T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL KAVRAMLARI SOYUTLAMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Mustafa Çağrı GÜRBÜZ

BURSA

2021

T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL KAVRAMLARI SOYUTLAMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Mustafa Çağrı GÜRBÜZ

Danışman: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

BURSA

2021

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim.

Mustafa Çağrı GÜRBÜZ

05/02/2021

EĞİTİM BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
DOKTORA İNTİHAL YAZILIM RAPORU

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ve FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 15/01/2021

Tez Başlığı / Konusu: Ortaokul Öğrencilerinin Cebirsel Kavramları Soyutlama Süreçlerinin İncelenmesi / Temel cebir kavramlarının öğrenci zihninde nasıl oluştuğunun belirlenmesi, açıklanması.
Yukarıda başlığı gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 280 sayfalık kısmına ilişkin, 15/01/2021 tarihinde şahsım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından (Turnitin)* aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan özgünlük raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %10 'dur.

Uygulanan filtrelemeler:
1- Kaynakça hariç
2- Alıntılar hariç/dahil
3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Özgünlük Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı:	Mustafa Çağrı GÜRBÜZ
Öğrenci No:	811432001
Anabilim Dalı:	Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı:	Matematik Eğitimi
Statüsü:	☐ Y.Lisans ☒ Doktora

Danışman
Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR
(Adı, Soyad, Tarih)

*** Turnitin programına Uludağ Üniversitesi Kütüphane web sayfasından ulaşılabilir.**

YÖNERGEYE UYGUNLUK ONAYI

“Ortaokul Öğrencilerinin Cebirsel Kavramları Soyutlama Süreçlerinin İncelenmesi” adlı doktora tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan	Danışman
Mustafa Çağrı Gürbüz	Prof. Dr. M. Emin Özdemir

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi ABD Başkanı

Prof. Dr. Ahmet Kılınç

T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda 811432001 numaralı Mustafa Çağrı Gürbüz'ün hazırladığı "Ortaokul öğrencilerinin cebirsel kavramları soyutlama süreçlerinin incelenmesi" konulu doktora çalışması ile ilgili tez savunma sınavı, 05/02/2021 günü 14:30-15.30 saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin/çalışmasının (başarılı/başarısız) olduğuna (oybirliği/oy çokluğu) ile karar verilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı ve Sınav Komisyonu Başkanı)	Üye
Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR	Prof. Dr. Murat Altun
Bursa Uludağ Üniversitesi	Bursa Uludağ Üniversitesi
Üye	Üye
Prof. Dr. Murat Peker	Prof. Dr. Nilüfer Köse
Afyon Kocatepe Üniversitesi	Anadolu Üniversitesi

Üye

Doç. Dr. Erhan Şengel

Bursa Uludağ Üniversitesi

Önsöz

Bu çalışma matematiğin temel konusu olan cebir kavramının zihinde soyutlanma sürecine odaklanmaktadır. Özellikle ortaokul düzeyinde katılımcıların zihinlerinde ilk defa karşılaştıkları cebir kavramlarını nasıl yapılandırdıkları ve bu yapılandırma sürecinde nasıl cesaretlendirici rol oynanabileceği şeklinde açıklamalar içermektedir.

Doktora eğitimim boyunca bana rehberlik eden, bilgi ve deneyimlerini paylaşan, huzurlu ve özgür bir çalışma ortamı sunan, akademik yeterliliğin yanı sıra insani olarak da her zaman yanımda hissettiğim değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. M. Emin Özdemir'e teşekkür etmek isterim. Hayatımın her alanında olduğu gibi doktora tez çalışmalarım süresince sabrı, sevgisi ve anlayışı için değerli eşim Tuba'ya sevgi ve şükranlarımı sunarım. Sürekli çalışmama izin verdiği ve tüm serüvenimiz boyunca beni hep neşelendiren, hayat enerjimi dolduran biricik oğlum Yunus Emre'ye minnettarlığımı ifade etmek isterim. Tüm desteğini ve sevgisini her zaman hissettiğim çalışmalarımın tamamlanması noktasında bana her zaman destek sağlayan, aileme minnettarım. Özellikle akademik açıdan beni cesaretlendiren ve her zaman fikirleriyle ufkumu açan canım babam Adnan Gürbüz'e, manevi olarak her zaman desteğini hissettiğim, sıkıntılı tüm durumlarda kurtarıcım canım annem Türkan Gürbüz'e teşekkür ederim.

Doktora öğrenimim süresince 2211 kodlu Yurt İçi Doktora Burs Programı ile bana maddi anlamda destek olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Ayrıca, eğitim hayatım boyunca bana destekleriyle hep olumlu katkılar yapan tüm öğretmenlerime ve yakınlarıma minnettarlığımı da dile getirmek isterim. Son olarak bana akademik alanda ilerleme fırsatı sunan Yüce Türk Milletine Minnettarım.

Mustafa Çağrı GÜRBÜZ

Bursa, 2021

Özet

Yazar : Mustafa Çağrı GÜRBÜZ

Üniversite : Bursa Uludağ Üniversitesi

Ana Bilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

Bilim Dalı : Matematik Eğitimi

Tezin Niteliği : Doktora Tezi

Sayfa Sayısı : xxi+348

Mezuniyet Tarihi : 05/02/2021

Tez : Ortaokul öğrencilerinin cebirsel kavramları soyutlama süreçlerinin incelenmesi

Tez Danışmanı : Prof. Dr. M. Emin Özdemir

ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN CEBİRSEL KAVRAMLARI SOYUTLAMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Öğrencilerden günümüzde çok bilgiye sahip olmalarından ziyade mevcut bilgilerini problem çözme, akıl yürütme, iletişim gibi matematiksel düşünmenin temelini oluşturan becerileri kullanarak çeşitli amaçları gerçekleştirmeleri beklenmektedir. Çalışmada matematiksel düşünme, öğrencinin matematik kavramlarını zihninde nasıl yapılandırdığını açıklamaya yönelik olarak ele alınmıştır. Bu yapılandırma süreci ise matematiksel soyutlama çerçevesinden izlenmiştir. Matematiksel soyutlama, matematik kavramının genelleştirilmesi yoluyla kavrama daha kapsamlı bir uygulama alanı oluşturulması, diğer bir ifade ile kavramın özünü ortaya çıkarması işlemidir. Öğrencilerin zihninde bilginin oluşum sürecini doğrudan gözlemlemek oldukça zor bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır. Bilginin öğrencinin zihninde nasıl oluştuğu, soyutlandığı ve hangi içsel süreçlerden geçtiği bilinirse öğrenme sürecine etkili müdahalelerde bulunmak kolaylaşacaktır. Bu çalışmada, ortaokul öğrencilerinin temel cebir kavramlarına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Soyutlama süreçlerinin incelenmesinde RBC+C (Recognizing, Building with, Construct, Consolidation) teorisinde yer alan epistemik eylemler dikkate alınmıştır. Ayrıca araştırma sürecinde öğrencilerin soyutlama süreçlerinin daha iyi gözlenmesini sağlamak için Tahmini Öğrenme Yörüngeleri kullanılmıştır. Öğrenme yörüngelerinin öğrencilerin temel cebir kavramlarındaki başarılarına etkilerinin ve soyutlama süreçlerine olan yansımalarının tespit edilmesi araştırmada ortaya koyulması amaçlanan diğer bir husustur. Araştırma, belirlenen amaçlara ulaşmak için iki aşamalı tasarlanmıştır. İlk olarak öğrencilerin cebirin iki temel kavramı olan denge ve değişken kavramlarını soyutlama süreçlerini daha net görebilmek ve süreçte onların soyutlama yapmalarını desteklemek amacıyla tasarım tabanlı araştırma modelinden faydalanılmıştır. Tasarım tabanlı araştırma, öğrencilerin soyutlama süreçlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için öğrenme ortamına müdahale edilmesine olanak sağlamaktadır. Araştırmanın ikinci aşaması ise bir durum çalışması olarak değerlendirilmiştir. Tasarımın uygulanabilirliği ve eksiklikleri sınıf içi gözlemler yoluyla; öğrencilerin soyutlama becerileri ise yarı yapılandırılmış öğrenci görüşmelerinden elde edilen veriler ile analiz edilmiştir. Katılımcılar Bursa İli, Nilüfer İlçesi’nde bir devlet okulunda öğrenim gören 6. sınıf öğrencileri arasından amaçlı örnekleme ile seçilmiştir. Aynı öğrencilerle 7. sınıf düzeyine geçtiklerinde veri toplama sürdürülmüştür. 2016-2017, 2017-2018 eğitim öğretim dönemlerinde araştırmacı ve öğretmen ile birlikte bu sınıfların matematik derslerinde araştırma gerçekleştirilmiştir. Araştırmada veriler; doküman, gözlem, görüşme veri toplama araçlarıyla veri çeşitlemesi yapılarak toplanmıştır. Gözlem ve görüşme verileri içerik analizine, öğrenme yörüngeleri ise geçmişe dönük analiz sürecine tabi tutulmuştur. Bu çalışma, başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi tanımlayabildikleri ve denklemleri çözebildiklerini göstermektedir. Öğrencilerin, cebirsel ifade ve doğrusal denklem oluşturma gibi genelleme gerektiren durumlar için verilen tüm

bilgileri koordine edebildiği, ayrıca doğrusal model kavramını daha soyut durumlarda oluşturabildikleri ve yeni doğrusal model için bir kural ortaya koyabildikleri görülmüştür. Buna ek olarak, bağlamsal problemlere çözümler bulmak için belirledikleri yöntemleri daha tutarlı kullanabildikleri gözlemlenmiştir. Bu durum soyut düşünebilen öğrencilerin veriyi genelleştirebildiğini ve temsili olarak cebirsel ifade kullanabildiğini göstermiştir. Öğrencilerin bağlam içerisinde karşılaştıkları problemleri matematiksel bir yolla açıklamaları soyutlama sürecini analiz etmelerine yardımcı olmuştur. Bu araştırmada öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama becerileri, problem çözme süreçlerinin ve görüşmelerdeki açıklamalarının epistemik olarak analiz edilmesiyle ortaya çıkarılmıştır. Öğrencilerin uygulama öncesinde daha kısır bir düşünceye sahipken süreçte farklı düşünme yollarının farkına vardıkları, farklı cebirsel düşünme yolları ortaya koydukları, başlangıçta sözel veya aritmetik olarak ifade ettikleri matematiksel durumları cebirsel açıklamalara dönüştürdükleri görülmüştür. Araştırmada soyutlama becerisi ile zihnin cebirsel alışkanlıkları arasında birbirini destekleyici argümanlar bulunmuştur. Öğrencilerin cebir ilişkilerindeki gelişimlerini sağlayan iki matematiksel alışkanlık tespit edilmiştir. Bunlar, işlemleri düzenleyerek bir soyutlamaya ulaşmak ve matematiksel bir dil kullanarak genelleme yapmaktır. Bu alışkanlıklar, öğrencilerin aritmetikten cebire geçmelerini kolaylaştırmıştır. Yapma ve fonksiyonel kural oluşturma alışkanlıklarına sahip olan öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama süreçlerinde daha avantajlı olduğu söylenebilir. Soyutlama sürecinde yeni bir yapı ve matematiksel dilden bahsedildiği için soyutlama sürecindeki ilişkilerin anlaşılması fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığına sahip öğrencilerin daha kolay inşa etmelerine olanak sağlamıştır. Cebirsel alışkanlıklarda ise öğrencilerin işlemlerden soyutlama girişimleri genellikle yeni bir dil yerine kısa bir yol bulmak ve açıklayabilmek üzerine inşa edilmektedir. Cebirin iki temel kavramınu öğretmeye yönelik bir yaklaşım üzerine kurulan araştırma, etkili bir cebir eğitimini teşvik etme çabalarını koordine etme ve öğrencilerin düşüncelerindeki önemli kilometre taşlarını belirlemek amacıyla önemlidir. Öğrenme yörüngeleri, öğretmenlere ve uygulayıcılara kendi eğitsel uygulamalarına entegre edilebilmesi için sistematik bir yol sunar. Öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlamaları öğretimde etkili bir araç olarak kullanılabileceğine yönelik öğretmenlere hizmet içi eğitimler verilebilir ve soyutlama mekanizması, daha açıklayıcı ve kullanışlı bir biçimde matematik dersi öğretim programlarına yansıtılabilir.

Anahtar Kelimeler: Değişken, denklem, matematiksel soyutlama, RBC+C soyutlama teorisi, öğrenme yörüngesi

Abstract

Author	: Mustafa Çağrı Gürbüz
University	: Bursa Uludag University
Field	: Mathematic and Science Education
Branch	: Mathematic Education
Degree Awarded	: PhD Thesis
Page Number	: xxi+348
Degree Date	: 05/02/2021
Thesis	: Investigating Secondary School Students' Abstraction Processes of Algebraic Concepts
Supervisor	**:** Prof. Dr. M. Emin Özdemir

INVESTIGATING SECONDARY SCHOOL STUDENTS' ABSTRACTION PROCESSES OF ALGEBRAIC CONCEPTS

Students are expected to achieve various purposes by using skills such as problem solving, reasoning, and communication, which are the basis of mathematical thinking of their current knowledge, rather than having much knowledge today. In the study, mathematical thinking is discussed to explain how the student constructs mathematics concepts in his mind. This construction process was followed from the framework of mathematical abstraction. Mathematical abstraction is the creation of a more comprehensive application area of comprehension through the generalization of the concept of mathematics. In other words, it is to extract the essence of the concept. It is quite a difficult situation to observe the formation process of information directly in the students' minds. Effective interventions in the learning process will be easier if it is known how the knowledge is formed, abstracted, and what internal processes go through in the student's mind. In this study, it is aimed to analyze the abstraction processes of secondary school students towards basic algebra concepts. Epistemic actions in RBC + C (Recognizing, Building with, Construct, Consolidation) theory were taken into consideration in the analysis of abstraction processes. In addition, Hypothetical Learning Trajectories were used in the research process to provide better observation of students' abstraction processes. Determining the effects of the experimental application on students' achievements in basic algebra concepts and their reflections on abstraction processes is another aim to be revealed in the research. The research is designed as two-stage and longitudinal to achieve the determined goals. Firstly, design-based research model was used in order to see more clearly the processes of abstraction of the concepts of balance and variable, which are the two basic axioms of algebra, and to support them in abstraction in the process. Design-based research allows students to intervene in the learning environment in order to better understand the abstraction processes of students. In this regard, it is believed that it will be more useful than other types of research. Design-based research focuses on learning studies as well as intervention in the learning environment. The second stage of the research was evaluated as a case study. Design applicability and deficiencies through classroom observations; The abstraction skills of the students were analyzed from the data obtained from semi-structured student interviews. Participants were selected by purposeful sampling among 6th grade students studying at a public school in Nilüfer District of Bursa Province. Data collection was continued when they moved to the 7th grade level with the same students. During the 2016-2017, 2017-2018 academic years, researchers and teachers together carried out research in the mathematics classes. In the research, data was collected by data triangulation, data collection tools compatible with the nature of qualitative research, such as documents, observations, and interviews. Observation and interview data were subjected to content analysis, and learning road maps were subjected to historical analysis. This study shows that students with a high level of success can define the linear relationship

between variables and solve equations. It was observed that students were able to coordinate all the information given for situations requiring generalization, such as algebraic expression and linear equation creation, as well as create the concept of linear model in more abstract situations and set a rule for the new linear model. In addition, it has been observed that they can use the methods they have determined to find solutions to contextual problems more consistently. This shows that students who can think abstractly can generalize the data and use algebraic expression as a representation. Explaining the problems faced by students in a mathematical way helped them analyze the process of abstraction. In this study, students' skills of abstracting algebra concepts were revealed by epistemic analysis of problem-solving processes and their explanations in interviews. While the students' algebraic habits of mind had a more vicious thought before the application, it was observed that they realized different ways of thinking in the process, presented different algebraic ways of thinking, and initially converted mathematical situations that they expressed verbally or arithmetically into algebraic explanations. In the study, supportive arguments were found between abstraction skills and algebraic habits. Two mathematical habits have been identified that ensure the development of students in algebra relationships. These are to achieve an abstraction by arranging operations and to generalize using a mathematical language. These habits made it easier for students to switch from arithmetic to algebra. It can be said that students who have the habit of making and creating a functional rule are more advantageous in the process of abstracting algebra concepts. As a new structure and mathematical language are mentioned in the abstraction process, understanding the relations in the abstraction process has enabled students with the habit of forming a functional rule to build more easily. In algebraic habits, students' attempts to abstraction from transactions are generally based on finding and explaining a short path rather than a new language. Research, based on an approach to teaching the two basic axioms of algebra, is important to coordinate efforts to promote

effective algebra education and to identify important milestones in students' thoughts. Learning trajectories offers teachers and practitioners a systematic way to integrate them into their educational apps. In-service trainings can be given to the teachers that students can be used as an effective tool in teaching abstraction concepts and the abstraction mechanism can be reflected in mathematics curriculum in a more descriptive and useful manner.

Key Words: Equation, mathematical abstraction, learning trajectories, RBC+C abstraction theory, variable

İçindekiler

Tablolar Listesi

Şekiller Listesi

Şekil *Sayfa*

1. Bölüm

Giriş

Cebir, en basit haliyle sembolik bir dil kullanarak aritmetiği genelleyen ve sayıların yerine harfler ve semboller kullanarak nicelikler arasında genel bağlantılar kuran bir matematik dalıdır. Bu matematik alanı, bireyin problem çözme sürecini incelemek için ilgi çekicidir (Kieran, 1989). Geleneksel olarak cebir öğretimi, öğrenciler için ortaokulda başlamaktadır (Kaput, 1995). Derin bir cebir anlayışı ilerleyen yıllardaki matematik kariyeri için oldukça önemlidir (Finkelstein, Fong, Tiffany-Morales, Shields ve Huang, 2012).

Ortaokul cebirinde başlıklar; değişken, cebirsel ifade, denklem kurma ve çözmeden oluşur (Kieran, 1989). Sonuç olarak, 6-8. sınıflardaki öğrenciler cebir başlığı altında genellikle cebirsel ifadeler, denklemler ve fonksiyonlarla ilgilenirler (Lloyd, Herbel-Eisenmann ve Star, 2011), cebir kapsamında öğrenciler problemleri çözmek için işlemleri-kuralları öğrenmeleri ve işlemlerin ne işe yaradığını kavramsal olarak anlamaları beklenir (Moss, 2014). National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2008)'e göre cebir, sembollerin manipüle edilmesi için bir dizi işlemden daha fazlasıdır. İşlem olarak cebir uygulamaları öğrencilere matematik problemlerini çözmede sistematik bir yol sunsa da cebirsel düşünmeyi geliştirmek için daha geniş bir cebir anlayışı gereklidir (Kamol ve Har, 2010). Cebir öğrenme sürecinde kurallar, işlemler, algoritmalar ve problemlerin anlamlandırılması iyice bütünleşmiştir (Friedlander ve Arcavi, 2012). Bu bakımdan cebir kavramı, cebirsel işlemleri iyi yapabilmenin ötesinde öğrencilerin bağlantı kurmasına, ilişkileri genelleştirmesine ve temsil etmesine yardımcı olur.

Matematik, özellikle küçük yaşlarda öğretimine somut deneyim ve işlemler ile başlansa da "zihinsel bir sistem" olarak soyut düşünmeye yöneliktir (Umay, 1996). Bahsedilen kavramsal anlama ise ileri cebir öğretimi için önemlidir. Bu sebeple öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama yapmak suretiyle öğrenmeleri gerekir. Cebir yapmak soyutlama yapabilme gücü gerektirir. Bu bakımdan, matematiğin bir soyutlama yapma bilimi oluşu cebirsel ifadelerde tam anlamını bulur (Altun, 2005). Matematiksel gelişim üzerine yapılan güncel araştırmalar, ortaokul öğrencilerinin matematiksel fikirleri soyutlama ve genelleme yapma gücüne sahip olduğu görüşünü benimsemiştir (Papic, Mulligan ve Mitchelmore, 2011).

Cebirsel düşünme, örüntülerin yapısal farkındalığıyla gelişir (Carraher, Schliemann, Brizuela ve Earnest, 2006; Mason, Stephens ve Watson, 2009; Sarama ve Clements, 2009). Cebirsel düşünmenin gelişimi cebir alt öğrenme alanında eğitimle doğrudan ilişkilidir (Yenilmez ve Teke, 2008). Cebirsel düşünme, problem çözme, çoklu gösterimlerden yararlanma ve akıl yürütme gibi becerileri içermektedir (Çelik, 2007). Cebir alanındaki bilgi ve becerilerin artması aynı zamanda cebirsel düşünme becerilerinin gelişimini etkiler. Cebirsel düşünme becerileri; cebirsel ifadelerin, denklem ve fonksiyonların manipülasyonlarını içeren işlem becerilerden oluşur (Trybulski, 2007).

Soyutlama, cebirsel anlayışın önemli bir bileşenidir (Arcavi, 2005). Öğrenciler genellikle denklemleri, bir cevap elde etmek için yemek tarifi gibi görürler ve değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade etmek için fonksiyonel ilişkiyi anlamada zorlanırlar (Kalchman & Koedinger, 2005). Matematiği anlayarak öğrenen bir öğrencinin, matematiksel bilgiyi ezbere kullanmak yerine anlamlı bir şekilde ifade etmesiyle matematik eğitiminin ana hedefine ulaşması sağlanır (Schoenfeld, 1988; Skemp, 2006). NCTM (2000)'e göre öğrenciler önceki bilgi ve deneyimlerine dayanarak aktif bir şekilde yeni bilgiler inşa etmeli, matematiği anlayarak öğrenmelidirler. Hiebert ve Carpenter (1992), matematik eğitimi konusunda soyutlamadan söz etmeden, matematik öğrenmeyi anlamanın zor olacağını ifade etmişlerdir. NCTM (2000)'ye göre öğrencilerin formülleri ve kuralları, ezberlemekten ziyade kavramsal ve anlamlı bir şekilde öğrenmeleri gerekmektedir. Kavramsal anlayışın gelişmesi için gözlem, manipülasyon, matematiksel tartışmalar ve yansıtıcı düşünme gerekmektedir (Simon, 2006). Öğrencilere matematiksel algoritmaları kendilerinin keşfetmesini teşvik etmek yerine onlara bilgiyi hazır olarak sunmak, zihinsel pasifliğe neden olmaktadır. Buna karşın genellikle öğrenciler, kendilerinden bir problem için özgün çözüm üretmeleri istendiğinde buna direnç gösterirler. Yine de öğrencilerle verilen bu mücadelenin onların çözüm üretme sürecini desteklediği unutulmamalıdır. Bu süreci takiben çözüm üreten öğrencilerin özgüvenleri gelişecektir (Kamii & Kysh, 2006). Nitekim formüllerin nasıl oluşturulduğunu anlayan bir öğrenci matematiği daha anlamlı bulup matematik yapmanın gerçek süreçlerine girecektir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010).

Yapılandırmacı teoriler çoğu zaman soyutlama düzeylerini yansıtır. Hiebert ve Lefevre (1986)'e göre soyutlama, matematiksel bilgi parçaları arasında ilişkilerin kurulabilmesi ile başlar. Burada kurulan ilişki soyut değildir. Bilgiler arasındaki ilişki ile temsiller oluşturulabilir. Bazı ilişkiler ise bağlandıkları bilgi parçalarından daha yüksek ve daha soyut bir düzeyde kurulur. Buna yansıtıcı seviye denilebilir (Mitchelmore ve White, 2004). Bu seviyedeki ilişkiler belirli bağlamlara daha az bağlıdır. Genellikle bilgi parçalarındaki benzer temel özellikleri tanıyarak oluşturulurlar. İlişkiler bilginin temsil edildiği seviyeyi aştığında, farklı görünen bilgi parçalarının ortak özelliklerini çıkarır ve bunları birbirine bağlar, böylece soyutlama gerçekleşmiş olur. Ancak öğrencilerin matematiksel gelişim düzeyini dikkate alan bir teori eğitim alanında işlevsel olabilir (Mitchelmore ve White, 2004). Ampirik soyutlamanın, öğrencilerin sayının ve cebirin temel matematiksel kavramlarını oluşturduğu başlangıç aşamasını iyi tanımladığı, ancak sembollerin manipüle edilmesini öğrenme sürecinin RBC + C gibi teorik bir soyutlama yaklaşımı gerektirdiği ifade edilmiştir (Hassan ve Mitchelmore, 2006). Basitçe söylemek gerekirse matematik eğitimi bağlamında soyutlama fikirleri, düşünceleri, kavramları ve kavramların ilişkilerini inceleyen bir süreç olarak yorumlanabilir (Mitchelmore ve White, 2004). Soyutlama süreci, bilginin çeşitli yönlerini içeren bir dizi öğrenme etkinliği ile gerçekleşir (Mitchelmore, 2007), bunların arasında kavramsal ve işlemsel bilgi vardır.

Matematiksel problem çözme sürecinde kavramsal bilgi, problemi çözmedeki temel kavramları anlamak için esastır. Matematiksel kavram ve işlemleri anlamak, öğrenme sürecinde (NCTM, 2000) öğrenciler için problem çözmede gerekli matematiksel fikirleri oluşturmak için önemlidir. Bunun nedeni matematiksel fikirlerin öğrencilerin matematiksel bilgiyi öğrenmek için aktif olarak öğrendiklerini anlamayı ve anlam kazanmalarını sağlamasıdır (Boaler, 2016). Matematiksel düşünme ve öğrenme, öğrencilerin yalnızca ne yaptıklarını değil, aynı zamanda neden yaptıklarını anlamalarını gerektirir. Matematikte öğrenme, işlemsel ve kavramsal anlayışın dengeli bir birleşimini dikkate almalıdır. Matematiği soyutlamaya çalışan öğrenciler sadece işlemsel bilgiye değil, aynı zamanda kavramsal bilgiye de dayanmalıdır.

Ortaokul cebiri kapsamı itibariyle öğrenciler (a) önceki aritmetik anlayışlarını cebirsel ifadelere uygulayıp bunları genişletmeli, (b) bir değişkenli denklemler kurabilmeli, eşitlikte dengenin nedenini açıklayabilmeli ve denklemi çözebilmeli, (c) bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki niceleyici ilişkileri temsil ve analiz etmelidir (National Governors Association [NGA], 2010; Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2017). Kaput (1999) cebir anlayışını, (a) sembolleri cebirde aritmetik olarak genelleştirmek, (b) sembolleri anlamlı bir şekilde kullanmak, (c) cebirsel yapılarla çalışabilmek, (d) model ve fonksiyonlar ile çalışılması ve (e) ilk dört formun matematiksel modellenmesi ve birleştirilmesi olmak üzere birbiriyle ilişkili beş düşünce biçimini içeren *zengin ilişkiler ağı* olarak açıklamıştır. Açıkçası, öğrencilerin bu cebirsel düşünme biçimlerine katılmak için bir cebirsel işlem anlayışından daha fazlasına ihtiyacı vardır. Ancak, birbiriyle ilişkili bu beş cebirsel düşünme biçimi, geleneksel cebirin öğretildiği sınıflarda iyi temsil edilmemektedir (Banerjee ve Subramaniam, 2011; Drijvers, Goddijn ve Kindt, 2011; Kaput, 2000). Öğrencilerin geleneksel cebir öğretimi sürecinde bu beş cebirsel düşünme biçimiyle karşılaşmamaları onların cebir öğrenmede birçok güçlükle karşı karşıya kalmalarına sebep olmaktadır. Bu gerçeği kabul ederek öğrencilerin cebir kavramlarını daha iyi soyutlamalarına yardımcı olacak bir öğretme yaklaşımı geliştirmenin gereği ortaya çıkmaktadır. Bu çalışma tam da bu noktadan hareketle tasarlanmıştır.

Cebir kavramları üzerine bir sınıf öğretimi deneyi (Lamberg ve Middleton, 2009; Middleton, Gorard, Taylor ve Bannan-Ritland, 2008; Steffe ve Thompson, 2000) ya da tasarım araştırması kullanmak (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer ve Schauble, 2003; Cobb ve Yackel, 1996; Gravemeijer, 1994) gerçekleştirilmiştir. Bu araştırmada öğrencilerin cebirin iki temel kavramı olan denge/denklem ve değişkeni soyutlamalarına yönelik öğrenme- öğretim süreçlerini incelemek amacıyla altıncı ve yedinci sınıfta öğretim deneyi yapılmıştır. Ayrıca soyutlama sürecini daha iyi analiz etmek amacıyla tahmini öğrenme yörüngeleri belirlemek suretiyle öğrencilerin soyutlama yapmaya cesaretlendirilmeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin soyutlama süreçlerini daha iyi analiz etmek amacıyla organize edilen bu öğretim deneyi fikri, sınıf öğretmeni, araştırmacı ve bir matematik eğitimi profesörü ile yapılan görüşmelerden beslenmiştir. Bu çalışma, araştırmacının, öğrencilerin başlangıç cebirini nasıl algıladıklarının daha iyi anlaşılmasının, sadece öğrencilerin nasıl cebir öğrendiğine dair teori üretmeyebileceğini, aynı zamanda dersi nasıl geliştirdiğine dair teori üretebileceğini dikkate alarak, öğrencilerin başlangıç cebirine dair derinlemesine bir anlayış kazanmalarına yardımcı olma isteği ile motive edildi.

1.1. Problem Durumu

Matematikte öğrendiğimiz bilginin doğrudan kullanımına tanık olmayız. Bu sebeple öğretim sonucunda öğrencilerin elde ettikleri bilgiden ziyade süreç içinde ne yaptıkları önemlidir. Sürece dâhil olamayan öğrencinin matematik yapabilme fırsatları elinden alınmış olur. Bu sebeple öğrencilerin *ne* öğrendiklerinin ötesinde *nasıl* öğrendikleri daha önemlidir. Bilginin öğrenci zihninde nasıl oluştuğu ve hangi içsel süreçlerden geçtiği bilinirse, öğretmenler için öğrenme sürecinde etkili müdahalelerde bulunmak kolaylaşabilir. Soyutlama sürecini inceleyebilmek için çeşitli teoriler ortaya konulmuştur. Bunlardan birisi de öğrencilerin bağlamsal problemleri çözme sürecinde geçirdikleri epistemik eylemleri inceleyen RBC+C soyutlama teorisidir. Teori içinde soyutlama, önceden oluşturulan matematiksel bilginin dikey olarak yeniden düzenlenmesiyle yeni matematiksel yapının oluşturulma süreci olarak tanımlanır (Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus, 2001). Matematiğin birikimli (kümülatif) yapısı öğrencilerin bir matematiksel düşüncenin daha önceki düşünce ile benzer veya farklı olduğunu anlamasını gerektirir. Soyutlama sürecinin bu epistemik eylemlerle takip edilebilir olması; öğrencinin zihinsel gelişimini izleme ve yaşadığı güçlükleri fark edebilme imkânı sağlamaktadır (Yeşildere İmre ve Türnüklü, 2016). Matematiksel bilgi için soyutlama iki şekilde ortaya çıkabilir:

(a) Kavram veya genellemelerin ilgili bulunduğu durumlarda aynı kalan genellemeler olarak ortaya çıkması ve onlardan bağımsız zihinsel bir varlık olarak oluşması yeni deneyimlerle birlikte daralma, genişleme, derinleşme kazanması durumudur.

(b) Kavram veya genellemelerin ilgili bulundukları örneklere ihtiyaç olmayacak şekilde zihinsel bir varlık haline gelmesi durumudur.

Araştırmalar öğrencilerin cebir kavramlarını (denklem, eşitlik, değişken, cebirsel ifadeler) anlamada zorlandıklarını göstermektedir (Blanton ve diğerleri, 2017; Brizuela, Carraher ve Schlieman, 2000; Burton, 1988; Dede ve Argün, 2003; Ersoy ve Erbaş, 1998; Ellis, Ely, Singleton &Tasova, 2020: Herscovics, 1996; Kieran, 1992; Linchevski, MacGregor & Stacey, 1993; Moss & Lamberg, 2019; Moon, 2020; Somasundram, 2020; Stylianou ve diğerleri, 2019; Silver, 1997). Ülkemizde cebir öğrenme alanına yönelik yapılan çalışmalar genellikle öğrencilerin cebir kavramlarını öğrenirken yaşamış olduğu güçlükler üzerinde yoğunlaşmaktadır. Cebir kavramlarının öğrenilmesindeki eksikliklere birçok araştırmada yer verilmesi, öğrencilerin cebirsel düşünme, muhakeme becerileri ve sonuç olarak kavramları soyutlama becerilerinde sıkıntılarının olduğu anlamına gelmektedir. Nitekim uluslararası çalışmalarda cebirsel düşünme ve muhakemenin önemi vurgulanmakta ve cebir öğretimi konusunda farklı yaklaşımlara yer verilmektedir (NCTM, 2000).

Cebir öğrenme sürecinde öğrencilerin karşılaştığı zorluklar üzerine yapılan araştırmaların iki sonucu olduğu söylenebilir: Matematiksel faaliyetin doğası hakkında çok genel ifadeler içermektedir ve genel entelektüel gelişim teorileri dışında, cebirsel düşüncenin açık bir şekilde tanımlanması mümkün değildir; sonuç olarak, cebirin öğrenilmesi ve kullanılmasıyla ilgili araştırmalar derin ve birleştirici sonuçlar üretememektir; cebir öğrenme ve kullanma konusundaki araştırmalardan elde edilen sonuçların çoğu yereldir ve başarısızlığı açıklar niteliktedir (Ellis ve diğerleri, 2020; Hodgen, Oldenburg & Strømskag, 2018; Lins, 1992; Kieran, 2014). Bu bakımdan öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerine yönelik açıklayıcı bir çerçeve sunmak daha isabetli olacaktır. Cebirin bir özelliği karmaşıklığıdır ve kısa süreli müdahaleler etkisiz olabilir bu sebeple boylamsal çalışmalar cebir öğretimi için daha etkilidir (Hodgen ve diğerleri, 2018). Cebir kavramlarının gelişimine odaklanan çalışmalar için boylamsal bir inceleme süreci oldukça iyi bir seçimdir. Bununla birlikte, matematik eğitimi otorilerinin cebir öğretimine yönelik görüşlerinin yapılandırılmış bir örneği olarak CERME-11 (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) de, cebir için kritik konuları tespit etmek ve cebir öğretimi için daha fazla günlük ve akademik yaşamlarında cebir kavramlarını değerli bir araç olarak kullanabilmeleri gerektiği savunulmaktadır (Hodgen ve diğerleri, 2018).

Öğrencilerin cebir kavramına yönelik anlayışlarının incelenmesi ve değerlendirilmesi, nitelikli bir öğrenme ve öğretim için gereklidir. Bu tez çalışmasında ortaokul öğrencilerinin (6 ve 7. sınıf) cebir öğrenme alanının iki temel kavramı olan denge (denklem) ve değişken kavramlarını soyutlama süreçleri RBC+C soyutlama teorisine göre incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmada soyutlama süreçlerinin daha net incelenebilmesi amacıyla öğrencilerin matematik kariyerleri düşünüldüğünde yeni bir düşünme tarzı olan cebirin soyutlanmasını cesaretlendirmek için tahmini öğrenme yörüngesi metodolojik bir araç olarak kullanılmıştır. Kullanılan öğrenme yörüngelerinin temel cebir kavramlarındaki başarılarını ve öğrencilerin soyutlama süreçlerini nasıl şekillendirdiği ortaya konulmuştur. İlgili alanyazında RBC+C modeli ile bireylerin soyutlama süreçlerinin incelenmesinde boylamsal olarak dizayn edilen az sayıda deneysel çalışmanın olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu çalışmanın önemli bir yere sahip olduğu düşünülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada ortaokul öğrencilerinin temel cebir kavramlarını matematiksel olarak soyutlama süreçlerinin nasıl olduğu, soyutlamanın gelişiminde kullanılan tahmini öğrenme yörüngelerinin etkililiği ve cebirsel alışkanlıkların soyutlama ile ilişkisi araştırılacaktır.

Bu tez çalışmasında ortaokul öğrencilerinin temel cebir kavramlarına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Soyutlama süreçlerinin incelenmesinde Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) tarafından ortaya koyulan RBC+C (Recognizing, Building with, Construct, Consolidation) teorisinde yer alan epsitemik eylemler dikkate alınmıştır.

Ayrıca araştırma sürecinde öğrencilerin soyutlama süreçlerinin daha iyi gözlenmesini sağlamak için Simon (1995) ve Clements ve Sarama (2004) tarafından geliştirilen Tahmini öğrenme yörüngesi (Hypothetical Learning Trajectory veya Learning Trajectories) kullanılmıştır. Yapılan deneysel uygulamanın öğrencilerin temel cebir kavramlarındaki başarılarına etkilerinin ve soyutlama süreçlerine olan yansımalarının tespit edilmesi araştırmada ortaya koyulması amaçlanan diğer bir husustur. Soyut düşünme düzeyindeki ilk matematik konusu olan cebir ile karşılaşan öğrencilerin kavramları daha iyi öğrenebilmeleri için uygun materyaller ve etkinliklerin geliştirilmesi, uygulanması ve değerlendirilmesi bu çalışmanın bir diğer amacıdır. Bu amaç soyutlama süreçlerinin incelenmesini güçlendirmek için yapıldığından bir alt amaç olarak görülebilir. Bu bakımdan araştırma iki aşamalı olarak gerçekleşmiştir. Bir öğretim tasarımının geliştirilmesi, uygulanması ve değerlendirilmesi ve ana amaç olarak soyutlama süreçlerinin incelenmesidir.

Matematiğin kendisini derinden tanımak ve öğrencilerin zaman içinde nasıl öğrendiklerini anlamak, matematik eğitiminde etkili olan iki kritik konudur (Darling Hammond ve Ball, 1998; Ma, 2010). Son olarak öğrencilerin soyutlama becerileri ile Zihnin Cebir Alışkanlıkları (ZCA)'nın arasındaki ilişkinin ortaya koyulması da bu tez çalışmasının amaçları arasında yer almaktadır. Bu amaç, gerçekleştirilen deneysel uygulamanın etkililiği hakkında somut deliller ortaya koyması ve hem nitel hem de nicel verilere destek sağlamaktadır.

Araştırmanın amacı, ilk defa cebir ile karşılaşan, ortaokul öğrencilerinin cebirin iki temel kavramı olan, değişken ve denge kavramlarını soyutlama (oluşturma) sürecinin incelenmesidir. Araştırmada öğrencilerin (cebir konusu üzerinde) soyutlama ve pekiştirme eylemleri üzerinde durulmaktadır. Ayrıca soyutlama sürecinde bireylerde ki cebirsel zihin alışkanlıklarının da araştırılması planlanmaktadır. Bu safhada soyutlamayı gerçekleştiren öğrenciler ile gerçekleştiremeyenler arasında cebirsel düşünce bakımından farklılıkların olup olmadığı; var ise hangi alışkanlıkların kazandırılması durumunda öğrencilerde soyutlamanın gerçekleştirileceği belirlenmek istenmektedir.

Son yıllarda yapılan çalışmalar öğrenmenin düzeyini belirlemek yerine genellikle öğrenmenin nasıl geliştiğinin ortaya koyulması üzerinedir. Dolayısıyla soyutlama, araştırmacılar için ilgi çekicidir. Bu konuda yapılan çalışmalar genellikle nitel çalışmalardır ve öğrencilerin ilgili konu hakkında soyutlama süreçlerini resmetmeye yöneliktir (Dienes, 1961; Davydov, 1990; Dreyfus, 1991; Dubinsky, 1991; Meel, 2003; Mitchelmore ve White, 2007; Noss ve Hoyles, 1996; Sfard, 1991; Skemp, 1986; Tall 1999; Van Oers, 2001).

Becerilerin geliştirilebilmesi için öğrencilerin nasıl düşündüğünü belirlemek, problemle karşı karşıya kaldığında neler yaptıklarını gözlemlemek, süreçlere uygun etkinlik ve problemler kullanarak bu becerilerin gelişmesini sağlamak matematik eğitiminde önem arz etmektedir. Zihnin cebir alışkanlıklarının tespit edilmesi bireyin öğrenmedeki durumunu da açıklayıcı nitelikte görülmektedir. Matematiksel zihin alışkanlığı kavramı ise; öğrencilerin matematiği, matematikçilerin ürettikleri yol olarak düşünmelerine yardım etmek amacıyla ortaya konmuştur. Bu açıdan bakıldığında, matematiksel zihin alışkanlıkları; sıra dışı durumlarda düşünce deneyleri yaparak, matematikçilerin çalışmalarında izledikleri yolları dikkate alarak, onların çalışmalarında kullandıkları soyutlamaları yaparak sürekli bir muhakeme yapma yeteneğine sahip olma anlamına gelmektedir (Mark, Cuoco, Goldenberg ve Sword, 2009).

1.3. Araştırmanın Önemi

Günümüz eğitim anlayışı öğrencilerin bilgiye ulaşabilmenin ötesinde muhakeme edebilme, eleştirel ve yaratıcı düşünebilme ve öğrendiklerini günlük hayata aktarabilme temeline dayanmaktadır. Özellikle öğrencilerin kendi yaşamlarında öğrendiklerine yer vermesi, uyum sağlaması ve yaşadığı çevreyi anlamlandırması eğitimin bir parçası olarak görülmektedir (Gür ve Korkmaz, 2003; Senemoğlu, 2005). Uluslararası eğitim araştırması, 2015 yılı PISA sonuçlarında Türkiye'nin 70 ülke içinde matematikte 49'uncu sırada yer alması ve 2003'teki sıralamasının da gerisinde kalması bu konuda alınması gereken yeni tedbirlerin olduğunu düşündürmektedir. Türkiye için 2018 yılı PISA sonuçlarında ise puan artışı sağlansa bile sıralama bakımından yer değişikliği gözlenmemiştir. PISA direktörü Schleicher (2017, 13 Kasım) Türkiye için yaptığı "öğrettikleriniz artık gereksiz; ezberde iyi, yaratıcılıkta kötüsünüz" yorumu bu durumun nedenini açıklar niteliktedir. Öğrencilerin ilk görevi, bilgiyi yorumlayarak günlük hayatla bağlantı kurabilmek olmalıdır. Modern dünyada artık ne bildiğinizin önemi yoktur. Ne yapabildiğiniz önemlidir. Schleicher (2017, 13 Kasım) çözüm yolu olarak, "Türkiye'de öğrenciler, bilgi hakkındaki bilgileri öğrenerek sınavlarda başarıyı hedeflemeye alışık, ama kalıpların dışına çıkarak bilgiyi pratiğe geçirerek hayatın gerçekliğinde uygulayabilmeyi öğrenmeliler” şeklinde yorumlamıştır. Bu söylemler, her alandaki öğretimde olduğu gibi cebir konularının öğretiminde de nitelik sorunu olduğuna işaret etmektedir. Cebir bilgisinin uygulamaya nasıl aktarılacağı temel bir sorun olarak görülmektedir. Cebirin, cebirsel düşünme ve muhakeme edebilme becerilerinin bir ön koşulu olduğu düşünüldüğünde ders konusundan ötede bir düşünme sistemi olarak ele alınması gerektiği söylenebilir. Nitekim öğrencilerin cebirde başarılı olabilmeleri için kullanılan temel kavramları, sembolleri, ifadeleri iyi anlaması ve kullanabilmesi gerekmektedir (Kieran, 1992). Cebirsel düşünme ve muhakeme becerisi öğrencilerin yalnızca matematik derslerinde gerçekleştirdikleri aktiviteleri değil, herhangi bir problem karşısında düşünme, yorum yapma ve çözüm yolu arama eylemlerine yönelik zihinsel aktiviteleride içerir. Cebir öğrenme araştırmalarında öğrencilerin, matematiksel bilgileri ilişkilendirmede zorlandıkları ve günlük yaşam durumları arasında bağlantı kuramadıkları görülmüştür. Bu bağlantı kavramların elde edilmesi ile doğrudan ilgili olabilir. Öğrencilerin cebiri anlamaları, cebirsel düşünme düzeylerini geliştirebilmeleri ve cebir kavramlarını soyutlayabilmeleri için öğrendiklerini uygulayabilmeli, kavramlar arasında geçişler yapabilmeli, kavramlar arasındaki ilişkileri açıklayabilmeli ve cebirsel temsil değerleri ile bunu ortaya koyabilmeleri gerekmektedir.

Öğrencilere cebiri öğretirken öğrenme ortamlarının çeşitlendirilmesi ve anlamlı öğrenmeye destek olacak etkinliklere yer verilmesi bu süreçte kritik bir öneme sahiptir. Tahmini öğrenme yörüngelerinin öğretime entegre edilmesi halinde öğrencilerin matematiği nasıl öğrendiklerinin anlaşılmasında faydalı ve etkili rol oynadığı birçok araştırma ile ortaya koyulmuştur (Clements & Sarama, 2009; Confrey ve diğerleri, 2009; Duncan & Hmelo-Silver, 2009). Öğrencilerin matematiği zaman içerisinde nasıl öğrendikleri, öğrenmenin sadece bir boyutunu oluşturmaktadır. Araştırmacılar tahmini öğrenme yörüngelerinin (Hypothetical Learning Trajectories) öğrencilerin zaman içerisinde nasıl matematiği öğrendiklerini anlamamızda önemli role sahip olduklarını ileri sürmüşlerdir (Clements &

Sarama, 2004; Duncan & Hmelo-Silver, 2009). Aynı zamanda Tahmini öğrenme yörüngelerinin bilgisinin öğretmenlerin matematiği öğretme ve öğrenmelerinde etkisinin olacağını belirtmişlerdir (Clements & Sarama, 2004; Duncan & Hmelo-Silver, 2009).

Bu araştırmada öğrencilerin soyutlama süreçleri Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) tarafından ortaya koyulan RBC+C (Recognizing, Building with, Construct, Consolidation) teorisinde yer alan epsitemik eylemler ile incelenmiştir. Bahsedilen yapıların ortaya çıkarılması basit bir olay değildir. RBC+C, soyutlama süreçlerinin incelenmesine imkân vermekte ve süreçlerin analizlerini mümkün olduğunca kolaylaştırmaktadır. Bu durum kullanılan modelin etkililiği ve geçerliliği hakkında bilgi verir. Bu tez çalışmasında RBC+C soyutlama teorisinin kuramsal çerçeve olarak kullanılması uygulanan deneysel modelin geçerliliğini desteklemesi açısından örnek bir durum oluşturmaktadır ve bu yönüyle önemli olduğu düşünülmektedir. Liz ve diğerleri (2006) bu şekilde yapılan çalışmaların modellerin kurulmasında ve sağlamlaştırılmasında büyük etkilerinin olduğunu ileri sürmektedirler. Ayrıca soyutlama sürecinin bu çalışmada aynı öğrencilerin iki yıllık bir boylamsal süreçte incelenmesi soyutlamanın uzun sürede gerçekleştiği göz önüne alındığında ayrı bir değere sahiptir.

Mitchelmore ve White (2007) öğrencilerin, soyutlama süreçlerinin incelenmesinde ilgilenilen konu ve kavramın önemli olduğunu ileri sürmektedirler. Bir diğer ifadeyle kavram veya konunun soyutlanma süreci incelenirken tercih edilen teori de önemlidir. Bu araştırmada soyutlama süreçlerinin incelenmesine uygun olduğu düşünülen ve teorinin kurucuları tarafından da cebir konu ve kavramlarının incelendiği görülmektedir. Cebir geniş bir kavram olduğundan tek bir tanımının yapılması mümkün değildir. Kieran (2004)'a göre matematiksel düşünmenin cebirsel yolunun gelişimi beş kısımda incelenebilir: (a) İlişkilere odaklanma, (b) İşlemlere (işlemlerin terslerine ya da bir işlemin nasıl yapılıp yapılmadığına) odaklanma, (c) Problemi çözmenin ötesinde çözümü ile birlikte nasıl cebirsel olarak ifade edileceğine odaklanma, (d) Yalnızca sayılara odaklanma yerine, sayılara ve harflere odaklanma (harfler ile çalışma, cevap olarak harfli ifadeleri kabul etme, özelliklere dayalı denklik için ifadeleri karşılaştırma), (e) Eşitlik işaretinin anlamına odaklanmadır.

Cebirsel düşünme, cebirsel yapıları ve ilişkileri anlamlandırarak kullanmayı, bu ilişkilere odaklanmayı ve elde edilen ilişkileri genellemeyi içerir. Schoenfeld (1992) öğrencilerin matematiksel düşünebilmesi için soyutlama süreçlerine değer verilmesi gerektiğini ifade etmekte ve matematiğin araçları olarak gördüğü soyutlamanın, sembolik temsillerin ve sembolik işlemlerin, oluşturulacak matematiksel yapıları anlamlandırmak için yeterli düzeyde olması gerektiğini ifade etmektedir. Bu durum öğrencilerin düşünme süreçlerinin ayrıntılı bir şekilde incelenmesini zorunlu ve önemli kılmaktadır.

Literatürde bu konuda yapılan çalışmalara rastlamak mümkündür. Cebir öğretiminde ve öğreniminde karşılaşılan sorunların benzer olduğu söylenebilir. Yapılan çalışmaların bazılarında öğrencilerin cebir öğrenme alanında zorluk yaşamalarının temel nedeninin cebirsel yapılara anlam yükleyemediklerinden kaynaklandığı ifade edilmektedir (Blanton ve Kaput, 2004; Cai, Lew, Morris, Moyer, Fong Ng ve Schmittau, 2005; Çelik, 2007; Kieran, 1981; 2004; Knuth, 2000; Stacey, 1989). Bu çalışmada kullanılan tahmini öğrenme yörüngeleri temel hata ve yanılgıları ortadan kaldırmaya yöneliktir. Yörüngelerinin doğası gereği alanyazında tespit edilen yanılgı ve hatalar önceden belirlenmekte ve gidermeye yönelik etkinlikler hazırlanmaktadır. Bu yöntemle soyutlama sürecinin daha iyi inceleneceği düşünülmektedir. Aşağıda bu çerçevede araştırmanın problem cümlesi verilmiştir.

1.4. Problem Cümlesi

Araştırmanın ana problemini, “Ortaokul öğrencilerinin cebirin iki temel kavramı olan, değişken ve denge/denklem kavramlarını soyutlama (oluşturma) süreçleri nasıldır?” sorusu oluşturmaktadır. Bu bağlamda aşağıda yer alan alt problemlere cevap aranmaktadır.

1. Öğrencilerin uygulama öncesi ve sonrasında cebirsel düşünme düzeyleri nasıldır?

2. Öğrencilerin soyutlama süreçlerini daha iyi analiz etmek için geliştirilen tahmini öğrenme yörüngelerinin (Learning Trajectories) öğrencilerin kavram öğrenmelerine etkisi nasıldır?
3. Geliştirilen tahmini öğrenme yörüngelerinin (Learning Trajectories) kullanışlılığını etkileyen unsurlar nelerdir?
4. Öğrencilerin, değişken ve denklem kavramlarını soyutlama süreçleri nasıldır?
5. Öğrencilerin cebiri soyutlama sürecinin altıncı sınıftan yedinci sınıfa gelişimleri nasıl gerçekleşmektedir?

1.5. Sayıltılar

Bu araştırma için dört varsayım ifade edilebilir,

1. Çalışmaya katılan altıncı sınıf öğrencileri ve yedinci sınıf öğrencileri sıradan ortaokul öğrencilerini temsil ettiği,

2. Katılımcıların ölçme araçlarına dürüst, içten ve samimi bir şekilde cevap verdiği,

3. Tüm veri toplama araçları katılımcılara aynı şartlar altında uygulandığı,

4. Öğretmenler ve araştırmacıdan kaynaklı olası farklılıkların, çalışmanın sonuçları üzerinde etkisi en aza indirmek için gerekli tedbirler alındığı,

5. Araştırmanın veri toplama araçlarının geliştirme sürecinde başvurulan uzman görüşlerinin yeterli ve geçerli olduğu varsayılmıştır.

1.6. Sınırlılıklar

Araştırmanın genellenebilirliğini sınırlayan veya uygulamanın etkinliğini artıran birçok tanımlanabilir faktör vardır. Klasik bir deneysel uygulamadan farklı olarak araştırmacı uygulama sürecini planlarken matematik öğretmeni ile görüş alışverişinde bulunmuştur. Bu durumdan kaynaklı olabilecek kişisel önyargılar, coşku ve motivasyon çalışmanın sonuçlarını etkilemiş olabilir. Ayrıca çalışılan matematik öğretmeni, matematik eğitimi alanında doktora yapıyor olmasıda çalışma sürecini olumlu etkilemiş olabilir. Bu nedenlerle, öğretmenler normal bilgi birikimlerinin ötesinde çalışmaya katılmış olabilirler. Bu araştırmada ana amaç öğrencilerin soyutlama süreçlerinin ortaya çıkarılması olduğu için öğrencilerin iki temel cebir kavramını iki yıllık bir süreçte öğrenmek durumunda kalmışlardır.

1. Araştırma 2016-2018 eğitim-öğretim yılı Bursa il merkezindeki iki devlet ortaokulunun altıncı ve aynı öğrencilerin yedinci sınıfına devam etmekte olan iki sınıftan elde edilen veriler ile sınırlıdır.

2. Araştırma toplamda 35 ders saati ile sınırlıdır.

3. Nitel veriler, soyutlama süreçlerinin ayrıntılı olarak incelendiği amaçlı olarak öğrenci düzeylerine göre seçilen katılımcılar ile sınırlıdır.

4. Araştırma cebirin iki temel kavramı olan değişken ve denge/denklem kavramlarının soyutlama süreçleri ile sınırlıdır.

5. Bu çalışma 2019-2020 öğretim yılı mart ayında bitirilmesi planlanmışve Enstitüye bildirildiği günlerde tez savunma süreçlerinin ortasında pandemi nedeniyle yaklaşık bir yıllık ertelemeden sonra tez savunma sürecine girilmiştir.

1.7. Tanımlar

Araştırmada kullanılan temel kavramlar aşağıda sunulmaktadır. Bu kavramlar hakkında ayrıntılı bilgi, kuramsal çerçeve içinde verilmektedir.

Soyutlama: Gerekli olan bilginin elde edilmesini sağlayan bir indirgeme süreci ya da detayların arka plana ötelendiği basitleştirme stratejisi olarak tanımlanabilir. Doğası itibariyle birden çok durumun deneyimlenmesini gerektirir. Bu birden çok durumda hususlar soyutlanabilir. Deneysel ve bilişsel soyutlama olmak üzere iki türdür. Soyutlama, dinamik bir süreçtir ve bireyin önceden oluşturduğu yapıları yenileri ile ilişkilendiren aktiviteleri içerir.

Bilişsel Mekanizmalar: Soyutlama sürecinin gerçekleşmesi için gerekli olan belirleyicilerdir.

Genelleme: Soyutlamanın gerçekleşmesine yardım eden bir üst sıra işlem ya da karmaşık ve güçlü aktivite yapma sürecidir.

RBC+C Teorisi: Bağlamda soyutlama teorisine dayalı olarak Hershkovitz ve diğerleri (2001) tarafından geliştirilen ve epistemik eylemlere dayalı olan RBC modeli, soyutlamayı tanımlamak, soyutlama ve pekiştirme süreçlerine kapsamlı bir bakış açısı sunmak için uygun bir araç veya metottur.

Bağlamda Soyutlama (AiC, Abstraction in Context): van Oers (2001)'in bağlamlaştırma görüşü ile Davydov (1990)'un dialektik yaklaşım görüşünün bütünleşmesiyle ortaya çıkan, somut ve soyut arasında dialektik iki yönlü bir ilişki bulunan teoridir.

Tahmini öğrenme yörüngesi: Alanyazında, Tahmini Öğrenme Yörüngesi (TÖY) olarak da ifade edilen ve "öğretmenin, öğrenmenin ilerleyebileceği yolla ilgili öngörüsüdür. Öğrenme hedefi, öğrenme etkinlikleri ve öğrencilerin dâhil olabileceği düşünme ve öğrenmedir" şeklinde tanımlanmaktadır (Simon, 1995, s. 133).

Yörüngelere Dayalı Öğretimin Öğrenilmesi (LTBI): Mevcut araştırmalardan çıkarılan öğretim ile ilgili birkaç çerçeveyi birleştirmek için öğrenme yörüngeleri üzerinde yapılan araştırmalardan faydalanan öğretim veya yeni bir öğretim teorisi için açıklayıcı bir çerçevedir (Sztajn, Confrey, Wilson & Edgington, 2012).

Zihnin Cebir Alışkanlıkları (ZCA): Bireylerin matematik yapma sürecinde gerçekleştirdikleri davranışlardır. ZCA ile kavramsal bir çerçeve ortaya koyan Driscoll (1999), bireylerin problemi anlamada, çözmede ve çözümü açıklamada rol oynayan davranışlarının zihnin cebirsel alışkanlıkları olduğunu belirtmiştir.

2. Bölüm

Kuramsal Çerçeve

Bu bölümde matematiksel düşünme, cebirsel düşünmenin bileşenleri, matematiksel soyutlama, zihnin cebirsel alışkanlıkları ve tahmini öğrenme yörüngeleri ile ilgili kuramsal çerçeve ve ilgili araştırmalar yer almaktadır. Tezin kuramsal çerçevesinin hangi kavramlar üzerine inşa edildiği ve bu kavramların birbirleriyle olan ilişkisi ele alınmakta, benzer ve farklı yönleri ortaya koyulmakta, bu teorik yapıların seçilme nedenleri belirtilmektedir.

Matematiksel düşünme, matematiksel bilgi ve düşünme süreçlerinin birleşiminden oluşan bir yapıdır. Diğer kavramların açıklanmasında temel teşkil edeceğinden ilk olarak bu kavramı açıklamanın uygun olacağı düşünülmüştür.

2.1. Matematiksel Düşünme

Düşünme insanoğlunu diğer canlılardan ayıran en önemli becerisi olmuştur. Yüzyıllar içerisinde insanlığın entelektüel gelişimini cesaretlendiren eğitim felsefeleri düşünme becerisinin geliştirilmesi üzerine odaklanmıştır. Düşünme becerisinin sistematik gelişimini tetikleyici olarak matematik ve matematiksel düşünme ilk akla gelenlerdir. Düşünmeyi en iyi tanımlayan düşünürlerden Rene Descartes'ın dediği gibi "Şüphe etmek düşünmektir. Düşünmek de var olmaktır. Öyleyse var olduğun şüphesizdir. Düşünüyorum, o halde varım." Matematik eğitiminin temel amaçları arasında düşünme becerisini geliştirmek, daha özele indirecek olursak matematiksel düşünmeyi geliştirmek, çalışmanın amacı doğrultusunda bu durumu yordayarak olursak cebirsel düşünmeyi geliştirmek ve gelişim sürecini yakından incelemek vardır. Bu sebeplerle bu bölümde matematiksel düşünme, cebirsel düşünme ve cebir öğretimi ile ilgili kavramsal çerçeveye yer verilmiştir.

Düşünme eylemi Moseley (2005)'in çalışmasında hayal kurma, tasarlama, bir durum hakkında beklenti geliştirme veya inançlara sahip olma ve bir sonuca ulaşmak amacıyla düşünceler silsilesi üretebilmek olarak ifade edilmiştir. Bu özetlemeden faydalanırken bakış açımız, bir olayı düşünme/hatırlama, hayal kurma/bir şeye karşı duyulan istek anlamlarından daha ziyade bir sonuca ulaşmak için bilgileri incelemek, karşılaştırmak ve ilişkilerden yararlanarak düşünce üretme anlamı üzerine yoğunlaşmaktadır. Bu bakış açısı düşünmeyi bir süreç olarak ele almaktadır.

Günümüzde bireylerin çok bilgiye sahip olmasından ziyade sahip oldukları bilgileri çeşitli amaçları gerçekleştirmek için etkin kullanmaları ve çeşitli düşünme becerilerine sahip olmaları beklenmektedir. NCTM (1989) bireylerin problem çözme, akıl yürütme ve iletişim gibi matematiksel düşünmenin temelini oluşturan becerilerin geliştirilmesinin, matematik eğitiminin öncelikli amacı olması gerektiğini savunmuştur. Dünyada özel olarak matematik eğitim programlarının matematiksel düşünme geliştirmeye yönelik amaçları matematiksel düşünme, bileşenleri ve göstergelerinin neler olduğunun açıklanması gerekliliğini akıllara getirmektedir. Matematiksel düşünme üzerine fikir birliğine varılmış bir tanım yoktur (Çelik, 2016). Ortak bir tanımın olmayışının bir nedeni, çalışmalarda ele alınan kavrama farklı bakış açılarının olması ve farklı terminolojilerin kullanılması olabilir. Alanyazında yer alan temel çalışmalar, matematiksel düşünmeyi iki bakış açısından tanımlamaktadır (Isoda & Katagiri, 2012).

İlki matematiksel düşünmeyi, varsayımda bulunma, genelleme ve ispat gibi matematiksel süreçler perspektifinden tanımlamıştır (Burton, 1984; Schoenfeld, 1992; Stacey, 2006; Polya, 1945). İkincisi ise, matematiksel kavramların gelişimi olarak ele almaktadır (Freudenthal, 1973; Dreyfus, 2002; Tall, 1995).

Matematiksel düşünmeyi süreç bakımından ele alan bu iki bakış açısının birincisinde, matematiksel düşünmenin nasıl gerçekleştiği araştırılmaktadır. Bir problemin çözümü sırasında ortaya çıkan düşünme eylemini matematiksel düşünme süreçleri bakımından ele almaktadır. Bu bakış açısının temel kaynağı olarak Polya, problem çözmeyi matematiksel düşünmenin temel bileşenlerinden biri olarak tanımlar (Isoda & Katagiri, 2012). Benzer bir bakış açısıyla Schoenfeld (1992) matematiksel düşünmeyi bakış açısı/disposition ve üst biliş/metacognition ile ilişkilendirmektedir. Burton (1984) matematiksel düşünmeyi, ardışık bir süreç olarak tanımlarken Stacey (2006) matematiksel düşünmeyi; ilişki bulma-genelleme yapma ve hipotez kurma-ispat etme şeklinde iki aşamada ele almıştır.

Matematiksel düşünmeyi matematiğin kavramsal gelişiminden esinlenerek ele alan diğer görüş ise matematik içeriğine yoğunlaşmaktadır. Genel manada matematiksel düşünme, bireyin matematik kavramlarını zihninde nasıl yapılandırdığını açıklamaya yöneliktir. Aynı zamanda matematiksel düşünme bilginin bireyin zihninde yapılanma sürecinde ortaya çıkan düşünceleri ele almaktadır. Freudenthal (1973) matematik kavram ve etkinlikler üzerinde çalışılarak yeni kavramların inşa edilme sürecini matematikleştirme olarak tanımlamıştır. Başka bir ifade ile genel düşünme sürecinden matematiksel düşünme sürecine geçişi matematikleştirme olarak tanımlamıştır. Tall (2005) kavramsal gelişimi tanımlarken, subje/procept kavramını kullanmıştır. Tall, matematiksel düşünmenin gelişimini açıklamak için üç aşamalı hiyerarşik bir çerçeve sunmaktadır. Bu çerçeve: somut, sembolik ve formal olmak üzere üç zihinsel dünya arasındaki ilişkiler ağından oluşmaktadır. Dreyfus (2002) ise soyutlama ve temsil etme süreçlerinin önemine vurguda bulunmuş ve matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların yapılandırılması aracılığıyla tanımlamıştır. Harel ve Sowder (2005)'a göre bireyin matematiksel bir terime yüklediği anlam, probleme karşı üretilen çözüm, bir savın yanlışlanması veya doğrulanması için sunulan gerekçeler ve bu eylemlerin temelini oluşturan düşünme biçiminden oluşmaktadır. Matematiksel düşünme biçimi, bireyin önceki cümlede ifade edilen durumlarda akıl yürütmeleridir. Birey, "fonksiyonun bir noktadaki türevi" ifadesini okuduğunda yüzeysel olarak $\frac{dx^n}{dx} = n.x^{n-1}$ veya fonksiyonun grafiğine belirlenen noktadan çizilen teğetin eğimini ya da belirlenen noktadaki anlık değişimi veya belirlenen noktadaki doğrusallık anlaşılabilir. Bunların aksine yanlış bir durumda anlaşılabilir. Tüm bu ifade edilen durumlar bireyin bir matematiksel terime yüklediği anlam bakımından öğrencilerin anlama biçimini göstermektedir. Öğrencinin tüm bu anlam biçimlerine sahip olmasının getirdiği avantajlar bireyin düşünme biçimi ile ilgilidir. Başka bir örnekte, "dolu bir havuzu bir musluk tek başına 20 saatte, diğeri ise 30 saatte boşaltmaktadır" ifadesi incelenmiştir. Muslukların ikisi de açıldığında havuzun boşalma süresinin hesaplanması ile ilgili bireyler, (1) iki musluk birlikte havuzu 50 saat veya 10 saatte boşaltacaktır, diyebilir ya da (2) denklem kurabilir ve doğru cevabı denklemi çözerek "12 saat" olarak ifade edebilir. Tüm bu cevaplar Harel ve Sowder (2005)'in ifade ettiği gibi, probleme çözüm üretme açısından anlam biçimini ifade eder.

Matematik eğitiminin amaçlarından biri olan matematiksel düşünme becerisinin geliştirilmesi önemlidir. Matematiksel düşünmenin geliştirilmesinde gerçekçi çözümler bulmak onu anlamak ile yakından ilişkilidir (Ball, 2003). Matematiksel bilginin insan deneyimlerinden bağımsız olduğunu düşünen araştırmacılar matematiksel düşünmeyi direkt olarak matematiksel süreçlerle ilişkilendirmişlerdir (Argyle, 2012). Bu bakış, düşüncenin anlama ve kavrama yöntemi olarak görülmesine neden olabilir. Diğer bakış açısında ise matematiksel bilgi insan deneyimleri üzerine kurulmaktadır. Matematiğin, gerçek dünyadaki yapılar ve ilişkilerden doğduğunu, geliştiğini gösterir niteliktedir (Baki, 2006). Bu düşünce temelde insan eylemlerine dayanmakta ve kavramsal olarak ilerledikçe karmaşıklaşan gelişim düzeyine sahip olunduğunu savunmaktadır.

Matematiksel düşünmenin gelişimine ilişkin farklı yaklaşımlar sentezlendiğinde, matematik nesnelerin yapısı ile ilgili varsayımlar üzerinde tartışmanın olumsuz olacağı görülmektedir. Buna karşın bireyler, matematik nesnelerin aralarındaki ilişkileri ancak etkin katılım yoluyla fark edebilirler (Watson & Mason, 2006) ve ileri matematiksel düşünme çoğu zaman bir problem ile karşılaşıldığında etkin olur. Bu bakımdan bireyleri bağlamsal bir problemle karşılaştırmak onların matematiksel düşünmelerini ortaya çıkarmak için iyi bir fırsattır.

2.2. Cebirsel Düşünme

Cebir öğrenme alanına ilişkin bireyde var olması beklenen bilgi ve becerileri ifade etmek için cebirsel düşünme iyi bir açıklayıcıdır. Radford (2010) cebirsel düşünme hakkında konuşmanın riskli olduğunu, yani bu kavramı açıklamanın kolay bir olgu olmadığını ifade etmiştir. Buna rağmen alan yazında cebirsel düşünme iki yaklaşım altında ele alınmaktadır; genelleştirilmiş aritmetik ve fonksiyonel düşünmedir.

Cebirsel düşünme doğrudan cebir ile ilgili olmasına karşılık cebir kavramından daha geniş bir anlama sahiptir (Akkan, 2016). Matematiksel düşünmenin bir türevi olması onu bu bakımdan farklılaştırmaktadır. Bu sebepten cebirsel düşünme sadece cebir öğrenme alanı ile sınırlandırılmamalıdır. Cebirsel düşünme, cebir kavramlarının öğrenimi için gerekli soyut düşünmenin kazandırılmasının ötesinde bireyin karşılaştığı bir problem üzerinde düşünmesine, tahmin- varsayım geliştirmesine ve çözüm yolu üretmesine yönelik zihinsel eylemleri bütünüdür.

Öğrenmenin doğası gereği, cebirsel düşünme geçmiş deneyim olan aritmetik düşünme üzerine kurgulandığından (Stacey & Macgregor, 1997; Warren & Cooper, 2009) bu iki düşünme tarzının ilişkilendirilmesi önemli bir husus olarak görülmektedir. Aralarındaki farklılaşma ise aritmetik düşünmede, ortak bir özellik tanımlanabilir ancak direkt olarak bir ifade halinde bu özellik belirtilemez; ancak cebirsel düşünmede bir ilişkiyi veya özelliği kavramak ya da genellemek sembolik gösterim ile mümkündür (Radford & Peirce, 2006). Diğer bir ifadeyle aritmetikte sayılarla işlem yapmak mümkün iken ilişkilerin ifade edilmesi zor bir durumdur. Ancak cebirde bu durum farklılık gösterir. Cebirsel düşünme, örüntüleri tanıma ve analiz etmeyi, ilişkileri açıklama ve temsil etmeyi, genellemeler yapmayı ve işlerin nasıl değiştiğini analiz etmeyi içerir (Seeley, 2004). Tabii ki, cebirsel sembollerin kullanılması problemleri çözmek için cebir uygulamalarında yetkin olmanın ayrılmaz bir parçasıdır. Ancak, soyut sembolleri cebirsel olarak düşünmenin temellerini vermeden anlamaya çalışmak, başarısızlığa yol açabilir. Cebirsel düşünme, öğrenciler matematik çalışmalarına başladıklarında başlayabilir (Seeley, 2004). Ortaokul öncesi sınıflarda küçük çocuklar örüntülerle çalışır. Küçük yaştaki bu çocuklar doğal bir matematik aşkı yaşarlar ve merakları onlar için şekil, renk, ses ve son olarak harf, rakam örüntülerini tanımlamaya ve genişletmeye çalışırken güçlü bir motivasyon geliştirir. Küçük yaşta çocuklar, aynı veya farklı görünen örüntüler hakkında genellemeler yapmaya başlayabilir. Bu tür bir sınıflandırma ve genelleme, cebirsel düşünceye doğru yolculukta önemli ve gelişimsel bir adımdır (Seeley, 2004). Cebirsel düşünmenin gelişimi bir olay değil, bir süreçtir.

Sonuç olarak cebirsel düşünmenin içeriğinde birçok matematiksel yeterlik bulunmaktadır. Bu yeterlikler, niceliklerin ilişkileri, harflerin anlamı ve harfli ifadelerin kullanımı, eşitlik ve dengenin anlamı, genelleme yapabilme ve tersine işlem yapabilme ile ilgilidir (Akkan, 2016).

2.2.1. Cebirsel düşünme kapasitesi. Mason (2008)’a göre, ilköğretim okullarına cebirsel düşüncenin dâhil edilmesi, çocukların doğada desenleri görme ve genelleme yapma yeteneklerinin doğal olduğu inancına dayanmaktadır. Çocukların doğadaki örüntüler hakkında yaptıkları genellemeler kesin olarak matematiksel değildir. Bununla birlikte, bu tür doğal yetenekler, öğrencilerin matematiksel genellemeleri ifade etme ve gerekçelendirmede akıcılık geliştirmeleri için bir temel oluşturabilir. Çocukların cebirsel düşünmeye başarılı şekilde katılabilme kapasitelerinin olduğu bilinen bir husustur (Carraher, Martinez ve Schliemann, 2008; Lannin, 2003; Warren & Cooper, 2008). Tierney ve Monk (2008), 8-10 yaş arasındaki öğrencileri değişim hakkında genellemeler yapmayı gerektiren matematiksel görevler karşılaştırmıştır, öğrencilerin sayı dizilerinde örüntüleri ayırt edebildiklerini, bu örüntüler hakkında genellemeler yaptıklarını ve sembolik gösterimlerin anlaşıldığını belirlemiştir.

Schifter, Russel ve Bastable (2009)'da benzer şekilde ilkokul ikinci ve üçüncü sınıf öğrencilerinin sayı işlemleri ile ilgili genellemeler yapabildiğini göstermiştir: Örneğin, "x ve y tamsayıları için, 2x, 2y ve 2 (x + y) çift sayı olduğunu ve 2x + 2y = 2 (x + y) eşitliğini gösterebilmişlerdir" (ss. 233). Warren ve Cooper (2008), ilkokul öğrencilerinin yinelenen örüntüler ve büyüyen geometrik örüntüler hakkında genellemeler yapabildiklerini de göstermiştir. Maher ve Muter (2010) ile Tarlow ve Uptegrove (2010) 13 yıllık boylamsal çalışmalarında, ilkokuldan itibaren cebirsel düşünmeye yönelik aldıkları görevleri yeni görevlerle birleştirebildiklerini ve görevler arasında genellemeler yapabildiklerini ortaya koymuştur.

Öğrencilerin becerileri üzerine yapılan araştırmalar, onların açık genellemeler yapmada yaşadıkları zorlukları ortaya çıkarmıştır. Lannin (2005)'nin altıncı sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışma, öğrencilerin cebirsel görevlerde tekrarlı örüntülere odaklanmalarının açık genellemeler yapma şanslarını engellediğini göstermiştir. Bu yaklaşım tekrarlı genellemeye yol açmaktadır (Lannin, Barker ve Townsend, 2006). Lannin ve diğerleri (2006) gözlemlerinde, açık genellemeler yapmadaki zorlukların, öğrencilerin örüntü bulma görevlerinde örüntüleri görememelerinin bir sonucu olmadığını, sadece çocukların gördüğü örüntülerin açık genellemeler yapmalarına yardımcı olmamalarından kaynaklandığı tespit edilmiştir. Diğer araştırmacılar, görsel bir kalıbı bir değer tablosuna dönüştürmenin işlem yükünü arttırdığını ve dizi veya sayı çiftleri arasında değil, sekans boyunca ilişkileri bulmaya teşvik ettiğini açıkladı. Örneğin, Richardson, Berenson ve Staley (2009), sayısal ilişkilere odaklanan öğrencilerin cebirsel bir desen görevindeki ilişkileri başarılı bir şekilde genelleştiremediklerini veya gerekçelendirmediklerini bulmuşlardır. Öte yandan, sayısal tabloları kullanmaktan vazgeçen öğrencilerin, görevlerin geometrik doğasına odaklanmak için açık genellemelerinde göreceli olarak çok daha başarılı oldukları görülmüştür.

Warren ve Cooper (2008) öğrencilerin, girdi-çıktı ile organize edilen iki veri setini ilişkilendiremediklerini ifade etmiştir. Ancak Martinez ve Brizuela (2006), girdi- çıktı tablolarındaki sayılar arasındaki ilişkiyi başarıyla ifade ettiklerini göstermiştir. Becker ve Rivera (2009), girdi-çıktı tablolarının tartışılmasında, öğrencilerin girdi-çıktı tablolarında yazışmaları nedenleriyle genellemeler yapabilmesine rağmen, geometrik sunumlarla genelleme ve gerekçelendirme yaparken daha başarılı olduklarını açıklayarak farklı bir boyut eklemişlerdir.

Literatürde öğrencilerin cebirsel görevlerle çalışırken genelleme yapma kabiliyetlerinin arttığını gösteren kanıtlar görülmektedir. Öğrencilerin açık genellemelere kıyasla nispeten daha kolay olan tekrarlı örüntülere ilişkin genellemeler yapmaları daha mümkündür. Bazı araştırmalar, öğrencilerin girdi-çıktı tablolarındaki veriler hakkında genellemeler yapmanın zor olduğunu bildirirken, diğerleri öğrencilerin girdi-çıktı tablolarındaki verilerle neden olabileceğini bildirmektedir. Bununla birlikte, geometrik görevler hakkında genelleme giriş-çıkış tablolarından çok daha kolaydır.

Açık genelleme yapma kapasitesine ilişkin tartışma, ilkokul çocuklarının cebirsel düşüncesine ilişkin literatüre hâkim olmakla birlikte, okul müfredatındaki bazı görevlerin tekrarlı genellemeler gerektirdiğinden, öğrencilerin tekrarlı genellemeleri ifade etme becerisinin de önemli olduğu dâhil edilmelidir. Tekrarlı genellemeler önemlidir, çünkü öğrencilerin bir değişkendeki değişimin diğeriyle nasıl ilişkili olduğu veya bir alandaki değerlerin kod alanına karşılık gelmesiyle ilgili olan genellemeleri anlama ve ifade etme için bir temel oluşturacağı yönündedir.

2.3. Cebir Öğretimi

Okul cebiri olarak bilinen matematik alanının ve bu matematik eğitimi dalına eşlik eden araştırma tabanının öğrenilmesi ve öğretilmesi tipik olarak ortaokul öğrencisine dahil olmuştur. Cebir öğretimi, alan aksiyomlarını kullanarak değişkenleri ve bilinmeyenleri içeren cebirsel ifadelerle ilgili kelime problemlerini temsil etmenin yanı sıra polinom ve rasyonel ifadeler oluşturma ve kullanmaya odaklanmıştır. Bununla birlikte, son on yıl içerisinde çeşitli şekillerde ilkokul seviyesinde okul cebirinin bileşenlerine ilişkin bakış açısı değişmiştir. Bu nedenle, okul cebirinin mevcut tanımları geniş ölçüde farklılık gösterebilir, cebir olarak kabul edilen şey topluluklar arasında değişen faktörlere dayanır (Stacey, Chick ve Kendal, 2004). Freudenthal (1977), okul cebirini yalnızca doğrusal ve kuadratik denklemlerin çözülmesi olarak değil, aynı zamanda ilişkileri genel olarak tanımlamayı ve işlemleri çözmeyi içeren cebirsel düşünme olarak tanımlamıştır. Bu karakterizasyon cebirsel faaliyetin sembolik yönlerinin yanı sıra cebirsel muhakemenin temelini oluşturan ve onu tipik olarak doğada olan aritmetik faaliyetten ayıran ilişkisel düşünme türlerini de içerdiği için günümüzde devam etmektedir.

2.3.1. Okul cebirine ilişkin görüşlerin değişimi. Yirminci yüzyılın ikinci yarısına kadar cebir, 9. yüzyılda El-Harezmî tarafından icat edildiği gibi, denklem çözme bilimi olarak görülüyordu. Cebir üzerindeki bu bakış açısı, sembollerin işlenmesinde bir araç olarak, 1800'lerde ve 1900'lerde ortaya çıktığında, şekillendirerek okul müfredatına yansıtıldı (Kieran, 2014). Yirminci yüzyılın ilk yarısında, okul cebirinin öğrenilmesi üzerine yapılan araştırmalar, çeşitli denklemlerin çözülmesinde, uygulamaların rolü ve öğrencilerin hataları üzerine odaklanma eğiliminde olmasına rağmen, denklem çözme algoritmalarını uygulamada yetersizdi (Kieran, 2014). 1960'larda, bilişsel davranışçıların konu alanını beceri gelişimi ve hafızanın yapısı ile ilgili daha genel soruları incelemek için bir araç olarak kullandıklarında araştırma alanı psikolojiye doğru bir dönüş yaşadı. 1970'lerin sonunda, sayı olarak artmaya ve bir topluluk olarak birleşmeye başlayan (Wagner & Kieran, 2018) cebir eğitimi araştırmaları, öğrencilerin cebirsel kavramların doğası ve cebir için anlam oluşturma biçimleri üzerine yoğunlaşmaya başladı. Öğrencilerin cebiri ilk öğrenmeleri sırasında ve cebir öğretmeye yönelik yeni yaklaşımlarda kullanılan prosedürler (Bednarz, Kieran ve Lee, 1996) araştırmaların odağını belirledi. Öğrencilerin cebir öğrenmesi ile ilgili araştırmalara bir süre bilişsel bir yönelim de devam etse de sosyokültürel düşünceler okul cebirine ilişkin araştırmalara 1990'ların sonundan günümüze başka bir boyut kazandırmıştır (Lerman, 2000).

1980'lerin sonlarından günümüze kadar okul cebirinin içeriğinin genişlemesi de söz konusudur. Fonksiyonlar, önceki on yıllar boyunca ayrı bir matematiksel çalışma alanı olarak düşünülmüştür. Ancak yıllar içerisinde fonsiyonlar ile cebirin temel kavramlarını okul cebir müfredatı ve araştırmalar da birleşmeye başlamıştır (Kieran, 2014). Fonksiyonlar; grafik, tablo ve sembolik temsilleriyle zaman içerisinde meşru cebirsel nesneler olarak görülmeye başlandı (Schwartz & Yerushalmy, 1992). Bu değişimi tetikleyen faktör ise farklı derecelerde okul cebirinin içeriğine ve öğretimine entegre edilmeye başlayan bilgisayar teknolojisinin gelişimi olabilir.

Okul cebirine bakış açısındaki bir başka değişiklik, cebirsel muhakeme olarak adlandırılan kavrama açık bir şekilde yaklaşılmasıydı; başka bir deyişle, genel kuralların kelimelerle, eylemlerle ve jestlerle ifade edilmesi gibi cebirsel sembollerle etkinlikten önce ve sonra eşlik eden düşünme süreçlerinin dikkate alınmasıydı. Okullardaki cebirsel faaliyete bakış açısının genişlemesi, ilkokul öğrencilerinin cebirin ilk çalışmalarına dâhil edilmesini ve cebiri tüm öğrenciler için daha erişilebilir hale getirmesini amaçlamaktadır.

Okul cebirinin vizyonu, bir harf olarak değişken ve değişkenlerle yapılan işlemlerden çoklu temsiller, gerçekçi hayata uygun problemler kurmak ve teknolojik araçların kullanımı gibi ilerleyen yıllar boyunca önemli ölçüde genişledi, cebirin nasıl öğrenildiği de bu vizyonunun içinde yerini aldı. Öğrencilerin bir zamanlar değişkenlerle yapılan işlemler için kuralları ezberleyerek denklem çözme ve ifadeleri sadeleştirmek için cebir öğrendikleri fikrinin yerini, öğrencilerin cebirsel nesneler ve işlemler için anlam kazandıkları çok sayıda faktör ve kaynağı dikkate alan bakış açıları büyük ölçüde yerini aldı (Kieran, 2014). Bazı araştırmacılar okul cebirinde özel anlam oluşturma problemlerini incelediler (Kaput, 1989;

Kirshner, 2001). Son zamanlarda, cebirde anlam kazanmanın çeşitli düşünme yolları, üç kaynak önerisi etrafında (Kieran, 2007) genişletildi:

(a) Matematiğin içindeki anlam, cebirsel yapının kendisinin içerdiği anlam, harfin sembolik formunu kapsayan ve diğer matematiksel temsillerin anlamı, çoklu temsiller;

(b) Problemin bağlamdaki anlamı;

(c) Matematik / problem bağlamına dışsal olarak üretilen anlamlar (örneğin, dilsel aktivite, jestler ve beden dili, metaforlar, deneyimler ve imaj oluşturma).

Bu alanın daha ileri teorik gelişimi, Radford ve Peirce (2006) tarafından cebir öğrenmeye uygulanmış, göstergebilim temelli matematiksel öğrenme çerçevesini kavramsallaştırmasıyla gerçekleştirilmiştir. Göstergebilimsel nesnelleştirme aracı olarak adlandırılan kelimeler, materyaller (artifacts) ve matematiksel işaretler vasıtasıyla, cebirin kültürel nesneleri, öğrencinin öznel anlamlandırmalarının rafine edildiği bir süreçte ortaya çıkar.

2.3.2. Cebirsel etkinliklerin karakterizasyonu. Bazı araştırmalar cebirsel etkinliklerin doğasını ve öğrencilerin cebirdeki öğrenme deneyimlerinin bileşenlerini incelemek amacıyla mercek olarak kullanmıştır. Cebiri ve faaliyetlerini tanımlamak için çeşitli modeller önerilmiştir (Bell, 1996; Mason ve diğerleri, 2009; Sfard, 2008). Örneğin, Bednarz ve diğerleri (1996) tarafından geliştirilen model, okul cebirini üç tür faaliyete göre karakterize eder: genelleştirilmiş, dönüşümsel ve üst düzeydir.

Cebirin genelleştirme eylemi tipik olarak büyük miktarda anlam inşasının gerçekleştiği ve durumların, özelliklerin, kalıpların, ilişkilerin cebirsel olarak yorumlandığı ve temsil edildiği yerdir. Örnekler arasında, problem durumlarını temsil eden bir bilinmeyen, geometrik desenlerden veya sayısal dizilerden oluşan örüntülerin genelleştirilme ifadeleri, sayısal ilişkileri yöneten kuralların ifadeleri ve fonksiyonların grafik, tablo veya gerçek sembollerle gösterilmesi bulunmaktadır. Bu eylem aynı zamanda eşitlik, denklik, değişken, bilinmeyen ve denklem çözümü için terimler gibi kavramların oluşturulmasını da içermektedir.

Sembol manipülasyon tiplerinin tümünü içeren cebirin dönüşümsel eylemi, bazıları tarafından sadece beceriye dayalı olarak kabul edilir; ancak bu yorum alandaki mevcut düşünceyi yansıtmamaktadır. Daha yaygın bir görüşe göre, matematik tekniğinin hem pragmatik hem de epistemik değere sahip olduğu ve epistemik değerinin tekniğin öğrenildiği dönemde en belirgin hale geldiği görülmektedir (Artigue, 2002). Başka bir deyişle, cebirin dönüşümsel faaliyeti sadece beceriye dayalı bir çalışma değildir; örneğin, $x^n - 1$'deki *n* tamsayı olan üssünün birkaç bölene sahip olması durumunda, ifadenin birkaç yoldan etkilenebileceği ve yapısal olarak birden fazla şekilde görülebileceği için kavramsal / teorik unsurları içerir. Bu gibi kavramsal yönlerin gelişmesi için teknik öğrenme ihmal edilemez.

Son olarak, cebirin araç olarak kullanıldığı, ancak cebire özel olmayan üst seviye eylemler vardır. Cebir kullanım amacı ve bağlamı, daha genel olarak matematiksel süreçleri ve aktiviteleri kapsar, ayrıca cebirin diğer konulara katkı sunması ve dönüşümsel faaliyetler de bulunması için motivasyon sağlar. Cebirsel olmayan süreç ve aktiviteler arasında problem çözme, modelleme, genelleştirilebilir örüntülerle çalışma, sağlama yapma ve ispatlama, tahmin ve varsayımda bulunma, işlevsel durumlarda değişiklik yapma ve hiçbir şekilde sembolik cebir kullanmadan gerçekleştirilebilecek ilişkiler veya yapı etkinlikleri arama sayılabilir.

1970'lerden günümüze kadar cebir öğrenmeye ilişkin çok sayıda araştırma bulunmaktadır. Cebir öğrenimine başlayan birçok öğrenci, önceden belirlenmiş aritmetik düşünce çerçevesi ile donatılmıştır. Bu sebeple öğrenciler matematiksel bir problemle karşı karşıya kaldıklarında bir cevap hesaplamayı aritmetik olarak düşünürler. Düşüncelerini ilişkilerin olduğu bir perspektife kaydırmak için kayda değer miktarda zaman gerekir, ilişkileri temsil etme yolları ve bu temsilleri içeren işlemler düşüncenin merkezidir ve odak noktasıdır. Öğretim deneyleri, öğrencilerin cebirsel zihin çerçevesi geliştirmelerine yönelik çeşitli yaklaşımları keşfetmek için tasarlanmıştır. Genel olarak başarılı bulunan yaklaşımlar (Kieran, 2014), (a) Örüntüleri, fonksiyonları ve değişkenleri kullanarak genelleme yapmayı veya genelliği ifade etmeyi vurgulamak; (b) Eşitlik hakkında ilişkisel düşünmeye odaklanmak, eşitliğin her iki tarafına birden fazla terim içeren sayı cümleleri ile başlamak ve her iki tarafta aynı sayının "kutu" ile ve sonra bir harfle "gizlenmesini" içeren daha karmaşık örneklere doğru ilerlemek (son aşamada eşitliğin her iki tarafında da bilinmeyen olmalı ve birebir sembolik bir denklem oluşturmalıdır), (c) Birden fazla denklem gösterimine uygun olan problem durumları kullanılabilir ve iki (veya üç) denklem temsilini karşılaştıran uygun problem durumlarıyla öğrencileri çalıştırmak, hangi denklem temsilinin daha kullanışlı veya iyi olduğunu belirlemek farklı bir ifadeyle daha genellenebilir olduğunu belirlemek şeklindedir. Ayrıca okul cebirinin belirli yönlerini öğrencilerin kavramsallaştırmakta zorlandıkları da ilgili araştırmalarda belirtilmektedir (Kieran, 2014): (a) x'in alacağı değerler için düşünerek, $x + 3$ veya $4x + y$ gibi ifadeleri geçerli yanıtlar olarak kabul etmek, (b) alan yazında ifade edilen ve sık başvurulan öğrenci-profesör sayısı problemi gibi belirli problem durumlarını temsil etmede iyi bilinen doğal dile dayalı alışkanlıkları gidermek; (c) Kelime problemlerinin çözülmesinden bir dizi çözümleme (tersine yapma/ undoing) işlemi ile temsil etmeye doğru ilerlemek ve bu problemlerin denklemin her iki tarafına da uygulanan dönüşümlerle çözmek; (d) Bir durumun genel yapısını temsil etmek için cebirin gücünü araç olarak görmemek.

Bu bulgular, yıllar içinde odaklanan geniş bir literatür taramasından elde edilebilmektedir (Kieran, 1992; 2006; 2007; Radford, 2018; Hodgen ve diğerleri, 2018). Ancak literatürden toplanan bilgilerin tamamına ilişkin değildir. Cebir öğrenmeye ilişkin teorik gelişmelerin yanı sıra, müfredat değişimi ve teknolojik araçların artan kullanımı nedeniyle cebir öğretiminin tümüne indirgenemez durumdadır.

1970'ler ve 1980'lerde yapılan araştırmalar temel olarak aritmetikten cebire geçiş ile ilgili konulara yönelik olsa da daha sonra yapılan araştırmalar modelleme, öğrencilerin genelleme yapması, çoklu gösterimlerin kullanımı ve teknoloji ortamlarının kullanımının (elektronik tablolar, grafik hesap makineleri, bilgisayar cebir sistemleri, mobil teknolojiler ve özel olarak tasarlanmış yazılım ortamları) cebir öğrenmeyi desteklediği ile ilgilidir. Teknolojinin rolü üzerine yapılan araştırmalar, öğrencilerin kullandıkları teknolojik araçların sınıfta pedagojik bir rolü olduğunu ve yalnızca uygulama için uygun olduğu zaman öğrencilerin en fazla yarar sağladığını bildirmektedir (Kieran, 2014). Alanyazında varolan başka bir değişim endişesi ise cebirsel problem çözme ile ne kastedildiğidir. Geçmişte, bu cümle neredeyse sadece sözcük problemlerine (örneğin, havuz problemleri), yani birçok cebir öğrencisinin zorlandığı cebir öğrenim alanı anlamına gelmekteydi. Bununla birlikte, günümüzde pek çok rutin olmayan cebirsel işlem içeren, tamamen “sembolik formda” olan ve “gerçek dünya” durumlarıyla pek bağlantısı olmayan birçok ifadeyi içeren geniş bir yorum bulunmaktadır.

