\{1^{(45)}, 2^{(1)}, 3^{(2)}, 5^{(2)}, 9^{(3)}, 10^{(1)}\}$ 'in maksimum döngülü bir çizimi

7. SONUÇ

Graflar, son yıllarda kimya, fizik, farmakoloji, elektronik mühendisliği, toplum bilim, biyoloji gibi birçok alanda ortaya çıkan uygulamaları nedeniyle ciddi bir çalışma alanı haline gelmiştir. Matematiğin günümüzde diğer disiplinlere en fazla uygulanabilen alt dali graf teoridir. Bu nedenle bu alanda çok fazla sayıda araştırma mevcuttur ve sadece matematikçiler için değil, grafların uygulanabildiği tüm bilim alanlarındaki araştırmacılar için önemli bir çalışma alanı olmuştur.

Bu tezde 250 yıldır bilinen önemli bir graf invariantı olan Euler karakteristiğine benzer şekilde yeni bir graf invariantı tanımlanmıştır. Adına omega denilen bu invariant yardımıyla verilen bir derece dizisine karşılık gelen tüm graf çizimlerinin ortak bir çok özelliğini elde etmek mümkün olabilmektedir. Omega invariantının topolojik graf teori, cebirsel graf teori, spektral graf teori ve topolojik graf indeksleri gibi alanlarda ve bunların uygulamalarında önemli uygulamaları ortaya çıkmaya başladığından kısa zamanda önemli bir kavram olarak literatürdeki yerini alacağı öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

- Aldous, J. M., Wilson, R. J. 2004.** Graphs and Applications, An Introductory Approach. Springer, London.
- Benjamin, A., Chartrand, G., Zhang, P. 2015.** The Fascinating World of Graph Theory, Princeton University Press, Princeton.
- Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 1982.** Graph Theory with Applications. North Holland, NY.
- Bondy, J. A. Murty, U. S. R. 2008.** Graph Theory. Springer NY.
- Capobianco, M., Molluzzo, J. C. 1978.** Examples and Counterexamples in Graph Theory. North-Holland, NY.
- Chartrand, G. 1985.** Introductory Graph Theory. New York, Dover.
- Chartrand, G., Zhang, P. 2012.** A First Course in Graph Theory. New York, Dover.
- Clark, J., Holton, D. A. 1995.** A First Look at Graph Theory. World Scientific, Singapour.
- Deo, N. 1974.** Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, NJ.
- Diestel, R. 2010.** Graph Theory. Springer GTM.
- Edmonds, J. 1964.** Existence of k-edge-connected ordinary graphs with prescribed degrees. *J of Research of the Nat. Bureau of Standards-B Mathematics and Mathematical Physics*, 68B (2), 73-74.
- Foulds, L. R. 1992.** Graph Theory Applications. Springer, New York.
- Gross, J. L., Yellen J. 2006.** Graph Theory and Its Applications (Second Edition). CRC Press, USA.
- Hakimi, S. L. 1962.** On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *J. SIAM Appl. Math.*, 10, 496-506.
- Hartsfield, N., Ringel, G. 2003.** Pearls in Graph Theory, A Comprehensive Introduction. Dover NY.
- Havel, V., 1955.** A remark on the existence of finite graphs (Czech). *Casopis Pest. Mat.*, 80, 477-480.
- Ivanyi, A., Lucz, L., Gombos, G., Matuszka, T. 2013.** Parallel Enumeration of Degree Sequences of Simple Graphs II. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica* 5 (2), 245-270.

- Kim, H., Toroczkai, Z., Miklos, I., Erdős, P. L., Szekely, L. A. 2009.** On Realizing all Simple Graphs with a Given Degree Sequence. *J. Phys. A: Math. Theor.* 42, 1-6.
- Miller, J. W. 2013.** Reduced Criteria for Degree Sequences, *Discrete Mathematics* 313, 550-562.
- Skiena, S., 1990.** Line Graphs, Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA, Addison-Wesley, 128 and 135-139.
- Skiena, S. 1990.** Implementing Discrete Mathematics, Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA, Addison-Wesley, 210.
- Thulasiraman, K., Swamy, M. N. S. 1992.** Graphs: Theory and Algorithms. John Wiley and Sons, NY.
- Tripathi, A., Venugopalan, S., West, D. B. 2010.** A short constructive proof of the Erdős-Gallai characterization of graphic lists, *Discrete Math.* 310, 843-844.
- Tripathi, A., Tyagi, H. 2008.** A Simple Criterion on Degree Sequences of Graphs, *Discrete Applied Mathematics* 156, 3513-3517.
- Trudeau, R. J. 1993.** Introduction to Graph Theory. Dover, NY.
- Tutte, W. T. 1998.** Graph Theory as I have Known It. Oxford Science Publications, Oxford.
- Tyshkevich, R. I., Mel'nikov, O. I., Kotov, V. M. 1981.** On Graphs and Degree Sequences: Canonical Decomposition, *Kibernetika* 6, 5-8.
- Tyshkevich, R. I., Chernyak, A. A., Chernyak, Zh. A. 1987.** Graphs and Degree Sequences I, *Cybernetics* 23 (6), 734-745.
- Vasudev, C. 2006.** Graph Theory with Applications. New Age International Publishers, India.
- Vasudev, C. 2007.** Combinatorics and Graph Theory. New Age International Publishers, India.
- Wallis, W. D. 2007.** A Beginner's Guide to Graph Theory. Birkhauser, Boston.
- West, D. B. 2001.** Introduction to Graph Theory. Pearson, India.
- Wilson, R. J. 1998.** Introduction to Graph Theory. Addison Wesley, Malaysia.
- Wilson, R. J., Watkins, J. J. 1990.** Graphs, An Introductory Approach. John Wiley and Sons, NY.
- Zverovich, I. E., Zverovich, V. E. 1992.** Contributions to the Theory of Graphic Sequences, *Discrete Mathematics* 105, 293-303.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sadık DELEN

Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul, 07/05/1979

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Atatürk Lisesi, 1996

Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2011

Bütünleştirilmiş Doktora : Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2019

Çalıştığı Kurum ve Yıl : -

İletişim (e-posta) : sd.mr.math@gmail.com.tr

Yayınları :

Delen, S., Cangul, I. N. 2018. A New Graph Invariant. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 6 (1), 30-33.

Delen, S., Cangul, I. N. 2018. Extremal Problems on Components and Loops in Graphs. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 34, 1-11. <https://doi.org/10.1007/s10114-018-8086-6>, ISSN: 1439-8516

Delen, S., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., New Results on Edge and Vertex Deletion in Graphs, *MICOPAM Proceedings Book*, (2018), 175-179, ISBN 978-86-6016-036-4

Yurttas, A., Togan, M., Delen, S., Cangul, I. N., Omega Invariant and Its Applications in Graph Theory, *MICOPAM Proceedings Book*, (2018), 86-90, ISBN 978-86-6016-036-4

Mishra, V. N., Delen, S., Cangul, I. N., Algebraic Structure of Graph Operations in Terms of Degree Sequences, *International Journal of Analysis and Applications*, 16 (6) (2018) 809-821, DOI: 10.28924/2291-8639-16-2018-809, ISSN: 2291-8639

Mishra, V. N., Delen, S., Cangul, I. N., Degree Sequences of Join and Corona Products of Graphs, *EJMAA-Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7 (1) (2019) 5-13, ISSN: 2090-729X

Delen, S., Cangul, I. N., Applications of a New Invariant for Graphs, (submitted)

Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., Cangul, I. N., Omega invariant of graphs and cyclicity, (submitted)

Delen, S., Togan, M., Yurttas, A., Ana, U., Cangul, I. N., The Effect of Edge and Vertex Deletion on Omega Invariant, (submitted)

Yurttas, A., Togan, M., Delen, S., Ana, U., Cangul, I. N., The Effect of a new Graph Theoretical Invariant Omega on Some Topological Graph Indices, (submitted)

Delen, S., Cangul, I. N., Degree Sequences of Join and Corona Product of Graphs, Third International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016), 19-23.05.2016, Bodrum-Mugla-Turkey

Delen, S., Cangul, I. N., Algebraic Properties of Join and Corona Product of Graphs, International Conference on Analysis and its Applications, Ahi Evran University, 12-15.07.2016, Kirsehir-Turkey

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Ana, U., Degree sequences of several graph classes, The 29th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society on Number Theory, Special Functions and Its Applications, 8-10.08.2016, Pondicherry-India