12-15 yaş arasındaki öğrencilerin cebir öğrenmelerine yönelik araştırmalar cebir öğrenmeyle ilgili literatürün büyük kısmını oluşturmaktadır. Bununla birlikte, 2000’li yıllardan günümüze kadar ki süreçte, ilkokul ve ortaokul çağındaki öğrenciler de cebirsel muhakemenin gelişimine yönelik önemli bir ilgi olmuştur (Kaput, 2017; Ellis, Ely, Singleton, Tasova, 2020). 15 yaşından büyük öğrenciler de yani zorunlu eğitimini tamamlamış olanlarda ihmal edilmemiştir. Bu yaş grubuyla yapılan araştırmalar; cebirsel yapı ve denklik çalışmaları, kuadratik ve yüksek dereceli ifadeleri içeren kavramsal ve işlemsel çalışmalar ve sayı-teorik ilişkilerin ispatlanması ve ileri cebirsel konuların öğrenilmesi üzerine yoğunlaşmaktadır. Yapılan çalışmalarda birçok öğrencinin yapıyı görmede zorluk çektiği ancak denklemlerle kelime problemlerini temsil etmede iyileştirmeler gösterdikleri bulunmuştur. İlerleyen yaşlarda öğrencilerin grafiksel değil, edebi sembolik temsillerle çalışmayı tercih ettikleri görülmüştür.

Alanyazında sentezlenen araştırmalar, öğrencilerin hem görev tasarımı hem de cebirsel muhakeme becerilerini teşvik etmek için öğretmen desteğine ihtiyaç duyduğunu vurgulamaktadır (Kieran, Krainer ve Shaughnessy, 2012). Öğretmenlerin etkili yaklaşımlarını ve diğer öğretmenlerle paylaşmalarını içeren bu alanda bazı ilerlemeler açıkça yapılsa da daha fazla çalışmaya ihtiyaç olduğu görülmektedir. Öğrencilerin cebirsel akıl yürütmelerini destekleyen ve bu alanda ilerlemelerini sağlayan öğretim pratiğini geliştiren modeller hakkında genel bir çerçeve kullanılarak araştırma ile pratik arasında bağlantı kurmaya ilişkin önem vurgulanmıştır (Kieran ve diğerleri, 2012). Matematik eğitimi literatürünün çoğunda var olan araştırma ve uygulama arasındaki farkı gidermek amacıyla öğretmenleri sadece araştırmanın uygulayıcısı olarak değil, profesyonel ve bilimsel bilgiyi üreten araştırma paydaş olarak araştırmaya dahil edilmelidir.

Genel olarak cebir ve cebirsel düşünmenin grift yapısının açıklanmaya ihtiyaç olduğu görülmektedir. Son yıllarda, cebirin nasıl öğretildiğine dair vizyon değişmektedir. Cebirsel düşünme, genelleştirilmiş aritmetiğin bir çalışması olarak başlar. Odak noktası sayılar ve hesaplamalardan ziyade işlemler ve süreçlerdir. Cebir bu şekilde çalışıldığında, denklemlerdeki harfleri ve sayıları manipüle etme kuralları karmaşık görünemez, bunun yerine hesaplama hakkında bildiklerimizin doğal bir uzantısı haline gelir.

Bu durumda cebirsel düşünmenin anlamı ön plana çıkmaktadır. Cebirsel düşüncenin iki bileşeni, matematiksel düşünme araçlarının geliştirilmesi ve temel cebirsel fikirlerin incelenmesi, matematik eğitimcileri tarafından tartışılmıştır (NCTM, 1989, 1993, 2000; Driscoll, 1999; Radford, 2018; Hodgen ve diğerleri, 2018). Matematiksel düşünme araçları analitik zihin alışkanlıklarıdır. Problem çözme becerilerini, temsil becerilerini ve muhakeme becerilerini içerirler. Temel cebirsel fikirler, matematiksel düşünme araçlarının geliştiği içerik alanını temsil eder. Bu çerçevede, matematik kavramların nasıl öğretilmesi gerektiği ile ilgili tartışmaların meydana geldiği görülmektedir (Hodgen ve diğerleri, 2018). Gerçekte, her iki bileşen de önemlidir. Matematiksel düşünme araçları olmadan cebirsel fikirleri düşünmek oldukça güçtür.

Kaput (2008), Cebir kültürel bir eser iken- dünyadaki eğitim sistemlerinde yerleşik bir bilgi bütünü olarak, cebirsel düşünmeyi bir insan aktivitesi- cebirden ortaya çıkıyor, şeklinde birbirinden ayırt etmeye çalışmıştır. Bu konu PME (Psychology of Mathematics Education) ve CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) gibi matematik eğitimi otoritelerinden oluşan komisyonlarda bu çalışma alanının başlığı Cebirsel Düşünme'dir. Cebirsel düşünme başlığı altında öğrencilerin cebir yapma, düşünme ve bunlardan bahsetme yolları ve dahası, öğretim tasarımı ve uygulaması açısından öğretmenlerin cebir ile ilgilenme yolları hakkında olduğunu yansıtır (Hodgen ve diğerleri, 2018). Bu sebeplerle cebir ve cebirsel düşünme grift bir beraberliğe sahiptir. Bu çalışmada öğrencilerin cebir kavramlarını nasıl inşa ettikleri ele alındığından bu sürece bir cebirsel düşünme perspektifi olarak bakılmalıdır. Cebir ve cebirsel düşüncenin grift yapısını ele almaya ve yukarıda bahsettiğimiz bazı teorik zorlukları çözmeye yardımcı olma konusunda önemli bir potansiyel olduğunu literatürde vurgulanmıştır (Hodgen ve diğerleri, 2018). Bu noktayı yinelemek için, cebirsel düşüncenin geniş ve çeşitli teorilerden yararlanmasını incelemeye gerçek bir ihtiyaç olduğu görülmektedir.

2.4. Matematiksel Soyutlama

Soyutlama, bir kavramın bilgi içeriğini indirgeme süreci olarak tanımlanır (Peirce, 1976). Bu indirgeme, belirli bir amaç için gerekli olan bilginin daha rahat elde edilebilmesi için yapılır. Böylece kavram karıştırılmaz ve bilgi daha kolay elde edilir. Basitleştirme stratejisi olarak kullanılabilen soyutlama, bir kavramın bilgi içeriğinin azaltılması ve sadeleştirilmesidir. Felsefi anlamda soyutlama, fikirlerin nesnelerden uzaklaştırılması sürecidir. Soyutlama, büyük sözlükte “Bir nesnenin özelliklerinden veya özellikleri arasındaki ilişkilerden herhangi birini tek başına ele alan zihinsel işlem, gerçeklikte ayrılamaz olanı düşüncede ayırma, tecrit, abstraksiyon” şeklinde tanımlanmıştır (TDK, 2009).

Felsefede soyutlama, bir nesnenin herhangi bir özelliğini diğerlerinden ayırarak tek başına ele alan zihinsel işlem olarak adlandırılır. Bir bilgi yöntemi olarak, soyutlamayı insan zihni yapar. Ancak diyalektik soyutlama anlayışı ile idealist soyutlama anlayışı birbirine tamamen zıtlık gösterir. Gerçekte soyutlama, bilme sürecinde zorunlu bir yöntemdir. İdealizme düşmeksizin gerçekleştirilen soyutlama, bilimsel soyutlamadır. Kavramlar, soyutlamalarla elde edilir fakat nesnel gerçeklerle denenir ve doğrulanır.

Matematiksel soyutlama, matematik kavramının başlangıçta ilişkili olabileceği herhangi bir gerçek dünya nesnesine olan bağımlılığının ortadan kaldırılmasını ve kavramın genelleştirilmesi yoluyla kavrama daha kapsamlı bir uygulama alanı oluşmasını sağlar. Başka bir ifade ile matematiksel soyutlama, kavramın özünü ortaya çıkarma işlemidir.

Matematikte birçok araştırma alanında geçerli olan kurallar ve kavramlar soyut yapı olarak oluşturulmadan önce gerçek dünya sorunlarının incelenmesi ile ortaya çıkmıştır. Örneğin, istatistik, şans olasılığının hesaplanmasından doğmuştur ve cebir aritmetik problemlerinin çözümlerini genelleştirme amacıyla ortaya çıkmıştır.

Soyutlama yapabilmenin yararları şöyle özetlenebilir; soyutlama, matematiğin farklı alanları arasındaki yoğun ilişkilerin ortaya çıkarılmasına olanak sağlar, bir alanda bilinen sonuçlar ile ilişkili bir diğer alandaki sanıların (conjecture) ortaya konmasına yardımcı olur (Örneğin, Goldbach sanısı), alandaki yöntemler ilişkili olduğu başka alanlardaki sonuçları tanımlamak için kullanılır. Soyutlama yapabilmenin zorluğu, soyut kavramların özümsenmeden önce belirli bir matematiksel olgunluk ve deneyime gereksinim duyulmasından kaynaklanmaktadır.

2000 yıldan fazla süredir çalışılmaya devam edilen soyutlama, Aristotles'den Russell'a kadar çeşitli filozoflar tarafından ele alınmıştır. Soyutlama, insanın düşünme süreci ile ortaya çıkmaktadır. Aristoteles'in çalışmalarında "alıp götürmek" manasında "aphairesis" kelimesi ile yazılmıştır. Aristoteles'in çalışmalarında matematik örnekleri oldukça zengindir ve mantıksal formu göstermek için sıklıkla matematiksel örnekler kullanır (Mendell, 2017). Aristoteles bazen nesneyi, matematiksel çağrışımla ilişkilendirir. Bu görüşe göre soyutlama çıkarımdan başka bir şey değildir ve psikolojik de değildir (Mendell, 2017).

Aristoteles'in ürettiği bu bilgi teorisi deneyimci (empiricist) filozoflardan biri olan Locke tarafından ele alınmış ve soyutlama ile ilgili klasik bir bakış açısının oluşmasını sağlamıştır. Bu klasik soyutlama fikrinin sahip olduğu varsayımlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir (van Oers, 2001):

1. Soyutlamalar, nesnelerin kategorilerle temsil edilmesiyle oluşmaktadır.
2. Soyutlamalar bağlamdan (ortamı çevreleyen koşullardan) bağımsız temsillerdir.
3. Soyut düşünme, düşünce gelişiminin daha ileri adımlarının ayırt edici bir özelliğidir.

Bu varsayımlarda dikkat çeken önemli noktalardan biri, soyutlamanın üst düzey düşünme yapısında gerçekleştiği düşünülen bir süreç olması ve soyutlamanın öğrenmenin gerçekleştiği zamandan, mekândan ve ortamdan bağımsız gerçekleşebileceğine inanılmasıdır. Russell (1926), soyut düşüncenin insan zekâsının en üst düzey başarısı ve en güçlü aracı olduğunu belirtmektedir. Cassier (1957), bir süreç sonunda ulaşılan genel bir ifadenin soyutlamanın en son noktası olmadığını, hatta bazı genel ilkelerin sürekli olarak yeniden başlamaya hazır olduğunu vurgulamıştır. Davydov (1990), bir niteliği diğer niteliklerinden birkaç durumda ayırma süreci olarak tanımlamıştır. Sierpinska (1994) ise soyutlamayı bir kavramdan belli özelliklerin ayrılması eylemi olarak açıklamaktadır. Soyutlama eyleminin birçok yönü olmasından dolayı araştırmacılar soyutlamanın tek bir anlamı üzerinde fikir birliğine varamamışlardır (Tsamir & Dreyfus, 2002).

Soyutlama önceleri bilgi kuramcılarının ilgilendiği bir kavram iken, öğrenme süreci ile ilgili çalışmalara sağladığı katkılar neticesinde eğitim kuramcıları için de araştırılan bir kavram haline gelmiştir. Günümüzde soyutlama fikrinin iki bakış açısıyla tartışıldığı söylenebilir; Bilişsel ve Sosyo-kültürel soyutlamadır. İki bakış açısı incelendiğinde, bilişsel ve sosyo-kültürel bakış açılarının soyutlamayı bir süreç olarak kabul etmeleri bakımından benzer oldukları, bir diğer ifadeyle yeni zihinsel durumların soyutlama sürecinin sonucunda meydana geldiği düşüncesi hâkimdir (Hassan & Mitchelmore, 2006). Soyutlamanın gerçekleşmesinde bağlamın rolü her iki bakış açısına uygun olarak gerçekleştirilen soyutlamalarda farklı şekilde algılanmaktadır. Soyutlamayı farklı bakış açısı ile ele alan bilişsel ve sosyo-kültürel görüşler birbirinin zıddı olmaktan daha çok birbirinin tamamlayıcısı olarak görülebilecek iki bakış açısıdır (Cobb, 1994; Yeşildere, 2006).

Bilişsel soyutlama, öğrenenin konuyla ilgili örneklerdeki benzerlikleri fark etmesi olarak ifade edilebilir.

> Soyutlama, deneyimlerimizin arasındaki benzerliklerin (günlük hayat, matematiksel olmayan) farkında olma etkinliğidir. Sınıflama ise bu benzerlikleri temele alan deneyimlerimizin bir araya getirilmesi anlamındadır. Soyutlama bir çeşit daimî değişimdir. Bu daimî değişim bize önceden sınıflandırılan benzerliklere sahip olan yeni deneyimleri tanıma fırsatı tanır. Kısaca öğrendiğimiz bazı şeyler sınıflama yapmaya olanak sağlar ve bir sınıfın özelliklerini tanımlar. Etkinlik olarak soyutlama ve ürün olarak soyutlamanın arasındaki ayırımı yapmak için ürün olan soyutlama sürecine kavram adını verebiliriz (Skemp, 1986, s. 24).

Mitchelmore ve White (2004), Skemp (1986)'in tanımını temele alarak soyutlamayı iki aşamada açıklamaktadır. İlk aşama, birçok farklı durum içerisinden genel özellikleri tanımaktır. Günlük yaşam deneyimlerinde bu özellikler yüzeysel olabilir, matematikte ise daima yapısaldır. İkinci aşamada ise fark edilen benzerlik soyutlanır ve bu benzerliği temsil eden bir kavramda şekillendirilir. Skemp' in düşüncelerini benzer olarak bir diğer bilişsel kuramcı Piaget'tir. Piaget, deneysel soyutlama (empirical abstraction), sözde-deneysel soyutlama (pseudo-empirical abstraction) ve yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) olmak üzere üç yönlü bir model ortaya koymuştur. Deneysel soyutlamada öğrenen sadece nesnelerin özelliklerini kullanarak soyutlama yapar. Sözde-deneysel soyutlama nesnelerin oluşturdukları eylemlerin özelliklerine bakarak soyutlama yapar (Tall, 2004). Yansıtıcı soyutlama ise öğrenenin herhangi bir konu üzerinde çalışırken yaptığı eylemler üzerine eğilip onlar üzerine düşünerek, çalıştığı konuya yönelik yeni çıkarımlarda bulunmasıdır (Zembat, 2007). Anlamlı öğrenmenin gerçekleşebilmesi ve ileri düzeyde matematiksel düşünmenin gelişmesi için öğrenenlerden deneysel soyutlamadan çok yansıtıcı soyutlama yapmaları beklenir. Ancak bu sayede öğrenenler uğraştıkları problemin yüzeysel özelliklerini ezberleyerek hatırlamaktan ziyade problemin çözümü için gerekli temel yapıları oluşturan matematiksel ilişkileri soyutlayabilir. Piaget'nin yansıtıcı soyutlama görüşü, zihinsel işlemlerin sınıflandırmasında ve zihinsel nesnelerin soyutlanması sürecinde faydalı olmuştur. Yansıtıcı soyutlama ürünü olan şemalar, her gelişim döneminde bilginin yapılandırılmasında yer alan bloklardır. Bu süreç, mantıklı ve tutarlı teorik modellerin yapılanmasını sağlar (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Piaget yansıtıcı soyutlama yapılarını; içsel süreçlerin bir yapılanması olarak içselleştirme, yeni bir yapı oluşturmak için ikiden fazla işlemin veya sürecin ilişkilendirilmesi olarak koordinasyon, dinamik sürecin veya işlemin sabit bir nesneye dönüşümünde muhafaza etme olarak genelleme şeklinde tanımlamıştır (Paschos & Farmaki, 2006). Bu tür soyutlama, yapılandırmacıdır ve kuralların yeni anlamlar kazanmalarına olanak sağlayan sentezler ile sonuçlanan bir genelleme sürecidir (Paschos & Farmaki, 2006).

Bununla birlikte, deneysel soyutlamanın matematiksel olmadığı yönünde iddialar ortaya atılmıştır. Bütün temel matematiksel fikirler deneysel soyutlamanın genel bir süreci vasıtasıyla öğrenilir, sonraki öğrenmeler matematiksel soyutlama diye adlandırılan farklı bir süreç tarafından bu deneysel kavramlara dayandırılır (Mitchelmore & White, 2004).

Eğitim bilimleri alanında soyutlama üzerine çalışmalar yapan Dienes, Skemp ve Piaget'in deneysel bakış açısından çok fazla etkilendiği söylenilebilir (Özmantar & Monaghan, 2008). Dienes (1961) soyutlamayı bir süreç olarak ele almış ve farklı durumlardan ortak özellik çıkarma süreci olarak tanımlamıştır. Diğer bir ifadeyle soyutlama, bireyin karşılaştığı durumların ortak özelliklerini belirleyerek bir sınıflama yapması sürecidir. Ayrıca sınıflamaya uymayan özellikleri belirleyerek bir sonuç çıkarmasıdır. Bu durum soyutlamanın genellemeye varma anlamı olarak ele alınabilir.

Bilişsel yaklaşıma göre soyutlama, bir dizi matematiksel süreçten meydana gelmektedir. Ayrıca bireyin/ öğrencinin zihninde bulunan kavramlarla süreç sonucunda oluşan yeni kavram arasında ilişki kurmayı ve kurulan bu ilişkiyi anlamlandırmayı içermektedir. Bu ilişkilerde benzerlikler ve farklılıklar üzerine odaklanılarak sınıflamalara gidilir ve sonuç olarak kavram zihinde oluşabilir. Daha sonra karşılaşılacak benzer bir durumda öğrenilen bu kavramların kullanılması halinde soyutlanma gerçekleşmiş olur. Bilişsel kuramcılar soyutlamanın bir dizi matematiksel süreç ve nesneden oluştuğunu, öğrencilerin zihinlerindeki nesnelerin ortak özelliklerini ilişkilendirerek daha ileri bir matematiksel nesneye ulaştıklarını belirtmişlerdir (Herskhowitz ve diğerleri, 2001). Soyutlama için, deneysel düşünmenin kullanıldığı 'tanıma' gereklidir. Ancak teorik düşünmeyi gerektiren oluşturma gerçekleşmeden soyutlama gerçekleşemez.

Soyutlama ile ilgili olarak yapılan çalışmalarda bazı farklılıklar olmasına rağmen çalışmaların çoğunda soyutlamanın bir süreç olarak ele alındığı dikkat çekmektedir. Eğitim çalışmalarında yaygın olarak kullanılan soyutlama süreçlerinin izlenmesi için geliştirilen teoriler;

Sfard (1991), soyutlamanın içselleştirme (interiorization), yoğunlaştırma (condensation) ve nesneleştirme (reification) olarak üç adımdan oluştuğunu ifade etmiştir. Dubinsky (1991), geliştirdiği teoride eylem (action), süreç (process), nesne (object) ve şema (schemas) aşamalarının önemi üzerinde durmuş ve teorisine bu sözcüklerin baş harflerinden oluşan APOS adını vermiştir. Dubinsky teorisinde soyutlama sürecinin adımlarını, içsellestirme (interiorization), muhafaza etme (encapsulasiation), genelleme yapma (generalization) ve tersten gitme (reversal) şeklinde ifade etmiştir. Gestalt teorisine göre soyutlama algılama alanının yeniden düzenlenmesidir. Piaget bunu şemaların oluşumu olarak görmektedir ve bilişsel bilim insanları soyutlamanın içerisine genelleme, farklılaşma ve örüntü tanıma mekanizmalarını dâhil etmişlerdir. Gray ve Tall (1994), aritmetik ve cebir alanındaki matematiksel gelişimi araştırdıkları çalışmalarında "process" ve "concept" sözcüklerinden üretilen "procept" ifadesini kullanmışlardır. Teorilerinin gelişimini dünyanın algılanması, bunun üzerinde eyleme geçilmesi ve hem algı hem de eylemin yansıtılması üzerine temellendirmişlerdir.

Soyutlamanın; öğretim sürecindeki örneklerin incelenmesi ve örneklerdeki ortak özelliklerin yakalanması ile gerçekleştiği ifade edilmektedir (Yeşildere & Türnüklü, 2008). Bu yaklaşıma göre soyutlama süreci sıralı eylemler sonucunda elde edilebilir ve lineerdir. Bilişsel soyutlama görüşünün üç temel özelliği vardır (Özmantar, 2005);

a) Soyutlama çok sayıdaki örneklerin ortak noktalarını belirlenmesi ile ulaşılan genellemedir.

b) Soyutlama ortam koşullarından (yer-zaman) bağımsız gelişen bir süreçtir.

c) Soyutlama, somuttan soyuta doğru bir yükseliştir (Özmantar & Monaghan 2007).

Bu özelliklerin odak noktası; soyutlamanın üst düzeylerde düşünme ile gerçekleşen bir süreç olmasıdır.

Soyutlamanın bilişsel boyutuna eleştirel yaklaşan, Ohlsson ve Lehtinen (1997)'e göre; bilişsel soyutlama, karmaşık fikirler içinde var olan daha basit fikirlerin ilişkilendirilmesinden oluşmaktadır. Bu nedenle, soyutlama süreci somuttan soyuta tek yönlü hareket edemez. Somut ve soyut kavramlar ayrı yapılar değillerdir; birbirleriyle ilişkilidir, ancak soyutlama sürecinde birbirinden ayrılırlar. Confrey ve Costa (1996), bilişsel yaklaşımda, matematiksel düşünmeyi orijinal sosyal çevresinden ayırmanın uygun olmadığını, bu durumda matematiksel düşüncenin sadece dar bir bakış açısı ile gözlenebileceğini ve bu bakış açısının matematiksel araç kullanımını ve gelişimini ihmal ettiğini ifade etmiştir. Bikner- Ahsbahs (2004)'e göre ise, öğrencilerin öğrenim geçmişlerinin ayrıntılarını bilmenin ne çeşit bir eyleme ihtiyaç duyulduğuna karar vermede öğrenim çevresine getireceği herhangi bir katkısı yoktur. Önemli olan etkileşim ve matematiğe karşı duyulan yoğun ilgidir.

Soyutlamanın öğrenilen çevreden, öğrenme ortamını çevreleyen koşullardan, kullanılan araçlardan ve sosyal etkileşimden ayrı bir şekilde gerçekleşemeyeceği düşüncesi soyutlamaya yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Bu yeni bakış açısı sosyo- kültürel soyutlama olarak isimlendirilmiştir. Sosyo-kültürel bakış açısının temelinde; öğrenme çevresi ve sosyal etkileşim vardır. Bu soyutlamanın oluşumu için temel varsayım uygun çevresel koşulların oluşmasıdır. Eğer çevre uygun şartlar da düzenlenirse birey için öğrenme anlamlı hale gelecek ve edindiği yeni bilgilerin soyutlanması kolaylaşacaktır. Bu alanda Leont'ev (1981) 'aktivite teorisine' göre çevre, insan davranışlarının anlamlarını ve yapılarını düzenleyen faktörler toplamı olarak tanımlanabilir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). İnsan davranışlarının bireysel aktiviteleri analizin büyük bir parçasıdır. Bireyin davranışlarını anlamlandırma süreci çevreden bağımsız düşünülemez. Bu nedenle çevre düzenlenirken aktivitelere yer verilmelidir. Aktiviteler, genel bir içerik ile bağlantılı ve iş birliği ya da bireysel başarıyı yansıtan davranışlar zinciridir. Aktiviteler bireylerin çeşitli becerilerini içerecek şekilde düzenlenmelidir. Bu sayede aktiviteler (araç, fikirler, işaretler) aracılığıyla davranışlar dolaylı olarak elde edilirler (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Ancak, aktivite sadece dış çevreyi düzenleyen fiziksel bir faktör değildir. Bu sebeple katılımcının duyuşsal özelliklerine katkıda bulunarak tasarlanmalıdır. Sonuç olarak, çevre aktivitenin ayrılmaz bir parçası haline gelir. Çünkü katılımcılar, onlara verilen çevreye uygun görülen davranışları sürdürmeyi seçerler.

Sosyokültürel bakış açısı öğrenmenin çevreden, araç kullanımından, sosyal etkileşimden ve ortamı çevreleyen koşullardan ayrı gerçekleşemeyeceğini savunur (Yeşildere, 2006). Van Oers (2001)'e göre soyutlama belli bir bakış açısını göz önüne alarak ilişkiler oluşturma sürecidir. Bu anlamda soyutlama bir kavramın daha önceden fark edilmemiş özelliği değil, düşüncelerimizi geliştiren ve yeni kavramlara ulaşmamızı sağlayan bir özelliğidir. Soyutlama, öğrencilerin kullandıkları materyaller ya da düşüncelerden sonuç çıkartarak yeni bir matematiksel anlam oluşturmalarına yardımcı olan araçtır (Noss, 2002). Öğrencilerin sahip oldukları kavramsal bilgileri ilişkilendirme boyutunda ele alan bu soyutlama türü durumsal soyutlamadır. Noss ve Hoyles (1996) durumsal soyutlamayı *bilgi ağı kurma* süreci olarak tanımlamaktadırlar.

Soyutlama süreci karmaşık bir süreçtir bu karmaşıklığı aşmak için dil önemli bir yere sahiptir. Günlük konuşma dilinden soyut dil kullanımına geçiş hiç de basit değildir. Soyut dilin kullanımı sözcükler ve metinlerde ciddi değişiklikleri içeren bir süreci gerektirir (Ferrari, 2003). Bu durum soyut olduğu düşünülen matematik alanında kendisine karşılık bulur (Mitchelmore & White, 2004): Matematik, fiziksel ve sosyal dünyadan ayrılmış, kendi kendine yeten bir sistemdir. Matematik, günlük hayatta kullanılan sözcükleri kullanır. Ancak kullanılan kelimelerin anlamı günlük anlamından sıyrılarak matematiksel terimlere bağlı olarak belirlenir. Matematik kendine has nesneler içerir. Matematiğin büyük bir kısmı, matematiksel nesneler ve ilişkileri üzerinde çalışan kurallardan oluşur.

Yaşamın soyutlanmış biçimi olarak da ele alınabilecek olan matematik "öğrenilmesi gereken soyut kavramların ve becerilerin bir koleksiyonu değil, gerçekliğin modellenmesini temel alan problem çözme ve anlamlandırma sürecinde ile oluşan bilgi ve süreçte gelişen beceriler" olarak tanımlanabilmektedir (De Corte, 2004). Matematiksel soyutlamanın özel anlamını vurgulamak için matematiksel nesnelerin soyut olduğunu söyleyebiliriz. Bunların anlamları dış referanslardan ayrı sadece matematiksel dünyada tanımlanır (Mitchelmore & White, 2004). Birçok matematikçi geneli soyutlamayı bir genelleme olarak düşünür. Soyutlama matematiksel bilgilerin düzenlenmesi açısından değerlendirilecek olursa; genelleme ve yeniden kavramlaştırma (decontextualization) soyutlamanın bileşenleri olarak ele alınır. Ancak matematiksel fikirlerin gelişimi, soyutlama sürecinin derin bir kavramsal yeniden organize olmaya ihtiyaç duyduğu ortaya çıkar. Bu süreç genellikle yeni bir matematiksel nesnenin ortaya çıkması ile sonuçlanır (Ferrari, 2003).

Bilişsel ve sosyo-kültürel soyutlama görüşleri arasındaki bir diğer farklılık soyutlamanın diyalektik doğasıdır. Davydov (1990), somut ve soyut arasındaki diyalektik bağlantıyı açığa çıkaran epistemolojik bir teori geliştirmiştir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Davydov'a göre kavram, deneysel düşünce seviyesi ve teorik düşüncesinden oluşur. Deneysel düşünce seviyesindeki birinin amacı gerçek özelliklerle (maddeler arası fark ve benzerliklerin belirlenmesi) çatışmaktadır (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Başka bir ifadeyle bu seviyedeki bir bireyin amacı deneysel olarak, gözlem yaparak gerçeğin nasıl olabileceği konusunda varsayımda bulunmaktır. Yani; birebir gerçek olgularla çalışılmaz, aksine teorik düşünceye sahip birinin amacı, gerçeği göstermektir. Davydov (1990) teorik düşünmeyi: "Nesnelerden oluşan uygulamalı bir etkinliğin evrensel form maddelerinin, ölçümlerinin ve kurallarının zenginleştirilmesiyle oluşan idealleştirme süreci" olarak tanımlamıştır. Teorik düşünce, nesnelerin oluşumuna aracılık eden sembollerin açıklamalarından, evrenselliklerinden ya da Davydov'un ifadesiyle teorik gerçeği göstermesinden meydana gelmektedir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Davydov, iki düşünce seviyesinin de birbirinden üstün olmadığını amaç doğrultusunda tercih yapılması gerektiğini ifade etmiştir. Diyalektik doğası gereği tez ve anti-tez çatışması ve sonucunda sentezden doğan yeni gelişim süreci bunu gerektirir. Örneğin; eğer amaç bireye günlük kavramları kazandırmak ise deneysel düşünceyi, amaç bilimsel kavramları kazandırmak ise teorik düşünce tercih edilebilir. Hershkowitz ve diğerleri (2001)'e göre, bilimsel kavramlar soyutturlar ve soyut bilginin oluşması için diyalektik bir mantığa ihtiyaç vardır. Özellikle okulda öğrenilen bilgiler deneysel düşünme ile ulaşılamayan bilimsel kavramlardan oluşmaktadır. Bu nedenle, sınıflarda uygulanan yöntemler ile bu teoriyi geliştirip bilimsel kavramların kazanılması ve soyutlanması sürecinde kullanabilirler. Davydov'un bu teorisine bağlı soyutlama tanımı şu şekildedir: "Soyutlama, bilginin ilk ve ham haliyle başlar. Sentez yapılarak gelişir ve incelemelerden geçirilir. Yani bir form kazanır ve sonuçlandırılır. Böylelikle yeni bilgi soyutlanmış olur."

Soyutlamayı sosyokültürel bakış açısı ile değerlendiren ve diyalektik yaklaşımı benimseyen Hershkowitz ve diğerleri (2001) RBC+C soyutlama modelini ortaya koymuştur. Hershkowitz ve diğerleri (2001) kendi deneyimlerini Davydov'un kuramı ile birleştirerek soyutlama için "önceden edinilmiş matematiksel bilgilerin yeni bir matematiksel yapı oluşturmak üzere dikey olarak yeniden düzenlenmesi etkinliği" şeklinde tanımlamıştır. Bu tanıma göre etkinlik; matematiksel soyutlama süreci için tasarlanmış öğrenme ortamlarındaki öğrenci eylemlerini temsil etmektedir. Tanımda geçen "yeni bir matematiksel yapı" soyutlama sonucunda oluşan matematiksel düşünceye (kavram, bağıntı veya genellemeyi) ulaşma olarak ifade edilmiştir. "Dikey organizasyon" ise sembollerle çalışma, kavramlar arasında ilişkiler kurmak suretiyle mevcut matematik anlayışından daha formal bir matematiksel nesneye ulaşma (De Lange, 1996; Heuvel- Panhuizen, 1996) kastedilmektedir. Soyutlama süreci, bireyin kültürel çevresinden, önceki deneyimlerinden, öğrenme ortamından ve öğrenme konusunun sunulduğu bağlamdan etkilenmektedir (Altun ve Yılmaz, 2008). Soyutlama süreci doğrudan gözlenebilir bir durum olmadığından, soyutlama süreci hakkında bilgi verebilecek gözlenebilir eylemlerin tanımlanmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu çalışmadaki bilgi oluşum sürecinin incelenmesinde soyutlamanın diyalektik doğası esas alınacaktır. Bu bakımdan soyutlamanın gözlenebileceği epistemik eylemler olarak bilinen RBC+C (Tanıma, Kullanma, Oluşturma, Pekiştirme) modelinin açıklanmasına ihtiyaç vardır.

Soyutlama, matematik eğitimi de dahil olmak üzere birçok alanda ilgi odağı olmuştur. Birçok araştırmacı, ağırlıklı olarak teorik bir duruş sergilemiş ve soyutlamayı bir tür bağlamsızlaştırma olarak tanımlamıştır. Son zamanlarda, sadece soyutlamanın ne anlama geldiği değil, soyutlama süreçlerinin deneysel olarak nasıl gerçekleştiği de düşünce ürünü haline gelmiştir. Bu nedenle, teorik olmasına rağmen soyutlama hakkındaki öğrenci düşüncelerini deneysel verilerin analizinden elde edebilmek için RBC soyutlama teorisinin açıklanmasına ihtiyaç vardır.

2.4.1. RBC+C soyutlama teorisi. Matematiksel soyutlama ve bilgi oluşturma sürecini açıklayan güçlü teorilerden biri, RBC+C soyutlama teorisidir. RBC+C soyutlama teorisi, Tommy Dreyfus, Rina Hershkowitz ve Baruch B. Schwarz (Dreyfus ve diğerleri, 2015; Hershkowitz ve diğerleri, 2001; Schwarz ve diğerleri, 2009) tarafından son on beş yılda geliştirilmiş ve rafine edilmiştir. Bu çerçeveyi kullanan araştırmacılar, öğrencilerin yeni soyutlamalar geliştirdikleri süreci incelemektedirler. Teori; Tanıma (Recognizing), Kullanma (Building with) ve Oluşturma (Constructing) epistemik eylemlerinin ilk harflerinin bir araya getirilmesiyle isimlendirilmiştir.

RBC teorisi, matematiksel soyutlama süreçlerinin analiz edilmesi amacıyla Davydov (1990)'un bilgi oluşturma felsefesi ve Leont'ev (1981)'in aktivite teorisinden etkilenilerek geliştirilmiştir (Dreyfus, 2007; Özmantar & Monaghan, 2007). Soyutlamanın gerçekleşebilmesi için üç aşama gereklidir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001; Kidron & Dreyfus, 2008).

(a) Yeni bir yapıya ihtiyaç duyulması, problemdeki belirsizlik ile başa çıkmak için bir içsel motivasyonla ortaya çıkabilecek yeni yapıya olan ihtiyacın hissedilmesidir. İhtiyaç, öğrenme etkinliğinin tasarımından, öğrencinin probleme ya da konuya olan ilgisinden veya bu iki sebebin birleşiminden oluşur. Böyle bir ihtiyaç oluşmadan soyutlama sürecinin başlaması beklenmemelidir (Kidron & Dreyfus, 2008).

(b) Yeni bir soyut varlığın oluşturulması, öncesinde oluşturulmuş yapıların tanıma ve kullanma eylemleri aracılığıyla yeni soyut varlığın oluşturulması sürecinde iç içe geçmiş bir şekilde kullanılması ve bulunmasıdır,

(c) Yapının sağlamlaştırılması, yeni problemlerin çözümünde kolaylıkla kullanılabilmek için oluşan soyut varlığın pekiştirilmesidir. Kişinin tanıma eylemini kolaylaştıracak şekilde soyutlamanın pekiştirilmesidir.

Soyutlama öğrencinin problem çözme sürecinde yeni bir yöntem veya strateji kullanması ve oluşturma epistemik eylemini gerçekleştirmesi neticesinde meydana gelir (Dreyfus ve diğerleri, 2001).

Davydov'a göre bilinç iki seviyede çalışır; deneye dayalı (ampirik) düşünme ve teorik düşünmedir. Deneye dayalı düşünmenin amacı gerçekler arasındaki nitelikleri ilişkilendirmektir. Teorik düşünmede kavramların genel şekillerinin ve kurallarının yeniden üretilmesi gereklidir. Davydov'a göre günlük yaşamdaki kavram ve görüşler deneye dayalı düşünme ile, bilimsel kavram ve görüşler teorik düşünme ile elde edilir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001).

Hershkowitz ve diğerleri (2001), soyutlama tanımının daha iyi anlaşılabilmesi için teorinin beslendiği epistemolojik ilkeler ve sosyokültürel altyapıyı açıklamıştır.

Tanım içerisinde yer alan aktivite, Leont ev'in *aktivite teorisinde* yer alan anlamda kullanılmaktadır. Aktivite teorisi çerçevesinde ele alınan soyutlama, bir birey veya grup tarafından ve belli bir bağlamda bir amaca yönelik olarak devam ettirilen eylemler zinciridir.

Aktivite, bireyin istediği bir sonucu elde etmesi için üzerinde çalıştığı "eylem" sistemi olarak tanımlanabilir. Aktivite sıralı davranışlardan oluşmaktadır. Yani matematiksel soyutlama sürecinin gerçekleştiği ortamın önemine ve aktiviteyi çevreleyen koşulların tamamının göz önüne alınması gerektiğini ima etmektedir.

Bağlam, etkinliğin bir bileşenidir çünkü katılımcılar aktivitede bağlam ile ilgili davranışları gerçekleştirir. Bağlam, yapı ve insan davranışlarının anlamını çerçeveleyen birbirine bağlı faktörlerin bir araya gelmesidir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Aktivite teorisi çerçevesinde matematiksel soyutlama süreci değerlendirildiğinde; matematik bilginin oluşumunda fiziksel, sembolik ve semiyotik araçların etkilerinin vurgulandığı görülmüştür.

Bir soyutlama (veya genelleme) aktivitesinin aksine, soyutlamayı yeniden bir düzenleme süreci olarak çerçevelemenin yararı vardır. Soyutlamanın temeli olarak van Oers (1998), bağlamdan bağımsız incelemenin yanlış olduğunu ileri sürmektedir ve öğrenmenin daima bir bağlam içinde gerçekleştiği (Özmantar & Monaghan, 2007) belirtilmiştir. Örneğin, ampirik düşünce (matematiksel nesneler arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları gözlemlemek gibi), Hershkowitz ve diğerleri (2001)'in soyutlanmasında önemli bir rol oynayabilir ve böyle bir düşünce herhangi bir bağlamdan bağımsız gerçekleşemez. RBC+C teorisinde soyutlama sürecinin anlaşılmasında bağlamın önemli olduğu vurgulanmaktadır.

Dikey yeniden düzenleme terimi, öğrencilerin önceki matematiksel yapılarını yeniden düzenlenmesi sonucu yeni bir soyut yapı inşa ettikleri ve matematiksel araçlardan oluşan bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Dreyfus ve diğerleri, 2015). Dikey yeniden düzenleme olarak soyutlamanın bu tanımı Hans Freudenthal'ın dikey matematikleştirme tanımına dayanmaktadır. Gravemeijer ve Terwel (2000) matematikselleştirme sürecini daha matematiksel hale getirme, yani matematiksel bilginin; genelleme, kesinlik, doğruluk ve özlük özellikleri" gibi bir duruma uymak olduğunu ifade eder. Freudenthal, dikey matematikleştirme ile yatay matematikleştirme arasındaki farkı şöyle açıklamaktadır: Yatay matematikleştirme yaşam dünyasından sembol dünyasına doğru yol alır. Dikey matematikleştirme ise sembollerde yaşar, mekanik olarak anlaşılır bir şekilde yeniden şekillendirilmiş ve manipüle edilmiş matematiksel bilgiden oluşur (Freudenthal, 1991; Gravemeijer & Terwel 2000). Dikey matematikleştirme, matematiksel öğelerin daha soyut ve yeni bir şekle dönüştürülmesini ifade etmektedir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Diğer bir ifade ile dikey matematikleştirme, öğrencinin daha önceki yapılandırmalarını birleştirerek yeni yapılandırmalar oluşturmasıdır (Kidron & Dreyfus, 2008). Gravemeijer ve Terwel (2000) öğrencinin çözüm yöntemini bir üst düzeydeki yöntemle değiştirdiğinde dikey matematikleştirmenin açık bir şekilde görüldüğünü ifade etmektedir. Dikey matematikleştirme farklı çözüm yöntemine geçiş, sofistike bir açıklama ya da iyi organize edilmiş kısa bir çözüm yolu olabilir. Buradaki matematikleştirme süreci daha sofistike bir yaklaşımdır. Dikey matematikleştirme sürecini tanımlamak için öğrencilerin kullandıkları dil, öğrenmenin bir biçimi olarak yorumlanabilir.

Soyutlama sürecinde öğrencilerin *önceden oluşturduğu matematik bilgiler*, iki farklı şekilde tanımlanabilir. İlki, daha önce gerçekleştirilen soyutlamalarda elde edilen matematiksel yapıların yeni soyutlama sürecinde kullanılabilmesidir. İkincisi, matematiksel soyutlama sürecinde bilginin işlenmemiş ilk halinden daha gelişmiş bir yapılandırmaya doğru ilerlemesidir.

Özetle, *yeniden düzenleme* ifadesi, matematiksel ilişkilerin kurulmasını, bir matematiksel genelleme yapmayı, ispat yapabilmeyi veya problemin çözümü için yeni bir strateji keşfedilmesi gibi üst düzey matematiksel eylemleri içermektedir. *Yeniden* ifadesi ile soyutlamanın aktivitedeki katılımcılar için daha önce ulaşılabilir olmayan matematiksel yapıları ulaşılabilir hale getirmesi kastedilmektedir. Dikey matematiklestirme ise matematiksel elementlerin aktivite sürecinde bir araya getirilmeleri, elementler arasındaki ilişkilerin kurulmasıyla orijinal hallerine göre daha soyut olacak şekilde düzenlenmesi anlamına gelmektedir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). RBC+C teorisinin matematiksel soyutlama süreci beş aşamada açıklanabilir:

1. Aktivite teorisi perspektifinde ele alınan soyutlama, birey veya grup tarafından belli bir amaca yönelik olarak devam ettirilen sıralı eylemlerden oluşur.

2. Soyutlama süreci, çevresel koşullardan, öğrencinin sosyal ve matematiksel geçmişinden, sosyal etkileşimini içeren kişisel ve sosyal yapısından direkt olarak etkilenir. Soyutlama süreci bağlamdan bağımsız düşünülemez.

3. Soyutlama süreci, Davydov bağlamında teorik düşünmeyi temele alır. Ancak matematiksel yapılar arasındaki benzerlik ve farklılıkların belirlenmesinde deneye dayalı (ampirik) düşünmeyi de içerebilir.

4. Soyutlama süreci ham ilişkiler ağında oluşan soyut varlıktan, daha organize yeni yapıya doğru ilerlemektedir.

5. Yeni yapı, matematiksel elementler/yapılar/ilişkiler/objeler arasında bir takım iç bağlantıların ve yeni ilişkilerin kurulmasına dayalı yeniden düzenlemeleri içerir.

RBC+C teorisi yeni bilgi oluştururken öğrencilerin aktivitelerini yorumlamayı sağlar. RBC+C teorisi tanıma, kullanma ve oluşturma olmak üzere üç iç içe epistemik eylemin gözlemlenmesine dayanır. Bu eylemler aşağıda tanımlanmıştır.

Tanıma (R): Bu eylem, öğrencinin belli bir matematiksel formda herhangi bir yapının var olduğunu fark etmesiyle ortaya çıkar. Bu yapılar, öğrencinin daha önce bildiği bir şey olabilir.

Kullanma (B): Bu eylem, öğrencinin probleme uygun bir çözüm oluşturmak için mevcut yapısal bilgiyi kullandığında ortaya çıkar. Bir anlamda, kullanma epistemik eylemi hedefe yöneliktir ve mevcut bilginin birleştirilmesini içerebilir (ancak yeni bilgi oluşturmaz).

Oluşturma (C): Bu eylem, merkezi epistemik eylemdir ve bir soyutlamanın meydana gelmesi için gereklidir. Bir öğrenci bilgiyi inşa etmek için yeni bir matematiksel yapı kullanmalıdır. Özetle, yenilik inşa etmeyi ima eder (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Oluşturma, önceki yapıların dikey matematikselleştirme ile birleştirilmesidir. RBC+C soyutlama teorisine göre soyutlama üç epistemik[1] eylemden oluşur. Bu eylemler tanıma, kullanma ve oluşturmadır.

Pekiştirme (+C): Daha önceden oluşturulmuş matematiksel yapının bireye tanıdık gelmesi ve yeni yapının bilinçli olarak yeniden kullanılmasıdır (Dreyfus & Tsamir, 2004).

Tanıma, daha önce oluşturulan bir yapının kullanılmasıdır. Tanıdık bir matematiksel yapının farkına varılması, bu yapının karşılaşılan matematiksel bir ortamda fark edildiğinde gerçekleşir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Burada bahsedilen "yapı", matematiksel bir aktivite sonucunda ortaya çıkan (Tsamir & Dreyfus, 2005) kavram, yöntem ve/veya stratejiler olabilir.

Tanıma epistemik eylemi, öğrencinin konu ile ilgili geçmiş aktivitelerin sonuçlarını açıklayabilmesi (Schwarz & diğerleri, 2004), "tanıdık bir matematiksel yapının varlığını fark etmesidir" (Bikner-Ahsbahs, 2004, s.120). Tanımanın gerçekleştiği an, söz konusu tanıdık yapının öğrencinin zihnine girdiği ilk an değildir ve çoğu zaman deneysel düşünme seviyesinde gerçekleşir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001).

Tanıma iki farklı durumda gözlenebilir;

1. Analoji ile,

[1] Epistemik eylemler, bilginin oluşturulması ve kullanılması ile ilgili eylemler olarak ifade edilebilir.

2. Özelleştirme ile.

İçinde bulunulan epistemik eylemin ne olduğuna göre, bu durumlardan hangisinin gerçekleşeceği değişebilir. Yeni bir durumla karşılaşılıp daha önceki etkinliğin sonucuna başvurulduğunda yeni durumun bir öncekine benzeyip benzemediğine (analoji) veya önceki durum ile özdeş olup olmadığına (özelleştirme) karar verilebilir (Dreyfus ve diğerleri, 2001).

Tablo 1

RBC+C tanıma epistemik eylemi süreci

Tanıma	Analoji	Özelleştirme
Daha önce oluşturulan yapının kullanılması	Çözüm sırasında, önceki etkinliğin sonucuna başvurulması ve sonuçların benzetilmesi (x^2nin grafiği çizimi)	Dikdörtgenin çevresinin matematiksel modeli, 2a+2b=2(a+b)
Tanıdık yapının[2] farkına varma (soruda, çözümde)	a+b+2=f a+b+32=f+30	Çözüm sırasında, önceki etkinliğin sonucuna başvurulması ve özdeşliği fark etme-kullanma (–x^2nin grafiğinin çizimi)

Kullanma, verilen bir hedefi gerçekleştirmek için önceden oluşturulmuş matematiksel yapıların kullanılması (Schwarz ve diğerleri, 2004), benzer bilgilerin bir araya getirilerek bir amacı gerçekleştirmek üzere kullanılmasını ifade eder (Bikner- Ahsbahs, 2004). Kullanma, bireyin tanıdığı matematiksel yapıları yeni bilgi üretmek amacıyla ilişkilendirerek, problem çözme sürecine dâhil etme olarak tanımlanmıştır (Dreyfus, 2007). Kullanma eyleminde öğrenci problemin çözümü için mevcut yapısal bilgisini kullanır, yeni ve daha karmaşık yapı öğrenmez. Hedefe ulaşmak için yapısal elementlerin bir araya getirilmesi gerekir (Hassan &

[2] Yapı, matematiksel işlemler yapılırken ortaya çıkan kavram, yöntem ve stratejilerdir.

Mitchelmore, 2006). Örneğin, benzerlik bağıntılarını bilen bireyin $h = p.k$ bağıntısını elde ederken benzerlik bağıntılarına başvurması kullanma eylemidir. Kullanma eylemlerinde hedefe daha önceden edinilmiş veya oluşturulmuş bilgiler kullanılarak erişilir (Tsamir & Dreyfus, 2002). Kullanma eylemi ile süreçte bilinen bilgilerin yeni içerikle birleştirilmesi sağlanmaktadır ve tanıma sürecini de içine almaktadır (Bikner-Ahsbahs, 2004). Kullanma eylemi genellikle problem çözme, bir matematiksel durumu anlama veya açıklama ve süreç üzerinde dikkatle düşünme gibi bir hedefe ulaşmaya odaklanıldığında gerçekleşir. Bu hedefi gerçekleştirmek için öğrenciler stratejileri, kuralları veya teoremleri kullanabilir. Öğrenciler hedefe ulaşmak için daha önce aktiviteler aracılığıyla farkına vardıkları yapıları kullanırlar. Kullanma, öğrenciye ipucu verilmesi gibi bir kaynağın öğrenciye hatırlatılması ile de gerçekleşebilir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Öğrencinin kullanma davranışı oluşmadığında onları harekete geçirmek için bir ipucu[3] verilebilir (Dreyfus, 2007).

Tablo 2

RBC+C kullanma epistemik eylemi süreci

Kullanma		Ortaya Çıkma Durumu					
		Problem Çözme	Matematiksel Durumu Anlama	Matematiksel Durumu Açıklama	Süreç Üzerinde Düşünme		
Mevcut yapının kullanımı	Eski yapı kullanımı		Yaşamsal duruma cebirsel ifade yazma	Örüntünün kuralını bulma		Strateji	Kullanım Alanı
	Bilgileri birleştirme		$x + 4$'e uygun yaşamsal durum tanımlama	Örüntünün kuralını yazma		Kural	

[3] İpucu vererek öğrencinin çözümde cesaretlendirilmesi kullanma eylemi içinde değerlendirilmektedir.

Mevcut Yapının Farkına varma	Teorem

Oluşturma eylemi, var olan matematiksel bilgi bileşenlerinin bir araya getirilmesi ve bu bilgilerin yeniden düzenlemesiyle yeni anlam oluşturma süreci olarak tanımlanabilir (Bikner-Ahsbahs, 2004). RBC+C soyutlama teorisinin merkezi oluşturma eylemidir. Bir başka ifade ile Oluşturma epistemik eylemi olmadan soyutlama gerçekleşemez. Oluşturma eylemi sürecinde soyutlamaya ulaşılırsa, yeni bilgiyi ifade etmek için bu süreçle eş zamanlı olarak bir dil gelişir. İnşa edilen bilgiyi kanıtlamak veya açıklamak için bu dil kullanır (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Matematiksel yapının oluşumunu gözlemlemek zordur. Matematiksel bir yapının oluşturulması genellikle öğrencinin tek başına ilgili konu üzerine yoğunlaşmasıyla sağlanır.

İç İçe Geçmiş Eylemler, deneysel düşünmenin kullanıldığı tanıma ve kullanma eylemlerini gerekli kılar. Ayrıca teorik düşünmeyi gerektiren oluşturma gerçekleşmeden soyutlamanın gerçekleşmesi mümkün değildir (Yeşildere, 2006). Oluşturma, kullanma ve tanıma eylemlerini içerir. Tanıma eylemi kullanma-oluşturma eylemlerinin içinde yer alırken oluşturma eylemi bu üç epistemik eylemi de içerir. Öğrenciler matematiksel bir problem çözerken tanıma ve kullanma eylemlerini dönüşümlü olarak gerçekleştirebilir. Ancak standart olmayan bir problemi çözerken kendileri için yeni olan bir olayı bularak, bu olayın içsel yapısı üzerinde dikkatle düşünerek ve zihinlerindeki diğer bilgilerle ilişkilendirerek oluşturma eylemini gerçekleştirirler. Oluşturma eyleminin, tanıma ve kullanma eylemlerinden bağımsız olmadığı açıkça görülmektedir (Hershkowitz ve diğerleri, 2001). Bu üç epistemik eylem, oluşturmanın kullanma ve tanımaya, kullanmanın da var olan oluşturulmuş yapıları tanımaya ihtiyaç duyduğu iç içe geçmiş bir yapıda bulunmaktadır (Özmantar & Monaghan, 2008). Bu eylemler bazen sıralı bir şekilde gerçekleşirken genellikle birbirini tamamlayarak ya da eş zamanlı olarak gerçekleşir (Dreyfus, 2007).

Yeni bir yapı oluşturma ile kullanma farklı eylemlerdir. Oluşturma eyleminde bir problemi çözmek, bir çözümü veya hipotezi kanıtlamak gibi amaçlara ulaşmak için yeni bir matematiksel yapının ortaya çıkması gerekmektedir. Yani sürecin kendisi, yeni bilginin oluşturulması başlı başına amaçtır. Bu sebeple Oluşturma eylemi hedefin gerçekleşmesi için vazgeçilmezdir. Kullanma eyleminde ise hedefe daha önce kazanılan bilgilerin kullanımı ile ulaşılır. Öğrenci söz konusu amacı gerçekleştirmek için ulaşılabilir olan yapıları bir araya getirir (Dreyfus ve diğerleri, 2001). Yukarıdaki ifade edilen örneği genişletecek olursak benzerlikten yararlanıp bir dik üçgende $h^2 = h.k$ bağıntısına ulaşmak bir oluşturmadır.

Benzerlik bağıntılarını bilen öğrencinin bu bağıntılardan ve benzer olduğu bilinen iki üçgenin elemanlarından yararlanarak istenilen elemanları bulması tanıma ve kullanma eylemleri ile sınırlı bir çalışmaya örnek olarak gösterilebilir. Rutin olmayan problemlerin çözümü oluşturma eyleminin gerçekleşmesi için iyi bir fırsattır. Soyutlama sürecinde öğrenci, öğrenme geçmişinde yer alan matematiksel yapıların farkına varır ve etkinliğin gereklerini gerçekleştirmek için yeni bir yapı oluşturmak üzere bunları yeniden düzenler. Bu süreçte öğrencinin zihninde gerçekleşen eylemler bir zincir şeklinde değil iç içe geçmiş düzendedir.

Tablo 3

RBC+C oluşturma epistemik eylemi süreci

Oluşturma	Ortaya Çıkma Durumu				
	Yeni yapıya Gereksinim Duyma	Yapılar arası ilişkileri belirleme ve kullanma	İleri tanımalara hizmet eden pekiştirmenin soyutlanması	Yeni bir yapının oluşturulması (farklı/özgün dil kullanımı)	Yeni oluşturulan yapının açıklanması-kanıtlanması

Problem çözümünde gözlemlenen eylemler öğrenciye göre farklılık gösterebilir. Aynı problem bir öğrencinin tanıma eylemini gerçekleştirirken bir başka öğrencinin bilgiyi oluşturma eylemini gerçekleştirmesini sağlayabilir. Bu farlılık öğrencinin matematiksel geçmişinden, bireysel becerilerinden ve kullanılan uyarıcıların öğrencinin bilgisini harekete geçirip geçirmemesinden kaynaklı olabilir. Uyarıcılar; öğrencinin öğrenmesi ile yeni bilgi yapılarını oluşturması arasında köprü oluşturacak niteliktedir (Dreyfus ve diğerleri, 2001).

Öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerinin gözlemlenebilir eylemlerle incelenmesi, matematik öğrenmede sorun yaşayan bir öğrencinin hangi bilişsel adımda takıldığını anlamlandırmada yararlı olabilir. Matematik öğrenmede yaşanan sıkıntıların giderilmesinde bu sürecin belli bir öğrenme teorisi çerçevesinde derinlemesine incelenmesi, matematik eğitiminde yapılan çalışmalara katkı sağlayabilir.

Pekiştirme eylemi, daha önce oluşturulmuş matematiksel bilginin öğrenciye tanıdık gelmesi sürecidir. Nöro-psikologlar, pekiştirmeyi tipik olarak algısal veya motor beceriler için uzun vadeli belleğin oluşturulması olarak tanımlanmaktadır (Robertson & Cohen, 2006). RBC+C teorisinde pekiştirme farklı anlamda kullanılır ve yüksek düzeyde bir bilinç içeren süreçleri ifade eder. Uzun bir zaman dilimini kapsayan bu eylem, ancak yeni yapının bilinçli olarak yeniden kullanımı ile ilgilidir. Soyutlama sürecinde oluşturulan yeni yapıların kırılgan olduğu ve bu durumun yapıyı muhafaza etmeyi zorlaştırdığını ifade etmişlerdir (Tsamir & Dreyfus, 2005; Monaghan & Özmantar, 2006; Dreyfus, 2007). Yeni oluşmuş yapılar, pekiştirme eylemi sayesinde öğrencinin kullanılabilir bilgisinin önemli bir bileşeni olabilir. Bu durum RBC soyutlama teorisine pekiştirme (consolidation) evresini de ekleyerek model RBC+C seklinde ifade edilmesini sağlamaktadır.

Pekiştirme ile öğrenci matematiksel yapının daha kolay farkına varabilir. Yeni oluşturulmuş bir yapının pekiştirilmesi öğrencinin daha sonraki aktivitelerde bu yapıyı tanımasına ve kolaylıkla kullanmasına imkân verir (Monaghan & Ozmantar, 2006).

Pekiştirme, soyutlamayı içeren ve soyutlamanın yapıldığı konu ile ilgili öğrencinin esnek olarak düşünebildiği uzun bir süreçtir. RBC teorisi çerçevesinde pekiştirme öncesinde öğrenci düşüncelerini ifade etmek için somut örneklere ihtiyaç duyarken, pekiştirme sonrasında açıklamak için kendi örneklerini kullanırlar (Monaghan & Ozmantar, 2006). Dreyfus ve Tsamir (2004), pekiştirme eyleminin hem yeni soyutlama sürecinde hem de bu soyutlama süreci ifade edilirken gerçekleştiğini gözlemlemişlerdir. Dreyfus ve diğerleri (2006) tanımlanan üç epistemik eylemin ve pekiştirme eyleminin iç içe olduğunu ve pekiştirme eyleminin üç farklı durumda gerçekleşebileceğini belirtmiştir. Bu pekiştirme süreçleri;

a) Yapının oluşması sırasında oluşan pekiştirme,

b) Yapı üzerinde derinlemesine düşünürken oluşan pekiştirme,

c) Yeni bir soyutlama sürecinde başka yapının gerekli olduğu durumda oluşan pekiştirme.

Üçüncü durumda gerçekleşen pekiştirme, pekiştirme ve yapılandırma süreçleri arasında kurduğu güçlü bağlantılar sebebiyle özeldir (Dreyfus ve diğerleri, 2006). Soyutlamanın pekiştirilme sürecinin özellikleri; yakınlık, öz-güven, güvenirlik, değişkenlik ve farkındalık. Monaghan ve Özmantar (2006) pekiştirme eylemini bir öğrencinin verilerini içeren ayrıntılı notları incelerler ve birleştirmeyi bir soyutlama durumunda değişik tarzdaki öğrencilerin kullanımına hazır olan uzun vadeli bir süreç olarak tanımlarlar. Dreyfus ve Tsamir (2004), ampirik temelli teorik analiz sonunda soyutlamanın pekiştirilmesinde, beş bilişsel yapının varlığını ortaya koymaktadır.

Dolaysızlık (Immediacy), bir hedefi başarmak için farkına varılan veya kullanılan matematiksel yapıya ulaşmadaki hız ve doğurganlıktır.

Açıklık (Self-evidence), öğrenci için kullanılan yapının açıklığıdır. Bunu yapabilecek beceriye sahip olmasına rağmen, öğrencinin kullanılan yapıyla ilgili herhangi bir ispat veya açıklama yapma ihtiyacı duymamasıdır.

Güven (Confidence), kullanılan yapının açıklığıyla doğrudan ilişkilidir. Yapının sık kullanımı ilişkilendirmelerin yerleşmesini destekleyecek ve böylece yapının kullanımının Esnekliği (Flexibility) sağlanacaktır.

Farkındalık (Awareness), öğrencinin bir matematiksel yapıyı ustaca kullanabilmesinin yanı sıra ne yaptığının farkında olmasını belirtir. Bir yapının varlığının farkında olunması, öğrencinin ilişkili matematiksel konular üzerinde dikkatle düşünmesini, teorik bilgisini derinleştirmesini ve bu yapıyı kullanırken istek duymasını sağlar (Tsamir & Dreyfus, 2005). Ayrıca problem çözme ve yansıtıcı etkinlikle ilgili düşünme biçimlerinin pekiştirmeyi sağladığı ifade edilmektedir (Dreyfus & Tsamir, 2004).

Oluşturma, yapının özgürce ve esnek bir şekilde öğrenciye sunulmasını anlamına gelmez. Ancak özgürlük ve esnekliğe bir şekilde erişilebilir olmak pekiştirme ile ilgilidir.

Bu çalışmada önceki sayfalarda özellikleri detaylı olarak verilen RBC+C soyutlama teorisi kullanılmıştır. İlerleyen sayfalarda ise teorinin seçilme nedenleri ifade edilmektedir.

2.4.1.1. RBC+C teorisinin seçilme nedenleri. Alt bölümde açıklanmaktadır;

RBC+C teorisi öğrenci verilerini analiz ederek tanımlar ve içerdiği eylemler aracılığıyla öğrencinin yeni soyut bilgi geliştirme şekline teorik katkı sağlar. Bu eylemler, ön bilgiden-inşa etmeye kadar uzanan lineer bir yapıda değil. Aksine, birbirlerinin içinde yuvalanmış şekildedir. Eylemlerden oluşan organizasyon şeması, kullanma için ön koşulun tanıma olarak kabul edildiğini ve hem tanıma hem de kullanmanın inşa etme sürecinin ön şartı olduğunu ifade eder. Ancak, bir öğrenci inşa sürecinde, önceki yapıları tanımak ve kullanmak arasında ileri geri hareket etmek zorunda kalabilir.

Epistemik eylemlerin sınıflandırması, öğrencinin geçmiş bağlamının ve önceki anlayışlarının analizde rol oynaması anlamında dinamiktir. Bu, aynı matematiksel etkinliğin bir öğrenci için inşa edilmiş olarak kabul edilebileceği veya başka bir öğrenci için inşa edilecek olması anlamına gelir. Bunun nedeni, inşa sürecinin yeni bir soyutlamanın gelişimini ima etmesi ve öğrencilerin matematiksel uzmanlık düzeylerinin farklı olması ile açıklanabilir. Bir öğrenci için yeni olan bilgi başka birisi için yeni olmayabilir. RBC+C teorisini kullanarak öğrenci aktivitesini analiz etmek, öğrencinin ön bilgilerinin bir şekilde tanınmasını gerektirir. İç içe yapıların yeniden düzenlenmesi karmaşık ve dinamik olabilir (Hershkowitz ve diğerleri, 2007). Araştırmalar yapıların kısmi bir halde var olabileceğini ve kısmen yanlış yapıların (Tzur, 2008) öğrencilerin yanlış anlamalarını ortaya çıkarmak için açıklayıcı bir güç sağladığını ileri sürmektedir (Tzur, 2010).

Bu teorinin işlemsel ve teorik bileşenlerinden ortaya çıkan, RBC + C teorinin hem teorik çerçeve hem de metodolojik bir araç olarak kullanılabilir (Dreyfus ve diğerleri, 2015).

Bu teorinin metodolojik katkıları düşünüldüğünde çalışmanın amacı, cebirin iki temel kavramına ulaşmak için özel olarak inşa edilmiş öğrenme deneyimlerine (görev dizileri) katılan öğrencilerin matematiksel anlayışlarının gelişimini sağlamaktır. RBC+C teorisi bu çalışmayı üç sebepten dolayı desteklemektedir ve kullanım için uygundur.

İlk olarak, RBC + C teorisi cebirsel yapıya sahip içerik için inşa edilmiş olmasıdır. Hershkowitz ve diğerleri (2007) RBC + C teorisini, temel olasılıkların içerik alanını incelemek için bir çerçeve olarak kullanmış olmaları buna örnek olarak gösterilebilir:

"Olasılıkların hiyerarşik yapısı, bizim amacımız için uygundur: Temel kavramların ve diğer kavramların inşasının ve sağlamlaştırılmasının temelinde bileşik kavramlar ve süreçler vardır. Böylece, bir dizi kavram ve süreç oluşturmak, oluşan kavram ve süreçleri birleştirmek için fırsatlar sunan görevler tasarlamak mümkündür." (Hershkowitz ve diğerleri, 2007, s. 46)

Cebirsel yapı, benzer bir hiyerarşik yapıdan oluşur. Araştırmada vurgulanan iki kavram ve bunların inşası ve pekiştirilmesinde soyutlamaya uygun bileşik kavram ve süreçler vardır. RBC + C teorisi, iç içe geçmiş hiyerarşik yapıya sahip matematiksel içeriği öğrenen öğrencilerin zihinlerindeki süreci tanımlamak için tasarlandığından yapı anlamında bir çalışma içinde kullanmak uygun olacaktır.

İkincisi, soyutlamanın gerçekleşmesi için önemli bir bileşen olan görev tasarımlarının etkisi göz ardı edilemez ve matematiksel içerik ile görevlerin tasarımı arasındaki ilişkinin önemli bir odak noktası olmasıdır. RBC+C teorisini kullanan bir çalışmanın ilk adımı, inşa edilecek kavramı destekleyen bilgi öğelerinin ve bu öğelerin birbiriyle nasıl ilişkili olduğuna dair bir hipotezin açıklanması yoluyla matematiksel bir kavramın ön analizini içermelidir. Problem durumları, yeni yapıları tekrar tekrar kullanabilmek için fırsatlar sağlar her oluşan yapı sonraki inşa eylemlerinde kullanılmak üzere yapı taşlarına dönüştürülür. Başka bir deyişle, geçmişte oluşan yapılar yeni yapıların oluşumu için potansiyel bileşendir (Dreyfus ve diğerleri, 2015). Öğrencilerin yeni bilgi öğrenmelerine ve bilgiyi inşa etmelerine yardımcı olacak görevlerin tasarlanması ile ilgili bir çalışmada, öğrenmenin önemli bir bileşeni olan müfredat bağlamını vurgulayan çerçevenin kullanılması oldukça önemlidir. Özellikle cebir kavramının sarmal yapısı ve öğretim programı içerisinde tekrarlı bilgi kullanımı bu duruma oldukça uygundur.

Üçüncüsü, deneysel düşüncenin ve soyutlama süreçlerinin gelişimi çerçevesi içinde açık bir tanımanın var olmasıdır. Deneysel süreç, öğrencilerin matematiksel nesneleri karşılaştırılması ve sınıflandırılması olarak ifade edilebilir. Hershkowitz ve diğerleri (2001)'e göre soyutlamanın gelişmesinde teorik düşünce gereklidir ancak benzerlik ve farklılıkları gözlemlemeye katkı sağlıyacağı için deneysel düşüncede göz ardı edilmemelidir. Bu çalışmada learning trajectory, stratejik çeşitlilik kullanılarak tasarlanan bir dizi görev içindeki benzerlik ve farklılıklara katılan öğrencilere dayanmaktadır. Bu tasarımın amacı, daha önce gizli[4] olan cebirsel bir formu tanımlamak için cebirsel ifadelerin bileşenlerini fark etmeye odaklanmaktır. Öğrencinin *ihtiyaç duyduğu* soyutlamanın geliştirildiği süreçte oynadığı merkezi roldür. Bu süreçlerden ortaya çıkan öğrenme, bu bölümün sonunda tartışıldığı gibi,

[4] Gizli, öğrencilerin görev sırasına girmeden önce bu yönleri tanıdıkları ve inşa etmedikleri anlamındadır. Daha az şeffaf terimini de kullanabiliriz.

genelleştirici bir asimilasyon şeklidir. Bu nedenlerden ötürü, RBC+C'den yeni deneysel süreçlerin ve yeni soyut bilginin gelişmesinde önemli bir rol oynayabileceği perspektifini bu çalışma önemli bulmaktadır.

Öğrencinin kendi dünyasında biriktirdiği matematiksel bilgiler, soyutlamanın başlangıcı için temel oluşturur. Ancak, öğrenci yeni bir yapıya ihtiyaç duymadan soyutlama gerçekleştiremeyecektir. Bahsedilen ihtiyaç, çelişki, sürpriz ya da belirsizlik gibi engellerin üstesinden gelmek için içsel bir motivasyondan kaynaklanabilir. Eğitimciler, bu tür engelleri uygun faaliyet dizileri tasarlayarak ve bilerek ayarlayabilirler (Hershkowitz ve diğerleri, 2001).

Soyutlama, doğal olarak cebirsel düşüncenin yinelenen bir temasıdır (Horgen ve diğerleri, 2018). Pek çok araştırmacı soyutlamaya bilişsel bir durum ithaf ederken Schwartz, Herschkowitz ve Dreyfus (2002) soyutlamaya bağlama bağımlı bir durum atamışlardır. Ortaokul düzeyinde öğrenciler ile bir cebirsel ispat gerektiren soyutlamanın oluşumu için RBC+C teorisini kullanarak analiz gerçekleştirmişlerdir. Pedagojik bir araç olarak belirsizliği içinde bulunduran ve bireye içsel motivasyon sağlayan görev genellikle problem çözme olarak adlandırılır. Bu çalışmada, tahmini öğrenme yörüngesi kullanılan tasarımların, özellikle öğrencilerin matematik dersinde farklılıklar sergiledikleri ve farklı ortamlarda çalıştıkları durumları ortaya çıkararak anlamlı matematik öğrenmenin temeli olabileceği perspektifine dayanan farklı bir yaklaşım benimsenmiştir. Bu yaklaşım, öğrencilerin mevcut anlayışlarını ve yeni anlayışlar için neler yapabileceklerini açıkça ifade eder (Simon, 2013). Buna ek olarak, içsel motivasyon sağlayan belirsizlik öğrencinin bir şey öğrenmesi için ihtiyaç oluşturabilmesine rağmen çözüm için gerekli olan süreci açıklayamamaktır.

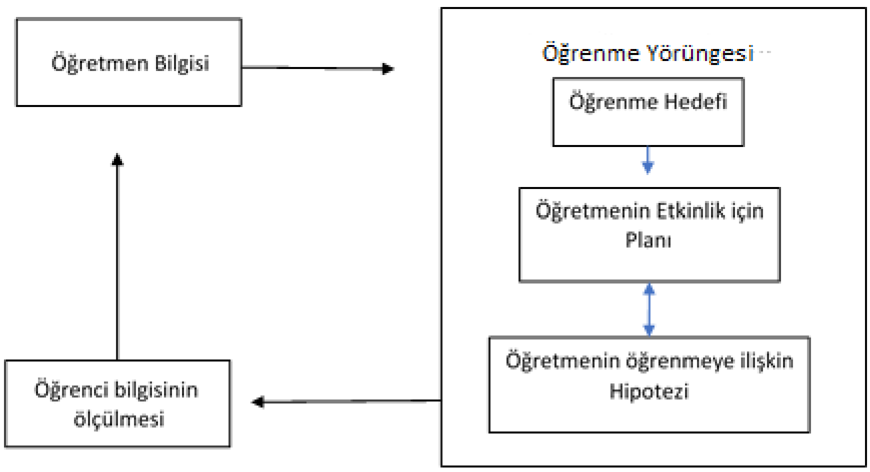
2.5. Tahmini Öğrenme Yörüngesi (TÖY)

Tahmini öğrenme yörüngesi matematik öğretim döngüsü planlanırken bir çatı olarak incelenmektedir. Bu teorik çatı yapılandırmacı kuramın ilkeleri ve standartları dikkate alınarak kurgulanan ders üretim süreci olarak görülmektedir. Bir tahmini öğrenme yörüngesi, öğrencilerin öğretim sürecine ne eklediğini açıklar. Ayrıca matematiksel hedefi kavramla ilişkilendirir ve öğrencilerin basit anlayışlardan daha karmaşık anlayışlara geçerken karşılaşabilecekleri simge ve engelleri tasvir eder (Confrey, 2016). Öğrencilerin doğal gelişim süreçleri içerisinde ilerlemelerini takip eder, düzenler ve destekler.

İyi bir matematik eğitiminin üç bileşeni (Zembat, 2016); matematiğin kendisi (matematik kavramların iyi anlaşılması), öğrenim (bu kavramların öğrenimi) ve öğretimdir (kavramların başkasına öğretimi). Simon (1995) bu bileşenleri birbiri ile ilişkilendirerek matematik öğretim döngüsü adını verdiği bir teorik çatı oluşturmuştur.

Şekil 1

TÖY'de matematik öğretiminin döngüsü



Simon (1995) için hedeflerin ve öğrenme faaliyetlerinin değerlendirilmesi, TÖY olarak bilinen, matematiksel öğrenme döngüsünün temel bir parçasıdır. Terim, öğrenmenin oluşma biçimini belirtmek için kullanılır. TÖY, öğrenci bu şekilde öğreneceği varsayımını yalnızca uygulandığında doğrulayabilecek olarak görmektedir. Başarılı değilse, onu yine de varsayımsal bir nitelik kazanacak şekilde değiştirebilir. Böylece, başarıyla uygulanana kadar öğrenme süreci içinde devinim olacaktır.

TÖY öğretmenler için üç bileşenden oluşmaktadır; öğrencinin öğrenimine ilişkin hedefin belirlenmesi, öğrenimi desteklemek için etkinlikler yani planlama, öğrenim sürecinin nasıl olacağına ilişkin hipotezlerdir. Öğretmenin belirlediği hedefler diğer iki bileşenin belirleyicisi olsa da yapılacak etkinlik ile birlikte sınıf içi çalışmalar, öğrenim sürecine ilişkin hipotezler birbirine doğrudan bağlıdır. Üç bileşenden herhangi biri, uygulama sürecinde değişebilir, gelişebilir. Bu durum Simon (1995)'un belirttiği sosyal yapılandırmacılığa uygundur.

TÖY uygulanırken dikkat edilmesi gereken çeşitli durumlar ortaya çıkar. Birincisi, öğrencinin sorunun üstesinden gelememesidir. Öğrenci matematiksel problemi çözdüğü zaman, kendisi için büyük bir eğitim ilerlemesi sağlar. Bu, öğrencinin Simon (1995)'un anlayışa ilişkin işlemsel tanım olarak gördüğü zorlukların üstesinden geldiği anlamına gelir. Buna ek olarak, onun için, anlayış, veri toplama ve hipotez oluşturma sürekli bir süreçtir. Öğrenciler matematiği öğrenince, öğretmen öğrencilerin matematiksel düşüncesini öğrenir ve öğretmen matematiği öğrenmeye devam eder. Bu durum TÖY uygulanırken oluşur. Planlanan öğretim, TÖY aracılığıyla verilir.

Simon ve Tzur (2004), öğrenme sürecinde bulunan bileşenlerin geliştirilmesi ve etkinliklerin veya görevlerin seçimi için daha pratik bir altyapı oluşturmaktadır. TÖY yapısının geliştirilmesine ihtiyaç olduğunu ifade eden, Gomez ve Lupianez (2007)'e göre öğrenme sürecinin bileşenleri ve görev seçimleri için daha pratik bir tasarım düzeyi gerekliliğidir. Simon (1995)'e göre öğretmen bilgisi döngünün kritik bileşenidir. Çünkü öğrenme hedefinin belirlenmesinde, sınıf içi etkinliklerin organize edilmesinde ve beklenen hipotezlerin oluşturulmasında tüm süreç bu bileşenin gücünden beslenmektedir.

Simon'ın (1995) TÖY yapısının geliştirilmesi, matematik derslerinin planlanmasındaki kilit yönlerin açıklamasını sunmuştur. Bununla birlikte, TÖY'ün yapısı, öğrenme süreci hakkında düşünme, matematiksel görev seçimi veya matematiksel görevlerin öğrenme sürecindeki rolü hakkında hiçbir çerçeve sağlamamıştır. Böyle bir çerçeve, faydalı TÖY'lerin oluşturulmasına önemli ölçüde katkıda bulunabilir (Simon ve Tzur, 2004).

Öğrencilerin öğrenmesine yoğunlaşarak bu süreçte hangi yolları takip ettiklerini anlamlandıran öğrenme yörüngesi son yıllarda araştırmacılar, Simon'un (1995) yapısını, öğrenci düşüncesinin zaman içinde nasıl geliştiğine dair deneysel olarak desteklenen açıklamaları içerecek şekilde genişletmişlerdir (Camci ve Tanışlı, 2020; Clements ve Sarama, 2004; Confrey, 2016; Confrey, Toutkoushian &Shah, 2020; Deniz ve Kabael, 2020; Daro, Mosher ve Corcoran, 2011; Ivars, Fernández & Llinares, 2020; Wilson, Sztajn, Edgington ve Confrey, 2014; Weber, Walkington ve Mc Galliard, 2013). Öğrenme yörüngesi, Simon (1995)'un çalışmasını temel alır. Simon (1995)'un öğretmenin, öğrenmenin ilerleyebileceği yol hakkındaki öngörüsünü ifade eder. Bireysel olarak öğrencilerin ilerlemesinin önceden tahmin edilememesi nedeniyle, bu yörüngeleri varsayımsal olarak algılamaktadır (Sztajn ve diğerleri, 2012). Simon, bu yörüngelerini tahmini olarak adlandırmasına rağmen, son zamanlarda matematik eğitimi araştırmacıları, deneysel verilere dayanan öğrenme yörüngelerini (ÖY) ifade etmişlerdir. Confrey ve diğerleri (2009), ÖY'leri öğrencinin öğretim yoluyla karşılaştığı sıralı yapılar ağının, deneysel olarak desteklenen bir açıklaması olarak nitelendirmiştir.

Corcoran ve diğerleri (2009), öğrencilerin bilişsel ilerlemelerinin öğrenme haritasında gösterildiğini, ÖY'nin de öğrencilerin matematiksel olarak nasıl öğrendiklerini ve sebeplerini belirleyen gerçek araştırmalara dayandığını belirtti. Clements ve Sarama (2004) ÖY'lerin "matematiksel bir hedef, öğrencilerin bu hedefe ulaşmak için geliştirdiği gelişimsel bir yol ve bu yoldaki düşünme düzeylerinin her biriyle eşleşen bir dizi öğretim etkinliği veya görevi olmak üzere üç bölümden oluştuğunu öğrencilerin yüksek düşünme seviyelerini geliştirmelerine yardımcı olduğunu belirtmiştir. ÖY'ler için çok fazla tanım olmasına rağmen, ÖY'lerin ortak özellikleri literatürden derlenebilir. ÖY'ler belirli bir matematik alanına dayanmaktadır (Daro ve diğerleri, 2011; Clements & Sarama, 2004), öğrencilerin düşünme ve öğrenme ilerlemeleri hakkındaki deneysel (ampirik) verilerden geliştirilmiştir (Clements & Sarama, 2009; Confrey ve diğerleri, 2009), öğrenciler ve matematiksel kavramlar arasında etkileşim oluşturmak için görev kullanmanın önemini vurgular (Battista, 2011; Clement & Sarama, 2004; Wilson ve diğerleri, 2013) ve ÖY'ler doğrulama olarak adlandırılan revizyonlar ve iyileştirmeler gerektirir (Confrey ve diğerleri, 2012; Duncan & Hmelo-Silver, 2009). Buna ek olarak tüm ÖY'ler öğrencilerin matematiksel anlayışlarının ve düşüncelerinin nasıl geliştiğini inceler. Ayrıca, LT'ler matematiksel öğrenmenin nerede başladığını ve öğrencilerin matematiksel anlama açısından nerede olduğunu belirtir (Confrey ve diğerleri, 2012).

Literatürde öğrenme yörüngesi öğretim standartlarının belirlenmesinde (Corcoran ve diğerleri, 2009) ve öğretim programlarının geliştirilmesinde (Clement & Sarama, 2009), değerlendirme sürecinde (Battista, 2004; Confrey ve diğerleri, 2009) teorik bir çerçeve olarak kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca sınıf içi uygulamalarda (Sztajn ve diğerleri, 2012), öğrencilerin öğrenme düzeylerini belirlemede (Simon, 1995; Clement ve Sarama, 2004) ve öğretmenlerin mesleki gelişimlerinde (Wilson ve diğerleri, 2013) kullanılmaktadır.

İfade edilen teorik perspektiflerin her biri, matematik öğrenme süreciyle ilgili bazı kavramsallaştırma ve varsayımları içerir. Bu varsayımlar, belirli bir matematik kavramını öğrenmenin ne anlama geldiğini belirten yörüngenin veya ilerlemenin gelişimini şekillendirir. Bu bakış açısından kaynaklanan öğrenmenin ortaya çıkan temsilleri, kavramsal gelişimin tanımlanması ve anlaşılması açısından oldukça farklılık gösterebilir. ÖY yapısının dört prensibi Weber ve diğerleri (2015) tarafından ifade edilmiştir:

1. Bir ÖY'nin oluşturulması, öğrencilerin ön bilgilerinin anlaşılmasına dayanır.
2. ÖY, belirli matematiksel kavramların öğrenilmesini planlamak için iyi bir araçtır.

3. Matematiksel görevler, belirli matematiksel kavramların öğrenilmesini destekleyen araçlar sunduğu için öğretim sürecinin önemli bir parçasıdır.

4. Öğretim sürecinin varsayımsal ve belirsiz olan doğası nedeniyle, öğretmen ÖY'leri düzenli olarak değiştirebilirler.

Daro ve diğerleri (2011) farklı matematiksel konular için on sekiz farklı ÖY bulunduğunu belirtmiştir. Bu ÖY'ler arasındaki ortak özelliklere rağmen, mevcut ÖY'ler hala matematiksel içerikleri, yanlış anlamaları teşhis etme yöntemleri, hedeflenen yeterlilik seviyelerini tanımlama konularında farklılıkları bulunmaktadır (Daro ve diğerleri, 2011). Confrey ve diğerleri (2009) rasyonel sayı mantığının temelini oluşturan eşitleme için 8. sınıflarda 16 yeterlilik düzeyinde matematiksel düşünme içeren bir ÖY geliştirmişlerdir. Nguyen (2010) uzunluğu ve alan konusu üzerine bir ÖY tasarlamıştır. Daha kapsamlı olarak, Clements ve Sarama (2009), anaokulundan 8. sınıfa kadar devam eden öğrenme süreci için sayılar, işlemler ve geometri gibi çeşitli matematik konuları hakkında 10 ÖY hazırlamıştır. Ancak ÖY'lerin varlığı öğretmenler için uygulama konusunda önemli endişeleri de beraberinde getirmiştir. (a) Öğretmen bu ÖY'leri derslerinde nasıl kullanacağı ve (b) ÖY'leri öğretmenin öğretim programına nasıl entegre edeceği konusunda endişelerdir. Bu endişeler, mevcut ÖY'lerin daha fazla deneysel incelenmesinin bir ihtiyaç olduğunu gösterdi. Bu girişimler öğreticilere öğretim amacıyla çoklu ÖY kullanma imkânı sunmayı amaçladı (Daro ve diğerleri, 2011; Sztajn ve diğerleri, 2012). Bu ihtiyaç, Öğrenme Yörüngeleri Tabanlı Öğretim (Learning Trajectory Based Instruction) adlı yeni bir teori ortaya çıkmasını sağlamıştır.

2.5.1. Öğrenme yörüngeleri tabanlı öğretim. Öğrencilerin matematiksel düşüncelerini anlama ve öğretimin temelini öğrenme, matematik öğretmenleri için yeni eylemler değildir. Bilişsel olarak yönlendirilmiş öğretim ile ilgili yaptıkları çalışma bu yaklaşımın iyi örneklerindendir (Carpenter, Fennema ve Franke, 1996).

Schoenfeld (1998), öğretimin merkezi yönlerini “bulmacanın parçalarını” bulmaya benzetmiş ve bunun önemli olduğunu belirtmiştir. Ancak “parçaların nasıl bir araya getirildiğine” ilişkin bir çerçeveden bahsetmemiştir. İlerleyen yıllarda, Schoenfeld (2011), öğretimin merkezi yönlerini betimlemek için tahminlere olanak sağlayan açıklayıcı bir çerçeveye ihtiyaç olduğunu belirtmiştir. Öğrenme yörüngeleri tabanlı öğretim (ÖYTÖ) çerçevesini tanımlayarak, öğretme araştırmalarındaki çeşitli çerçeveleri geliştirmek ve birleştirmek için ÖY üzerine araştırmaları kullanarak bulmacayı (bulmacanın parçaları) ifade etmemize olanak sağlayan bir yaklaşım geliştirilmiştir (Sztajn ve diğerleri, 2012). Bu bakımdan, LTBI'yi öğretim (öğretme teorisi) için açıklayıcı bir çerçeve olarak inceleyebiliriz.

Bütün bu çalışmalar, ÖY'lerin öğretmenlerin mesleki gelişimlerinde kullanılması sağlanmıştır. Mesleki gelişimin bir parçası olduğu için öğretmenlerle yapılan bazı çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalar spesifik olarak ÖY'ler ile bağlantılı özel bir teorik yaklaşım gelişmemiştir. Matematiksel bilginin öğrencinin zihninde nasıl geliştiğinin derinlemesine incelenmesi, ÖY’ye ilişkin teorik bir çerçevede incelenmedi. Ancak, bu çalışmalar ÖYTÖ'nin teorik çerçevesinin şekillendirilmesine katkıda bulunmuştur. Sztajn ve diğerleri (2012), ÖYTÖ'yı “Öğretim konusundaki araştırmalardan yararlanarak çeşitli çerçeveleri geliştirmek ve birleştirmek için ÖY'ler üzerinde araştırma yapmak” olarak tanımlamıştır (s.152). ÖYTÖ, öğrencilerin öğrenmelerini merkezi bir yapı olarak ele almaktadır. Öğretim sürecinde öğretmenlerin ÖY bilgisi, öğretim kararlarını büyük ölçüde şekillendirmektedir (Sztajn ve diğerleri, 2012).

Öğretmenlerin öğrencilerin öğrenmelerinin nasıl geliştiği hakkında düşünmelerine yardımcı olacak bir çerçeve olarak düşünülmesine rağmen, doğrudan bir sonuç vermemektedir. Varsayımsal doğası, hiçbir öğretmenin ya da araştırmacının öğrenmenin tam olarak nasıl ilerleyeceğini bilmediği açıklamaktadır. Başka bir deyişle, öğretmenler teorik ve deneyimsel öğrenci ve içerik bilgisinden beklenen eğilimlere güvenirek öğretim sürecine yön vermeye çalışırlar. ÖY'leri ampirik olarak inşa etmek için araştırmacılar, öğretim için faydalarını incelemeye başlamıştır.

Tablo 4’de ÖYTÖ'nün kategorileri derinlemesine incelenmiştir. Bu alt yapılar bu çalışmanın ana ilgi alanı olan çeşitli bilgi türleridir. Sztajn ve diğerleri (2016)’nin araştırma merkezli olarak öğrenme yörüngelerinin uygulamala ilkelerini tanımlaması Tablo 4’de görülmektedir. Öğretmenlerin ve araştırmacıların öğretim sürecinde ÖYT’lerini verimli şekilde kullanmaları için uygulama ilkelerine ihtiyaçları vardır.

Tablo 4

Tahmini öğrenme yörüngesinin uygulama ilkeleri

Kategori	ÖYTÖ’de Yorumlanması	Kategori	ÖYTÖ’de Yorumlanması
İçerik ve Öğrenci Bilgisi	Öğrencilerin ilerlediği yörüngelerin seviyeleri; gelişimi destekleyen bilişsel adımlar ve öğrencilerin belli görevlere yaklaşım şekilleri hakkında bilgi.	Ortak İçerik Bilgisi	Yörüngenin düzeylerinde temsil edilen kavramlar ve her bir düzeyin matematiksel müfredata uygunluğu hakkında bilgi.
Öğretim ve İçerik Bilgisi	Öğrencilerin harita boyunca bilişsel gelişimlerini destekleme yolları; Yörünge ve içerik bakımından öğrencileri teşvik etmek için görevlerin nasıl seçileceği ve hedefleneceği bilgisi.	Özelleştirilmiş İçerik Bilgisi	Öğrencilerin önerdikleri çeşitli çözümlerin ve temsillerin uygunluğunu test etmek için matematiksel perspektifi kullanma bilgisi.

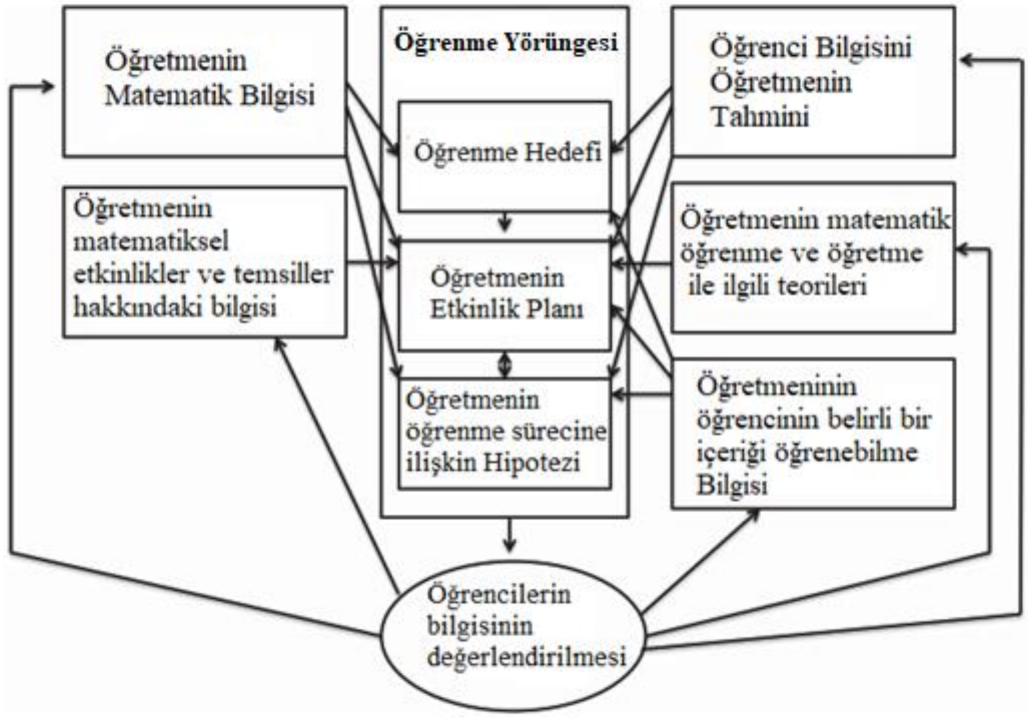
Müfredat ve İçerik Bilgisi	Matematiksel müfredatı seçmek ve öğrenci katılımını nasıl sağlama bilgisi.	Yatay İçerik Bilgisi	Öğrenme sürecinin ilerlemesinin matematiksel amacı, belirli bir yörüngenin sonucunda soyutlamaya ulaştırma bilgisi.
Görev Özellikleri	Görev (etkinlik, problem) önceki deneyimlerdeki farklılıklara rağmen tüm öğrencilerin onunla etkileşimde bulunmalarını sağlamak için çeşitli bilişsel yeterlilik seviyesi.	Matematiksel Görevin Bilişsel Gereksinimi	Görevin matematiksel hedefleri ile öğrencilerin mevcut yeterlilik seviyeleri arasındaki ilişki.
Sezgi Yoluyla Kontrol	Öğrencilerin mevcut kavram yanılgılarının neler ortaya koyduğunu göz önünde bulundurarak, yörüngedeki farklı yeterlilik düzeyleriyle ilişkili stratejilerin ve yanlış anlamaların çeşitliliğinin incelenmesi.	Seçme ve Sıralama	Öğrencilerin, çalışmalarını organize etmek için rehber olarak yörüngenin üstündeki daha büyük matematiksel genellemeye doğru ilerlemeyi bilme.
İzlemek	Öğrencilerin biliş modelinin izlenmesi, nasıl ortaya çıktığını inceleme.	İlişkilendirme	Öğrencinin yaklaşımları arasında ortaya çıkan ilişkileri açıklamak ve matematiksel fikirler geliştirmeye işaret etmek.

Kanıt Çıkarmak	Öğrencilerin bilişsel süreçlerinin yörüngedeki yapıya ulaştırmaları için yardımcı olan araştırma soruları sorma.	Geri Bildirim	Takip soruları ve yapıyı inşa edecek, öğrencilerle etkileşime odaklanacak stratejiler ve kavram yanılgılarının belirlenmesi.

Etkili öğretmenler, bilişsel karmaşıklığa uygun seviyedeki öğrenciler için matematiksel görevleri içeren dersler planlar (Simon & Tzur, 2004; Stein ve diğerleri, 2009). Bu öğretmenler, ilişkili ve ilişkisiz işlemsel süreçlerin ve nihayetinde kavram ve süreçleri gerçekleştirmek için gerekli bilişsel görev seviyelerinin farkındadır. En üst seviyedeki, görevler öğrencilerin kavramları keşfetmelerini ve matematiksel kavramlar arasındaki ilişkileri düşünmelerini gerektirir. Bu görevlerin içeriği genellikle tahmin edilemez ve öğrencilerin bilişsel olarak ilerlemelerine katkı sağlaması beklenir. Etkili öğretmenler, görevlerin karmaşıklığını ve soyutlama sürecini düşünür ve öğrencileri için gelişimsel olarak uygun olan görevleri belirlerler (Clements & Sarama, 2004; Stein ve diğerleri, 2009). Ders planlama sürecinde öğretmenler, bilişsel olarak karmaşık matematiksel görevleri belirlerken öğrenciler için öğrenme hedeflerini göz önünde bulundurmalı ve öğrenme için bir yörünge planlamalıdır (Simon & Tzur, 2004; Stein ve diğerleri, 2009). Öğrenme için bir yörünge belirlenirken öğretmenlerin "öğrencilerin sahip olduğu ön bilgilerine göre oluşturdukları matematiksel kavramlara hâkim olması" gerekir (Simon & Tzur, 2004, s. 95). Öğretmenlerin öğrenci anlayışlarını anlamaları için genellikle öğrencilerin çalışma yöntemlerinde farklılıklar araması ve bunun için sözlü olarak ifade ettikleri şeylerin ötesine bakmaları gerekir (Steffe & Thompson, 2000). Öğrencilerin düşüncelerini anlamak, kavramlarının modellerini oluşturmak için eylemlerinin ve kelimelerinin kavramsal olarak analiz edilmesini gerektirir. Öğretmenler, öğrencilerin düşünme modellerini yorumlarken, öğrencilerin nasıl öğrenebilecekleri hakkında varsayımlar üretebilirler. Öğrencilerin akıl yürütmelerini esas alarak öğretme eyleminde bulundukları için varsayımlarını test edebilir ve düzeltebilirler. Aşağıdaki Şekil 2'de matematik öğretim döngüsü içinde öğrenme yörüngesi ile öğretmen- öğrenci bilgilerinin ilişkilendirilmesine yer verilmektedir.

Şekil 2

Matematik öğretimi döngüsü içindeki TÖY



Öğrencilerin cebirin temel iki kavramı olan denge ve değişkeni nasıl soyutladıklarını belirlemek için yapılan bu çalışmada daha olgun ve açıklanabilir veriye ulaşması için derslerin içerikleri öğretmen ve araştırmacı tarafından ÖY ye uygun olarak dizayn edilmiştir.

Ders planlama, varsayımsal öğrenme yörüngesinin yapısı içerisinde yer alan kilit bir bileşendir ve bu yapı matematik öğretimi döngüsünün uygulandığı kurumsal bağlamda yer almaktadır. Kurumsal bağlamın ilişkilerini ve kısıtlarını anlamak, TÖY'de ders planlamasına nasıl aracılık edildiğini anlamak için önemlidir.

Cebirsel düşünmenin gelişimi, genç öğrencilerin matematiksel gelişiminin önemli bileşenleri olan örüntülerin tanınmasına ve analizine bağlıdır (Sarama & Clements, 2009, s.319). Sayılmadan bilinen örüntüler, sayma sayılarındaki örüntüler, tekrarlı sayma örüntüleri, sayısal örüntüler, aritmetik örüntüler, mekânsal örüntüler ve dizi örüntüler, genelleme de tipik erken çocukluk uygulamasıdır (Wu, 2009). Örüntü bulma, görünüşte örgütlenmemiş durumlara düzen, uyum, öngörülebilirlik getirme ve doğrudan elde edilebilecek bilgilerin ötesinde genellemeleri kolaylaştırmak için matematiksel düzen ve yapı arayışıdır (Sarama & Clements, 2009, s. 319). Bir süreç olarak, matematiği anlamada bir zihin alışkanlığı olan Mason, Stephens ve Watson (2009), örüntü tanımanın örüntülerin var olduğu ve durum gibi görünen şeylerin durum olmaya devam edeceği varsayımına dayandığına işaret eder. Öğrenciler için örüntüleri araştırmak bazen özeldeki geneli görmek veya diğer zamanlarda genel bir matematiksel gerçekliğin bir örneği olarak özel bir durum görmek anlamına gelir (s. 21). Baroody (2003), öğrencilerin örüntü bilgilerini cebirsel olarak aritmetik düşünmeye genişleten sayısal örüntüleri bulmayı ve genişletmeyi öğrendiklerini belirtmiştir. Bu durumun öğrenciler için otomatik olarak gerçekleşmediğini büyük ölçüde öğretim bağlı yöntemine olduğunu bilinmektedir. Öğrencilerin aritmetik problemleri icat etme, öğrenme, uygulama, haklı çıkarma ve başka türlü sebep olma kabiliyeti, cebirsel düşünmenin, çocukların matematik öğrenmelerinin örtük fakat önemli bir bileşeni olabileceğini göstermektedir (Sarama & Clements, 2009). Öğrenciler bir durumun her iki tarafında da denge ölçeklerinden nesne kümelerine, sözlü problemlere ve yazılı denklemlere eşdeğer dönüşümler yapıldığında eşitliği koruduğunu kabul edebilir (Schliemann, Carraher, Brizuela ve Jones, 2007).

Molina, Castro ve Mason (2007)'e göre, öğrenciler ilişkisel olarak düşündüklerinde, sayı cümlesini bir bütün olarak ele alırlar, daha sonra verimli çözümler üretmek için yapıyı, önemli unsurları veya ilişkileri analiz eder ve bulurlar. Carpenter ve Franke (2001) ve Stephens (2008) tarafından yapılan araştırmalar, öğrencilerin eşittir işaretini ilişkisel bir sembol olarak gördüklerinde, ifadenin yapısına odaklandıklarında ve sayı cümlesini çözmek için makul stratejiler gerçekleştirdiklerinde ilişkisel düşünmenin gerçekleştiğini göstermiştir. Bu anahtar fikirler, genelleştirilmiş aritmetik olarak ortaokul cebir ders kitaplarının çoğunda yer alır. Bu fikirlerin takdir edilmesi, anlaşılması ve kavranması, ortaokul boyunca cebirsel düşüncenin sürekli gelişimi ve başarısı için gereklidir. Sonuç olarak TÖY kavramının bu alana önemli katkı sunacağı düşünülmektedir. Ayrıca, TÖY kendi yapısını yansıtabildiği, matematiksel hedefleri, öğrencilerin düşünme modelleri, öğretmenlerin ve araştırmacıların öğrencilerin düşünme modellerini eşzamanlı değerlendirilmelerini, öğretim görevlerinin dizilerini ve bunların etkileşimlerini içerdiği için diğer modellerden farklı süreçlerinde detaylı analiz seviyelerini gözlemlemeyi kolaylaştıracaktır (Clements & Sarama, 2004).

Öğrenme yörüngelerinin öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl anladıkları ile ilgili model oluşturabilmede, öğretimler ile öğrencilerin matematiksel anlayışlarını ilişkilendirebilmede ve öğretilecek matematiksel kavramın derinlemesine anlaşılabilmesinde destek olduğu bilinmektedir (Mojica ve diğerleri, 2010; Wilson ve diğerleri, 2013). Öğrenme yörüngeleri aracılığıyla öğrencilerin matematiksel kavramları açıklamada matematiksel bir dil olarak kullandığı ve bu sayede öğrencilerin katıldıkları etkinlikleri daha iyi organize edilebildiği, öğretmenin öğrencilerin anlayışlarını daha başarılı bir şekilde yorumlayabildiği sonucuna da ulaşılmıştır (Tanışlı, 2019). Bu düşünceler perspektifinde cebir kavramları soyut ve karmaşıktır. Özellikle bu soyut düşünme biçimi ile ilk defa karşılaşan öğrencilerin bir handikapları oldukça açıktır. Bu çalışmanın öğrencilerin zihninde inşa edilen cebirin iki temel kavramı olan denge ve değişkenin nasıl oluştuğuna odaklandığı düşünülürse, öğrencilerin cebir kavramlarını nasıl öğrendiği sürecini açıklamada ve bu kavramları öğrenmelerinde hem bir sistematiklik oluşturmak hem de kavram yanılgılarını bertaraf etmek için bir öğretim modeli olarak öğrenme yörüngelerinin kullanıldığı görülecektir.

2.6. Alışkanlıklar

Yapılan çalışmalarda, zihnin cebirsel ve geometrik alışkanlıklarının gelişiminin bir süreç içerisinde olduğu ifade edilmiştir (Alkan & Bukova Güzel, 2005; Arslan & Yıldız, 2010; Driscoll ve diğerleri, 2007; Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2003; Köse & Tanışlı, 2014). Matematiksel Düşünme (MD) ile zihinsel alışkanlıklar iç içe geçmiş süreçlerdir (Sezer, 2019). Öğrencilerin MD süreçlerini anlayabilmek için, onların zihinsel alışkanlıklarının belirlenmesi iyi bir seçimdir (Köse & Tanışlı, 2014). Öğrencilerin cebirsel ve geometrik alışkanlıkları geliştirildiğinde MD becerilerinin de gelişmesi beklenen bir durumdur.

Alışkanlık, günlük hayatımızın rutini içerisinde geliştirdiğimiz bir olgular bütünüdür. Tercihlerimizin genelleştirilmesi ile elde edilebilir bir rutin olarak tanımlayabiliriz. Örneğin nasıl yemek yediğimiz, nasıl spor yaptığımız ve bu nasılları yaparken neleri tercih ettiğimiz sorularına genellenmiş bir cevap verebilmek alışkanlıkları tanımlar. Belirli bir süre içerisinde bireyde otomatikleşen davranışlar olana kadar sürekli gelişir. Zihnimiz, mevcut bilgilerini kullanarak süreci gerçekleştirmek ve günlük yaşantımızda bir alışkanlık hâline getirmek için sürekli problem çözme uğraşı içerisindedir. Bu uğraşların zihin içerisinde kalıcı bir yere sahip olması öğrencilerin öğrenmelerine etki etmektedir (Jones, 2014). Belirli durumlar karşısında belirli bir biçimde zihinsel olarak davranma eğilimi alışkanlıktır (Lim, 2008). Eğitim ve öğretim alanında alışkanlıklar, zihinsel alışkanlıklar olarak bilinmektedir. Zihinsel alışkanlıklar alanyazında farklı tanımlara sahiptir: Costa ve Kallick (2008) zihinsel alışkanlıkları, deneyimli kişilerin bir problemle karşılaştıklarında ve çözümün net bir şekilde görülemediği durumlarda ortaya çıkan özellikler olarak tanımlamaktadır. Cuoco, Goldenberg ve Mark (1996)'na göre ise zihinsel alışkanlık, yeni karşılaşılan problemler karşısında farklı çözüm yolları denemeyi sağlayan mental beceri ve alışkanlıklardır. Leikin (2007), zihinsel alışkanlıkların problemlerin çözümünde doğru sonuca ulaşmada uygulanabilecek farklı çözüm stratejileri ve yolları arasından belirli bir çözüm yolunu tercih etme eğilimi olduğunu ifade etmiştir. Zihinsel alışkanlıklar bireyden bireye farklılıklar göstermektedir. Bireyin ilgi ve kabiliyetleri doğrusunda problemlerle başa çıkmada kullandığı alışkanlıklar da değişmektedir. Goldenberg (1996)'e göre zihinsel alışkanlık; "kişinin iyi şekilde ve doğal olarak gerçekleştirdiği, kendi repertuarının içine aldığı, kişinin sadece kolayca yapabildiği değil aynı zamanda kendisinden muhtemel yapabileceği beklenen düşünmeler" olarak tanımlamaktadır. Düşünce yöntemlerinin içselleştirilmesini zihin alışkanlığı olarak tanımlayan Harel (2007), bireylerin düşünme yöntemlerinin bir zihin alışkanlığını açıklamakta oldukça önemli olduğunu ifade etmiştir. Zihin alışkanlıkları, genellikle, öğrencilerin birçok farklı durumda karşılaştıkları sorunlara uygulanabilecek genel sezgisel repertuarları ve yaklaşımları geliştirmelerini sağlayan bilişsel alışkanlıklar olarak tanımlanmaktadır (Cuoco ve diğerleri, 1996).

Zihinsel alışkanlıklarla ilgili çeşitli çalışmalar gerçekleştirilmiş ve çeşitli bileşenler ortaya çıkarılmıştır (Costa & Kallick, 2000; Cuoco ve diğerleri, 1996; Leikin, 2007; Marzano, Pickering v&e McTighe, 1993). Zihinsel alışkanlıklar Costa (1982)'nın sistematik çalışmaları ile başlamış, Marzano (1992) tarafından geliştirilmiş, Costa ve Kallick (2000) ile alanyazında ilgi gören çalışmalar arasına girmiştir (Campbell, 2006). Marzano ve diğerleri (1993) düşünme alışkanlıklarını, genel olarak bireyin herhangi bir problem durumuyla karşılaştığında sahip olduğu bilginin farkına varması, bu bilgileri karşılaşılan problem durumunda kullanabilmesi ve bilgileri yeni durumlara uyarlayabilmesi gibi bilişsel boyutlar olarak ifade etmiştir. Cuoco ve diğerleri (1996) tarafından belirlenen zihinsel alışkanlıkların karakteristiği ise aşağıda listelenmiştir: İlişkileri fark etme, Deneyler yapma, Tanımlamalar yapma, İyi düşünme, İcat etme, Resmetme, Varsayımda bulunma, Tahmin etmedir.

Lim ve Selden (2009) zihinsel alışkanlıkları, genel düşünme alışkanlıkları ve bir alana özgü alışkanlıklar (matematiksel alışkanlıklar, sözel alışkanlıklar gibi) olmak üzere iki kategoride ele almışlardır.

2.6.1. Matematiksel alışkanlıklar. Bireylerin matematiksel sonuçları ortaya çıkarma sürecinde kullandıkları zihinsel alışkanlıkların önemine vurgu yapılmaktadır (Goldenberg, 1996). Zihnin matematiksel alışkanlıkları (ZMA) matematikçi gibi düşünmeyi ve matematik yaparken kullanılan yollardan geçmeyi içermektedir (Lim ve Selden, 2009). Matematikçilerin matematiksel çalışmalarında kullandıkları soyutlamaları ve muhakeme süreçlerinde gerçekleştirdikleri düşünce deneylerini yapabilme becerisi matematiksel alışkanlıklar olarak tanımlanabilir (Cuoco ve diğerleri, 1996).

ZMA'nın matematik öğretim bilgisi için bir bileşen (Matsuura ve diğerleri, 2013), matematik öğretim programı ve okul kültürü için bir ilke, öğrenci muhakemesinin gelişiminde kullanılabilecek bir standart (Cuoco ve diğerleri, 1996) ve öğretmen yetiştirme programlarında alan bilgisi derslerini etkileyen bir öğe (Seaman ve Szydlik, 2007) olması gerektiği düşünülmektedir (Eroğlu ve Tanışlı, 2017). Zihinsel alışkanlıklar kavramı; her disiplinde kullanılabilen genel zihinsel alışkanlıkları ve matematiksel zihinsel alışkanlıkları olmak üzere iki biçimde ele alınmaktadır (Cuoco ve diğerleri, 1996).

2.6.1.1. Zihinsel alışkanlıkların bileşenleri. Cuoco vd. (1996)'nun zihinsel alışkanlıklar bileşenleri bir matematikçide var olması gereken özellikler olarak görülmektedir. Zira bir matematikçi problemle karşılaştığında; çözüm için düşünme, araştırma, örüntü arama, varsayımda bulunma, tahmin etme stratejisini kullanma, problemin çözmeyi kolaylaştırmak için görselleştirme çabası içindedir. Bu bakımdan zihinsel matematik alışkanlıkları, genel zihinsel alışkanlıkların içindedir. Ancak ZMA matematiğe özgü bir tanıma sahiptir. Selden ve Selden (2005) ve Bass (2008) araştırmalarında matematiksel uygulamalar ile zihinsel alışkanlıkları ilişkilendirerek bu iki kavramın birbirine denk olduğunu ve birbiri yerine kullanılabilir kavramlar olduklarını ifade etmektedir.

ZMA özellikle matematiğin geometri ve cebir alanlarında ön plana çıkmakta ve zihnin geometrik veya cebirsel alışkanlıkları olarak tanımlanmıştır (Driscoll, 1999). Driscoll (1999) tarafından belirlenen zihnin cebirsel alışkanlıklarının temel ilkeleri açıklanmaya ihtiyaç duyulmaktadır.

2.6.2. Zihnin cebirsel alışkanlıkları. Cebir yapabilmek soyutlama gerektirir (Altun, 2018). Cebir, bugün çok farklı işlevleri üstlenmektedir: Cebir bir dildir, cebir bir problem çözme aracıdır, cebir bir düşünme aracıdır, cebir bir okul dersidir (Dede & Argün, 2003). Cebirsel notasyonlar bildiğimiz ve bilmediğimiz şeyleri türetmek için iki farklı şekilde kullanılmaktadır. Cebir, bir hesaplamanın yapısını tanımlayan, gözlemlediğimiz sayısal bir örüntüyü, değişen miktarlar arasında bir ilişkiyi açıklayan ve çok daha fazlası olan bir dildir ve küçük çocuklar dil öğrenmede harikadırlar (Goldenberg, Mark ve Cuoco, 2010). Bu yüzden cebir öğretimine küçük yaşlarda başlanmalı ve cebirin aritmetikle olan ilişkisinden hareketle bireyin cebire olan yatkınlıkları geliştirilmelidir. Küçük sınıflardan itibaren zihnin matematiksel alışkanlıklarını geliştirmek aritmetikten cebire geçişte öğrencileri oldukça cesaretlendiricidir (Cuoco ve diğerleri, 1996). Zihnin cebirsel alışkanlıklarını öğrencilere öğreterek, onların cebirsel düşünüşlerini geliştirebilir ve karşılaştıkları sorunları farklı şekillerde çözmeleri için fırsatlar oluşturulabilir (Poindexter, 2011). Driscoll (1999) cebiri pek çok matematiksel özellikleri içerdiğini, sadece kavramlar olarak düşünülmemesi gerektiğini ifade etmiştir. Aritmetikten cebire geçişte başarılı olabilmek için ZCA'ya vurgu yapılmıştır (Papadopoulos, 2019).

ZCA, bireylerin cebirsel bir durumla karşılaştıklarında çözüm için izledikleri yollardır (Ünveren Bilgiç & Argün, 2018). Cebir, nesneleri sembollerle göstermenin ötesinde semboller üzerinde dönüştürme yaparken kullanılan yolların seçiminde ve uygulamasında

ZCA vardır (Cuoco ve diğerleri, 1996). Literatürde zihnin cebir alışkanlıkları farklı tanımlamalara sahiptir (Bass, 2008; Cuoco ve diğerleri,1996; Driscoll, 1999; Gordon, 2011; Jacobbe & Millman, 2009; Lim & Selden, 2009; Goldenberg ve diğerleri, 2010; Matsuura ve diğerleri, 2013; Rolle, 2008). Bu tanımların ortak özelliği ZCA'nın, bireylerin matematik yapma sürecinde gerçekleştirdikleri davranışlar olduğu yönündedir.

ZCA ile kavramsal bir çerçeve ortaya koyan Driscoll (1999), bireylerin problemi anlamada, çözmede ve çözümü açıklamada rol oynayan davranışlarının zihnin cebirsel alışkanlıkları olduğunu belirtmiştir. Öğrencide cebir öğrenimi ile başlayan süreçte altıncı sınıftan onuncu sınıfa kadar ve daha üst sınıflarda düşünme alışkanlıklarının gelişeceğini, erken cebir yıllarında geliştirilen alışkanlıkların ileriki yıllarda öğrenmeye önemli düzeyde katkı sağlayacağı da vurgulanmıştır. Ayrıca Driscoll (1999) cebirsel düşünmenin gelişiminde öğrencilere yardımcı olacak zihinsel alışkanlıkların neler olabileceğine ve öğretmenlerin bu zihinsel alışkanlıkları nasıl geliştirebileceğine ilişkin önerilerde sunmuştur. Driscoll (1999), ZCA'nın çatısını tanımlamış ve üç kategoride incelemiştir:

- Yapma-Tersini Yapma (Doing-Undoing)
- Fonksiyonel Kural Oluşturma (Building Rules to Represent Functions)
- İşlemlerden Soyutlama (Abstraction from Computation)

Öğrencinin bir problemle karşılaştığında problemi anlamaya çalışması ve çözüm için stratejiler geliştirmesi, nicelikler arası ilişkileri belirlemesi yapma alışkanlığına; örüntü arama, örüntünün kuralını bulma, genelleme yapmaya çalışma davranışları fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığına; işlemler üzerinden kısa yollar bulma, işlemlerin ötesinde bir genellemeye ulaşmaya çalışması da işlemlerden soyutlama alışkanlığını kullandığının birer göstergeleridir. Öğrencinin sonuçtan çözüme ulaşma, işlemin sonucunun sağlamasını yapma gibi davranışları da tersine yapma alışkanlığını göstermektedir. ZCA'nın bileşenleri birbiri ile iç içe geçmiş süreçlerdir. Süreç içerisinde aşamalı bir sıra tam anlamıyla gözlenemez ve yapma-tersini yapma alışkanlığı hemen hemen problem çözme sürecinin her yerinde yer alır. Driscoll (1999)'un çalışması temel alınarak ve alandaki diğer çalışmalardan (Goldenberg ve diğerleri, 2010; Matsuura ve diğerleri, 2013) uyarlanan aşağıdaki tabloda ZCA'nın bileşenlerine yer verilmiştir.

Tablo 5

Zihnin cebirsel alışkanlıklarının kuramsal çatısı

<table>
<tr><td rowspan="6">YAPMA-TERSİNİ YAPMA</td><td colspan="2" align="center">YAPMA</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Problemi Anlama Becerisi</u>
• Problemi okuma, yorumlama ve problemin içindeki bağlamı anlama
• Nicelikleri ve nicelikler arası ilişkileri tanımlama
• Temsilleri oluşturma</td></tr>
<tr><td>FONKSİYONEL KURAL OLUŞTURMA</td><td>İŞLEMLERDEN SOYUTLAMA</td></tr>
<tr><td><u>Örüntü Arama Becerisi</u>
• Örüntü durumunu ortaya çıkarma

<u>Örüntü Tanıma Becerisi</u>
• Örüntünün nasıl çalıştığını ortaya koyan tekrarlayan bilgi yığınını arama
• Çoklu temsil kullanımı
• Örüntüyü tahmin etme
• Değişimin analizi

<u>Genelleme Becerisi</u>
• Kuralı tanımlama
• Kuralı Doğrulama</td><td><u>Yapı üzerinde çalışma becerisi</u>
• İşlemsel kısa yolları bulma
• Olası yararlı özelliği ortaya çıkarmak için ifadeleri tekrar yazma

<u>İşlemler hakkında genelleme becerisi</u>
• Sonucun farklı durumlarda çalışıp çalışmadığını deneme
• Sayı sistemlerinin nasıl çalıştığını anlamaya yarayacak kısa yol hesaplamaları kullanma
• Kullanılan sayılardan bağımsız olarak işlemleri düşünme
• Örneklerin ötesini genelleme
• İşlemlerle ilgili genellemeleri matematiksel dili kullanarak açıklama
• Kısa yolları doğrulama</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">TERSİNİ YAPMA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tersini yapma becerisi
• Çıktıdan girdiye ulaşma becerisi
• Geriye doğru çalışma becerisi</td></tr>
</table>

ZCA'nın yapma – tersini yapma, fonksiyonel kural oluşturma ve işlemlerden soyutlama olmak üzere üç bileşeni bulunmaktadır. Bu bileşenlerin detayları alt bölümlerde açıklanmaya çalışılmaktadır.

2.6.2.1. Yapma – tersini yapma. Etkili cebirsel düşünme, matematiksel süreçleri yapabilmek kadar bu süreçleri bazı durumlarda tersine çevirebilmeyi de gerektirir. Başka bir ifadeyle, problemin çözümünün doğasında başlangıç noktasından sonuca götürebilmek olduğu kadar, sonuçtan başlayarak geriye doğru çalışmayı gerekli kılan iş ve işlemlerin de yapılmasıdır. Örneğin cebirsel düşüncede, yapma-tersine yapma alışkanlığına sahip olan bireyler, $9x^2 - 16 = 0$ şeklindeki bir problemin sadece çözümünü bulmakla kalmaz; 4/3 ve -4/3 'ten hangisinin eşitliği sağladığını da inceler (Driscoll, 1999). Yapma-tersini yapma alışkanlığı sürecinde, bir matematiksel görevle ilgili bilgilerin ileriye ve geriye doğru analiz edilmesi doğal bir süreçtir ve bu alışkanlık denklemlerin çözümünde, ters fonksiyon, türev-ters türev, çarpanlara ayırma gibi matematiksel etkinlikler için temel davranışlardır (Moyer, Huinker & Cai, 2004).

Yapma-tersini yapma cebir alışkanlığı, diğer iki cebirsel alışkanlık için bir çatı olarak ele alınmıştır (Driscoll, 1999). Bu alışkanlık; öğrencilerin bir problem çözme durumu içerisindeyken hep var olmaktadır. Yapma alışkanlığı, problemi anlama becerisi ile ele alınmakta (Schoenfeld, 2014) ve bu becerinin alt göstergeleri bulunmaktadır. Benzer şekilde tersini yapma alışkanlığı da diğer alışkanlıklar için kapsayıcı özelliktedir ve diğer alışkanlıkların içerisinde her problem çözme sürecinde ortaya çıkabilir (Eroğlu ve Tanışlı, 2017). ZCA'nın diğer bileşenleri olan fonksiyonel kural oluşturma ve işlemlerden soyutlama alışkanlıkları, yapma-tersini yapma alışkanlığının şemsiyesi altındadır (Magiera ve diğerleri, 2013). Yapma-tersini yapma alışkanlığı; öğrenciler bir problemle karşılaştıklarında ortaya çıkmakta, problemi anlama, problemi çözmeye çalışma gibi eylemlerle başlamakta ve problem çözme sürecinde sergilemiş oldukları diğer iki ZCA'nın içerisinde de ortaya çıkabilmektedir (Schoenfeld, 2014).

Driscoll (1999)'a göre yapma alışkanlığında eşitliklerin çözümünü bulmaya ihtiyaç yoktur ve anaokulundan ortaokula kadar yapma-tersini yapma alışkanlığını destekleyecek pek çok konu bulunmaktadır. Öğrencinin bu alışkanlıkta kendine sormuş olduğu içsel sorular genelde “Sondan başlarsam ne olur?”, “Burada yaptığım işlemin tersi nasıl olur?”, “Bu sayı ile bir önceki sayı arasında bir bağlantı var mıdır, varsa nasıldır?” şeklindedir. Örneğin bir sayıyı başka bir sayıya kalanlı olarak bölmek, kalandan geriye doğru çalışmak, öğrencilerin bölme işleminde kullandığı algoritmaları düşünmelerini geliştirmelerini sağlar. Başka bir örnekte, bir girdi ile diğer girdiler arasında bağlantı kurmaya çalışmak, örneğin Pascal üçgeninin 100. sırasında kaç tane çift sayı olduğunu incelemek için 99. dizinin sonuçlarından hareket etmek, bireyin yapma-tersini yapma alışkanlığını kullandığının göstergeleridir.

Driscoll (1999), öğrencilerde Zihnin cebir alışkanlığının, yönlendirici öğretmen soruları ile geliştirilebileceğini ve bu soruların önemli olduğunu ifade etmiştir. Bir öğretmenin yapma-tersini yapma alışkanlığını sınıfında geliştirmek istediğinde kullanabileceği soruları aşağıdaki şekilde listelemiştir (Driscoll, 1999): Bu işlem tersine nasıl çalışır? Sıralanan bu sayı ile kendisinden önce gelen sayı arasındaki ilişki nasıldır? Eğer sondan başlasaydım ne olurdu? Kullandığım işlemlerden hangisi tersti? Bu sayıları ya da ifadeleri yardımcı bileşenlerle ayrıştırabilir miyim? Driscoll (1999) tarafından yazılan bir problemin Eroğlu ve Tanışlı (2017) tarafından yapma-tersini yapma alışkanlığına göre incelenmesi aşağıda verilmiştir:

> Dolap Problemi: Bir okulun koridorunda 20 dolap vardır. Her bir dolap 1’den 20’ye kadar numaralandırılmıştır ve kapıları kapalı durumdadır. 20 öğrenci tatil dönüşü bir oyun oynamaya karar verirler. Oyunun kuralına göre ilk öğrenci 1 numaralı dolaptan başlayarak 20 numaralı dolaba doğru koşarken her kapalı kapıyı açacaktır. İkinci öğrenci 2 numaralı kapıdan başlayarak her 2. kapıyı kapatacaktır. Üçüncü öğrenci ise 3 numaralı kapıdan koşmaya başlayacak ve her 3. kapının durumunu değiştirecektir. 20 öğrencinin hepsi kapılardan geçene kadar aynı işlem tekrarlanacaktır. 20. öğrenci koşmayı bitirdikten sonra hangi kapılar açık kalacaktır? Hangi kapıların durumu en çok

değişmiştir? 200 kapılı bir okulda 200. öğrenci koştuktan sonra hangi kapılar açık kalacaktır? Hangi kapıların durumu en çok değişecektir?

Yapma alışkanlığının ilk adımı problemi anlamaktır. Bu adımda öğrenci problemi kendisine açıklar. Problemi anlamak öğrencinin problemi okumasını, yorumlamasını ve problemin içindeki bağlamı anlamasını gerektirmektedir. Dolap örneğinde öğrencinin problemde verilen bir ya da daha fazla terimi tanımlaması ve kapının durumunun değişmesinin ne anlama geldiğini açıklayabilmesidir. Problemi anlamanın bir diğer bileşeni ise nicelikleri ve nicelikler arası ilişkileri tanımlama olarak ele alınmaktadır. Problem bağlamında incelendiğinde, birinci öğrencinin tüm kapıları açması, ikinci öğrencinin 2'nin katı olan kapıları kapatması ve üçüncü öğrencinin de 3'ün katı olan kapıların durumunu değiştirmesi gibi nicelikleri tanımlaması olarak söylenebilir. Son olarak problemi anlama becerisinde temsilleri oluşturma belirlenen niceliklerin ya da terimlerin ve bunlar arasındaki ilişkiler tablo, resim, sembol, sözel ve cebirsel ifade kullanılarak açıklanabilir. Aşağıda dolap probleminde Tablo 6'da görüldüğü gibi bir temsil kullanılarak veriler düzenlenebilir.

Tablo 6

Dolap probleminin çözümü için örnek tablo

Öğrenci/Kapı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	
2		K		K		K		K		K	
3			K			A			K		
...											

Tersine-yapma ise çıktıdan girdiye ulaşma ya da geriye doğru çalışma bileşenleriyle ele alınmaktadır. Örneğin 20. çocuğun başlamasıyla kapıların durumlarının belirlenmesi ya da 6 çarpanlı, 3 çarpanlı sayıların neler olduğunun belirlenmesi dolap probleminde tersini yapma olarak ele alınabilecek durumlardır (Eroğlu & Tanışlı, 2017).

2.6.2.2. Fonksiyonel kural oluşturma. Driscoll (1999)'a göre fonksiyonel kural oluşturma, ZCA'nın önemli bir bileşenidir.

Hem Driscoll (1999) hem de Kaput (2008) 'un tanımladığı gibi cebirsel düşünmenin ilk yönü fonksiyonel kural oluşturmadır. Blanton ve Kaput (2011)'ın fonksiyonel düşünme olarak adlandırdıkları düşünme ve Driscoll (1999)'un zihin alışkanlığı olarak kavramlaştırdığı fonksiyonel kural oluşturma olarak karşımıza çıkmaktadır. Cebirsel düşünmenin açıklanmasında Driscoll (2001)'un zihin alışkanlıkları iyi bir çerçeve olarak görülmektedir (Magiera ve diğerleri, 2017). Bu alışkanlık cebirsel düşünmenin kritik yönü olan; ilişkileri belirleme, modelleri fark etme, bilgileri organize etme, bir durum ile ilgili girdi ve çıktı bilgilerini temsil edebilme, iyi tanımlanmış fonksiyonel kuralların bilgilerini organize etme kapasitelerini içeren kritik davranışlardır. Bu davranışlar, örüntüleri tanıma ve analiz etmeyi, ilişkileri araştırmayı ve temsil etmeyi, özel örneklerin ötesinde genellemeyi, süreçlerin veya ilişkilerin nasıl değiştiğini analiz etmeyi ve kuralların ve işlemlerin nasıl ve niçin işe yaradığına ilişkin tartışmalar yapmayı içerir görülmektedir (Magiera ve diğerleri, 2017). Örneğin, "Bir sayının 4 katının 3 eksiğini bulunuz." gibi hesaplama temelli fonksiyonel bir kuralı açıklayalım. Bu fonksiyon $f(x) = 4x - 3$ olarak yazılabilir. Zihnin bu alışkanlığı, yapma-tersini yapma alışkanlığının doğal bir tamamlayıcısıdır. Bu alışkanlık en genel manada, fonksiyonel kuralların nasıl çalıştığını anlama, tersine çevirebilme ve genelleme yaparak daha ulaşılabilir ve kullanışlı bir şekilde yapabilme kapasitesidir (Driscoll, 1999).

Driscoll (1999), NCTM standartlarında sıklıkla öğrencilerin modeller, fonksiyonlar ve ilişkilerle yaşadıkları deneyimlerin öneminden bahsedildiğini ve bu deneyimlerin alışkanlıkları koruyucu birer içerik olacağını ifade etmektedir. Birey bu alışkanlıkta bir problemin çözüm sürecinde ilişkiyi fark etmek için sıralı denemeler yapabilir, tablo yapma stratejisini kullanarak durumu resmetmeye çalışabilir. Öğrencinin bu alışkanlıkta kendine sormuş olduğu içsel sorular genelde "Burada bir kural ya da ilişki var mı?", "Aynı adımlar tekrar edecek mi?", "Bir sonraki adımda ne olacak?", "Tahmin etsek", "Aynı şeyleri başka sayılarla yaptığımızda neler aynı kalıyor? Neler değişiyor?" gibi sorulardır. Örneğin "Kâğıdı n kez katladığımda kaç katlama izi oluşur?" sorusunu cevaplayan bir öğrencinin, birinci adımdan hareketle denemeler yaparak ilişkiyi fark etmesi ve sorunun çözümüne ilişkin genel bir kural oluşturmaya çalışması bu alışkanlığını kullandığının göstergeleridir.

Driscoll (1999), bir öğretmenin fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığını sınıfında geliştirmek istediğinde kullanabileceği soruları aşağıdaki şekilde listelemiştir: Burada bir kural ya da ilişki var mı? Bulduğun kural nasıl çalışır ve nasıl yardım eder? Kural niçin bu şekilde çalışır? Değişen şeyler nasıldır? Neler olacağını tahmin etmene yarayan bilgiler var mı? Kuralın her durumda çalışır mı? Defalarca yaptığın adımlar nedir? Bu işin başlangıcını ve tamamını yapacak mekanik bir kural yazabilir misin? Özel girdiler kullanmadan adımları nasıl tanımlayabilirsin? Farklı sayılarla aynı şeyi yaptığında hala doğru mu? Ne değişti? Bir eşitliğe sahip olduğunda eşitlikle ilgili olan sayıların problemin bağlamıyla ilgisi nasıldır?

Fonksiyonel kural oluşturmanın özellikleri arasındaki ilişkilerin ayrıntılı bir şekilde anlaşılmasını sağlamak için Magiera ve diğerleri (2017) tarafından oluşturulan Tablo 7 aşağıda gösterilmektedir.

Tablo 7

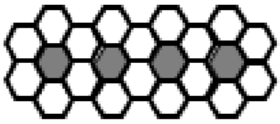
Fonksiyonel kural oluşturmanın özellikleri

Özellik	Örneklenen Düşüncenin Tanımı
Bilgi Organize Etme	Örüntüyü, ilişkiler ve onları tanımlayan kuralları ortaya çıkarmak için faydalı ve kullanışlı yollarla bilgileri düzenleyebilme,
Örüntü Tahmini	Belirli bir durumdaki düzeni keşfedebilme ve anlayabilme,
Bilgi Toplama	Bir örüntünün nasıl çalıştığını ortaya koyan bilgilerdeki parçaları tekrarlayabilme veya sürdürebilme,
Farklı Temsiller	Problem hakkında farklı bilgileri açığa çıkarmak için problemin farklı temsillerini düşünebilme ve deneyimleyebilme,
Bir Kural Tanımlamak	Bir işlemin veya kuralın adımlarını özel girdiler olmadan açıkça veya tekrarlı olarak tanımlayabilme,
Değişimi Tanımlamak	Bir süreçteki değişikliği veya açıkça bir ilişkiyi değişkenler arasındaki işlevsel bir ilişki olarak tanımlayabilme,

Bir Kuralın Gerekçelendirilmesi	Bir kuralın neden herhangi bir girdi için çalıştığını haklı gösterebilme (ispatlama).

Magiera ve diğerleri (2017) çalışmalarında bu problemin fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığına göre incelemiştir:

Çiçek Yatakları



Belediye meclisi, 100 çiçeklik oluşturmak ve bunları yukarıda gösterilen şekle göre altıgen kaldırım taşlarıyla çevrelemek istiyor. (Yukarıdaki desende 4 tane çiçek yatağı, 18 tane kaldırım taşı ile çevrelenmiştir)

a) Belediye meclisinin kaç kaldırım taşına ihtiyacı vardır?

b) Belediye meclisinin herhangi bir sayıda çiçeklik için gereken taş sayısına karar vermek için kullanabileceği bir formül bulunuz.

Bu problem, öğrencileri farklı temsillere yönlendirmede teşvik edicidir. Çünkü çiçek yataklarının etrafına dizilecek olan taş sayısını belirleyebilmek için, örüntü arama davranışlarına geçmeden önce, verilen bilgileri organize ederek farklı gösterimler kullanarak (örneğin sayısal, sözel, sembolik), soru içerisinde değişen ve değişmeyen durumları takip ederek süreci somutlaştırmaya çalışır. Her bir çiçek için ne kadar kaldırım taşı gerekli olduğunu, bir diğer adıma geçerken diğer adımla bitişik kenarlar olduğunu fark edecek ve örüntünün kuralını bu durumlara göre belirlemeye çalışacaktır. Tekrarlayan bilgi yığınlarını kullanarak örüntünün genel kuralını bulmaya yönelik çalışmalar yapacaktır. Ardından belirlemiş olduğu kuralı doğrulama çalışmaları yapacak ve kuralda işleyen ya da işlemeyen durumları test ederek süreci değerlendirecektir. Bu süreçte yapılan tüm çalışmalar fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığını ortaya çıkaran süreçlerdir.

2.6.2.3. İşlemlerden soyutlama. Cebir yapabilmenin önemli karakteristik özelliklerinden biri de soyutlama yapabilmektir. Soyutlama cebirsel alışkanlıklar için cebirsel düşünmeyi içeren bir durum olarak ifade edilebilir. İşlemlerden soyutlama alışkanlığı öğrencinin süreçte kullandığı sayılardan bağımsız şekilde düşünebilme kapasitesidir. Örneğin "1 + 2 + 3 + … + 100=? işleminin sonucunu hesaplayın" sorusunda zihnin bu alışkanlığını kullanan öğrenciler, gruplandırılmadan ardışık olarak verilen sayıları toplamları 101 olacak şekilde gruplayarak 100+1, 99 +2, 98+3, … ve işlemlerin nasıl çalıştığına ilişkin kısa yol hesaplamaları kullanarak çözüme kolayca ulaşmaya çalışırlar. Bu sorunun çözümünde tersini yapma alışkanlığı da kullanılabilir (Driscoll, 1999).

Öğrencilerin işlemlerden soyutlama alışkanlığını kullanabilmeleri için cebir öğretiminden önce oldukça fazla fırsatları olduğu bilinmektedir. İşlemlerden soyutlama alışkanlığına sahip bireyler; dört işlem (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) arasındaki ilişkileri kullanarak genelleme yapma, kısa yollar geliştirmek için bilgilerini kullanma, sembollerin ne anlama geldiğini bilerek bu sembolleri kolayca kullanma, ihtiyacına bağlı olarak basitleştirerek ya da karmaşıklaştırarak eş değer ifadeler kullanma, farklı sistemler üzerinde hesaplama yapma davranışlarını sergilerler. Yani öğrenciler bu alışkanlıktaki işlemleri sayılardan bağımsız olarak düşünürler (Driscoll, 1999).

$11 - \frac{50}{3x-2} = 6$ şeklindeki bir işlemi ele aldığımızda yapı üzerinde çalışan öğrenciler denklemi kolaylıkla okuyabilirler [50'nin bir şeye (3x-2) bölümü 5 ederse, geriye kalan 3x-2=10'dur]. Böyle bir çıkarım yapan öğrenciler işlemlerin nasıl çalıştığını anlamalarına dayalı olarak işlemlerdeki kısa yolları araştırır, ilişkisel düşünme becerilerini de kullanır. Böylece çözüme hızlı ve doğru yoldan ulaşabilir (Eroğlu & Tanışlı, 2017).

Driscoll (1999), bir öğretmenin işlemlerden soyutlama alışkanlığını sınıfında geliştirmek için kullanabileceği sorular aşağıda listelemiştir: Bu işlem (hesaplama) durumu başka bir işleme benziyor mu ya da nasıl benziyor? Hesaplama yapmadan ne olacağını nasıl tahmin edebilirsin? Buraya kadar yaptığın işlemler nelerdir? Aynı şeyleri farklı sayılar ile yapsan neler değişmez? Değişenler nedir? Gizli anlamları ortaya çıkaracak diğer yönler nelerdir? İşlemlerin önemli kurallarını nasıl yazabilirim? Bu işlemlerin özelliği bir diğer işlemle nasıl benzerdir?

Driscoll (1999) tarafından hazırlanan aşağıdaki soruyu işlemlerden soyutlama alışkanlığına göre irdeleyelim.

"Hangi sayılar beş ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabilir?"

Öğrenciler bu soruyu çözerken eski öğrenmelerinden yararlanabilirler. Örneği basitleştirme yoluna gidip öncelikle 3 ardışık sayının toplamı şeklinde yazmayı deneyebilir. Buradan hareketle soruyu genişletmeye çalışarak 5 ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabilecek olan sayının 5 ile kalansız bölünmesi gerektiğini belirleyebilir. Ortanca sayıyı belirleyerek diğer sayıların yerlerini de kolayca belirleyebilir. "*n,* 5 ardışık sayının toplamı ise *n* 5'e kalansız bölünebilir" kuralını açıklayabilir. Burada dört işlemden soyutlama yaparak ilişkileri genellemesi ve kısa yollar bulmaya çalışması, işlemlerden soyutlama alışkanlığı becerisine sahip olduğunu göstermektedir.

NCTM (2000)'e göre de problem çözme ve akıl yürütme becerileri, matematik eğitiminde öğrencilere kazandırılması hedeflenen önemli becerilerdendir. Matematikte sonuçlara ulaşma sürecinde kullanılan bu becerilerden oluşan alışkanlıklar da sonuca ulaşmak kadar önem taşımaktadır. Öğrencilerin matematiksel bir kavrama ulaşmalarında yani soyutlamalarında matematiksel bir işlem kullanmaları dolayısıyla çözüm yapmaları bu süreçte de bazı problem çözme stratejileri kullanamaları beklenir. Bu problem çözme süreci ile öğrencinin matematiksel bir dil ile çözümünü ispatlaması veya matematiksel kavramı anlayıp ifade etmesi beklenir. Öğrenci tarafından seçilen stratejiden çözüm sürecine devamında kullanılan matematiksel dil bir birikim ile olabilmektedir. Bu birikim ise öğrencinin alışkanlıkları bize göstermektedir. Matematiksel düşünme araçları analitik zihin alışkanlıklarıdır ve problem çözme becerilerini, temsil becerilerini ve muhakeme becerilerini içerir (Kriegler, 2000). Temel cebirsel kavramlar (denge ve değişken), matematiksel düşünme araçlarının geliştiği içerik alanını temsil eder. Bu bakımdan cebirin temel kavramlarının nasıl öğrenildiği ve öğretildiği önemli bir husustur (Kriegler, 2000). Bu çalışmada temel cebir kavramlarının öğretimi öğrenme yörüngeleri ile dizayn edilmiş, nasıl öğrendikleri matematiksel soyutlama teorileri ile sınanmıştır. Öğrencilerin temel cebir kavramlarını yapılandırıken problem çözme, temsil ve muhakeme becerilerini matematiksel düşünme araçlarını hangi alışkanlıklara göre kullandıkları veya geliştirdikleri ise zihnin cebirsel alışkanlıkları aracılığıyla soyutlama sürecinde bilginin nasıl yapılandığını açıklayabilmeyi desteklemek amacıyla kullanılmıştır.

2.7. Kuramsal Çercevenin İlişkilendirilmesi

Matematik öğrenme ve öğretme süreçleri karmaşıktır, çünkü çeşitli ortamlarda bilişsel, epistemolojik, duygusal, sosyal ve kültürel yönleri içerirler. Bu öğrenme sürecinde bireyler, küçük gruplar ve matematiksel görevler farklı teorik çerçeveler ve metodolojik yaklaşımlar, araştırmacılar tarafından bu farklı ama çoğu zaman birbiriyle etkileşim halindeki yönleri analiz etmek için kullanılmıştır. Araştırmacılar, farklı yaklaşımlar ile öğrenme sürecini açıklamaya çalışırken ve bu farklı yaklaşım ve teorileri birbiri ile ilişkilendirmek suretiyle bir ağ oluştururlar. İncelenen fenomenin farklı yönleri ve etkileşimleri hakkında fikir edinmek için aynı veri setini analiz etmede birden fazla teorik-metodolojik yaklaşım kullanılabilir (Cobb, Jackson & Dunlap, 2016). Bunu, diğerindeki eksiklikleri veya boşlukları azaltmak için bir yaklaşımın tamamlayıcı güçlerinden yararlanarak ve böylece farklı analizlerin sonuçlarını birleştirerek yaparlar.

Son yıllarda, kurulan bu tür ağlar matematik eğitimcileri arasında artan bir ilgi görmektedir (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014; Tabach, Rasmussen, Dreyfus & Apkarian, 2020). Prediger ve diğerleri (2008)'e göre, "birleştirme ve koordine etme stratejileri çoğunlukla deneysel bir fenomenin veya bir veri parçasının ağ üzerinden anlaşılması için kullanılır " (s. 172). Özellikle araştırma odaklı sınıflarda gerçekleşen öğrenmeyi incelemek ve bir kavramın/fenomenin soyutlama sürecine yönelik yapılan araştırmalarda RCB + C'yi başka teoriler ile ilişkilendirildiği ve daha etkili sonuçlar alındığı ifade edilmiştir (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014; Tabach ve diğerleri, 2020). Bu ilişkilendirme RBC+C teorisinin eksik olduğu anlamına gelmemektedir. Aksine açıklanmak istenen kavramın inşa sürecine yönelik oluşan teorinin veya modelin daha iyi savunulması amaçlanmaktadır. Son yirmi yılda, farklı teoriler aracılığıyla sınıflarda öğrenme süreçleri gibi karmaşık fenomenleri anlamlandırmak için matematik eğitiminde araştırma yapmanın bir parçası haline geldi (Prediger, Bikner-Ahsbahs & Arzarello, 2008; Tabach ve diğerleri, 2020). Bir kavramı anlamlandırmak için birden fazla yaklaşımın birleştirilmesi, kavramın iç yüzünü anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır (Tabach ve diğerleri, 2020).

Bu çalışmada temel cebir kavramları soyut bir düşünme gerektirmesi nedeniyle öğretimde yaşanabilecek zorluklar öngörülmüştür. Bu zorluk ve karmaşıklığı azaltmak, öğrencilerin gelişimlerini sistematik bir çerçevede ele almak için öğrenme yörüngeleri kullanılmıştır. Öğrenme yörüngelerinin doğası gereği kavramın gelişim süreçleri yani kavramların inşa edilmesinde/ soyutlanmasında yaşanan süreçler RBC+C soyutlama teorisi aracılığıyla ele alınmaya çalışılmaktadır. Ayrıca cebir kavramının soyutlama sürecinde öğrencilerin sahip oldukları cebirsel zihin alışkanlıkları RBC+C soyutlama teorisi ile karşılaştırılarak bir ağ oluşturulmakta kavramların soyutlama süreçleri daha iyi açıklanmaya çalışılmaktadır. Temel cebir kavramlarının öğrenci zihninde soyutlama süreçleri ortaya çıkarılmaya çalışılırken öğretimde metodolojik bir araç olarak öğrenme yörüngeleri, öğrencilerin gelişimsel süreçlerinin incelenmesi sürecinde RBC+C soyutlama teorisi ve gelişimsel süreçlerin daha iyi açıklanması için zihnin cebirsel alışkanlıkları birbiri ile bağlantılı olarak ele alınmıştır.

3. Bölüm

Yöntem

Bu bölümde araştırmanın modeli, tasarım süreci, katılımcılar, veri toplama araçları, veri analizleri ve araştırmaya ilişkin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarına yer verilmiştir.

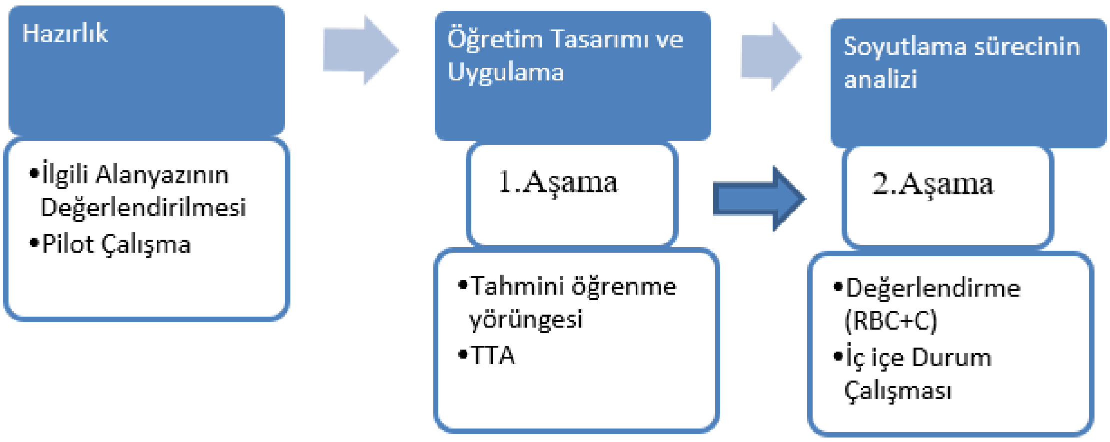
3.1. Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada öğrencilerin soyutlama süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla nitel araştırma yöntemlerine başvurulmuştur. Nitel araştırma, bireyin doğal ortamındaki davranışlarını inceleyebilmek için derin ve geniş bir bakış açısına sahip olmakla ilgilenir (Johnson & Christensen, 2004). Nitel verilerin ilk elden zengin ve bütüncül bir içerik sunması, yeni çalışma alanlarını keşfetme ve hipotez geliştirme süreçlerinde araştırmacılara yardımcı olmaktadır. Ayrıca nitel veriler, araştırmacılara nicel veriler ile elde ettikleri bulguları daha kapsamlı bir şekilde yorumlama imkânı sağlamaktadır (Miles & Huberman, 1994). Nitel araştırmalar etkileşimli (interactive) ve etkileşimsiz (non interactive) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Etkileşimli nitel araştırmalarda veriler, gerçek yaşam ortamlarında bireylerle yüz yüze görüşülerek toplanmaktadır. Etkileşimli nitel araştırmalar içerisinde yer alan fenomenoloji, durum çalışması ve kuram oluşturma gibi modeller insan deneyimlerine yoğunlaşmaktadır (Mcmillan & Schumacher, 2006).

Bu araştırma öğrencilerin cebiri nasıl soyutladıklarını araştırmaktadır. Bu bakımdan iki aşamalı olarak tasarlanmıştır. Cebir kavramları soyut bir düşünme gerektirir. Matematikte, öğrenciler ilk defa soyut düşünmeyle cebir sayesinde karşılaşır. Ortaokul öğrencilerinin ilk defa soyut bir düşünce üzerinde çalışmalarından dolayı öğrencilere temel cebir kavramlarının öğretimi konusunda yapılan bu araştırmada, öğrencilerin temel cebir kavramlarını soyutlama süreçlerini incelemeyi güçlendirmek için öğrenme yörüngeleri kullanılmıştır ve öğrenme yörüngelerinin doğasına uygun olması nedeniyle yöntem olarak TTA yöntemi seçilmiştir.

Şekil 3

Araştırma süreci



Araştırmanın *ilk* aşamasında öğrencilerin cebir kavramını soyutlamalarını güçlendirmek ve sürecin incelenmesini kolaylaştırmak için TTA araştırma yönteminden faydalanılarak cebir öğretimine yönelik bir tahmini öğrenme yörüngesi geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Araştırmanın *ikinci* aşamasında ise öğrencilerin soyutlama süreçlerini derinlemesine incelemek için durum çalışmasından faydalanılmıştır. Alt başlıklarda hem Durum çalışması hemde TTA araştırmasına yönelik açıklamalar mevcuttur.

3.1.1. Durum çalışması. Creswell (2007)'e göre durum çalışması, araştırmacının bir durumu veri toplama araçları ile (gözlem, görüşme, transkript, raporlar) derinlemesine incelediği bu durumlara ait temaları ortaya koyduğu nitel yaklaşımdır. Merriam (1998) durum çalışmasının, araştırmanın sonucundan ziyade araştırma sürecinin araştırmacının ilgisini çektiği durumun anlaşılmasını sağlamanın bir yolu olduğunu ifade etmiştir. Stake (2010) araştırmacılar durum çalışmaları sayesinde belirli bir durumu ayrıntılı bir şekilde açıklayabilirler. Yapılan tanımlara göre durum çalışmasının sistematik bir şekilde çoklu veri toplama araçları kullanılarak bir veya birden fazla durumu ayrıntılı bir şekilde analiz etmeye yarayan model olduğu söylenebilir.

Durum çalışması, muhtemel sınırlı bir sistemdeki belirli bir olguyu araştırmayı amaçlayan eğitim araştırmalarında en yaygın kullanılan yaklaşımdır (Creswell, 2009; Merriam, 2009). Bir olgunun gerçek yaşam bağlamında bir ya da daha fazla vakasının katılımcıların bakış açılarını ayrıntılı bir şekilde dikkatlice dışa aktarması olarak tanımlanabilir. İyi bir durum çalışması fenomeni canlı ve gerçek kılar, okuyucu için anlaşılabilir anlamlar sağlar (Gall, Gall ve Borg, 2007).

Durum çalışması, bir olguyu (cebir öğrenimi) kendi gerçek yaşam çerçevesi (sınıf ortamında öğretilen cebir) içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı (cebirin nasıl soyutlandığı) ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının (gözlem, görüşme ile günlük verileri ve ilgili literatür) mevcut olduğu durumlarda kullanılan bir araştırma yöntemi olarak tanımlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bir tür durum çalışması olarak yapılan spesifik ya da içsel durum çalışmalarında vaka, araştırmacının fenomenini anlama konusundaki istekliliği bakımından seçilir (Merriam, 2009; Stake, 1995). Durum çalışmalarının temel varsayımları (Creswell, 2009): Durum çalışması özel bir durumun belirlenmesiyle başlar ve amaç önemlidir. Duruma ilişkin derinlemesine bir anlayış sunabilmek önemlidir. Veri analizi sürecinde tek durum veya çoklu durum seçimi yapılmalıdır. Duruma ilişkin bir betimleme içermesi analizi anlamak için gereklidir. Durumdan çıkarılan sonuçlarla son bulur, burada genel bir şablon verilebilir.

Araştırmada durum çalışması türlerinden 'İç İçe Geçmiş Tek Durum Deseni' kullanılmıştır. İç içe geçmiş tek durum deseni, tek bir durum içinde birden fazla alt tabaka veya birim oluştuğunda geçerli olan durum çalışması desenidir. Bir durum çalışmasında ortaya çıkan ve bununla ilişkili alt birimleri bütüncül ve sistematik olarak bir arada incelemek ve bunların ilişkilerini ortaya çıkarmak önemlidir. Çalışma grubu öğrencileri cebirsel düşünme bakımından üç düzeyde olması sebebiyle iç içe geçmiş tek durum deseni bu çalışmada tercih edilmiştir. Çalışmada kullanılan durum çalışmasında izlenen aşamalar (Yıldırım ve Şimşek, 2016);

Araştırma sorularının geliştirilmesi (Nasıl soyutlamaktadırlar?),

Analiz biriminin belirlenmesi (RBC+C soyutlama teorisinini epistemik eylemleri),

Çalışılacak durumun belirlenmesi (Temel cebir kavramlarının soyutlanma süreci),

Araştırmaya katılacak kişilerin seçimi (Cebirsel düşünme düzeylerine göre üç kategoride bulunan ortaokul öğrencileri),

Verilerin toplanması ve verilerin alt problemlerle ilişkilendirilmesi (Çeşitli veri toplama araçları),

Verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması,

Durum çalışmasının raporlaştırılmasıdır.

Bu bağlamda, bu çalışma özel bir durum çalışmasıdır, uygulamada yer alan öğrencilerin cebirin iki temel kavramını matematiksel olarak nasıl soyutladıklarını, zihinsel cebir alışkanlıklarının nasıl olduğunu anlamak için incelemeyi amaçlamıştır.

Araştırmanın ikinci aşamasında ise soyutlama sürecinin incelenmesini güçlendirmek için tahmini öğrenme yörüngesinden yararlanılmıştır. Tahmini öğrenme yörüngesi bir öğretim tasarımı çalışmasıdır. Öğretim tasarımı çalışmaları kendi içinde belli özelliklere göre ayrılan modeller üzerinden gelişmektedir. Tasarım tabanlı araştırmalar temelde benzer bileşenleri içermesine rağmen işleyiş sürecinde birbirlerinden farklı özellikler göstermektedirler. Tasarımı modellerinde süreç, eğitim gereksinimlerinin tespit edilmesiyle başlar ve gereksinimlerin karşılanması için tasarlanmış ve denenmiş bir öğrenme sisteminin oluşturulmasıyla sona erer (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu bağlamda tasarımı, belli bir hedef kitlenin eğitimsel gereksinimlerini karşılayabilmek amacıyla işlevsel öğrenme sistemlerinin geliştirilmesi; öğrenmeyi olumlu yönde etkileyen koşulları içeren etkili, verimli ve çekici bir öğretim sistemi ortaya koymaktır (Reigeluth, 1999; Şimşek, 2011). Bu araştırmada soyutlama sürecinin daha iyi anlaşılabilmesi gereksinimiyle öğretim tasarımına ihtiyaç duyulmuştur.

3.1.2. Tasarım tabanlı araştırma. Tasarım araştırması yaklaşımı (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer ve Schauble, 2003; Collins, Joseph ve Bielaczyc, 2004; Kelly, 2003), öğrencilerin bir sınıf ortamında nasıl öğrendiklerini araştırmak ve gerçekleştirilen öğrenme yörüngesini belgelemek amacıyla kullanılmıştır. Tasarım araştırması çerçevesi, araştırmacıların çalışma süreci boyunca müdahale etmelerinin yanı sıra gözlemlemelerine de izin verir. Tasarım araştırmasının temel amacı, öğrenme ortamının daha iyi anlaşılmasını sağlamaktır (Gravemeijer & Cobb, 2006). Matematikte öğrenme ortamı öğretmenler, öğrenciler, matematiksel içerik ve müfredat arasındaki etkileşimi ve bu ilişkilerin öğretme ve öğrenmeyi nasıl etkilediğini içerir. Ayrıca, tasarım araştırmacıları öğrenme sürecine ilişkin teorilerin yanı sıra öğrenmeyi desteklemek için tasarlanmış teknikler geliştirirler (Cobb ve diğerleri, 2003). Tasarım araştırması metodolojisi, bir öğretim deneyinde sunulan görevlerle öğrencilerin cebir öğrenmelerini destekleme ve organize etme araçlarını incelemek ve anlamak için kullanılmıştır.

Öğrencilerin cebirin iki temel kavramı olan denge ve değişkeni soyutlama süreçlerini nasıl gerçekleştirdiklerini belirlediğimiz bu çalışmada onların bu soyutlama süreçlerini daha net görebilmek ve bu süreçte onların soyutlama yapmalarını desteklemek amacıyla tasarım tabanlı araştırma modelinden faydalanılmıştır. Tasarım tabanlı araştırmanın doğası gereği, öğrencilerin soyutlamalarının gözlemlenmesi sırasında süreci daha iyi anlayabilmek için müdahale edilmelerine olanak sunmasıdır. Bu bakımdan diğer araştırma türlerinden daha faydalı olacağı kanaatini oluşturmaktadır. Tasarım tabanlı araştırma müdahalenin yanı sıra öğrenme çalışmalarına da odaklanmaktadır (Şengel, 2013).

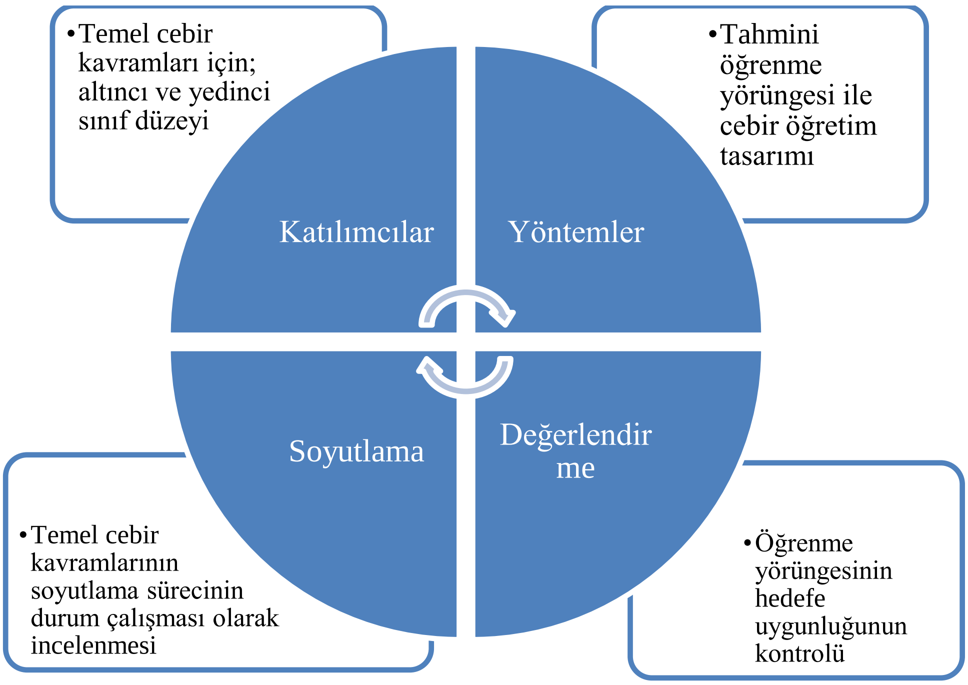
Tasarım Tabanlı Araştırma (TTA) yöntem olarak eğitim uygulamalarını yönlendirmek için bazı geleneksel araştırma yöntemlerinin etkili olamamalarına bir tepki olarak doğmuştur

(Design-Based Research Collective [DBRC], 2003; Lai, Calandra ve Ma, 2009; Ma ve Harmon, 2009). Tasarım tabanlı araştırmalar, etkinliklerin aşamalı olarak geliştirilmesini amaçlar ve öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini deneysel (ampirik) olarak anlamaya olanak sağlar (Research Advisory Committee, 1996; Cobb, Stephan, McClain ve Gravemeijer, 2001).

Geleneksel araştırma türlerine nazaran getirdiği yenilikler; öğretim kuramlarının somutlaştırılmasına, kuram, tasarım ve uygulama arasındaki ilişkinin anlaşılmasına yardımcı olan bir planlama ve geliştirme sürecidir (Kuzu, Çankaya ve Mısırlı, 2011). Son zamanlarda, Parker (2011) tasarım tabanlı araştırmanın teorik bir çerçeve ile desteklenen eğitim çalışmalarında daha fazla kullanılır bir araştırma pradigması olduğunu ifade etmiştir.

Şekil 4

Araştırma sürecinde tasarım ve durum çalışmasının grift yapısı



Bu araştırmada Parker (2011) ifade ettiği teorik olarak beslenen cebir öğretim döngüsü ile öğrencilerin soyutlama süreçlerinin incelenmesini ve açıklanmasını kolaylaştıracağı düşünülmüştür. Şekil 4'de ise bu sürecin nasıl iç içe girdiği ifade edilmektedir.

TTA, öğretim stratejilerinin sistematik olarak tasarlanmasını sağlamak amacıyla, araştırmacılar ve uygulayıcılar arasında işbirliğine dayalı olarak bağlamsal öğrenmenin araştırılması için geliştirilmiş bir model olarak görülmektedir (Brown, 1992; Collins,1992; Wang ve Hannafin, 2005). Tasarım tabanlı araştırmalar öğrenme ortamlarının gelişimi amacıyla bilginin oluşturulma sürecine yardımcı olmaktadır (DBRC, 2003). Ayrıca esnek bir yöntem olarak görülmektedir. Tasarım tabanlı araştırmalarının temel amacı eğitim araştırmaları ile gerçek yaşam durumları arasında güçlü bir bağlantı kurulmasını sağlamaktır. Amaç, uygulanan müdahalenin sadece değerlendirilmesi değildir, aynı zamanda benzer araştırmalara rehber bir görüşün ortaya çıkarılmasıdır (Amiel ve Reeves, 2008). Bu tanımlamalar düşünüldüğünde Tasarım Tabanlı Araştırmanın karakteristik özellikleri aşağıdaki tabloda özetlenmiştir;

Tablo 8

Tasarım tabanlı araştırma karakteristik özellikleri

Karakteristik Özellik	Açıklama
Pragmatik (Faydacı bakış açısı)	Hem beslendiği teoriyi ve hem de uygulanan etkinlikleri geliştirir.
İç İçe Desen	Uygulama, gerçek dünya ortamlarında yapılır ve tasarım süreci araştırmaya dâhil edilir ve incelenir. Tasarım teoriye dayanır.
Etkileşimli, Yinelemeli ve Esnek	Tasarım sürecine katılımcılarda katılır Süreç; analiz, tasarım, uygulama ve yeniden tasarım şeklindedir Uygulama tasarıma bağlıdır ama süreç esnektir
Bütünleştirici	Araştırmada güvenilirliği arttırmak için karma araştırma yöntemleri kullanılır.
Bağlamsal	Araştırma süreci, araştırma bulguları ve yapılan değişiklikler belgelenir.

(Wang ve Hannafin, 2005'den adapte edilmiştir)

TTA, somut etkinlikleri içeren yapılar tasarlamaya ve araştırmaya odaklanmıştır. Belli bir müdahalenin sadece tasarlanması ve test edilmesinden ziyade bir yapıyı içermektedir. Bu çalışmada ifade edilen yapı cebir kavramıdır. Daha açık bir ifadeyle, cebir yapısı iki temel kavramı olan denge (denklem) ve değişken kavramlarını içermektedir. Araştırma kapsamında yapılan müdahale öğrenme ve öğretme ile ilgili teorik bir yapıyı somutlaştırmakta ve teori ile uygulama arasındaki bağlantıyı içeren bir yapıyı yansıtmaktadır. Bu sayede öğrencilerin soyutlama ve zihnin cebirsel alışkanlıklarını nasıl kazandıkları daha iyi gözlenebilecektir. Kuzu, Çankaya ve Mısırlı (2011), TTA'nın türevlerini açıklarken yöntem olarak bir TTA da tek bir ortamda uzun süreli araştırma yapmayı, yinelenen döngünün mvcut olması, bağlamsal müdahaleler içermeyi ve gelişimsel süreçlerin barındırması gerekliliğini ifade etmişler ve bilginin ortaya çıkmasının hedeflendiğini vurgulamışlardır. Bu çalışmada cebir öğretimine yönelik olarak öğrenme yörüngesi kullanılmış ve doğası gereği yinelenen döngü ve gelişimsel süreçleri barındırdığı görülmüştür. Soyutlama sürecinde öğrencilerin gelişimsel süreçleri bağlamsal müdahaleler ile sorgulanmış ve ana odak noktası temel cebir kavramlarının yani bilginin nasıl ortaya çıktığı aranmıştır. Ayrıca çalışma boylamsal olarak dizayn edildiğinden dolayı Kuzu ve diğerleri (2011)'in ifade ettikleri TTA yöntemine uygun gereksinimleri bu çalışmanın içerdiği görülmüştür.

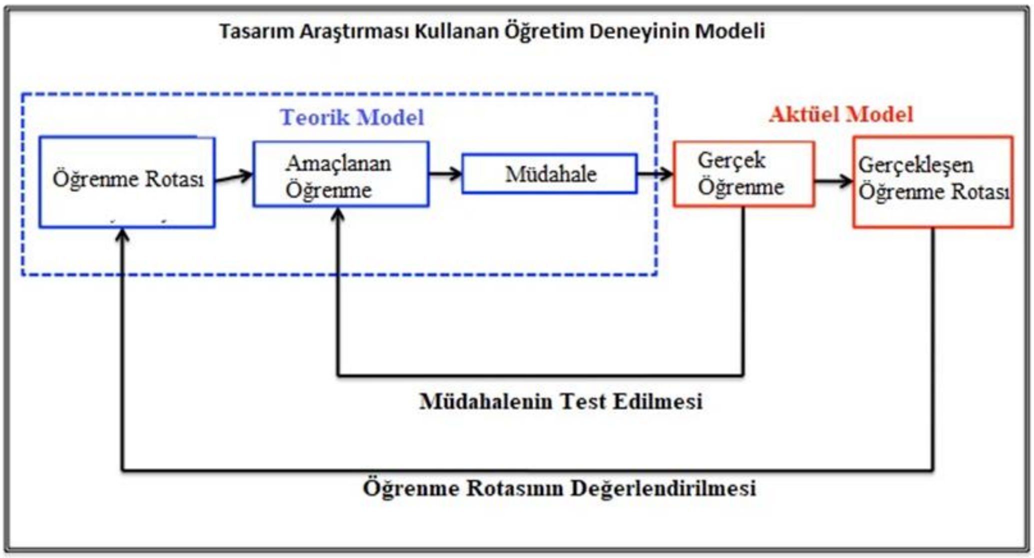
TTA'da öğretmenler ve araştırmacılar uygulamanın bağlamında anlamlı katkılar üretmek ve uygulayıcının içselleştirmesi için işbirliği içinde çalışmaktadırlar. Tasarı araştırmaları süreci araştırmacı ile uygulayıcının tasarımın nasıl uygulanacağını görüşmeleri ile başlamaktadır. Uygulayıcı tasarımın bağlama uygunluğu ve uygulanabilirliği noktasında oldukça önemli bir katılımcıdır (Amiel ve Reeves, 2008).

TTA'da dikkat edilmesi gereken hususlar (DBRC, 2003) ve bu ölçüde yapılması önerilen işleyiş şöyledir (Van den Akker, 1999): Literatür taraması süreci; uzman danışmanlığı, iyi örneklerin analizi ve mevcut uygulamaların durum çalışmasının incelenmesi; Uygulanabilir müdahale geliştirebilmek için araştırma sürecinde katılımcılarla etkileşim ve iş birliği sağlanmalı; Sistematik dokümantasyon analizinin araştırma sürecine ve sonuçlarına yansıması;Birden fazla araştırma yöntemini kullanmak; bu çalışmada tasarım araştırması ve durum çalışması tercih edilmiştir; Müdahalelerin deneysel (ampirik) testi. Üretilen bilgilerin inceleme süreci (Soyutlama sürecinin analizi).

Sonuç olarak TTA, teorik araştırmalar ile eğitim uygulamaları arasında bir köprü görevi görmektedir (DBRC, 2003). Confrey ve Lachance (2000), bir öğretim deneyini, bir akademik öğretim süresince bir sınıfta gerçekleşen planlı bir öğretim müdahalesi olarak tanımlar. Bir öğretim deneyinin çerçevesi resmi olarak oluşturulmamıştır çünkü gerçek yapısı bağlama göre değişmektedir ve öğrenci tepkisi araştırmacılara yol göstermektedir (Steffe & Thompson, 2000). Ancak, tasarım araştırması kullanan bir öğretme deneyi bir süreci incelemelidir (Moss, 2014). Aşağıdaki şekilde bu çalışmayı çerçeveleyen tasarım araştırmasını kullanan bir öğretim deneyinin mantık modeli görülmektedir.

Şekil 5

Öğretim deneyinin araştırma modeli



Bu model incelenecek olursa öğrenme rotasının (öğrenme yörüngesi) oluşturulması bir başlangıç kabul edilmelidir. Bu başlangıç için tasarım tabanlı araştırmalarda üç temel öğenin bir araya gelmesi öğrenme rotasının tasarım da kullanımını kolaylaştıracaktır. Bu öğeler; tasarımın hangi zemin üzerinden ilerleyeceğini belirleyecek olan hedefin tespiti, tasarımın kendisi ve tasarımın değerlendirilmesidir. TTA sürecinde farklı araştırma yöntemlerini bir arada kullanmak gerekebilir. Örneğin; incelenen sorunla ilgili analiz basamağında durum tespiti amacıyla bir durum çalışması gerçekleştirildikten sonra geliştirilen tasarımın uygulanabilirliğini incelemek veya eksikliklerin sahada gözlemlenmesi incelemek için nicel yöntemler kullanmak gerekebilir (Collins ve diğerleri, 2004).

TTA'da pragmatik bir perspektiften yapılan uygulamanın yeterince geliştirdiği düşüncesine ulaşılana kadar Şekil 5'de yer alan döngü devam etmektedir. Öğrenme yörüngesi doğasının gereği bu döngü TTA'nın da bir yöntem gerekliliğidir. Cebir kavramıyla ilk defa karşılaşan öğrencilere Matematik dersi, Cebir Öğrenme Alanının öğretimi konusunda yapılan bu araştırmada, bu kavramın öğretimi sürecinde öğrencilerin soyutlama ve alışkanlıkları arasındaki ilişkinin belirlenmesinde çalışmanın doğasına uygun olması nedeniyle yöntem olarak TTA yöntemi seçilmiştir. TTA kuramları test etmek yerine yeni ürünler geliştirmek amacıyla çeşitli araştırma yöntemlerinden yararlanır (Edelson, 2002). Öğrenme yörüngesinde gelişimsel süreçlerin matematiksel soyutlama boyutunda ele alınması ve bu sayede bilginin öğrenci zihninde nasıl oluştuğunun açıklanmaya çalışılması TTA'yı bu yeni öğrenme sürecini açıklamak için bir yöntem olarak kullanmayı mümkün kılmaktadır. Bu çalışmada birden fazla kavram, konu tekrarlı bir döngüde gelişmiş ve boylamsal olarak sürdürülmesi nedenlerinden dolayı TTA öğretim deneyi, tasarım araştırması, geliştirme araştırması yerine tercih edilmiştir. Cebir kavramlarının öğretimi için geliştirilen öğrenme yörüngelerinin her bir müdahale süreci bir öğretim deneyi olarak ele alınmış ve sonunda temel cebir kavramlarının öğretimine yönelik bir tasarım ortaya konulmak istenmiştir. Bu doğrultuda araştırmanın planlanmış aşamaları aşağıdaki gibidir;

Araştırmanın ilk aşaması öğrencilerin temel cebir kavramlarını anlama düzeylerini belirlemeye yöneliktir. Öğrencilere yönelik olarak literatür kullanılarak cebire hazırbulunuşlukları ve cebir kavramlarını bilme düzeyleri belirlenmiştir. Yine literatür temele alınarak öğrencilerin gereksinimlerini karşılayabilecek öğretim materyal ve etkinlikleri öğrenme rotası çerçevesinde geliştirilmiştir. Burada öğrenme rotasının öncelikli amacı öğrencilerin soyutlama becerilerinin gözlemlenmesinin daha anlaşılır hale getirilebilmesidir. Araştırmanın ikinci aşamasında tasarımın uygulanabilirliği, eksiklikleri, öğrencilerin soyutlama becerileri, sınıf içi gözlemler ve yarı- yapılandırılmış öğrenci görüşmeleri sonucunda elde edilen veriler bir durum çalışması olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmanın ikinci aşamasında Durum Çalışmasından faydalanılmıştır. Durum çalışmaları gerçek yaşamın, güncel bağlamın içindeki bir durumun araştırılması (Yin, 2009); araştırmacının gerçek yaşamdan, güncel ancak sınırlı bir durum ya da belli bir zaman dilimi ile sınırlandırılmış çoklu durumlar hakkında çeşitli bilgi kaynakları yardımıyla oldukça ayrıntılı bilgi topladığı, durum betimlemesi ya da durum temalarının ortaya çıkarıldığı nitel araştırma yaklaşımıdır (Creswell, 2013). McMillan (2000)'a göre ise; durum çalışması bir ya da birden fazla olayın, durumun, ortamın, grubun veya birbirine bağlı olan sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntemdir.

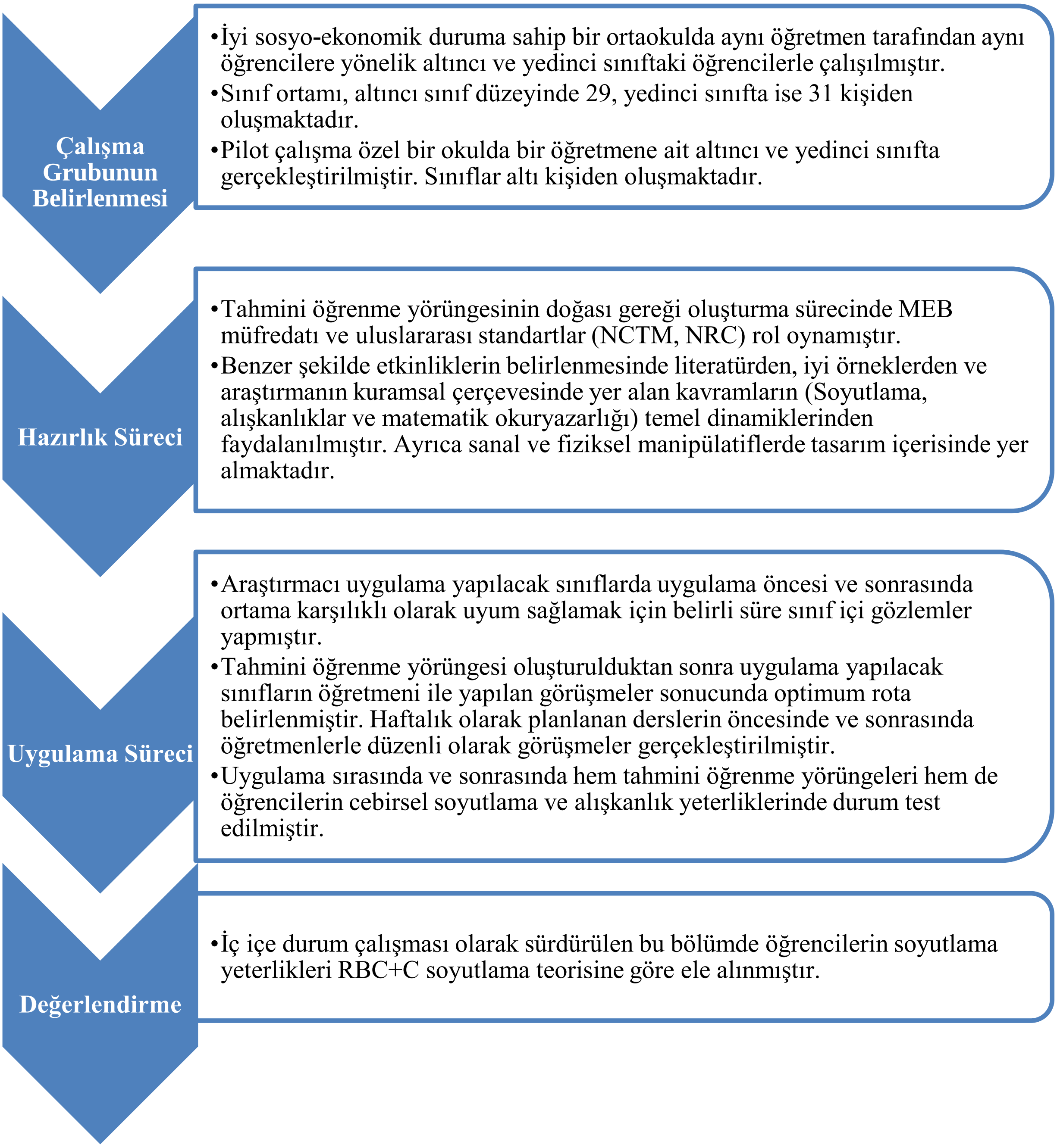
Durum çalışması, güncel bir olguyu (cebirin soyutlanması) kendi gerçek yaşam çerçevesi (okul ortamında verilen cebir eğitimi) içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı (cebirin iki temel kavramınun öğrencilerin zihninde nasıl soyutlandığı) ve birden fazla kanıt veya veri kaynağının (literatür, gözlem ve mülakat) mevcut olduğu durumlarda kullanılan bir araştırma yöntemi olarak tanımlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

3.2. Araştırma Süreci

Araştırmanın geçirdiği süreçler izlenen metodolojinin bütüncül bir görüntüsünü yansıtması için ele alınmıştır. Araştırma süreci, özetlenmiş bir biçimde Şekil 6'da sunulmaktadır.

Şekil 6

Araştırma sürecinin açıklanması



Yukarıdaki araştırma sürecinin daha iyi anlaşılması amacıyla aşağıdaki Tablo 9 hazırlanmıştır.

Tablo 9

Araştırma sürecinin aşamaları

AŞAMA	YAPILAN İŞ
HAZIRLIK	Araştırma Fikrinin Belirlenmesi Araştırmaya Yön Verecek Literatür Taramasının Yapılması Araştırmanın Yönteminin ve Deseninin Belirlenmesi Araştırmanın Katılımcılarının Belirlenmesi Araştırma Sürecinde Uygulama Yapılacak Kazanımların Belirlenmesi Araştırma Sürecinde Kullanılacak tahmini öğrenme yörüngelerinin Oluşturulması Araştırma sürecinde kullanılacak veri toplama araçlarının belirlenmesi Geçerlik ve Güvenirlik Uygulamasının Yapılması
PİLOT	Veri Toplama Araçlarının (Testler ile Görüşme Sorularının) Uzman Görüşüne Sunulması ve Pilot Uygulamasının Yapılması Testlerinin Uygulamasının Yapılması ve Analizi Tahmini öğrenme yörüngelerinin Pilot Uygulaması
İLK	Sınıf Düzeyine Uygun Olarak tahmini öğrenme yörüngelerinin Oluşturulması Tahmini öğrenme yörüngelerinin Uygulama Öğretmeni ile İncelenmesi Tahmini öğrenme yörüngelerinin Gerçek Uygulamasının Yapılması
İKİNCİ	Testlerin uygulanması ve analizi Öğrencilerle görüşmelerin yapılması ve Analizi Bulgular ve Sonuçlar

Hazırlık aşamasında araştırma fikrinin belirlenmesi ile ortaokul öğrencilerinin matematik öğrenimlerindeki ilk soyutlama deneyimleri olan cebir kavramının iki temel kavramınu (değişken ve denge/ denklem) nasıl yaptıklarının belirlenmesi ve desteklenmesi amaçlanmıştır.

Araştırmaya yön verecek literatür taramasının yapılması, özellikle tahmini öğrenme yörüngesinin doğası gereği ve inşa edilmesinde alanyazında kullanılan etkinlik ve değerlendirme araçlarının incelenmesi yapılmıştır. Kuramsal çerçevede yer alan kavramların araştırmanın işleyişle olan uyumunun sağlanması (tahmini öğrenme yörüngesinde kullanılacak alışkanlık ve soyutlama etkinliklerinin belirlenmesi).

Araştırmanın yönteminin belirlenmesi, iki aşamalı olarak belirlenmiştir. İlk aşamada tahmini öğrenme yörüngesinin tasarım tabanlı araştırma olarak inşa edilmesi, ikinci aşamada öğrencilerin soyutlama süreçlerinin durum çalışması yöntemiyle ortaya çıkarılmasıdır.

Araştırmanın katılımcılarının belirlenmesi, sosyo-ekonomik açıdan iyi seviyede olan okulların belirlenmesi, gönüllü olarak araştırmaya katılan öğretmenlerin seçilmesi ve gerekli izinlerin alınmasıdır.

Araştırma sürecinde uygulama yapılacak kazanımların belirlenmesi, altıncı ve yedinci sınıf Matematik Öğretim Programı, MEB (2017) cebir öğrenme alanı kazanımlarının listelenmesidir.

Araştırma sürecinde kullanılacak tahmini öğrenme yörüngesinin oluşturulması, alanyazın incelenerek öğretimde kullanılacak rotaların ana hatlarının belirlenmesidir. Alanyazında kavram hakkındaki yanılgıların belirlenmesi ve rota içerisinde değinilmesidir. Öğrenme Rotası içerisine cebir tanı, alışkanlık, soyutlama ve matematik okuryazarlık çalışmalarının yerleştirilmesidir. Öğrenme rotasının gelişimine yönelik teknoloji ve somut manipülatiflerin yerleştirilmesidir.

Araştırma sürecinde kullanılacak veri toplama araçlarının belirlenmesi, ZCA belirleme testleri, Matematik okuryazarlık testleri, Soyutlama becerilerini belirlemeye yönelik görüşme soruları ve Araştırmacı alan notlarının hazırlanmasıdır.

Geçerlik ve güvenirlik uygulamasının yapılması, geçerlik ve güvenilirlik uygulamalarının yapılmasıdır.

Pilot uygulama aşamasında esas uygulamada karşılaşılabilecek aksaklıkların giderilmesi amaçlanmıştır. Bu aksaklıkarı giderecek müdahaleler gerçekleştirilmiştir.

Veri toplama araçlarının (testler ve görüşme sorularının) uzman görüşüne sunulması ve pilot uygulamasının yapılması, uzman görüşü ve pilot uygulama sonrası düzeltmelerin yapılmasıdır.

Testlerinin uygulamasının yapılması ve analizi, çalışma gruplarına testlerin uygulanması ve gerekli analizlerin yapılmasıdır; bu ön uygulamada planlanan öğrencilerin hazırbulunuşluklarını incelemek ve onların cebirsel tanılarını görmektir. Bu süreç ile nasıl bir rota izleneceği de belirlenmiş olacaktır.

Tahmini öğrenme yörüngelerinin pilot uygulaması, pilot uygulama özel okulda 6 kişilik sınıflarda yapılmış ve sonrasında düzeltmeler gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın ilk aşamasında, Tasarım tabanlı araştırmanın varsayımlarına uygun olarak tahmini öğrenme yörüngesinin geliştirilmesi ve uygulanma süreci yer almaktadır.

Sınıf düzeyine uygun olarak tahmini öğrenme yörüngesinin oluşturulması, Her bir sınıf düzeyindeki kazanımlar için ayrı ayrı tahmini öğrenme yörüngesinin oluşturulmasıdır.

Tahmini öğrenme yörüngesinin uygulama öğretmeni ile incelenmesi, Literatür temele alınarak hazırlanan tahmini öğrenme yörüngesinin uygulayıcıya anlatılması, benimsenmesi ve pratikte kullanışlılığı arttırmak amacıyla araştırmacı ve uygulayıcı arasında pazarlıklar gerçekleştirilmiştir.

Öğrenme Yörüngesinin Gerçek Uygulamasının Yapılması,

Araştırmanın ikinci aşamasında, öğrencilerin soyutlama süreçleri ve gerekli testlerin analiz sürecinin değerlendirilmesi yer almaktadır.

Testlerin uygulanması ve analizi,

Öğrencilerle görüşmelerin yapılması ve analizi, çalışma grubundan seçilen öğrencilerle görüşmelerin yapılması soyutlama yeterliklerinin belirlenmesidir.

Bulgular ve Sonuçlar, testlerin analiz edilmesi ve değerlendirilmesidir. Tahmini öğrenme yörüngesinin değerlendirilmesidir. Öğrencilerin soyutlama ve cebir alışkanlıklarının belirlenmesi ve karşılaştırılmasıdır.

3.3. Katılımcılar

Lincoln ve Guba (1985)'a göre, araştırmalarda örneklemeler belirli bir amaçla yapılır. Nitel araştırmalar, genellikle amaçlı bir şekilde seçilmiş zengin bilgi içeren küçük örneklemlerle detaylı bir şekilde yapılır (Patton, 2014).

Öğrencilerin bilgi yapılarını ve düşünme süreçlerini ortaya çıkarmada ne kadar etkili olduğunun belirlenmesi ve araştırma kapsamında hazırlanan öğrenme rotası doğrultusunda geliştirilen etkinliklerin kabul edilebilirliğinin ve gerçek durumlarda nasıl uygulanabildiğinin ortaya konulması amacıyla gerçekleştirilen pilot uygulama için çalışma grubu oluşturulmuştur. Araştırmanın pilot uygulaması kapsamında etkinliklere katılacak öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir. Amaçlı örnekleme, zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına olanak sağlayan bir örnekleme yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Ölçüt örnekleme yöntemi, araştırmaya konu olacak örnekleme belli bir kıstasın getirilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Özel okuldaki bir sınıfta bulunan öğrenci sayısının az oluşu bir kıstas olarak belirlenmiştir. Böyle bir kıstasın uygulanması yapılacak etkinliklere optimum geri bildirim alabilmek ve esas uygulamada eksiklerin giderilmesini sağlamaktır. Bu doğrultuda araştırmanın pilot uygulamalarının gerçekleştirilmesinde özel okulda yer alan 6.sınıf ve 7.sınıfın mevcutları 6'şar kişidir. Esas uygulamanın çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemi ile oluşturulmuştur. Çalışmaya katılan öğrencilere ait betimleyici bilgiler Tablo 10'da yer almaktadır.

Tablo 10

Katılımcı bilgileri

Öğrenci Sayısı	Sınıf Düzeyi	Okul	Grup
6	6.sınıf	Özel Okul	Pilot Uygulama
6	7.sınıf	Özel Okul	Pilot Uygulama
29	6.sınıf	Devlet Okulu	Esas Uygulama
31	7.sınıf	Devlet Okulu	Esas Uygulama

Öğrenciler uygulanan belirleyici testlerden aldıkları puanlara göre iyi, orta ve vasat şeklinde kategorilere ayrılmıştır. Bu sınıflamadan sonra öğretmenlerin öğrencileri hakkındaki görüşleri de alınarak üç farklı düzeyden belirlenen öğrencilerle görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşmelere katılan öğrencilerin betimsel özellikleri Tablo 11'de görülmektedir.