Delen, S., Cangul, I. N., Catalogue of Degree Sequences of Molecular Graphs, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2017), May 11-15, 2017, Palm Wings Ephesus Resort Hotel, Kusadasi - Aydin, TURKEY www.icrapam.org

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., Topological Applications of a new Graph Invariant, International Conference on Current Scenario in Pure and Applied

Mathematics (ICCSPAM 2018), 14th–16th February 2018, PG & Research Department of Mathematics, Kongunadu Arts and Science College (Autonomous), G. N. Mills Post, Coimbatore - 641029, Tamil Nadu, India, <http://kongunaducollege.ac.in/iccspam2018/index.php>

Delen, S., Cangul, I. N., Applications of a New Invariant for Graphs, International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2018), 19th – 21st February 2018, PG & Research Department of Mathematics, Sri Chandrasekharendra Saraswathi Viswa Mahavidyalaya (SCSVMV), Enathur, Kanchipuram, India, <http://www.kanchiuniv.ac.in/ICPAM/index.html>

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., Topological Graph Indices and a new Graph Invariant, Science Forum, 24th February, 2018, Department of Mathematics, RVCE, Bangalore, India <http://rvce.edu.in/Comm-Science>

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., Fundamental Form of a Graph, 3rd International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 04-06 May, 2018, Girne, Turkish Republic of Northern Cyprus, <https://www.cmescongress.org/>

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., A New Graph Theoretical Invariant in Terms of Degree Sequence, The 14th Serbian Mathematical Congress (14th SMAK), 16th-19th May, 2018, Kragujevac, Republic of Serbia, <https://imi.pmf.kg.ac.rs/kongres/index.php#about>

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., New Properties of Realizations of Degree Sequences, Graphs, groups, and more: celebrating Brian Alspach's 80th and Dragan Marušič's 65th birthdays, 28th May-1st June, 2018, UP FAMNIT Koper, Slovenia, <https://conferences.famniti.si/event/4/>

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Togan, M., Omega Invariant of Graphs, International Congress of Mathematicians, Rio de Janeiro, Brazil, 1st-9th August, 2018, <http://icm2018.org/portal/en/>

Cangul, I. N., Delen, S., Togan, M., Yurttas, A., Some applications of a new graph invariant omega, 2nd International Conference on Applied Mathematics and Numerical Methods, Department of Applied Mathematics, University of Craiova, Craiova, Romania, 19th-20th October, 2018, <http://cis01.central.ucv.ro/ICAMNM/?Home>

Cangul, I. N., Yurttas, A., Togan, M., Delen, S., Omega Invariant and Its Applications in Graph Theory, The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas, Dedicated to Professor Gradimir V. Milovanović on the Occasion of his 70th Anniversary, Antalya-Turkey, 26th–29th October, 2018, <http://micopam2018.akdeniz.edu.tr/information/>

Delen, S., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., Fundamental Forms and Omega Invariant of Graphs, The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas, Dedicated to Professor Gradimir V. Milovanović on the Occasion of his 70th Anniversary, Antalya-Turkey, 26th–29th October, 2018, <http://micopam2018.akdeniz.edu.tr/information/>

Cangul, I. N., Delen, S., Graph Theory, Discrete Groups and Some Invariants, International Conference on Number Theory and Graph Theory to commemorate the sixty second birthday of Dr. Chandrashekar Adiga, 27-29 June 2019, Department of Studies in Mathematics, University of Mysore, Mysore, India

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

TEZ ÇOĞALTMA VE ELEKTRONİK YAYIMLAMA İZİN FORMU

Yazar Adı Soyadı	Sadık DELEN
Tez Adı	Omega İnvaryantı
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Tez Türü	Doktora
Tez Danışman(lar)ı	Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
Çoğaltma (Fotokopi Çekim) izni	<input checked="" type="checkbox"/> Tezimden fotokopi çekilmesine izin veriyorum <input type="checkbox"/> Tezimin sadece içindekiler, özet, kaynakça ve içeriğinin % 10 bölümünün fotokopi çekilmesine izin veriyorum <input type="checkbox"/> Tezimden fotokopi çekilmesine izin vermiyorum
Yayımlama izni	<input checked="" type="checkbox"/> Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin veriyorum

Hazırlamış olduğum tezimin belirttiğim hususlar dikkate alınarak, fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere Bursa Uludağ Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı tarafından hizmete sunulmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Tarih: 01/02/2019

İmza :