Tablo 11

Görüşme yapılan öğrencilerin tanımlanması

Öğrenci	Okul	Cinsiyet	Düzey
Ahmet	Pilot Uygulama Okulu	Erkek	İyi
Dilara	Pilot Uygulama Okulu	Kız	Orta
Aleyna	Uygulama Okulu	Kız	İyi
Mehmet	Uygulama Okulu	Erkek	İyi
Burak	Uygulama Okulu	Erkek	Orta
Pınar	Uygulama Okulu	Kız	Orta
Sabri	Uygulama Okulu	Erkek	Vasat
Buse	Uygulama Okulu	Kız	Vasat

ÖY'nin geliştirilmesi ve uygulaması 2016-2017 ve 2017-2018 Eğitim- Öğretim yılları içerisinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma aynı öğretmen ve öğrencilerle iki yıl boyunca devam edeceği için uygulama öncesinde okul idaresi ile görüşülmüş ve sınıflarla ilgili planlama yapılmıştır. Bu çalışma için gerekli olan izinler MEB (EK 1) ve velilerden (EK 2) sözlü ve yazılı olarak alınmıştır.

Katılımcılar 2016- 2018 Eğitim Öğretim yılında Bursa İli Nilüfer İlçesinde bir devlet okulunda öğrenim gören ve araştırma süresince aynı matematik öğretmenin derslerine girdiği 6. sınıflar arasından seçilmiştir. 2016-2017, 2017-2018 eğitim öğretim dönemlerinde araştırmacı ve öğretmen aynı sınıfların derslerine girmiş ve araştırma süreci gerçekleştirilmiştir. 2 yıllık süre içerisinde sınıfların öğrenci sayılarında bir eksilme olmamıştır. Çalışma grubundaki öğrenciler 13 ile 14 yaşları arasındadır. Öğrencilerin çoğunluğu orta sosyoekonomik düzeyden idi. Öğrenciler öğretmen tarafından atanan iki kişilik gruplar halinde oturmuşlardır.

3.3.1. Öğretmenin tanımlanması. Çalışmaya katılan öğretmen, matematik eğitimi alanında yüksek lisans derecesine sahiptir ve matematik eğitimi alanında doktorasına devam etmektedir. Uygulamanın yapıldığı okulda iki yıl beşinci ve altıncı sınıflarda ders vermiştir. Öğretmenin seçilme nedeni olarak araştırmacı ile yakın bir iş ilişkisi olması ve cebir öğretmenin yeni yöntemlerini öğrenme konusunda istekli olmasıdır. Ayrıca çalışmaya katılmada gönüllü olmuştur.

3.3.2. Uygulayıcının tanımlanması. Araştırmacı çalışmanın öğretim aşamasında öğrenme yörüngesinin hazırlanmasında, revize edilmesinde, uygulanmasında dersin öğretmeni ile birlikte çalışmıştır. Araştırmacı, ders planlarının uygulamasına ilişkin öğretmenle yapılan pazarlık süreçlerinde bilimsel kanıt arayışı içinde olmuştur. Araştırmacı uygulama yapılan okulların işleyişini, yapısını ve öğretmen-öğrenci profilini tanıyabilmek amacıyla fakültede sürdürülen öğretmenlik uygulaması koordinatörü olması vesilesiyle okullarda bulunmuş ve ikili ilişkileri ilerletmiştir. Araştırmacı öğretmenlerle iletişim kurarken, öğretmenlik tecrübesinden yararlanmıştır.

3.4. Öğrenme Yörüngesi Oluşturulma Süreci

Öğrenme yörüngesi oluşturulurken yürürlükte olan Ortaokul Matematik Öğretim Programı (MEB, 2013) incelenmiş ve cebir kazanımları listelenmiştir. Tablo 12'de öğrenme alanlarının sınıflara göre dağılımı verilmiştir.

Tablo 12

Öğrenme alanlarının sınıflara göre dağılımı

ÖĞRENME ALANLARI	SINIFLAR			
	5	6	7	8
Sayılar ve İşlemler	X	X	X	X
Cebir	-	X	X	X
Geometri ve Ölçme	X	X	X	X
Veri İşleme	X	X	X	X
Olasılık	-	-	-	X

Uygulama öğrencilerin cebirle ilk karşılaştıkları ve cebirin iki temel kavramınu öğrendikleri 6 ve 7. sınıflarda yapılmıştır. ÖY cebirin iki temel kavramı olan denge ve değişken kavramlarının öğrenilmesine yöneliktir.

3.4.1. Cebir öğrenme alanı kazanımları. Cebir öğrenme alanına ilişkin kazanımlar ilk olarak 6. Sınıf öğretim programında yer almaktatır. Cebirle ilgili temel kavramları kapsamaktadır. Bu kazanımlar, öğrencilerin aritmetik dizilerde istenilen terimi bulmaları, cebirsel ifadeleri anlamlandırmaları ve cebirsel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemleri yapmalarını hedeflemektedir. Aşağıda yer alan Tablo 13'de 6. sınıf cebir öğrenme alanı kazanımları, bu kazanımların MEB (2013; 2017) öğretim programına göre belirlenen ders saati süreleri ve araştırmanın analiz sürecinde kullanılacak olan kazanım kodlamaları gösterilmektedir.

Tablo 13

Araştırma kapsamındaki 6. sınıf cebir öğrenme alanı kazanımları

Kazanım Kodu	Kazanım	Ders Saati
6C1	Aritmetik dizilerin kuralını harfle ifade eder; kuralı harfle ifade edilen dizinin istenilen terimini bulur.	6
6C2	Sözel olarak verilen bir duruma uygun cebirsel ifade ve verilen bir cebirsel ifadeye uygun sözel bir durum yazar.	3
6C3	Cebirsel ifadenin değerlerini değişkenin alacağı farklı doğal sayı değerleri için hesaplar.	2
6C4	Basit cebirsel ifadelerin anlamını açıklar.	2
6C5	Cebirsel ifadelerle toplama ve çıkarma işlemleri yapar.	3
6C6	Bir doğal sayı ile bir cebirsel ifadeyi çarpar.	6
TOPLAM		19

MEB (2013) Matematik dersi 7. sınıf öğretim programında cebir öğrenme alanında eşitlik-denklem alt öğrenme alanı belirlenmiştir. Bu sınıf düzeyinde öğrencilerden genel olarak, eşitlik kavramını anlamaları ve birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri ve ilgili problemleri çözmeleri beklenmektedir. Aşağıda yer alan Tablo 14'de 7. sınıf cebir öğrenme alanı kazanımları ve bu kazanımların MEB (2013; 2017) öğretim programına göre belirlenen ders saati süreleri ile araştırmanın analiz sürecinde kullanılacak olan kazanım kodlamaları gösterilmektedir.

Tablo 14

Araştırma kapsamındaki 7. sınıf cebir öğrenme alanı kazanımları

Kazanım Kodu	Kazanım	Ders Saati
7C1	Gerçek yaşam durumlarına uygun birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri kurar.	5
7C2	Denklemlerde eşitliğin korunumu ilkesini anlar.	2
7C3	Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözer.	5
7C4	Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kurmayı gerektiren problemleri çözer.	3

TOPLAM	15

ÖY kapsamında cebir öğrenme kazanımları ile ilgili olarak yukarıda verilen Tablo 13 ve Tablo 14 incelendiğinde; 6. sınıf için 6 kazanım, 19 ders saati toplam 4 hafta, 7. sınıf için 4 kazanım, 15 ders saati toplam 4 hafta olduğu görülmektedir.

3.4.2. Hazırlık Aşaması (Preliminary Design Phase). Hazırlık aşaması, matematiksel öğrenme amaçlarının belirlenmesi ve belirlenen amaçların öğretim sürecinin tasarlandığı düşünsel deneylerle (anticipatory thought experiment) bütünleştirilmesi ile başlamaktadır.

Literatür taraması genel olarak öğrencilerin cebir alanında kavram yanılgılarının olduğunu göstermiştir (Blanton ve diğerleri, 2015). Ayrıca soyut kavramların öğretiminde bağlamsal içeriklere daha fazla yer verildiğinde öğrencilerin daha anlamlı öğrendikleri (Banerjee & Subramaniam, 2011) ve kavram yanılgılarının azaldığı görülmüştür (Drijvers, Goddijn ve Kindt, 2011).

ÖY; (a) öğrenciler için öğrenme amaçları, bu katkıyı öğretim programı yapmaktadır ve çalışmanın amacı kapsamında cebirin iki kavramına yönelik olarak kazanımlar çalışmaya dahil edilmiş ve öğretimin amacı haline gelmiştir, (b) öğretim etkinliklerinin planlanması, bu aşamada ise öğretimi destekleyecek olan kavramsal çerçevede de yer alan kavramlardan faydalanılmıştır ve (c) sınıfta kullanılan öğretim etkinliklerinin öğrencilerin alışkanlıklarına ve soyutlamalarına nasıl etki edeceğinin tahmin edilmesini kapsayan hipotezler olmak üzere üç aşamadan oluşmaktadır. Varsayımlar oluşturmak öğretim etkinliklerinin planlanmasının temelidir. Bu planlama aşamasında öğretim programında yer alan kazanımlara ulaşmanın yanısıra ÖY öğretim amaçları şöyledir;

Günlük yaşam durumları ile cebirsel ifadeler arasında bağlantılar kurabilmek,

Cebirsel ifadeleri matematiksel notasyonlar olarak açıklayabilmek,

Denge kavramı hakkında bilgi sahibi olmak

Bağlamsal problem durumlarında cebirsel denklemi (denge) kurabilmektir.

3.4.3. Öğretim Etkinliklerinin Tasarlanması. Öğretim etkinliklerinin geliştirilmesi için tahmini öğrenme yörüngesi iyi bir araçtır. Öğretim etkinlikleri geliştirilen TÖY doğrultusunda tasarlanır. Geliştirilen etkinlikler uygulama süresince yeniden düzenlenebilir. Öğrencilerin zihinsel süreçlerinin ortaya konulması amacıyla geliştirilen TÖY aracılığıyla bu aşamada geliştirilecek öğretim etkinliklerinde yer alacak materyallerde düzenlenir (Bakker, Doorman ve Drijvers, 2003).

Bu çalışmada ortaokul 6 ve 7.sınıfların cebir konusuna ilişkin kazanımlar kapsamında hazırlanan TÖY kullanılarak etkinlikler geliştirilmiştir.

Geliştirilen etkinliklerin uygulanabilirliğini ve geçerliğini görebilmek için pilot uygulama yapılmıştır.

Pilot uygulamanın öğretim süreci video veya ses kaydına alınmıştır. Pilot uygulamaya ilişkin video kayıtları incelenmiş, analizleri yapılmıştır. Öğrenme amaçlarını karşılayamadığı düşünülen etkinlikler uzman görüşleriyle değerlendirilmiş, düzenlenmiş ve yeniden uygulanmıştır.

3.4.4. Öğretim Deneyi Aşaması (Teaching Experiment Phase). Öğretim deneyi bir tür tasarım araştırmasıdır. Öğretim deneyinin temel amacı, araştırmacıların öğrencilerin öğrenme süreçlerini ve akıl yürütme aşamlarını kişisel olarak gözlemlemektir (Steffe & Thompson, 2000). Öğretim deneyi, sınıf tasarımı araştırmasının çekirdeğini oluşturur (Gravemeijer, 2004) Bu tür bir çalışma birkaç ders saati veya bütün bir akademik yıl boyunca gerçekleşebilir (Moss, 2014). Katılımcılar genellikle bir öğretmen-araştırmacı, bir grup öğrenci ve bir gözlemci-araştırmacı içerebilir (Steffe & Thompson, 2000). Öğretmen araştırma sürecinin tamamına dahil olmamakla birlikte, öğretmen-araştırmacı deney sürecinde öğretmenin yerini alır (Molina, Castro ve Castro, 2007).

Öğretim deneyleri, öğretim etkinliklerini geliştirme ve test etme sürecini tekrarlayarak öğrencilerin öğrenmesini analiz eder. Steffe ve Thompson (2000)'a göre, matematik dersinde gerçekleştirilen öğretim deneyinin amacı, öğrencilerin öğrenme sürecini ve geliştirdikleri matematiksel etkinlikleri araştırmak ve açıklamaktır.

Öğretim deneyi ile öğrencilerin soyutlama ve alışkanlık becerilerinin nasıl oluştuğunu daha iyi açıklayabilmek için veri toplanmasına iyi bir zemin oluşturmak amaçlanmaktadır. Öğretim deneyi matematiksel fikirlerin ve öğrenme hipotezlerinin öğretime uyarlanabilmesi üzerinde durmaktadır. Öğretim deneyleri gerçekleşmeden önce öğretmen ve araştırmacı sınıfta uygulanacak etkinlikleri değerlendirirler. Değerlendirmenin ardından tasarlanan etkinliklerin öğretmen tarafından içselleştirilmiş ve daha benimsenmiş olarak uygulanır. Her etkinliğin uygulaması sonrasında öğretmen ve araştırmacı etkinliklerin geliştirilmesi için uygulamanın değerlendirilmesini yaparlar.

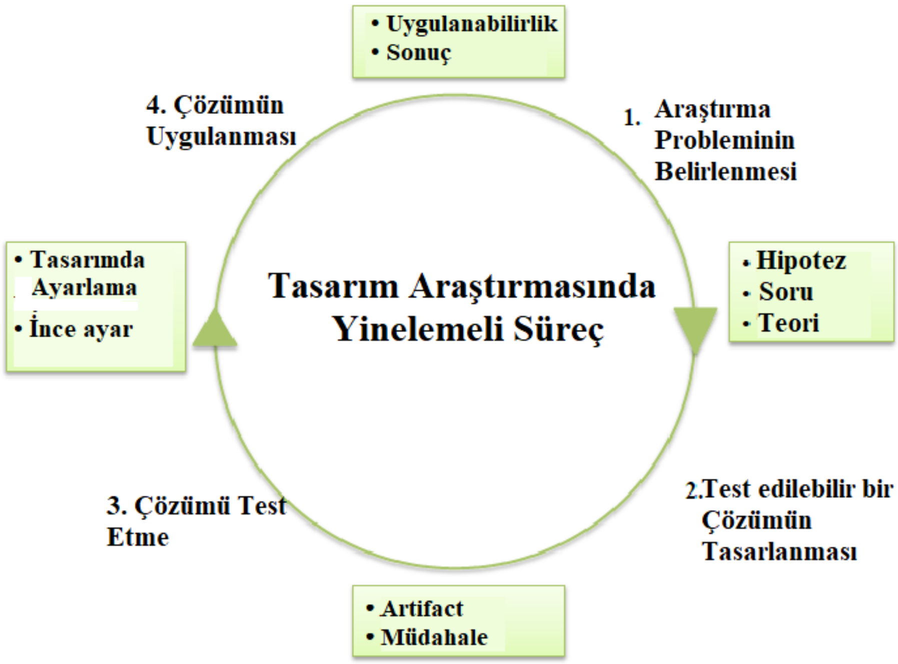
Confrey ve Lachance (2000), öğretim deneyini, bir konunun öğretimi süresince sınıfta gerçekleşen planlı öğretim müdahalesi olarak tanımlar. Öğretim deneyi içerdiği bağlama göre değiştiği ve öğrenci tepkilerine göre şekillendiği için çerçevesi net olarak belirtilmemiştir (Steffe ve Thompson, 2000). Tasarım araştırması kullanan öğretme deneyi belirli bir süreci incelemelidir (Moss, 2014). Ayrıca, deney süresince araştırmacı, müdahalenin bir sonraki adımını bildirmeli, öğrencilerin öğrenmelerinin ve davranışlarının altında yatan anlamı sürekli olarak değerlendirmeli ve sorgulamalıdır (Moss, 2014).

Öğretim deneyi aşaması, TÖY ile oluşturulan etkinliklerin uygulaması her sınıf düzeyi için 4 hafta olmak üzere toplamda 8 haftayı kapsamaktadır. Etkinlikler ses veya video kaydına alınmıştır. Etkinlikten sonra, kayıt altına alınan dersler, araştırmacı ve öğretmen tarafından incelenmiştir, birlikte yapılan değerlendirmeler neticesinde düzenlemesi gereken hususlarda güncellemeler yapılmıştır. Bu araştırma kapsamında geliştirilen etkinlikler yinelemeli tasarım kapsamında düzenlenmiştir.

3.4.5. Yinelemeli tasarım. Yinelemeli tasarım, tasarım araştırmasının ve tasarım araştırması kullanan deneylerin öğretilmesinin önemli bir bileşenidir. Bir öğretim deneyinde, öğretim faaliyetlerinin geliştirilmesi ve test edilmesi, öğretim müdahalelerinin tasarlanması, veri toplanması, verilerin analiz edilmesi ve tasarımda ayarlamalar yapılması yinelemeli bir süreçtir. Öğrencilerin öğrenme sürecini analiz etmeyi amaçlayan bir çalışma öğrenme yörüngelerini temele alan deneysel bir model oluşturmakla başlar. İlk model, araştırmacıların teorik varsayımlarına ve önceki deneyimlerine dayanır (Molina ve diğerleri, 2007). Bu öğretim deneyinde TÖY, cebirsel ifadelerden denklemlere ilerleyen bir konu bütünü temel alınarak hazırlanmıştır. Tasarım araştırmasını kullanan bir öğretim deneyinde, öğretmen-araştırmacı sınıfta öğretmen gibi öğrencilerle etkileşime girer ve araştırmacılar veri toplar. Daha sonra, bu veriler öğrencinin öğrenmesiyle ilgili ilk hipotezleri onaylayarak veya reddederek araştırmayı yönlendirir. Süreç devam eder ve sonunda optimum bir ürün elde etmek için ayarlanmış ve rafine edilmiş nihai bir modele hazırlanır. Bu döngü boyunca, araştırmacılar modelin beklendiği gibi performans gösterip göstermediğini araştırır aynı zamanda gözlemlerine dayalı olarak modeli yeniden tasarlayıp detaylı düzenlemeler yapar (Confrey, 2006; Steffe & Thompson, 2000). Ek 3, Çalışmanın ilk modeli ve Ek 3, detaylı düzenlemeler ile yeniden tasarlanmış modelini içerir. Tasarım araştırmasının yinelemeli süreci Şekil 7'de gösterilmektedir.

Şekil 7

Yinelemeli tasarım süreci



Şekil 7'de tasarım araştırmasının yinelemeli süreci, araştırma probleminin tanımlanması ile başlayan dairesel bir sistem olarak gösterilmektedir. Araştırma problemine hitap eden bir hipotez, soru veya teori geliştirilmiştir. Bu, artifact (materyal) veya müdahaleyi içeren test edilebilir çözüm tasarımının oluşumunu sağlamıştır. Çözüm test edilmiş, tasarım ve modelde ayarlamalar yapılmıştır. Son olarak, çözümün uygulanması ile modelin ve teorik kurmanın uygulanabilirliği belirlenmiştir (Middleton ve diğerleri, 2008'den uyarlanmıştır).

3.5. Veri Toplama Araçları

Tasarım araştırması kullanılan öğretim deneyini analiz etmek için çeşitli veri kaynakları kullanılmıştır. Araştırmada veriler ağırlıklı olarak dokümanlar, gözlem, görüşme gibi nitel araştırmanın doğasıyla uyumlu olan veri toplama araçlarıyla veri çeşitlemesi yapılarak toplanmıştır. İncelenen daha geniş fenomenlerle (soyutlama ve alışkanlıklar) ilgili kaynak toplanmıştır (Cobb ve diğerleri, 2003). Nitel verileri desteklemek veya değerlendirmeye yardımcı olmak amacıyla nicel veri toplama aracı olan başarı testleri kullanılmıştır. Araştırma verileri, yarı-yapılandırılmış gözlemler, yarı-yapılandırılmış öğrenci görüşmeleri, başarı testleri ve video-ses kayıtları ile toplanmıştır. Veri toplama araçları birbirini destekleyici niteliktedir. Veri toplama araçlarının hazırlanmasında ve veri toplama sürecinde kavramsal çerçeve temel alınmıştır. Araştırmacı ve öğretmen, sınıf içi müdahalelerin nasıl olması gerektiği hakkında düzenli ve sürekli olarak fikir alışverişinde bulunmuştur. Fikir alışverişi ile çalışma ve araştırma sürecinin kalitesi arttırılmak istenmiştir.

Bu araştırmada veri toplama süreci üç aşamada gerçekleştirilen yinelemeli bir süreçtir. İlk aşamada gözlem ve ön testlere yer verilmiştir. İkinci aşama, TÖY hazırlanması / uygulaması / düzenlemesi için görüşmelerin yapılması ve ileriye dönük analizlerin yapılmasından oluşmuştur. Üçüncü aşamada öğrencilerin soyutlama süreçleri ortaya çıkarılmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları aşağıda başlıklar halinde açıklanmıştır.

3.5.1. Gözlem. Nitel araştırmada veri toplama tekniklerinden biri olarak gözlem; davranışları doğal ortamında ayrıntılı olarak araştırmak için iyi bir yöntemdir (Glesne, 2013; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu araştırmada yarı-yapılandırılmış ve yapılandırılmış gözlemlere başvurulmuştur. Araştırmanın esas uygulamasından önceki haftalarda keşif gözlemleri yapılmıştır. Bu süreçte yapılandırılmamış gözlemlerden faydalanılmıştır. Araştırmacı, sınıfta meydana gelen olayları ve öğretim deneyi hakkında bilgi verebileceğini düşündüğü herşeyin alan notlarını (Maxwell, 2005) almıştır. Araştırmacı katılımcı gözlemci rolünü üstlenmiştir. Böylece araştırmacı sınıf tartışmaları ve küçük grup aktiviteleri sırasında sınıfın sosyal normlarını gözlemlemesini sağlamıştır (Cobb & diğerleri, 1996). Araştırmacı öğretmenin sınıftaki rolünü ve sınıf düzenini de gözlemlemiştir. Bu gözlemler araştırmacının, öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyine ilişkin TÖY bağlamlarını belirlemesini sağlamıştır. Bu gözlemler sırasında öğrenci ve öğretmenlerin araştırmacıya ısındırılması amaçlanmıştır.

Araştırmanın uygulama sürecinde TÖY'ün izlenmesi için çeşitli aşamalar sonrasında uzman görüşleri alınarak, yarı-yapılandırılmış gözlem formları oluşturulmuştur (Ek 4). İlerleyen aşamalarda ise öğretim tasarım ürünü olan materyal ve etkinliklerin uygulanabilirliği ve kullanışlılığını belirlemeye yönelik yapılandırılmış gözlemlerden yararlanılmıştır (Ek 5).

3.5.2. Görüşme. Görüşme, araştırma yapılan konu hakkında bilgi edinebilme veya ilk bakışta görünmeyen durumlar hakkında alternatif açıklama fırsatı oluşturması sebebiyle sıklıkla tercih edilen bir tekniktir (Glesne, 2013; Yıldırım ve Şimşek, 2016). Görüşme, öğrencilerin sorgulanması veya karşılıklı tartışma değildir. Aksine bireyin iç dünyasına girerek sözel bilgiler dışında davranışsal bilgilerin de elde edilmesini sağlayan karşılıklı ve etkileşimli bir iletişim sürecidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016) Bu araştırma kapsamında yarı-yapılandırılmış görüşmelerden yararlanılmıştır.

Belli bir amaca yönelik sorulardan oluşan görüşme çizelgesinin kullanıldığı (Denscombe, 1998) bu teknikte görüşmenin sürecinde yaşanan olaylara göre sorularda değişiklikler olabilir. Ayrıca yarı-yapılandırılmış görüşme, iletişim süresince farklı sorularla yeni durumların açılmasına ve konu hakkında yeni fikirlere ulaşılmasına fırsat verir (Merriam, 2009). Araştırma sürecinde yapılan görüşmelerde amaca yönelik görüşme formları kullanılmış ve katılımcıların izni alınarak görüşmelerin ses ve video kayıtları alınmıştır.

Araştırmada kullanılan görüşme formları, öğrencilerin cebirin iki temel kavramınu soyutlama süreçlerini belirleyebilmek amacıyla hazırlanmıştır. Araştırma süresince her iki sınıf düzeyinde kavramların soyutlanmasına yönelik görüşme gerçekleştirilmiştir.

Görüşme formu hazırlama sürecinde Yıldırım ve Şimşek (2016) tarafından önerilen aşamalar dikkate alınmıştır. Bu aşamalar; görüşme formunun hazırlanması, formun test edilmesi, görüşmelerin ayarlanması, görüşme için gerekli hazırlıkların yapılması ve görüşmelerin gerçekleştirilmesinden oluşmaktadır. Yine görüşme formu hazırlanırken uyulması gereken ilkeler (Patton, 2014); kolay anlaşılır sorular sorma, amaçlı sorular hazırlama, açık uçlu sorular sorma, yönlendirmekten kaçınma[5], çok boyutlu sorular sormaktan kaçınma, alternatif sorular veya sondalar hazırlama, farklı türden sorular sorma, soruların geliştirilmesinden oluşmaktadır.

Görüşme sorularının yukarıda belirtilen özellikleri dışında öğrencinin ilgisini çekecek nitelikte ve araştırma problemi doğrultusunda öğrencilerin matematiksel soyutlama süreçlerini ortaya çıkarabilecek şekilde düzenlenmesi gerekmektedir. Bu noktada araştırmacının rolü; öğrencilerin düşünsel süreçlerini ortaya çıkarabilmesi için, öğrencinin verdiği cevapları derinlemesine inceleyebileceği "Soruyla ilgili ne düşündüğünü söyleyebilir misin?", "Şu an ne yaptığını yüksek sesle anlatabilir misin?", "Bu şekilde çözüme nasıl karar verdin? Neden bu şekilde düşünüyorsun?" gibi sorular yöneltmesi gerekmektedir (Hunting, 1997).

Görüşme sürecine başlamadan; araştırma problemi, görüşme yapılan yer, görüşme tarihi ve araştırmacının kendini tanıttığı bir açıklamaya yer verilmiştir. Araştırmacı kendini tanıtarak görüşmeye başlamıştır. Görüşmenin amacını açıkladıktan sonra öğrencilere herhangi bir sorusunun olup olmadığı sorulmuş ve görüşmeye gönüllü olarak katıldıkları teyit edilmiştir. Görüşmeyi kaydetmek için izin alınmış, görüşmenin yaklaşık olarak ne kadar süreceği bildirmiştir. Görüşme okul ve ortamın koşullarına göre ortamın sessiz olmasına dikkat edilmiş, konuşmalar görüşmecilerin bilgisi dâhilinde ses kayıt cihazına kaydedilmiştir. Görüşmecilerin görüşlerini rahat aktarabilmesi için çalışmada kişi ismi kullanılmayacağı görüşme öncesi bildirilmiştir. Aynı zamanda görüşmenin kayıt altına alınması ile araştırmacının yanlı düşüncelerinin azalması da sağlanmıştır.

Cebirin iki temel kavramının nasıl soyutlandığını belirlemeye yönelik olarak hazırlanan görüşme formu, uzman görüşüne sunulmuştur. Uzmanların önerileri doğrultusunda

[5] Soyutlama sürecinin analizinde kullanılan RBC+C teorisinin B basamağına vurgu yaparak bu ilke genişletilmiştir. Öğrencilerin problem çözümünde tam manada çıkmaza düştükleri anlarda uygulama yapmalarını teşvik etmek için matematiksel bilgi boyutunda yönlendirme yapılmıştır.

formda gerekli değişiklik ve düzeltmeler yapılarak forma son hali verilmiştir (Ek 6, 7 ve 8). Bu yöntemle öğrencilerin cebir konularını içeren problemlerde kullandıkları çözüm stratejilerinin ve bu çözüm stratejilerini nasıl kullandıkları belirlenmeye; öğrencilerin bu süreçteki soyutlamaları analiz edilmeye çalışılmıştır. Görüşmeler süresince araştırma problemine uygun olarak cebirin iki temel kavramının öğrenciler tarafından nasıl soyutlandığı incelenmiştir. İlk kavram değişken; değişken, cebirsel ifade, terim, katsayının ne olduğu ve bu kavramların işlemlerde nasıl kullanıldığını kapsamaktadır. İkinci kavram olarak denge (yani denklem); değişkenin farklı durumlarının incelenmesini, denklem kurma-çözmeyi, problem durumuna ilişkin matematiksel model kurma-çözmeyi, denklemlerdeki değişkenleri manipüle edebilmeyi, denklemdeki dengenin iki taraflı olarak değişimini kapsamaktadır.

Görüşmeler yarı-yapılandırılmış olarak tasarlanmıştır. Bu araştırmacının, öğrencilerin soyutlama süreçlerini daha ayrıntılı analiz edebilmek için ek sorular da sorma imkânı sağlamıştır. Özellikle sorular öğrencilerin çözümde birden fazla metod (aritmetik, cebirsel veya problem çözme stratejisi) kullanmaları üzerinedir. Ayrıca bu sorular RBC+C modelinin tanıma, kullanma, oluşturma ve pekiştirme eylemlerini de açığa çıkaracak niteliktedir. Buna ek olarak 6. ve 7. sınıfta aynı kavramlar üzerine sorular sorularak kavramların ne düzeyde kullanıldığı ve öğrencilerin öğrendikleri bilginin kalıcı olup olmadığı da bu sorular sayesinde belirlenmiştir. Tablo 15'de görüşmelerde yer alan sorular, soruların ilgili oldukları kavram ve hazırlanmasındaki amaçlar ifade edilmiştir.

Tablo 15

6. sınıf görüşme sorularının özellikleri

Soru	Kavram ile ilişkisi	Amaç	RBC+C Düzeyi

Değişken	Değişken kavramı sorgulanmıştır. Ayrıca değişkenin kullanımı istenmiştir.	Öğrencilerden değişken kavramını tanımaları istenilmiştir. Bu kavramı tanıma ve kullanma eylemlerinde nasıl kavramsallaştırdıkları görülmeye çalışılmıştır.	Tanıma
Cebirsel ifade, terim, katsayı ve değişkenler	Değişken ve diğer cebir kavramları kullanarak cebirsel ifadelerin oluşturulması ve ilişkilerin açıklanması istenmiştir.	Öğrencilerin temel cebir kavramları arasında kurdukları ilişkiler ve sınıflamalar incelenmiştir. Cebirsel ifade yazabilmek için oluşturdukları ilişkiler incelenmiştir.	Tanıma
Bağlamdan cebirsel ifade yazma, matematiksel model inşa etme ve modelleri açıklama	Bağlamsal bir durumdan matematiksel duruma geçiş incelenmiştir.	Öğrencilerin cebirsel ifade oluşturmaları beklenmiştir, bu bir tanıma eylemidir. İlerleyen sorularda matematiksel model oluşturmaları ve kullanmaları istenmiştir. Son olarak oluşturulan modelin açıklanması gerekli görülmüştür.	Kullanma
Denklem her zaman doğru mudur Neden? Açıklayınız. “a + b = b”	Değişkenlerin alacakları farklı değerleri ilişkilendirebilme durumu incelenmektedir.	Soruyu çözerken önceden öğrendikleri bilgi yapılarını kullanmaları veya pekiştirme yapmaları beklenmiştir.	Kullanma veya Pekiştirme
Arabalar	Sorunun ilk maddesinde değişkenlerin aldığı değerler sorgulanmış, ikinci maddesinde ise değişkenleri kullanarak manipülasyon yapılması beklenmiştir.	Sorunun ilk maddesinin çözümü için kullanma düzeyinde epistemik eylem gerektirirken, ikinci maddesi için değişkenlerin manipüle edebilmek oluşturma düzeyindedir.	Kullanma Oluşturma
Altıncı ve yedinci sorular	Değişkenlerin kullanımı gerektirmektedir.	Bu soruların çözümü için kullanma eylemi gerekmektedir. Ayrıca öğrenciler açıklama yaparlarken matematiksel dil kullanımlarına bağlı olarak oluşturma gerçekleşebilir.	Kullanma Oluşturma
Büyülü bahçe	Öğrencilerin problem çözme ve değişkenleri	Öğrencilerin soruyu çözüme ulaştırmaları kullanma düzeyidir.	Oluşturma

	kullanarak girdi-çıktı değeri hesaplamaları gerekmektedir.	Çözümü cebirsel bir dil ile açıklamaları onların oluşturma düzeyinde olduklarını göstermektedir.

Yedinci sınıf düzeyinde iki görüşme yapılmıştır. Her iki görüşmede de altıncı sınıf düzeyinden bazı sorulara yer verilmiştir. İki düzeyde öğrencilerin gelişimi ve RBC+C teorisinin pekiştirme basamağı test edilmek istenmiştir. Aşağıda yer alan Tablo 16'nın ilk sütununda kaçıncı görüşme olduğu ve hangi sorunun açıklandığı ifade edilmektedir. Benzer kavramların sorgulandığı için tüm sorulara yer verilmemiştir.

Tablo 16

7. sınıf görüşme sorularının özellikleri

Görüşme/ Soru	Soru	Kavram ile ilişki	Amaç	RBC+C Düzeyi
1/4	Merdiven	Denklem kurabilme durumu sorgulanmıştır.	Öğrencilerden denklem kavramını herhangi bir değişken değeri için oluşturmaları istenilmiştir. Bu kavramı tanıma ve kullanma eylemlerinde nasıl kavramsallaştırdıkları görülmeye çalışılmıştır. Özellikle Oluşturma eylemi için organize etme durumları incelenmiştir.	Oluşturma
1/5	Elmalar	Değişken ve diğer cebir kavramları kullanarak cebirsel ifadelerin oluşturulması ve ilişkilerin açıklanması istenmiştir.	Öğrencilerin temel cebir kavramları arasında kurdukları ilişkiler ve sınıflamalar incelenmiştir. Denklem kurabilme, çözebilme sürecinde değişken ile olan ilişki incelenmiştir.	Kullanma Oluşturma Oluşturma
2/2	Araba	Sorunun ilk maddesinde değişkenlerin aldığı değerler sorgulanmakta, ikinci maddede ise değişkenleri kullanarak manipülasyon yapılması beklenmiştir.	Sorunun ilk maddesinin çözümü kullanma, ikinci maddesinin çözümü ise değişkenleri manipüle edebilmek için oluşturma düzeyinde epistemik eylem gerektirmiştir.	Kullanma Oluşturma
2/3	Denge	Değişkenlerin alacakları farklı değerleri ilişkilendirebilme ve	Soruyu çözerken önceden öğrendikleri bilgi yapılarını kullanmaları veya pekiştirme yapmaları beklenmiştir.	Kullanma

		denklem sistemi içerisindeki denge durumu incelenmiştir.		
2/4	Konser	Soru denge, denklem kurma-çözme ve girdi- çıktı değerlerinin hesaplanması istenmiştir.	Sorunun çözümünde örüntü kuralını bulma ve ifade etmede tanıma, denklem kurma ve çözmede kullanma girdi- çıktı değerlerinin hesaplanmasında oluşturma eylemlerini gerektirmiştir.	Tanıma Kullanma Oluşturma
2/5	Taksi-Dolmuş	Denklem kurma ve çözme gerektirmiştir.	Bu sorunun çözümü için kullanma eylemi gerekmektedir. Ayrıca öğrenciler açıklama yaparlarken matematiksel modeli inşa etmelerini ifade etmelerine bağlı olarak oluşturma gerçekleşebilir.	Kullanma Oluşturma
2/8	Büyülü bahçe	Öğrencilerin problem çözme ve değişkenleri kullanarak girdi-çıktı değerini hesaplamalarını gerektirmiştir.	Öğrencilerin soruyu çözüme ulaştırmaları kullanma düzeyidir. Çözümü cebirsel bir dil ile açıklamaları onların oluşturma düzeyinde olduklarını göstermiştir.	Oluşturma

Görüşme soruları için ilköğretim matematik eğitimi anabilim dalında görev yapan iki öğretim üyesinden ve matematik eğitimi alanında doktora derecesine sahip bir matematik öğretmeninden ve uygulamayı gerçekleştiren matematik öğretmeninden uzman görüşü alınmıştır. Alınan uzman görüşleri doğrultusunda 6. sınıf düzeyindeki görüşme sorularında yer alan 3., 6. ve 7. soruların, 7. sınıf düzeyindeki ilk görüşme sorularında yer alan 2., 3. ve 4. soruların ve 7. sınıf düzeyindeki ikinci görüşme sorularında yer alan 5., 6. ve 8. soruların yeniden düzenlenmelerine karar verilmiştir. Uzman görüşleri doğrultusunda son hali verilen görüşme sorularının etkililiğini belirlemek amacıyla pilot uygulamada denenmiştir. Görüşme yapılacak öğrenciler tanı testinden aldıkları puanlara göre kategorilere ayrılmış ve iyi-orta-düşük olmak üzere her kategoriden iki öğrenci öğretmen ile birlikte belirlenmiştir.

3.5.3. Başarı testleri. Araştırma sürecinde veri analizini desteklemek adına birkaç çeşit veri toplama aracı kullanılmıştır. Bu veri toplama araçları:

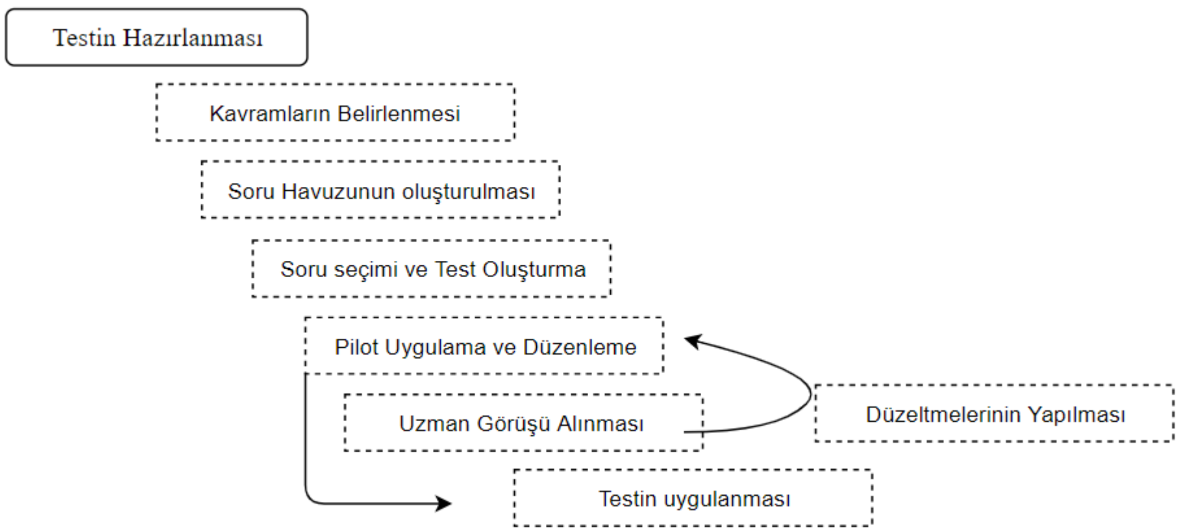
- Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları Testi (ZCA)
- Cebir Tanı Testi (CTT)

- Matematik Okuryazarlık Testi (MOT)'dir

Her bir veri toplama aracının nasıl hazırlandığı, veri toplama aracına duyulan ihtiyaç, geçerlik ve güvenirlik çalışmaları ile pilot uygulama süreçleri ayrıntılı olarak ilgili başlıklarda açıklanmıştır. Belirtilen üç başarı testinin hazırlanma süreci Şekil 8'de görülmektedir.

Şekil 8

Testin hazırlanma süreci



Öncelikle testin amacı doğrultusunda kavramlar belirlenmiş bu kavramlara yönelik soru havuzları oluşturulmuştur. İlgili kuramsal çerçeveye uygun sorular seçilerek test oluşturulmuştur. Gerekli durumlarda sorular geliştirilmiştir. Uzman görüşü ve pilot uygulama neticesinde gerekli düzenlemeler yapılarak test uygulanmıştır. Testler, pilot uygulama grubundaki öğrenciler tarafından değerlendirilmiştir. Esas uygulama öncesi düzenlemeler yapılmıştır. Aynı şekilde uzman görüşü de alınarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Ayrıca pilot uygulama sürecinde anlaşılmayan veya uzman görüşünde gereksiz olduğu düşünülen sorular tespit edilmiş ve gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

3.4.3.1. ZCA belirleme testi. Araştırmada cebir kavramlarını soyutlayan ve soyutlayamayan öğrencilerin zihinsel alışkanlıkları incelendiğinden alışkanlık belirleme testlerine ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyacın sonucu olarak araştırma probleminde belirtilen cebir kavramları için test hazırlanmıştır. Alışkanlık belirleme testinin hazırlanmasının nedeni; öğrencilerin var olan alışkanlıklarının neler olduğunu, hangi alışkanlıkların istenilen düzeyde, hangilerinin ise geliştirilebilir düzeyde olduğunu belirlemektir. Araştırma sürecinde Driscoll (1999)'un ZCA kuramsal çatısı kullanıldığından hazırlanan testlerde yer alan problemlerin belirli özelliklere sahip olması gerekmektedir. Bu bağlamda problemler hazırlanırken aşağıdaki özellikler göz önünde bulundurulmuştur: (a) Problemler, bir veya birden fazla zihinsel alışkanlığı kullanmaya teşvik etmelidir. Çünkü geliştirilen bu testin amacı öğrencilerde var olan zihinsel alışkanlıkları ortaya çıkarmaktır. (b) Hazırlanan sorular rutin olmayan problemler şeklinde olmalıdır. Çünkü zihinsel alışkanlıklar en iyi, problemin çözüm sürecinde ortaya çıkabilmektedir.

Test soruları yukarıdaki özellikler göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır. Soruların her biri açık uçlu problemden oluşmaktadır. Aşağıdaki Şekil 8'de araştırma sürecinde ZCA belirleme testinin hazırlanma aşaması şematik olarak gösterilmektedir.

Alışkanlık testi oluşturulurken öncelikle araştırma probleminde değinilen kavram belirlenmiştir. Her bir kavrama uygun olarak literatürden toplanan, araştırmacı ve danışmanı tarafından geliştirilen sorularla soru havuzu oluşturulmuştur. Soru havuzundan amaca uygun sorular seçilmiş, bazı sorular revize edilerek teste eklenmiştir. Testteki soruların anlaşılırlığını belirleyebilmek için ortaokul matematik öğretmenine kontrol ettirilmiş, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra 6 öğrenciye uygulanmıştır. ZCA belirleme testlerinde Driscoll (1999) ZCA kuramsal çatısına uygun olarak "yapma-tersini yapma, fonksiyonel kural oluşturma, işlemlerden soyutlama" alışkanlıklarını ortaya çıkaracağı düşünülen sorular kullanılmıştır. Test, toplam 4 soru ve onların içindeki toplam 15 sorudan oluşmaktadır (Ek 9). Öğrencilerin gerçek performansları ortaya koymaları için uygulama öncesinde öğretmen bu testin bir sınav olduğunu ve not karşılığı değerlendirileceğini bildirmiştir.

Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarını ölçmek amacıyla, geleneksel konusu Cebir olan, Driscoll (1999) tarafından hazırlanmış ve MEB (2017) kazanımlarıda düşünülerek geliştirilen sorulardan hazırlanmış bu testte soru kökü olarak toplam dört soru sorulmaktadır. Driscoll (1999)'un tanımlamış olduğu Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları değerlendirme ölçütleri temele alınarak hazırlanmıştır. Testin değerlendirme safhasında Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları düzeyini daha iyi açıklayabilmek için tüm bağlamlar, soru zorluğu ve içerikler eşit derecede dikkate alınmıştır. Literatür tarafından tanımlanan üç ZCA'yı ortaya çıkaracağı düşünülen dört soru ve alt sorular öğrencilere sorulmuştur. Ayrıca bazı sorulardan daha fazla faydalanmak ve literatür tarafından tanımlı olmasından (Magiera ve diğerleri, 2015; Alhamlan ve diğerleri, 2018) dolayı kısıtlamaları gidermek amacıyla da bazı cebir üzerine düşünme modellerinden faydalanarak sorular geliştirilmiştir.

Tablo 17

ZCA belirleme testi sorularının özellikleri

Soru Numarası	Soru Adı	Düzeyi	ZCA[6]	Alt Soru Sayısı
1	Nehri Geçme	2/3	FKO	5
2	Yüzdelikler	1/3	Y-TY/ İS	1
3	Kürdan Kareler	2/3	FKO	5
4	Ardışık Sayıların Toplamı	3/3	İS	4

Üç zihinsel cebir alışkanlığına uygun olarak seçilen ve geliştirilen sorular testte yer almıştır. Pilot uygulama sürecinde öğrencilerin sorularda anlaşılmayan yerleri sorabilecekleri belirtilmiştir. Böylece sorular içerisinde öğrencilerce anlaşılması zor olan yerler belirlenmiş ve pilot uygulama sonrası gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Testlerin geçerlilik ve güvenirlik çalışmaları yapılmış ve ilgili başlıkta detaylı olarak açıklanmıştır.

[6] Driscoll (1999) tarafından tanımlanan Zihnin Cebirsel Alışkanlıkları üç aşamada ele alınır; Y-TY, Yapma-Tersine Yapma, FKO, Fonksiyonel Kural Oluşturma ve İS, İşlemlerden Soyutlamadır.

3.4.3.2. Cebir Tanı Testi. Bu test, 13-15 yaş arası çocukların cebirsel düşünme seviyelerini belirlemek için Ortaöğretim Matematik ve Fen Ekibi (CSMST) (Hart, Brown, Kerslake, Küchemann ve Ruddock, 1985; 1998) tarafından geliştirilmiştir. Test, temel cebirin kavramsal bilgisini ölçmek için tasarlanmıştır. Bu test ile birlikte cebir başta olmak üzere matematiğin birçok çalışma konusunda da benzer tanılayıcı (diagnostic) testler geliştirilmiştir (Kesirler, grafikler, ölçme, sayılar ve işlemler, oran, vektörler ve yansıma-dönüşüm). Yıllar içerisinde bu test temel bir kaynak haline gelmiştir. Cebir alanında yapılacak çalışmaların veri toplama araçları için bir kilometre taşı vazifesi üstlenmiştir. Bu alanda yapılan diğer çalışmalara bakıldığında benzer soruların kullanıldığı görülmüştür (Booth, 1986; Kieran, 2006; Pournara ve diğerleri, 2006). CTT'nin amacını, çocukların tipik ortaokul cebir görevleri arasında yer alan geniş bir yelpazedeki anlayış düzeylerini değerlendirmektir (Küchemann, 1998).

Bu test için oluşturulan sorular detaylı analiz edildiğinde yerine koyma, ifadelerin basitleştirilmesi, denklemlerin oluşturulması, yorumlanması ve çözülmesi aşamalarını içerdiği görülmektedir. Değerlendirmenin odağı, çocukların harfleri genelleştirilmiş aritmetik olarak kullandıkları ve yorumladıkları farklı yollar üzerinedir. Testi hazırlarken hatırlanan kurallar ve genellemelere olan ihtiyacı en aza indirmek için girişimde bulunulduğu görülmektedir. CSMST'ye göre, değişkeni kullanma ve yorumlama olmak üzere altı farklı kategori üzerinden gözlemlenmiştir.

1. Değer olarak harf: Bu kategoride, başlangıçtan itibaren sayısal bir değere bir harf atanır. Örnek olarak; "a + 5 = 8 ise a hakkında ne söyleyebilirsiniz?" sorusu söylenebilir.

2. Kullanılmayan harf: Bu kategoride bir anlam vermeden harfi görmezden gelir veya farkında olmazlar. Örnek olarak: "Eğer a + b = 43 ise, a + b + 2 =? Bulunuz." sorusu söylenebilir.

3. Bir nesne olarak harf: Harf, bir nesne için kısa yol olarak veya kendi başına bir nesne olarak görülür. Örnek olarak; “2a + 5a =? maddesi” sorusu söylenebilir.

4. Bilinmeyen olarak harf: Öğrenciler bir harfi belirli fakat bilinmeyen bir sayı olarak ele alır ve “n + 5 üzerine 4 ekle” maddesinde olduğu gibi doğrudan üzerinde çalışabilir.

5. Genelleştirilmiş sayı olarak harf: Burada harfin birden fazla değeri temsil ettiği kabul edilir. Örnek olarak; “c + d = 10 ve c, d'den küçükse c hakkında ne söyleyebilirsiniz?” sorusu gösterilebilir.

6. Değişken: Çocuklar harfi, belirtilmemiş bir değer aralığının temsilcisi olarak görür ve bu iki değer kümesi arasında sistematik bir ilişki vardır. Bir örnek olarak; “Hangisi daha büyük, 2n veya n + 2; Açıklayınız.” sorusu gösterilebilir.

İlk üç kategori düşük bir muhakeme seviyesi gerektirir. Bu seviyelere sahip olan öğrenciler, düşük düzeyde bir cebir anlayışına sahiptir; burada bir harfin belirli bir bilinmeyen olarak kullanılmasını gerektiren maddeler ile başa çıkabilmeleri gerekir (Küchemann, 1998). Bu altı kategoriden ayrı olarak, öğrencilerin maddelerle ilgili olarak muhakeme becerileri dört seviyede cebir anlayışı geliştirilmiştir. Seviye 1'deki maddeler tamamen sayısal ve son derece kolaydır. Seviye 2 maddeleri, artan karmaşıklıkdan dolayı Seviye 1 maddelerinde farklılık gösterir. Seviye 2'deki öğeler, harfi nesne olarak içerir. Seviye 3'teki çocuklar harfleri belirli bilinmeyenler olarak kullanabilir. Seviye 4’deki öğrenciler, belli bilinmeyen ve karmaşık bir yapıya sahip maddeleri ele alabilirler (Küchemann, 1998). Soru numaraları ve gösterge seviyeleri Tablo 18’de verilmektedir.

Tablo 18

Cebirsel düşünme seviyelerine uygun soru maddeleri

Sorular	Seviye
5a, 6a, 8, 7b, 9a, 13a,	1
7c, 9b, 9c, 11a, 11b, 13d, 15a	2

1, 2, 4c, 5c, 9d, 13b, 13h, 14, 15b, 16	3
3, 4e, 7d, 13e, 17a, 18b, 20, 21, 22, 23	4

Cevap doğru ise 2 puan, cevap yanlış ise 0 puan ve yarım doğru yapılan fakat sonuca ulaşılamayan durumlarda 1 puan verilmiştir. Bu testin yayınlanmış Cronbach güvenilirlik ölçüsü 0,7'dir.

Test ortaokula devam eden öğrencilerin yeteneklerini kullanabilecekleri şekilde dizayn edilmiştir. Testin 12 yaşından büyük tüm öğrencilere uygun olduğu ve 12 ile 15 yaş arasındaki öğrencilerin öğretim programına uygun olarak geliştirildiği ifade edilmiştir (Küchemann, 1982). Ülkemizde cebir konusu ilk defa 6.sınıfta işlenmektedir. 6. Sınıftaki öğrencilerin yaşları cebir öğrenmek için Küchemann (1982)'nin uygun gördüğü yaş aralığı ile uyum göstermektedir.

Testin çözümlenmesi için gereken süre 35 dakika olarak tayin edilmiştir. Yapılan ön değerlendirmelerde bu sürenin uygun olduğunu göstermektedir. Ayrıca teste başlamadan önce yönergenin ifade edilmesi için 2-3 dakika yeterli görülmüştür.

Testin çözümlenmesi için sadece kalem kullanımının yeterli olduğu testte toplam 23 soru yer almaktadır.

Daha önce de belirtildiği gibi, bu testteki maddeler orta öğretim cebir konularının geniş bir yelpazesine yayılmıştır. Testin amacı, sadece cebirsel görevleri incelemek değil, farklı karmaşık yapı öğeleri ile karşı karşıya kaldığında öğrencilerin harfleri genelleştirilmiş aritmetik olarak kullanabilme ve yorumlayabilme yollarını belirlemektir.

3.4.3.3. Matematik Okuryazarlık Testi. Bu testte Matematik okuryazarlık düzeyini belirlemek amacıyla öğrencilere PISA (Programme International for Student Assessment) araştırması kapsamında hazırlanmış sorulmuştur. PISA tarafından Matematik Okuryazarlığını belirlemek amacıyla sorulan soruların tamamı "Cebir" konu alanı içerisinde değerlendirilmiştir. PISA ayrıca cebir öğrenme alanını klasik cebirden farklı olarak "Değişim ve İlişkiler" olarak da isimlendirmektedir. Değişim ve İlişkiler alanında PISA tarafından hazırlanmış ve geleneksel konusu Cebir olan, bugüne kadar sorulmuş sorulardan hazırlanmış bu testte soru kökü olarak toplam dört soru sorulmaktadır. PISA'nın tanımlamış olduğu Matematik okuryazarlık değerlendirme ölçütleri temele alınarak hazırlanmıştır. Testin değerlendirme safhasında matematik okuryazarlık düzeyini açıklayabilme gücünü arttırmak amacıyla tüm bağlam, süreç becerileri ve içerikler dikkate alınmış ve eşit ölçüde pay verilmeye çalışılmıştır. PISA'nın hazırladığı bazı sorulardan daha fazla faydalanmak ve matematik okuryazarlığının PISA tarafından tanımlı olmasından dolayı kısıtlamalarını gidermek amacıyla da bazı cebir üzerine düşünme modellerinden faydalanarak sorular geliştirilmiştir.

Tablo 19

Matematik okuryazarlık testi soru özellikleri

Soru Adı	Cevaplanma Yüzdesi (%)	Düzey	Konu	İçerik	Bağlam
Yürüyüş-1	36,34	5/6	Cebir	Değişim ve İlişkiler	Kişisel
Yürüyüş-2	20,62	6/6	Cebir	Değişim ve İlişkiler	Kişisel
Basamak Modeli[7]	66,19	3/6	Sayı	Nicelik	Eğitsel
En iyi Araba-1	72,91	2/6	Cebir	Değişim ve İlişkiler	Kamusal
En iyi Araba-2	25,42	5/6	Cebir	Değişim ve İlişkiler	Kamusal
Elmalar-1	-	3/6	-	Değişim ve ilişkiler	Eğitsel
Elmalar-2	-	3/6	-	Değişim ve ilişkiler	Eğitsel

[7] Bu soruda bazı geliştirmeler yapılmıştır. Bu geliştirmelerin genel amacı basit olan soru kökünün cebir kavramına uygun olarak düzenlenmesidir.

Elmalar-3	-	5/6	-	Değişim ve ilişkiler	Eğitsel

Öğrencilerin gerçek performansları sergilemelerini sağlamak için uygulama öncesinde öğretmen bu testin bir sınav olduğunu ve not karşılığı değerlendirileceğini bildirmiştir.

Pilot uygulama sürecinde öğrencilerin sorularda anlaşılmayan yerleri sorabilecekleri belirtilmiştir. Böylece sorular içerisinde öğrencilerce anlaşılması zor olan yerler belirlenmiş ve pilot uygulama sonrası gerekli düzeltmeler yapılmıştır.

3.6. Verilerin Analizi

Veri analizi süreci; verileri tanımlamayı, birbirleriyle ilişkilendirerek açıklamalarda bulunmayı, oluşturmayı ya da kuram geliştirmeyi içine alan bir süreçtir (Glesne, 2013). Veri toplama ile başlayan ve verileri azaltma, verileri görselleştirme, sonuç çıkarma ya da doğrulama aşamalarını da içeren süreç rapor yazımına kadar devam eder (Miles & Huberman, 1994). Bu araştırmada gözlem, görüşme ve başarı testleri veri toplama araçları olarak kullanılmıştır. Gözlem ve görüşme verileri içerik analizi tekniğine göre analiz edilmiştir. İçerik analizi, birbirine benzer verileri belirli kavram ve temalar etrafında bir araya getirerek okuyucunun anlayacağı şekilde düzenleyip yorumlama sürecidir. Bunun için öncelikle veriler kavramsallaştırılarak birbirleri ile olan ilişkileri ortaya çıkarılmakta daha sonra kategori ya da tema adı verilen daha soyut ve genel terimlere ulaşılmaktadır. Bu yönüyle içerik analizi tümevarımcı bir yaklaşımı benimsemektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Analizler yapılırken kuramsal çerçeve, araştırma soruları ve verilerin toplanması gibi yöntemsel kararlarında dikkate alınması gerekmektedir (Glesne, 2013).

Araştırmanın verileri iki aşamalı olarak analiz edilmiştir. İlk aşamada TÖY'nin etkililiği, gözlem ve ders içi araştırmacı alan notları kullanılarak ortaya konulmaya çalışılmıştır. İkinci aşamada ise öğrencilerin cebirin iki temel kavramınu soyutlama süreçleri ve bu süreçte ortaya koydukları ZCA'ların neler olduğu açıklanmaya çalışılmıştır. Soyutlama sürecinde öğrencilerle yapılan görüşmeler dikkate alınmıştır. Öğrencilerin soyutlama süreçleri analiz edilirken kuramsal çerçevede bahsedilen RBC+C soyutlama teorisinden faydalanılmıştır. Ayrıca ZCA'nın analizi sürecinde Driscoll (1999)'un çerçevesi dikkate alınmıştır. Son olarak TÖY'ün etkililiği araştırmanın modeline uygun olarak analiz edilmiştir.

Araştırmacının veri kaynakları, uygulamanın yapıldığı derslerde alınan ses kayıtları, araştırmacı alan notları ve gözlemleri, öğrenci görüşmeleri ve ses-video kayıtları, öğrencilerin çözdükleri başarı testlerini içermektedir. Tablo 20'de her bir verinin nasıl toplandığı ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

Tablo 20

Verilerin analiz süreci öncesinde düzenlenmesi

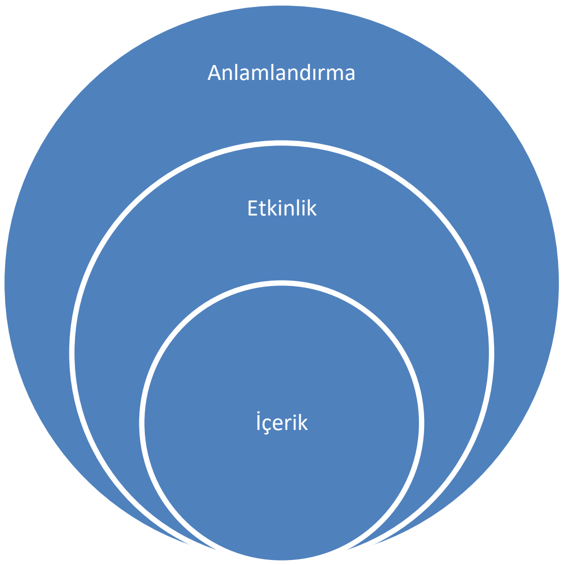
Uygulama Yapılan Dersler
Tüm uygulama yapılan dersler ses kaydına alınmıştır, ayrıca araştırmacı tüm uygulamalara katılarak gözlem yapmış ve alan notları almıştır. Ses kayıt cihazı, sınıfta öğretmen masasının önüne konumlandırılmıştır. Sınıf içinde öğrencilerin öğretmene verdikleri cevapları yakalamak için bu konum tercih edilmiştir. Araştırmacı sınıfın en arkasında sınıfın genelini, öğretmeni ve sınıf tahtasını iyi görebileceği yerde oturmuştur. Ders süresince alan notları alıp gözlemler yapmıştır.
Görüşmeler
Görüşmeler, öğrenci ile araştırmacının yalnız kaldıkları ve dışarıdan bir müdahalenin olamayacağı bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler ile yapılan görüşmeler video veya ses kaydına alınmıştır. Öğrencilerin çözümleri arşivlenmiştir. Değerlendirmeleri ise kuramsal çerçevede değinilen çatılardan faydalanılmıştır.
Başarı Testleri
CTT uygulama öncesinde ve sonrasında olmak üzere iki kere uygulanmıştır. ZCA ve MOT 6.sınıfın sonunda ve 7.sınıfın sonunda birer kez uygulanmıştır. Değerlendirmeleri ise hazırlanan rubriklerle sağlanmıştır.
Ders Planları
Öğretim süresince ders planları düzenlenmiş ve güncellenmiştir. Ders planları hakkında saha notları alınmıştır.

Öğrenci Notları
Verilerin birbiri ile olan ilişkilendirme sürecini desteklemek için öğrencilerin matematik defterleri arşivlenmiştir.

3.6.1. Uygulama derslerinin analizi. Verilerin analizi, her öğretim uygulaması sonunda gerçekleşti. Bu analizler sırasında araştırmacı, öğrencinin öğrenmesini belgelemek için bir kontrol listesi hazırlamıştır. Sınıf ortamında yazılan günlükler, kavram yanılgıları, öğrenci düşüncesindeki sapmanın temel mekanizmaları, ders planlarında yapılan değişiklikler ve öğretmen görüşmelerini arşivlemiştir. İlerleyen aşamalarda bu gözlem arşivleri, her bir öğretim bölümünde ne olduğunu belgeleyen anlık görüntü çerçeveleri (Şekil 9) kullanılarak analiz edilmiş ve yoğunlaştırılmıştır. Aşağıdaki Şekil 9 dersin uygulamasından sonra gerçekleşen öğretim bölümü için yapılan analiz sürecinin bir örneğini göstermektedir.

Şekil 9

Duyusal analiz için yorumlayıcı çerçeve



Öğrencilerin öğretim ünitesindeki cebir görevlerini yorumlamalarına göre sınıf bağlamında etkinlik katmanlarını inceleyerek cebirsel görevlerin duyusal olarak analiz edilmesine yönelik bir yorumlayıcı çerçeve (Lamberg, 2001'den uyarlanmıştır) sunulmuştur. İçerik, etkinliğin gerçekleşeği ilgili kavramı ifade etmektedir. Etkinlik, dil veya sembol kullanarak iletişim kurmayı, öğretim programı ile etkileşimler gerçekleştirmeyi ve temsil araçları kullanımını içermektedir. Anlamlandırma, öğrencilerin öğretim sürecindeki cebir görevlerini yorumlamaları anlamına gelmektedir. Aşağıdaki yer alan Tablo 21'de dördüncü günde gerçekleşen öğretim analizi yer almaktadır.

Tablo 21

Dördüncü gün için analiz sürecinin özeti

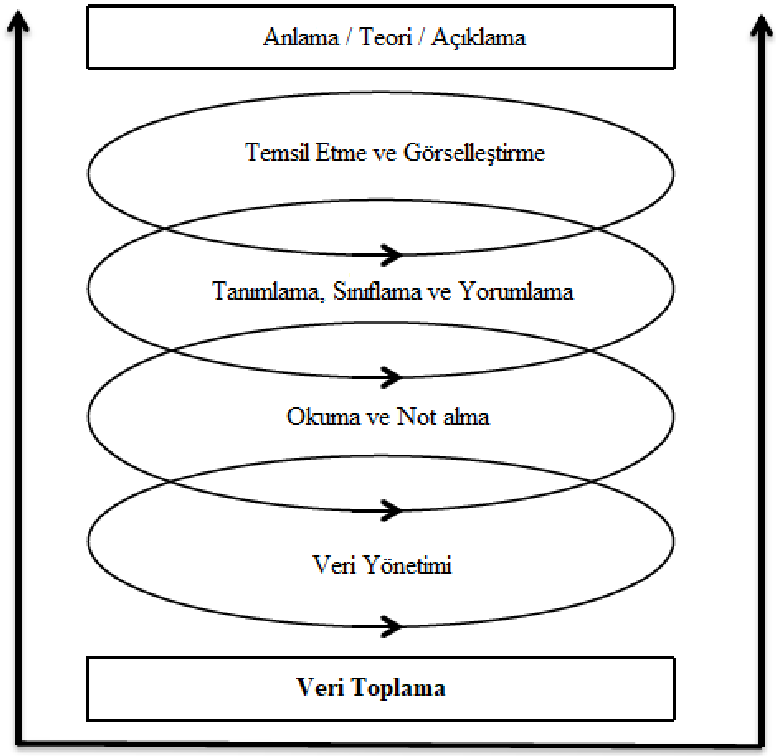
Gün/Etkinlik	Matematiksel Anlam	Hata / Yanılgı	İçerik	Öğretmenin Rolü	Ne değişti?
19/02/2017 Benzer terimlerin toplanması ve çıkarılması	Değişken Eşitlik Benzer terim Farklı terim	10*h* + 12*p*=32 *h*+*p*=*hp* 10*h* x 2 = 20	Toplama ve çıkarma işlemlerinde değişken görmezden gelindi	Öğrencilerin cevabı bulması için cesaretlendirildi Öğretmen grup tartışmasını yönetti ve kolaylaştırdı	Her işlemde toplam tutara ulaşılamıyacağı anlaşıldı Değişkenlerin bir sembol olduğu anlaşıldı

Retrospektif analiz (geriye dönük analiz), öğretim deneyi sırasında toplanan tüm verilerin analizini içermesi nedeniyle geriye dönüktür. Bu analizin ürünü, öğretim deneyinden çıkan deseni ayrıntılandıran tarihsel bir açıklamadır (Cobb ve diğerleri, 2003). Bu model diğer öğretim deneylerinde de çoğaltılabilir. Ek olarak, verilerin retrospektif analizini yaparak, deney sırasında öğrencinin öğrenmesi ve öğretiminin gözlemleri ile ilişkilendirilen öğretim süreci tarif etmektedir. Ayrıca, bu son analiz, öğretim deneyi sırasında olanların dürüst bir dışa vurumu şeklindedir (Cobb ve diğerleri, 2003).

Retrospektif analiz, video- ses kayıtlarının, öğrenci çalışmasının ve alan notlarının resmi analizinden oluşmaktadır. Nitel verilerin analizinde Veri Analizi Spiral'in uyarlanması (Creswell, 2007) kullanılmıştır. Creswell (2007) bu süreci sabit bir doğrusal yaklaşım kullanmak yerine analitik çevrelerde hareket etmek olarak tanımlamaktadır. Şekil 10, tasarım araştırmasını kullanan bir öğretim deneyi için Creswell'in (2007) Veri Analizi Spiral'inin uyarlanmış sürümünü göstermektedir.

Şekil 10

Verilerin retrospektif analiz döngüsü



Uygulama süresince elde edilen veriler düzenlenmiştir ve analiz döngüsü Creswell (2007)'den uyarlanmıştır. Sonrasında ise yorumlama aşaması için uygun sınıflandırmalar yapılmıştır. Okuma ve not alma araştırmacının, verileri temalara ayırmadan önce bir bütün olarak algılamasını sağlamıştır (Agar, 1980). Creswell (2007), alan notlarının veya transkriptlerin okuyucunun ortaya çıkardığı, ana fikirleri veya kavramları yazmayı ve araştırmacının çalışmayı bir bütün olarak yansıtmasına yardımcı olduğunu belirtmiştir. Bu döngü, verileri Creswell (2007) tarafından belirtilen şekilde kodlamayı, kategorilere ve temalara ayırmayı içerir. Öğretim deneyindeki temalar, öğrencilerin duyularını ifade etmenin etkinlik veya bağlam tarafından sınırlandırıldığı verilerden ortaya çıkmıştır.

Analizin son aşaması verilerin sunulması ve açıklanmasını içermektedir. Creswell (2007) son aşamayı "metinde, tablo şeklinde ya da şekil biçiminde bulunanların ambalajlanması" olarak tanımlamaktadır (ss. 154). Bu tasarım araştırmasında öğretim deneyi sırasında meydana gelen olaylardan ve verilerden ortaya çıkan bir öğrenme teorisi sunulmuştur (Cobb ve diğerleri, 2003). Ayrıca, rafine edilmiş ve test edilmiş TÖY gerçekleşen ÖY olmuştur.

3.6.2. Görüşmelerin analizi. Araştırmada öğrencilerle yapılan görüşmelerin analizinde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. İçerik analizi, toplanan verilerin derinlemesine analiz edilmesini gerektirmektedir. Bu bağlamda içerik analizi ile veriler tanımlanmakta ve verilerin içinde saklı olabilecek gerçekler, belirlenen kavram ve temalar çerçevesinde ortaya konulmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Bu araştırmada RBC+C soyutlama teorisi aracılığıyla öğrencilerin cebirin iki temel kavramına yönelik olarak bilişsel eylemlerinin ortaya koyulması amaçlandmaktadır. Bu bağlamda soyutlama sürecinin analizi verilerin sistematik olarak düzenlenmiş ve bilişsel açıdan yorumlanması ile gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada, görüşmeler sırasında kayıt altına alınan ses ve görüntüler transkript edilmiştir. Araştırmanın kavramsal çerçevesinden hareketle bir çerçeve oluşturulmuştur. RBC+C soyutlama teorisi epistemik eylemleri gözlemlerken bir araç olarak kullanıldığından bu çerçeveye göre verilerin hangi temalar altında düzenleneceği ve sunulacağı ifade edilmiştir. Transkripleri çıkarılan metinlerin analizi, bu çerçeveye göre gerçekleştirilmiştir.

Kuramsal çerçeve içerisinde yer alan Tablo 1-2 ve 3'de RBC+C soyutlama teorisinin herbir basamağı detaylı olarak açıklanmıştır. Özellikle öğrencilerin çözüm yolları ve yapmış oldukları epistemik eyleme karşılık gelen göstergeler bu tablolarda sunulmuştur. Özellikle literatürden derlenen ve sentezlenen bu tablolar öğrencilerin göstermiş olduğu soyutlama becerilerinin açıklanmasını ve verilerin analizini kolaylaştırmıştır. Buna ek olarak araştırmada

ZCA’da sorgulandığından öğrencilerin bu çerçeveye ilişkin tematik kodlama tabloları belirlenmiştir. Soyutlama sürecinde olduğu gibi görüşmelerin transkripti çıkarılmış, ardından araştırmacı yanlılığının önüne geçmek adına başka bir araştırmacı tarafından bu tablolarda verilen kodlara uygun olarak tematik analiz yapılmıştır. Driscoll (1999) tarafından tanımlanan ZCA’nın bileşenlerine ait alanda yapılan çalışmalardan derlenen göstergeler Tablo 22’de sunulmuştur.

Tablo 22

Zihnin cebirsel alışkanlıkları bileşenlerinin göstergeleri

ZCA’nın Adı	ZCA’nın Göstergeleri	ZCA Kodu
Yapma-Tersini Yapma	Problemi okuması, anlaması	Y1
	Problem içinde verilen bağlamı anlaması, yorumlaması	Y2
	Nicelikleri ve nicelikler arasındaki ilişkileri tanımlama	Y3
	Temsilleri oluşturma	Y4
	Temsilleri kullanarak işlemler yapma	Y5
	Sonuçtan girdiye ulaşmaya çalışma	TY1
	Soruyu geriye doğru çalışarak çözmeye çalışma	TY2
	Bulunan sonucun sağlamasını yapma	TY3
Fonksiyonel Kural Oluşturma	İlişkileri belirleme	FKO1
	Bilgileri organize etme (düzenleme)	FKO2
	Örüntü arama	FKO3
	Örüntünün nasıl çalıştığını belirleme	FKO4
	Temsiller kullanma	FKO5
	Kuralı tanımlama	FKO6
	Bulduğu kuralı doğrulama	FKO7
İşlemlerden Soyutlama	Kısa yollar geliştirme	İS1
	Kısa yolları doğrulama	İS2
	Sonucu farkı durumlarda test etme	İS3
	Örnekler ötesinde genellemelere varma	İS4
	Sayılardan bağımsız olarak işlemleri düşünerek genelleme	İS5

Tablo 15’de her bir ZCA’nın farklı göstergeleri bulunmaktadır. Araştırmanın analiz kısmında bu göstergelerden faydalanılarak öğrencilerin ZCA’ları incelenmiştir.

3.6.3. Başarı testlerinin analizi. Araştırmada üç adet başarı testi kullanılmıştır. Kullanılan başarı testleri herbiri için hazırlanan rubriklerle değerlendirilmiştir. Hazırlanan rubrikler, kuramsal çerçeveden beslenmiştir ve öğrencilerin cevapları puanlanmıştır. Başarı testlerinin değerlendirilmesinde rubrik kullanılma nedeni başarı testlerinin birçok sorusunun açık uçlu olmasıdır. Bu tip soru türlerini değrlendirmenin en iyi yolu rubriklerdir (Campbell, 2005). Öğrencilerin teste verdikleri cevapları analiz edilirken aşağıda verilen 3 düzeyli puanlama cetveli kullanılmıştır.

0 Puan: Hiçbir beceri kullanılmadı.

1 Puan: Beceri kullanıldı ancak doğru çözüme ulaşılamadı.

2 Puan: Beceri kullanıldı ve problemin çözümüne ulaşılabildi.

Öğrenciler problemin çözümünü yaparken boş bıraktıkları sorularda “0 puan” almışlardır. Herhangi bir ilerleme kaydetmiş, ancak doğru çözüme ulaşamadıklarında ise “1 puan” almışlardır. Bu puanlama yöntemiyle başarı testinin amacına ulaşmasının yanısıra, doğru çözüme ulaşan ve ulaşmayan öğrencilerin birbirinden ayrılması amaçlanmıştır.

CTT öğrencilere 6.ve 7.sınıfta cebir öğretimi öncesi ve sonrasında uygulanmıştır. Toplamda dört uygulama yapılmıştır. ZCA testi ise öğrencilere 6. ve 7.sınıfın cebir öğretimi sonunda birer kez uygulanmıştır. Toplamda iki kez uygulanmıştır. Ayrıca cebirsel alışkanlıklar görüşme sorularının içerisinde de öğrencilere sorulmuştur. MOT 6. ve 7.sınıfın cebir öğretimi sonunda birer kez uygulanmıştır. Testler aynı öğrencilere 6. ve 7.sınıfta cebir öğretimi dönemi içerisinde uygulanmıştır.

Öğrencilerin uygulanan ön – son testlere verdikleri cevaplar incelenmiştir. Bu bağlamda her bir öğrencinin bireysel gelişimi incelenmiştir ve pilot çalışma ile gerçek çalışma grubu öğrencilerinin gelişim süreci karşılaştırılmıştır. Öğrencilerin başarı testlerine verdikleri cevaplar arasında anlamlı farklılık olup olmadığı incelemek için SPSS 25,0 programı kullanılmıştır. Analiz sürecinde öğrencilerin testlerden aldıkları toplam puanların fark puanları dizileri elde edilmiş ve bu dizilerin normal dağılım sergileyip sergilemediği incelenmiştir. Normal dağılım testi için Kolmogorov-Smirnov Testi kullanılmıştır. Test sonucunda normal dağılım sergileyen durumlar için parametrik testlerden ilişkili örneklemler için t testi, normal dağılım sergilemeyen durumlar için ise parametrik olmayan testlerden Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi uygulanmıştır.

3.7. Geçerlik, Güvenirlik ve Nesnellik

Tasarım araştırmasının bilimsel olarak kabul edilebilir bir araştırma yöntemi olması için nesnellik, güvenilirlik ve geçerlilik gerekmektedir. Ancak, tasarım araştırmasındaki bu nitelikler deneysel araştırma tasarımından farklı bir şekilde kontrol edilir (Barab & Kirshner, 2001). Geleneksel deneysel araştırmaların aksine, tasarım araştırmasının amacı yeni ve faydalı teoriler üretmektir (Edelson, 2002). Bu nedenle, tasarım araştırmasındaki sonuçların nesnelliği, güvenilirliği ve geçerliliği geleneksel ampirik yaklaşımda olduğu gibi tanımlanamaz.

Nesnellik, analizlerin güvenilirliği ile ilgilidir (Cobb & Gravemeijer, 2008). Araştırmanın nesnel olması verilerin geçerli ve güvenilir olmasını gerektirir (Çepni, 2014). Bir ölçeğin objektif olması için güvenilir olması gereklidir. Güvenilirliğin sağlanması için verilerin toplanması, analizi sistematik olmalı ve diğer araştırmacılar tarafından eleştiriye açık olmalıdır. Tasarım araştırmacıları, müdahaleleri eşzamanlı olarak kolaylaştırırken nesnelliği teşvik etmeye çalıştıkları deneysel araştırmacılardan farklı bir konumdadır. DBRC (2003) [Design Based Research Center], “tasarım tabanlı araştırmacıların kendilerini düzenli olarak savunucu ve eleştirmenlerin ikili entelektüel tartışmaları içinde bulduklarını” belirtmiştir (s. 7). Bu nedenle, tasarım araştırmacıları, retrospektif analiz sonuçlarının sistematik önyargıları yansıtma riskini azaltmak için birden fazla kaynak ve veri türünü çeşitlendirebilirler, verilerin üçgenleştirilmesini (triangulation) sağlayabilirler (Maxwell, 2005).

Bu tasarım çalışmasının verileri video-ses kayıtlarını, sınıf tartışmalarını, öğrencilerin çalışmalarını, ders planlarını ve alan notlarını içerecektir. Verilerin üçgenleştirilmesi ve sabit karşılaştırma yöntemi ile analiz edilmesiyle nihai sonuçlar açıklanacaktır. Ek olarak, iddialar orijinal veri kaynaklarına geri izleme de dahil olmak üzere analiz aşamalarını gözden geçirerek haklı çıkarılır (Cobb & Gravemeijer, 2008).

Öğretim Deneyi için Güvenilirlik. Tasarım araştırmasını kullanan bir öğretim deneyi, öğretmen, araştırmacı, araştırmacının danışmanı ve uzman ekibin diğer üyeleri tarafından verilen pek çok kararı içermektedir. Herbir öğrenme planlaması benzersiz olduğundan, bir tasarım araştırmasının tamamının tam olarak kopyalanması neredeyse imkânsızdır. Bunun yerine, bulguların güvenilirliğini arttırmak için analizlerin tekrarlanması, döngü boyunca tek bir tasarım deneyinde gerçekleşmiştir (DBRC, 2003). Ek olarak, araştırmacılar birden fazla veri kaynağını üçgenleştirdi.

Öğretim Deneyi için Geçerlik. Yinelemeli döngü ve tasarım araştırmasının işbirlikçi doğası sonuçların geçerli olmasını sağlamıştır. Başka bir deyişle, tasarım tabanlı araştırma yaklaşımının doğası; teori, tasarım, uygulama ve ölçüm arasında uyumun olmasına izin vermektedir (DBRC, 2003). Messick (1992), bir iddianın sonuç geçerliliğinin, belirli bir sistemde ürettiği değişikliklere dayandığını savunmuştur. Bu tasarım araştırmasında modelin öğrencilerin öğrenme sürecinde oluşturduğu geçerliliğini düşünülmektedir (Barab & Squire, 2004). Bu nedenle, bir öğretim deneyinde bir model tarafından tetiklenen öğrenci öğreniminin örnekleri sonuçların geçerliliğinin bir kanıtı olarak kabul edilir.

Geçerlik aynı sonuçlar alınsa bile bu sonuçların "doğru" olmasıdır (Payne & Payne, 2004, ss. 196). Güvenirlik, farklı klinik deneylerde veya istatistiksel denemelerde aynı veya uyumlu sonuçlar alınmasıdır. Nicel ve nitel araştırmalarda geçerlik, iç geçerlik ve dış geçerlik olmak üzere iki çeşittir. İç geçerlik, ölçme sonucunun doğruluğunu ve gerçekle örtüşüp örtüşmediğini inceler. Dış geçerlik ise sonuçların farklı yer ve zamanda genellenebilirliğinin bir ölçüsüdür (Scott & Morrison, 2006). Güvenirlik de kendi arasında iç güvenirlik ve dış güvenirlik olarak iki çeşittir. Araştırmanın tekrarlanması sonucunda yine benzer sonuçların çıkması, iç güvenirliktir. Dış güvenirlik ise nesnel bir bakış açısıyla bulguların yorumlanmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Nitel ve nicel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik çalışmaları farklı şekillerde gerçekleştirilmektedir. Nitel araştırmalar insanın doğasına odaklanır ve insanın davranışlarını anlayıp, açıklamayı amaçlar. Nicel araştırmalar ise bir topluluktan aldığı veriler ile genelleme yapmak amacıyla istatistiksel bir bakış açısı kullanır. Dolayısıyla her iki araştırma yaklaşımını aynı güvenirlik ve geçerlik yöntemleriyle test etmek uygun değildir. Bu yüzden araştırmada nicel ve nitel kısımların geçerlik ve güvenirlik çalışmaları ayrı ayrı ele alınmaktadır.

Nicel araştırmalarda iç geçerlik, çalışmanın sonuçlarının kesin ve doğru olduğunu gösterir. İç geçerliği artırmanın bir yolu değişkenleri kontrol altına almaktır. Değişkenler araştırmacıların araştırılan problemin anahtar unsurlarını tanımlaması, değişkenlerin dış etmenlerden izole edilmesi ve bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkenler üzerindeki etkisinin test edilmesine olanak sağlaması ile kontrol altına alınabilir. İç geçerliği artırmanın bir başka yolu katılımcıların gruplara uygun şekilde atanmasından geçer. Bu araştırmada seçilen çalışma grubu iç geçerliliği artıracak hususlara dikkat edilerek belirlenmiştir. Dış geçerlik ise bulguların diğer örneklemlere, koşullara ve durumlara ne ölçüde genellenebileceği ile ilgilenir (Lankshear & Knobel, 2004).

Nicel araştırmalarda geçerliğin sağlanması için güvenilir olması ön koşuldur. Tekrarlanamayan ölçümün geçerliği şüphelidir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Güvenirlik, tutarlılık ve tekrarlanabilirlik kavramlarıyla eş anlamlıdır. Araştırmanın güvenilir olması benzer bir bağlam ve katılımcı grubunda gerçekleştirilmesi durumunda benzer sonuçların elde edileceğini göstermektir (Cohen ve diğerleri, 2005). Yüksek güvenirlik, testin tekrar uygulanmasında benzer sonuçların elde edilmesine bağlıdır. Bir ölçeğin güvenirliğini incelemek için dört yol kullanılabilir (Scott & Morrison, 2006, s. 208-209):

(a) Puanlayıcılar arası güvenirlik: Sınıflarda öğretmen-öğrenci etkileşim düzey ve türlerini belirlemek için yapılandırılmış gözlem formu farklı gözlemciler tarafından doldurulur. Doldurulan formlar arasında aralarındaki benzerlik ve farklılıklara bakılır. Kabul edilebilir düzeyde bir benzerlik varsa ölçek güvenilir olarak kabul edilir.

(b) Test-tekrar test güvenilirliği: Test farklı zamanlarda yeniden uygulanır ve iki testin sonuçları arasındaki benzerliğe bakılır.

(c) Paralel formlar güvenirliği: Testin iki kere uygulanma imkânı yoksa benzer içerikte bir test daha hazırlanıp uygulanarak test sonuçları arasındaki tutarlılık esas alınır.

(d) İç tutarlılık güvenirliği: Testteki öğeler arasındaki tutarlılığı değerlendirmek için testin iç ölçütü olarak kullanılır.

Bu çalışmanın nicel kısmında yapılan geçerlik ve güvenirlik aşağıdaki Tablo 23'de sunulmaktadır.

Tablo 23

Geçerlik ve güvenirlik çalışmaları (nicel)

Güvenirlik ve Geçerlik		Seçim	Uygulama
Geçerlik	Dış Geçerlik (Genelleme)	Örneklem Seçimi	Araştırmanın pilot uygulaması kapsamında etkinliklere katılacak öğrenciler amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemine göre belirlenmiştir. Bu örnekleme ile uygulanması yapılacak etkinliklerden optimum geri bildirim alınması ve esas

			uygulamada eksiklerin giderilmesi amaçlanmıştır.
		Örneklem Seçimi	Esas uygulamanın çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemi ile oluşturulmuştur. Öğrenciler uygulanan belirleyici testler neticesinde aldıkları puanlara göre; iyi, orta ve vasat şeklinde sınıflandırılmıştır. Bu sınıflamadan sonra öğretmenlerin görüşleri doğrultusunda üç farklı düzeyden öğrenciler belirlenmiş ve bu öğrenciler ile görüşmeler yapılmıştır.
	İç Geçerlik (Doğruluk)	Değişkenleri kontrol altına almak	Bu çalışmada uygulanan öğretim deneyinin (bağımsız değişken), öğrenci başarılarına (bağımlı değişken) etkisi araştırıldığından, çalışma grubunu etkileyebilecek diğer bağımsız değişkenleri kontrol altına almak için çalışma grubuna mevcut öğretmen, mevcut cebir ders saati ve aynı kazanımlar ile uygulama yapılmıştır.
Güvenirlik	İç güvenirlik (Tutarlılık)	İç tutarlılığın ölçülmesi	Araştırmanın nicel kısmında hazırlanan CTT, ZCA ve MOT testlerinin iç tutarlılığını ölçmek için Cronbach Alpha katsayılarına bakılmıştır. Sırasıyla Cronbach Alpha güvenirlik katsayıları “ .88, . 85 ve . 82” şeklinde bulunmuştur. Bu değerlerin “. 70’den” büyük olması testin iç tutarlılık güvenirliğinin sağlandığını göstermektedir.
	Dış güvenirlik (Nesnellik)	Puanlayıcılar arası güvenirlik	Çalışmada testlere verilen yanıtlar araştırmacı tarafından puanlandırıldıktan sonra başka bir uzman tarafından da kontrol edilmiştir. Herbir testin değerlendirilmesi için ayrı rubrik geliştirilmiştir. Sorular genel olarak açık uçlu olduğu için iki puanlayıcının puanları arasında herhangi bir farklılık olmamıştır.

Durum çalışması için geçerlik ve güvenirlik çalışmaları. Nicel ve nitel araştırmalarının doğası birbirinden farklı olduğu için nicel araştırmalarda tanımlanan geçerlik ve güvenirlik kavramları da nitel araştırmalarda özelleşmektedir. Lincoln & Guba (1985) "iç geçerlik" yerine "inandırıcılık"; "dış geçerlik" yerine "aktarılabilirlik"; "iç güvenirlik" yerine "tutarlılık" ve "dış güvenirlik" yerine "teyit edilebilirlik" kavramlarının daha uygun olduğunu ifade etmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

İnandırıcılık (credibility), araştırmanın iç geçerliğine ait bilgiler sunar. Araştırma bulguları ile araştırılan durumun benzer olmasıdır. Araştırmanın gerçekleri ne derece yansıttığına ilişkindir (Cohen ve diğerleri, 2005). Merriam (1998) nitel araştırmalarda inandırıcılığı artıran bazı temel özellikler önermiştir. Bunlar; çeşitleme (üçgenleştirme), katılımcı teyidi, uzun süreli gözlem, uzman incelemesi ve araştırmacının önyargılarıdır. Uzun süreli etkileşim, belli amaçları gerçekleştirmek için yeterli süre ayrılmasıdır. Cebirin iki temel kavramının düşünüldüğünde araştırmada iki yıllık zaman dilimi çalışmaya ayrımıştır. Farklı zamanlarda araştırmacı iki yıllık bir süreç boyunca sınıf ortamında olmuştur. Yalnızca araştırmacının doğal ortamın bir parçası olması için cebir öğretiminde iki hafta önce araştırmacı sınıf ortamına dâhil olmuştur. Cebir öğretimi tamamlandıktan sonra bir hafta daha sınıf ortamında bulunmuştur.

Sürekli gözlem, araştırma probleminin derin ve detaylı olarak tanımlanmasını sağlar. Araştırmacı, çalışma grubunu yapılandırılmamış ve yapılandırılmış olmak üzere dört eğitim-öğretim dönemi boyunca farklı amaçlarla gözlemlemiştir. Araştırmacı, çalışma ortamının doğal bir parçası haline geldiği için iki öğretmenin okul içi ve okul dışındaki yaşamlarına da tanıklık edebilmiştir.

Üçgenleme, çoklu kaynak kullanımı ifade eder. Araştırmada aynı bilgi farklı kaynaklardan (görüşme, gözlem, dokümanlar ve testler) elde edilmiştir. Akran değerlendirmesi, araştırma sürecinin dışarıdan başka bir kişinin değerlendirmesidir. Araştırmanın özellikle veri toplama süreci, alan uzmanları ile birlikte değerlendirilmiştir. Katılımcıların teyid; analitik veriler, yorumlar ve sonuçlar verilerin toplandığı katılımcı üyelerle birlikte test edilmesi anlamına gelir. Bu bağlamda araştırmada görüşme transkriptleri ve gözlem notları, çalışma grubu ile teyit edilmiştir.

Transfer edilebilirlik (transferability), araştırmanın dış geçerliğine ilişkin bilgiler sunar. Bağlamdan bağımsız olarak gerçeklerin değerlendirilmesi oldukça zordur ve katılımcılardan elde edilen sonuçlar, gerçeklerdir. Burada söz konusu olan kıstas araştırma sonuçlarının benzer bağlamlara aktarılabilmesini vurgular. Bu sebeple ayrıntılı betimleme gerektirir. Araştırmada katılımcılar, çalışma ortamı, veri toplama araçlarından veri toplama sürecine kadar bütün süreç ayrıntılı olarak betimlenmiştir. Bu doğrultuda, mevcut araştırmanın benzer bağlamlara transfer edilebilir olduğu söylenebilir.

Güvenirlik (dependability), araştırmanın tutarlılığına dair bilgiler sunar, yani güvenirliliğine. Başka bir uygulayıcının aynı verileri kullanarak benzer sonuçlara ulaşmasıyla ilgilidir. Araştırmalarda çeşitleme yapılması, araştırma sürecinin ayrıntılı olarak açıklanması ve dış gözlemciyle sürecin paylaşılması güvenirliği sağlayan unsurlar olarak belirtilmiştir. Araştırmada gözlemin hemen akabinde gözleme ilişkin görüşmeler yapılmıştır. Buna ek olarak öğretmenlerden günlüklerine notlar alması istenmiştir. Araştırma süreci ayrıntılı bir şekilde açıklanmış ve farklı alanlardan bilim uzmanları ile veri toplama süreci tartışılmıştır. Veri toplama sürecinde eksiklik olarak görülen kısımlar süreç içerisinde tamamlanmıştır. Bu doğrultuda, mevcut araştırmanın güvenilir sonuçlara ulaştığı söylenebilir.

Teyit edilebilirlik (confirmability), araştırmanın nesnelliğine ilişkin bilgiler sunar. Araştırmada sadece araştırmacının kendi eğilimlerine ve tercihlerine göre belirlediği veriler değil, tüm veriler kullanılmıştır. Onaylanabilir denetim sistemi oluşturmak ve araştırmacının rolünün ayrıntılı tanımlanması, teyit edilebilirliği sağlar. Araştırma bulgularında sıklıkla doğrudan alıntılara yer vermiştir. Buradaki amaç, araştırmacının veriyi yorumlamasını etkileyen özelliklerinin objektif biçimde potansiyel uygulayıcılara tanıtılmasıdır. Bu doğrultuda, mevcut araştırmanın teyit edilebilirlik kıstasını karşıladığı söylenebilir.

Bu çalışmanın nitel kısmında yapılan geçerlik ve güvenirlik çalışmaları Tablo 24'de sunulmaktadır.

Tablo 24

Geçerlik ve güvenirlik çalışmaları (nitel)

Güvenirlik ve Geçerlik		Seçim	Uygulama
Geçerlik	İç Geçerlik (İnandırıcılık)	Katılımcı teyidi	Araştırmada görüşme transkriptleri ve gözlem notları, çalışma grubu ile teyit edilmiştir. Özellikle tasarım araştırmalarında yinelemeli tasarım süreciyle oldukça uyumludur.
		Çeşitleme (Üçgenleme)	Derinlemesine bilgi alabilmek amacıyla birden fazla veri toplama aracı (görüşmeler, gözlem formları, video-ses kayıtları, öğrencilerin defterleri, ders planları ve başarı testleri) kullanılmıştır ve çalışmanın inandırıcılığına katkı sağlanmıştır.
		Uzun süreli gözlem	Araştırmacı ortama uyum sağlamak için uygulamadan önce bir süre matematik derslerini takip etmiştir.
		Uzman incelemesi	Veri toplama araçlarının geliştirilmesinde ve bulguların yorumlanmasında matematik eğitimi alanında uzman akademisyenlerin ve öğretmenlerin görüşlerine başvurulmuştur, alınan dönütler doğrultusunda düzenlenmeler yapılmıştır.
		Araştırmacının önyargıları	Araştırmanın sınırlılıkları ve varsayımları araştırmacı tarafından ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

	Dış Geçerlik (Aktarabilirlik)	Ayrıntılı betimleme	Uygulama için katılımcıların nasıl belirlendiği, kullanılan veri toplama araçları, araştırmacının rolü, uygulanan etkinlikler, uygulama süreci ve verileri analiz etme süreci araştırmacı tarafından ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Ayrıca bu aşamalar sınıf ortamına ait görüntülerle desteklenmiştir.
Güvenirlik	İç güvenirlik (Tutarlılık)	Uzman görüşü	Transkript yorumları arasındaki tutarlık yüzdesine göre iki araştırmacının yorumlarının birbiriyle uyuşup uyuşmadığı incelenmiştir. Bu araştırmada tutarlılık yüzdesi %88 olarak belirlenmiştir. Bu durumunda kodlama güvenilir kabul edilmiştir (Hugh ve Cormier, 2011)
	Dış güvenirlik (Teyit etme)	Kanıtlama	Dış gözlemcinin çalışmanın güvenilir olduğuna kanaat getirmesi için verilerin doğruluğu hakkında yeterli delil sunması gerekmektedir. Bu amaçla, görüşmelerde ve uygulama sürecinde öğrencilerden elde edilen dokümanlar, sınıf içi görüntüler ve gözlem notları bulgular kısmında sunulmuştur.

4. Bölüm

Bulgular

Bu bölümde çalışma kapsamında geliştirilen ÖY kavram öğrenmeye etkisine, kullanışlılığını etkileyen unsurlara ve öğrencilerin cebirin iki temel kavramınu nasıl soyutladıklarına yönelik bulgulara yer verilmiştir. Cebirsel akıl yürütme, tartışmasız en temel iki fikrin, denklik ve değişkenlerin anlaşılmasına bağlıdır (Knuth ve diğerleri, 2005). Cebir konularının temelindeki iki kavram "degişken" ve "dengedir"; aritmetiğin temelinde sayılar, cebirin temelinde değişkenler yer almaktadır (Knuth ve diğerleri, 2005; Altun, 2018). Bu amaçla ÖY'nin retrospektif analizine (geriye dönük analiz), öğrencilerin başarı testlerinde verdiği cevaplara ilişkin analiz sonuçlarına ve öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmelerin bulgularına yer verilmiştir. Elde edilen veriler test sorularına verilen cevapların nicel analizi ve görüşme sorularına verilen cevapların içerik analizi olarak ilgili başlıklar altında açıklanmaktadır.

4.1. Başarı Testleri

Araştırma sürecinde öğrencileri cebirsel olarak tanımlamak için CTT, zihinsel olarak cebirsel alışkanlıkları belirlemek amacıyla ZCA ve cebir kavramlarını günlük hayatta kullanabilme becerilerini belirlemek için MOT kullanılmış ve analiz edilmiştir. Bu testler her bir sınıf düzeyinde ayrı ayrı uygulandığı için testlerin analizi ayrı ayrı aşağıdaki başlıklarda açıklanmıştır. CTT her sınıf düzeyinde ön test-son test olarak uygulanmıştır. Diğer testler ise her bir sınıf düzeyinin cebir öğretimi sonunda uygulanmıştır.

4.1.1. Veri toplama araçlarının normallik test sonuçları. Öğrencilerin başarı testlerine verdikleri cevaplar incelenmiş ve veri analizi başlığı altında belirtilen kodlamaya göre puanlanmıştır. Yapılan puanlama sonuçlarına göre hangi testin uygulanacağına karar verebilmek için öncelikle öğrencilerin her bir başarı testlerine verilen cevapları SPSS 25.0 programına girilerek öğrencilerin testten aldıkları toplam puanların fark puanları dizileri elde edilmiş ve bu dizilerin normal dağılım sergileyip sergilemediği incelenmiştir. Gözlem sayısının 30'un altında olduğu durumlarda Shapiro-Wilk, 30 ve üzerinde olduğunda da Kolmogorov-Smirnov testi önerildiği bilinmektedir (Can, 2013, s. 89). 6.sınıflar için araştırmada çalışılan öğrenci sayısı 30'un altındadır. Bu yüzden testlerin normallik sonuçları incelenirken Shapiro-Wilk testi sonuçlarına bakılmıştır. 7.sınıflar için araştırmada çalışılan öğrenci sayısı 30'un üstündedir. Bu yüzden testlerin normallik sonuçları incelenirken Kolmogorov-Smirnov sonuçlarına bakılmıştır. Aşağıdaki Tablo 25'de testlere uygulanan normal dağılım testi sonuçları görülmektedir.

Tablo 25

Başarı testleri normallik sonuçları

Test Adı	Sınıf Düzeyi	Öğrenci Sayısı N	Aritmetik Ortalama $\bar{x}$	Standart Sapma Ss	Normallik Testi
CTT	6	29	9.32	5.25	0.214
	7	31	18.78	8.8	0.332
ZCA	6	29	7.79	6.49	0.009
	7	31	12.06	7.54	0.141
MOT	6	29	8.31	4.84	0.328
	7	31	9.86	5.99	0.200

Bir dağılımın normal dağılım sergilemesi için normallik testi sonuçlarının (Kolmogorov-Smirnov veya Shapiro-Wilk Testi) sonuçlarının $p > 0.05$ olması gerekmektedir (Can, 2013). Benzer şekilde Yukarıdaki Tablo 25 incelendiğinde başarı testlerinden 6. ve 7. sınıf testleri normal dağılım sergilediklerinden dolayı bu test sonuçlarına, parametrik testlerden ilişkili örneklemler için t testi uygulanmasına karar verilmiştir. Her bir teste ilişkin sonuçlar ilgili başlıkta açıklanmıştır.

4.1.2. Cebir tanı testinin bulguları. Araştırmanın verileri yaklaşık olarak 2 yıllık bir süreçte aynı öğrencilerin 6. ve 7. sınıf düzeyinde veriler toplanmıştır. Her yılın cebiri ile ilgili kazanımları farklı olduğundan iki sınıf düzeyi için farklı sayıda soru içeren testler hazırlanmıştır. 6. sınıf düzeyi için 12 soruluk bir test hazırlanırken, 7.sınıf düzeyi için ise bu 12 soruya ek olarak 9 soru daha sorulmuştur. Teste verilen cevaplar bağımlı grupların karşılaştırılması şeklinde analiz edilmiştir. İlk olarak 6.sınıf ve 7.sınıf öğrencilerinin öğretim öncesi ve sonrası kendi içinde istatistiksel bir fark olup olmadığı araştırılmıştır. Aşağıdaki her bir sınıf düzeyi sorularına verilen cevapların analizi için uygulanan testler açıklanmış ve ilişkili bulgular belirtilmiştir.

4.1.2.1. Cebir tanı testine verilen cevapların analizi. 6. sınıf CTT sonuçlarının fark puanları dizisinin normal dağılım sergilediği Tablo 25'de gösterilmiştir. Bu sebeple test sonuçlarına ilişkili örneklemler için t-testi (paired samples t test) uygulanmıştır. Bu teste ilişkin sonuçlar Tablo 26'da gösterilmiştir.

Tablo 26

6. sınıf CTT ilişkili örneklemler t-testi sonuçları

Testler	N	$\bar{X}$	S	sd	t	P
CTT Öntest	29	9.32	5.25	28	-6.723	0.000
CTT Sontest	29	11.89	5.60			

ÖY'nın cebir kavramlarını tanılama gelişimine etkisinin araştırıldığı 29 kişilik bir 6.sınıf grubunda, uygulama öncesi ve sonrasında uygulanan CTT puanlarının ortalamaları arasında bir fark olup olmadığını belirlemek için yapılan ilişkili örneklemler için t testi sonucunda, uygulama öncesi yapılan CTT puanları ortalaması ile ($\bar{X}$ CTT Öntest =9.32) ile uygulama sonrası yapılan CTT puanları ortalaması ($\bar{X}$ CTT Sontest =11.89) arasında anlamlı bir fark bulunmuştur [t_{28}=-6.723, $p <.05$]. Test sonucu hesaplanan etki büyüklüğü ($d = .51$) bulunan farkın orta düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu durum 6. sınıf düzeyinde uygulanan ÖY'nın öğrencilerin cebir kavramlarını tanılama gelişimine olumlu etkisi olduğunu göstermektedir.

7. sınıf CTT sonuçlarının fark puanları dizisinin normal dağılım sergilediği Tablo 25'de gösterilmiştir. Bu sebeple test sonuçlarına ilişkili örneklemler için t-testi (paired samples t test) uygulanmıştır. Bu teste ilişkin sonuçlar Tablo 27'de gösterilmiştir.

Tablo 27

7. sınıf CTT ilişkili örneklemler t-testi sonuçları

Testler	n	$\bar{X}$	S	sd	t	p
CTT Öntest	31	18.78	8.8	30	-7.356	0.00
CTT Sontest	31	23.53	10			

TÖY'nın, cebir kavramlarını tanılama gelişimine etkisinin araştırıldığı 31 kişilik bir grupta, uygulama öncesi ve sonrasında uygulanan CTT puanlarının ortalamaları arasında bir fark olup olmadığını belirlemek için yapılan ilişkili örneklemler için t testi sonucunda, uygulama öncesi yapılan CTT puanları ortalaması ile ($\bar{X}_{\text{CTT Öntest}}$ =18.78) ile uygulama sonrası yapılan CTT puanları ortalaması ($\bar{X}_{\text{CTT Sontest}}$ =23,53) arasında anlamlı bir fark bulunmuştur [t_{30}=-7.356, p <.05]. Test sonucu hesaplanan etki büyüklüğü (d = .50) bulunan farkın orta düzeyde olduğunu göstermektedir. Bu durum 7. sınıf düzeyinde uygulanan ÖY'nın öğrencilerin cebir kavramlarını tanılama gelişimine olumlu etkisi olduğunu göstermektedir.

4.1.3. ZCA belirleme testinin bulguları. Araştırma iki yıllık bir sürede gerçekleştiğinden, araştırma yapılan çalışma grubu öğrencilerinden her sene bulundukları sınıf düzeyinde veriler toplanmıştır. ZCA'larını belirlemek için kuramsal çerçevede yer alan üç düzeyden de sorular sorulmuştur. 6. ve 7. sınıf cebir konuları tamamlandığında test aynı öğrencilere uygulanmıştır.

4.1.3.1. ZCA belirleme testine verilen cevapların analizi. 6. sınıf ZCA belirleme testi sonuçlarının fark puanları dizisinin normal dağılım sergilemediği Tablo 25'de gösterilmiştir. Bu yüzden parametrik olmayan testlerden Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi uygulanmıştır. 6. sınıf son test ile 7. sınıf son test karşılaştırılmıştır. Bu iki testin öğrenciler tarafından çözümlenmesi arasında yaklaşık olarak bir öğretim yılı vardır. 6. ve 7.sınıf düzeyi için aynı test uygulanmıştır. Teste verilen cevaplar bağımlı grupların karşılaştırılması şeklinde analiz edilmiştir. Test sonuçları Tablo 28'de gösterilmiştir.

Tablo 28

6. ve 7. sınıf ZCA wilcoxon işaretli sıralar testi sonuçları

Testler	Sıralar	N	Sıra Ortalamaları		z	P
ZCA 6.sınıf	Negatif Sıralar	0	0.00	0.00	-4.552	0.000
ZCA 7.sınıf	Pozitif Sıralar	27	14.00	378.00		
	Eşit	2				
	Total	29				

Tablo 28'de gösterilen öğrencilerin 6.sınıf düzeyinde ZCA belirleme testi ve 7.sınıf düzeyinde ZCA belirleme testi puanları arasında anlamlı bir fark bulunup bulunmadığını test etmek için yapılan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonucuna göre sıra ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu ($p < .05$) görülmüştür. Söz konusu farklılık 7.sınıf düzeyinde ZCA belirleme testi lehine gerçekleşmiştir. Başka bir ifade ile öğretim hayatları boyunca aldıkları cebir derslerinin ve araştırmada uygulanan metodların onların zihnin cebir alışkanlıklarına olumlu katkılar yaptığı ve onların cebirsel alışkanlıklarını geliştirdiği söylenebilir.

4.1.3.2. Uygulama sonrası 6. sınıf düzeyinde öğrencilerde belirlenen ZCA. ÖY'nın uygulanmasından sonra öğrencilerin ZCA testine verdikleri cevaplar incelenmiştir. Öğrenci cevaplarının analizi Tablo 29'da gösterilmiştir.

Tablo 29

6. sınıf öğrencilerinde gözlenen ZCA göstergeleri

Soru Adı	ZCA Göstergesi	Doğru Cevaplama Frekans	Doğru Cevaplama Yüzdesi	Ortalama

			f	%	$\bar{x}$
Nehri Geçme	1	FKO	12	41,4	1,2
	2	FKO	8	27,6	0,76
	3	FKO	1	3,4	0,4
	4	FKO	4	13,8	0,6
	5	FKO	1	3,4	0,4
Yüzdelikler	1	Y-TY / İS	6	18	0,6
Kürdan Kareler	1	FKO	2	6,9	0,66
	2	FKO	4	13,8	0,45
	3	FKO	3	10,3	0,72
	4	FKO	2	6,9	0,17
	5	FKO	3	10,3	0,59
Ardışık Sayıların Toplamı	1	İS	3	10,3	0,45
	2	İS	1	3,4	0,38
	3	İS	1	3,4	0,38
	4	İS	1	3,4	0,38

Bu teste verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun problem içinde verilen bağlamı anlayabildikleri görülmüştür. Testte kullanılan soruların öğrencilerin matematik kariyerleri boyunca sık karşılaşmadıkları türde olması problem içindeki bağlamı anlamalarının uzun sürmsine sebep olmuştur. Öğrencilerin problem içinde verilen bir örüntüyü devam ettirdikleri, verilen sayı dizisinde örüntü arama becerilerini geliştirdikleri, verilen aritmetik dizinin genel kuralını bulma becerilerine sahip oldukları gözlemlenmiştir. Başka bir ifade ile uygulama sonrası öğrencilerin fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığında gelişme gözlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin genel kuralı verilen örüntüyü kolayca bulabildikleri yani tersini yapma alışkanlığı kazandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin sözel ifadelere uygun cebirsel ifade yazabildikleri, problemdeki bağlamı temsiller kullanarak ifade edebildikleri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin cevaplarından hareketle temsil (bilinmeyen) kullanma becerileri yani yapma alışkanlıklarına sahip oldukları söylenebilir. Buna ek olarak öğrencilerin cebirsel ifadelerde toplama- çıkarma, bir cebirsel ifadeyi doğal sayı ile çarpma yeterliklerine sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ancak fonksiyonel kural oluşturma alışkanlıklarının bazı aşamalarına sahip oldukları ve bu alışkanlığın tam olarak geliştirilemediği sonucuna varılmıştır.

4.1.3.3. Uygulama sonrası 7. sınıf düzeyinde öğrencilerde belirlenen ZCA. ÖY'nin uygulanmasından sonra öğrencilerin ZCA Belirleme Testi'ne verdikleri cevaplar incelenmiştir. Öğrenci cevaplarının analizi Tablo 30'da gösterilmiştir.

Tablo 30

7. sınıf öğrencilerinde gözlenen ZCA göstergeleri

Soru Adı		ZCA Göstergesi	Doğru Cevaplama Frekans f	Doğru Cevaplama Yüzdesi %	Ortalama $\bar{x}$
Nehri Geçme	1	FKO	14	48,3	1,3
	2	FKO	9	31	1
	3	FKO	4	13,8	0,7
	4	FKO	6	20,7	0,8
	5	FKO	2	6,9	0,7
Yüzdelikler	1	Y-TY / İS	16	55	1,4
Kürdan Kareler	1	FKO	6	20,7	0,8
	2	FKO	4	13,8	0,7
	3	FKO	4	13,8	0,8
	4	FKO	3	10,3	0,6
	5	FKO	3	10,3	0,6
Ardışık Sayıların Toplamı	1	İS	8	27,6	0,9
	2	İS	7	24,1	0,8
	3	İS	3	10,3	0,45
	4	İS	3	10,3	0,60

6. ve 7. sınıf kazanımlarının birbirini tamamladığı göz önünde bulundurularak öğrenci cevapları analiz edilmiş ve öğrencilerin 6.sınıf kazanımlarını korudukları görülmüştür. Bağlam durumlarına uygun olarak denklem kurabildikleri ve çözebildikleri gözlenmiştir.

Öğrencilerin uygulama öncesinde var olan yapma, fonksiyonel kural oluşturma alışkanlıklarının geliştirilerek kullanmaya devam ettiği, ön testte öğrencilerin az kullandığı tersini yapma alışkanlığının daha fazla kullanıldığı belirlenmiştir.

4.1.4. Matematik okuryazarlık testinin bulguları. Bu test öğrencilerin cebir kavramlarını günlük hayata aktarabilme becerilerini ölçmek üzere tasarlanmıştır. Klasik başarı testinden farklı olarak öğrencilerin kavramları öğrenme becerilerini ölçmenin yanı sıra kavramları günlük hayatta kullanabilme, uyarlayabilme ve kavramların özelliklerini kullanarak değişimler yapabilme yeteneklerine ölçmeye yöneliktir. Bu şekilde bir ölçme ve değerlendirme metodu matematik okuryazarlık kavramının temel amacı olarak görülmektedir (Pugalee, 1999; OECD, 2013). Geleneksel konusu cebir olan testin değerlendirme safhası, matematik okuryazarlık düzeyinin değişim ve ilişkiler boyutundadır. Bu bakımdan öğrencilerin cebirsel matematik okuryazarlık becerileri açıklanmaya çalışılmıştır. Bu bakımdan cebirsel matematik okuryazarlık becerileri yüksek olan bireylerin kavramları öğrenebilmenin ötesinde onlarla işlemler yapma ve çeşitli manipülasyonlar yaptıkları düşünüldüğünde öğrenmenin ne kadar ileri düzeyde olduğu açıklanmaya çalışılmıştır.

MOT sonuçlarının fark puanları dizisinin normal dağılım sergilediği Tablo 25’de gösterilmiştir. Bu sebeple test sonuçlarına ilişkili örneklemler için t testi (paired samples t test) uygulanmıştır. Teste ilişkin sonuçlar Tablo 31’de gösterilmiştir.

Tablo 31

Cebirsel MOT ilişkili örneklemler t-testi sonuçları

Testler	N	$\bar{X}$	S	sd	t	P
MOT 6.sınıf	29	8.31	4.84	29	-4.736	0.00
MOT 7.sınıf	31	9.86	5.99			

Cebir kavramlarının günlük hayatta kullanımının nasıl geliştiğinin araştırıldığı 31 kişilik bir grupta, 6. ve 7. sınıf düzeyinde MOT puanlarının ortalamaları arasında bir fark olup olmadığını belirlemek için yapılan ilişkili örneklemler için t testi sonucunda, 6.sınıf MOT puanları ortalaması ile ($\bar{X}_{MOT\ 6.sınıf}$ =8.31) ile 7.sınıf MOT puanları ortalaması puanları ortalaması ($\bar{X}_{MOT\ 7.sınıf}$ =9.86) arasında anlamlı bir fark bulunmuştur [t_{29}=-4.736, p <0.05]. Bu durum 7. sınıf düzeyinde cebirsel matematik okuryazarlık düzeyinin 6.sınıfa oranla istatistiki olarak anlamlı düzeyde daha iyi olduğunun bir göstergesidir.

4.1.4.1. Uygulama sonrası 6. sınıf düzeyinde öğrencilerin cebirsel matematik okuryazarlık düzeyleri. ÖY'nin uygulanmasından sonra öğrencilerin Cebirsel Matematik Okuryazarlık Testi'ne verdikleri cevaplar incelenmiştir.

Tablo 32

6. sınıf öğrencilerinin belirlenen cebirsel MO düzeyleri

Soru Adı		Beceri	OECD Doğru Cevaplama %	Doğru Cevaplama Frekans f	Doğru Cevaplama Yüzdesi %	Ortalama $\bar{x}$
Basamak	1	Üretici		21	72	1,55
	2	Üretici	36	10	34	0,83
	3	İlişkilendirici		4	14	0,48
Araba	1	Üretici	72	9	31	0,93
	2	Yansıtıcı	25	7	24	0,76
Yürüyüş	1	Üretici	36	3	10	0,55
	2	İlişkilendirici	20	2	7	0,45
Elmalar	1	Üretici	48	3	10,3	1,6
	2	İlişkilendirici	25	1	3,4	0,28
	3	Yansıtıcı	20	1	3,4	0,7

Bu teste verilen cevaplar soruların özellikleri de göz önünde bulundurularak incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun problem içinde verilen bağlamı anlayabildikleri görülmüştür. Problem içinde verilen bir örüntüyü devam ettirdikleri, verilen sayı dizisinde örüntü arama becerilerini geliştirdikleri verilen aritmetik dizinin genel kuralını bulma becerilerine sahip oldukları gözlemlenmiştir.

Testte yer alan tüm sorular sayısal hesaplamalar gerektirmektedir. Yürüyüş, arabalar ve elmalar soruları iki değişken arasındaki cebirsel bağlantıyı da ortaya koymaktır. Öğrencileri cebirsel bilgi ve becerilerini kullanmaya zorlamaktadır. Matematik okuryazarlık soruları birkaç alt sorudan oluşmaktadır. Bu soruların ilki bağlama giriş diğerleri ise daha zor seviyede beceri isteyen sorulardır. Üç sorunun ikinci maddeleri için stratejik düşünme, akıl yürütme ve tartışma becerileri gerekmektedir. İkinci maddedeki soruların çözümünde ortaokul seviyesinde birçok öğrencinin zorlandığı bilinmektedir. Bu maddeler PISA 2003 ve PISA 2009 esas uygulamasında kullanılmış ve diğer yayınlarda örnek madde olarak yer almıştır. Tüm sorularda, öğrencilerden verilenleri dikkate alarak özgün yanıtlar oluşturması istenmektedir. Sorulardaki tüm maddeler cebirsel olarak ifade edilen bir durumda değişkenler arasındaki ilişkilere odaklanmaktadır.

Öğrencilerin cevapları incelendiğinde üretici beceriler düzeyinde oldukça iyi oldukları görülmektedir. Öğrencilerin başarı yüzdelerinin OECD ortalamasıyla benzer olduğu da ifade edilebilir. Ancak ilişkilendirici ve yansıtıcı düzeydeki sorularda 6.sınıf öğrencileri istenen başarıyı gösterememiştir. Bu durum soruların öğrencilerin seviyelerinden ve akıl yürütme becerilerinden daha üst düzeyde olması ile açıklanabilir. Cebir soruları içerisindeki terimler matematiksel yapıda ifade edilmiştir. Bu sebeple matematiksel kavram ve nesnelerin kullanılmasını gerektirmektedir. Bu bağlamda sorular, matematiksel kavramları, gerçekleri, yöntemleri kullanma becerileri ve akıl yürütme süreci ile değerlendirilmektedir. 6.sınıf öğrencilerinin üretici beceriler seviyesinde olduğu söylenebilir. Bu hiyerarşik sıralamada ilişkilendirici ve yansıtıcı becerilere sahip bazı öğrenciler olsa da genel olarak onların bu seviyelere çıkamadığı söylenebilir. Özellikle 6. sınıf öğrencilerinin bu iki beceri düzeyindeki başarılarının OECD ortalamasının altında kaldığı görülmüştür. Soruların zorluk dereceleri ve çözümü için gereken akıl yürütme süreçleri düşünüldüğünde bu durumun normal olduğunu ifade edebiliriz.

4.1.4.2. Uygulama sonrası 7. sınıf düzeyinde öğrencilerin matematik okuryazarlık düzeyleri. ÖY uygulanmasından sonra öğrencilerin MOT'a verdikleri cevaplar incelenmiştir. Öğrenci cevaplarına ilişkin sonuçlar Tablo 33'de gösterilmiştir.

Tablo 33

7. sınıf öğrencilerinin cebirsel MO düzeyleri

Soru Adı		Beceri	OECD Doğru Cevaplama %	Doğru Cevaplama Frekans f	Doğru Cevaplama Yüzdesi %	Ortalama $\bar{x}$
Basamak	1	Üretici		24	77	1,6
	2	Üretici	36	13	41	1
	3	İlişkilendirici		5	16	0,55
Araba	1	Üretici	72	19	61	1,4
	2	Yansıtıcı	25	14	45	1,06
Yürüyüş	1	Üretici	36	5	16	0,65
	2	İlişkilendirici	20	4	13	0,58
Elmalar	1	Üretici	48	22	70	1,68
	2	İlişkilendirici	25	10	32	0,74
	3	Yansıtıcı	20	9	29	0,94

Bu teste verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun problem içinde verilen bağlamı anlayabildikleri görülmüştür. Öğrencilerin 7. sınıfta 6.sınıfa göre istatistiki olarak daha başarılı sonuçlar aldığı görülmüştür. 6.sınıf öğrencilerinin üretici beceriler düzeyinde olduğu anlaşılmıştır. Ancak öğrenciler 7. sınıfa gelindiğinde bunun geliştiği ifade edilebilir. Doğru cevaplama yüzdeleri dikkate alındığında 7. sınıf öğrencilerinin ilişkilendirici soru türlerinde OECD ortalamasına yaklaştığı görülmektedir. Yansıtıcı düzey sorularda beklenen tam olarak gerçekleşmemiştir. Bazı öğrencilerin bu tür sorularda başarılı olduğu ancak bu başarının tüm sınıfa genellemediği görülmüştür.

Öğrenciler bu soruyu okurken, anlamaya çalışırken ve soru için bir çözüm üretirken temel matematik becerilerinden biri olan iletişim becerisine ihtiyaç duyarlar. Testteki sorularda isteneni yerine getirmek için matematik dili etkin olarak kullanılmalıdır, matematiksel model birçok öğrencinin anlayabileceği şekilde sunulmalıdır. Şekil olarak verilen sorularda, bağlamın ve cebirsel ifadenin ilişkilendirildiği bir gösterim gereklidir. Soruların ilk maddesinde yerine getirilecek görev açıklıkla belirtildiğinden akıl yürütme ve tartışma becerilerine alt seviyede ihtiyaç vardır. Matematiksel sembol, bilgi ve işlemler birlikte düşünüldüğünde denklemi x cinsinden yazarken ve yerine koyma yaparken devreye girmektedir.

Soruların ikinci veya üçüncü maddeleri strateji belirlemeyi, göz önüne alınan ilişkilere ve istenen sonuca uzun süre odaklanmayı gerektiğinden daha karmaşıktır. İkinci veya üçüncü maddelerde istenenleri yeni bir matematiksel dile aktarma becerisini gerektirmektedir. Çünkü problemin çözümünde orantısal bir model oluşturmaya ihtiyaç duyulmaktadır. Böyle bir çözümde yapılacak işlemler birden fazladır, birbiriyle ilişkilidir ve ilişkinin açıklanması için matematiksel dil kullanılmalıdır.

Sonuç olarak 6. sınıf öğrencilerinin üretici becerilere sahip olduğu görülmüştür. Öğrencilerin 7. sınıfa geldiklerinde ise ilişkilendirici becerilere sahip oldukları ancak yansıtıcı düzeye tam manasıyla sahip olmadıkları belirlenmiştir. Matematik okuryazarlık sorularının hedef kitlesi, zorluk düzeyi ve gerektirdiği akıl yürütme becerisi düşünüldüğünde 8.sınıfın sonunda uygulanması gerektiği söylenebilir. Ancak öğrencilerin cebirsel kariyerleri ve cebir dersi süresince elde ettikleri kazanımlar bakımından seçilen cebirsel matematik okuryazarlık soruları onların matematik dersi cebir kazanımları ile örtüşmektedir. Bu bakımdan onların seviyelerinden çok da üst düzeyde bir akıl yürütme beklenmemiştir. Ancak değerlendirmeleri yaparken bu hususlarda göz önünde bulundurulmalıdır. Öğrencilerin cebir kavramlarını günlük hayatta kullanabilme yani öğrenmenin ötesinde kavramların özelliklerini bilerek bazı müdahaleler yapabilme durumlarının ölçülmeye çalışıldığı bu testte genel olarak başarılı sonuçlar alındığı söylenebilir. Bu durum 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin programda yer alan kazanımlara uygun davranış sergilemiş olmasıyla ilişkilendirilebilir. Başka bir ifade ile değişken kavramının 6. sınıf öğrencileri tarafından üretici düzeyde, 7. sınıf öğrencileri tarafından ise ilişkilendirici düzeyde kullanılmasıyla açıklanabilir.

4.2. Gerçekleştirilmiş Öğrenme Yörüngesi

ÖY 6.sınıf cebir ünitesinde ve ardından aynı öğrencilerle 7. sınıf cebir ünitesinde çalışılmıştır. Bu süreçte öğrencilerin cebirin iki temel kavramı olan değişken ve denge (denklem) kavramlarını soyutlama süreçleri incelenmiştir. 6. sınıf düzeyinde değişken kavramı, 7. sınıf düzeyinde ise değişken kavramının üstüne inşa edilen denge kavramı çalışılmıştır. Uygulama sürecinde öğrencilerin değişken kavramını soyutlama süreçlerini daha iyi gözlemleyebilmek ve onları cesaretlendirebilmek için ÖY'den faydalanılmıştır. Piaget'in bilişsel gelişim dönemleri, öğrenciye hangi dönemde neyi öğretebileceğimize dair yol gösterici olabilir (Bee & Boyd, 2009). İşlem öncesi döneminde olan bir öğrenci için akıl yürütme ve bağlantı kurma gereken konuların öğretimi zordur. Yorumlama, çıkarım yapma becerisi daha çok somut dönemde gerçekleşir. Benzer şekilde, bu sürece kadar hep sayılarla aritmetik çalışmış bir öğrenciye "x" ve "y" gibi soyut ifade kullanarak matematik anlatmak zor olacaktır. Onun soyut kavramlar ve semboller ile işlem konusunda zorlanmaktadır. Soyut konuları tam olarak anlaması 12 yaş sonrasını bulacaktır (Altun, 2018; Bee & Boyd, 2009). Bu ortaokul öğrencileri için 6.sınıf düzeyidir. Bu sebeplerle öğrencilerin soyutlama süreçlerinde cesaretlendirilmesi ve sürecin daha iyi analiz edilebilmesi için sürece müdahale edilmiştir.

4.2.1. Öğrenme yörüngelerinin analizi. Bu başlık altında öncelikle 6.sınıf için hazırlanan ve öğretmenle yapılan görüşmeler neticesinde son formatı verilerek uygulanan ÖY'nin açıklanmasına yer verilmiştir. ÖY kuramsal olarak bir hedefe yönelik olmalı, bu hedefi gerçekleştirmek için hazırlanan etkinliklere yer verilmeli ve tahminlenen öğrenme hipotezinin test etmelidir. Öğretim süreci öğrencilerin hedefe ulaşabilmeleriyle hipotezin doğrulanmasını ya da revize edilmesini gerektirir. 6.sınıflarda cebir öğretimi için üç öğrenme haritası programdaki kazanımların sırası göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır ve uygulanmıştır. İlk haritada temel hedef, örüntünün kuralını bulma ve bu kuralı harfle ifade etmektir. İkincisinde cebirsel ifade yazma ve değişkenin yerine sayı koyabilmektir. Son olarak ise hedef, cebirsel ifadeler ile işlemler yapabilmektir. Aşağıda yer alan Tablo 34'de TÖY'nin işleyiş şeması ve ders içinde değinilen hususlar gösterilmiştir.

Tablo 34

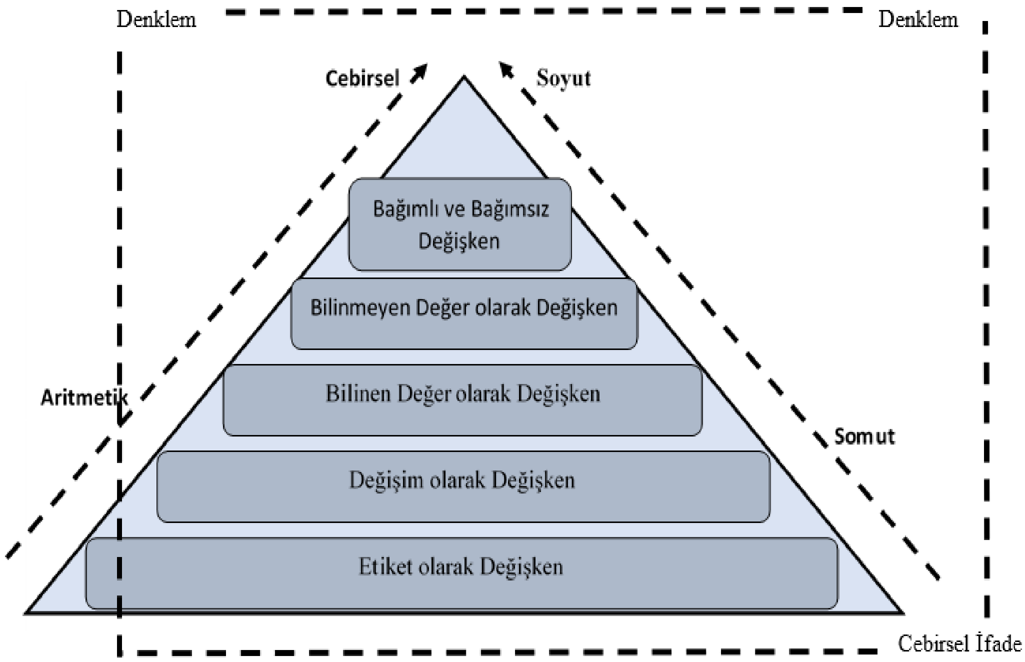
6.sınıf TÖY işleyiş şeması

Hedef (Amaç)	Hipotez (Rota)			Değerlendirme (Kazanım)	
Öğrenme Hedefi	Dersde Yapılan Hatalar	Etkinlik		Düşünme Biçimi	Değerlendirme
Cebirsel ifade yazma Değişkenin yerine sayı koyma	Değişkenin farklı şekilde kullanamamak	Giriş	Temel sözel ifadelerin yazımı	Öğrencilerin problem içindeki bağlamı anlama, temsilleri oluşturma becerilerinin geliştiği görülmüştür	Öğrenciler yapılan araştırmada özel durumları kontrol etmek ya da genellemeleri açıklamak gibi deneyimler kazanmıştır
		Keşif	Aklından bir sayı tut		
		Derinleşme	Yakındaki sayıları çarp		

Cebirsel ifade yazma ve değişkenin yerine sayı koyma kazanımları için hazırlanan örnek bir ders planı ve etkinlikler Ek'de yer almaktadır. 6.sınıf için hazırlanan ÖY, öğrencilerin değişkeni, cebirsel ifade ve denklemlerdeki bağlamları anlamaya yönelik olduğu görülmüştür. Uygulanan ve uygulama sonrasında ortaya çıkan ÖY'ye ilişkin açıklama Şekil 11'de gösterilmiştir. Aşağıdaki bölümlerde değişken fikrinin her bir yorumuna ilişkin ayrıntılı açıklamalar mevcuttur.

Şekil 11.

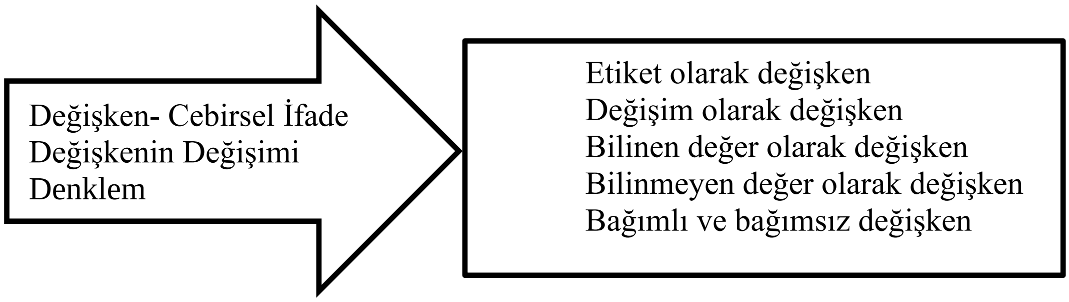
Uygulama sonrasında ortaya çıkan ÖY'nin oluşum süreci



Öğrencilerin değişkenleri yorumlamaları cebirsel ifadeleri ve bu ifadelerin denklem ile bağlantısını anlamaları araştırdıkça gelişmiştir. Öğrencilerin değişkenin bir sabit sayı olmadığı ve değişiminin yorumunu anlamaları değişkenin işlemde nasıl yorumlandığını anlamaları için önemlidir. Öğrencilerin denklemi kurmak için gerekli olan değişken ve değişkenin değişimini anlama sürecine ilişkin kavram yanılgıları yazılı çalışmaları (öğrencilerin defterleri ve sınıf tahtasına yazılanlar) incelenerek tespit edilmiştir.

Şekil 12

Konu sırası ve ÖY kazanımları



Aşağıda yer alan Tablo 35'de öğrencilerin kavramlara ilişkin hata ve yanılgıları özetlenmektedir.

Tablo 35

Değişken kavramı için ÖY'de öğrenci kavram yanılgı ve hataları

Değişken	Örnek	Açıklama
Etiket olarak Değişken	3 elma + 4 elma + 7 muz= 14 m. m=meyve	Bunun anlamı, öğrencilerin değişkenleri olan nesneleri etiketlemeleridir.
Değişim olarak değişken	5 farklı topun maliyetini modellemek için öğrenci gösterimi, 5=d.	Bunun anlamı, topların sayısını (bilinen bir değeri kullanarak) ve her topun maliyetini (değişen bir miktar) modellemektir. Öğrenci, maliyetin değişen bir miktar olduğunu ve ifadenin 5d olması gerektiğini anlamamaktadır.
Bilinen değer olarak değişken	"c = 2 ve f = 5" için "4c + 3f" verildiğinde, Öğrenci, 4.c (2) = 8 ve 3.f (5) = 15, sonra 8 + 15 = 23.	Bunun anlamı, öğrencinin, değişkenin değeri bilindikten sonra değişkenin artık yazılması gerekmediğini anlamamasıdır.
Bilinmeyen değer olarak değişken	Denklemine bakıldığında 21 = 7u, öğrenci her ikisinden de 7 çıkardı u = 14.	Bunun anlamı, öğrencinin denklemi bilinmeyen değişken için çözmeye çalıştığı, ancak

		yanlış işlemi kullandığı ve 7u'nun 7.u anlamına geldiğini anlamamasıdır.
Bağımlı ve bağımsız değişken	Bağımsız ve bağımlı değişken içeren belirli bir durum için denklem yazması istendiğinde, öğrenci cevabı: "y = 5x + 20 yerine 5x + 20".	Sonuç, öğrencinin bağımsız ve bağımlı bir değişken olduğunu anlayamamasıdır, çünkü bu bir ifadedir, girdi ve çıktıya sahip bir denklem değildir.

Öğrencilerin matematiksel düşünceleri değişkenin etiket olarak değişken, değişken miktar olarak değişken, bilinen değer olarak değişken, bilinmeyen değer olarak değişken ve bağımsız- bağımlı değişken olmak üzere beş anlamını ortaya çıkarmıştır. Değişkenin anlamları artarken, düşünce tipi ve anlayış derinliği somuttan soyuta geçmiştir. Öğrenciler değişkenlerin beş anlamını öğrenmiştir. Aşağıdaki bölümlerde değişkenlerin her bir yorumuna, öğrenci muhakeme biçimlerine, öğrencinin matematiksel düşüncesini değiştiren temel mekanizmalara ve düşünce türlerine ilişkin örnekler verilmektedir.

4.2.1.1. Etiket olarak değişken. Öğrenciler matematik kariyerlerinde değişkeni ilk olarak belli miktarları etiketlemenin bir yolu olarak öğrenirler. Değişkenleri etiketleme yaklaşımı öğrencilerin aritmetik işlemler sonucunda buldukları çoklukların ne olduğunu ifade etmek için kullandıkları kısaltmalarla başlar. Örneğin "3 armut ile 4 elmanın toplamı 7 meyve eder, 7m." gibi. Aşağıda yer alan Tablo 36'da öğrencilerin, bir niceliğin değişkenle etiketlenebileceğini anladıkları cebirsel düşünme süreci gösterilmiştir.

Tablo 36

Etiket olarak değişken kullanımının özeti

Değişken Türü	Durum	Etkinliğin Odağı	Muhakeme	Öğrenci Düşüncesinin Değişimi	Düşünme Tipi

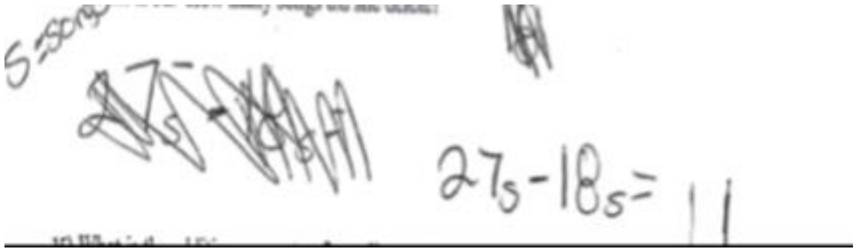
Etiket olarak değişken	Miktarın bilindiği durumda, miktarı göstermek için değişken kullanılması	Bir ifade yazarak, iki grubun bulunması. yetişkinler+çocuklar=Toplam y+ç=T Toplam tutarı bulmak için benzer ve farklı terimlerin bir toplamının kullanılması 4kırmızı+5mavi= 4k+5m	Bir grubun adını, kelimenin ilk harfiyle kısaltılması	Öğrencilerden ifadenin farklı temsillerini paylaşmalarını istenmesi, Öğrencileri aynı ifadeyi temsil etmek için daha verimli yol bulmaya yönlendirilmesi 2r + 3r=5r	Benzer ve benzer olmayan terimleri toplam olarak ifade edilmesi

Tablo 36'da değişkenin bir etiket olarak kullanımına yönelik olarak derste kullanılan etkinlik gösterilmiştir. Gözlemler sonucunda öğrencilerin karşılaştıkları durumlar ve değişen muhakemeleri, düşünceleri özetlenmiştir.

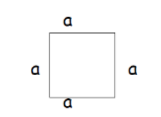
Etiket olarak değişken kullanma sürecinde öğrencilerden cebirsel bir ifade ya da denklem yazmaları ve toplam grubu bulmaları istenmiştir. Öğrencilerden "Senin cep telefonunda 27 şarkı vardır. İstemeden bazı şarkıların silindiğini fark ettin ve 18 şarkının kaldığını gördün. Kaç şarkı silinmiştir? Cebirsel olarak gösteriniz." gibi sorulara cevap vermeleri beklenmiştir.

Şekil 13

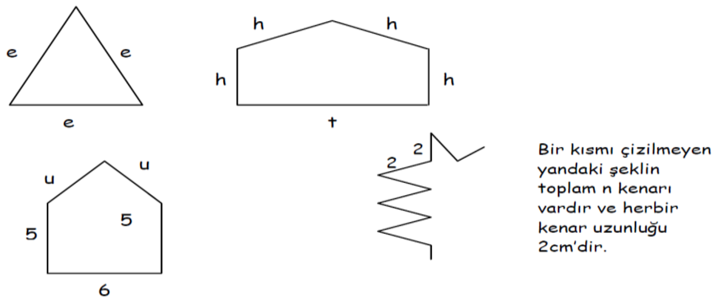
Öğrencinin öğeyi değişkenle nasıl etiketlediğine ilişkin örneği



Örnekler öğrencilerin aritmetik olarak düşündüklerini ve bilinen bir miktarı etiketle değiştirerek cebirsel düşünceye doğru ilerlediklerini de göstermektedir. Bu düşünceyi desteklemek için aşağıda yer alan CTT sorusu incelenecektir.

Aşağıdaki karenin kenar uzunluğu a birimdir. 

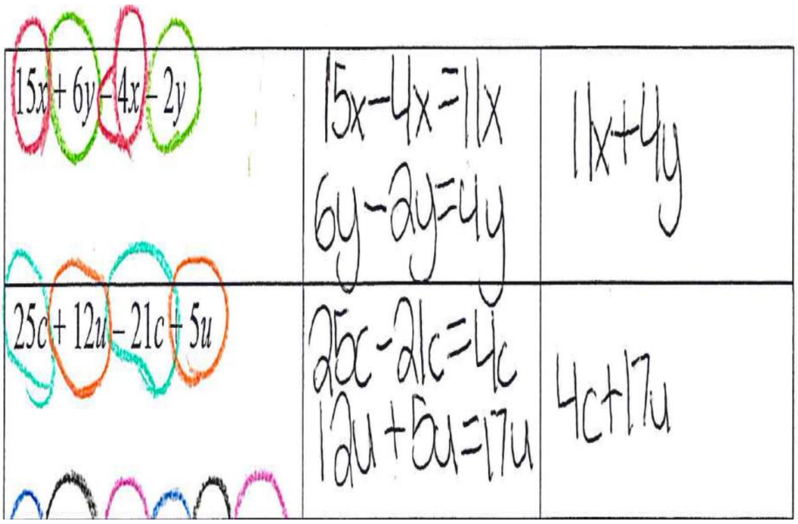
Bu karenin çevresi, Ç = 4a olarak gösterilir. Buna göre, aşağıdaki şekillerin çevrelerini nasıl yazarız?



Uygulanan son testte bu soruya doğru yanıt veren öğrenci sayısının arttığı görülmüştür. Öğretim süreci boyunca, öğrenciler ifadeler ve denklemler hakkında bilgi edinmiştir. Bir ifadenin, benzer ve toplamdan farklı olduğunu anlamış ve toplam miktarı bulma denklemlerini bulmuşlardır.

Şekil 14

Terimin'in toplamı olarak ifade edilmeme örnekleri



Öğrenciler için eşittir işareti "hesaplama" yapma anlamına gelir. Öğrenciler için eşittir işaretinin denklemin denge unsuru olduğunu başka bir ifade ile eşitliğin her iki tarafınında aynı olması gerektirdiğini anlamayabilirler. Her üç örnekte de yer alan değişkenler, nesnelerin etiketleri, bilinen miktarlar veya belirli kategorilerdir. Bu aşamada öğrenci düşünceleri, aritmetikten cebire, öğrenciler ise toplamadan çarpımsal düşünceye geçmiştir. Etiket olarak değişken kullanımı fikrinin öğrencilerde var olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin değişkenleri değişen miktarlar olarak kullanmaları gerekli görülmüştür. Bir sonraki bölümde değişken değişim miktarı olarak açıklanmaktadır.

4.2.1.2. Değişim olarak değişken. Bir değişkeni etiket olarak yorumladıktan sonra, öğrenciler aynı değişkene sahip iki veya daha fazla terimin nasıl toplanıp çıkarılacağını anlamışlardır. Bununla birlikte, değişkenin bir miktar olduğu fikrinin belirsiz öğrenciler için belirsiz olduğu tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin şimdiye kadar sadece bilinen değerlere değişken eklemiş olmalarıyla ilişkilendirilebilir. Aşağıda yer alan Tablo 37'de değişen bir miktar olarak değişken öğrencilere maddenin maliyeti bağlamında sorulmuştur.

Tablo 37

Değişim olarak değişken kullanımının özeti

Değişken Türü	Durum	Etkinliğin Odağı	Muhakeme	Öğrenci Düşüncesinin Değişimi	Düşünme Tipi
Değişim olarak değişken	Değişken, bir miktarın değişimini gösterir	Toplam maliyeti bulmak için kullanılabilecek bir ifade yazmak. 4kalem ve bir silginin maliyeti; 4k+s	Fiyatı bir değişkenle sembolize etmek ve değişebileceğini kabul etmek Farklı markaların ürünleri için 4k+s'nin değeri değişebilir	İfadenin herhangi bir mağazada kullanılabilecek bir formül oluşturmak	Bir formülü modellemek için sembolleri anlamlı bir şekilde kullanma

Öğrenciler, bir değişkenin belirli bir miktardaki kalem ve silginin maliyeti için bir ifade yazdıktan sonra değişen bir miktar olabileceğini düşünmeye başladılar. Bu değişim mağazadan mağazaya farklılık gösterir, çünkü kalem ve silgi fiyatları değişkendir şeklinde yorumlanmıştır. Bu düşünceyi desteklemek için aşağıda yer alan CTT sorusu incelenecektir.

Kırtasiyede satılan araba dergilerinin tanesi 8, magazin dergilerinin tanesi 6 liradır. a harfi satın alınan araba dergilerinin sayısını, m harfi de magazin dergilerinin sayısını gösteriyorsa;

8a+6m neyi göstermektedir? ....

Toplam dergi sayısı nasıl ifade edilir?...

Uygulanan son testte bu soruya doğru yanıt veren öğrenci sayısının arttığı görülmüştür.

Öğrencilere sorulan "bir kırtasiyede 4 kalem ve 1 silgi için ödenmesi gereken maliyet nedir?" sorusu öğrencilerin farklı kırtasiyeler için farklı maliyetler olabileceği fikrine yönlendirmiştir. Aşağıda verilen ve sınıf ortamında öğrenciler ile öğretmenleri arasında geçen diyalog göz önünde bulundurulduğunda öğrencilerin düşünme biçimlerini geliştirilmiş olduğu söylenebilir.

…

Öğretmen: Farklı kırtasiyeler vardı. Ne olabilir bir miktar?

Sınıf: Değişim

Öğretmen: Güzel. Değişebilecek bir miktar.

Öğrenci: Her mağazada maliyet değişti.

…

Öğrencilerin sınıf ortamında formül kelimesini yaygın olarak kullandıkları tespit edilmiştir. Bu nedenle formülün "ifade" olarak da adlandırılabileceğini kabul eden öğrencilerin değişken kullanarak formül yazabildikleri görülmüştür.

4.2.1.3. Bilinen değer olarak değişken. Öğrenciler değişen bir miktar olarak değişken ve bilinen bir değer olarak bir değişkeni eşzamanlı olarak anlamışlardır. Örneğin, öğrenciler değişkenleri değişen miktarlar olarak görmüş ve değişkenler için bilinen değerleri hemen kullanabilmiştir. Öğrencilere üç farklı kırtasiyede satılan dört kalem ve bir silgi için fiyat verilmiş ve öğrencilerden değişkenler için bilinen değerleri 4k + s olarak belirlenmiş ifadeyi kullanarak toplam maliyeti bulmaları istenmiştir. Aşağıda yer alan Tablo 38'de bilinen değer olarak kullanımının özeti gösterilmiştir.

Tablo 38

Bilinen değer olarak değişken kullanımının özeti

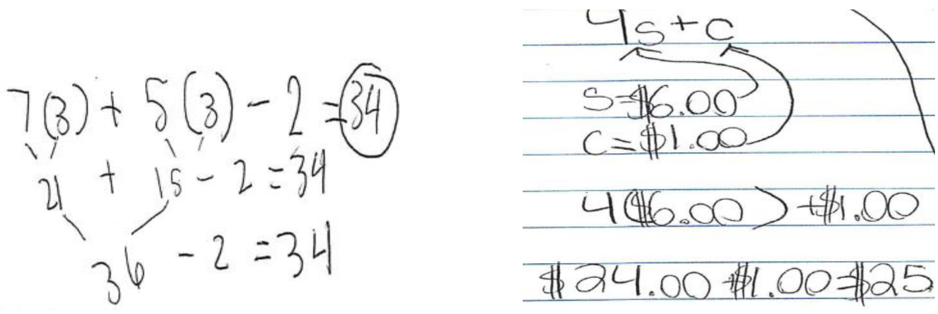
Değişken Türü	Durum	Etkinliğin Odağı	Muhakeme	Öğrenci Düşüncesinin Değişimi	Düşünme Tipi

Bilinen değer olarak değişken	Değişken için değer verilir Bilinen değer, değişen miktarın yerini alabilir	Bir öğenin fiyatını farklı mağazalardan ifadeyi kullanarak toplam maliyeti bulmalarını istenir	Değişken için verilen bir değeri değiştirilmesi Katsayının değişkenin değeri ile çarpıldığını anlamak 4k’nin 4.k olması	Değeri ifade de yerine konulduğunda değişken kaybolur 4k+s=4.4+1=17	Bir ifadeyi değerlendirmek için sembolleri anlamlı bir şekilde kullanılır

Değişkenin bilinen bir değer olması için, değişkene değer verilmeli ve bu bilinen değer değiştirilmelidir. Şekil 15’te yer alan öğrenci cevabı incelendiğinde öğrencilerin değişken için bilinen değeri yerine koyma düşüncelerini oklar çizerek gösterdikleri görülmektedir. Ayrıca bu şekle bakarak öğrencilerin çok yönlü düşündükleri söylenebilir. Örneğin, 7u'nun 7 • u anlamına geldiğini ve u için bir değer verildiğinde, bunun 7 ile çarpılması gerektiğini anlamışlardır.

Şekil 15

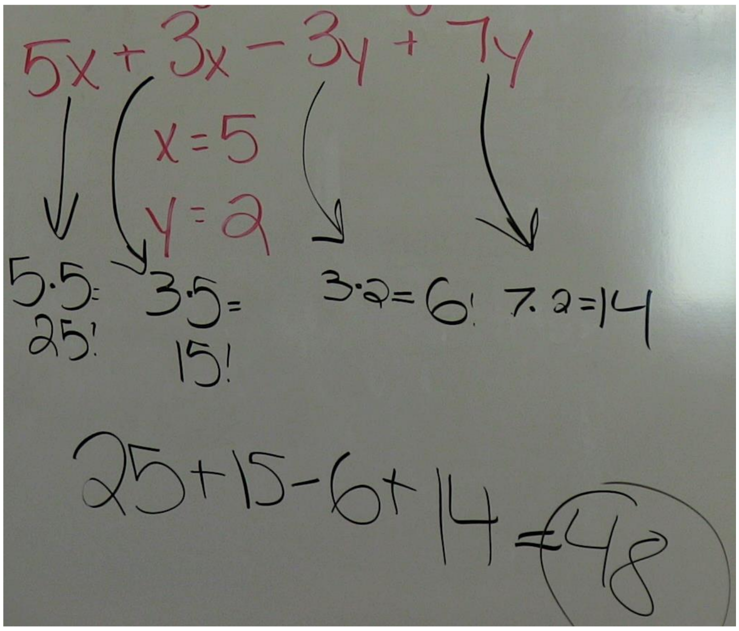
Öğrencilerin değişkenleri bilinen değerler olarak yorumlaması



Ok çizme, değişkeni silme veya bir sayı ile değiştirme gibi yazılı ipuçları, öğrencilerin değişkenin bilinen bir değerle değiştirilmesini öğrenmelerine yardımcı olduğunu göstermiştir.

Şekil 16

Bir değişken için bir değerin yerine konulmasını gösteren yazılı ipuçları



Değişkenlerin farklı değerler almasıyla sonucun değiştiğini gören öğrenciler her durum için değişkenlerin değerini hesaplamak için uğraşmışlardır. Bu bağlamda öğrencilerin benzer terimlerini toplama veya çıkarma eğiliminde oldukları söylenebilir.

Bunun yanı sıra öğrencilerin, çoklu ve cebirsel olarak düşünmeye devam ettikleri görülmüştür. Öğrenciler bilinen değerleri ifadede yerine koyma ve benzer terimleri bir araya getirme işlemlerini daha kolay gerçekleşmiştir. İlerleyen düşünme biçimlerinde, öğrenciler değişken için bilinen değeri 4k gibi bir ifadede yerine koymuş ve katsayının değişkenin bilinen değeri ile çarpılması gerektiğini anlamıştır. Bu noktada, öğrenciler doğal olarak cebirsel düşünmüştür çünkü bir ifadeyi basitleştirmek için değişkenlerin bilinen değerlerinin anlamlı bir şekilde yerini değiştirmişlerdir. Ayrıca öğrenciler sorunun çözümüne somut ifadelerle başlamışlar ve çözüme soyut ifadeler veya denklemler kullanarak devam etmişlerdir.

Tanı testinde yer alan “Eğer u = v+3 ve v = 1 ise, u =? ....” sorusu buna bir örnek olarak gösterilebilir.

Uygulanan son testte bu soruya doğru yanıt veren öğrenci sayısının arttığı görülmüştür.

4.2.1.4. Bilinmeyen değer olarak değişken. Bu aşamada öğrenciler değişkene bilinen bir değer olarak bakma sürecinden bilinmeyen bir değer olarak bakma sürecine geçmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin bilinmeyenleri çözerek değişkenin değerini bulmak zorunda kaldıkları gözlemlenmiştir. Bu aşamada öğrenciler bir etiket olarak değişken, değişken bir miktar olarak değişken, bilinen bir değer olarak değişken ve bilinmeyen bir değer olarak değişkenler arasında bağlantı kurarak değişkenlerin ilişkisini ortaya koymuşlardır.

Tablo 39

Bilinmeyen değer olarak değişken kullanımının özeti

Değişken Türü	Durum	Etkinliğin Odağı	Muhakeme	Öğrenci Düşüncesinin Değişimi	Düşünme Tipi
Bilinmeyen değer olarak değişken	Bilinmeyen için çözüm gereklidir Bilinmeyen değişkenler izole edilmeli	Değişkenleri izole etmek için dengeleme gereklidir r+2=6	Eşitliğin bir tarafına uygulananlar diğer tarafına da uygulanmalıdır	Değişkeni izole etmek için ekleme-çıkarma yapılmalıdır r+2=6, r+2-2=6-2, r=4	Eşittir işaretinin aynı olduğu yapı incelenmelidir

Değişkeni bilinmeyen bir değer olarak anlamaları için öğrencilerin değişkenin sabit bir değer fark etmeleri gerekmiştir. Başka bir deyişle, öğrencilerin denklemi çözmek için değişkeni çözmeleri ya da izole etmelerinin gerekli olduğu görülmüştür. Aşağıdaki tartışma, değişkenin bilinmeyen bir değer olduğu zaman öğretmen ve sınıf tarafından nasıl yorumlandığını göstermektedir.

…

Öğretmen: Bildiklerimizin dışında, "6 + x = 9" karşılaştığımızda ne yapmamız gerekiyor? x'i bilmiyoruz, çözün. Buna bildiklerimizin dışında başka eklemek istediğiniz birşeyler var mı?

Öğrenci: Evet. 9'dan 6'yı çıkarırız ve 3 olur.

Öğretmen: Bunu ilk gördüğümüzde x'in ne olduğunu biliyor muyuz?

Sınıf: hayır.

Öğretmen: Sadece probleme baktığımızda, x'in ne olduğunu bilmiyoruz, bu yüzden x için çözmeliyiz veya değişken için çözmeliyiz. Bilinmeyen değişken.

…

Öğretmen öğrenciye, değişkenin değerinin belirtilmediği durumlarda bilinemeyeceğini açıklamıştır. Başka bir deyişle, öğrenciler değişkeni çözmek zorunda kaldıklarında "bilinmeyen değişken" olduğunu anlamışlardır. Değişken için çözüm yapmaları gerekmediyse, değişken için değer sağlandıysa, değişkeni "bilinen değişken" olarak yorumlamışlardır.

Basit ifadeler için yapılan işlemler öğrencileri cesaretlendirmiştir. Sınıfın geneline bir örnek üzerinden eşitliğin aynı zamanda bir denge oluşturduğunu hissettirmek için aşağıda yer alan soru çözülmüştür.

"x'in hangi değeri çarpma işlemini doğru yapar?

$(64 + 8) \cdot 55 = 64 \cdot x + 8 \cdot 55$

Sınıf ortamında buna benzer çok sayıda örnek çözmeye özen gösterilmiştir. Öğrencilere özellikle kelime problemleri sorulmuş ve çözüm yaparken ifadeleri cebirsel yazmaları istenmiştir. Burada öğrencilerin çözüm ile cebirsel ifadenin arasındak ilişki kurmaları amaçlanmıştır. Aşağıda yer alan soruda cebirsel bir denklemi nasıl modelledikleri incelenmiştir.

Şekil 17

Maliyeti temsil eden bilinmeyen değişkeni izole örnekleri

Soru: Kramponlar ve topun maliyeti 72 liradır. Eğer kramponlar 55 lira ise, topun fiyatı nedir?	
Cebirsel Eşitlik	Eşitliğin Çözümü
$72-55=t$	$\begin{array}{r} {}^{6}\cancel{7}{}^{1}2 \\ -\,55 \\ \hline 17 \end{array}$ $t=17$

Şekil 17, öğrencilerin topun maliyetini cebirsel bir denklemde nasıl modellediklerini gösteren bir yazılı çalışmadan örnektir. Cebirsel ifadeleri yazmak için, öğrenciler topun maliyetinin bilinmeyen bir değere sahip bir değişkenle temsil edildiğini bilmek zorunda kalmışlardır. Her iki örnekte de cebirsel denklem yazdıktan sonra, öğrencilerin değişkenin bilinmeyen değerini çözmeleri gerekmiştir.

Bir sonraki aşamada öğrenciler bir değişkenin bilinmeyen bir değer olabileceğini öğrenirken, eşittir işaretini "her iki tarafta aynı" veya "dengeli" olarak görmeye başlamıştır. Bu görselleştirme sadece öğrencilerin dengeyi düşünmesini değil denklem çözme ve değişkenleri izole etme konusunda ters işlemleri düşünmesini sağlamıştır. Aşağıda yer alan soruda cebirsel bir denklemde terazinin denge prensibini cebirsel işlemlere yansıtarak değişkenleri izole etme konusunda nasıl modelledikleri düşüncesini destekler niteliktedir.

…

Öğretmen: sizin denklem olarak yazdıklarınızı dengeyi bozmadan, nasıl çözebilirim?

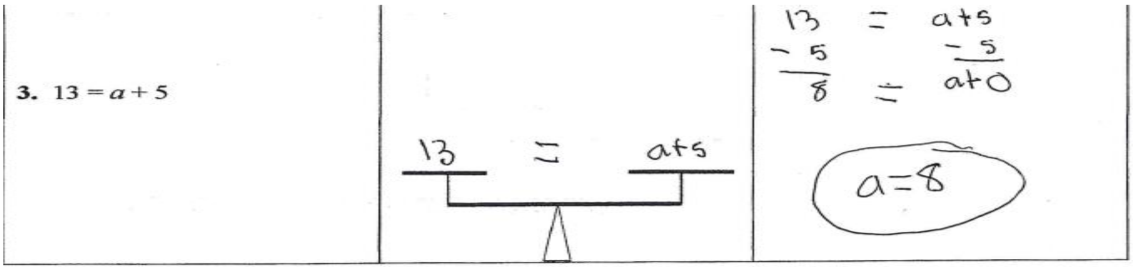
Sınıf: Diğer tarafa aynı işlemleri uygulayarak.

…

Şekil 18'de öğrencilerin yazılı çalışmalarına ait örneğin çözümünü benzer şekilde yapmaları istenmiştir.

Şekil 18

Denge prensibini cebirsel işlemlere yansıtma örneği



CTT’de yer alan 5. ve 10. sorular Şekil 18’de yer alan örnekle benzer niteliktedir. Öğrencilerin genel ortalaması için bu soruda son testte bir başarı artışı olmuştur. Bir karenin çevresinin bulunması için bir formül yazarak öğrencilere bağımsız ve bağımlı değişkenler tanıtılmıştır. Bu etkinlik öğrencileri bir değişkeni ikinci bir değişkenle ilişkilendirmeye yönlendirmiştir. Bağımsız ve bağımlı değişkenleri öğrenmeleri öğrencilerin, öğrenme fonksiyonlarını incelemek için bu değişkenler arasındaki ilişkiyi görmeleri gerektiğine dair ilişkisel düşünceyi desteklemiştir. Tablo 40, öğrencilerin bağımsız ve bağımlı değişkenlerin anlamını nasıl anladıklarına ilişkin ilerlemeyi göstermektedir.

Tablo 40

Bağımlı ve bağımsız değişken kullanımının özeti

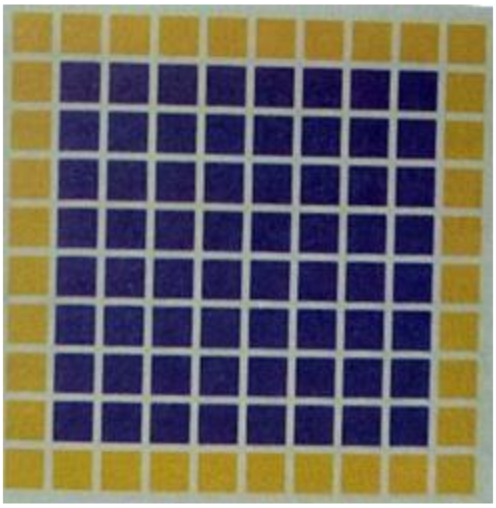
Değişken Türü	Durum	Etkinliğin Odağı	Muhakeme	Öğrenci Düşüncesinin Değişimi	Düşünme Tipi
Bağımlı ve Bağımsız Değişken	Bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi bulmak Girdi bilindiğinde çıktının	Bir karenin çevresi için formül açıklamak Model kurabilmek	Sözel bir durumu matematiksel bir formül olarak yazmak	Formülde “x” için verilen değerin diğer değişkeni etkilediğini anlamak	Örüntülerin formül, alan ve aralıklarla incelenmek

bulunabileceğini bilmek

Öğrencilere giriş etkinliği olarak, aşağıda yer alan Şekil 19’daki gibi modellenen “8x8 boyutundaki kare havuzun etrafındaki karoların sayısını bulunuz. Bulduğunuz metodu cebirsel olarak gösteriniz.” sorusu sorulmuştur.

Şekil 19

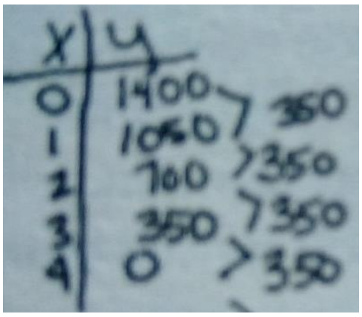
Giriş etkinliğindeki havuz problemi



Bu sorunun çözümünde öğrencilerden bir değişkenin değişen bir miktar olabileceğini, bağımsız ve bağımlı değişken arasında bir ilişki olduğunu tespit etmeleri beklenmiştir. İlerleyen süreçte aynı havuza ilişkin sorular türetilmiştir. Bu sorulardan biri, “havuzdan saatte kaç litre su almalıyız ki 4 saatte tamamen boşalsın?” şeklindedir.

Şekil 20

Değişkenlerin ilişkisini ifade eden öğrenci cevabı



Sorunun çözümünde öğrenciler y değişkenine ait verilerin adım adım ne kadar azaldığını belirlemişlerdir. Denklemin bir tarafı azalırken x değişkeninin de arttığını gösterebilmişlerdir. Soruda istenen azalan tarafın tamamen tükendiğinde x değişkeninin durumudur. Öğrenciler ayrıca girdi- çıktı ve aralık gibi matematiğin dilini kullanarak çözümlerini desteklemişlerdir. Türetilen sorulardan bir diğeri ise havuzun tamamen boşalma süresine ilişkindir. Tüm soruların çözümünde sonra öğrenciler aynı işlemi temsil etmenin farklı yolları olduğunu öğrendikleri görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin bağımsız ve bağımlı değişkenlerin değerleri ile oluşturulan sıralı çiftleri çizebildikleri tespit edilmiştir. Bu süreçte öğrencilerin bilinmeyen değer olarak değişkenleri kullanabilme becerilerinin soruların çözümünde önemi görülmüştür.

Benzer şekilde 7. sınıflar için hazırlanan ve aynı öğretmenle yapılan görüşmeler neticesinde son formatı, aynı öğrencilere uygulanan ÖY'nın açıklanmasına da yer verilmiştir. 7. sınıflarda cebir öğretimi için üç öğrenme haritası programdaki kazanımların sırası göz önünde bulundurularak hazırlanmış ve uygulanmıştır. İlk yörüngede temel hedef, gerçek yaşam durumlarına uygun bir bilinmeyenli denklem kurmaktır. İkincisinde eşitliğin korunumu ilkesinin anlaşılması ve açıklanmasıdır. Son olarak hedefi ise bir bilinmeyenli denklemlerin kurulması ve çözülmesidir. Aşağıda yer alan Tablo 41'de TÖY'nin işleyiş şeması ve ders içinde hangi hususlara değindiği konular gösterilmiştir.

Tablo 41

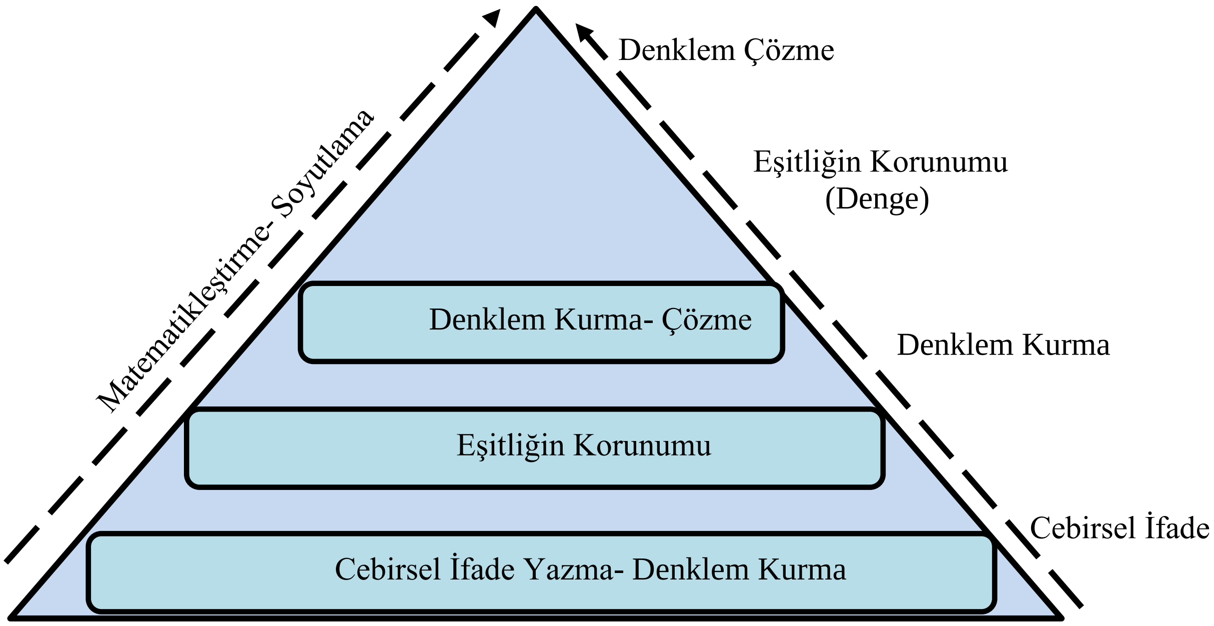
7. sınıf TÖY işleyiş şeması

Hedef (Amaç)	Hipotez (Rota)			Değerlendirme (Kazanım)	
Öğrenme Hedefi	Dersde Yapılan Hatalar	Etkinlik		Düşünme Biçimi	Değerlendirme
Eşitliğin Korunumu İlkesinin Anlaşılması	Eşitliğin her iki tarafına eşit davranmama	Giriş	Cebirsel ifade yazma	Eşit işareti için anlam oluşturan öğrencilerin, aritmetik deneyimlerinden denklem fikrinde denge kavramını oluşturabilmesi	Bir eşitliği sade hale getirmenin ve eşdeğer eşitlikler elde etmenin yollarını öğrenme
		Keşif	Terazi etkinliği		
		Derinleşme	Sanal manipülatif		

Eşitliğin korunumu ilkesinin anlaşılması, öğrenme hedefi için örnek bir ders planı ve etkinlikler EK'de yer almaktadır. 7.sınıf için hazırlanan TÖY'nin içeriğinin, öğrencinin denklem kurma, denklemde eşitlik korunumu ve denklem çözmenin çeşitli bağlamlardaki anlama konularında oluştuğu görülmektedir. Bölümlerde değişken fikrinin her bir yorumuna ilişkin ayrıntılı açıklama yapılacaktır. Aşağıda yer alan Şekil 21'de öğrenme sürecinde kullanılan ve öğrenme süreci sonrasında ortaya çıkan TÖY'ye ilişkin açıklamalar bulunmaktadır.

Şekil 21

Uygulama sonrasında ortaya çıkan ÖY'nin oluşum süreci



Şekil 21'de öğretim deneyi sonucunda ortaya çıkan TÖY'ün bir tasviri görülmektedir. Eşitliğin Korunumunun yorumu ve öğretimin gelişimini göstermektedir. Öğrencilerin değişkenleri yorumlaması, cebirsel ifade yazmaları ve denklem kurmaları kritik öneme sahip olduğu görülmüştür. Denklem çözmeyi öğrenmeden eşitliğin anlamını ve korunumu anlamalarının daha sağlıklı denklem çözücü olmalarını sağladığı söylenebilir. Buna ek olarak öğrencilerin cebirsel ifadenin anlamı ile denklemin anlamı arasındaki bağlantıyı anlama becerilerinin süreç içerisinde geliştiği belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin eşitliğin korunumu bilgisini denklem çözümünde temel bilgi olarak kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin matematiksel düşünceleri denklem çözerken; cebirsel ifade yazma, denklem (eşitlik) kurma, eşitliğin korunumunu anlama ve denklemi çözme aşamalarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Ayrıca öğrenciler için denklem çözümünde kritik öneme sahip olan korunumun anlaşılması becerisinin, düşünce çeşidinin ve anlayış derinliğinin somuttan soyuta geçtiği için süreç matematikleştirme olarak ifade edilebilir. Buna ek olarak öğrenciler denklem çözmenin anlamını öğrendikleri gözlemlenmiştir. Aşağıda yer alan Tablo 42'de denklem çözmenin her bir aşamasına, öğrenci muhakeme biçimlerine, öğrencinin matematiksel düşüncesini değiştiren temel mekanizmalara ve düşünce türlerine ilişkin örneklere yer verilmiştir.

Tablo 42

Denklem kurma süreci

Değişken Türü	Durum	Etkinliğin Odağı	Muhakeme	Öğrenci Düşüncesinin Değişimi	Düşünme Tipi
Denklem kurmak	Cebirsel ifadeleri birleştirerek bir eşitliğin inşa edilmesi	Bağlamsal durumları matematiksel bir model olarak açıklamak	Cebirsel ifadeleri ilişkilendirerek eşitlikler inşa etmek	Öğrenciler sezgilerini ve işlemleri kullandıklarında çözüm stratejileri arasında esnek bir şekilde hareket etmeyi öğrenebilirler	Öğretilen algoritmaları uygulamaya geçirmek

Öğrenciler denklemi kurmak için ilk aşamada bağlamsal olarak sunulan problemin anlamını yorumlarlar. Bu aşamada öğrenciler problemi okur, problemi tanımlar ve problemin ana fikrini (yani şema veya problem türü) belirler. Problemin çözümünde strateji belirlemek önemlidir. Ancak birçok öğrenci bu aşamayı göz ardı ederek problemden sayıları seçerek işlemi tanımlamak için anahtar kelimelere yönelmektedir. Çözümün ikinci aşaması bir sayı cümlesi kurmayı, hesaplama (lar) yapmayı, sonucu etiketlemeyi ve cevabın anlamlı olup olmadığını kontrol etmeyi içerir. Aşağıda verilen diyalog problem çözme sürecinde stratejinin belirlenmesi ve uygulanmasına yönelik olarak öğrenciile öğretmen arasında gerçekleşmiştir.

…

Öğretmen: Çok sayıda rakam var ve işlem var gibi gözüküyor. Bu bir problem! Öncelikle, problemi birlikte okuyalım.

Sınıf: "Leyla, 29 kırmızı ve yeşil elmaya sahiptir. 11 elma kırmızıysa, Leyla'da kaç tane yeşil elma vardır?"

Öğretmen: Problemi okuduk. Şimdi, istenenin altını çizelim. Bu problem ne hakkında?

Sınıf: Elmalar.

Öğretmen: Kırmızı elmaları mı yoksa yeşil elmaları mı bulmalıyız? Soruya bakın.

Sınıf: Yeşil elmalar.

Öğretmen: Öyleyse, yeşil elmaların altını çizelim. Peki sonra ne yapacağız?

Sınıf: Birleştirme.

Öğretmen: Neden birleştirme? Neleri bir araya getiriyoruz?

Sınıf: Evet. Toplamda kırmızı ve yeşil elmaları birleştirdik.

Öğretmen: Problemi bilgisini düzenlemek ve problemi çözmek için k.elmalar + y.elmalar = T'yi kullanalım. Problemi tekrar okuyalım. Denkleminde 29'a ihtiyacımız var mı?

Sınıf: Evet! Bu toplam.

Sınıf: "Elmaların 11'i kırmızıysa…"

Öğretmen: 11'i nereye yazıyoruz?

Öğrenciler: kırmızı elmaların yerine.

Öğretmen: yeşil elmalar için ne yazmalıyız?

Öğrenciler: soru işareti yazılır ya da başka bir şey bilmiyoruz ne kadar olduğunu?

Öğretmen: Doğru. Eksik bilgiyi bir soru işareti ile işaretleriz. Şimdi, bu denklemi çözelim. 11'den başlayıp 29'a ekleyebilirsiniz. 11'den 29'u çıkarabilirsiniz. Seçiminiz!

Öğrenci: 18 yeşil elma

…

Öğrencilerin geçmiş tecrübelerinde var olan gerçek yaşam durumlarına uygun cebirsel ifadeleri kolaylıkla yazabildikleri görülmüştür (6. sınıf kazanımı). Ancak yazdıkları cebirsel ifadelerin ilişkilendirmede acemi oldukları bir diğer husustur. Öğrencilerin tanıdık gelen, "☐

+382=502 kutunun yerine ne yazmalıyız?" şeklindeki problemler öğrencilerin farklı cebirsel ifadeleri ilişkilendirmede cesaretlendirici olmuştur. Eşitlik işaretinin cebirsel ifadeleri ilişkilendirmede öğrenciler tarafından kullanılabildiği görülmüştür. Yukarıdaki örneklerle cebirsel ifade konusu hatırlatıldıktan sonra aynı ifadeleri herhangi bir sayıya eşleyerek eşitlik meydana getirilmiştir. Bu bağlamda temel düşünce öğrencilerin eşitlik kavramına ihtiyaçları olduğunu hissedecekleri problemleri çözmelerini sağlamaktır.

Öğrencilere yazdıkları cebirsel ifade örneği ile en son yazdıkları denklem örneği arasındaki fark sorulduğunda, öğrencilerin cebirsel ifadenin bilinmeyenin her değeri için denklemin ise tek bir değer için yazılabileceği cevabını verdikleri görülmüştür. İlerleyen konularda zorluk yaşanmaması için bilinmeyen ve değişken arasındaki farkın anlaşılması önemlidir.

Tablo 43

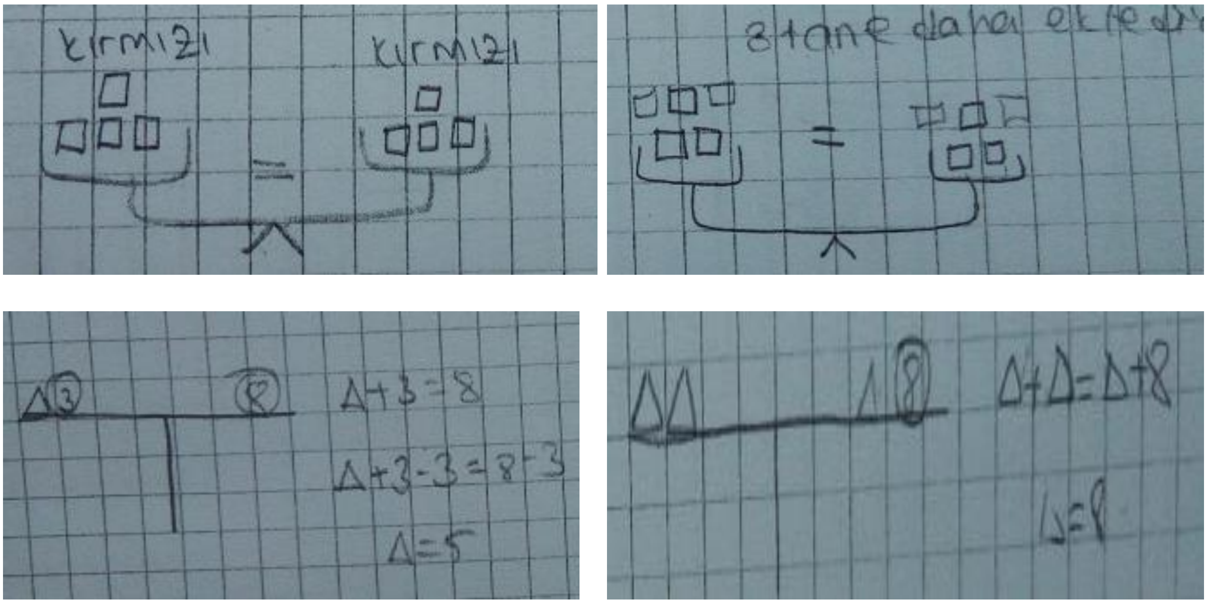
Eşitlik korunumunun anlaşılması

Değişken Türü	Durum	Etkinliğin Odağı	Muhakeme	Öğrenci Düşüncesinin Değişimi	Düşünme Tipi
Eşitliğin korunumu	Denklem sistemi içerisinde dengeyi anlamak	Eşit işaretinin anlamını ve dengeyi aynı işlemlerin koruduğunu anlamak	İnşa edilen eşitliğin dengesini korumak	Eşitliği korurken denklemin her iki tarafında benzer işlemlerin yapıldığını bilmek	Korunumun işlemlerle bozulmadığını anlamak

Hem sanal hem de fiziksel manipülatiflerin, matematiksel içeriği öğrenmek için çeşitli bağlamlarda farklı öğrenci gruplarına uygulandığında etkili öğrenme araçları olduğu bilinmektedir. Çoklu temsillerin kullanımı ve bu temsil biçimleri arasında geçişler yapma esnekliği öğrencilerin öğrenmelerini kolaylaştırır ve anlayışlarını derinleştirir. Bu sebeple öğrencilerin denge kavramınu kazanmaları için öncelikle cebirsel ifadeleri denklem yazmayı gerektiren etkinlikler yapılmıştır. Ardından kritik bir evre olan dengenin korunumu için literatürde sıklıkla müracaat edilen (Altun, 2018; Kutluca ve Akın, 2014; Suh & Moyer, 2007) terazi etkinliği uygulanmıştır. Etkinliğin amacı, öğrencilerin farklı cebirsel modellerle ilgilenmelerini ve ilişkisel düşüncelerini temsil etmek için farklı stratejiler kullanmalarını teşvik etmeyi sağlamaktır. Öğrenci temsillerinin örnekleri, onların gelişen cebirsel düşüncelerini belirlemektir. Şekil 22'de terazi modeli ile çözülen soru örnekleri gösterilmiştir.

Şekil 22

Terazi modeli ile çözülen soru örnekleri



NCTM (2000) matematikte temsilin rolünü; "öğrencilerin matematiksel fikirleri düzenlemek, iletişim kurmak için temsiller oluşturmaları ve kullanmaları gerektiğini ifade eder; ayrıca fiziksel, sosyal ve matematiksel olayları modellemek ve yorumlamak için matematiksel gösterimlerin kullanımı önemlidir." vurgulamaktadır. Öğrencilerin terazi etkinliği süresince; görsel veya sembolik gösterimleri kullanarak cebirsel denklemleri yorumlamalarının matematiksel akıl yürütmelerini geliştirdiği görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel düşünmelerini teşvik etmek için terazinin denge mantığı kullanılarak cebirsel ifadeler için deneyimler kazandığı belirlenmiştir. Öğretmen, denge ve eşitlik ile ilgili aşağıdaki tartışmaya öğrencilerin dahil ederek öğrencilere denge ve eşitlik fikri geliştirmelerine yardımcı olmuştur.

…

Öğretmen: Bu nedir?

Ö: Terazi

Öğretmen: Terazileri ne için kullanıyoruz? Nerelerde karşımıza çıkıyor?

Ö: Ölçmek için.

Ö: Pazarda çok görüyoruz.

Öğretmen: Amaç nedir? Neden iki kefesi var?

Ö: Eşit olması için.

Öğretmen: Eşit dışında başka bir kelime nedir?

...

Ö: Dengeli

Öğretmen: Dengeli. İyi. Orada dört tane şekil var. Kare, daire, üçgen ve elmas. Bu tarafta kırmızı bir kare varsa. Nasıl dengeli yapıyorum?

Sınıf: Diğer tarafa kırmızı bir kare koyun.

Öğretmen: Eğer mavi bir daire veya iki mavi daire eklersem, ne yapmalıyım diğer taraf?

Sınıf: İki mavi daire.

…

Öğretmen: Bu bir terazi dengeli ise, bir problem verilirse "3 = x – 1", bu kurala göre ne yapmam gerekiyor?

Ö: Bilinmeyen değişken için çözeriz.

Öğretmen: Bilinmeyen x olur. Bunu yaparken teraziyi düşünelim, her iki tarafın da dengeli olduğunu biliyoruz.

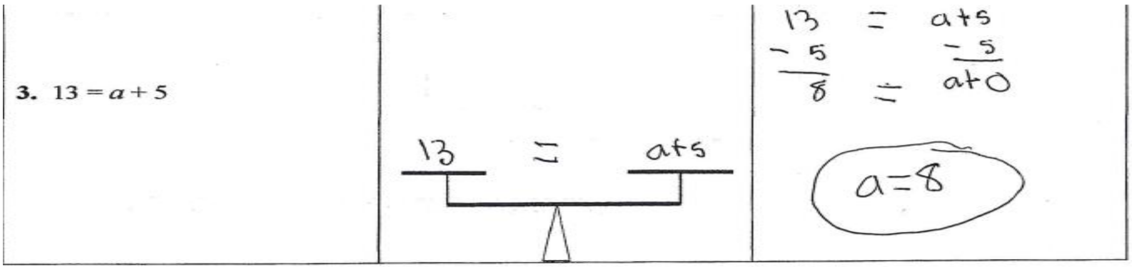
…

Öğrenciler terazinin nasıl çalıştığını anladıktan sonra, bir denklemi dengeleyerek bilinmeyen bir değişkeni çözmeyi başarmışlardır. Bu noktada, öğrenciler denklemin yapısını inceleyerek ve her iki tarafın da aynı değerde olması gerektiğini bilerek cebirsel düşündüklerini göstermişlerdir.

Öğrenciler Şekil 23'deki denklemi dengeli bir terazinin iki tarafı olarak düşünmüşler ve eşittir işaretinin eşitliğin iki tarafın da aynı olması gerektiği şeklindeyorumlamışlardır. Terazinin her iki tarafının da 13 olması için terazinin "a+5" olan kefesine 8 eklenmesi gerektiğini fark etmişlerdir.

Şekil 23

Denklemi çözmede terazi düşüncesinin kullanımı

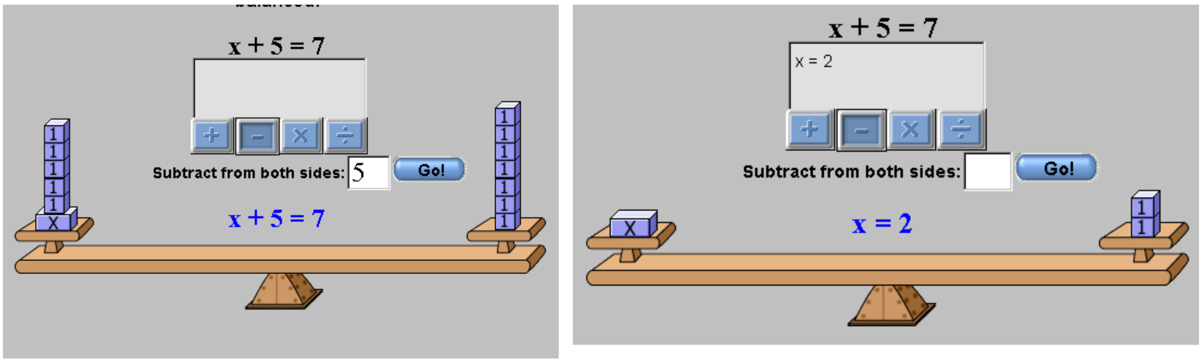


Öğrencilerin terazi ile modellenen eşitlikleri nesneleri kullanarak ifade ettikleri görülmüştür. Terazi üzerinde işlemler yapılması ve denge durumunun bozulmaması sağlanmıştır, elde edilen durumlar nesneler kullanılarak sembolik olarak ifade edilmiştir. Denklem çözümünde yaygın kullanımı olan "=" eşit işareti için sayı veya değişkenin eşitliğin diğer tarafına geçtiğinde işaret değiştirme metaforunun neden kaynaklandığının daha iyi anlaşılması ve gerçekte denklem çözme sürecinde nelerin olduğunun anlaşılması için sanal manipülatiflerden faydalanılmıştır. Sanal manüpülatif kullanım amacı terazi üzerinde yapılan işlemlerin cebirsel olarak ifade edilmesi, böylece öğrencilerin verilen bir eşitliği daha sade hale getirebilmesi ve eşdeğer eşitlikler elde etme yollarını öğrenmesidir. Bu sayede daha fazla soruyu daha pratik şekilde çözme fırsatı yakalanmıştır.

Şekil 24’de öğrencilerin denklemi sanal manipülatif ile terazi etkinliğindeki gibi çözdükleri örneklere yer verilmiştir. Soruda ilk olarak, 1 sayısını temsil eden birim blok ve bilinmeyen x'i temsil eden mavi bir x-kutusu, terazinin kefelerine yerleştirilir. Terazi “x+5=7” lineer denklemini temsil ettiğinde dengeye gelir. Öğrenciler denklemin her iki tarafında aynı işlemi yaptıkları sürece aritmetik işlem yapabilirler ve böylece kefelerin dengesi bozulmaz. Denklem dengeli değilse kiriş bir tarafa doğru eğilir. Uygulamanın amacı, bir tarafta dengeye ihtiyaç duyulan miktarla diğer tarafta ise tek bir x kutusunu elde etmektir. Böylece x değeri yalnız kalır ve karşılığında bir miktar sayı oluşur.

Şekil 24

Terazi etkinliği sanal manipülatif örnekleri



Böyle bir ortamın öğrenim sürecinde kullanımı öğrencilerin: (a) görsel ve sembolik modların açık bir şekilde birbiriyle bağlama; (b) denklem çözümünde, algoritmik işlemlerde adım adım ilerleme ve (c) anında geri bildirim ve yapılan hatanın telafisini sağlama gibi farklı düşünme becerilerinin gelişmelerini sağlamıştır. Sanal terazinin özelliklerinden biri, terazinin dinamik resmini, görselde sunulan cebirsel denklemlerin sembolik gösterimi ile açıkça ilişkilendirmesidir. Öğrenciler “her iki taraftan 5 çıkarma” gibi sembolik bir komut yazdıklarında, uygulamanın dinamik özelliği, 5 adet 1 yazılı simgeyi kefelerin her iki tarafından kaldırmış ve aynı anda ekranda yeni bir denklem görüntülemiş olur. Denklem penceresi, öğrenci tarafından yapılan hareketleri izler, böylece x’in adım adım yalnız kalması için çözüm sürecini oluşturmuştur. Denklem ile denge eylemleri arasındaki bağlantıyı açıkça kurulmuştur. Sınıf oturumların da öğretmen öğrencilerden çözüm süreçlerini açıklamalarını istediğinde, öğrenciler bu işlemlerin sanal uygulama tarafından kaydedildiği denklem penceresini kullanarak gözlemlerini sunabilmişlerdir.

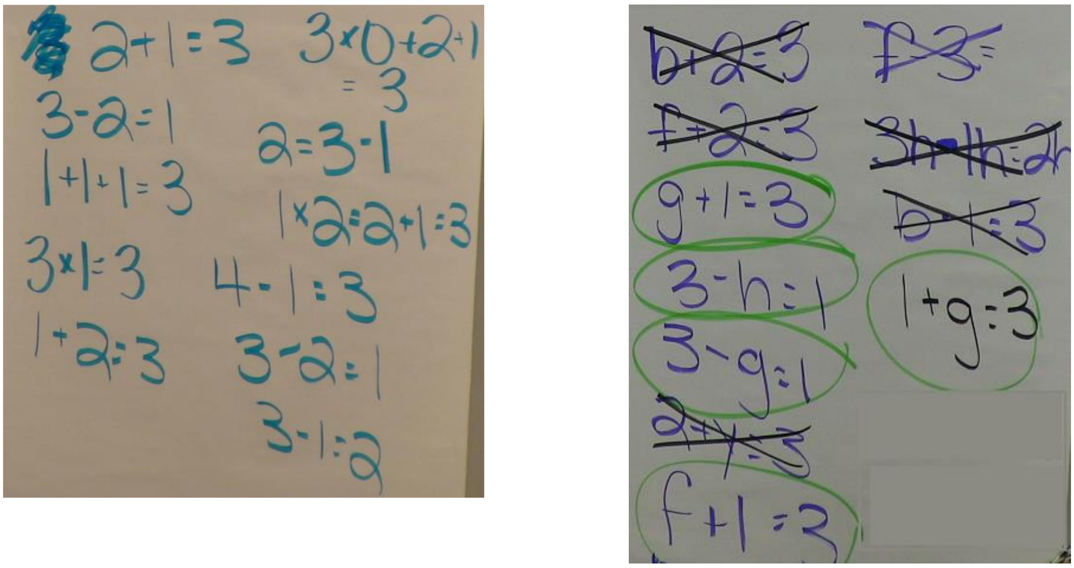
Bu bulgular, manipülatif modellerin farklı özelliklere sahip olmasına rağmen fiziksel ve sanal ortamlarının öğrencilerin öğrenme, ilişkisel düşünme ve cebirsel akıl yürütme becerilerini desteklediğini göstermiştir.

4.2.2. Kurulan bağlantılar.

4.2.2.1. Aritmetikten cebire. Öğretim sırasında birçok etkinlik ve soru, öğrencileri başlangıçta aritmetik olarak düşünmeye zorlamış ancak zamanla öğrencilerin cebirsel düşünmelerini gerektirmiştir. Eşdeğer denklemleri öğrenirken öğrenciler, aritmetik bir durumla daha kolay ilişki kurmuşlardır. Öğrenciler aritmetik ve cebir arasındaki bu ilişkiyi anladıktan sonra, değişken kullanarak cebire geçiş yapabildikleri görülmektedir. Şekil 25’de öğrencilerin aritmetik düşünmeden cebirsel düşünmeye geçişlerinin görüldüğü yazılı çalışmalarından örnekler sunulmuştur.

Şekil 25

Cebirsel düşünmeye geçiş örneği

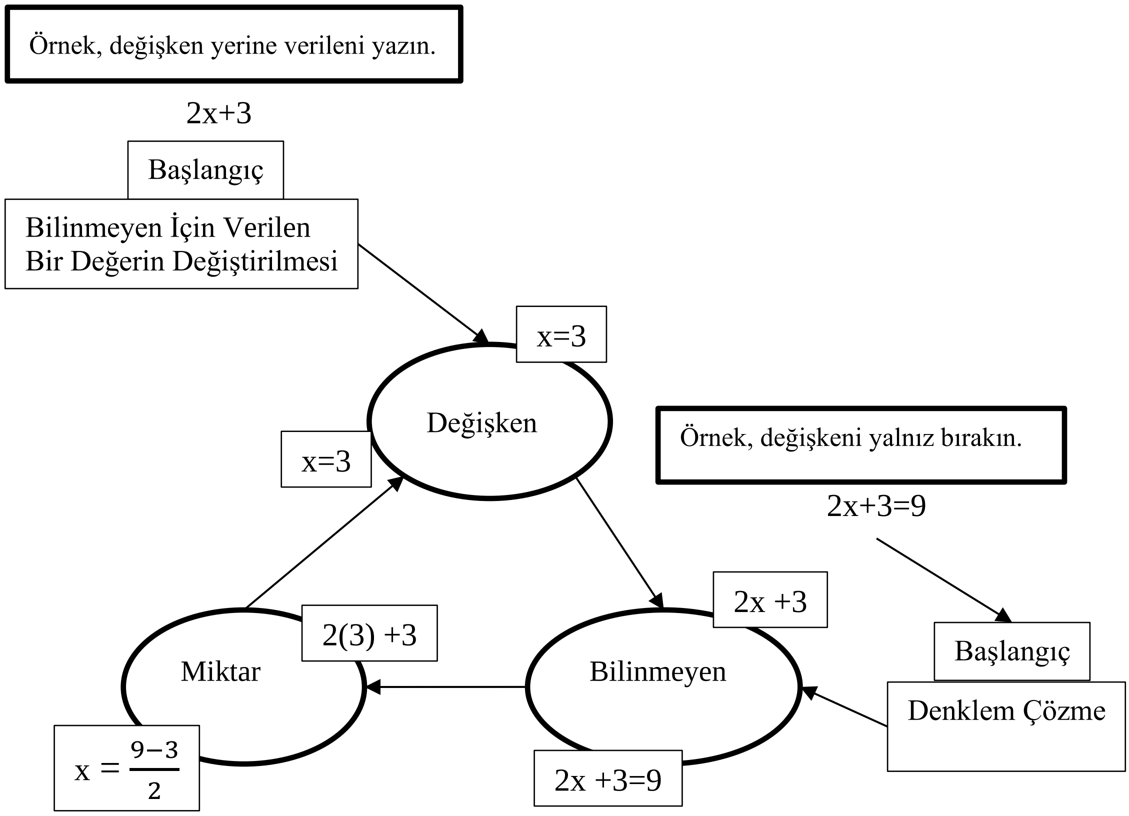


Aritmetik olarak düşünmekten cebirsel olarak düşünmeye geçişin tüm sınıfın ürettiği bir örnek olarak sunulduğu ve sınıf tahtasında yapılan çözümlerin bir örneği yer almaktadır.

4.2.2.2. Değişkenin değerini bulmak. Öğrenciler ÖY'de ilerlerken değişkenin değerini bilme ve değişkenin değerini bulma arasında bir ilişki olduğunu keşfetmiştir. Bu ilişki değişkeni bilinen ve bilinmeyen bir değer olarak içermektedir. Öğrenciler bu ilişkiyi anladıktan sonra, denklemdeki değişken için bilinen bir değeri kullanarak cevaplarını kontrol edebildiler.

Şekil 26

Değişken kullanımının ilerleyişi



Şekil 26 değişkenin değerini bulma ile değişkenin değerini bilmek arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

4.3. Soyutlama Süreci

Öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama süreçlerini ayrıntılı bir şekilde gözlemleyebilmek için seçilen 6 öğrenci ile bire bir görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Test puanlaması sonucu yapılan kodlamaya göre Mehmet ve Aleyna iyi düzeyde başarılı, Burak ve Pınar orta düzeyde başarılı, Sabri ve Buse ise düşük düzeyde başarılı öğrencilerdir. Buna ek olarak öğrencilerin seviyeleri öğretmen tarafından teyit edilmiştir. Her bir soruda öğrencilerin verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Görüşme sorularının analizi yapılırken her bir cebir kavramı ile ilgili olan soruların ayrı ayrı analizi gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin okul cebirindeki kazanımlarına uygun olarak 6.sınıf düzeyinde yapılan görüşmelerde değişken kavramı üzerinde yoğunlaşılırken, 7.sınıf düzeyinde ise denklem ve denge kavramına yoğunlaşılmıştır. İzleyen başlıklarda her bir sınıf düzeyindeki analiz bulgularına yer verilmiştir.

4.3.1. Altıncı sınıf cebir görüşmelerine ait bulgular. 6. sınıf öğrencileriyle yapılan görüşme bulguları bu başlıkta sunulmuştur. Bu görüşme soruları ile ilgili bilgiler Yöntem bölümünde detaylı olarak ifade edilmiştir. 6. sınıf cebir kazanımı olarak MEB (2013) öğretim programında 6 adet kazanım bulunmaktadır. En kritik kazanım ise değişken kavramının anlaşılması ve dört işlemde kullanılabilmesidir. Öğrencilerin cebirin en temel kavramı olan değişken kavramının nasıl soyutlandığına yönelik olarak görüşme soruları için öğrencilerin verdikleri cevapların analizi yapılmıştır.

Görüşme soruları öğrencilerin ön bilgilerini belirlemek ve soyutlama sürecinde sık sık müracaat edilecek olan kavramların sorgulanması ile başlamıştır. Öğrencilere değişken, cebirsel ifade, terim, katsayı kavramlarının neler olduğu ve açıklamaları istenilmiştir.

Araştırmacının cebir dersi için alan notları incelendiğinde bu kavramlara öğrencilerin defterlerine not aldıkları ezbere bilgiler üzerinden cevaplar verdiği görülmüştür. Örneğin cebirsel ifade için, "İçinde harf, sembol bulunan ve işlem içeren ifadelere Cebirsel İfade" olarak tanımlamışlardır. Bu durum tüm görüşme transkriplerinde karşımıza çıkmaktadır. Değişken kavramı için ise "bir cebirsel ifadede bilinmeyen sayı değeri için kullanılan harf" olarak ifade edilmiştir. Öğrencilerin örnek verilmesi istenildiğinde ise genelde "x" harfini kullandıkları görülmüştür. Terim kavramı için öğrencilerin buldukları kısa bir tanımlama veya tanıma cümlesi şu şekildedir: "cebirsel ifade içinde birbirinden ayrılmış her bir kısımdır." Yani bir cebirsel ifade yazıldığında + veya – işareti ile biribiri ardına yazılan her bir değişkeni terim olarak ifade etmişlerdir. Katsayı için ise "cebirsel ifadenin önünde bulunan sayılara denir." Şeklinde ifade edilmiştir. Özetle, 6.sınıf öğrencilerinin ortak cevapları *"x (harf) bir değişkendir, her şey (sayı) olabilir"* şeklindedir.

Genel olarak öğrencilerin temel cebir kavramlarını tanıdıkları gözlenmiştir. Bunları kullanma ve oluşturma süreçleri ise ilerleyen sorularla sınanmıştır;

Öğrencilere bağlam temelli bir soru sorulmuştur, onlardan cebirsel olarak bu bağlamsal durumu ifade etmeleri istenilmiştir (Ek 6, soru 3). Bu bağlamsal duruma uygun cebirsel ifade yazabilmek öğrencilerin yapının farkına varması ile ilgilidir.

13Ö: İstediğim sayıyı (harf olarak değişken) kullanabilir miyim değişken olarak,

14A: Kullanabilirsin.

15Ö: Çünkü 3 tane sepet var, sepetin içindeki yumurtalar belirli olmadığı için a dedim 4 tane daha ekledim.

Benzer şekilde diğer öğrencide x değişkeninin kullanarak aynı denklemi kurabilmiştir.

12Al: Kaç tane yumurta olduğunu bilmediğim için x yazdım. 3 tane sepet var ve bilinmediği için 3 ile çarptım. Ayrıca 4 Yumurtada dışarıda olduğu için onuda "3x+ 4" olarak ekledim.

Öğrenci değişken olarak harf kullanarak bir bağlamsal durumdan matematiksel bir form olan cebirsel ifadeye dönüşümü başarabilmiştir. 13Ö diyaloğunda, özellikle tanıdık bir yapının farkına varması, Tanıma epistemik eylemini gerçekleştirdiğini göstermektedir. Devamında ise 15Ö ifadesinde belirtildiği gibi Çözüme ulaşmada eskiden oluşturulan yapıların kullanımından faydalanıldığı görülmektedir, Kullanma eylemini açıkça çağrıştırmaktadır.

Aynı sorunun b maddesinde bir sepet daha eklendiğinde yeni cebirsel ifadenin değişimi sorulmuştur.

22: *Burada da bir sepete eklendiği için "4a + 4",* şeklinde ifade etmiştir. Benzer yapıyı değiştirebildiğini göstermektedir. Yine Kullanma eylemi içerisindedir.

Diğer bir soruda ise "a + b = b" her zaman doğru olma durumu sorgulanmıştır.

30Ö: Her zaman doğru olmayabilir.

31A: Neden?

32Ö: "a", her zaman sıfır olmayabilir.

33Ö: Peki b=0 olsa.

34Ö: Bir dakika, b sıfır ise a da sıfır ise olur.

Bu soruda Mehmet'in matematiksel bir durumu açıklaması istenmektedir. Öğrenci bunu açıklarken değişkenlerin farklı değerler alabildiği tüm durumları düşünmeye çalışmaktadır. Çözüme ulaşırken de eski yapılarından faydalandığı görülmektedir. Bunun için Kullanma epistemik eylemi gereklidir. PISA tarafından kullanılan bir sorudur. En iyi araba olarak isimlendirilen sorunun ilk maddesi kolay bir soru olarak ifade edilmiştir (OECD, 2006). Üretici düzeyde bir soru olarak gösterilmiştir. Çözüm için bilinen bir sayı olarak değişken kullanımı gerektirdiğinden öğrencilerin bağlamı anlamaları ve soruda ifade edilenlere göre değişken kullanımı gerektirmektedir.

Diğer bir öğrencinin cevabı daha farklıdır.

39Al: "a" 0 yaparsam. "b" de ona göre bir sayı değeri alır.

Mehmet'ten farklı olarak Aleyna değişkenleri birbirinde farklı düşünebilmiştir. Ancak bunun ötesine geçilememiştir.

Bilinen bir sayı olarak değişkenin sorgulandığı arabaların ilk sorusunda öğrencinin verdiği yanıtlar şöyledir;

48A: Buna 3 verdin ne bu?

49M: Konfor,

50A: Buna neden 3 verdin ne bu?

51M: Emniyet o.

52A: Neden 3 yazdın?

53M: Çünkü orada öyle gösteriyor. 3 ile neden çarpmış ki

58A: Peki şöyle desek Ca nın emniyetten aldığı 3 puan 3 katını alıyoruz. Emniyetten kaç puan alır?

59M: 3X3=9 puan alır. O zaman diğerleri de… (hesaplıyor) cevap 15 olur.

Mehmet'in, bilinen bir sayıyı değişkende yerine koymada zorlandığı görülmüştür. İlk denemesinde öğrenci Ca arabasının puanını hesaplayamamıştır, hatta değişkenin yerine bir sayı konulması gerektiğini anlamada zorlanmıştır.

Aleyna ise değişkenleri bilinen bir sayı olarak değil sadece bilinmeyen bir harf olarak anlamıştır.

50Al: Bunlar benzer terimler değil, olmadığı için toplayamayız.

Aleyna'nın açıklaması onun sorunun çözümü için uygun olmadığını göstermiştir. Ancak araştırmacının öğrenciyi yönlendirmesi ile 58A ifadesinde olduğu gibi ona bir ipucu verilmeye çalışılmıştır, RBC + C teorisinde refere edildiği gibi bu kullanma eylemi başlamış olmaktadır. 59 diyaloğunda öğrenci sonuca ulaşmıştır.

Arabaların ilk sorusunda değişken yerine bilinen bir sayının entegre edilmesi istenilmekteydi ancak b maddesinde ise ilk soruda verilen değişkenlerin manipüle edilmesi beklenmektedir. Bu ise öğrencilerin değişken ile toplam puan arasında ilişki kurmalarını ve toplam puanı istenilen şekilde değiştirmelerini gerektirmektedir. Öğrencinin bu soru üzerinde çalışması şu şekildedir;

63M: "y" için eksi yazarım.

64A: Soruyu bir kere daha okuyalım mı?

65M: Okuyor. Aaa! İlla pozitif sayı diyormuş. (Yeni düzenleme yaptı)

66A: Neden böyle yaptın? Yani emniyet ve konforu 3 ile çarptın?

67M: Çünkü bu sayı buradaki en büyüklerden olduğu için ona daha fazla verince diğerlerini geçmesi için yaptım.

Öğrenci, sorunun doğası gereği yeni bir yapıya ihtiyaç duymuştur. Bu ise Oluşturma eylemine giriş için uygun bir durumdur. Sonrasında ise araştırmacının yönlendirmelerinin yardımı ile yapılar arası ilişkileri belirleme ve kullanma sonucunda yeni bir ilişki tanımlayabilmiştir. Bu onun değişken kavramı üzerinde Oluşturma epistemik eylemini gerçekleştirebilidiğini göstermektedir.

Bu soru için Aleyna, a maddesinde yanlış işlem yapmasına bağlı olarak b maddesinde de benzer sebeplerle sonuca ulaşamamıştır.

Sınav puanları sorusunda öğrencilerin alışkın oldukları bir bağlam içinde soru maddesi verilmiştir. Bir dersin üç kere sınavına katılan kişinin üç notu verilmiş ve not ortalamasının nasıl hesaplanacağı sorulmuştur, ancak bu sınav notları ve hesaplama yöntemi cebirsel ifade formunda bir formül olarak öğrencilerin karşısına çıkmaktadır.

81A: 140'ı nasıl buldun.

82M: Üç sınavı toplayarak.

83M: Neden 3'e böldün?

84M: Çünkü 3 sınava girmiş.

85A: Şimdi diğer soruya cevap versek?

86M: Değişmez

87A: Neden?

88M: Çünkü yine aynı şeyi yapıyoruz

89A: Nasıl yani?

90M: "a" ile "c" nin yeri değişmiş, toplam ile 140 olur Yine 3'e böleriz.

Bu sorunun çözümü sürecinde öğrenci ilk madde için formüle ve cebirsel ifadeyi dikkate almadan önceki bilgilerinden hareketle bir ortalama hesabı yapmıştır. Ancak sorunun ikinci maddesi için durum biraz farklılık göstermektedir. 90M diyaloğunda olduğu gibi "a" ve "c" değişkenleri için sayı değerleri aldığını ifade etmiş, hatta iki değişkenin sayı değerlerinin yer değiştirdiğini ifade etmiştir. Bu bakımdan benzer bilgilerin bir araya getirilmesini gerektiren çözümler üretmiştir. Bu durum ise değişken kavramının Kullanma epistemik eylemi içinde gerçekleştiğini gösterir niteliktedir. Aleyna'da benzer şekilde soruyu çözmüştür.

Yeni soruda PISA Matematik Okuryazarlık testi kapsamında kullanılan bir sorudan faydalanılmıştır. Bu soruların özelliği günlük hayat bağlamında bir problem olmasıdır. Yani öğrencinin soruyu anlaması ve matematiksel bir çözüm üretmesi beklenir. Soru maddesinde öğrenciden aritmetik ve çarpımsal olarak artış gösteren iki değişkenin örüntüsünü bulması beklenmektedir. Orta zorluk düzeyine sahip bir sorudur. PISA tarafında bu soru bilinen bilgiler ile çözülebileği ifade edilmiştir. Üretici düzeydedir (OECD, 2006). Öğrencilerin bir dizi hesaplamalar yapmasını gerektirmektedir.

109M: Tabloyu dolduruyor.

110A: Burada 32 tane var. Burada 24, Burada 16 tane, burada 8 tane. Neden buraya 16 dedin?

111M: Çünkü burada adım sayısı 2,

112A: Bahçe çitleri 16 mı olur

113M: Hayır öyle değil artı sayısı ile 2yi çarptım.

…

122A: Neden 16 olur hesaplamadan direk söyledin?

123M: Adım sayısı ile dördü çarptık 4x4= 16 oldu.

124M: Burada 5x5, 25 olur.

125A: Güzel. Peki burada 6 adım yok ama 6 adımda kaç elma olur o zaman?

126M: 6 çarpı 6, 36 elma olur.

127A: Peki kaç çit olur?

128M: 36'nın 8 katı olur?

129A: Çok olmaz mı?

130M: Evet. 6'nın 8 katıdır.

131A: Peki 7. adımda?

132M: 49.

Bu sorunun ilk maddesinde öğrencinin bir strateji belirlemesi gerekiyor. Süreç üzerinde düşünmesi ve sonuçta var olan şekiller arasında olmayan beşinci adıma ait ağaç ve çit sayılarını bulması istenilmektedir. Bu sorunun çözümünde öğrenci ilk olarak çözüme ulaşmada eskiden oluşturulan yapıların kullanımından faydalanıyor, 110 ile 114 arasındaki diyaloglar buna örnektir. Devamında ise 122A, 123 ve 124'de kullanılan diyaloglar öğrencinin strateji belirlediğini ve strateji neticesinde mevcut yapının farkına vardığını bir elma bahçesindeki elmaları saymadan çarpma yoluyla kısa yol olarak hesaplayabildiğini görmekteyiz. Devamında araştırmacının sorduğu soruyu cevapladığında ise kullandığı matematiksel durumu açıklayabildiği ifade edilebilir. Burada ifade edilenler Kullanma epistemik eylemi içinde gerçekleşmektedir.

Öğrencilerin ders notları da dikkate alındığında benzeri örüntüleri çalıştıkları görülmüştür. Ancak bu soruda belirtildiği gibi, iki değişkenin değişimi söz konusudur. Bu değişimde yaşanan artış her iki değişken için ise farklıdır. Bu bakımdan ilk aşamada öğrencilerin zorlandıkları görülmüştür.

Elmaların ikinci maddesinde daha ileri bir adım sorgulanmaktadır. Elma ağaçlarının sayısı artmakta ve bahçe çitlerinin de sayısı artmaktadır. Ancak bu artış neticesinde eşit sayıda ağaç ve çit sayısı oluşur mu şeklindedir. Bunu bilmenin bir yolu aritmetik olarak hem ağaç hem de çit sayılarının artışını liste şeklinde yazmaktır, diğer bir yolu ise soru içinde sunulan "$n^2 = 8n$" olduğu bir “n” değerinin bulunmasıdır. Bu bakımdan PISA sorunun çözümü için değişkenler arası ilişkilendirilmeler yapmak gerektiğini ifade etmiştir (OECD, 2006). Zor bir sorudur. İlişkilendirici düzeydedir (OECD, 2006).

140M: Öğrenci soruyu bir kere daha okuyor. Tam anlayamadım soruyu?

141A: Şimdi soruda bahçe çitlerinin sayısı da artıyor elma ağaçlarının sayısı da artıyor acaba bu artış bir yerde eşitlenir mi diye soruyor?

142M: Bence yoktur.

143A: Soruda sorduğuna göre işlem yapsak mı olabilir mi acaba?

...

155M: 8, 8. adım olur.

156M: Neden?

157M: 8. adımda 64 olur elmalar

158M: Nadir 64 oldu 8 çarpı 8 64 oldu

159M: Aynı şekilde çitlerde 8 çarpı 8 64 oluyor. Yani eşit olan burası.

160A: Neden 8. adım olduğunu söyleyebilir misin ya da gösterebilir misin?

...

161M: 8'in karesi 64 8'in kendisi ile çarpımı 64. O sebepten.

Öğrenci soruyu anlamakta zorluk yaşıyor. Ama kısa sürede bunu aşıyor. Çözüme ulaşmada daha önceden doldurduğu tabloyu devam ettiriyor. Bu da onun eskiden oluşturulan yapıların kullanımına örnek olarak 155 diyaloğu verilebilir. Ancak öğrenci 161'deki diyaloğunda durumu açıklayabilmesine rağmen cebirsel olarak ifade edememiştir. Yapmış olduğu çözüm aritmetik olarak örüntünün devam ettirilmesinden ileri girmemiştir. Bu sebepten Kullanma eylemi düzeyinde gerçekleşmiştir.

Son soruda ise elmaların mı yoksa çitlerin mi daha hızlı arttığı sorulmuştur. Ancak sade bir cevaptan ziyade bunu matematiksel olarak ifade etmek önemlidir. PISA tarafından bu sorunun çözüm süreci, matematikleştirme ve genelleme becerisi ile ilişkilendirilmiştir (OECD, 2006). Oldukça zor bir sorudur. Yansıtıcı düzeydedir (OECD, 2006). Özellikle hangi değişkenin daha hızlı arttığının cebirsel gösterimi önemlidir.

169M: Bahçe çitleri daha hızlı artar,

170M: Aa! Pardon, meyve ağaçları

171A: Neden öyle olsun?

172M: Çünkü ağaçlar kendisi ile çarpılıyor, diğeri, 8 ile çarpılıyor.

173A: Mesela bunu 10. adım için denemek ister misin?

174M: Mesela 100 adet elma ağacı olur, 80 tane çit olur. Yani elma ağaçları daha hızlılar.

Öğrenci içinde bulunduğu mevcut matemtiksel durumu anlamıştır, ancak bu durumu açıklamada matematiksel bir cebir dili kullanamamıştır. Onun yerine aritmetik bir çözüm metodundan faydalanılmıştır. Bunu yaparken de araştırmacıdan yardım almıştır. Bunun için örnek diyaloglar, 171A ile 174 arasındadır. Özellikle 172 diyaloğunda olduğu gibi eskiden oluşturulan yapıların kullanımı söz konusudur. Ayrıca matematiksel durumu anladığı görülmektedir, 172 diyaloğunda görüldüğü gibi. Ancak 174'de yapılan matematiksel açıklama sadece aritmetik formda olduğu için Oluşturma eylemine geçilemediği, sadece Kullanma epistemik eyleminde gerçekleştiği görülmüştür.

Elmalar sorusu için diğer öğrencilerde benzer çözüm yolları kullanıp, benzer sonuçlar bulmuştur. Mehmet'ten farklı olarak işlem yapan sadece Aleyna olmuştur ve farklılaştığı hususlar belirtilmiştir.

Özetle, 6.sınıf öğrecilerinin değişken kavramını soyutlamaları, başarı düzeyi yüksek olan Mehmet ve Aleyna, genellikle Kullanma epistemik eylemine yönelik davranışlar sergilemişlerdir. Mehmet'in arabalar sorusunun b maddesinde sadece Oluşturma epistemik eylemini sergilediği görülmüştür. Öğrencilerin soruyu çözme süreçleri dikkate alındığında, doğru sonuca ulaşabilme ve soyutlama becerilerini gösterebilmeleri için problemin doğru bir şekilde anlaşılabilmesi gerektiği görülmüştür. Özellikle yöneltilen sorular bağlam temellidir. Onların işlemler yapmaları ve daha farklı çözüm yolları geliştirmelerine fırsat oluşturmak içindir. İyi düzeyde olan öğrencilerin problem çözme ile ilişkili olarak, bazen problemleri aritmetik veya cebirsel (sembollerin kullanımını ve manipülasyonlarını gerektirir) olarak sınıflandırmaya çalıştıkları görülmüştür. Özellikle ilk çözüm stratejileri cebirsel olmuştur ancak elmalar sorusunun b maddesinde olduğu gibi bunda zorlandıklarında ise aritmetik olarak devam etmeye çalışmışlardır. Aritmetik olarak çözümler gerçekleştirmişler, kimi matematiksel açıklama yapmada zorlandıkları görülmüştür. Bunlara ek olarak öğrencilerin, (i) bağlamı anladıklarında, karmaşık matematiksel yapıları anladıkları görülmüştür, arabalar ve elmalar sorusunda olduğu gibi; (ii) temsiller arasındaki ilişkileri açıklama, farklı gösterimleri kullanan dönüşümler ve temsiller arasındaki esnek hareket etmeyi öğrenmeyi geliştirebilmişlerdir, "$n^2 = 8n$" arasındaki ilişkiyi farklı temsillerden faydalanarak açıklamaları; (iii) bilinmeyen içeren gerçek dünya problemleri hakkında çözümler ve genellemeler buldukları görülmüştür. Ayrıca, vasat düzeyde kategorize edilen öğrencilerin bile değişken ve ilkelerini içeren tartışmalara katılabildiği görülmüştür. Sadece işlemsel olarak derin düşünme eylemini gerçekleştiremedikleri bu sebeple Kullanma epistemik eylemini gerçekleştiremedikleri sadece Tanıma eyleminde oldukları söylenebilir.

Soyutlama, zihinsel olarak modelin ortak temsillerini tanımlamak için aynı zihinsel modelin farklı temsillerini karşılaştırmaktadır (Warren ve Cooper, 2009). Bu hipotez, değişkenlere ve eşzamanlı denklemlerin genişletilmesi anlamında kullanılmasının başarısını yansıtır. Aynı zamanda, iyi yapılandırılmış örüntü modellerini ve matematiksel düşüncenin gelişmesi için bir omurga görevi gören matematiksel model anlamına gelir. Yani, Oluşturma eylemi gerçek soyutlama olarak kabul görürse 6. sınıf öğrencilerinin ilk defa cebir kavramlarıyla dahası değişkenler karşılaşmaları ve bunu aritmetik becerileri üzerine inşa etmeleri onlarında başarısız olmadığını hatta oldukça iyi olduklarının göstergesidir. Öğrencilerin gerçek performansları 7.sınıf düzeyinde daha belirgin gözleneceği düşünülmektedir.

Tablo 44

6. sınıf öğrencilerinin değişkeni soyutlama durumları

Kavram	Öğrenci Düzeyi	Tanıma	Kullanma	Oluşturma

Değişkeni Tanıma	İyi	+	+	+
	Orta	+	+	+
	Vasat	+	+	+
Değişken Kullanımı	İyi	+	+	+
	Orta	+	+	+
	Vasat	+	-	-
Değişkeni Manipüle Etme	İyi	+	+	-
	Orta	+	-	-
	Vasat	+	-	-

4.3.2. Yedinci sınıf cebir birinci görüşmelerine ait bulgular. 7. sınıf öğrencilerine yönelik olarak birinci görüşme bulguları bu başlıkta sunulmuştur. Bu görüşme soruları ile ilgili bilgiler Yöntem bölümünde detaylı olarak ifade edilmiştir. 7. sınıf cebir kazanımları olarak MEB (2013) öğretim programında 7 adet kazanım bulunmaktadır. Ancak araştırmanın kapsamı bunların sadece dört tanesi ile ilgilidir. Özellikle 7.sınıf düzeyinde öğrencilerin denge- denklem kavramına ilişkin soyutlama becerileri sorgulanmıştır. En kritik kazanım ise denge kavramınun anlaşılmasıdır. Görüşme soruları öğrencilerin denge kavramını nasıl inşa ettikleri ve denge kavramını kullanarak denklemi soyutlama sürecinde kullandıkları kavramların sorgulanması ile başlamıştır. Öğrencilerin denklem kurma ve çözme çalışmaları incelenmiştir.

Öğrencilere öncelikli olarak denklem inşa etmelerinde zorlanıp zorlanmayacaklarını anlayabilmek için değişken ile ilgili bir soru ile görüşmeye başlanmıştır. Onlardan cebirsel olarak “2n ve n+2” nin değerlerini sorgulamaları istenmiştir (Ek 7, Soru1). Değişkenin alacağı sayı değerlerinin belirlenmesi öğrencilerin yapının farkına varması ile ilgilidir. “n” alacağı sayı değeri için “2n veya n+2”’nin hangisinin daha büyük olacağının açıklanması ise Matematiksel durumu Anlama ve Açıklama ile ilgilidir.

9A: Neden “2n” seçtin?

10M: Çünkü ben yerine bir sayı koysak, mesela 3; 2x3=6 oluyor. Ama 3 ile 2'nin toplamı 5 olur. O yüzden 2n daha büyük oluyor. 2 koyarsak eşit olur.

11A: Peki başka sayılar için ne dersin?

12M: "0" olsa daha küçük oluyor. "2" önemli bir sayı. 2'den büyük sayılar için büyük, küçük sayılar için ise küçük oluyor.

Burada Mehmet hangi cebirsel ifadenin değerinin büyük olduğunu anlamak için değişkeni, bilinen bir sayının değeri olarak kullanmıştır. 10M diyaloğunda olduğu gibi. Sonrasında ise 12M diyaloğunda, "2" sayının kritik bir değer olduğunu bulmuştur. Bu diyalogdan Mehmet'in matematiksel değeri anladığı ifade edilebilir. Bu bir Kullanma epistemik eylemidir. Matematiksel durumu açıklayabildiği ancak yapının açıklanmasında özgün bir matematiksel dil kullanmadığı için Oluşturma eylemine yönelik ufak geçişler olsa da tam anlamıyla *oluşturma* eylemini gerçekleştirdi diyemeyiz.

Aleyna, Mehmet ile benzer sonuçlara ulaşmasına rağmen farklılık gösterdiği durumlarda mevcuttur.

13A: Mesela n=1 için yine çarpmayı mı seçerdin?

14Al: Hayır.

15A: Neden?

16Al: Çünkü 1+2=3 olur. O zaman toplamayı seçerdim. 3 olsaydı Çarpmayı seçerdim. Yani 2'den büyük sayılar için çarpma küçük sayılar için ise toplamayı seçmek gerekiyor.

17A: Son kararın nedir?

18Al: Çarpma, çünkü daha fazla sayı için bu işlem sağlıyor.

Mehmet'den farklı olarak Aleyna 18Al diyaloğunda olduğu gibi 16Al'deki açıklamalarını genişletebilmiştir. Matematiksel durumu açıklayabilmiştir.

Tüm öğrenciler bu soruda doğru cevaplar verebilmiştir. Özellikle "n" değişkeninin yerine sayı koyarak bir matematiksel açıklamaya yapmaya çalışmışlardır. Verdikleri sayı değerlerini genişleterek karşılaştırmışlar, "n=2" kritik değerini vurgulamışlardır. Bu soru için iyi ve orta düzeyde olan öğrenciler daha fazla örnek vererek matematiksel durumu açıklama eyleminde bulunmuşlar ve bu sayede “n=2” kritik sayı değerini bulmaları kolaylaşmıştır. Vasat düzeyde olanlar ise araştırmacının yönlendirmeleri ile 2 sayısını düşünmüşlerdir.

İkinci sorunun a maddesinde bağlam içinde basit, bir bilinmeyenli denklem kurmanın ilk aşaması olan cebirsel ifade yazmayı gerektirmektedir. Bu basit cebirsel ifade yazma görevi daha önce oluşturulan yapının kullanılması eylemidir.

17M: Doğru sayının 2 katından, yani “d” tane doğru 2 katından 5 puan fazla verdiği için “2d+5”.

Tüm düzeyden öğrenciler bu soruyu zorlanmadan yapmışlardır. Bunun bir nedeni bu gibi problemler üzerinde 6.sınıfta oldukça fazla alıştırma yapıldığı için olabilir. Bu soru beklendiği gibi *tanıma* epistemik eylemi düzeyindedir.

İkinci sorunun b maddesinde bağlam içinde bir bilinmeyenli denklem kurmanın ilk aşaması olan cebirsel ifade yazmayı gerektirmektedir. Bu cebirsel ifade yazma görevi tanıdık bir yapının farkına varma eylemidir. Bir önceki sorunun sonucuna başvurulmasını ve benzerliği fark etme ve kullanmayı gerektirmedir. Bu sorunun a maddesinde Analoji varken, b maddesinde Özelleştirme bulunmaktadır.

19Al: Şimdi 2c ile 2yi çarparım beş eklerim. Çünkü iki katından 5 fazla diyor.

Burak hariç tüm öğrenciler soruyu doğru cevaplamışlardır.

17B: 2c+5 yazıyor. (2c’yi 2 ile çarpmayı unutuyor)

Basit bir parantez içine alma işlemini gözden kaçırıyor. Buna karşın tüm öğrenciler soruyu doğru cevaplıyor. Bir önceki sorunun özelleştirilmesi olduğundan öğrenciler zorlanmamıştır.

İkinci sorunun c maddesinde bağlam içinde bir bilinmeyenli denklem kurmanın ilk aşaması olan cebirsel ifade yazmayı gerektirmektedir. Bu cebirsel ifade yazma görevi tanıdık bir yapının farkına varma eylemidir. Bir önceki sorunun sonucuna başvurulmasını ve benzerliği fark etme ve kullanmayı gerektirmedir. Bu sorunun c maddesinde Özelleştirme bulunmaktadır.

29Al: Şimdi veliye ve desem. Bir dakika Veli bir üst soru da vardı. Şimdi 2 katından 5 puan az veriyorsan, Şöyle yazabiliriz. (Doğru çözüyor).

Tüm öğrenciler soruyu doğru cevaplıyor. Bir önceki sorunun özelleştirilmesi olduğundan öğrenciler zorlanmamıştır.

İkinci sorunun d maddesinde bağlam içinde bir bilinmeyenli denklem kurmanın ilk aşaması olan cebirsel ifade yazmayı gerektirmektedir. Bu cebirsel ifade yazma görevi tanıdık bir yapının farkına varma eylemidir. Bir önceki sorunun sonucuna başvurulmasını ve benzerliği fark etme ve kullanmayı gerektirmedir. Bu sorunun d maddesinde Özelleştirme bulunmaktadır. Ancak bu özelleştirme göstergesi b ve c maddesinden farklılaştırılmıştır. Ancak zor düzeyde bir soru değildir.

29B: 2'de artı 5'di. O zaman Hülya'nın puanı 2d+5, eksiği 5 olur. 2d olur.

Bu soru a, b ve c maddelerine benzer bir bağlam ve çözüm içersede öğrencilerin tamamı doğru cevaplamıştır. Bunun ötesinde bağlamın anlaşılması ve özelleştirme eyleminin gerçekleştirilmesi gerekmiştir.

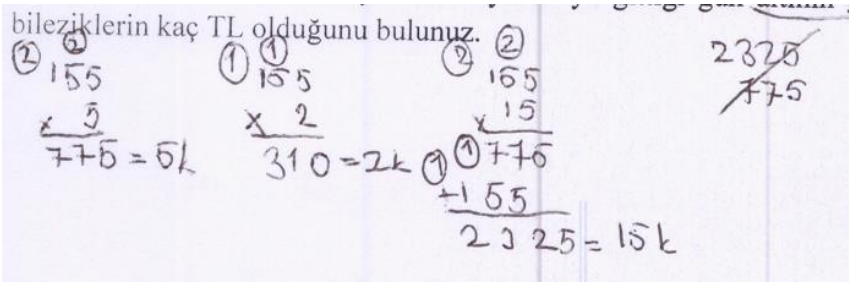
Bilezik sorusunda bilinen bir sayı olarak değişkenin kullanımı gerekmektedir. Devamında ise bağlamsal olarak verilen problemin çözümü gereklidir. Bu süreç basit ve iki aşamalı dört işlem içermektedir.

39S: k sembolü ile belirledik. Seninki burada 155 ile 5'i çarpacağız. Yine altının günlük fiyatı ile 2yi çarpacağız. Burada da 15 ile çarp açacağız.

40S: O zaman, sonuç aşağıdaki gibi olur.

Şekil 27

Öğrenci hesabı örneği



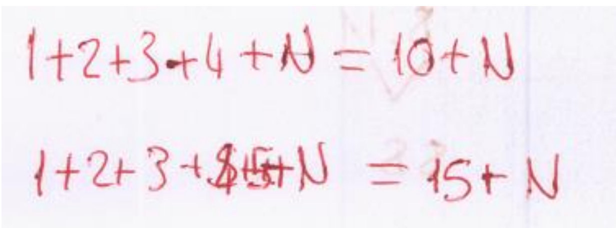
Bu soruda tüm öğrenciler doğru sonuca ulaşmışlardır. Daha önce oluşturulan yapının kullanımı söz konusudur. Bu sebeple *tanıma* epistemik eylemi gözlenmiştir.

Öğrencilerin görüşme soruları sıralamasında merdiven sorusu yer almaktadır. Ancak sorunun zor olması, tanıdık bir bağlama sahip olmaması ve derin bir düşünme süreci gerektirdiğinden dolayı öğrenciler ilk aşamada cevaplayamamışlardır. Tüm öğrenciler görüşme sorularını tamamladıktan sonra tekrar çözmek istemişlerdir. Kavramların soyutlanması bakımından oldukça fazla veri barındırmaktadır. Bu bakımdan diğer soruların çözümleri analiz edildikten sonra bu soruya yer verilmiştir. Yine de öğrencilerin ilk soru ile karşılaştıkları ve ilk çözüm çabalarından örnekler verilmektedir.

27M: 1 + 2 + 3 + 4, yani her basamak için o sayıyı, bir önceki ile topluyoruz. Yani o basamağı önceki sayı ile topluyoruz. O zaman şöyle +n eşittir, 10+n şeklinde oluyor. Hocam hepsinin sonuna topladıktan sonra n koyuyoruz herhalde.

Şekil 28

Mehmet'in merdiveni sorusundaki çözümü



28A: Bu yaptığın yanlış değil doğru ama n'nin hangi değeri için doğrudur?

29M: n eşittir 5 için doğru, şu değiştiriyoruz. Mesela "n" yerine 6 yazsam, şöyle olacak.

1+2+3+4+5+n=15+n, yani ne değişebiliyor. Yani bu biraz karmaşık olacak.

30A: Yani genel bir formül denklem yazabilir miyiz?

31M: Genel bir formül, genel bir formül! Biraz denesem yazabilirim sanki.

32A: İstersen alt alta yaz, toplama işlemini kolaylaştırabiliriz.

33M: Yazıyor… Nasıl olabilir? Kafam karıştı.

34M: n basamak için, o sayıların toplamı olacak, çünkü n basamaklı. Ama nasıl? "n" basamaklı merdivende kaç tuğla kullanılır? Kafam karıştı. Tam anlayamadım soruyu.

35M: Soruyu anladım ama çözemiyorum, yani gösteremiyorum.

36A: İstersen daha küçük örneklerle çalışalım önce, yani üçüncü basamak veya dördüncü basamak için.

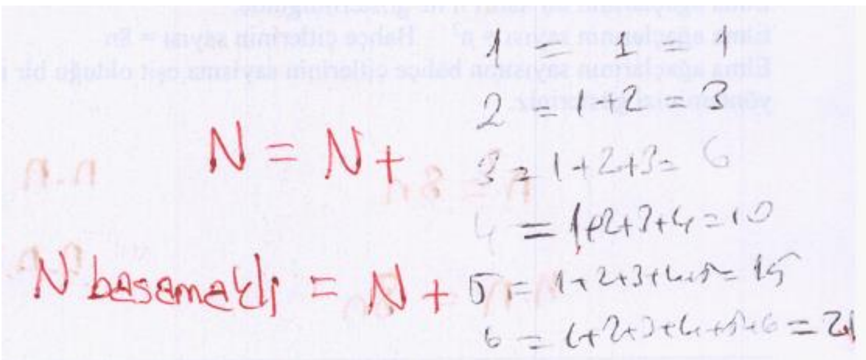
37: Öğrenci 6 basamaklı Merdivenler için her birini tek tek yazdı. Topladı.

38: 7 basamak için sadece 7 ekleneceğini söyledi. 8 basamak için sadece 8 ekleneceğini söyledi

39M: n. basamak için ise sadece n eklenmelidir. "n" için bir önceki basamağa bakmamız gerekiyor. Toplamı öyle bulabiliriz. Bunu nasıl yazabilirim?

Şekil 29

Mehmet'in merdiven sorusunu sonuçlandırması



40M: Bu soruyu atlarsak olur mu, daha sonra baksak?

50A: Tabi Tabi…

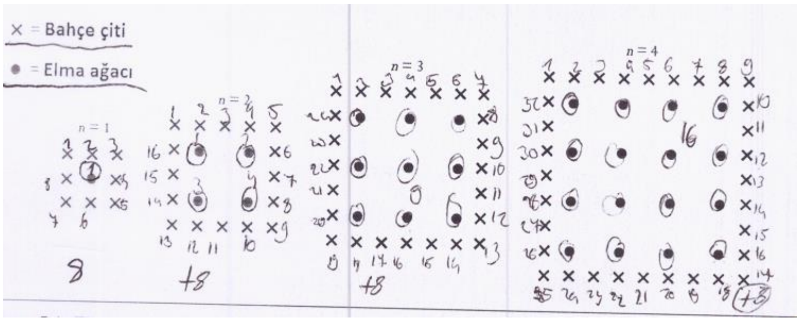
Bu soruya ilişkin açıklamalar sorunun çözümünün gerçekleştiği bölümde yer verilmiştir.

Beşinci soru cebir konularında sıklıkla rastlanan ve bir örüntünün kuralını bulmayı ve açıklamayı gerektiren becerileri içermektedir. Sorunun detayına indiğimizde ise durumun daha karmaşık olduğu söylenebilir. Bu soruyu öğrenciler 6. sınıfta görüşme sorusu olarak çözmeye çalışmışlardır. Bu bakımdan öğrencilerin 7. sınıftaki değişimleride incelenmiştir.

59: Tabloyu doldurmak için, şekildeki elma ve çitleri tek tek sayıyor, üzerine not alıyor.

Şekil 30

Öğrencinin aritmetik düşüncesine bir örnek



60: Soruyu tekrar okuyor. 5. adıma geldiğinde duraksıyor ne yapması gerektiğini düşünüyor.

61S: Her seferinde 8er tane çit dikmiş. Bir tane elma ağacı için 8 çit dikmiş.

62: Düşünüyor

63S: Her biri için 8 çit dikmiş diyor. 5. basamağı buluyor. Bahçe çiti sayısı 40 olmalı.

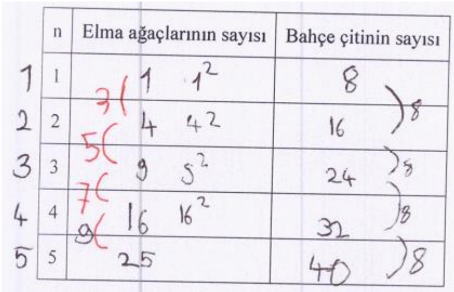
64S: 1,4,9,16 olmuş,

65: Düşünüyor.

66S: 1'den 4'e, 3 artmış diğerinde 5, diğerinde 7, diğerinde 9 artmış o zzman 16 ile 9 toplanırsa 25 olur cevap.

Şekil 31

Öğrencinin aritmetik düşünme örneği



67A: Evet.

Elmalar sorusunun ikinci maddesinde bir örüntünün kuralını açıklamayı gerektiren beceriler içermektedir. İlk maddeye kıyasla örüntünün kuralını açıklamanın daha karmaşık olduğu söylenebilir. İlk soruda elma ağaçları ve çit sayılarının arttığı bulunmuştur. Bu soruda örüntü daha da özelleştirilerek bu iki değişkenin artışı sonucunda eşitlenip eşitlenmediği, eşitlenirse bu noktanın tespiti ve nasıl eşitlendiğinin matematiksel açıklaması beklenmektedir.

66S: Elma ağaçları sayısı n=2 ise, bir dakika, buradan ne cebirsel ifade olarak değer mi vereceğiz buna?

67: Tabloya dönüyor.

68S: O zaman bu 1^2 *olur, bu* 4^2 *olur, bu* 9^2 *olur ve* 16^2 *olur.*

69A: Şimdi yaptığını açıklar mısın?

70: Düşünüyor, açıklamaya çalışıyor. Hata yaptığını anlıyor. Son olarak şekilde gösterilen n=1, …, n=4 ifadelerini görüyor ve durumu anlıyor.

71S: Bir dakika neyin iki katı 9, yani karesi 9 olur? Ha pardon 3x3=9, 16 o zaman 8 yok 4 olur. Çarpma ile karıştırıyorum da.

74A: Artış miktarlarına baksak mı?

75S: Çit sayıları 8er artıyor. Elma ağaçları 2şer 2şer artıyor. Yok önce 3, 5, 7, 9, 11, 15 olacak (elma ağaçlarının artış miktarını söylüyor). Diğeri devamlı 8 artıyor (çitlerden bahsediyor).

76S: Öbür tarafta 48 olur hepsinin eşit olması gerekiyor. Nerede eşit olur değer olarak?

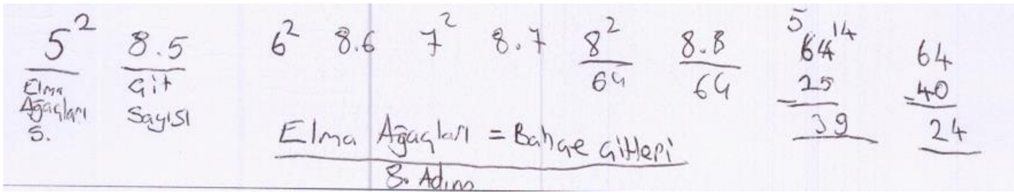
77: Düşünüyor.

78S: n^2 burası, bir sayı var bu sayının karesi olacak çit sayısı da o sayının 8 katı olacak, onları eşitlemek için. Tabloda en son 5^2 olmuş burada da en son 8x5 olmuş. 79S: Bu…

80: 6 için deniyor. 7 için deniyor. 8'de eşit olduğunu görüyor.

Şekil 32

Ağaç ve çit sorusunun çözüm örneği



Sabri bu soruyu çözerken önce verilen "$n^2 = 8n$" ifadesini kullanmaya çalışmıştır. Daha sonra ise 68S diyaloğunda olduğu gibi kısa bir karmaşa yaşamıştır. Daha sonra ise araştırmacının yönlendirmesi ile ona bir Kullanma eylemi fırsatı sunulmuştur ki, artış mikarına odaklanması gerektiği düşündürülmeye çalışılmıştır (74A). Bu fırsatı değerlendirebilen öğrenci ise 75S diyaloğunda görüldüğü gibi Matematiksel durumu anladığı görülmektedir. 76S diyaloğunda ise çözüme ulaşmada Benzer bilgiler biraraya getirilmiştir. Bu bakımdan Öğrencinin çözüm sürecinde gözlenen soyutlama Kullanma epistemik eylemine yöneliktir.

Öğrenciler genel olarak "$n^2 = 8n$" bağıntısını kullanmak yerine bir önceki soruda 5. adıma kadar yapmış olmanın etkisiyle de adımları ilerleterek eşit olduğu bir adım arayışına girmişlerdir. Ancak öğrencilerin bu bağıntıyı kullanmaya çalıştıkları da gözden kaçırılmamıştır, 70 ve 78S diyaloglarında olduğu gibi. Bu karşın iyi düzeyde kategorize edilen Mehmet gibi öğrenciler ise ilk olarak "$n^2 = 8n$" bağıntıyı kullanmaya yönelmişlerdir.

69M: O zaman önce "n x n = 8 x n". Burada İçler dışlar çarpımı kullanmalıyız

70A: İçler dışlar çarpımı kesirlerde olmaz mı?

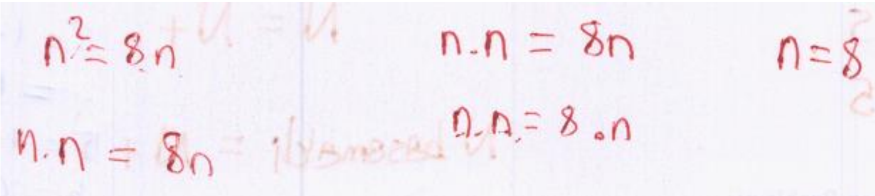
…

77M: Ya da "n" yerine sayı koyalım.

78A: Deneyerek bulalım diyorsun yani

Şekil 33

Mehmet'in bağıntı kullanma örneği



Bu sorunun çözümünde öğrencilerin neredeyse tamamı "$n^2 = 8n$"bağıntısını kullanmaya çalışmışlardır. Ancak ilerleyen aşamalarda sadece iyi düzeyde olan öğrencilerin bu bağıntıyı kullanarak işlem yaptıkları ve vasat düzeyde olanların ise "n" yerine bir sayı koyarak adımları ilerlettikleri ve eşit olan adımı tespit ettikleri görülmüştür. Sonuç olarak tamamı soruyu doğru cevaplamıştır.

Son olarak Elmalar sorusunun üçüncü maddesinde matematiksel olarak tüm ilişkilerin açıklanması, yansıtılması beklenir. Bu bakımdan sorunun çözüm süreci önemlidir. Yani cebirsel olarak değişkenlerin karşılaştırılması ile aritmetik olarak karşılaştırılması süreci farklı epistemik eylemler olarak görülmektedir. Cebirsel gösterim Oluşturma epistemik eylemini işaret ederken aritmetik gösterim ise Kullanma epistemik eyleminin göstergesidir.

86: Öğrenci yine üstteki tablodan faydalanarak, elma ağaçları ve çitlerin eşit olduğu basamaktan (8. adım) itibaren "n" değerlerini yazıyor.

87Al: Baktığımız zaman 1'den 4'e 3 tane artıyor, 8'den 16 ya 8 tane artıyor. Burada daha hızlı bir artış var. 1. Basamaktan itibaren bahçe çitleri daha hızlı artıyor.

88A: Nasıl yani?

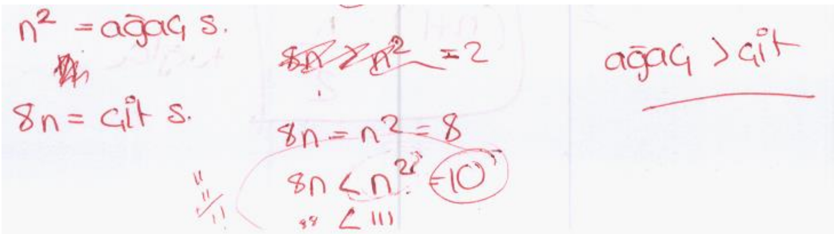
89AL: Diğer basamaklarda bakmam gerekiyor bir dakika.

90A: Tamam bunu matematiksel olarak göstermeni istiyorum.

91Al: Peki tamam, n^2 elma sayısı, 8n çit sayısı; mesela bu iki olsa elma ağaçları 4 çit sayısı 16 eder. 8 olsa ikisi de 64 eder, eşit olur. 10 olsa elma sayıları 100, çit sayıları 80 eder elma sayıları daha fazla oldu.

Şekil 34

Aleyna'nın cebirsel gösterim kullanma örneği



Bu sorunun çözümünde cebirsel gösterimden faydalanan Aleyna'nın 91Al diyaloğunda ve Şekil 30'da görüldüğü üzere Yapılar arası ilişkileri belirleme ve kullanma gözlenmiştir. Ayrıca iki değişken arasındaki bağıntıları ilişkilendirmektedir. Bu süreci cebbirsel olarak açıklaması da onun Oluşturma epistemik eylemini sergilediğini göstermektedir.

Bu soru için vasat kategoride tanımladığımız öğrencinin örnek diyaloğu aşağıda görülmektedir.

69B: Çitlerin sayısı artar,

70A: Neden böyle düşündün?

71B: Bahçe ne kadar büyütülürse büyütülsün elma ağaçlarını çevrelemek için daha fazla çit kullanacak.

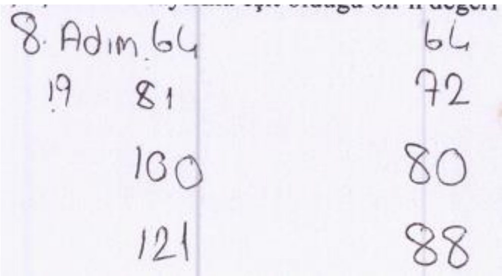
72A: Mesela şöyle sorayım, ilk basamakta kaç elma, kaç çit vardı ve 8. adıma geldiğimizde çit ve elma sayılarının durumu nasıldı?

73B: İlk basamakta çit sayısı fazlaydı, ama 8. adımda eşitlendi. 9. adıma bakmak istiyorum.

74B: Elma sayıları 17 artar. Bu da 81 yapar. Elma sayıları 81 oldu. Çit sayısı da 72 oldu. O zaman elma sayıları daha fazla oldu.

Şekil 35

Aleyna'nın aritmetik gösterim kullandığı çözümü



75A: Kararın nedir?

76B: Fikrimi değiştirmek istiyorum elma ağaçları daha hızlı artıyor.

Aritmetik gösterim kullanan öğrencilerden Buse Şekil 31'de ve diyalog 74B görüldüğü gibi Çözüme ulaşmada eskiden oluşturulan yapıların kullanımı söz konusudur. Bu süreçte ikinci maddede yer alan çözümünden faydalanmıştır. Yani elma ve çit sayılarını bir önceki maddede, 8.adım olarak tespit ettiği için oradan hareketle örüntüleri sürdürmüş ve iki değişkeni ilişkilendirerek açıklamaya çalışmıştır. Bu bakımdan Kullanma epistemik eylemine yönelik göstergeler mevcuttur.

Genel durum düşünüldüğünde elmalar sorusunun üçüncü maddesini tüm öğrenciler doğru cevaplamışlardır. Soyutlama sürecinde ortaya çıkan farklılık ise öğrencilerin çözüm stratejileri için seçtikleri yöntemdedir.

7. sınıf öğrencileri ile yapılan görüşmenin son sorusu olan merdiven sorusu oldukça zor bir sorudur. Sorunun orijinal hali Driscoll (1999)'da kullandığı sayılar kulesidir. Ancak soru ilgili kavramlar ve kazanımlara uygun olarak yeniden revize edilmiştir. Bu sayede çözüm sürecinde matematikte Gauss formülü olarak bilinen (Terzioğlu, 1992) matematiksel keşfin ortaya çıkarılması amaçlanmaktadır. Burada bir sayı dizisinin toplamının bulunması bir bağlam içinde öğrencilere sunulmuştur. Gauss formülünün keşfedilmesinden ziyade öğrencilerin "n" sayısı için genel bir cebirsel form üretmeleri beklenmektedir. Bu açıkça bir Oluşturma epistemik eylemidir.

99Al: Şimdi tüm basamakları yazmak istiyorum,

100A: İstersen alt alta yaz.

101Al: Tamam olur.

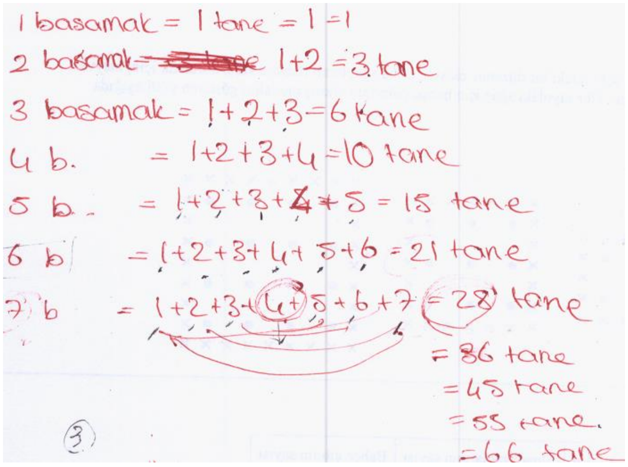
102: 7.basamağa kadar yazıyor

103: 8.den 11. basamağa kadar sadece toplamları yazıyor.

104: Öğrenci burada bir önceki basamağın toplamına sadece yeni basamağı ekleyerek toplamın bulunduğunu belirtiyor.

Şekil 36

Aleyna'nın çözüm sürecinden bir örnek



105A: Ne keşfettik?

106Al: Her defasında kendi sayısını topluyoruz. Mesela 28 + 8 basamak, 36 oldu.

107A: Soruyu tekrar okursak, n basamaklı bir merdivende kaç tuğla kullanılır. Bunu nasıl bulabiliriz?

108Al: Şimdi 55+n mi olur?

109A: O ne demek?

110Al: Yani n burada 11. basamağı gösterir. Yani burada n basamak yani. Aslında n'yi bilsem çözeceğim de.

111A: Evet, "n" bilinse çözülür. Genel bir formül yazalım mı?

112Al: Ama nasıl, o zaman kendi basamak sayısını ekliyoruz. Aslında tek bir sayı olarak yazsak daha kolay olurdu.

113A: Nasıl anlamadım?

114Al: Mesela 7 için olsa yazarım.

115A: Tamam 7 için genel bir formül oluşturalım ve genelleştirelim.

116Al: 7= tüm sayılara n dersek, 7= n+7 olur. Tüm sayılar bir önceki basamakta vardı. 21 oluyor öncekilerin toplamı 21+7=28 yapınca çıkıyor. Ama genelleme yapamadım ki.

117A: Peki bunları toplamanın kolay bir yolu var mıdır? Mesela 200 ile 170'i toplamanın kolay yolu nedir önce 200 ile 100 toplanır 300 sonra 70'i ekleriz 370 olur. Burada da benzer birşeyler çıkarabilir miyiz?

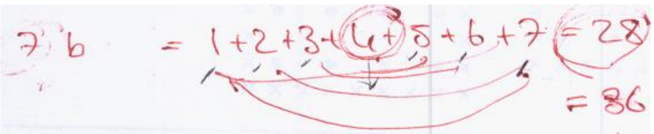
118Al: Yani düşünüyorum ama tam bulamadım, işte.

119A: Tamam ben sana bir ipucu vereyim yardım edeyim, mesela bir baştan bir sondan sayıları toplasak nasıl olur?

120Al: 7.basamakta deneyeyim; 7ile1, 6ile2, 5ile3, 8 çıktı hep.

Şekil 37

Aleyna'nın çözüm stratejisi örneği



121: Biraz Düşünüyor.

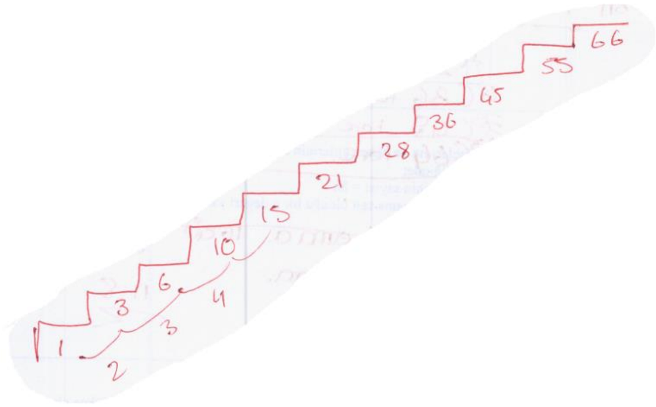
122A: Tek bir çözüm yoktur her zaman birden fazla metodun olabilir.

123Al: Merdiven çizmek istiyorum

124: Çiziyor ve basamakları yazıyor.

Şekil 38

Aleyna'nın farklı stratejisi



125Al: Her defasında aynı miktarda artsaydı belki daha kolay olurdu. Ama ardışık olarak bir artış da var burada. (Artış miktarını da merdivende gösteriyor; 2-3-4)

126Al: Şimdi şu 6. basamakta denedik aslında 6+1=7 bundan kaç tane olduğunu bulsam.

127: İnceliyor. Toplamı 7 olanları sayıyor.

128Al: 3 tane var yani yarısı kadar oluyor.

129: $\frac{n}{2}$ *yazıyor.*

130A: Ne bu?

131Al: Kullanılacak basamak sayısı bu hocam.

132A: Kaç kere toplayacağını buldun şimdi. Zor olanı tamamladın.

133Al: Ama yazamadım bir dakika düşüneyim.

134: Biraz zaman geçiyor.

135A: Şimdi sen 6. basamak için yaptıklarını sayıları kullanarak yazar mısın?

136: Yazıyor.

137A: Bunu hangi basamak için yazdık?

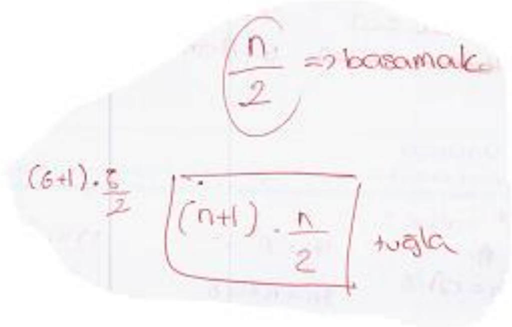
138Al: 6. basamak için

139A: "n" için yazabilir miyiz?

140Al: Hemen yazarım.

Şekil 39

Aleyna'nın oluşturduğu cebirsel form



Aleyna’nın çözümü incelendiğinde öncelikle sorunun doğası gereği matematiksel bir durumun anlaşılması ve açıklanması gerekmektedir. Burada bahsi geçen matematiksel durum artış miktarının ve basamak sayısının birbiri ile olan ilişkisi ve bu ilişkinin açıklanmasıdır. 105Al ile 116Al arasında geçen diyaloglar bunu bize göstermektedir. Öğrencinin 116Al diyaloğunda geçen “*genelleme yapamadım ki*” sözüne kadar yaptığı açıklamalar matematiksel bir durumu anladığını ve açıkladığını gösterir niteliktedir. Ancak kendi ifadesinde de olduğu gibi bir genelleme ihtiyacı duymuş ama o ana kadar yapamadığını belirtmiştir. Yeni bir yapıya gereksinim duyulması Oluşturma epistemik eylemi için başlangıç olmuştur. O ana kadar keşfettiklerini ya da anladıklarını yeni bir yapı ile oluşturma ihtiyacı görülmektedir. 119A diyaloğunda araştırmacı öğrenciye yeni oluşturma fırsatları sunmak için bir ipucu veriyor. Bununla beraber Kullanma epistemik eylemi tekrar başlıyor. 123Al ile 126Al arasındaki diyaloglarda ve Şekil 34’de yeni bir strateji belirlediği ve süreç üzerinde derin düşünme yaptığı görülmektedir. Bu sebeple Kullanma eyleminin gerçekleştiği savunulabilir. Devam eden 126Al diyaloğunda geliştirdiği stratejiyi genişletmeye çalıştığı görülüyor, aslında sorunun çözümünde var olan temel mantığı yakalıyor; toplamları aynı olan sayıların âdetini buluyor. Bu süreçte bulduğu adet sayısını soyut bir kavram olan “n” değişkeni ile ifade ederek genellenebileceğini gösteriyor. Bu süreç onun Yeni yapının oluşturulması sürecinde farklı bir dil kullanımı yaptığının bir göstergesidir. Bu gösterge ise Oluşturma epistemik eyleminin açık bir işaretidir. Yani öğrenci “n” değişkeni için bulduğu cebirsel formda ilk soyut kavramını inşa ediyor: "$\frac{n}{2}$". Öğrenci soyutladığı bu cebirsel formun çalışıp çalışmadığını test etmek için “n=6” sayı değeri için test ediyor. Bu test etme süreci hem cebirsel formun çalışıp çalışmadığının bir göstergesi hem cebirsel formun son halinin verilmesi için bir fırsat oluşturuyor. Şekil 35’de görüldüğü gibi öğrenci cebirsel formu tamamlayarak, tüm “n” sayıları için genel bir formül olduğunu gösteriyor. Bu süreçte öğrencinin değişken kavramını tüm sayılar için kullanabildiği yani daha üst bir akıl yürütme ile değişken kavramını soyutlayabildiği görülmektedir.

Aleyna’nın “$\frac{n}{2}$” bulma sürecine benzer şekilde Mehmet’in diyaloglarında görülmektedir.

99M: Aaa! Bir de sondan toplasam olmuyor. Bir dakika bir baş bir son toplasam. Yani “n” ile 1’i toplayacağım.

100A: Güzel buradan bir kendimize kısa yol türetelim.

101M: Hocam “n” ile 1’i toplayacağım, yani simetrik topluyorum.

102A: Evet, güzel bir söylem simetrik toplamak, devam edelim.

103M: O zaman, “n-1” ile 2'yi toplayacağım.

Burada Mehmet’in stratejisi görülmektedir. Süreç üzerinde derin düşünme sonucunda ortaya çıkmıştır. Bu kritik süreçle ilgili öğrencinin Yapılar arası ilişkileri belirlediği söylenebilir. 101M ve 103M diyaloğunda belirtildiği gibi her iki ifadenin toplamının daima “n+1” olduğunu bulması bunun bir göstergesidir. Özellikle 103M diyaloğunda toplam değeri “n+1” sabitlemek için “1” değerinin 2 olmasından dolayı “n” ifadesini 1 azaltarak “n-1” yazması ilişkiyi belirlediğinin bir göstergesidir. Burada Mehmet Oluşturma epistemik eylemini sergilemektedir.

106A: Bunu formülize etmeden önce daha küçük bir örnekte denesek.

107M: Olur hocam, 3 ile 1'i toplayacağım, birde 2 var cevap 6.

...

109M: Evet yapıyorum hocam 6 ile 1, 5 ile 2, 4 ile 3ü topluyorum hepsi çıkıyor; 7.

110A: Kaç tane 7 var?

111M: 3 tane 7 var.

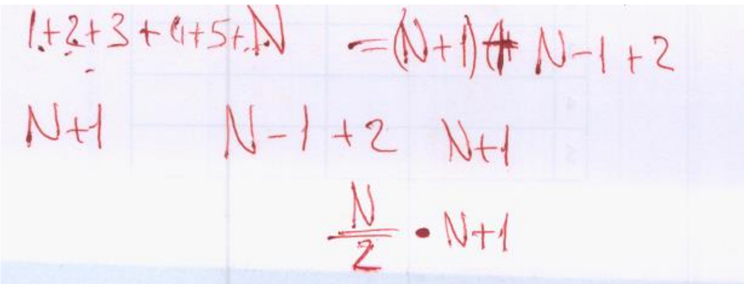
...

120: Öğrenci birkaç tane daha küçük deneme yapıyor.

121M: Buldum galiba, simetrik toplama yaptığımız için, toplam sayının yarısı kadar topluyoruz. Yani "$\frac{n}{2}$". Yani n'nin yarısı oluyor.

Şekil 40

Mehmet'in oluşturma epistemik eylemi örneği



Mehmet soyutlama sürecinin Aleyna'dan farklı yönleri ifade edilmiştir. Buna karşın vasat kategoride yer alan öğrenciler soyutlama noktasında başarılı olamadı ama öğretmen yönelendirmeleri ile sonuca ulaşabildi. Yeni bir örnekte kuralı uygulayabildi, örneğin 100 basamaklı bir merdivende kaç adet tuğla kullanılır sorusunu verilen formülü kullanarak çözdükleri görülmüştür.

Sonuç olarak, cebirsel bir yapının soyutlanmasında inşa süreci kritiktir. Bu süreçte birey var olan kavramlarını önce ilişkilendirmesi ardından da bu ilişkiyi açıklaması beklenir. Çünkü inşa edilen cebirsel yapı bir şeylerin özetidir, ya da kısa yoludur. Diğer bir ifadeyle cebirsel yapı ya da formül tüm sayı değerleri için istenen sonucu vermelidir. Çalışmalıdır. Bu bakımdan kurulan ilişkinin açıklanması da o cebirsel formun çalışıp çalışmadığının bir göstergesi niteliğindedir. Yani bir bakıma ispatlamadır.

4.3.3. Yedinci sınıf cebir ikinci görüşmelerine ait bulgular. 7. sınıf öğrencilerine yönelik olarak ikinci görüşme bulguları bu başlıkta sunulmuştur. Bu görüşme soruları ile ilgili bilgiler Yöntem bölümünde detaylı olarak ifade edilmiştir. Toplam sekiz sorudan oluşan bu görüşme için ilk soruda öğrencilerin cebirsel ifadeye uygun sözel ifade yazma ve cebirsel ifadelerin anlamını açıklama noktasındaki becerilerini belirlemek içindir. Öğrencinin verilen cebirsel ifadeyi anlaması, yorumlaması ve buna uygun sözel ifade yazmaya çalışması yapma alışkanlığının göstergeleridir.

Öğrencilerden "2x+4=10" ifadesine uygun bir cebirsel ifade yazmaları istenmiştir. Genel olarak öğrencilerin basit ve anlaşılması kolay sözel ifadeler ile denklemi ifade ettikleri görülmüştür.

6B: Hangi sayının 2 katının 4 fazlası 10'a eşittir?

9B: Bu sefer hangi sayının 4 fazlasının 2 katı 10'a eşittir?

10A: Peki birincisi ile ikincisindeki "hangi sayı" birbirine eşit mi?

11B: Hayır değil.

12A: Neden?

13B: Çünkü birisinde 2 katının 4 fazlası diyoruz, diğerinde 4 fazlasının 2 katı diyoruz.

14B: Yani bilemiyorum belki de eşit.

15A: Mesela ikisini de 2 ile çarpıyoruz ikisini de 4 ekliyoruz İkisi de 10'a eşit.

16B: Eşit gibi hocam.

17A: Peki nasıl kontrol edebiliriz, ne yapabiliriz?

18B: Bilmiyorum nasıl yapabiliriz?

19: Her iki denklemi de çözüyor. "x" değerlerinin eşit olmadığını gördü.

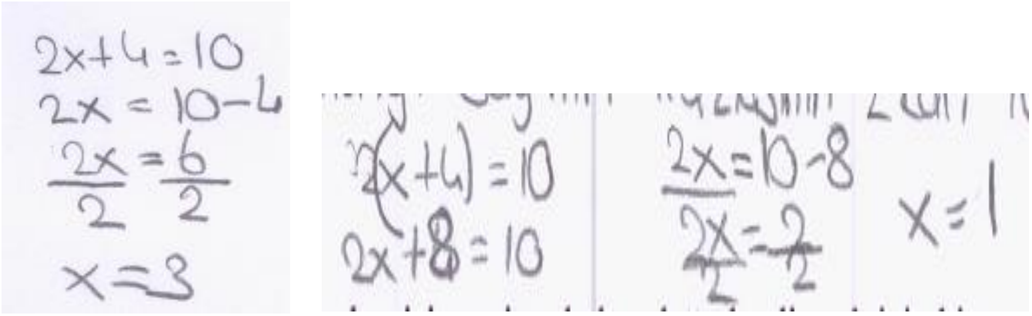
20B: Eşit değilmiş.

21A: Neden acaba?

22B: Çünkü buradaki ikiyi parantezlerin içerisine dağıtıyoruz.

Şekil 41

Buse'nin kullanma epistemik eylemi örneği

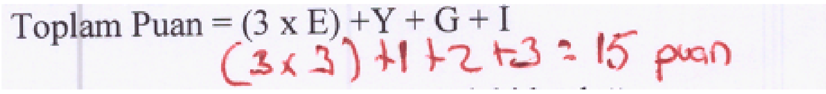


Bu soruyu tüm öğrenciler doğru cevaplamışlardır.

İkinci soru daha önce yani 6.sınıf düzeyinde karşılaştıkları bir sorudur. Bu sorunun çözümü o yıldaki öğrenci durumları ile karşılaştırılmıştır. Soru, 7.sınıf öğrencileri için geçmiş tecrübelerin ne durumda olduğunun bir göstergesidir. Bu sorunun ilk maddesinde değişkenin yerine bilinen bir sayının kullanımıdır.

29S: "Ca" arabasının toplam puanı yazınız diyor "3.3 +1+2+3=15", "Ca" arabasının toplam puanı 15 ediyor, buraya yazayım

30A: Çok güzel.



Öğrencinin değişkenler ile yapılan işlemde zorluk yaşamadan doğrudan cevaba ulaştığı görülmektedir. Buna ek olarak görüşmeye katılan tüm öğrenciler bu sorunun çözümünde zorlanmadan doğru cevaba ulaşmışlardır. OECD verileri dikkate alındığında bu sorunun doğru cevaplanma oranı %72 olarak gerçekleşmiştir.

Öğrencilerin altıncı sınıf performansları düşünüldüğünde, değişkenin farklı sayı değerleri için farklı değerler aldıklarını belirleyebilmişlerdir. Buna ek olarak değişkenin yerine sayı koyarak değişkenlerle işlemler yapabildikleri dolayısıyla kullanma düzeyinde işlemler gerçekleştirebilmişlerdir. Aynı sorunun diğer maddesinde ise oluşturma eylemine ilişkin beceri sergilenememiştir. Yedinci sınıf düzeyine gelindiğinde aynı maddeye verilen cevaplarda öğrencilerin değişkenleri denklem içinde manipüle ederek değişime uğratabildikleri bu sebeple de değişken kavramına ilişkin oluşturma epistemik eylemi düzeyinde beceri sergiledikleri söylenebilir.

Bu sorunun ikinci maddesinde öğrencilerin bir önceki maddede ki bilgilerine atıfta bulunulmaktadır. Denklemi anlamaları ve bir önceki maddede yer alan değişkenleri kullanarak denklemin sonucunu taraflı olarak değiştirmeleri gerekmektedir. Bu açık bir manipülasyondur. Bu değişimi yaparken matematiksel olarak bilgilerini kullanamaları gerekir. Burada kullanılması gereken matematiksel bilgiler, değişkenin bilinen bir sayı olarak kullanımı, katsayının kullanımı ve denklemin toplam değerinin taraflı olarak değiştirilmesi için bu değişken ve katsayı ilişkisinin kullanabilmektedir. İyi düzeyde olduğu bilinen Aleyna'nın soruyu çözerken

35Al: E'yi 3 ile çarpalım.

36A: Güzel 3 ile çarpalım, peki yakıt için ne yapmalıyız, yani kaç ile çarpılır?

37Al: 3 ile çarpsam diğerleri daha fazla büyüyecek o yüzden 1 ile çarpalım.

38Al: Konfor yüksek olduğu için 3 ile çarpalım görünüşü de 1 ile çarpalım.

39: Ca arabası için; (3xE + 1xY + 1xG + 3xİ = 3.3 + 1.1 + 1.2 + 3.3=21'dir.

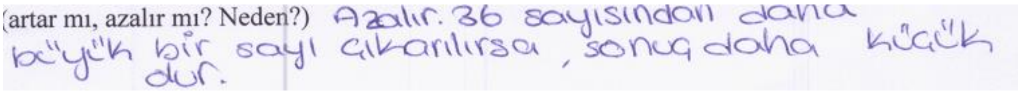
$(3 \times E) + Y + G + (3 \times \dot{I})$

Öğrencinin çözümünde görüldüğü gibi değişkenin katsayı ile çarpıldığında denklemin toplam değerini değiştiği anlaşılmıştır. Özellikle katsayının değişkeni etkilediğini ve değişimin "Ca" arabası için güçlü olan özelliğini daha ön plana çıkararak denklemde avantajlı hale gelmesini sağlamıştır. Bu durum 35Al, 37Al ve 38Al diyaloglarında görülebilir. Bu sorunun çözümünde öğrenciler genel olarak başarılı sonuçlar almışlardır.

Öğrencilerin değişken kavramına ilişkin oluşturma düzeyinde epistemik eylem sergilediği görülmüştür. Değişkenin yerine sayı koyma ve bu sayede denklemi manipüle etme konusunda değişkenleri pekiştirdikleri görülmüştür. Özellikle esneklik kazandıkları ifade edilebilir.

Üçüncü soruda öğrencilerin denge kavramına yönelik düşünceleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu bakımdan basit bir denklem verilmiş ve denklemde eşitliğin bir tarafının değiştirdiğimizde diğer tarafı sorgulanmıştır. Bu bakımdan öğrenciler için Tanıdık bir eylem olduğu açıktır.

44Al: Azalır, 36 sayısından daha büyük bir sayı çıkarılırsa sonuç küçük olur.


(artar mı, azalır mı? Neden?) Azalır. 36 sayısından daha büyük bir sayı çıkarılırsa, sonuç daha küçük olur.

Soru genel olarak tüm öğrenciler tarafından doğru cevaplanmıştır. Açık bir Tanıma epistemik eylemi gösterilmiştir. 7. Sınıf kazanımları ve ders içerikleri de düşünüldüğünde bu soru sadece problem durumunun bilgi bakımından sorgulanmasını gerektirmektedir.

Üçüncü sorunun a maddesinde bir önceki soruya benzer şekilde bir denklem verilmiştir. Ancak ilk denklemde “36-n=20” olan eşitlik şimdiki durumda “2n+5=23” olarak verilmiştir. Bu soruda ise ilk soruyu Tanıma eylemi içinde Analoji olarak ifade edersek a maddesi ise özelleştirmedir, bunun sebebi ise bir önceki soruda eşitliğin çözüm sırasında, önceki etkinliğin sonucuna başvurulması ve özdeşliği fark etme ve kullanma ile sonuçlanmasıdır. “n” değeri bir önceki sorudan farklı olarak 2 katsayısı ile çarpılmıştır. İki soruda da eşit işareti sorgulanmıştır.

50S: Burada normal denklemin sonucunu bulalım “n=9” çıkar, n’nin değeri 5 arttırıldığında 14 olur.

51S: Eşitliğin sağ tarafında ki yeni durum 33 olur.

52S: “n” 5 artırılırsa sonuç artar.

Sabri'nin çözümü incelendiğinde Tanıma eyleminin gerçekleştiği görülmektedir. Tanıma eyleminin Özelleştirme kategorisi olduğu açıktır. Çünkü denklemdeki dengenin korunduğu anlaşılmıştır. Bu dengenin korunduğunu göstermek için denklem artış öncesi ve sonrası için çözülerek gösterilmiştir.

Üçüncü sorunun b maddesinde a maddesindeki artışın nedeni sorulmuştur. Ayrıca ayrıntılı olarak açıklamaları beklenmiştir. Bu matematiksel durumun anlaşılması ve açıklanmasında bir işlem gerekmektedir. Bu işlem süreci bir Kullanma epistemik eylemidir.

52Al: "2n" denildiği için, 2 ile çarptığımız için.

53A: Düşünüyor.

54: "n" değerini hesaplamaya başlıyor. Öğrenci "n" değerini 9 buluyor.

55A: Peki 5 artırılırsa?

56Al: Sonuç 33 çıktı ve 10 artmış oldu.

57A: Peki yukarıda bir şey demiştin nasıl bir sonuç bulmuştun?

58Al: "2n" denildiği için 2 kere 5, 10 arttı.

59A: Peki 7 artmış olsaydı, sonuç ne olurdu?

60Al: 14 artardı. Yani 2 katı artmış oldu.

Soru içeriği bakımından matematiksel bir durumun anlaşılması ve açıklanmasını gerektirdiğinden dolayı 58Al diyaloğunda olduğu gibi değişimin neden beklenen farklı olduğunu açıklayabilmiştir. Buna ek olarak 59A ve 60Al diyaloglarında görüldüğü gibi artış miktarı değiştirildiğinde bile öğrenci matematiksel durumu anlamış ve açıklayabilmiştir. Bu bakımdan Kullanma epistemik eylemi gözlenmiştir. Bu soruya tüm öğrenciler doğru cevap vermişlerdir.

Üçüncü sorunun c maddesinde artışın genellenmesi sorulmuştur. Ayrıca ayrıntılı olarak açıklamaları beklenmiştir. Benzer sorularda olduğu gibi farklı “n” değerleri içinde doğru olduğunun gösterilmesi gerektiği vurgulanmıştır. Burada genelleme, bir matematiksel durumun açıklanması olduğundan dolayı Kullanma eylemidir. Ancak bu matematiksel durumun cebirsel olarak açıklanabilmesi, yeni bir dil kullanımını gerektirdiğinden dolayı Oluşturma eylemi olarak görülebilir. Yani öğrencinin çözüm yolu ve strateji sorunun düzeyini belirlemektedir.

56M: “n” sayısının artması sonucu da artırıyor.

57M: Sonuç her 5 de 10ar 10ar artıyor. 10 artsa 20 olacak. 100 artsa 200 artar

58: Öğrenci orantı kullanarak buluyor.

Bu soruyu tüm öğrenciler yapabilmişlerdir. Sorunun bir önceki maddelerini çözerken kullandıkları stratejiler bu madddenin çözümünde etkili olmuştur. Mehmet daha önceki maddelerde “n” değerinin artış miktarını hesaplarken orantıdan faydalanmıştır ve aynı şekilde denklemin artış değerini gösterirken de orantı kullanarak çözümü gerçekleştirmiştir. Öğrencilerin denklemin “n” değerinin artışını genellemesini yaparken kullandıkları çözümler incelendiğinde Kullanma epistemik eylemini sergiledikleri görülmüştür.

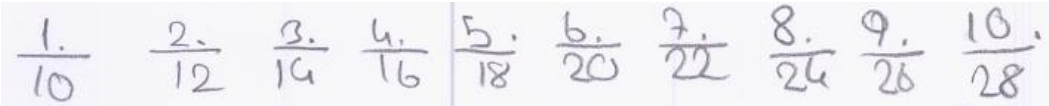
Dördüncü soru örüntü aramayı, örüntünün kuralı bulmayı ve açıklamayı, örüntünün denklem şeklinde ifade edilmesini ve son olarak girdi-çıktı olarak denklemi çözmeyi gerektirmektedir.

Sorunun a maddesi örüntü aramayı gerektirmektedir, çözüm süreci öğrencilerin bir örüntüyü aramayı ve sonucu yazmalarını gerektirmektedir. Bu sebeple 7.sınıf öğrencileri için Tanıdık bir yapının farkına varmayı gerektirmektedir. Bu bakımdan basit bir soru maddesidir.

Buse bu sorunun çözümünde diğer öğrenciler gibi liste yaparak çözüme ulaşıyor. Onuncu sıraya kadar basamak basamak arttırarak tablo şeklinde yazdı, “evet 28 oldu” dedi.

Şekil 42

Buse'nin aritmetik düşünme örneği



Bu soru tüm öğrenciler tarafından benzer şekilde çözüme ulaştırılmıştır. Öğrenciler ilk basamaktaki koltuk sayısını belirledikten sonra onuncu basamağa kadar ikişer artış miktarıyla ilerlemişlerdir. Öğrenciler için basit bir sorudur, ancak ilerleyen soru maddeleri için bir başlangıç niteliğindedir. Belirtildiği gibi *tanıma* epistemik eylemi düzeyindedir.

Sorunun b maddesinde bir örüntünün kuralını bulmayı ve açıklamayı gerektirmektedir. Bu bakımdan matematiksel bir durumu anlama ve açıklama olarak görülebilir. Özellikle bağlamsal bir problemi durumu olduğundan problem çözme süreci aktiftir. Bu belirtilen durumlar *kullanma* epistemik eylemini gerektirmektedir.

66: Soruyu tekrar okudu.

67M: Haa! Denklemini soruyor. “x” eşittir koltuk sayısına göre yapsak,

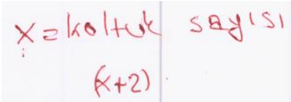
68M: Aaa! Şimdi buradaki bağlantıyı bulursam bunu da bulabilirim.

69: Yukarıdaki yaptığı listeye bakıyor.

70M: Şimdi burada 2şer 2şer artıyorsa. Haah, şunu deneyelim (x+2), mesela koltuk sayısı 12 olsa, 12+2=14 oluyor. Olmadı. Sıranın numarasını biliyorsa diyor. *Hmm tamam.*

71M: Bakalım. Sıra numarası ile koltuk sayısı arasındaki bağlantıyı bulmam gerekiyor. Şimdi 2 artsa olmaz. Şeyi buldum hep 2 artıyor.

76M: Sanırım buldum onu nasıl yazabilirim. "x" şimdi sıra, fazlaysa mesela burada daha fazla ikisini birbirinden çıkarıyoruz, sonra 2 ile çarpıp topluyoruz.



Bu soruyu tüm öğrenciler doğru cevaplamışlardır. İyi kategoride yer alan öğrenciler herhangi bir yardıma ihtiyaç duymadan başarılı olurken vasat durumdakiler ise araştırmacının yönelendirmeleri sonucunda cevaba ulaşmışlardır. Bu bakımdan öğrencilerin bu soruda Kullanma epistemik eylemine yönelik davranışlar sergilediği söylenebilir.

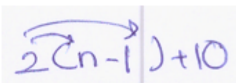
Sorunun c maddesinde örüntünün denklem şeklinde ifade edilmesini gerektirmektedir. Bu denklem için değişkenlerde soru içerisinde verilmiştir. "R" koltuk sırasını ve "S" sıradaki koltuk sayısını ifade edecek şekilde soru organize edilmiştir. Bir önceki maddede örüntünün matematiksel durumu açıklanmıştır. Bu maddede ise matematiksel durumun istenilen değişkenleri kullanarak yapılar arası ilişkileri belirlemeyi ve cebirsel bir formda ifade etmeyi gerektirmektedir. Öğrencinin çözüm süreci onun epistemik eylem seviyesini belirlemektedir.

78Al: "R" sıra sayısını yani 7. sıra, 8. sıra 9. sıra gibi "S" ise koltuk sayısı ifade ediyor, değil mi?

79A: Evet.

80Al: Denklemler biraz karışık ya, arasındaki sıraya "n" dersek olmaz mı?

81A: Çok güzel arasındaki sıraya "n" dersek.



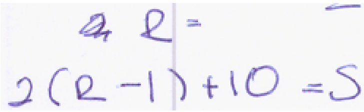
88Al: O zaman sıra sayısının farkı ile 2'yi çarpıp 10 ekleyeceğim.

89A: Sıra sayısı "R", koltuk sayısı "S" demiştin.

94Al: [2(R-1)+10=S]

95A: Bu kadar çok güzel.

96Al: İlk defa doğru düzgün bir denklem kurdum. Teşekkürler hocam.

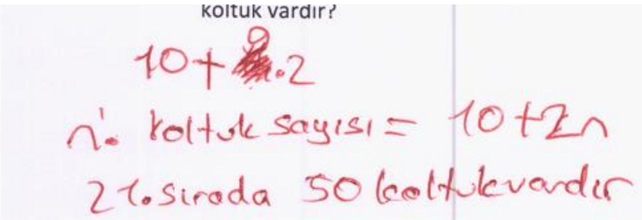


Öğrenci çözüm sürecinde verilen değişkenleri yani yeni yapıyı eski yapıyla ilişkilendirirken ara bir formdan faydalanmıştır. 80Al diyaloğunda görülüğü üzere daha önce açıkladığı matematiksel durumu “n” değişkenini kullanarak cebirsel forma dönüştürmüştür. Bu yapılar arası ilişkileri belirleme aşaması olarak görülebilir. 88Al ile 94Al diyalogları arasındaki süreçte ise iki yapıyı ilişkilendirebildiği görülmüştür. Bu ilişkilendirme süreci öğrencinin *oluşturma* epistemik eylemini sergilediğini göstermektedir.

Bu soru iyi ve orta düzeyde kategorize edilen öğrenciler tarafından çözüme ulaştırılmıştır. Buna karşın vasat düzeydeki öğrenciler araştırmacı desteğine yoğun ihtiyaç duymuşlardır. Bu soruda *kullanma* epistemik eylemini sergileyen öğrenciler ise deneme yoluyla sonuca gitmişlerdir. “a” maddesinde oluşturdukları listeden faydalanarak deneme yoluyla “R” ve “S” değişkenlerini denklemde yazmaya çalışmışlardır.

Şekil 43

Kullanma epistemik eylemine yönelik çözüm



Öğrencinin çözümünde (Şekil 47) görüldüğü üzere öğrenci kendisine 21. Sırayı hedef alarak işlem yapmıştır. Bu işlem neticesinde ise koltuk sayısını belirleyebilmiştir. Çözüme ulaşmada eskiden oluşturduğu yapıdan faydalanmıştır. Bu durum onun Kullanma epistemik eylemini sergilediğini göstermektedir.

Sorunun d maddesinde girdi-çıktı ile organize edilen denklemi çözmeyi gerektirmektedir. Bu süreç öğrencilerin c maddesinde kurdukları denklem yapısını kullanmalarını gerektirmektedir. Bu bakımdan Çözüme ulaşmada eskiden oluşturulan yapıların kullanımı söz konusudur.

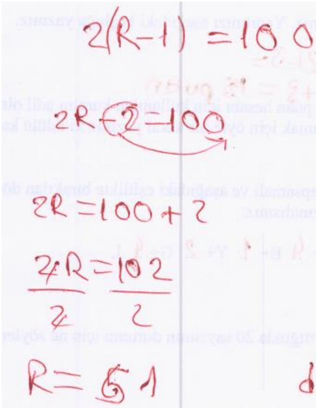
90M: İlk soruyu çözelim, 2(21-1)+10 denklemi çözelim. Dağıtsak; 42-2+10= 50 koltuk vardır.

91M: Şimdi diğeri, soruyu tekrar okuyor. O zaman şöyle olacak, 100=

92A: Neden "=100" yazdın?

93M: S'nin yerine yazdım 100'ü denklemde yanlış yere yazıp aklım karışmasın diye.

94M: 2(R-1) =100 denklemi çözersek, 2R-2=100. "R=51" olur.



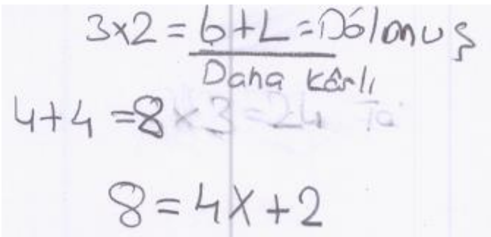
Öğrencinin çözüm süreci diyalogda ve şekil 48'de görüldüğü gibi girdi-çıktıları daha önceden oluşturduğu denklem yapısnı kullanarak olmuştur. Soru önce girdi değerini verip çıktıyı sorgulamış, ardından da çıktı değerini vererek girdi değerinin bulunmasını istemektedir. Öğrenci çözüm süreci *kullanma* epistemik eylemi düzeyindedir.
Bu soruyu tüm öğrenciler çözüme ulaştırmışlardır.

Beşinci soru öğrencilerin bağlamsal bir problem durumunu modellemeyi gerektirmektedir. Bu bakımdan bir denklem kurma ve optimum sonucu tercih etme ile sonuçlanmaktadır. İki maddeden oluşan soruda ilk madde iki model arasında tercih gerektirirken ikinci madde ise sonucun nasıl değiştiğini anlamayı ve cebirsel olarak açıklama gerektiren bir süreçtir.

Beşinci sorunun a maddesi bağlamsal bir problem durumunu anlamayı ve tercih yapmayı gerektirmektedir. Özellikle cebirsel bir form kullanmaya zorunlu olunmaması durumu sorunun çözüm sürecinde Tanıdık yapının farkına varmayı gerektirmektedir.

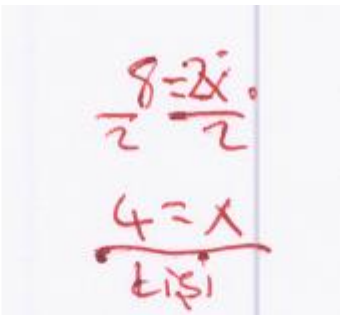
…

103B: Dolmuş için 3x2=6, taksi için 4+4=8. O yüzden dolmuş daha karlıdır.

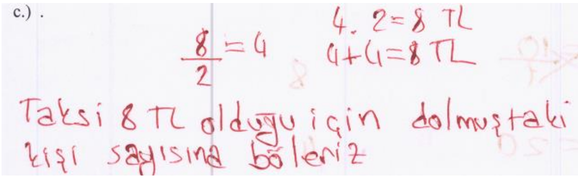


Bu soru tüm öğrenciler tarafından çözüme ulaştırılmıştır. Öğrenciler çözüm sürecinde Tanıma epistemik eylemi düzeyinde davranış sergilemişlerdir.

Beşinci sorunun b maddesi bağlamsal bir problem durumunu anlamayı ve sonucun nasıl değiştiğini anlamayı ve cebirsel olarak açıklamayı gerektirir. Özellikle cebirsel bir form kullanma durumu öğrencinin çözüm sürecinde gösterdiği epistemik eylemi etkilemektedir. Önceki maddede kullandığı modeli kullanarak çözüme ulaşırsa *tanıma* epistemik eylemine ilişkin *özelleştirme* yapmış olacaktır. Ancak problem çözme sürecini kullanırsa çözüme ulaşmada eskiden oluşturulan yapıların söz konusu olacağında *kullanma* eylemi oluşur.



Sabri'nin çözüme ulaşma sürecinde cebirsel bir gösterim söz konusudur. Bu bakımdan *kullanma* epistemik eylemi düzeyindedir.



Mehmet ise bu sorunun çözümünde bir önceki maddede yaptıklarından faydalanarak bir problem çözme sürecinden bağımsız olarak işlemler yürütmüştür. Bu bakımdan Tanıma epistemik eylemine yöneliktir. Altıncı soru denklem kurma ve çözmeyi gerektiren bir sorudur. Tüm öğrenciler soruyu doğru cevaplamışlardır. Soruda daha önceki epistemik eylemleri genişletecek bir bilgi bulunmadığından detayına ihtiyaç duyulmamıştır. Yedinci soru öğrencilerin değişkeni, bilinmeyen bir sayı olarak kullandıkları bir sorudur. Tüm öğrencilerin bu soruda doğru sonuca ulaşmışlardır. Soruda daha önceki epistemik eylemleri genişletecek bir bilgi bulunmadığından detayına ihtiyaç duyulmamıştır. Sekizinci soru bağlamsal bir durumun matematiksel olarak ifade edilmesini gerektirmektedir. Öğrencilerin denklem çözme yeteneklerini üst seviyede kullanmalarını gerektirmektedir. Özellikle bağlamsal durumu cebirsel bir formda yazmaları da onlar için Yeni yapının oluşturulması (özgün bir dil kullanımı) şeklinde yorumlanabilir. Denklem kurma sürecinde eşitliğin iki tarafını verilenler ve istenenler şeklinde düşünüldüğünde ve kademeli olarak ilerleme sağlandığında dengenin korunumu da önemlidir.

Bu sorunun çözümünde açık şekilde *oluşturma* sürecinin gözlenmesi beklenmektedir. Bu bakımdan o*luşturma* sürecine ulaşabilen ve ulaşamayan öğrencilerin çözümlerinin incelenmesi gerektiği düşünülmüştür. Özellikle hangi aşamaların kritik olduğu belirlenirse bu bakımdan kritik noktaların öğrenciler tarafından nasıl geçildiği gözlenebilir.

Birinci kritik aşama, bağlamsal durumun anlaşılmasıdır. Matematiksel durumu anlamak devamında açıklamak öğreciler için *kullanma* epistemik eyleminin bir göstergesidir. Problemin çözümüne yönelik stratejinin belirlenmesi için kritiktir.

İkinci kritik aşama, Süreç üzerine derin düşünme aşamasıdır. Bu aşamada çözüm stratejisi belirlenmektedir. Bu durumda *kullanma* epistemik eylemine yöneliktir.

Üçüncü kritik aşama, çözüm stratejisinin uygulanmasıdır. Diğer bir ifadeyle matematiksel durumun cebirsel formda açıklanmasını gerektirir. Matematiksel durumu açıklama göstergesi Kullanma epistemik eyleminin bir tezahürü iken burada matematiksel açıklama daha karmaşık ve çözüm ilk bakışta kestirilememektedir. Bu bakımdan matematiksel durumun açıklanması yeni bir yapının oluşturulması sürecine yöneliktir. Hem çok aşamalı bir denklem kurma sürecini içinde barındırmakta hem de şu ana kadar kullanılan denklem çözme yöntemlerinden farklı durumların görülmesine olanak sağlamaktadır. Bu bakımdan *oluşturma* epistemik eyleminin göstergelerine sahip bir süreçtir.

Mehmet bu süreci iyi yöneten bir öğrencidir.

138: Kendisine göre denklemi yazıyor.

139M: Şimdi bunları parantezden kurtarırsak, "x" eksi çıktı. Aaa! Olmadı.

140: Üzerini karalıyor.

141M: O zaman şöyle ilk bunu bulayım. İkinci denklemi yazıyor. Buna göre yaparsak, yine aynı oldu.

142A: Neden sence?

143M: Şöyle olması gerekiyor. Paranteze dağıtmam gerekir. Bunu da köşeli parantez yapayım.

144A: İlk yazdığın denklem neyi anlatıyor bize?

145M: Elimizde kalan elmaları mı?

146A: Evet.

$$\left[x-\left(\frac{x}{2}+2\right)\right]$$

147M: Haa! Tamam, o zaman, bu elimizde kalan elmalar. Sepeti ilk doldurduğunda diyor. Bunu yazmama gerek yok o zaman. Bu da 2 ye eşit o zaman ama bir dakika bu birinci cüce ile karşılaştık daha ikinciyle karşılaşmadık ki. Hmm.

148M: Kalanı bulup yine cüceyle karşılaşmamız gerek. Aynen yazarım bu denklemi. Yine aynısı olması lazım. Aynı denklem olacak yani. Şimdi.

149: Denklemin altına ne olduğunu siyah kalemle yazıyor.

150M: Aynısını yazarsam ilk denklemin ama bu aynı olmuyor.

151M: şöyle yazayım (denklemi yazıyor).

152M: Eksi olacak değil mi bu?

153A: Neden eksi?

154M: Çünkü elmaları veriyoruz, çıkarmamız gerekli.

155A: Güzel.

156M: Denklemi yazıyor. 2 elma fazla veriyorduk cüceye denklemde onu karşıya atalım.

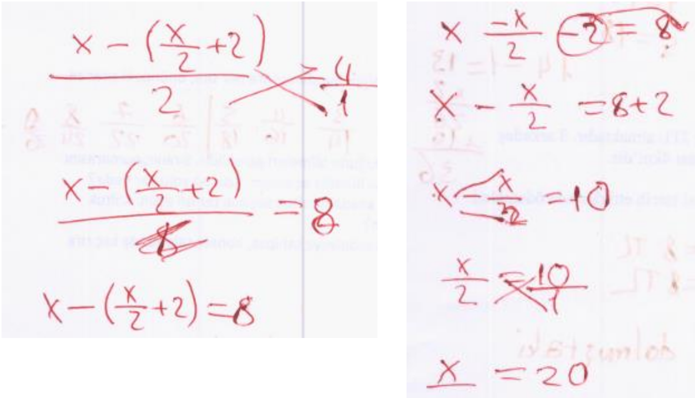
$$\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2=2$$

157: Denklemi çözüyor.

158: x=20 buluyor.

Şekil 44

Mehmet'in 8. soruyu sonuçlandırması



159A: Sağlama yapalım mı?

160M: Olur.

161M: 20 elma vardı cüceyle karşılaştık, yarısının 2 fazlasını ona verdik; 8 kaldı.

8'in yarısı 4, 2 fazlası 6. 8'den 6 çıkardığımızda kalan 2'dir.

162A: Peki 2 değilde 3 cüce ile karşılaşsaydık bulabilir miydin, denklem ile doğru cevabı?

163M: Evet. Bulurdum. Anladım çünkü nasıl denklem kuracağımı.

164A: Denklemi yazmakta zorlandın ben sana birşey yani ipucu verdim hemen yaptın. Nedir seni o esnada cesaretlendiren şey?

165M: Orada aklıma geldi. Çünkü ilk elimizde kalanın yarısını 2 fazlasını vermemiz gerektiğini düşündüğüm için ilk zaten bütün elmaların sayısı olduğu için ondan çıkardım daha sonra 2 fazlasını yani kalanın yarısının 2 fazlasının verdiğimiz zaman 2 kalacağını anladım.

Mehmet'in çözümü incelendiğinde ilk kritik aşama olan matematiksel durumu anlama noktasında ufak zorlanmalar yaşasa da yardım almadan bu durumu düzeltebilmiştir. İkinci aşamada ise kendisine bir çözüm stratejisi belirlemiştir. 145M ile 150M arasındaki diyaloglarda görüldüğü üzere çözüme tersten başlıyor ve ikinci cüce ile karşılaştığı anı cebirsel formda ifade edebiliyor. İlk başta yaptığı hatayı da işin içine dâhil ederek denklemi düzenlerken tekrar aynı hatayı yapmıyor. Öğrenci yeni bir yapının oluşturulması için özgün bir dil geliştiriyor. Üçüncü kritik aşamada 152M diyaloğunda ve görselde görüldüğü üzere öğrenci cebirsel formu yeni yapının durumuna göre düzenleyebiliyor. Denklemi bir matematiksel durum olarak inşa ediyor. Bağlamsal durumdaki değişimi cebirsel formda göstererek yeni bir yapıyı oluşturabildiğini gösteriyor.

Öğrenci denklemi yazmada zorlanmıştır. Bunun üstesinden nasıl geldiğini 165M diyaloğunda ifade etmiştir, genel olarak alışılmış şekilde bağlamsal bir problemde öğrenciler bilinmeyen olarak elmalara “x” değişkeni ile bağdaştırırlar. Bunun sonucunda ise bağlamsal duruma uygun tek aşamalı denklemi yazarak sorunu çözüme ulaştırırlar. Bu problemde durum daha farklıdır. İlk olarak elmaların azalmamış haline “x” değişkeni verildiğinde denklem kurmak için cüceye verilen elmalarında “x” değişkeni cinsinden yazılması gerekir. Diğer problemlerde bu sadece sayıdır. Bu problemde bir diğer zorlayıcı unsur ise cüce ile iki kere karşılaşılmasıdır. Bu durumda “x” değişkeni ile üç aşamalı işlem yapmayı gerektirir. Ancak Mehmet’in çözümünde görüldüğü gibi “x” değişkenini bir bilinmeyen olarak kullanmayı pekiştirdiği görülmektedir. Devamında denkleme ilişkin Mehmet yeni yapı oluşturmak suretiyle Oluşturma epsitemik eylemini sergilemiştir. Denklem ve dengeye ilişkin bir soyutlama süreci yaşadığı gözlenmiştir. Mehmet denklemde azalan hem de azalma miktarını “x” değişkeni cinsinden yazabilmiştir. Bunun yanısıra dengenin korunumu ilkelerini kullanarak denklemi çözmeyi başarmıştır.

Buse’nin bu süreci yardım alarak sonuca ulaştırdığı görülmektedir.

126B: Sepetin içindeki elma sayısına “x” dersek, bir cüce yarısının 2 fazlası istemiş yani,

“$\frac{x}{2}$ + 2”dir.

127B: Bunu da ikiye bölüp artı 2 yapmamız lazım.

128A: Bu yazmış olduğun denklem neyi gösteriyor bize?

129B: Cüceye verdiğimizi.

130A: Soruda ne istiyor?

131B: Elimizde kalanı istiyor. Bulamayız ki ama sonucu yok.

132A: Ama sen yaptın denklemi kurdun.

133B: Ama gerçek elma sayısı yok.

134A: Sen dedin ki ilk sepet dolduğunda elma sayısı, x'dir.

135B: Haa! Tamam, o zaman dediğiniz şekilde yazayım.

$$\frac{x}{2}+2$$

136A: Bu ne oldu peki?

137B: Bu 1.cücenin istediği,

$$\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}+2=2$$

138A: Peki x'den bunu çıkardığımızda ne oldu peki?

139B: Bizim elimizde kalan.

140A: Şimdi elimizde kalanı ne yapacağız?

141B: Elimizdeki kalanında yarısını çıkarıp 2 fazlasını vereceğiz.

142A: Yani aradaki işaret ne olmalı?

143B: Eksi olmalıdır.

146: Yardım alarak denklemi çözdü.

147: Terazi hatırlatıldı. Çözümde her iki tarafa eşit müdahale etmesi için ipucu verildi.

$$2\cdot\frac{x-\left(\frac{x}{2}+2\right)}{2}=4.2$$

Buse'nin çözümü incelendiğinde ilk kritik aşama olan matematiksel durumu anlama noktasında ufak zorlanmalar yaşasa da yardım aldığında bu durumu düzeltebilmiştir. İkinci aşamada ise kendisine bir çözüm stratejisi belirlemiştir. Görsellerde görüldüğü ve diyalog 138B'de ifade edildiği üzere birinci cüce ile karşılaştığı anı cebirsel formda ifade edebiliyor. 140A ifadesinde öğrencinin *kullanma* eylemine başlaması için bir fırsat veriliyor. Devamında ise öğrenci bu fırsatı değerlendirebiliyor ve Şekil 44'de görülen cebirsel forma ulaşıyor. Ancak ikinci bir cüce ile olan karşılama sürecini bağlamsal olarak doğru ifade edemediği görülüyor. Ancak denklemi bu ikinci cüce için tekrar yazamadığı görülüyor, onun yerine elde ettiği ilk denklemi bağlamda olduğu gibi yarıya bölerek "2" sayısını çıkardığı anlaşılıyor. Hatta denklemi çözerken Şekil 44'de görüldüğü gibi "-2" ifadesini denklemin karşı tarafına geçirdiği ve eşitliği "4" olarak yazdığı anlaşılıyor. Öğrenci yeni bir yapının oluşturulması için özgün bir dil geliştirme aşamasında zorlanmıştır. Üçüncü kritik aşamada Şekil 44'de görüldüğü üzere öğrenci cebirsel formu yeni yapının durumuna göre düzenlemede istenen başarıyı sağlayamamıştır. Denklemi bir matematksel durum olarak inşa edebiliyor. Bağlamsal durumdaki değişimi cebirsel formda göstererek yeni bir yapıyı oluşturabildiğini gösteriyor. Ancak öğrenci ikinci denklemi yazmada başarısız olmuştur. Yani özgün bir dil kullanımı yapamamıştır. Öğrencinin *kullanma* epistemik eylemine hâkim olduğu *oluşturma* eylemine geçişte bazı örnekler sunabilse de tam manasıyla *oluşturma* eylemini gerçekleştiremediği için bir soyutlamadan söz etmek doğru olmayacaktır.

Tablo 45

Öğrencilerin denge/ denklem kavramına ilişkin soyutlama durumları

Kavram	Öğrenci	Tanıma	Kullanma	Oluşturma
Dengeyi Açıklayabilme	İyi	+	+	+
	Orta	+	+	+
	Vasat	+	+	+
Denklem ile işlemler yapabilme	İyi	+	+	+
	Orta	+	+	+
	Vasat	+	+	-
Denklemi Manipüle Etme	İyi	+	+	+
	Orta	+	+	-
	Vasat	+	-	-

5. Bölüm

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

5.1. Sonuç ve Tartışma

Bu araştırmada cebir konusunun öğretiminde TÖY öğretim yönteminin karşılaştırıldığı ve öğrencilerin soyutlama süreçleri incelendiği için nicel ve nitel verilerden yararlanılmıştır. Dolayısıyla bu bölümde bulguların sonuçları ayrı başlıklar altında tartışılmıştır. Bu çalışmanın öğrencinin matematiksel bilgiyi öğrenmesi ve geliştirilmesine yönelik çıkarımlarda bulunarak cebir öğrenmeye yeni başlayan öğrencilerin öğrenmelerinin nasıl desteklenmesi gerektiği konusunda yapılacak araştırmalara katkıda bulunmaktadır. Analizin ürünü, dersin nasıl yapılacağını açıklayan planları yeni öğretim sürecinde ortaya çıkan deseni ayrıntılandıran bir açıklamadır (Cobb ve diğerleri, 2003). Araştırmada elde edilen sonuçların pratik ve teorik önemine ilerleyen sayfalarda yer verilmiştir.

Araştırmanın sonuçlarının daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle teori ile çerçeve arasındaki fark anlaşılmalıdır. Schoenfeld (2011), bir teori ile çerçeve arasındaki farkları basitleştirerek, "Bir çerçeve size neye bakacağınızı ve etkisinin ne olabileceğini söyler. Teori ise düşüncelerin nasıl bir araya geldiğini anlatır. Düşüncenin nasıl ve niçin çalıştığını ifade eder. Açıklamalara ve hatta davranış tahminlerine olanak tanır" (s.4) şeklinde açıklamaktadır. Bir teori, belirli bir alandaki fenomenin net bir resmini vermeyi ve öngörülen olaylar için açıklamalar getirmeyi amaçlar (Liehr & Smith, 1999). Ayrıca teori, incelenen olayları sistematik olarak açıklamak için kullanılabilecek iç içe geçmiş yapılar ve kavramlardan oluşur (Chinn & Kramer, 1999; Liehr & Smith, 1999). Diğer taraftan çerçeve, teorinin pratik üzerindeki etkisini göstermektedir (Liehr & Smith, 1999) ve teoriyi deneysel (emprik) ortamlarda sınamaktadır. Liehr & Smith (1999)'e göre, araştırmanın bulgularını kullanarak öngörülen olaylardaki tutarlılık veya tutarsızlıkları açıklamak için bir çerçeve kullanılabilir. Uygulamalar bir teoriyi test etmenin yoludur (Liehr & Smith, 1999).

Cebir öğrenme alanında yeni bir öğrenme teorisi olan TÖY'ler, belirli bir matematik içeriğinde mevcut araştırmalardan elde edilen teorik perspektifleri ve öğrencilerin matematiği nasıl öğrendiğiyle ilgili deneysel kanıtları birleştirir. Bu çalışmada, TÖY'ler kullanıldı aynı zamanda öğretim sürecinde ve pratikte nasıl uygulanabileceği araştırıldı.
Bu öğretme deneyinde, öğrencilerin değişken ve denklem hakkındaki yorumlarına dayanarak bir ÖY geliştirildi. ÖY'ler; koşullar, sınıf etkinliklerinin odağı, muhakeme biçimleri, öğrenci düşüncesini değiştiren temel mekanizmalar ve düşünme türü hakkında oluşturulmuştur. Öğrencilerin soyut bir kavram olan cebiri öğrenmeleri matematik kariyerlerinde zorlayıcı bir sürece sahiptir. Bu zorlayıcı düşünce karşısında öğrencilerin muhakemelerinin, alışkanlıklarının ve kavrama yönelik düşüncelerinin nasıl geliştiği RBC+C soyutlama teorisi ile sınanmaya çalışılmıştır. Uygulama sürecinden daha iyi sonuçlar almak, öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları soyut cebir kavramı düşüncesini su yüzüne çıkarmak ve öğrencileri cesaretlendirmek için TÖY'den faydalanılmıştır. TÖY'ler öğrencilerin soyut düşüncelerini daha görünür ve anlaşılır kılmaya yönelik olarak tasarlanmıştır. Bu soyutlama sürecinde cebir kavramıyla ilk defa karşılaşan öğrencilerin handikaplarını ortadan kaldırmak amaçlanmıştır. 6.sınıf düzeyinde yapılan görüşmelerde öğrenciler cebir kavramlarıyla, özellikle değişkenin kullanımı ile ilgili tatmin edici düzeyde soyutlama ortaya koyamamışlardır. İyi düzeyde olan öğrenciler bu soyutlamayı gerçekleştirebilmişlerdir. Bu bakımdan TÖY'nın öğrencilerin soyutlama sürecinde cesaretlendirici etkisinin olduğu söylenebilir.

Çalışmanın bu bölümünde, ortaokul öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama süreçlerini daha iyi analiz etmek amacıyla geliştirilen TÖY'ler, öğrencilerin soyutlama becerileri ve başarı testleri iki yıllık bir öğretim sürecinde yürütülen çalışmalar kapsamında tartışılmıştır. Çalışmaya ilişkin tartışmalar üç bölümde gerçekleştirilmiştir. Birinci bölümde öğrencilerin başarı testlerindeki gelişimi, ikinci bölümde TÖY gelişimi ve üçüncü bölümde ise öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama süreçlerinin RBC+C açısından değerlendirmesi ele alınmıştır. Alanda yapılan çalışmalar ile desteklenen tartışma bölümü araştırmacı tarafından yapılan öneriler ile sonlanmıştır.

5.1.1. Başarı testlerine yönelik tartışma. Bu çalışmada aynı öğrencilerin 6. ve 7. sınıf düzeyinde öğrencilerin cebirsel düşünme düzeyleri başarı testleri ile belirlenmeye çalışılmıştır. Bu bakımdan ilk alt probleme ilişkin "öğrencilerin uygulama öncesi ve sonrasında cebirsel düşünme düzeyleri nasıldır?" cevap aranmaya çalışılmıştır. Uygulama sürecinde cebirsel düşünmeyi ölçmek amacıyla CTT uygulanmıştır. Öğrencilerin zihnin cebirsel alışkanlıklarının gelişimini incelemek için ZCA testinden faydalanılmış ve son olarak çalışmada öğrencilerin öğrendikleri cebir kavramlarını günlük hayatta kullanabilme becerilerini incelemek amacıyla MOT kullanılmıştır. Sonuç olarak çalışmada üç başarı testi kullanılmıştır. Her bir testin amacı farklı olduğundan ve gelişim göstergeleri ayrı yorumlandığından meydana gelen gelişimler ayrı başlıklar altında tartışılmıştır.

5.1.1.1. Cebir tanı testinin tartışılması. CTT alanyazında öğrencilerin cebirin temel kavramlarına yönelik düşünme becerilerini ölçmek amacıyla geliştirilmiştir. Bu çalışmada cebir konusunun öğretiminde kullanılan TÖY'lere göre geliştirilen etkinliklerle yapılan öğretimin öğrenci başarısı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bu amaçla 6.sınıf ve 7. sınıftaki öğrencilere uygulama öncesinde ve sonrasında CTT uygulanmıştır. Her sınıf düzeyinde ön test ve son test puanları karşılaştırılmıştır.

Yapılan analizlerin sonucunda her iki sınıf düzeyinde de son test puanları lehine anlamlı fark bulunmuştur. Buna göre TÖY ile şekillendirilen öğretimin öğrencilerin başarılarını olumlu etkilediği görülmüştür. TÖY'nın oluşturulması ve kullanılması her zaman kavramsal analizin yapılması anlamına gelir (Von Glaserfeld, 1995). TÖY 'nin inşası, matematik eğitimi araştırmacılarının (Steffe, 2004), özellikle anlaşılması zor olan kavramsal alanlarla karşı karşıya kaldığı kritik bir iştir. Öğrencilerin cebir kavramlarını daha iyi anlamalarına yönelik olarak deneysel temelli öğrenme yörüngesinin amacı, öğrencilerin öğrenme süreçleri hakkında bilgiye ulaşmak ve bu bilgilerin desteklenmesini sağlamaktır. Öğrencilerin kavram oluştururken inşa ettiği düşünme süreçleri ÖY'nin başarılı olduğunun bir göstergesidir. Bu çalışmada TÖY ile şekillendirilen öğretimin benzer çalışmalarda olduğu gibi (Olive & Steffe, 2002; Tzur, 1999) etkili bir cebir öğretim modeli olarak kullanılabileceği sonucu elde edilmiştir.

5.1.1.2. Zihnin cebir alışkanlıkları testinin tartışılması. Zihnin Cebirsel Alışkanlıklarının yapma-tersini yapma, fonksiyonel kural oluşturma ve işlemlerden soyutlama bileşenleri bulunmaktadır. 6.sınıf ve 7.sınıf düzeyinde öğrencilerin ayrı ayrı gelişimleri incelenmiştir. Araştırma 2 yıl sürdüğü için her bir alışkanlık bu süreçte meydana gelen değişimler bütün olarak tartışılmıştır.

6. sınıf düzeyinde öğrencilerin araştırma öncesinde problemi anlama (Y1), verilen bağlamı anlama ve yorumlama becerileri (Y2) açısından düşük düzeyde başarılı olduğu, temsil kullanma (Y4) ve temsillerle işlem yapma becerisine (Y5) sahip olmadıkları literatürde belirlenmiştir (Sezer, 2019; Magiera ve diğerleri, 2013). Ayrıca bu düzeyde herhangi bir tersini yapma becerisi de beklenmemektedir, Eroğlu ve Tanışlı (2014) 6. sınıf öğrencileri ile yapmış oldukları çalışmada da benzer sonuçlara ulaşmışlardır. Uygulanma sonrasında kullanılan 6.sınıf ZCA testine verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin verilen bağlamı anlayabildikleri, problemdeki bağlama uygun temsiller yazabildikleri, temsiller arasında işlemler yapabildikleri ve ayrıca genel kuralı verilen bir örüntünün istenilen sayıda adımını yazarak örüntüyü inşa etmeleri suretiyle tersine yapma becerisine sahip oldukları belirlenmiştir. Çalışmanın 6. sınıf sürecinde uygulanan ders planlarının yapma-tersini yapma becerilerinin gelişimine olumlu yönde etkisi olduğu belirlenmiştir. Bu durum literatürle benzer sonuçlar vermektedir (Sezer, 2019; Magiera ve diğerleri, 2013). Ünveren Bilgiç (2018) problemi anlama da sıkıntı yaşamadıklarını ve çözüme daha kolay ulaştıklarını gözlemlemiştir.

7.sınıf düzeyinde ZCA testine verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun 6. sınıfta edindiği yapma-tersini yapma alışkanlıklarına halen sahip olduğu ve problem çözme sürecinde kullandıkları gözlemlenmiştir. İlgili alanyazında 7.sınıf düzeyinde öğrencilerin denklem çözerek bilinmeyenleri bulma (temsilleri yazmaya çalıştıkları) sorularında denklemi kurabildikleri ancak doğru cevaba ulaşamadıkları yani temsiller arası işlemler yapma becerilerinde (Y5) eksiklikleri olduğu bilinmektedir (Sezer, 2019). Denklemlerin çözümünde orantı kullanarak veya şekil çizerek problemi çözmeye çalıştıkları gözlenmiştir. Uygulanma sonrasında kullanılan 7. sınıf ZCA testine verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin bir önceki yıla göre "Y5: Temsiller arası işlemler yapma" becerilerinde iyi düzeyde gelişme olduğu gözlenmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük çoğunluğunun problemleri çözerken temsil kullandıkları (Y4) ve bu temsiller arasında işlemler yaparak (Y5) problemin çözümünde doğru sonuca ulaştıkları gözlenmiştir. Bu durum literatürle benzer sonuçlar vermektedir (Sezer, 2019; Eroğlu & Tanışlı, 2014).
Araştırmada iki eğitim öğretim yılı sonrasında öğrencilerin yapma-tersini yapma alışkanlığı becerileri genel olarak incelendiğinde, hazırlanan ders planlarının ZCA'dan yapma-tersini yapma alışkanlığı becerilerine olumlu yönde etki ettiği ve öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirdiği sonucuna varılmıştır. Çünkü öğrenciler uygulama öncesinde bir problemle karşılaştıklarında aritmetiksel işlemlerle problemin çözümüne başlıyor ve sonuca ulaşmaya çalışıyorken süreç içerisinde problem çözme becerilerinde temsil kullanma ve bu temsiller arasında işlemler yaparak çözüme ulaşmaya çalışma becerilerinin alışkanlık haline geldiği görülmüştür. Yapma alışkanlığı becerilerinden verilen bağlamı anlama ve yorumlama becerilerinin de bir problemin doğru çözümüne ulaşabilmek için ön şart olduğu sonucuna varılmıştır.

6. sınıf düzeyinde ZCA testi bulunan fonksiyonel kural oluşturma ile ilgili sorulara verilen cevaplar incelendiğinde, verilen örüntünün artış ya da azalış miktarına göre bir kural

belirleyebildikleri ve bu kurala göre istenilen adım kadar devam ettirebildikleri görülmüştür. Bu beceriler sonucunda da öğrencilerin örüntü arama ve kural belirlemede temel düzeyde işlemler yapabildiği belirlenmiştir. Çalışmada belirlenen bu beceriler, Magiera ve diğerleri (2017) öğretmen adaylarının fonksiyonel kural oluşturma (FKO) becerilerini inceledikleri araştırmasında buldukları sonuçlar ile benzerdir. 6. sınıf ZCA testine verilen cevaplar incelendiğinde öğrencilerin örüntü aramada, örüntüyü bozan sayıyı belirlemede ve verilen örüntüye ait genel kuralı temsil kullanarak yazmada başarılı oldukları görülmüştür. Alışkanlık haline gelme sürecinde Genel kuralı tanımlama becerilerini de edinmişlerdir.

7. sınıf ZCA testine verilen cevaplar incelendiğinde doğrusal ilişki içeren ifadelerin denklemlerini yazma ile ilgili sorularda 6. sınıfta edinmiş oldukları FKO becerilerini kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin büyük çoğunluğu önceki yılda öğrenmiş oldukları bir örüntüye ait genel kuralı belirleme süreçlerini doğrusal ilişki içeren ifadelere de uygulayarak denklemlerini doğru yazmışlardır. Öğrencilerin "Örüntünün genel kuralını bulunuz?" tarzında bir soru ile karşılaşmamalarına rağmen verilen bağlamda örüntü arama yoluna gitmeleri, kuralı tanımlayarak temsil kullanmaları sonucunda genel kuralı yazmaları FKO becerilerini alışkanlık haline getirdiklerini göstermektedir. Öğrencilerin FKO becerilerinde gelişme meydana geldiği sonucuna varılmıştır.

Araştırmada 2 yıl sonrasında öğrencilerin FKO becerilerini alışkanlık haline getirdikleri sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin doğrudan denklemi bulmaya çalışmaları, temsil kullanarak genel kuralı belirleme süreçlerinin alışkanlık haline geldiğini göstermektedir.

Öğrencilerin 6. sınıf ZCA testine verdikleri cevaplar incelendiğinde işlemlerden soyutlama alışkanlığı becerileri gözlenmemiştir. Aritmetik dizinin genel kuralını bulma sorularında yüksek düzeyde başarılı grupta bulunan öğrencilerin problemin çözümünde kısa yollar kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. 6.sınıf düzeyinde cebir konuları ve işlemleri de düşünülecek olursa işlemlerden soyutlama alışkanlığı becerilerinden sınıf genelinde bir gelişme gözlenmemesi olağan bir durum olarak görülebilir. Benzer şekilde Sezer (2019)'in doktora tez çalışmasında 6.sınıf düzeyinde işlemlerden soyutlama alışkanlığının gelişmediği gözlenmiştir.

7. sınıf ZCA testine verilen cevaplar incelendiğinde 6. Sınıf düzeyine oranla işlemlerden soyutlama alışkanlıklarının gelişme göstermiştir. Genel olarak işlemsel kısa yollar kullanmaya yatkın oldukları ve bu becerileri problem çözme süreçlerine uyguladıkları gözlenmiştir. Bu düzeydeki öğrencilerin gelişimi literatürle benzer sonuçlar göstermiştir (Sezer, 2019; Eroğlu ve Tanışlı, 2017; Magiera ve diğerleri, 2017). Sezer (2019)'un ortaokul öğrencileriyle yaptığı çalışmasında 7.sınıf düzeyinde öğrencilerin işlemlerden soyutlama göstergelerine sık rastlanmadığını ifade etmiştir, ancak bu çalışmada ise işlemlerden soyutlama becerilerini sık olmasa da bazı göstergeler ortaya koydukları bulunmuştur. Araştırmada 2 yıl sonrasında öğrencilerin işlemlerden soyutlama alışkanlığı becerilerinin genel olarak geliştiğini ifade etmek durumu tam açıklamamaktadır. Burada ifade edilen gelişme işlemsel kısa yollar kullanma ve bu kısa yolları doğrulama düzeyinde kalan sınırlı bir gelişmedir. Uygulama yapılan sınıf düzeyleri düşünüldüğünde bu sonucun çıkması beklenen bir düşüncedir. Cebirsel anlamda temel kavramları öğrenen öğrencilerin daha yoğun düşünce ürünü işlemleri genelleme becerilerine hemen ulaşabilmeleri beklenmemektedir.

Tablo 46

Öğrencilerde 6. ve 7.sınıf düzeyindeki ZCA Becerileri

Sınıf Düzeyi	Yapma	Tersine Yapma	Fonksiyonel Kural Oluşturma	İşlemlerden Soyutlama
6. sınıf	+	-	+	-
7. sınıf	+	+	+	-

Tablo 46 incelendiğinde öğrencilerin alışkanlıklarında olumlu yönde gelişme olduğu görülmektedir. Öğrencilerin ZCA'larındaki değişim oranı da başarı düzeyleri ile doğru orantılı olarak arttığı ifade edilebilir. Yani iyi kategoride yer alanlar daha fazla gelişim göstermiştir. Buna karşılık tüm düzeylerde olumlu sonuçlar alınmıştır.

6. sınıf düzeyinde problemlerin çözümüne temsil kullanma ve bu temsiller arasında işlemleri yapma konusunda isteksiz olan öğrencilerin süreç içerisinde ve özelliklede 7.sınıf düzeyinde problemlerin çözümüne yönelik farklı çözüm önerileri getirdikleri, farklı düşünme yollarını işe koştukları, problemin çözümünde farklı temsiller kullanmaya başladıkları görülmüştür. Bu sonuçlar Eroğlu ve Tanışlı (2017) ve Sezer (2019) çalışlarının sonuçları ile örtüşmektedir. Eroğlu ve Tanışlı (2017) 7. sınıf öğrencilerine ZCA'ları kazandırmaya yönelik bir öğretim etkinliğinin uygulanması sırasında öğrencilerin başlarda daha kısır bir düşünceye sahipken süreçte farklı düşünme yollarının farkına vardıklarını, farklı cebirsel düşünme yolları ortaya çıktığını, başlangıçta sözel olarak ifade ettikleri durumları matematiksel açıklamalara dönüştürdükleri sonucuna varmışlardır. Araştırmacılar uygun ve zengin öğrenme ortamları tasarlandığında öğrencilerde cebirsel alışkanlıkların geliştirilebileceğini ancak uzun süreç gerektiren çalışmalar yapılmasının gerekli olduğunu ifade etmişlerdir (Sezer, 2019; Ünveren Bilgiç ve Argün, 2018; Eroğlu ve Tanışlı, 2017).

5.1.1.3. Matematik okuryazarlık testinin tartışılması. Matematik okuryazarlık cebir testi, kavramların günlük hayata aktarabilme becerilerini ölçmek üzere tasarlanmıştır. MOT klasik başarı testinden farklı olarak öğrencilerin kavramları öğrenebilmelerinin yanı sıra kavramları kullanabilme ve kavramların özelliklerini kullanarak değişimler yapabilme yeteneklerini ölçmeye yöneliktir. Testte yer alan soru kökleri 15 yaşını tamamlamış öğrenciler için tasarlanmıştır (Gürbüz, 2019; OECD, 2013). Ancak 6 ve 7. Sınıf öğrencilerinin cebir konularını iyi düzeyde öğrenip öğrenmeme durumlarını belirlemek amacıyla bu sınıf düzeyinde kullanılmıştır. MEB (2013) tarafından ilköğretime yönelik günlük yaşamda gerekli olabilecek temel matematiksel bilgi ve becerilerin öğrencilere kazandırılma amacı matematik okuryazarlık soruları ile sağlanabilir (Steen ve diğerleri, 2007). Bununla birlikte, öğrencilerin matematik okuryazarlıklarını geliştirmekten ve ölçmekten sorumlu öğretmen sınıflarında etkili matematik okuryazarlık sorularının uygulanmasına ihtiyaç duyulduğu görülmektedir (Özgen, 2018). Çünkü öğretmenlerin PISA çalışması gibi büyük ölçekli bir anket tasarlaması çok zordur.

Bu çalışmada 7. sınıf düzeyinde cebirsel matematik okuryazarlık düzeyinin 6.sınıfa oranla istatistiki olarak anlamlı düzeyde daha iyi olduğu bulunmuştur. Uygulanan testin soru içerikleri cebir ile alakalı olduğu ve öğretim sürecinin konuları sarmal bir yapı ile birbiri üzerine konuları inşa ettiği için sonuç beklendiği gibidir. Ancak burada üzerinde durulması gereken husus öğrencilerin cebirsel matematik okuryazarlığın iki yıllık süreçte istatistiki olarak anlamlı bir gelişme göstermiş olmalarıdır. Çünkü soru maddeleri öğrencilerin sadece cebirsel kavram bilgilerini değil, bu bilgileri kullanarak işlem yapma ve düşünme becerilerini ölçmeye yöneliktir.

Öğrenciler PISA benzeri bazı problemleri çözdükleri zaman formüle eder, kullanır ve yorumlarlar (Dewantara, Zulkardi ve Darmawijoyo, 2015). Dewantara ve diğerleri (2015) çalışmasının sonuçlar değerlendirildiğinde öğrencilerin en yüksek başarıyı yorumlama görevinde %52 olduğunu göstermektedir. Bu çalışmada ise yorumlama görevlerinde üretici beceriler gerektiren sorularda 6. sınıf düzeyinde %34, 7.sınıf düzeyinde ise %61 başarı sağlandığı gözlenmiştir. Dewantara ve diğerleri (2015)'ın çalışmasında öğrencilerin formüle etme görevlerinde %39 başarı gösterdikleri görülmüştür. Bu çalışmada formüle etme gerektiren sorularda 6.sınıf düzeyinde %14, 7.sınıf düzeyinde ise %29 başarı gözlenmiştir. Çalışmada formüle etme gerektiren sorularda 6.sınıf düzeyinde istenen başarı elde edilmediği görülmüştür. 7.sınıf düzeyinde ise beklenen başarı elde edilmiş ancak benzer sınıf düzeyinde yapılan çalışmalarda (Dewantara ve diğerleri, 2015; Leibowitz, 2016) elde edilmediği görülmüştür. Sonuç olarak 6.sınıf düzeyinde öğrencilerin üretici becerilere sahip olduğu görülmüştür. 7.sınıf düzeyine geldiklerinde ise öğrencilerin formüle etme becerilerinin ilişkilendirici düzeyine ulaştıkları ancak yansıtıcı düzeye tam manasıyla sahip olmadıkları ifade edilebilir. Matematik okuryazarlık sorularının asıl hedef kitlesi de düşünüldüğünde sorulardan beklenen zorluk düzeyi ve akıl yürütme seviyesi açısından 8.sınıfın sonunda uygulanması gereklidir. Uygulama için seçilen matematik okuryazarlık soruları öğrencilerin cebir kariyerleri ve matematik dersi kapsamındaki cebir kazanımları göz önünde bulundurularak seçilmiştir. Bu sebeple öğrencilerin seviyelerinden çok da üst düzeyde bir akıl yürütme beklenmemiştir. Ancak değerlendirmeleri yaparken bu hususlarda göz önünde bulundurulmalıdır. Öğrencilerin cebir kavramlarını günlük hayatta kullanabilme yani öğrenmenin ötesinde kavramların özelliklerini bilerek bazı müdahaleler yapabilme durumlarının ölçülmeye çalışıldığı bu testte genel olarak başarılı sonuçlar alındığı söylenebilir. 6.sınıf kazanımlarının cebir kavramlarıyla dört işlem yapmayı gerektirdiği görülmektedir. Bu sebeple öğrencilerin üretici düzeyde işlem yapabilme potansiyeline sahip olmaları gerekmektedir. 7.sınıf kazanımlarının ise denklem kurmayı ve değişkenlerin birbiriyle ilişkilendirilmeyi içerdiği bilinmektedir. Bu sebeple kazanımlar doğrudan öğrencilerin ilişkilendirici beceri düzeyine yöneliktir.

Öğrencileri matematiksel süreç içerisinde bu tür problemlerle teşvik etmek için matematik okuryazarlığının sahip olması gereken temel yeteneğini tam olarak anlamalarını sağlamak kesinlikle önemlidir. Bu dönemde, PISA benzeri görevler potansiyel olarak bu yeteneklerin geliştirilmesine katkıda bulunabilir.

5.1.2. Tahmini öğrenme yörüngelerinin tartışılması. Bu çalışmada öğrencilerin TÖY'de yer alan değişken ve denklem hakkındaki yorumlarına dayanarak bir öğrenme yörüngesi gelişmiştir. Bu çalışmada oluşan ÖY, öğrencinin öğrenmesi ve geliştirmesi için pratik sonuçlara sahiptir. Bir kavram için etkinliğin odağı, muhakeme, öğrenci düşüncesinin değişimi ve düşünme tipi göz önünde bulundurularak yörüngeleri geliştirilmiştir. Bu bağlamda "öğrencilerin soyutlama süreçlerini daha iyi analiz etmek için geliştirilen tahmini öğrenme yörüngelerinin (learning trajectories) kavram öğrenmelerine etkisi nasıldır?" sorusuna cevap aranmaya çalışılmıştır.

6.sınıf öğrencilerinin "değişken kavramı" kapsamında değişkenleri yorumlaması, cebirsel ifadelerin anlamını kavraması ve denklemin anlamı ile ilişkilendirmesi araştırma sürecinde gelişmiştir. Değişkenin sabit bir sayı olmadığı bilgisi öğrencilerin değişkenin bir işlemde nasıl yorumlandığını anlamaları için temel bilgi haline gelmiştir. Öğrencilerin değişkeni anlama ve cebirsel ifade değişkenlerin değişimini anlama konusunda yaşadıkları kavram yanılgıları oluşturdukları denklemler ve yazılı çalışma kağıtları incelenerek belirlenmiştir.

Şekil 11'de görüldüğü gibi öğrencilerin değişkenlerle buluşturulması beş aşamada gerçekleşmiştir. TÖY; etiket, değişim, bilinen değer, bilinmeyen değer ve bağımlı- bağımsız olarak değişkenden oluşan beş aşamaya göre tasarlanmıştır. Bu sürecin özeti aşağıda yer alan Tablo 47 ve 48'de sunulmaktadır.

Tablo 47

TÖY'de değişken kavramı

	Etiket	Değişim	Bilinen Değer
Değişken Türü	Miktarın kaydını tutma	Değişken, belirli bir miktarın değişen değerlerini gösterir	Değişken için değer verme
Etkinlik	Toplam tutarı bulmak için benzer ve farklı terimlerin toplamını kullanma; c+s=T	Toplamı bulmak için kullanılabilecek bir cebirsel ifade yazma "4c + s"	Öğrencilerden ifadeyi kullanarak toplam maliyeti bulmalarını istemek "4c+s" "4.4+1"
Muhakeme	Bir nesneyi temsil etmek için harf kullanma;	Toplamı bir değişkenle sembolize etme ve bu fiyatın değişebileceğini kabul etme	Değişken için verilen bir değeri değiştirme

			Katsayının değişkenin değeri ile çarpıldığını anlama
Değişim	İfadenin farklı temsillerini kullanma	İfadenin herhangi bir mağazada kullanılabilecek bir formül olduğunu bilme	Değeri yerine konulduğunda, değişkenin kaybolduğu ve terimlerin birleştirildiği “tak ve tut” kuralını geliştirme
Düşünme Tipi	Benzer ve benzer olmayan terimlerin toplamı olarak ifade etme	Bir formülü modellemek için sembolleri anlamlı bir şekilde kullanma	Bir ifadeyi değerlendirmek için sembolleri anlamlı şekilde kullanma

Tablo 48

TÖY’de değişken kavramı

	Bilinmeyen Değer	Bağımlı- Bağımsız Değişken
Değişken Türü	Bilinmeyen için çözmek gereklidir	Bağımsız ve bağımlı değişken arasında bir ilişki vardır Giriş biliniyorsa, çıktı bulunabilir Çıktı biliniyorsa, giriş bulunabilir
Etkinlik	Denklemleri çözmek için dengeleme “t + 2 = 6” Değişkenin hesaplanması için dağıtma özelliğini öğrenme gereklidir “T = n(90 + 60)” “T = 90n + 60n”	Cebirsel bağıntı kullanarak bir durumu modellenme “Kumbarada 20 liran var ve her gün 5 lira alıyorsunuz. Ne zaman biter?” Karenin çevre formülünü incelenme “Ç = 4a”
Muhakeme	Eşittir işareti, her iki tarafın da aynı değere sahip olduğu anlamına gelir	Formül için sözel ifade kullanma Formül yazma “y = 5x + 20”

Değişim	Dağıtma özelliği, cebirsel bir ifadeyi eşdeğer bir ifadeye basitleştirmek için gereklidir. “2(x – 3) = 2x – 6”	“x” veya “y” için herhangi bir sayı seçmek ve bunu denkleme ekleme
Düşünme Tipi	Eşittir işareti iki cebirsel ifadenin “aynı” olduğu anlamına gelir	Örüntülerin formülü üzerinde çalışma Formül olarak cebirsel ifadeler arasındaki ilişki oluşturma ve ilişkiyi genelleştirme

Değişken kavramını ve öğrencilerin cebirsel ifade ve denklemler için kavramı nasıl öğrendiğini ayrıntılarıyla anlatan TÖY’nın çıktıları ifade edilmektedir.

7.sınıf düzeyinde “denklem/denge kavramı” konusu kapsamında cebirsel ifadenin anlamı ile denklemin anlamı arasındaki ilişkiyi bulma becerilerinin süreç içinde geliştiği görülmüştür. Ayrıca öğrencileri eşittir işaretinin bir işlemin sonucunu vermesinin yanı sıra bir denge unsuru olduğu anlaşılmıştır. Eşittir işaretine yönelik bu bilgiyi öğrenmeleri, öğrencilerin karmaşık problemlerdeki denge kavramını yorumlamalarına yardımcı olmuştur.

Çalışmada cevap aranan bir başka soruda “öğrencilerin soyutlama süreçlerini daha iyi analiz etmek için geliştirilen tahmini öğrenme yörüngelerinin (learning trajectories) kullanışlılığını etkileyen unsurlar nelerdir?” şeklindedir. Bu soruya yönelik cevaplar öğrenci, öğrenme ve teori başlıkları altında değerlendirilmiştir.

5.1.2.1. Öğrenci öğrenmesi için tartışma. Bir değişkeni etiket, değişen, bilinen, bilinmeyen ve bağımsız- bağımlı değişken olarak öğrenilmesinin cebirsel ifadelerin, denklemlerin ve cebirsel işlemlerin öğrenilmesiyle eş zamanlı ortaya konmuştur.

Öğrenciler değişkenlerle etiket olarak çalışmayı öğrendikten sonra artık değişkenin temsil edebileceği sayıları düşünmemişlerdir ve cebirsel ifadeleri kullanarak formül yazma becerisini elde etmişlerdir (Kaput, 1995). Ayrıca öğrenciler aritmetikten cebirsel düşünmeye geçiş sürecinde değişkeni bir etiket olarak veya değişen bir miktar olarak yorumlayabilmişlerdir.

Öğrencinin n'yi x ile değiştirme ihtiyacını hissetmesi ilgi çekicidir; bir sayıyı temsil eder, bu cevap "x" sembolünün olduğu okul matematiğinin bir eseri olabilir. Bunun için bir gerekçe göstermeyen öğrencilerin oranı (Knuth ve diğerleri, 2005) 6. sınıfta öğrencilerin çoğunluğu ya gerekçe gösteremedi ya da kendine özgü bir gerekçe sağlayamadılar. 6. sınıf öğrencilerine kıyasla, 7. sınıf öğrencilerinin, kelimenin tam anlamıyla sembolün birden fazla olabileceği gerçeğine odaklanan doğru bir gerekçeyle cevap verme olasılıkları daha yüksektir.

Başlangıçta öğrenciler eşittir işaretini bir eylem sembolü olarak görmüşlerdir: Eşittir işaretinin solunda bir şey hesaplamışlar ve buldukları cevabı işaretin sağına yerleştirmişlerdir (Carpenter, Franke ve Levi, 2003). TÖY öğrencilerin eşittir işaretini iki miktar arasındaki ilişkiyi kurmak için kullandığını belgelemiştir (Blanton, 2008). Bir değişkeni bilinmeyen bir değer olarak yorumladıklarında ortaya çıkmıştır. Bu bulguyu destekleyecek şekilde Van de Walle ve diğerleri (2011) öğrencilerin eşittir işaretini ve değişkenlerin anlamını bilmeden cebir denklemini nasıl çözdüklerini anlamayacakları belirtilmiştir.

Bu çalışma önceki araştırmaların sonuçlarını da desteklemektedir (Drijvers ve diğerleri, 2011), öğrencilerin fonksiyonları öğrenmek için fonksiyona ait temsilleri, bileşenleri ve temsiller ile bileşenler arasındaki ilişkiyi anlamaları gerektiğini ortaya koymuştur. Fonksiyonların öğrenilmesi cebirin ilk dört değişken kavramının anlaşılmasından sonra gerçekleşir. Bu nedenle bu çalışmanın sonuçları, öğrencilerin cebir öğrenmeleri için sadece değişen miktarları ve bilinmeyenleri değil, değişkenlerin de kullanılması gerektiği teorisini doğrular niteliktedir (Fey & Good, 1985; Usiskin, 1988).

Cebir öğretiminin başlangıcı için hazırlanan ÖY değişkenin algılanması sırasında ortaya çıkan düşünme türünü içerir. Bu çalışmada Kieran'ın (1989) bulgularına benzer şekilde öğrencilerin değişkenin bilinmeyen bir değer denklemin ise sistemik bir yapı, cebirsel denklemin sol ve sağ taraflarını denkliği kullanılarak çözüldükleri ortaya konulmuştur. Denklem çözümünde sistemik yapının kullanılması, öğrencilerin işlemler hakkında düşünmenin özelliklerini ve düşünme yollarını bilmesini, ilişkisel işaretlerin iki ifade arasındaki denkliği temsil ettiğini düşünmesini içermektedir (Carpenter ve diğerleri, 2003; Molina ve diğerleri, 2005). TÖY'de cebiri görsel olarak dikkate aldığı denklemin iki tarafı arasında doğrudan bağlantı kurduğu (Kirshner ve Awtry, 2004), değişkenleri etiket olarak yorumladığı gözlenmiştir. Bu görsel yapı, öğrencilerin denklemin sol tarafı ile sağ tarafının dengede olması gerektiğini anladıklarını göstermiştir. CTT'de "a + b = 43 ise a + b + 2 = …" bulunması bu düşünceyi destekleyen güzel bir örnektir.

Öğrenme sürecinin sonunda öğrencilerin cebirsel ifadeleri kullanarak doğrusal bir denklemi tek değişkenli olarak ifade ettikleri ve çözdükleri gözlenmiştir. Ayrıca cebirsel ifade kullanımının değişken yardımıyla doğrusal denklem çözme becerilerini desteklemek için öğretim sürecinde meydana gelen hataları en aza indirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Araştırma, öğrencilerin değişken yardımıyla doğrusal denklem çözme becerilerini desteklemek için öğretim sürecinde öğrencilerin günlük yaşamlarına yakın bağlamsal problemlerin kullanılabileceğini göstermiştir. Bu durum benzer araştırmaları destekler niteliktedir (Saraswati, Putri ve Somakim, 2016).

Cebir öğretiminde dinamik matematik yazılım desteğini kullanan Musan (2012) yazılım sayesinde öğrencilerin kavramsal anlama seviyelerinin yükseldiğini ve cebirsel olarak çözmekte zorlandıkları problemleri dahi çözebildiklerini ifade etmiştir. Benzer şekilde NLVM tarafından geliştirilen ve çalışmada kullanılan terazi etkinliğinin cebirin denge korunumu ilkesinin anlaşılmasında olumlu etkileri olduğu görülmüştür. Alanyazında öğretim ortamını destekleyen ve zenginleştiren materyallerin öğretim sürecini olumlu yönde etkilediği belirtilmiştir. Türkdoğan (2006), bilgisayar destekli matematik öğretiminin öğrencilerin matematiksel düşünmelerini sağlayarak genelleme yapma becerilerini kullanmalarına yardımcı olduğunu ifade etmiştir. Eşitlik ve denklem konusunun öğretiminde Nas (2008), bilgisayar destekli matematik öğretiminin daha az kavram yanılgısına sahip olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca Issakova (2007) da öğrencilerin sanal manipülatif kullanımının cebir öğrenimini kolaylaştırdığını belirtmiştir. Teknoloji destekli cebir öğretiminin öğrenci başarısını artırdığına yönelik benzer çalışmalar bulunmaktadır (Abdüsselam, 2006; Özgün-Koca, 2004; Turğut, 2010). Bu çalışmanın sonuçları TÖY ile cebir öğretimi yapan ve sonucunda öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin geliştiğini belirten Çağdaşer (2008)'in sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Ancak Gülpek (2006)'nın teknoloji destekli cebir öğretimi ile ilgili çalışmasında 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinde yeterli ilerlemenin olmadığı görülmüştür. Teknolojinin her zaman başarı getirmeyeceği gerçeği göz ardı edilmemelidir.

Bu çalışma, yetenekli öğrencilerin değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi tanımlayabildiğini ve denklemleri çözebildiğini göstermektedir. Öğrencilerin cebirsel ifade kullanma ve denklem oluşturma becerilerini genelleştirmek için verilen bilgileri koordine edebildikleri bunun yanı sıra doğrusal model kavramını daha soyut durumlarda yeni doğrusal model oluşturmak için kullanabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrenciler bağlamsal problemleri çözebilmek için seçtikleri yöntemleri daha tutarlı kullanmışlardır. Bu sonuç soyut düşünme sergileyen öğrencilerin veriyi genelleştirdiğini ve verilerin bazen temsili görünüm sergilediğini tespit eden önceki çalışmaların sonuçlarıyla ile uyumludur (Levins, 1999). Üst düzeyde cebirsel düşünme sergileyen öğrenciler, problemde verilmeyen başka bir deyişle probleme ilk bakıldığında görülmeyen kavram ve fikirleri, matematiksel düşünme sonucunda tespit etmiş; bu kavram ve fikirleri ilişkilendirip genelleştirmiştir. Bu durum öğrencilerin verilen problemler için akıl yürütme yeteneklerini kullanabildiklerini göstermiştir.

Düşük düzeyde cebirsel düşünme sergileyen öğrenciler ise bağlamsal problemleri çözmede aritmetik düşünmeyi daha fazla kullanmışlardır. Cebirsel kavramların özellikle bilinmeyen ve lineer denklemlerin anlaşılmamasından dolayı soruda verilen lineer örüntü özellikleri ile ilişki kurmada başarısız olmuşlardır. Bu sonuç, ortaokul öğrencilerinin düşüncesinin karakterizasyonuna ilişkin yapılan önceki çalışmanın sonuçlarıyla (Levins, 1999) ile tutarlıdır. Ayrıca bu sonuç düşük düzeyde cebirsel düşünme sergileyen öğrencilerin, verilerin görsel ve nicel yönlerini tutarlı bir şekilde kullanmasına rağmen, bağlamsal yönü ile çok az bağlantı kurabildiğini ya da hiç bağlantı kuramadığını göstermiştir.

5.1.2.2. Öğretim için tartışma. Bu çalışmayı öğretmen uygulamıştır. Bu süreçte öğretmenle yapılan görüşmeler ve dersin yapılandırılması süresince müfredat, tartışmaları teşvik edecek ve öğrencilerin matematiksel fikirleri paylaşırken kendilerini rahat hissedebilecekleri bir sınıf olarak inşa edilmeye çalışılmıştır. Bu sayede sınıf matematiksel düşünme ve öğrenme topluluğu oluşturacak şekilde yapılandırılmıştır (Cobb, Yackel ve Wood, 1992). Ek olarak, cebir öğretimi için hazırlanan TÖY öğrencilerin düşünme sistemini değiştiren temel mekanizmaları öğretme niyetlerini içerir. Bu mekanizmalar TÖY'deki bir sonraki aşamadan önce oluşması gerektiği düşünülen kavramlar için önemlidir. Örneğin değişken kavramı bilinmeden katsayı ve terim ilişkisine geçilmemiştir. Öğretmenler cebir öğretimine başlamak için TÖY kullanarak ve öğrenci düşüncesini değiştiren temel mekanizmalara odaklanarak, öğrenme örneklerini önceden tahmin edebilir, dersleri buna göre planlayabilir ve değiştirebilir.

Öğrencilere öğretilecek hedef davranışlar belirli olmasına rağmen (MEB, 2017; CCSSO, 2010) öğretmenlerin büyük matematiksel temaları bilmeleri ve bunları birbiriyle ilişki içerisinde sunmaları gerekir (Ma, 2010). Bununla birlikte bu çalışmanın sonuçları, bir değişken kavramını anlamada değişen miktarını anlamayla ilişkili olduğunu göstermektedir. Blanton (2008) ve Blanton & Kaput (2003), bilinmeyen ve bilinen miktarları değiştirerek, aritmetikten cebire geçişi öğretmeyi önermiştir. Bu çalışmanın sonuçları, bir değişken olarak etiket kavramının öğretimi ile başlayarak sırasıyla değişken bir miktar olarak bir değişkenin, bilinen bir değer olarak bir değişkenin ve bilinmeyen bir değer olarak bir değişkenin ve bağımsız- bağımlı değişkenin öğretimi şeklinde sürdürülmüştür. Bu şekilde ilerleyişin cebirsel ifadeler ve denklemlerin öğretimini kolaylaştırdığı ifade edilmektedir (Moss, 2014).

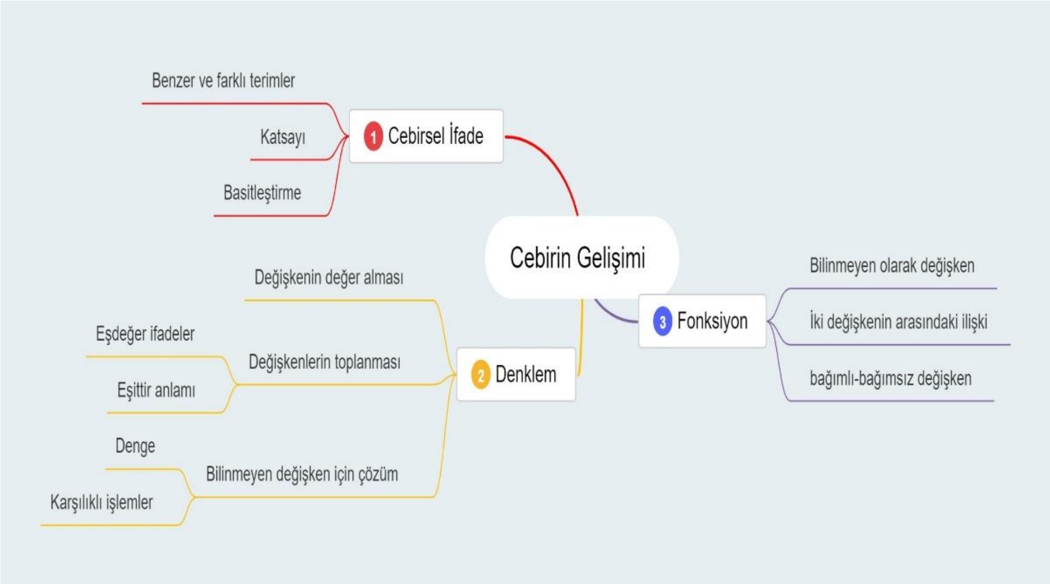
Öğrencilerin denklem kurmak ve çözmek için verilenleri öncelikle harfle, sonrasında ise cebirsel ifadelerle gösterebilmeleri denklem kurma- çözme süreci için önemli bir husustur. Kültürel ve tarihsel açıdan bakıldığında, kavramlar, insan emeğinin kültürel kodlamaları oldukları için kendiliğinden çok modlu olarak kabul edilebilir (Radford, 2014). Radford, kavramların çok modlu yapılarının duyusal ve maddi etkinliklerle oluştuğunu, düşünce ve bilinç nesneleri haline gelebilmeleri için harekete geçirilmesi gerektiğini savunmuştur. Bunun yanı sıra Radford (2014) öğrencilerin kavramlarla çalışmalarını kültürel ve tarihsel açıdan değerlendirerek duyuşsal bilişin önemli bir parçası olarak görmektedir.

5.1.2.3. Teorik açıdan tartışma. Bu öğretme deneyinde öğrenme sürecini incelenmek ve bu süreci destekleyici deneysel temelli teoriler geliştirmek amacıyla tasarım araştırması kullanılmıştır (diSessa & Cobb, 2004; Gravemeijer, 1994). Çalışmada ortaya çıkan öğrenme teorisi, cebir öğretiminin başlangıcında kullanılan değişken bir şemadır. Ortaya çıkan öğrenme teorisi etkileri aşağıdaki bölümde ele alınmıştır. Geliştirilen öğrenme teorisi, Kaput (1999)'un beş cebirsel düşünme biçimine alternatif bir bakış açısı getirilmiştir.

Cebirsel ifadeler ve denklemler bu sınıf düzeyinde (MEB, 2017) ifadeler, denklemler ve fonksiyonların ilerlemesi için düzenlenir. Başlangıçta, bu öğretim deneyi için geliştirilen öğretim birimi de ifadelere, denklemlere ve fonksiyonlara dayanıyordu. Bununla birlikte, ünite ilerledikçe, öğrencilerin değişkenlere yönelik yorumlarının verilen cebir görevlerini öğrenmelerini yönettiği görülmüştür. Aşağıdaki Şekil 45'de öğretim deneyinin nasıl geliştiği gösterilmektedir.

Şekil 45

Cebirsel ifade ve denklemin gelişimi

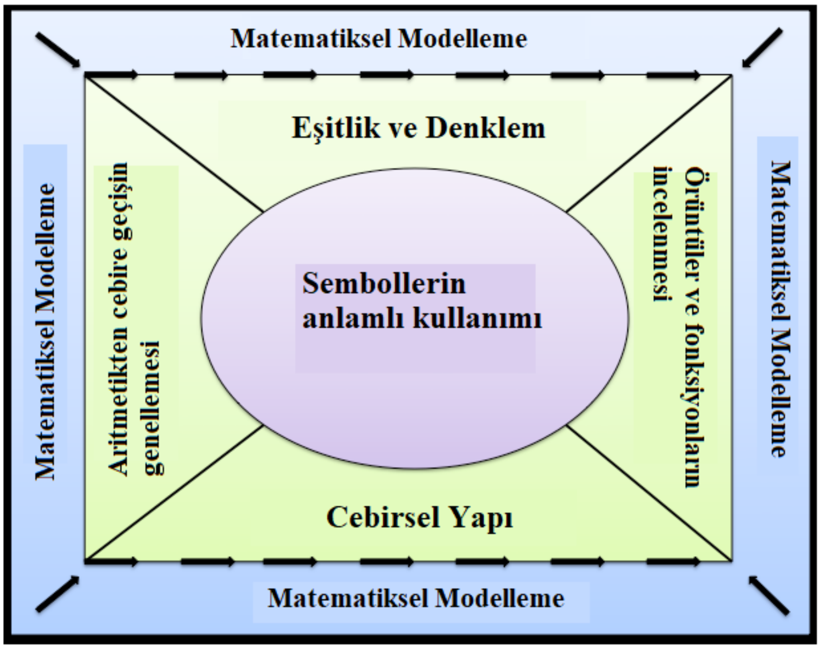


Cebir öğrenmeye yönelik değişken şeması, öğrencilerin farklı değişkenleri nasıl yorumladıklarını ve bu yorumlarının cebirsel ifadeleri, denklemleri ve fonksiyonları öğrenmelerine nasıl katkıda bulunduğunu anlayabilmek için önemlidir.

Öğretim deneyi sırasında beş cebirsel düşünme biçimi (Kaput, 1999) ortaya çıkmıştır. Bu cebirsel düşünme becerileri çalışmada ise cebirsel düşünme biçimleri iki düzeyde gerçekleşmiştir; ifadelerin ve denklemlerin öğrenilme ve sembollerin anlamlı kullanılma düzeyleri matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkmıştır. Aşağıdaki Şekil 46'da cebirsel düşünme için bir çerçeve ortaya koymaktadır.

Şekil 46

Yeni bir cebirsel düşünme çerçevesi



Cebirsel düşünme çerçevesi matematiksel modelleme sürecinden ortaya çıkan sembollerin anlamlı kullanımı temele alınarak oluşturulmuştur. Öğrenciler cebir problemini bağlam içerisine yerleştirerek gerçek durumları modellemişlerdir. Böylece öğrenciler matematiksel dili anlamışlardır. Ayrıca soyut temsillerin modellenmesi kavramsal olarak anlaşılmasını desteklemiştir (Earnest & Balti, 2008). Bu çerçevede, aritmetiğin cebire genelleştirilmesi, ifadeler ve denklemler, yapının kurulması, model ve fonksiyonların incelenmesi, matematiksel modelleme sürecinden doğar ve zamanla biçimlendirir. Ortaokul için cebirsel düşünme, aritmetiğin cebire genelleştirilmesi ile başlar ve örüntü ve fonksiyonların incelenmesi ile sonlanabilir. Cebirsel düşünme doğrusal değildir. Ayrı seviyelerde gerçekleşebilir. Aritmetik; ifade ve denklemlerin, cebirsel yapı çalışmalarının, örüntü ve fonksiyonların, eşitlik ve denklemin modellenmesi ile cebire genelleştirilir.

Eğitim araştırması, öğrenme yörüngelerini söz konusu kavramlarla ilgili parçalanmış ve çeşitli araştırma sonuçları koleksiyonundan formüle etmek, hassaslaştırmak ve ayarlamak için yinelemeye ihtiyaç duyar. Örneğin, Confrey'in "eş bölmeli öğrenme yörüngesi" formülasyonu 600 farklı araştırma parçasına dayanır (Confrey, 2010). Bu kadar çok sayıda araştırma sonucuna; öğrencilere belirli bir kavramı anlatan ve öğrencilerin bu kavrama yönelik işlemler yaptıran bir öğretim modelü oluşturmak için kapsamlı bir yaklaşım gerekmektedir. Bu yaklaşımın araştırma sonuçları arasında bağlantı kurarken, öğretim süreci bileşenlerini; yenilemesi, değiştirmesi ve iyileştirmesi beklenmektedir.

TÖY ve araştırmacı tarafından oluşturulan ders öğretim döngüsünü değerlendiren RBC+C teorik çerçevesi (Asiala ve diğerleri, 1996), teorik modellerden başlar, teorik sonuçlar çıkarır. RBC+C teorisinin amacı uygulamadan başlayarak sınıf ortamında öğretimin geliştirilmesidir. Teori, yinelenen uygulamanın bir yan ürünüdür ve amacı öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama süreçlerini incelenmektir. Çalışmada örgün bir öğrenme yörüngesi oluşturma süreci gösterilmiş ve sınıftaki öğretmenin uygulamayı gerçekleştirebildiği görülmüştür. Uygulamanın öğretmen tarafından başarılı bir şekilde yürütülmesi (Czarnocha, 2016), buna ek olarak araştırmanın cebir öğretimindeki kavramsal ilişkilerin açığa çıkmasına katkı sağladığı görülmüştür. Bu sonuç Battista (2004)'nın matematik eğitimindeki temel kavramlar ve kavramlar arası karmaşıklık düzeylerine vurgu yapan çalışmasının sonuçlarıyla paralellik arz etmektedir. Öğretim sürecinde öğrencilerin problemin çözümü için seçtikleri stratejileri uygularken yaşadıkları karışıklığın, problemin bağlamı ile ilişkili olduğu söylenebilir. Ancak cebirsel düşünmenin kapsamı düşünüldüğünde bu ilişkinin sıkı olmadığı görülmektedir (Clements ve Sarama, 2004). Bu durum cebirin doğası gereği soyut ve iç içe geçmiş bir düşünme süreci gerektirmesinden kaynaklı olabilir.

Çalışmada TÖY'de beklenen sonuçlar elde edilmiştir: öğrencilerin değişken kavramının özel koşullarını ve ilişkilerini belirleyebilme, farklı temsilleri araştırarak, varsayımlar üretebilme, onaylama ve / veya reddedebilme becerisi sergileme, eşittir işaretinin anlamını cebirsel formda açıklayabilme ve kullanımına yönelik beceri geliştirme, farklı cebirsel kavramları ve anlamları oluşturabilme şeklindedir. Bu sonuçlar dikkate alındığında cebir öğretimi için TÖY'nin öğretim sürecine teorik açıdan açıdan katkı sağladığı söylenebilir.

Öğrencilerin matematik derslerinde entelektüel gelişimlerine yönelik kullanılabilecek yaklaşımlar aşağıda sunulmaktadır (Kholodnaya, 2016);

• Didaktik durumları, öğrencilerin bilgilerini şekillendirmek için metafor ve duygusal bağlam dahilinde kullanabilirler (Brousseau, 1997);

• TÖY yaklaşımında matematiksel görevler seçilir ve bu görevlerin öğrenme sürecini nasıl etkilediği üzerine hipotez kurularak öğrenme ve kavramsallaştırmaya odaklanılır (TÖY-ÖY) (Simon & Tzur, 2004);

• RBC+C teorisi, öğrencilerin kendi deneyimlerine dayanarak kavramsal öğretimin temeli tanıma, kullanma ve oluşturma gibi epistemik eylemlerin kullanılmasını sağlar (Hershkowitz ve diğerleri, 2001; Bikner-Ahsbahs, 2004);

• Öğrencilerin yaratıcı düşüncelerini geliştirir (Burke & Williams, 2008);

• Öğrenme sürecinde "gerçekçi" durumları kullanabilir (RME) (Van den Heuvel- Panhuizen ve Drijvers, 2014). Bu çalışmada yukarıda listelenenler TÖY ve RBC+C odak noktası olarak belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar Kholodnaya (2016)'nın ifade ettiği gibi öğrencilerin entelektüel gelişimine olumlu katkılar yapmıştır.

Ayrıca, bu araştırmanın sonuçları literatürde yer alan çalışmaların teorik görüşler ile uyumludur (Elliot & Harackiewicz, 1996; Frielander & Tabach, 2001; NCTM, 2000; Pape & Tchoshanov, 2001; Klein, 2003).

5.1.3. Soyutlama sürecine ilişkin tartışma. Bu araştırmada soyutlama, öğrencilerin önceki matematiksel yapısını cebirsel yollarla dikey olarak yeniden düzenleme süreci olarak tanımlanmaktadır (Hershkowitz ve diğerleri, 2001; Bikner-Ahsbahs, 2004). Bu zihinsel sürecin doğal olarak doğrudan gözlenmesi beklenemez ancak bu süreç öğrenciler bağlamla uğraşırken gerçekleşebilir. Öğrencilerin bağlam içerisinde karşılaştıkları problemleri matematiksel bir yolla açıklamaları soyutlama süreçlerini analiz etmeyi kolaylaştırır. Bu bağlamda "öğrencilerin, değişken ve denklem kavramlarını soyutlama süreçleri nasıldır?" sorusuna cevap aranmaya çalışılmıştır.

Murray (2002) soyutlama düşüncesine dayalı olarak planlanan öğretimin öğrencilerin cebir kavramı anlayışını pozitif yönde etkilediği ve doğal olarak öğrenci başarısını arttırdığı sonucuna varmıştır. Çetin (2009)'e göre matematik öğretiminin temel amacı matematik kavramlarının anlamlı gelişimini desteklemektedir. Anlamlı gelişimi sağlayan öğretimi planlamanın yolu öğrencilerin zihinsel işlemlerinin incelenmesi ile mümkün olacaktır. Matematiksel düşünmeyi, matematiksel kavramların gelişimi olarak ele alan Freudenthal (1973), Tall (1995) ve Dreyfus (2002) matematiksel düşünmeyi süreç bakımından incelemektedir. Dreyfus (2002) soyutlama ve temsil etme süreçlerinin önemine vurguda bulunmuş ve matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların yapılandırılması aracılığıyla tanımlamıştır. Cebirsel anlayışın gelişimi popüler bir araştırma konusudur. Öğrencilerin cebir öğrenmede yaşadıkları en büyük zorluklar iyi bir şekilde belgelenmiş olsa da (Booth, 1989; Kieran, 1992; Kuchemann, 1998), bu konuya öğrencilerin muhakeme süreçlerine nispeten daha az dikkat gösterilmiştir. Sfard (1991, 1994)'ın ve Hershkowitz ve diğerleri (2001) matematiksel soyutlamanın geliştirilmesi konusundaki çalışmalarında öğrencilerin cebirsel muhakeme süreçlerini incelemiştir. Bu çalışmaların/ teorilerin ortak noktası matematiksel kavramları süreç odaklı ele alması ve süreçlerin yeniden yapılandırılmasıyla gelişen objeleri veya yapısal kavramları incelemesidir. Cebirsel düşünme sürecinde belirli matematiksel örnekler genellendiği ve genelleştirilmiş ifadeler kendi başına manipüle edilebilecek matematiksel nesne veya özellik olarak görülmeyi gerektirdiği için bu süreç öğrenciler oldukça zordur.

Cebir, üst düzey matematik için temel teşkil etsede, aritmetikten cebire geçiş öğrenciler için zordur (Herscovics & Linchevski, 1994; Humberstone & Reeve, 2008). Cebirsel anlayış, bilinmeyen değerleri, değişkenleri içeren miktarlar ve işlemler arasındaki ilişkileri göz önünde bulundurarak kesin değerlerin hesaplanmasının ötesine geçmeyi gerektirir. Dolayısıyla, sembolik soyutlama cebirsel anlayışın önemli bir bileşenidir (Arcavi, 2005). Birçok araştırmacı, fonksiyonlar bağlamında denklem çözme ve cebirsel ifadeleri değiştirme gibi cebirsel konular öğretmenin gerekliliğini savunur (Kieran, 2007). Öğrenciler genellikle fonksiyonları bir cevap elde etmek için verilen yemek tarifleri olarak görürler ve bu sebeple değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade etmek için fonksiyonları anlamada zorlanırlar (Kalchman & Koedinger, 2005).

Öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama sürecinin analizi sonucunda önemli noktalar ifade edilebilir. Bunlardan ilki öğrencilerin belli bir kavramı soyutlama süreçlerinin çok yönlü olmasıdır. Soyutlama süreçlerinin çok yönlü olması öğrencilerin çözüm stratejileri ile ilgilidir. Bu durum bize soyutlama süreci hakkında önemli dönütler vermektedir. Vasat düzeydeki öğrencilerin aritmetikten yararlanarak daha kolay ilerlemeleri, iyi düzeydeki öğrencilerin ise sadece cebirsel ifadeleri kullanarak çözümde aynı noktaya ulaşabilmeleri bunun örneğidir. Cebirsel forma daha fazla başvuran öğrencilerin soyutlama sürecinde bilişsel mekanizmaları diğerlerine nazaran daha etkili kullanabildiği görülmüştür. Bu çalışmanın sonucu alanyazında cebir kavramlarının soyutlanması ile ilgili yapılan çalışmaların sonuçlarıyla tutarlıdır (Özmantar & Monaghan, 2007; Sezgin Memnun, 2011).

6. sınıf düzeyinde öğrenciler soyutlama sürecinde sıklıkla kullanılan değişken, terim ve katsayı kavramlarını orijinal tanıma yakın seviyede ve öğrencilerin defterlerine not ettikleri gibi tanımlayabildikleri görülmüştür. Sonraki süreçlerde ise öğrenciler cebirsel ifadeleri yazarken zorlanmamışlardır. Kinzel (2000) cebir öğrenme perspektifinde öğrencilerin daha az aşina oldukları notasyonları yorumlamada ve kullanmada yetersiz olduklarını ortaya

koymuştur. Araştırmanın bu sonucu, Kinzel (2000)'in çalışmasının yanı sıra Soylu (2008), Knuth ve diğerleri (2005) ve Zazkis & Liljedahl (2002) tarafından yapılan çalışmaların sonuçları ile de benzerlik göstermektedir. Ancak ayrıştığı bir husus ise tüm öğrencilerin cebirsel notasyonları yazmada zorluk yaşamamalarına karşın kullanmada vasat öğrencilerin bazı zorluklar yaşadığını göstermektedir. Bu durumun alanyazından farklı sonuçlar vermesi TÖY'nin etkili olduğunun bir göstergesi olabilir.

Öğrencilere "a+b=b" ifadesinin eşitlik durumu sorgulandığı durumlarda, sayılar arasındaki ilişkilere odaklanamamaları, oluşturdukları küçük bilgi birimlerini daha kapsamlı bilgileri oluşturmak için koordine edememeleri ve bütünsel olarak düşünememeleri, soyutlama sürecinde yer alan bilişsel yapıları oluşturamamaları ile sonuçlanmaktadır. Bu yönüyle öğrencilerin belli bir kavramı soyutlayabilmelerinin belki de temel basamağı, ilgili kavramı anlama düzeylerinin yeterliliği ile ilişkilidir. Kieran (2004) tarafından yapılan çalışmalar araştırmanın bu sonucuna destek oluşturmaktadır. Bu problem durumunu sayıları veya cebirsel notasyonları ilişkilendirerek soyutlamaya ulaşanlar ise eski yapılardan faydalanarak çözüme ulaşmışlardır.

Araştırmada öğrencilerin deneyimleri onların "x" harfini değişken olarak tercih ettiklerini göstermiştir. Bu onların ders içi kazandığı bir alışkanlık olarak görülebilir. Değişken gösterimi için "x" harfinin kullanılması, bilinmeyen değer için değişken kullanmanın kolay olacağı iddasını destekler niteliktedir (Brizuela ve diğerleri, 2015). Değişken kullanımının öğrenciler tarafından ortaya konulan örnekleri kolaylaştıran bir araç (Kaput, 1991; Kaput, Blanton & Moreno, 2017) gibi davrandığının kanıtı, zorunlu olarak kavramsal anlayışların gerektirmeyen çalışmanın teorik konumu ile paralellik göstermektedir. Öğrencilerin sembolleri matematiksel süreçlere dahil etmeleriyle anlamlar ve semboller birlikte ortaya çıkabilir (Sfard, 2000) ve cebirsel formlar, fonksiyonlar zaman içinde değişebilir (Saxe, 2004; Saxe & Esmendo, 2005).

Genellemelerin geleneksel sembol sistemleri kullanılarak ifade edilmesi ve genellemelere yönelik eylemlerin gerçekleştirilmesi cebirin iki temel yönü olarak tanımlanmaktadır (Kaput 2008). Smith (2008), genelleştirmenin bu iki yönünü sırasıyla "temsili düşünme" ve "sembolik düşünme" gibi farklı düşünce türleriyle ilişkilendirmiştir (s. 133). "Temsili düşünme" ve "sembolik düşünme", biri fonksiyonlar ve ilişkiler varyasyonunun incelenmesi olmak üzere üç farklı cebir dizisine dâhil edilmiştir (Kaput 1999). Bu tür çalışmalarda incelenen genelleme türü: "bazı alanlardaki örneklerin sistematik çeşitliliğini tanımlamaktır" (s. 13) şeklinde belirtilebilir. Usiskin (1988) cebiri "ilişkileri tanımlamak ve analiz etmek için araçlar" olarak tanımlamıştır (s. 18). Büyüklükler arasındaki ilişkilerin açıklanmasını okul cebirinin önemli bir yönü olarak görmüştür. Değişkenleri, değişen miktarları olarak tanımlamıştır. Sistematik varyasyon ve model genellemesinin bu şekilde araştırılması, fonksiyonların çalışılmasına ve değişkenlerin argümanlar veya parametreler olarak kullanılmasına katkı sağlar. Değişkenler arasındaki bir deseni tanımlayan denklemler veya kurallar, ör. $y = 3x + 5$, fonksiyon dönüşümüne yol açar; $f\ (x) = 3x + 5$, ki burada "x" argüman ve "f" parametredir (Usiskin 1988, s. 14).

6. sınıf düzeyindeki başarı düzeyi vasat oalrak tanımlanan öğrencilerin araba sorusunda değişkeni kullanarak soyutlama yapabildikleri gözlenmiştir. Buna karşın öğrencilerin aynı sorunun ikinci maddesinde değişkenlerin katsayılarını manipüle ederek denklemin değerini değiştirmede araştırmacı desteğine ihtiyaç duydukları görülmüştür. Başarı düzeyi iyi olarak tanımlanan öğrencilerin ise değişkenlerin katasyılarını manipüle etmek için daha az destek aldımışlardır. Aynı öğrencilerin 7. sınıf düzeyinde değişken kullanımı ve manipülasyon yoluyla denklem değerinin değiştirilmesi hususunda zorlanmadıkları gözlenmiştir. İyi bir soyutlama süreci gerçekleşmiştir. Bu onların değişkeni pekiştirdiklerinin bir göstergesidir.

Öğrencilerin sayısal örüntülerden hareketle genel terimi cebirsel olarak ifade etmeye çalışmaları, soyutlama sürecinin en önemli parçalarından olan genelleme kavramı kullanmaya başladıklarını göstermiştir. Başka bir deyişle değişkenler arasındaki ilişkilere odaklanmayan öğrencilerin, elde ettikleri hipotezleri cebirsel ifade olarak göstermeyi düşünmedikleri yani genelleme yapmayı tercih etmedikleri söylenebilir. Elde edilen bu sonuç Yeşildere ve Akkoç (2011) tarafından yapılan çalışmanın sonuçları ile paralellik göstermektedir. Araştırmada öğrencilerin sorunun çözümünde denklem kullanmadığı, fakat yaptıkları açıklamalarda denklem kullanmadıklarının farkına vardığı, neden kullanmadıklarını açıkladığı ve hangi durumlarda denklem kullanmanın uygun olduğunu ifade ettikleri görülmüştür. Araştırmanın bu sonucu ise Asiala ve diğerleri (1996) ve Wachira ve diğerleri (2013) tarafından yapılan çalışmaların sonuçları ile benzerdir. Konser salonu, gauss toplamı ve elma bahçeleri bağlamsal problemlerinde başarı düzeyi vasat ve orta olan öğrencilerin aritmetik olarak düşünüp aritmetiksel ilişkiler kurarak kullanma epsitemik eylemine yönelik işlemler yaptığı gözlemlenmiştir. Başarı düzeyi iyi olanöğrenciler ise cebirsel düşünme örnekleri sergileyerek açıklama yapabilmişlerdir (sınav puanları sorusundaki gibi) bu da onların oluşturma yapmalarını ve soyutlama gerçekleştirmelerini kolaylaştırıcı bir unsur olmuştur.

Araştırmada dikkat çeken diğer bir durum ise, soyutlama süreçlerinin incelenmesinde öğrencilerin iletişim yeteneklerinin yeterli düzeyde olması gerekliliğidir. Burada ifade edilen iletişim iki yönlüdür. İlki öğrencilerin bağlamı anlamalarıdır ve çözüm için standart bir çözüm stratejisi geliştirmeleridir (OECD, 2012). İkincisi ise öğrencilerin çözümlerini açıklamalarıdır. Kendilerini ifade edememeleri gözlenmesi amaçlanan beceriler hakkında yetersiz yorumlara neden olmaktadır (Açıl, 2015). Örneğin sekizinci soruda bağlamsal bir problem durumunun (sihirli elma bahçesi ve prens) cebirsel olarak ifade edilmesi gereklidir. Çözüm süreci üç kritik aşamadan oluşur; bağlamın anlaşılması, çözüm stratejisinin belirlenmesi ve çözümün cebirsel olarak açıklanması olmak üzere üç aşamada oluşur. Araştırmaya katılan tüm öğrenciler birinci aşamayı gerçekleştirebilmiştir. İkinci aşamada başarı düzeyi iyi olan öğrenciler sorun yaşamazken başarı düzeyi vasat olan öğrencilerin araştırmacı desteğiyle kullanma epistemik eylemine ulaşabildikleri görülmüştür. Üçüncü aşamada ise öğrencilerin özgün dillerini geliştirerek oluşturma epistemik eylemini yani soyutlama sürecini tamamladıkları gözlenmiştir. Gauss toplamına ulaşmada bağlamsal olarak sorulan sorunun soyutlanmasında bulgulara göre üç kritik aşama olduğu bulunmuştur. Bu üç kritik aşamanın Stacey ve McGregor (2000) çalışmasında bir problemi cebir ile çözmenin temel mantığını anlamayı yorumladıkları üç aşama ile paralellik gösterdiği söylenebilir; "bilinmeyene verilen anlam, bir denklemin ne olduğu hakkında yorum yapma ve denklemleri çözmek için seçilen yöntemdir (s. 149).

Fujita ve diğerleri (2017) bir kavramı tanımlarken kritik ve kritik olmayan özellikleri kullanmanın gerekli olduğunu, öğrencilerin bu özelliklere takılmalarının hatalı kapsama ilişkisi kurmalarına neden olacağını belirtmişlerdir. Başarı düzeyi vasat olan öğrencilerin Gauss toplamının cebirsel formuna ulaşma sürecinde örüntünün tüm özelliklerini tanımışlar buna rağmen bu özellikleri genelleyemedikleri için kullanma eylemini gerçekleştirememiştir. Kullanma eylemi için, tanınan bilgi yapıları arasında anlamlı bir bağ kurmak gerekmektedir. Yeşildere (2006)'ya göre, kullanma eyleminde akıl yürütmenin etkisi büyüktür. Ancak öğrencilerin araştırmacı desteği yani ipucu aldıklarında kritik özellikleri kullanarak doğru soyutlama ilişkisi kurabildiği görülmüştür. Başarı düzeyi iyi olan öğrencilerin çok özel sonuçlar elde etmişlerdir. Sonuç olarak Gauss toplamına ilişkin bağlamsal durumu tüm öğrenciler yorumlamış ve doğru sonuca ulaşmıştırlar. Ayrıca öğrenciler, örüntünün aritmetik değerini, artış miktarını ve kuralını doğru ifade etmişlerdir. Bu kritik süreç onların kullanma epsitemik eylemi düzeyinde beceriler geliştirdiğinin göstergesidir. Buna ek olarak başarı düzeyi iyi olan öğrenciler kendilerine özgü bir dil geliştirerek cebirsel form ile aritmetik artış arasındaki ilişkiyi açıklayabilmişlerdir. Bu durum öğrencilerin açık şekilde oluşturma eylemini gerçekleştirdiğini ve soyutlama becerisine sahip olduğunu göstermektedir. Araştırmada ifade edilen soyutlama becerisi cebirin iki temel kavramı olan değişken ve denge kavramlarına yöneliktir. Cebirsel akıl yürütmenin gelişimi iki temel fikir, denklik ve değişken kavramlarının anlaşılmasına bağlıdır (Knuth ve diğerleri, 2005).

Başarı düzeyi vasat olan öğrenciler cebirsel ifadeleri sadeleştirirken güçlük yaşamışlar ancak araştırmacı desteğiyle sonuca ulaşabilmişlerdir. Sezgin Memnun (2011)'in çalışmasında başarılı öğrencilerin bile cebirde harflerin kullanımını algılarken ve cebirsel ifadeleri yorumlarken zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Bu araştırmada başarı düzeyi iyi ve orta olan öğrenciler cebirsel ifadeleri sadeleştirmede zorluk yaşamamışlardır.
Smith (2004)'e göre, öğrenciler matematiksel akıl yürütme becerilerini geliştirmek için geleneksel temsil modlarını öğrenmelidir; belirli cebirsel temsil sorunlarını önlemek için kullanılan TÖY'nin bu konuda etkili olduğu söylenebilir. Bireye özgü olan temsiller, temsil etme biçimleri ile geleneksel temsiller arasında kavramsal bir bağlantı kurabilmek için önemlidir.

Denklem kavramını soyutlamaya çalışan öğrencilerin sayılar ve cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri anlamlandırabildiği ve genelleyebildiği görülmüştür (Açıl, 2015). Fakat başarı düzeyi vasat olan öğrencilerin başlarda sayıların arasındaki ilişkileri ifade etmek için aritmetik düşünceyi veya derste gördüğü ezber bilgileri kullandığı fark edilmiştir. Bu bağlamda soyutlama sürecinde sayılar ve cebirsel ifadeler arasındaki ilişkileri kullanımının tek başına yeterli olmadığı ancak ilgili kavramın oluşturulmasına destek sağladığı söylenebilir. Nitekim araştırmanın bu sonucu, soyutlama sürecinde ilişkilendirmenin önemi ile ilgili çalışmaların sonuçları ile paralellik göstermektedir (Çetin ve Top, 2014; Kabael ve Tanışlı, 2010; Yılmaz, 2011). Kavramlar ve işlemler arasındaki ilişkilerin kurulması, önceden var olan bilgilerin yeni bilgilere aktarılması için gerekli olan özdeş unsurları tanımlar (Hiebert & Carpenter, 1992). Burada ifade edilen ilişkiler kelimesi RBC+C teorisinde ifade edilen tanıma-kullanma epistemik eylemleri arasındaki geçişi hatırlatmaktadır. Buna karşılık denklem kavramının inşa edilmesinde öğrencilerin 6. sınıf düzeyinde cebirsel ifade yazma pratiklerinin etkili olduğu söylenebilir. Çünkü bağlamsal durumun cebirsel ifadeye çevrilme becerisi 6. sınıf düzeyinde yapılan pratiklerle pekiştirilmiştir. Böylece öğrencilerin 7. sınıf düzeyinde denklem kurmadaki kritik süreçleri kolaylaşmıştır. 7. sınıf düzeyinde öğrencilerin sadece iki cebirsel ifadeyi dengelemeleri yani eşitlemeleri gerekmektedir. Bu durum öğrencilerin eşittir işaretinin sadece işlem sonucunu göstermek için kullanmadığını denge durumunu belirtmek için de kullanıldığını anlamalarını sağlamıştır. Kieran (1992) cebir alanı içerisinde, denklemler gibi yapısal gösterimleri üretme ve yorumlama şartlarından birisinin, eşittir işaretinin sol-sağ olarak adlandırılan eşitlik, simetrik ve geçişli karakteri olduğunu iddia etmiştir (s. 398). Ancak, öğrencilerin eşittir işaretini bir denklik sembolü (iki büyüklük arasındaki ilişkiyi ifade eden bir simge) olarak değil, aritmetik işlemin sonucunu veya cevabını açıklamak olarak görmelerini öneren çok sayıda çalışma vardır (Falkner, Levi ve Carpenter, 1999; Kieran 2014).

Öğrenciler denge kavramını ve matematiksel akıl yürütmeyi kullanırken matematikçiler gibi düşünür ve davranırlar (Gavin & Sheffield, 2015). Cebir, genelleştirilmiş aritmetik olarak genellemeyi ve soyutlamayı ifade etmenin sistematik bir yoludur, bunun yanı sıra denklem çözmünde benzer terimleri toplama ve ters işlemleri kullamada olduğu gibi sembollerin bir dönüşümüdür” (NRC 2001, s. 256). Bu duruma örnek olarak konser salonu sorusunda öğrencilerin denklem kurmakta zorlanmamaları gösterilebilir. Ancak öğrenciler alanyazında çok fazla ifade edilmeyen bir durum gerçekleştirmişlerdir. “R ve S” olarak verilen değişkenleri denklemde yerine yazarken ara bir formdan faydalanmışlardır. Bir nevi dönüşüm kullanımı söz konusu olmuştur. Öğrenciler öncelikle kendi dil kullanımlarına uygun olarak “x” değişkenine bağlı bir denklem yazmışlar sonrasında ise girdi-çıktı değerleri olarak “R ve S” değişkenlerini denklemde yerine yazmışlardır. Bu bakımdan öğrencilerin denge/denklem kurma işlemlerine ilişkin becerileri soyutladıkları ifade edilebilir. Kieran (1981), 12-13 yaşındaki öğrencilerin dengeyi tanımladığını, sembolün sol tarafında bir işlem içeren ve bunun sonucundaki sonuçları içeren örnekler verebildiğini ifade etmiştir. Bu araştırmaya katılan öğrenciler, McNeil & Alibali (2005)'in çalışmasındaki öğrencilerin denge kavramına yönelik ürettiği tanımlara benzer kavramlar bulmuştur.

Dönüşümsel yönler; geleneksel olarak cebir kurallarını destekleyen ya da denklemi öğrenci için anlamlı kılan genelleştirmelere yol açan kavramların araştırılmasından ziyade işlemlerin ve kuralların ilişkisinin incelenmesi haline gelmiştir. Araştırmalar, öğretme ve öğrenmeye yönelik bu kurala dayalı yaklaşımların, kuralları unutmaya (Kirshner & Awtry, 2004), sistematik olmayan hatalara (Booth, 1984) ve zayıf stratejik kararlara (kötü kararlara) yol açtığını göstermiştir.

Blanton & Kaput (2004), çok küçük öğrencilerin bile fonksiyonel düşünme yeteneğine sahip olduklarını belirtmiştir. Hunter (2010) ise ilköğretim öğrencilerinin kendi anlayışlarını geliştirmelerini sağlayan "dikkatle tasarlanmış görevler, özel pedagojik eylemler ve genişletilmiş söylem" den faydalandıklarını ifade etmiştir.

Modellerin mekânsal olarak görselleştirilmesi ve modelin dil tanımından sembolik gösterime veya kurala geçilmesi, cebir öğrenmek için daha kavramsal yaklaşımlarla ilişkilendirilmiştir. Yine de öğrencilerin örüntüleri diğer temsillerle bağdaştırabilmeleri ve genellemelere erişebilmeleri için gerekli bilişsel süreçler hakkında çok şey öğrenmesi gerekmektedir (Warren & Pierce, 2004). Literatürün kapsamlı bir derlemesinde, Presmeg (2006), görselleştirmenin "matematiksel soyutlama ve genelleştirmeyi teşvik etmek için nasıl kullanılabileceğini" sorusunun araştırılmasına duyulan ihtiyacı ortaya koymuştur (s. 227). Elma bahçesi sorusunda olduğu gibi genelleştirme görevlerinin tasarımının geometrik desenlere dayanarak nasıl görselleştirme yoluyla öğrencilerin işlevsel düşünme geliştirmelerini ve aynı işlevsel ilişkinin farklı temsillerini keşfetme yeteneklerini ortaya çıkardığı konusunda daha fazla fikir edinmeyi amaçlanmıştır. Tabach, Hershkowitz ve diğerleri (2012) cebirdeki görselleştirmenin kavramsallaştırılmasını kullanmaktadır. Fischbein (2001), görselleştirmenin eldeki verileri anlamlı yapılarda düzenlediğini ve çözümün analitik gelişimini yönlendiren önemli bir faktör olduğunu belirtmiştir. Tabach ve diğerleri (2012) ayrıca görselleştirmenin kendisinin "genel bir resmi çözümle sonuçlanan analitik sürecin kendisi olabileceğini" iddia etmiş ve haklı gösterilmesini sağlamıştır (s. 262).

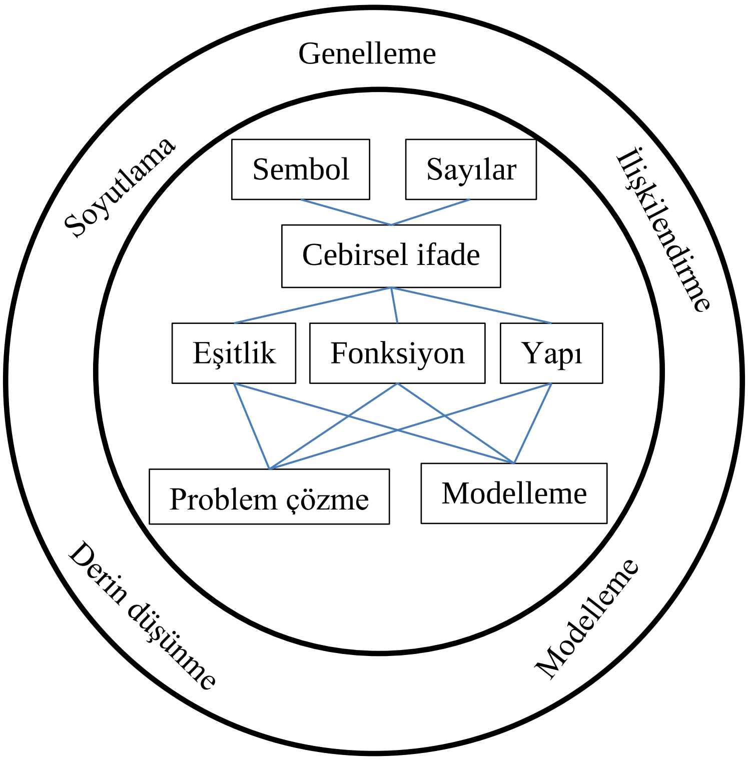
Taksi ve dolmuş fiyatlarının karşılaştırıldığı soruda ise tipik cebirsel modelleme örneğine yer verilmiştir. Öğrencilerin cebirsel ve aritmetik düşünme tarzları farklı olmasına rağmen soruları doğru çözdükleri görülmüştür.

5.1.3.1. Cebir üzerine bakış açıları. Cebirin yapısı birçok araştırmacı tarafından farklı şekillerde tanımlansada (Wagner & Kieran, 2018; Usiskin, 1988), bu araştırmada cebirin yapısı Şekil 47'de gösterildiği gibi oluşmuştur. Cebir, denklemleri çözmek, fonksiyonel ilişkileri analiz etmek, cebirsel ifadeler ve ilişkilerden oluşan temsili sistemin yapısını belirlemek için sembollerle ve sayılarla ilgilenen bir konudur. Bununla birlikte denklem çözme, fonksiyonel ilişkileri analiz etme ve yapıyı belirleme gibi faaliyetler okul cebirinin amacı değil, gerçek dünya olaylarının modellenmesi ve çeşitli durumlarla ilgili problemlerin çözümü için kullanılan araçlardır.

Ayrıca, cebir gerçekler ve kurallardan fazlasıdır. Cebir bir düşünce yöntemi ve dildir. Cebirdeki başarı aşağıdaki gibi en az beş çeşit matematiksel düşünme yeteneğine bağlıdır: Genelleme, soyutlama, derin düşünme, modelleme ve ilişkilendirme.

Şekil 47

Cebir'in yapısı



Cebirsel nesnelerin tümü veya kavramların birçoğu, genelleme sürecinin sonucudur. Genelleme, örüntü veya form bulma sürecidir. Cebir, verilen nesne kümesinde tanımlanan desenlerle başlar. Örneğin, değişmeli özellik sadece 1 + 2 = 2 + 1 ve 10 + 20 = 20 + 10 gibi birçok sayısal ifadede tanınmış bir kalıptır. Araştırmada öğrencilerin ifade ettiği gibi “$2n$ ile $n + 2$”yi karşılaştırılması sürecinde kendi yapılarını ve değer kümelerini oluşturdukları görülmüştür. Öğrenciler, çözüm için kritik değerin “2” sayısı olduğunu bulabilmişlerdir. Ayrıca öğrenciler, 6. sınıf düzeyinde kullanma epistemik eylemi, 7. sınıf düzeyinde ise oluşturma epistemik eylemleri sergilemişlerdir. Her fonksiyonel ilişki aynı zamanda bir örüntüdür. “$y = 2x$” doğrusal denklemi, her sıralı çift için önceki sayının ikinci sayısının yarısı olduğunu gösteren {(1,2), (2, 4), (3, 6), ...} kümesinin bir örüntüsüdür. Ancak, genelleme, Piaget’in kullandığı gibi “fiziksel soyutlama” olarak adlandırılan fiziksel bilgi üretir. Fiziksel soyutlama, matematiksel yapının çıkarıldığı yansıtıcı soyutlama ile tezat oluşturmaktadır.

Soyutlama, aritmetiğin aksine cebirsel sembollerle ilgilenir. Bir sembol, bağlamdan arındırılmış olması anlamında soyut bir nesnedir. Soyutlama, matematiksel nesneleri ve ilişkileri genelleştirme amacıyla çıkarımlar yapma sürecidir.
Cebirdeki soyutlama, geometri gibi diğer konulardaki soyutlamadan çok farklıdır. Cebirsel dilin nadiren somut bir anlamı var mı? Örneğin, 2 sayısı ve x değişkeni, görüntüye eşlik edecek somut bir anlama sahip değildir. Geometride, örneğin, çeşitli dörtgen şekillerden soyutlanmış bir nesne olarak bir dikdörtgen, dikdörtgenin şeklini tanımlamak için bir tür görüntüye sahiptir, özellikleri vardır. Cebirde, x sembolü böyle bir görüntü uyandırmaz. Bu sebeple, cebir öğrenme gelişim becerisi belirli düzeye ulaşmamış öğrenciler için ciddi bir engeldir.

Soyutlama somutluğun zıttı olmasına rağmen, göreceli bir anlam taşıdığı kabul edilmelidir. Örneğin, karşılaştırılan nesnelere bağlı olarak sayılar somut olduğu kadar soyuttur. Bu araştırmada öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlama yapabilme becerileri problem çözme ve problemi açıklama becerilerinin epistemik olarak analiz edilmesiyle ortaya çıkarılmıştır.

Derin düşünme, cebirdeki en önemli değişken kavramıdır. Değişken, değişen nicelikleri içine alan bir nesnedir. Değişken bir fonksiyonu anlamak için esastır. Derin düşünme, varsayımsal çıkarım ve değişim oranı değişkenlerin her biri için bağımlı eylemin izlenmesi ve kontrol edilmesi deneme ve yanılma stratejisi ile geliştirilebilir. Yunan döneminde, değişken nesneler matematiksel olarak temsil etmeye çalışmadıkları için bir değişken kavramı kullanılmamıştır (Lew, 2004). Sonuç olarak, Yunanistan'da cebirin olmadığı söylenebilir.

Cebirdeki en önemli faaliyet ise denklem çözme sürecidir. Denklemi çözme, bilinmeyen değer için yazılan ifadede istenen değişkenin değerini bulma işlemi olarak tanımlanabilir (Lew, 2004). Cebirde, bilinmeyen x değeri hayali bilinen bir değer olarak kabul edilir. Bir dizi gerekli koşulun sağlanması ile çözülebilir. Bilinmeyen değerin işletilebilmesi için, bilinmeyen değer x, bilinen olarak kabul edilir.

Geriye dönük çalışma stratejisi, nihai sonuç için bir dizi gerekli şartı bulmak ve problem koşullarında uygulanan işlemlerin ters işlemlerini uygulamak için bir süreç olduğu anlamında tipik bir derin düşünme örneğidir. Araştırmada kullanılan "büyülü elma bahçesi" sorusunda olduğu gibi, öğrencilerin problem durumunu cebirsel form ile durumu etmeden önce işlemsel sırayı geriye doğru derin düşünme sürecine tabi tutmaları gerekir. Bu süreç hem derin düşünme bakımından hemde soyutlama sürecinin analizi bakımından iyi fırsatlar sunar.

Modelleme, matematiksel ifadeleri kullanarak karmaşık durumu temsil etme durumu bir modelle araştırma ve durumdan sonuç çıkarma sürecidir. Ayrıca modelleme cebir kullanmak için bir nedendir. Örneğin, denklem öğretiminde, öğrencilerin durumu bir denklemle temsil etmesi ve denklemin en sade halini almasını sağlamak çözüm için önemlidir.

İlişkilendirme, cebir öğretiminde karmaşık durumları tablo veya diyagram kullanarak düzenlemek amacıyla araç geliştirmektir. Bunun yanı sıra ilişkilendirmenin problem çözme sürecinde problemin içerdiği bağımsız değişkenleri bulmak için bütünsel düşünmeyi teşvik ettiği söylenebilir. Verileri sıralayarak ve düzenleyerek oluşturulan bir tablodan problem durumu ve problemin koşulları arasındaki ilişki hakkında genel bilgi elde edilebilir. Bağımsız değişkenin, kendine karşılık gelen bağımlı değişken ile arasındaki ilişki bu tablo yardımıyla daha kolay elde edilebilir. İlişkilendirme becerisi özellikle eşittir işaretinin anlamının soyutlanmasında ve önceki bilgilere atıfta bulunarak cebirsel ifadelerin kullanımı neticesinde inşa edilen denklemler için oldukça önemlidir.

Öğrencilerin araşrımanın iki yıllık devam ettiği süreçte cebir kavramlarına yönelik çeşitli anlayışlar geliştirdiği görülmüştür. Öğrencilerin değişken kavramına ilişkin (1) değişkenin bir etiket veya nesneyi ifade edebileceği; (2) değişkenin belirsiz bir miktarı temsil edebileceği; (3) nicel ilişkilerin, alfabedeki harfler arasındaki sıradan ilişkiler yoluyla ifade edilebileceği ve (4) harflerin ve rakamların tek bir denklemde yer almaması gerektiği şeklinde anlayışlar geliştirdiği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin matematiksel bir nesne olarak değişken gösterimi içeren matematiksel bir ifade üzerinde hareket edebildikleri gözlemlenmiştir.

Küchemann (1978), öğrencilerin değişkenleri altı hiyerarşik seviye ile yorumladığını tespi etmiştir: Öğrenci yorumları; (1) değişkenin tek bir değer olarak bulunması, deneme ve yanılma yoluyla, (2) değişmezliğin kavramsal olarak görmezden gelinmesi, (3) değişkenin bir nesne veya etiket olarak kullanılması, (4) değişkenin belirli bir bilinmeyen olarak kullanılması, (5) değişkenin genelleştirilmiş bir sayı olarak kullanılması, (6) değişkenin fonksiyonel bir ilişki olarak kullanılması şeklindedir. Küchemann'ın belirlediği seviyelerin ilk üçü somut son üçü ise soyut değişkenler yorumlarını içerir. NCTM (2008) cebir konusunu altı ana konuya ayırmayı tavsiye etmiştir: semboller ve cebirsel ifadeler, doğrusal denklemler, ikinci dereceden denklemler, fonksiyonlar, polinomlar ve olasılıktır. NCTM, cebir tanımını birkaç kez güncellemiştir. 2000 yılında cebiri; fonksiyon, cebirsel sembol, matematiksel modelleme ve değişimi analiz etme kavramlarını ve bu kavramlara yönelik becerilere göre organize etmişlerdir. Bunun yanı sıra NCTM, cebir standartlarının dördünü cebirdeki soyutlama değişkenin anlamını göz önünde bulundurarak düzenlemiştir. Birinci standart, öğrencilerin değişkenleri ilişkili miktarlar olarak anlamalarına ve fonksiyonel düşünmeyi geliştirmeye odaklanmıştır. İkinci standart, cebirsel değişkenleri temsil etmek için kullanılan sembollerin anlaşılmasına vurgu yapmaktadır. Üçüncü standart, nicel (hem fonksiyonel hem de fonksiyonel olmayan) ilişkileri temsil etmek için matematiksel modellemenin öğrenilmesine vurgu yapmıştır. Dördüncü standart, cebirdeki değişim oranlarının öğretilmesine odaklanmaktadır. Bu standartlar Küchemann (1978)'ın dördüncü, beşinci ve altıncı değişken yorumlama seviyeleri ile ilişkilendirilebilir. (NCTM, 2008) cebiri, "öğrencilerin matematiksel durumları genelleştirmelerini, modellemelerini ve analiz etmelerini sağlayan bir düşünce tarzı, bir dizi kavram ve beceri" olarak tanımladığı görülmüştür. Bu araştırmada benzer kavramlar soyutlanırken Küchemann (1978) ile NCTM standartlarının harmanlandığı görülmektedir.

Araştırmada son olarak bu bağlamda "öğrencilerin cebiri soyutlama sürecinin altıncı sınıftan yedinci sınıfa gelişimleri nasıl gerçekleşmektedir?" sorusuna cevap aranmıştır. Öğrencilerin iki yıllık bir süreçte denge/denklem kavramına ilişkin anlayış geliştirirken zorlandığı görülmüştür. Benzer şekilde Kieran (1992), Howe (2005) ve Carraher ve Schliemann (2007) öğrencilerin cebirin yapısal özelliklerini öğrenirken zorlandıklarını belirtmişlerdir. Araştırmada öğrencilerin çoğu cebirsel ifadeler ve denklemler arasındaki farkları tanımakta başarısız olmuştur. Ayrıca öğrenciler denklemi bir nesneler kümesi olarak tanımaktan ziyade tek bir nesne olarak kavramlaştırmada zorlanmıştır. Eşittir işaretinin cebir bağlamında; işlem sonucunu belirtmek amacıyla kullanımı ile denge durumunu göstermek için kullanımının öğrenciler tarafından karıştırıldığı belirlenmiştir. Bu yapısal zorluklar genellikle öğrencilerin sayısal ilişkileri genelleştirmeleri için cebirden faydalanmalarına engel olur.

Daha önce yapılan araştırmalarda birçok öğrencinin eşittir işaretine ilişkin işlemsel bir görüşü olduğu belirtilmiştir (Falkner ve diğerleri, 1999; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005; Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). Araştırmada öğrencilerin sembol hakkındaki görüşlerinin matematiksel olarak daha sofistike hale geldiği görülmüştür (eşittir işaretini ortaokulda, iki nicelik arasında bir ilişki olarak görme). Ayrıca öğrencilerin 6. ve 7. sınıf seviyelerinde eşittir işaretine yönelik daha az karmaşık görüşler sergiledikleri görülmüştür.

Eşittir işaretine yönelik ilişkisel görüşe sahip öğrencilerin, matematiksel eşdeğerlik fikrinin kullanılmasını gerektiren problemlerin çözümlerinde alternatif görüşlere sahip olan akranlarından daha iyi performans gösterdiği görülmüştür. Ortaokul öğrencilerinin eşittir işareti hakkındaki görüşlerinin, cebirsel denklemleri ve basit seviyede sözel cebir problemleri (hangi sayının iki katının 3 fazlası gibi problemler) çözmedeki başarılarında da rol oynamaktadır (Knuth ve diğerleri, 2005). Denklik anlayışının cebirsel akıl yürütme ve cebirsel düşünce geliştirmenin önemli bir yönü olduğunu ifade edebiliriz. Sonuç olarak, öğrencilerin cebir hazırlıkları ve nihai başarıları, matematiksel denklik anlayışlarına ve eşittir işaretini anlama çabalarına bağlı olabilir.

Bununla birlikte, denklik öğrencilerin erken ilkokul eğitimi sırasında geleneksel olarak ortaya konan bir kavramdır. Öğretmenlerin çoğu ilkokul eğitimi sırasında öğrenciler denklik kavramıyla tanıştığı zaman, sürecin incelenmesinin gerekli olmadığını düşünmektedir (Knuth ve diğerleri, 2005). Alanyazında eşittir işareti için ilişkisel bir görüş geliştirmeye çalışılmıştır (Carpenter ve diğerleri, 2003). Ancak ilkokulun ilerleyen sınıflarında bu kavrama daha az dikkat edilmektedir. Bu eksiklik birçok öğrencinin ortaokulda ve hatta üniversitede eşittir işaretini anlamının yetersiz olduğunu açıklayabilir (McNeil ve Alibali, 2005). Ortaokul müfredat materyallerinin analizleri, eşittir işaretinin ilişkisel kullanımlarının işlemsel kullanımlardan daha az yaygın olduğunu göstermektedir (McNeil ve diğerleri, 2004).

Öğrencilerin ifadelerine dayanarak bağlamsal problemlerin ya da denklemlerin çözümünde ortaya çıkan işlemsel zorlukların kendiliğinden çözülemeyeceğini söylenebilir. Cebirsel kavramlar modeller aracılığıyla (sadece cebirsel modeller değil) soyutlanmak isteniyorsa modellemenin ana bileşenleri göz önünde bulundurulmalıdır. Modellemenin iki temel bileşeni mevcuttur. Bunlardan biri, soyut durumlarda nesneler ve işlemlerin somut olarak ifade edilmesi için yapılan çeviridir. Cebirsel ifadelerin karşılaştırılmasını ve dengenin korunumunu göstermek için terazi somut bir örnektir. Araştırmada kullanılan terazi sorusunda; terazinin kefelerinin denge durumu denklemde eşitliğin her iki tarafının durumunu somut olarak göstermiştir. Başka bir deyişle terazi modelinde iki kefenin eşitliği, iki cebirsel ifadenin denkliğine karşılık gelmiştir. Sorunların somut düzeyde çözümü hakkındaki bilgilerden yola çıkarak, daha soyut seviyede bir çözüm için kullanılacak işlemleri başlatmada fayda sağladığı ve soyutlama için başlangıç olacağı söylenebilir.

Modellemenin ikinci bileşeni, modele bağlı yeni nesnelerin ve işlemlerin somut içeriğe ait anlamların detaylarından "ayrılmasıdır". Soyutlamanın tanımında olduğu gibi nesnelerin özelliklerinden bağımsız düşünebilme durumudur. Bu ikinci bileşen, her duruma uygun genellenmiş bir denklem yazımı olabilir.

Bu nedenle, çevirinin iki yönlü bir süreç olması gerektiği söylenebilir. Böylelikle soyut seviyedeki işlemleri somut seviyedeki işlemlerle tanımlamak mümkün olur. Cebirin önemli özelliklerinden biri olguları modellemedeki gücüdür (Driscoll, 1999; Baki, 2006). Bu yüzden modellemeleri kullanarak genel formüle ulaşmanın cebirsel düşünmenin önemli göstergelerinden biri olduğu söylenebilir.

Öğrencileri denklem çözerken cebirsel kuralları kullanmaları yani bir denklemde eşitliğin her iki tarafında ters işlem yapmaları yerine dengeyi korumaya çalışmaları oldukça önemlidir. Araştırmada öğrencilerin eşitliğin korunumuna ilişkin tecrübe kazandıktan sonra çözüm için kendi kısa yollarını geliştirdikleri görülmüştür. Bulgularda ifade edildiği gibi öğrenciler eşitliği bir köprü metaforunu açıklamışlar ve köprüden geçen sayı veya değişkenin işaret değiştireceğini belirtmişlerdir.

Öğrencilerin 6. sınıf düzeyindeyken 7. sınıf düzeyine göre soruların çözümünde aritmetik düşünmeye daha fazla yöneldikleri görülmüştür. 7.sınıf düzeyinde ise öğrencilerin soruların çözümünde cebirsel düşünmeyi daha fazla kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel düşünmede olgunluk kazandıkları için beklenen bir souç olduğu söylenebilir. Bu çalışmada öğrencilerin sınıf düzeylerine göre problem çözümünde başvurdukları düşünme eylemleriyle paralel bir sonuç Akkan ve diğerleri (2012) tarafından ifade edilmiştir. Kieran (1992), Linchevski ve Hersovics (1996)'de bu yaş grubundaki ögrencilerin çözüm süreçlerinin genel olarak aritmetik özellikler içerdiğini belirtmişlerdir. Linchevski (1995) de 7. sınıf düzeyindeki ögrencilerin aritmetik- cebir özellikleri içeren çözümleri daha çok kullandığını ifade etmiştir. Araştırmalar bu durumu öğrencilerin bilinmeyen olarak değişken kavramı veya cebirsel ifade ilişkilerin yapısal yönünü kavramadaki yetersizliği ile açıklamaktadır (Kieran, 1992; Stacey & MacGregor, 2000; Van Amerom, 2002). 6 ile 7. sınıf ögrencileri arasında aritmetikten cebire geçiş diğer sınıflara göre daha hızlı olmaktadır (Akkan ve diğerleri, 2012). Bu çalışmada benzer bir hızlı geçiş gözlenmiştir.

Yeni kavramların inşasına öncülük etmek için modelden ayrılma süreçlerinin geliştirilmesi ve öğretim müdahalesi gereklidir (Filloy ve Rojano, 1989). Bu duruma benzer şekilde öğrencilerin RBC+C teorisinde olduğu gibi kullanma eylemine başlaması için ihtiyaç duydukları ipucunun verilmesi (Dreyfus, 2007) ve öğrencilerin cesaretlendirilmesi gereklidir. Bulgularda ipuçları verildiğinde öğrencilerin kullanma epistemik eylemini başlattıkları gözlenmiştir.

Bağlamsal problem durumunun matematiksel model üzerinde bir eyleme aktarılması, soyutlama sürecinde matematiksel model ile problem durumu arasındaki boşlukların kapatılmasını sağlar. Bu seviyedeki etkileşimlerin analizleri sayesinde cebirsel dil ediniminin ilk aşamalarında öğrencileri derin düşünmeye yönlendirmek önemlidir (Filloy & Rojano, 1989). Öğrencilerin süreç içerisinde derin düşünmeleri onların kullanma epistemik eylemini sergilediklerinin açık bir göstergesidir.

Cebir öğrenimine başlayan öğrenciler, bu konuyu öğrenmek için gerekli genel bir temel anlayışlar repertuarı oluşturan bazı öğrenme zorluklarıyla karşı karşıya kalırlar. Birincisi, cebirin öğrencilerden soyut muhakemelerle problem çözme ile meşgul olmalarını beklenmektedir (Vogel, 2008). Araştırmalar cebirin soyut doğasının aritmetik üzerindeki zorluğunu arttırdığını göstermiştir (Carraher & Schliemann, 2007; Howe, 2005; Kieran, 1989). Cebir kavramının inşası için soyutluk konusundaki deneyimsizlik, öğrencilerin cebirsel nesneler arasındaki ilişkilerini yönetme becerisini doğrudan etkilemektedir (Kieran, 1992; Vogel, 2008).

Cebirin öğrenilmesi, öğrencilerin önceki deneyimlerine tamamen yabancı olan matematiksel sembollerin dilini öğrenmelerini gerektirir (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001). Bu dilin öğretimi için açıklanan ve kullanılan birçok yol, öğrencilerin cebirsel sembolleri gerçek anlamlarına bağlamasını engeller (Blanco & Garrote, 2007). Bazı durumlarda öğrenciler sembollerin herhangi bir anlam ifade edilmediğinden habersizdir (Kuchemann, 1978). Ancak bazı durumlarda sembolün anlamının var olduğunu bilmelerine rağmen sınırlı anlayışları öğrencilerin sembollere anlam yüklemelerini engeller veya sembollere hatalı anlamlar yükelemelerine sebep olur (Kuchemann, 1978).

Bu cebirsel anlayışın gelişiminde; soyut akıl yürütmenin, dil öğreniminin ve matematiksel yapının genellikle öğrenciler için zor olduğu söylenebilir (Rakes ve diğerleri, 2010).

5.1.4. Cebirsel zihin alışkanlıkları ve soyutlama süreçlerinin arasındaki ilişkinin tartışılması. Driscoll (1999) bazı durumlarda öğrencilerin problem üzerinde çalışırken kullandıkları gösterim şeklini problem durumu ile ilişkilendirmeyi ihmal ettiklerini, dolayısıyla problem durumu ile çelişen sonuçlara ulaştıklarını ifade etmektedir. Problemler öğrencileri bir veya daha fazla düşünme becerisini kullanmaları için cesaretlendirmelidir (Driscoll,1999; Driscoll & Moyer, 2001). Cebirin zihin alışkanlıkları dikkate alındığında üç aşamasının açıklanması yerinde olacaktır.

Yapma-Tersine yapma: Etkili cebirsel düşünme matematiksel süreçleri tersinden işletmeyi de gerektirir (Driscoll, 1999; Driscoll & Moyer, 2001). Cebirsel düşünebilmek belli bir amaca ulaşmak için belli bir işlem yolunu kullanmakla birlikte, cevaptan başlangıç noktasına ulaşabilmek için takip edilen bu işlem yolunun derinlemesine anlaşılması demektir. Örneğin, bu çalışmada büyülü bahçe sorusunda olduğu gibi öğrencilerin elde kalan iki elmadan hareketle denklemin kurulmasına yönelik çalışmalar yapmışlardır.

Fonksiyonları temsil eden kuralları bulma: Cebirsel düşünmede durumları analiz edebilmek için ilişkileri tanımlama ve verileri organize etme yeteneği gereklidir. Bağlamsal bir problem durumundan matematiksel bir denklemin inşa edilme süreci buna iyi bir örnektir. Örnek bir soru verilmesi gerekirse, konser salonunda sıra ve koltuk sayılarının fonksiyonel bir denklem olarak inşa etmesi bu aşamadaki cebirsel zihin alışkanlığına örnek gösterilebilir.

İşlemlerden soyutlama: Cebirin en belirgin özelliklerinden biri onun soyut olmasıdır. Cebirsel düşünme belli sayıların dışında hesaplamalar hakkında düşünebilmeyi gerektirir ki burada hesaplamalardan bağımsızlaşarak kendi yapısının özelliklerine soyutlama söz konusudur. Öğrencilerin merdiven sorusunda 1+2+…+100 toplamını daha kolay bulmak için sayıları toplamları 101 olacak şekilde sayı çiftlerini gruplamları ve böylece sonuca ulaşmaları soyutlamaya örnek olarak gösterilebilir.

Öğrenciler çözüm sürecinde kendi yöntemini seçerken özgür olmalıdır (Driscoll,1999; Driscoll & Moyer, 2001). Öğrencilerin 6. sınıf düzeyinde sadece yapma ve fonksiyonel kural oluşturma zihinsel cebir alışkanlıklarını sergiledikleri görülmüştür. Öğrenciler 7. sınıf düzeyine geldiklerinde ise diğer iki beceri olan tersine- yapma ve işlemlerden soyutlama alışkanlıkları da geliştirdikleri söylenebilir. Öğrencilerin 6. sınıf düzeyinde sadece ilk iki alışkanlığı sergileyebilmelerinin nedeni bu sınıf düzeyine ait kazanımlar ile açıklanabilir (Sezer, 2019). Ancak 7. sınıf düzeyinde gösterilen tüm öğrencilerin bu alışkanlıkların tümünü sergileyemedikleri görülmüştür.

Öğrencilerin ZCA ve soyutlama becerilerinin gelişimleri birbirine paralel olarak geliştiği belirlenmiştir. Soyutlamaya yönelik problemlerde, verilen bağlam içerisinde problemi anlama, yorumlama, çözüm için temsiller kullanma ve bu temsiller arasında işlemler yaparak sonuca varma süreçlerinde yapma alışkanlığını kullandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin RBC+C soyutlama teorisinin kullanma epistemik eylemine yönelik becerilerini kullanma sürecinde muhakeme yaparken temsiller kullandığı ve bu temsiller ile karşılaştırma yapabildikleri gözlenmiştir. Ayrıca problemlerin çözümünde kısa yollar kullanmaya çalıştıkları da gözlenmiştir.

Değişken kavramı, cebir öğretiminin temelini oluşturmaktadır ve ilkokuldan üniversiteye kadar matematiğin en önemli kavramlarından birisidir (Macgregor & Stacey, 1997; Schonfeld & Arcavi, 1999; Philipp, 1999). Aritmetiğin temel kavramı sayı iken, cebir ve bütün yüksek matematiğin temel kavramı değişkendir. Sayılar, kümeler üzerindeki işlemlerin tanımlama fırsatı verirken, değişkenler kümeler arasındaki ilişkileri tanımlama imkânı verir. Değişken kavramının bulunması, matematik tarihi için dönüm noktası kabul edilebilecek kadar önemli bir olay olarak nitelendirilmektedir (Philipp, 1999). Ortaokul öğrencileri için ise aritmetik alışkanlıklarının cebirsel gösterimlere dönüşmesi kolay bir durum değildir. Öğrenciler üzerine yapılan birçok araştırma sonucu, öğrencilerin çoklu gösterimler arasında geçiş yapma becerilenin zayıf olduğunu göstermektedir (Kieran, 1992; Knuth, 2000; Akkoç, 2005).

Bu çalışmada en iyi araba sorusunda olduğu gibi 6. sınıf düzeyinde öğrencilerin değişkenleri anladıkları ve işlemlerde kullanabildikleri görülmüştür. Hatta öğrencilerin kullanma epistemik eylemi düzeyinde de başarı gösterdikleride belirlenmiştir. Buna karşılık değişkenleri manipüle ederek denklemin değerini değiştirmede iyi düzeyde olan öğrenciler dışında başarı gözlenmemiştir. Ancak 7. sınıf düzeyine gelindiğinde tüm öğrencilerin değişkenleri manipüle edilebildiği görülmüştür. Bu durum öğrencilerin 7. sınıf düzeyinde oluşturma epistemik eylemini sergiledikleri ve soyutlama becerilerini geliştirdikleri söylenebilir.

Değişkenlere ilişkin öğrencilerin zihnin cebirsel alışkanlıkları örüntünün kuralını tanıma ve örütünün kuralını doğrulama sorularında gözlenmiştir. Öğrencilerin 6. sınıf düzeyinde kuralı tanıdıkları ancak kuralı doğrulama işlemlerini başarı düzeyi iyi olan öğrencilerin yapabildikleri görülmüştür. Bu durum onların 6. sınıf düzeyinde yapma alışkanlığına hâkim olduklarını ve fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığında ise sadece iyi düzeyde olan öğrencilerin tam manasıyla kullandığını göstermektedir. 7.sınıf düzeyinde ise tüm öğrencilerin fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığını sergiledikleri görülmüştür.

Değişken kavramı için 6. sınıf düzeyindeki öğrencilerin soyutlama diyalogları incelendiğinde yapma ve kısmen fonksiyonel kural oluşturma cebir alışkanlıklarını sergiledikleri buna ek olarak öğrencilerin tanıma epistemik eylemini kolaylıkla gerçekleştirebildikleri ve kullanma epistemik eylemini ise başarı düzeyi iyi ve orta olan öğrencilerin gerçekleştirebildikleri ancak başarı düzeyi vasat öğrencilerin ise zorlandıkları görülmüştür.

Denklem çözme sürecinde takip edilen adımların çoğunun öğrenciler tarafından ezberlendiği ve onlar için rutin olduğunu, ayrıca öğrencilerin yaptıkları cebirsel işlemler ile ilgili anlamlar oluşturmada başarılı olamadığı bilinmektedir (Kiaren, 1992; Sfard & Linchevski, 1994; Stacey & MacGregor, 2000; Kinzel, 2000).

Öğrencilere zihnin cebirsel alışkanlıklarını kazandırmak için öğrencilerin ders içerisinde problemle baş başa bırakılması gerektiği ifade edilmektedir (Cuoco ve diğerleri, 1996; Driscoll ve diğerleri, 2007; Goldenberg, 1996; Gordon, 2011). Araştırmanın felsefesi gereği öğrenciler uygun problemler ile başbaşa bırakılmış ve çözüme ulaşma süreçleri incelenmiştir. Problem çözme sürecinde öğrenciler çözüm stratejilerini ve düşüncelerini açıklamışlar ve problemin çözümünü yapmışlardır. Costa & Kallick (2000) ile Cuoco, Goldenberg & Mark (1996) tarafından da ifade edildiği gibi öğrenciler problem çözme sürecinde matematiksel dili aktif şekilde kullanmışlardır ve böylece problemin çözümünde doğru ve yanlış yaptığı kısımları anında görmüşler ve dönütler alınmasına imkân sağlanmıştır.

İşlemlerden soyutlama ihtiyacı cebirdeki başarı için esastır. Aşağıdaki örnekte, işlemlerden soyutlama becerisi, sorunu çözmek için soyutlamayı cebirsel sembollerle ifade etme alışkanlığı ile birleştirilmiştir. Tahmin, kontrol etme ve genelleştirme yöntemini kullanmak, öğrenciler için zor olan bir konuyu (bağlamsal problemlerini çözme gibi) kolaylaştırır.

Bu araştırmada olduğu gibi soyutlama yapan öğrencilerin bildiklerini ifade edebildikleri görülmüştür (Cuoco ve diğerleri, 2010, ss. 10). Konser salonu örneğinde olduğu gibi öğrenciler “R ve S” değişkenlerini denklemde kullanmadan önce işlemleri “x” tanıdık değişkeni ile yürütmüştür. Bu süreçte genelleme biçimini cebirsel semboller ile ifade etme ve ortaya çıkan cebirsel ifadeleri problemleri çözmek için dönüştürme becerileri oldukça önemlidir.

Sonuç olarak, araştırmada soyutlama becerisi ile zihnin cebir alışkanlıkları arasında birbirini destekleyen argümanlar bulunmuştur. Öğrencilerin cebirsel ilişki değerlendirmelerinde bir bütünlük olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte, öğrencileri cebirsel düşünmede ustalaştırmak için gerekli olan iki matematiksel alışkanlık tespit edilmiştir. Bu alışkanlıklar; işlemleri düzenleyerek bir soyutlamaya ulaşmak ve matematiksel dil kullanarak genelleme yapmak şeklindedir.

Bu alışkanlıklar, öğrencilerin aritmetikten cebire geçmelerine yardımcı olmak için oldukça etkilidir. Başka bir deyişle, cebir kavramlarını soyutlamada başarılı olan öğrencilerin bu alışkanlıkları geliştirdiği (Koedinger, 2002), yapma ve fonksiyonel kural oluşturma alışkanlılarına sahip olan öğrencilerin ise cebir kavramlarını soyutlama süreçlerinde daha avantajlı hale geldiği söylenebilir. Soyutlama sürecinde yeni bir yapı ve yeni bir matematiksel dilden bahsedildiği için fonksiyonel kural oluşturma alışkanlığına sahip öğrencilerin cebirsel yapıyı inşa ederken kavramlar arası ilişkileri daha kolay oluşturduğu görülmüştür. Zihnin cebirsel alışkanlıklarında ise öğrencilerin işlemlerden soyutlama girişimleri genellikle yeni bir dil kullanmak yerine kısa bir yol bulmak ve onu açıklayabilmek üzerine inşa edilmektedir.

Çalışmadaki deneyimler, öğrencilerin tekrarlanan hesaplamalarda daha pratik hale geldiğini, zihinsel çalışmalarında düzenli bir örüntü tanımlamak için deneyimsel bir temel kazandıklarını göstermiştir. Ayrıca öğrenciler hesaplamaları ve oluşturdukları örüntüleri daha büyük bir cebirsel sürecin parçası olarak görmeye başlamışlardır. Böylece aritmetik hesaplamaları cebirsel sürece bağlayabilmişlerdir.

Öğrencilerin bu matematiksel alışkanlıkları geliştirmelerine ve bu alışkanlıkları kullanmalarına yardımcı olacak deneyimler sunmayı amaçlayan çalışmalar (Cuoco, 2007, 2008; Goldenberg & Shteingold, 2007), ders içi öğretmen sorularının önemli olduğunu ifade etmektedir (Costa & Kallick, 2000; Driscoll ve diğerleri, 2008). Goldenberg (1996) öğrencilerin düşünme alışkanlıkları çerçevesinde tasarladığı öğrenme ortamında öğrencilere sistematik olarak keşfetme imkânı sağlamıştır. Alanyazında uygun öğrenme ortamlarında düşünme alışkanlıklarının geliştirilebileceğini ifade eden çalışmalar bulunmaktadır. (Bülbül, 2016; Charbonneau ve diğerleri, 2009; Cuoco ve diğerleri, 1996; Driscoll, 1999; Driscoll ve diğerleri, 2008; Erşen, 2018; Goldenberg, 1996; Gordon, 2011; Hu, 2005; Jacobbe & Millman, 2009; Köse ve Tanışlı, 2014).

5.2. Öneriler

Bu bölümde araştırmanın sonuçlarına dayanan ve yapılabilecek benzer araştırmalara yönelik çeşitli öneriler bulunulmaktadır.

5.2.1. Araştırmanın sonuçlarına yönelik öneriler. ÖY ile yürütülen öğretim sürecinin yapılandırmacı yaklaşıma pratik bir uygulama kazandırmada kullanışlı olduğu görülmüştür. Uygulamanın sistematik yapısı, öğrencilerin cebirsel anlayışı üzerinde etkili olacağını göstermektedir. Bu bağlamda ÖY'nın pedagojik bir araç olarak öğretim sürecinde kullanımına ilişkin, matematik öğretmenlerine ve adaylarına yönelik eğitimler verilebilir.

Bu araştırmada soyutlama teorisi RBC+C ile öğretim metodolojisi olarak ÖY'nın birbirini destekler nitelikte kullanabileceği görülmüştür. RBC+C ve ÖY'nin birbirini destekleme sürecinde kavramsal bir çerçeve oluşturduğu ve bu çerçevenin öğrencilerin matematiksel soyutlamalarını ortaya çıkarmada önemli bir araç olduğu görülmüştür. Bu bağlamda RBC+C'nin epistemik eylem basamaklarına, ÖY'lerin ikinci aşaması olan gelişimsel süreçlerin incelenmesinde kavramsal çerçeve olarak müracaat edilebilir.

Araştırmada tasarlanan öğrenme ortamının farklı seviyelerde öğrencilerin iş birliği yapmasını ve başarı düzeyi düşük olan öğrencilerin bile sınıf tartışmalarına katılımını sağladığı, öğrenci gelişimi için yararlı olduğu gözlenmiştir. Öğrencilerin farklı değişkenlerin anlamlarını nasıl yorumladıklarını ve bu yorumların ifadeleri, denklemleri ve fonksiyonları öğrenirken öğrencilere nasıl katkıda bulunduğunu daha iyi anlamak için cebir öğrenmeye yönelik değişken şeması daha da araştırılmalıdır. Bu şemanın araştırılması cebirsel ifade, denklem ve fonksiyon ilerlemesi ile ilişkinin ortaya konulması için yararlı olacaktır. Ayrıca gelecekte yapılacak öğretim deneylerinde gözden geçirilmiş öğrenme yörüngesinin varsayımsal bir öğrenme yörünge olarak kullanılması yararlı olabilir.

Bu öğretim deneyi değişken ve denge kavramlarının öğrenci anlayışlarında nasıl geliştiğini boylamsal olarak incelemiştir. Öğrenci anlayışlarında bir kavramın gelişimine ilişkin sık rastlanmayan boylamsal çalışmaların sarmal öğretime sahip matematik kavramlarının öğrenci zihninde nasıl geliştiğine yönelik daha fazla boylamsal çalışmaya ihtiyaç olduğunu yinelemektedir. Ayrıca, öğretmenlerin hizmet içi eğitimlerinde, öğretmen adaylarının bu değişkenler hakkındaki fikirlerini ve bu şemanın cebirsel ifade, denklem ve fonksiyon ilerlemesi ile nasıl ilişkili olduğunu içermesi yararlı olabilir.

5.2.2. Gelecek araştırmalara yönelik öneriler. Sınıf ortamında öğretim deneyi olarak gerçekleştirilen bu çalışma, öğrenme sürecini şekillendirmiştir. Çalışmanın öğretim deneyi öğretmenler için öğretme beklentisini güçlendiren ve öğretmenleri bilgilendirmeyi amaçlayan öğrenci yanılgılarını içermektedir. Sınıf etkinlikleri ve örnek problemler, cebirsel düşünmeye yönelik öğrenme yörüngesindeki değişken kavramının beş türünü ortaya çıkarmıştır. Benzer şekilde denklem çözümü için üç adımın önemi üzerinde durulması gerekli görülmüştür. Bu etkinlikler, öğrencinin öğrenmesine dayanılarak gelecekteki öğretimler değiştirilebilir. Bu bakımdan, çalışma sürecinde meydana gelen ÖY'ler içindeki etkinlikler, cebir öğretim programının güncellenmesinde ve öğrenci düşüncesini değiştiren temel mekanizmaların desteklenmesinde kılavuz olarak kullanılabilir. Bahsedilen sınıf etkinlikleri ve görevlerinin, öğrencilerin akıl yürütme biçimlerinin yanı sıra, bir değişkenin gömülü kavramlarıyla aktarılan ifadelerin, ilerleyen süreçte denklemlerin ve fonksiyonların anlaşılmasını sağladığı görülmüştür.

Cebirin iki temel kavramınu öğrenmeye yönelik bir yaklaşım üzerine inşa edilen araştırma, etkili bir cebir eğitimini teşvik etme çabalarını koordine etme ve öğrencilerin düşüncelerindeki önemli kilometre taşlarını belirlemek amacıyla önemlidir. Ayrıca, bu çalışmanın öğretmenler için pratik bir formda mevcut olduğu ve öğrencilerin cebirsel akıl yürütme çalışmaları inşa edenler için yardımcı olacağı söylenebilir.

Öğrenme konusu bakımından cebirin iki temel kavramı olan değişken ve denklem kavramları ile sınırlıdır. Bu nedenle diğer öğrenme konularına yönelik benzer araştırmalar gerçekleştirilebilir.

Öğrenme yörüngeleri, öğretmenlere ve uygulayıcılara kendi eğitsel uygulamalarına entegre edilebilmesi için sistematik bir yol sunar. Bununla birlikte, öğrenme yörüngelerinin doğrusal veya sabit olmadığı (örneğin, yenilikçi öğretim teknolojileri öğrencilerin öğrenmeye nasıl yaklaştığı ve kavramları nasıl öğrendiği konusunda ilerlemeler sunmakta), öğrencilerin öğrenmesinin ise genel olarak aynı olduğu varsayılmaktadır. Kültürel, bölgesel ve öğrencinin öğrenme düzeyindeki farklar bu entegrasyonu etkileyecektir. Burada ifade edilen problem veya etkinlikleri değiştirmeden kendi yerel değerlerine entegre etmeden uygulamak istenen sonucu meydana getirmeyebilir.

Buna ek olarak öğretmenlere, öğrencilerin cebir kavramlarını soyutlamaları öğretimde etkili bir araç olarak kullanılabileceğine yönelik hizmet içi eğitimler verilebilir ve son olarak soyutlama mekanizması, daha açıklayıcı ve kullanışlı bir biçimde matematik dersi öğretim programlarına yansıtılabilir.

6. Bölüm

Kaynakça

Abdüsselam, M. S. (2006). *Matematiksel denklem ve ifadelerin bilgisayar ortamında grafikleştirilerek öğretilmesinin eğitime katkıları* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Açıl, E. (2015). *Ortaokul 3. sınıf öğrencilerinin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Agar, M. H. (1980). *The professional stranger: An informal introduction to ethnography*. San Diego: CA: Academic Press.

Akkan Y. (2016). Cebirsel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (ss. 43- 62). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Akkan, Y., Baki, A., & Çakıroğlu, Ü. (2012). 5-8. sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin problem çözme bağlamında incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *43*(43), 1-13.

Akkoç, H. (2005). Fonksiyon kavramının anlaşılması: Çoğul temsiller ve tanımsal özellikler. *Eğitim Araştırmaları Dergisi*, *5*(20), 1-14.

Alhamlan, S., Aljasser, H., Almajed, A., Almansour, H., & Alahmad, N. (2018). A systematic review: Using habits of mind to improve student's thinking in class. *Higher Education Studies*, *8*(1), 25-35.

Alkan, H., & Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *25*(3), 221-236.

Altun, M. (2018). *Ortaokullarda (5, 6, 7, 8. sınıflarda) matematik öğretimi*. (11. Baskı). Bursa: Aktüel Yayınları.

Altun, M., & Yılmaz, A. (2008). Lise öğrencilerinin tam değer fonksiyonu bilgisini oluşturma süreci. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *41*(2), 237-271.

Amiel, T., & Reeves, T. C. (2008). Design-based research and educational technology: Rethinking technology and the research agenda. *Journal of Educational Technology & Society*, *11*(4), 29-40.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For The Learning of Mathematics*, *25*(2), 42-47.

Argyle, S. F. (2012). *Mathematical thinking: From cacophony to consensus* (Unpublished doctoral dissertation). Kent State University, Ohio.

Arslan, S., & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, *35*(156), 17-31.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-259.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. and Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, *6*, 1–32.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Trabzon: Derya Kitapevi.

Bakker, A., Doorman, M. and Drijvers, P. (2003, May). *Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education*. Paper presented at the Onderwijs Research Dagen (ORD). Kerkrade, The Netherlands.

Ball, L. (2003). Communication of mathematical thinking in examinations: Features of CAS and non-CAS student written records for a common year 12 examination question. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, *10*(3), 183.

Barab, S. A. & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 1-14. doi: 10.1207/s15327809jls1301_1

Bárbara M. Brizuela, Maria Blanton, Katharine Sawrey, Ashley Newman- Owens & Angela Murphy Gardiner (2015) Children's Use of Variables and Variable Notation to Represent Their Algebraic Ideas, *Mathematical Thinking and Learning*, *17* (1), 34-63, DOI: 10.1080/10986065.2015.981939.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.) *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*, (ss. 1-34) Mahwah, NJ: Erlbaum.

Bass, H. (2008, January). *Mathematical practices*. Paper presented at a Project NexT Session on Helping Students Develop Mathematical Habits of Mind, Joint Mathematics Meetings, San Diego, CA. http://www2.edc.org/CME/showcase.html. Adresinden 15.09. 2016 tarihinde erişilmiştir.

Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 185-204.

Battista, M. T. (2011). Conceptualizations and issues related to learning progressions, learning trajectories, and levels of sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 507-570.

Becker, F. D., & Rivera, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(14), 212–221.

Bednarz, N., Kieran, C., and Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives forresearch and teaching.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Bee, H. & Boyd, D. (2009). *Çocuk gelişim psikolojisi*. (Çev. O. Gündüz). İstanbul: Kaknüs Yayınları.

Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. In Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, (pp. 167–185). Norwell, MA: Kluwer Academic.

Bikner-Ahsbahs, A. (2004). Towards the emergence of constructing mathematical meanings. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 119–126). Bergen, Norway: Bergen University College.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2014). Networking as research practices: Methodological lessons learnt from the case studies. In A. Bikner & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 235–247). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Blanco, L. J., & Garrote, M. (2007). Difficulties in learning ınequalities in students of the first year of pre-university education in spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *3*(3), 221-229.

Blanton M. et al. (2018) Implementing a Framework for Early Algebra. In: Kieran C. (eds), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students'capacity For Functional Thinking. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International* (pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. J. Cai, E. Knuth (Eds.). *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*, (pp. 5-23*).* Springer, Berlín, Germany. 10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181-202.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., ... & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. In: Kieran C. (eds), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 27-49). Springer.

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., & Strachota, S. (2019). Does Early Algebra Matter? The Effectiveness of an Early Algebra Intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal, 56*(5), 1930–1972. https://doi.org/10.3102/0002831219832301

Boaler, J. (2016). Designing mathematics classes to promote equity and engagement. *The Journal of Mathematical Behavior, 100*(41), 172-178.

Booth, L. R. (1986). Difficulties in Algebra. *Australian Mathematics Teacher*, *42*(3), 2-4.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 34-63.

Brizuela, B., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2000, April). *Mathematical notation to support and further reasoning (to help me think of something)*. Paper presented at the NCTM Meeting Presession, Chicago, IL.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds. & Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodologicalchallenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141–178.

Burke, L. A., & Williams, J. M. (2008). Developing Young Thinkers: An intervention aimed to enhance children's thinking skills. *Thinking Skills and Creativity*, *3*(2), 104-124.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(1), 35-49.

Burton, M. B. (1988). A linguistic basis for student difficulties with algebra. *For the Learning of Mathematics*, *8*(1), 2-7.

Bülbül, B. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının geometrik düşünme alışkanlıklarını geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). KTÜ, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The development of studients' algebraic thinking in earlier grades. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 5-15.

Camci, F., & Tanışlı, D. (2020). Sixth-grade students’ mathematical abstraction processes in a teaching experiment designed based on hypothetical learning trajectory. *Eğitim ve Bilim*, *45* (204).

Campbell, A. (2005). Application of ICT and rubrics to the assessment process where professional judgment is involved: the features of an e-marking tool. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *30*(5), 529–537.

Campbell, J. (2006, May). *Theorising Habits of Mind as a Framework for Learning.* Paper Presented at the AARE (Australian Association for Research in Education) Annual Conference, Adelaide.

Can, A. (2013). *SPSS ile Bilimsel Araştırma Sürecinde Veri Analizi*. (1. Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal*, *97*(1), 3-20.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 87-115.

Cassier, E. (1957). *The philosophy of symbolic forms*: *The phenomenology of knowledge*. London: Yale University Press.

Charbonneau, P. C., Jackson, H. A., Kobylski, G. C., Roginski, J. W., Sulewski, C. A., & Wattenberg, F. (2009). Developing students'"habits of mind" in a mathematics program. *PRIMUS, 19*(2), 105-126.

Chinn, P. L., & Kramer, M. K. (1999). *Theory and nursing integrated knowledge development*. St Louis, MO: Mosby.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 81-89.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, *23*(7), 13-20.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3/4), 175-190. doi: 10.1080/00461520.1996.9653265.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.pp. 418–503). New York, USA: Routledge.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of The Learning Sciences*, *10*(1-2), 113-163.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(1), 99-122.

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In E. Scanlon & T.O'Shea (Eds.), *New directions in educational technology* (pp. 15–22). New York: Springer-Verlag.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42. doi: 10.1207/s15327809jls1301_2

Confrey, J. (2016). Designing curriculum for digital middle grades mathematics: Personalized learning ecologies. In M. Bates & Z. Usiskin (Eds.), *Digital curricula in school Mathematics* (pp. 7–33). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Confrey, J., & Costa, S. (1996). A critique of the selection of "Mathematical objects" as a central metaphor for advanced mathematical thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(2), 139-168.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-drivenresearch design. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematicsand science education* (pp. 231–265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., & Corley, D. (2012, April). A design study of a wireless interactive diagnostic system based on a mathematics learning trajectory. *Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association,* Vancouver, Canada.

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009, July). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. *Paper Presented at the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece*.

Confrey, J., Toutkoushian, E., & Shah, M. (2020). Working at scale to initiate ongoing validation of learning trajectory-based classroom assessments for middle grade mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *60*, 100818.

Costa, A. L., & Kallick, B. (Eds.). (2008). *Learning and leading with habits of mind: 16 essential characteristics for success*. Association for Supervision and Curriculum Development, (ASCD) Alexandria, Virginia USA.

Creswell, J. W. (2007). Five qualitative approaches to inquiry. *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*, *2*, 53-80.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage publications.

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2017). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage publications.

Cuoco, A., Goldenberg, P. & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.

Çağdaşer, B. T. (2008). *Cebir öğrenme alanının yapılandırmacı yaklaşımla öğretiminin 6. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeyleri üzerindeki etkisi* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (ss. 17- 42). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Çepni, S. (2010). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş*. Trabzon: Celepler matbaacılık.

Çetin, İ., & Top, E. (2014). Programlama eğitiminde görselleştirme ile ACE döngüsü. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *5*(3), 274-303.

Çetin, N. (2009). The performance of undergraduate students in the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(3), 323-330.

Darling-Hammond, L. & Ball, D. L. (1998). *Teaching for high standards: What policymakers need to know and be able to do*. New York: National Commission on Teaching and America's Future and Consortium for Policy Research in Education.

Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction*: New York, NY: Consortium for Policy Research in Education (CPRE).

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet Studies in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

De Corte, E. (2004). Mainstreams and perspectives in research on learning (mathematics) from instruction. *Applied Psychology*, *53*(2), 279-310.

De Lange. J. (1996). Using and Applying Mathematics in Education. In A. J. Bishop, K. Clements. C. Keitel. J. Kilpatrick. & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 701-753) The Netherlands: Kluwer.

Dede, Y., & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(24).

Dede, Y., & Peker, M. (2007). Students' errors and misunderstanding towards algebra: pre-service mathematics teachers' prediction skills of error and misunderstanding and solution suggestions. *Elementary Education Online*, *6*(1).

Denscombe, M. (1998). *The good research guide for small scale social research projects*. Milton Keynes, UK: Open University Press.

Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5–8. doi: 10.3102/0013189X032001005

Dewantara, A. H., Zulkardi, Z., & Darmawijoyo, D. (2015). Assessing Seventh Graders'mathematical Literacy In Solving PISA-Like Tasks. *Journal on Mathematics Education, 6*(2), 117-128.

Dienes, Z. P. (1961). On abstraction and generalization. *Harvard Educational Review*, *31*(3), 281-301.

Dreyfus T. (2002) Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall D. (Eds.), *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library* (pp. 25-41). Springer, Dordrecht.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 33–48). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 271-300.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In Bikner-Ahsbahs A., Knipping C., Presmeg N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 185-217). Springer, Dordrecht.

Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). *Algebra Education: Exploring Topics and Themes*. Leiden, The Netherlands: Brill | Sense. Retrieved Feb 29, 2020, from https://brill.com/view/book/edcoll/9789460913341/BP000003.xml

Driscoll, M., Wing DiMatteo, R., Nikula, J., & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking: A guide for teachers grades 5-10*. Portsmouth, NH: Heineman.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Duncan, R. G., & Hmelo-Silver, C. E. (2009). Learning progressions: Aligning curriculum, instruction, and assessment. *Journal of the National Association for Research in Science Teaching*, *46*(6), 606-609.

Earnest, D., & Balti, A. A. (2008). Instructional strategies for teaching algebra in elementary school. *Teaching Children Mathematics*, *14*(9), 518-522.

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 105-121. doi: 10.1207/S15327809JLS1101_4

Elizondo-Ramírez, R., & Hernández-Solís, A. (2017). Hypothetical Learning Trajectories that use Digital Technology to Tackle an Optimization problem. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 24*(2), 51-57.

Elliot, A. J., & Harackiewicz, J. M. (1996). Approach and avoidance achievement goals and intrinsic motivation: A mediational analysis. *Journal of Personality and Social Psychology, 70*(3), 461-478.

Ellis, A., Ely, R., Singleton, B., & Tasova, H. (2020). Scaling-continuous variation: Supporting students' algebraic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 104*(1), 87-103.

Eroğlu, D. & Tanışlı, D. (2017). Integration of Algebraic Habits of Mind into the Classroom Practice. *Elementary Education Online, 16*(2), 566-583.

Ersoy, Y. & Erbaş, K. (27-28 Kasım 1998). *İlköğretim Okullarında Cebir Öğretimi: Öğrenmede Güçlükler ve Öğrenci Başarıları*. Cumhuriyetin 75. Yılında İlköğretim I. Ulusal Sempozyumunda sunuldu, Ankara.

Erşen, Z. B. (2018). *Onuncu sınıf öğrencilerinin geometrik düşünme alışkanlıklarını geliştirmeye yönelik öğretim ortamının tasarlanması, uygulanması ve değerlendirilmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Ertürk, S. (1975). *Eğitimde program geliştirme*. Ankara: Yelkentepe.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences, 358*(1435), 1225-1230.

Fey, J.T., & Good, R.A. (1985). Rethinking the sequence and priorities of high school mathematics curricula. In C.R. Hirsch & M.J. Zweng (Eds.), *The secondary school mathematics curriculum (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 43–52). NCTM: Reston.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Finkelstein, N., Fong, A., Tiffany-Morales, J., Shields, P., & Huang, M. (2012). *College bound in middle school and high school? How math course sequences matter*. Sacramento, CA: The Center for the Future of Teaching and Learning at West Ed.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 309-329.

Fonger, N., Stephens, A., Blanton, M., & Knuth, E. (2015). A learning progressions approach to early algebra research and practice. In T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 201–204). East Lansing, MI: Michigan State University.

French, D. (2002). *Teaching and learning algebra*. A&C Black.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1977). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education*. Springer Science & Business Media.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Friedlander, A., & Arcavi, A. (2012). Practicing algebraic skills: A conceptual approach. *Mathematics Teacher*, *105*(8), 608-614.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. *The Roles of Representation in School Mathematics*, 173-185.

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., & Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. *The Journal of Mathematical Behavior, 46*, 96-111.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2007). Collecting research data with questionnaires and interviews. *Educational Research: An İntroduction*, *12*(10), 227-261.

Gavin, M. K., & Sheffield, L. J. (2015). A balancing act: Making sense of algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20(*8), 460-466.

Glesne, C. (2013). *Introduction to qualitative research*. (Çev. Ersoy, A. ve Yalçınoğlu, P.). Ankara: Anı Publishing.

Goldenberg, E. P. (1996). "Habits of Mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of Education, 178*(1), 13–34.

Goldenberg, E. P., Mark, J., & Cuoco, A. (2010). Contemporary curriculum issues: An algebraic habits of mind perspective on elementary school. *Teaching Children Mathematics, 16*(9), 548-556.

Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *1*(2), 79-98.

Gordon, M. (2011). Mathematical habits of mind: promoting students' thoughtful considerations. *Journal of Curriculum Studies, 43*(4), 457-469.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17-51). London, England: Routledge.

Gravemeijer, K. (1994). Educational Development and Developmental Research in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443-471.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105-128.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777-796.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

Gülpek, P. (2006). *İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin gelişimi* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Gür, H., & Korkmaz, E. (2003). İlköğretim 7. Sınıf öğrencilerinin problem ortaya atma becerilerinin belirlenmesi. *Matematikçiler Derneği Matematik Köşesi Makaleleri*. http://www.matder.org.tr adresinden alınmıştır.

Hacısalihoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. & Akpınar, A. (2003). *Matematik öğretimi: Matematikte yapılandırıcı öğrenme ve öğretme*. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Harel, G. (2007). The DNR system as a conceptual framework for curriculum development an instruction. In R. Lesh, J. Kaput and E. Hamilton (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 263-280). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50.

Hart, K. M., Brown, M. L., Kerslake, D. M., Küchemann, D. E., & Ruddock, G. (1985). *Chelsea diagnostic mathematics tests: teacher’s guide*. Berkshire: NFER-NELSON.

Hart, K.M., Brown, M.L., Kuchermann, D.E., Kerslach, D., Ruddock, G. & Mccartney, M. (1998). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16,* (Ed. Hart, K.M.), The CSMS Mathematics Team.

Hassan, I., & Mitchelmore, M. (2006). The Role of abstraction in learning about rates of change. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 278-285). Adelaide: MERGA.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., & Schwarz, B. (2007). Abstracting processes, from individuals' constructing of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 41-68.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 195-222.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992) Learning and teaching with understanding. In: D.A. Grouws (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 65–97. New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, *2*, 1-27.

Hodgen, J., Oldenburg, R., & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 32–45). London: Routledge.

Humberstone, J., & Reeve, R. A. (2008). Profiles of algebraic competence. *Learning and Instruction*, *18*(4), 354-367.

Hunter, J. (2010). 'You might say you're 9 years old but you're actually *B* years old because you're always getting older': facilitating young students' understanding of variables. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education (proceedings of the 33rd annual conference of the mathematics education research group of Australasia)* (Vol. 1, pp. 256–263). Fremantle: MERGA.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom*. Singapore: World Scientific.

Issakova, M. (2007). *Solving of linear equations, linear inequalities and systems of linear equations in interactive learning environment* (Unpublished doctoral dissertation). University of Tartu, Estonia

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 529-548.

Jacobbe, T. & Millman, R. S. (2009). Mathematical habits of the mind for preservice teachers. *School Science and Mathematics*, *109*(5), 298-302.

Johnson, R. B., & Christensen, L. B. (2004). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches*. Boston: Allyn and Bacon.

Jones, V. R. (2014). Habits of mind: developing problem-solving strategies for all learners. *Children's Technology & Engineering*, *19*(2), 24. https://www.questia.com/read/1P3-

3505685281/habits-of-mind-developing-problem-solving-strategies adresinden 10.04.2018 tarihinde erişilmiştir.

Kabael, T. U., & Tanışlı, D. (2010). Teaching from Patterns to Functions in Algebraic Thinking Process. *Elementary Education Online*, *9*(1), 213-228.

Kalchman, M., & Koedinger, K.R. (2005). *Teaching and learning functions. In How students learn: Mathematics in the classroom*. National Academies Press.

Kamii, C., & Kysh, J. (2006). The difficulty of “length× width”: Is a square the unit of measurement?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(2), 105-115.

Kamol, N., & Ban Har, Y. (2010). *Upper Primary School Students' Algebraic Thinking*. Mathematics Education Research Group of Australasia. Freemantle, Western Australia. Retrieved from the ERIC database. (ED 520911)

Kaput, J. J. (1989). Supporting Concrete Visual Thinking in Multiplicative Reasoning: Difficulties and Opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11,* 35-47.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Springer, Dordrecht.

Kaput, J. J. (1995, May). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In C. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (pp. 37-53). Washington DC: U.S. Department of Education.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 145-168). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by" algebrafying" the K-12 curriculum*. US Department of

Education, Office of Educational Research and Improvement, Educational Resources Information Center.

Kaput, J. J. (2017). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?. In Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-18). New York: Routledge.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2017). Algebra From a Symbolization Point of View. In Kaput, J., Carraher, D. & Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-56). New York: Routledge.

Kaya, D. (2015). *Çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi üzerine bir inceleme* (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimler Enstitüsü, İzmir.

Kelly, A. E. (2003). The role of design in educational research: Research as design. *Educational Researcher, 32*(1), 3-4. doi:10.3102/0013189X032001003

Kholodnaya, M. A. (2016). Development-focused educational texts as a basis for learners' intellectual development in studying mathematics (DET technology). *Psychology in Russia, 9*(3), 24.

Kidron, I., & Dreyfus, T. (2008). Abstraction in context, combining constructions, justification and enlightenment. *Educational Studies in Mathematics, 74*(1), 75-93.

Kieran C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In Stacey K., Chick H. & Kendal M. (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study,* (pp. 21–33). Kluwer Academic, Dordrecht, the Netherlands.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kieran, C. (1989, July). A perspective on algebraic thinking. In in G. Vergnaud, J. Rogalski and M. Artigue (Eds.), *13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 163-171) Paris, France.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). New York: Simon & Schuster.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In Gutiérrez A. & Boero P. (Eds.), *Handbook of Research on The Psychology of Mathematics Education* (pp. 11-49). Brill Sense.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, *2*, 707-762.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopaedia of mathematics education* (pp. 27–32). Dordrecht: Springer Reference.

Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. M. (2012). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. In Clements M., Bishop A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F. (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 361-392). Springer, New York, NY.

Kilpatrick, J., Swafford, J., and Findell, B., (Eds.) (2001). *The strands of mathematical proficiency.* Adding it up: helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Kinzel, M. T. (2000). *Characterizing ways of thinking that underlie college students ınterpretation and use of algebraic notation* (Unpublished doctoral dissertation). The Pennslyvania State University, USA.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. In Sutherland R., Rojano T., Bell A., Lins R. (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83-98). Springer, Dordrecht.

Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(4), 224-257.

Klein, P. D. (2003). Rethinking the multiplicity of cognitive resources and curricular representations: Alternatives to'learning styles' and'multiple intelligences'. *Journal of Curriculum Studies*, *35*(1), 45-81.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 500-507.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The importance of equal sign understanding in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 514.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(1), 68-76.

Koedinger, K. R. (2002). Toward evidence for instructional design principles. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant, & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 1* (pp. 21–49). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Köse, N. & Tanışlı, D. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının geometrideki zihinsel alışkanlıkları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri (KUYEB)*, *14*(3), 1-28.

Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking. http://www.shastacoe.org/uploaded/SCMP2/Fall_Content_Day_2013/Fall_Content_Day_2013_6-9/SCMP2_Winter_Content_Day_2014/SCMP2_Summer_Institute_2014/M-Algebraic_Thinking_Article_by_Kreigler.pdf adresinden 10.04.2018 tarihinde erişilmiştir.

Kutluca, T., & Akın, M. F. (2014). Dört kefeli cebir terazisi somut materyali yardımı ile tamsayılar konusunun öğretimi. *İlköğretim Online, 13*(1), 17-26.

Kuzu, A., Çankaya, S., & Mısırlı, Z. A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, *1*(1), 19-35.

Kuzu, A., Çankaya, S., & Mısırlı, Z. A. (2011). Tasarım tabanlı araştırma ve öğrenme ortamlarının tasarımı ve geliştirilmesinde kullanımı. *Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *1*(1) 23- 32.

Küchemann, D. (1998). Algebra. In Hart, K. M., Brown, M. L., Kerslake, D. M., Küchemann, D. E., & Ruddock, G. (Eds.). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: Athenaeum Press Ltd.

Lai, G., Calandra, B., & Ma, Y. (2009). Leveraging the Potential of Design-Based Research to Improve Reflective Thinking in an Educational Assessment System. *International Journal of Technology in Teaching & Learning*, *5*(2), 45-66.

Lamberg, T. D., & Middleton, J. A. (2009). Design research perspectives on transitioning from individual microgenetic interviews to a whole-class teaching experiment. *Educational Researcher*, *38*(4), 233-245.

Lankshear, C., & Knobel, M. (2004). *A handbook for teacher research*. McGraw-Hill Education (UK).

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalizaton. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(7), 342.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *25*, 299–317. doi:10.1207/s15327833mtl0703_3.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28. doi:10.1007/BF03217440.

Leibowitz, D. (2016). Supporting mathematical literacy development: A case study of the syntax of introductory algebra. *Interdisciplinary Undergraduate Research Journal, 2*(1), 7-13.

Leont’ ev, A. N. (1981). *Problems of the development of the mind*. (Anonymous translation). Progress, Moscow. (Original work published in Russian, 1959).

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 20–44). Westport, CT: Ablex.

Levin, A. (1999). Computation of Hilbert polynomials in two variables. *Journal of Symbolic Computation*, *28*(4-5), 681-710.

Lew, H. C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator, 8*(1), 88-106.

Liehr, P., & Smith, M. J. (1999). Middle range theory: Spinning research and practice to create knowledge for the new millennium. *Advances in Nursing Science*, *21*(4), 81-91.

Lim, K. H. (2008). *Students' mental acts of anticipating: Foreseeing and predicting while solving problems involving algebraic inequalities and equations*. Saarbrücken, Germany: VDM Verlag Dr. Müller.

Lim, K. H., & Selden, A. (2009). *Mathematical habits of mind.* In S. L. Swars, D. W. Stinson and S. Lemons-Smith (Eds.). Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39-65.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.

Liz, B., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006, July). Exemplification in mathematics education. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic.

Lloyd, G., Herbel-Eisenmann, B., Star, J., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understandings of expressions, equations, and functions for teaching mathematics in Grades 6–8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, New Jersey: Routledge.

Ma, Y., & Harmon, S. W. (2009). A case study of design-based research for creating a vision prototype of a technology-based innovative learning environment. *Journal of Interactive Learning Research, 20*(1), 75-93.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students'understanding Of Algebraic Notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1-19.

Magiera, M. T., van den Kieboom, L. & Moyer, C. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematic, 84*, 93- 113.

Magiera, M. T., van den Kieboom, L. & Moyer, C. (2017). K-8 pre-service teachers' algebraic thinking: Exploring the habit of mind "building rules to represent functions". *Mathematics Teacher Education and Development, 19* (2), 25 – 50.

Maher, C. A., & Muter, E. (2010). Responding to Ankur's challenge: Co-construction of argument leading to proof. In C. A. Maher, A. B. Powell, & E. B. Uptegrove (Eds.), *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying and building isomorphisms* (pp. 89–96). New York: Springer.

Mark, J., Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Sword, S. (2010). Contemporary curriculum issues: Developing Mathematica Habits of Mind. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(9), 505-509.

Martinez, M., & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 285–298. doi:10.1016/j.jmathb.2006.11.003.

Marzano, R. (1992). *A different Kind of Classroom: Teaching with Dimensions of Learning*. Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria Virginia USA.

Marzano. R. J., Pickering, D. & McTighe, J. (1993). *Assessing student outcomes: Performance assessment using the dimensions of learning model*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. *Algebra in the Early Grades, 4*, 57-94.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Matsuura, R., Sword, S., Piecham, M. B., Stevens, G. & Cuoco, A. (2013). Mathematical Habits of Mind for Teaching: Using Language in Algebra Classrooms. *The Mathematics Enthusiast, 10*, 735-776.

Maxwell, J. A. (2005). *Qualitative research design: An interactive approach*. Thousand Oaks, CA: Sage.

McMillan, E. M. (2000). *The new sciences of chaos and complexity and organisational change: A case study of the Open University* (Unpublished doctoral dissertation). The Open University.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2006). *Research designs and reading research reports.* Research in Education: Evidence-Based Inquiry, Boston: Pearson.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development, 6*(2), 285-306.

Meel, D. E. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren’s model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. *CBMS Issues in Mathematics Education, 12*(2), 132-181.

Mendell, H., (2017). “Aristotle and Mathematics”, *The Stanford Encyclopedia of Philosoph*, Edward N. Zalta (Ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/aristotle-mathematics/ adresinden 10.01.2019 tarihinde erişildi.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education. Revised and Expanded from" Case Study Research in Education."*. Jossey-Bass Publishers, 350 Sansome St, San Francisco, CA 94104.

Merriam, S. B. (2009). Qualitative case study research. In S. B. Merriam (Ed.), *Qualitative research: A guide to design and implementation* (pp. 39–54). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Messick, S. (1992). The interplay of evidence and consequences in the validation of performance assessments. *Educational Researcher, 23*(2), 13-23. doi: 10.3102/0013189X023002013

Middleton, J., Gorard, S., Taylor, C., & Bannan-Ritland, B. (2008). The “compleat” design experiment: From soup to nuts. In Kelly, A. E., Lesh, R. A. and Baek, J. Y. (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 21-46). NY: Routledge.

Mielicki, M. K., Kacinik, N. A., & Wiley, J. (2017). Bilingualism and symbolic abstraction: Implications for algebra learning. *Learning and Instruction, 49*, 242-250.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu.* Ankara: TTK Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı *[MEB]. (2017). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar).* Ankara: TTK Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı *[MEB]. (2018). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar).* Ankara: TTK Başkanlığı.

Mitchelmore, M., & White, P. (2004). *Abstraction in mathematics and mathematics learning*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway. Vol. 3, pp.329–336. PME.

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 1-9.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). *Teaching experiments within design research. The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, *2*(4), 435-440. Retrieved from http://iji.cgpublisher.com/product/pub.88/prod.308

Molina, M., Castro, E., & Mason, J. (2007). Distinguishing approaches to solving true/false number sentences. *Pitta-Pantazi & Philippou*, *1*, 924-933.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(1), 37-69.

Moss, D. L. (2014). *An investigation of student learning in beginning algebra using classroom teaching experiment methodology and design research* (Unpublished doctoral dissertation). University of Nevada, Reno.

Moss, D. L., & Lamberg, T. (2019). Conceptions of expressions and equations in early algebra: A learning trajectory. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *20*(2), 170-192.

Murray, C. (2002). Supportive teacher-student relationships: Promoting the social and emotional health of early adolescents with high incidence disabilities. *Childhood Education*, *78*(5), 285-290.

Musan, M. S. (2012). *Dinamik matematik yazılımı destekli ortamda 8. sınıf öğrencilerinin denklem ve eşitsizlikleri anlama seviyelerinin solo taksonomisine göre incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Mutaqin, E., Asyari, L., & Muslihah, N. (2019). *Hypothetical learning trajectory: Whole number multiplication in primary school*. Surabaya: European Alliance for Innovation (EAI). doi:http://dx.doi.org/10.4108/eai.13-2-2019.2286153

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM), (2008). Algebra: What, When, and for Whom: A position of the National Council of Teachers of Mathematics. http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=16229 adresinden alınmıştır.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). *Principles and Standarts for School Mathematics.* Reston/VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1996). Justification and reform. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 516-520.

National Governors Association Center. NGA. (2010). Common core state standards for mathematics. http://www. eorestandards. org/the standards/mathematics. Adresinden 15. 06. 2017 tarihinde erişilmiştir.

National Research Council. NRC (2001). *Nutrient requirements of dairy cattle: 2001*. National Academies Press.

Nguyen, K. H. (2010). *Investigating the role of equipartitioning and creating internal units in the construction of a learning trajectory for length and area* (Unpublished doctoral dissertation). North Carolina State University, Raleigh, NC.

Noss, R. (2002). Mathematical epistemologies at work. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 2-13.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). The visibility of meanings: Modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(1), 3-31.

OECD, (2013). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I), Paris: OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264201118-en. Adresinden 15. 06. 2017 tarihinde erişilmiştir.

OECD. (2006). Assessing scientific, reading and mathematical literacy: A framework for PISA 2006. Paris: OECD Publishing.

Ohlsson, S., & Lehtinen, E. (1997). Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research*, *27*(1), 37-48.

Olive, J., & Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior, 20,* 413–437.

Ozmantar, M. F. (2005). *An investigation of the formation of mathematical abstractions through scaffolding* (Unpublished doctoral dissertation). University of Leeds.

Ozmantar, M. F., & Monaghan, J. (2008). Are Mathematical Abstractions Situated?. In *New directions for situated cognition in mathematics education* (pp. 103-127). Springer, Boston, MA.

Ozmantar, M.F., Monaghan, J. (2007). A dialectical approach to the formation of mathematical abstractions. *Mathematic Educational Research Journal*, *19***,** 89–112. https://doi.org/10.1007/BF03217457.

Özgen, K. (2018). Developing a Checklist in Question Design for Mathematical Literacy and an Application. In Akın, Ö. & Özkan, M. (Ed.). *International Conference On Mathematics and Mathematics Education* (ss. 505-506). Ordu: Ordu University.

Özgün-Koca, S. A. (2004). Bilgisayar ortamındaki çoğul bağlantılı gösterimlerin öğrencilerin doğrusal ilişkileri öğrenmeleri üzerindeki etkileri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 26*, 82-90.

Papadopoulos, I. (2019). Using mobile puzzles to exhibit certain algebraic habits of mind and demonstrate symbol-sense in primary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 210-227.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory İnto Practice*, *40*(2), 118-127.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-269.

Parker, J. (2011). *A design-based research approach for creating effective online higher education courses*. Paper presented at the 26th Annual Research Forum: Education Possibilities, University of Notre Dame. Fremantle.

Paschos, T., & Farmaki, V. (2006). The reflective abstraction in the construction of the concept of the definite integral: A case study. In *Proceedings of the 30th Conference of Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 337-344.

Patton, M. Q. (2014). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice*. Sage publications.

Payne, G., & Payne, J. (2004). *Key Concepts in Social Research*. CA: Sage.

Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics*. Mouton: The Hague.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, *85*(7), 557-561.

Poindexter, C. (2011). Teaching “habits of mind”: Impact on students’ mathematical thinking and problem solving self-efficacy. In L. Mc Coy (Ed.), *Studies in Teaching 2011 Research Digest* (pp. 97-102). Winston-Salem, NC: Wake Forest University.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. New Jersey: Princeton University.

Pournara, C., Sanders, Y., Adler, J., & Hodgen, J. (2016). Learners' errors in secondary algebra: insights from tracking a cohort from Grade 9 to Grade 11 on a diagnostic algebra test. *Pythagoras, 37*(1), 1-10.

Prediger, S., & Bikner-Ahsbahs, A. (2014). Introduction to networking: Networking strategies and their background. In A. Bikner & S. Prediger (Eds.), *Networking of* *theories as a research practice in mathematics education* (pp. 117–125). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 165–178.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 163-182.

Pugalee, D. K. (1999). Constructing a model of mathematical literacy. *The Clearing House*, *73*(1), 19-22.

Pugalee, D. K. (2001). Algebra for all: The role of technology and constructivism in an algebra course for at-risk students. *Preventing School Failure*, *45*(4), 171-176.

Pugalee, D. K. (2001). Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections through students' work in mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, *101*(5), 236-245.

Radford L. (2018) The Emergence of Symbolic Algebraic Thinking in Primary School. In: Kieran C. (eds) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19.

Radford, L., & Peirce, C. S. (2006, March). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter*, *1*, 2-21).

Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., & Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in algebra: A systematic review and meta-analysis. *Review of Educational Research*, *80*(3), 372-400.

Richardson, K., Berenson, S., & Staley, K. (2009). Prospective elementary teachers' use of representation to reason algebraically. *Journal of Mathematical Behavior*, *28*(2), 188–199. doi:10.1016/j.jmathb.2009.09.002.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346.

Robertson, E. M., & Cohen, D. A. (2006). Understanding consolidation through the architecture of memories. *The Neuroscientist*, *12*(3), 261-271.

Rolle, Y. A. (2008). *Habits of practice: A qualitative case study of a middle-school mathematics teacher* (Unpublished doctoral dissertation). The University of Nebraska, Lincoln.

Russell, B. (1926). *Education and the good life*. New York: Liveright.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Saraswati, S., Putri, R. I. I., & Somakim, S. (2016). Supporting Students' understanding of Linear Equations With One Variable Using Algebra Tiles. *Journal on Mathematics Education*, *7*(1), 19-30.

Saxe, G. B. (2005). Practices of quantification from a sociocultural perspective. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Cognitive developmental change: Theories, models, and measurement* (pp. 241–263). New York: Cambridge University Press.

Saxe, G. B., & Esmonde, I. (2005). Studying cognition in flux: A historical treatment of Fu in the shifting structure of Oksapmin mathematics. *Mind, Culture and Activity*, *12*(3-4), 171-225.

Schifter, D., Russell, S. J., & Bastable, V. (2009). Early Algebra to Reach the Range of Learners. *Teaching Children Mathematics, 16*(4), 230-237.

Schleicher, A. (2017, 13 Kasım). PISA direktörü andreas schleicher: öğrettikleriniz artık gereksiz. *Gazete Habertürk.* http://www.haberturk.com/pisa-direktoru-andreas-schleicher-ogrettikleriniz-artik-gereksiz-1711035 adresinden 10.01.2018 tarihinde alınmıştır.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. New York, NY: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of'well-taught' mathematics courses. *Educational Psychologist*, *23*(2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solv-ing, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.334–370). New York: Macmillan

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, *4*(1), 1-94.

Schoenfeld, A. H. (2011). Reflections on teacher expertise. In *Expertise in Mathematics Instruction* (pp. 327-341). Boston: Springer, MA.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 261-289.

Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 19-49). Routledge.

Scott, D., & Morrison, M. (2006). *Key ideas in educational research*. A&C Black.

Seaman, C. E., & Szydlik, J. E. (2007). Mathematical sophistication among preservice elementary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 167-182.

Seeley, C. (2004). A journey in algebraic thinking. *NCTM News Bulletin*, *41*(2), 3.

Selden, A., & Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1-13.

Senemoğlu, N. (2005). *Gelişim Öğrenme ve Öğretim Kuramdan Uygulamaya*. Ankara: Gazi Kitabevi.

Sezer, N. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreç ve becerilerinin boylamsal incelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Sezgin Memnun, D. (2011). *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin analitik geometri'nin koordinat sistemi ve doğru denklemi kavramlarını oluşturması süreçlerinin araştırılması* (Yayınlanmamış doktora tezi). Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer.

Silver, E. A. (1997). Algebra for all increasing students' access to. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(4), 204-207.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145. doi:10.2307/749205

Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 359-371.

Simon, M. A. (2013). Issues in theorizing mathematics learning and teaching: A contrast between learning through activity and DNR research programs. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 281-294.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91–104. doi:10.1207/s15327833mtl0602_2

Skemp, R. R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in The Middle School*, *12*(2), 88-95.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Somasundram, P. (2021). The Role of Cognitive Factors in Year Five Pupils' Algebraic Thinking: A Structural Equation Modelling Analysis. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(1), em1935. https://doi.org/10.29333/ejmste/9612

Soylu, Y. (2008). 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel ifadeleri ve harf sembollerini (değişkenleri) yorumlamaları ve bu yorumlamada yapılan hatalar. *Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi*, *25*, 237-248.

Stacey, K. & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149–167.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important*. Progress report of the APEC project: Collaborative Studies on Innovations for Teaching and Learning Mathematics in Different Cultures (II)–Lesson Study focusing on Mathematical Thinking.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (2004). *The future of the teaching and learning of algebra: the 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *The art of case study research*. *CA:* Thousand Oaks.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Steen, L. A., Turner, R., & Burkhardt, H. (2007). Developing mathematical literacy. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, and M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 285-294). Boston: Springer, MA.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 129-162.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and es-sential elements. In A. K. R. Lesh (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–306). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based math instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.

Stylianou, D. A., Stroud, R., Cassidy, M., Knuth, E., Stephens, A., Gardiner, A., & Demers, L. (2019). Putting early algebra in the hands of elementary school teachers: examining fidelity of implementation and its relation to student performance. *Journal for the Study of Education and Development, 42*(3), 523-569.

Subramaniam, K., & Banerjee, R. (2011). The arithmetic-algebra connection: A historical-pedagogical perspective. In In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 87-107). Berlin: Springer.

Suh, J., & Moyer-Packenham, P. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26*(2), 155-173.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156.

Şengel, E. (2013). Tasarım ve Geliştirme Araştırmaları. Çağıltay, K., Göktaş, Y. (Ed.), *Öğretim Teknolojilerinin Temelleri Teoriler Araştırmalar Eğilimler* (ss. 327- 340). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Tabach, M., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2013). Learning beginning algebra in a computer-intensive environment. *ZDM*, *45*(3), 377-391.

Tabach, M., Rasmussen, C., Dreyfus, T., & Apkarian, N. (2020). Towards an argumentative grammar for networking: a case of coordinating two approaches. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(2), 139-155.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L., & Meira, D., Carraher (Eds.), *PME conference* (Vol. 1, pp. 1-61).

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 111–118). Haifa: PME.

Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 29-33.

Tanışlı, D., Aydın, S., Turgut, M., Köse, N., & Camci, F. (2019). Öğrenme Yörüngeleri Yoluyla Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Profesyonel Gelişimlerinin Web Tabanlı Sistemle Desteklenmesi. (TÜBİTAK 1001/116K105). 19.10.2020 tarihinde https://app.trdizin.gov.tr/publication/project/detail/TVRnMk1ETXo= adresinden alınmıştır.

Tarlow, L. D., & Uptegrove, E. B. (2010). Block towers: Co-construction of proof. In C. A. Maher, A. B. Powell, & E. B. Uptegrove (Eds.), *Combinatorics and reasoning: Representing, justifying and building isomorphisms* (pp. 97–104). New York, NY: Springer.

Terzioğlu, T. (1992). Gauss formülünün genelleştirilmesi. http://www.matematikdunyasi.org/arsiv/PDF_eskisayilar/92_3_11_12_GAUSS.pdf. adresinden 11,03,2018 tarihinden erişilmiştir.

Tierney, C., & Monk, S. (2008). Children’s reasoning about change over time. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.185-200). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Trybulski, J. D. (2007). *Algebraic reasoning in middle school classrooms: A case study of standards-based reform and teacher inquiry in mathematics* (Unpublished doctoral dissertation). University of Pennsylvania, USA.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets—a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 1-23.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2005). How fragile is consolidated knowledge?: Ben's comparisons of infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(1), 15-38.

Turğut, M. (2010). *Teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının uzamsal yeteneklerine etkisi* (Yayımlanmaış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Türk Dil Kurumu. (2009). *Türkçe Sözlük.* Ankara. TDK Yayınları.

Türkdoğan, A. (2006). *BDMÖ yoluyla sınıf öğretmeni adaylarının denklemler ve grafikleri konusundaki öğrenme ürünlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children’s construction of improper fractions and the teacher’s role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 390–416.

Tzur, R. (2008). Profound awareness of the learning paradox (PALP): A journey towards epistemologically regulated pedagogy in mathematics teaching and teacher education. In T. Woods, & B. Jaworski (Eds.), *The Handbook of Mathematics Teacher Education, 4* (pp. 135-156). Brill Sense.

Tzur, R. (2010). How and what might teachers learn through teaching mathematics: Contributions to closing an unspoken gap. In R. Leikin & R. Zazkis (Eds.), *Learning Through Teaching Mathematics* (pp. 49-67). Springer, Dordrecht.

Umay, A. (1996). Matematik öğretimi ve ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*(12).

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The Ideas of Algebra, 12*(8), 19-30.

Ünveren-Bilgiç, E.N., & Argün, Z. (2018). Examining middle school mathematics teacher candidates' algebraic habits of mind in the context of problem solving. *International E- Journal of Educational Studies (IEJES)*, *2* (4), 64-80.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63-75.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics teaching developmentally* (7th ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (Eds.), *Design approaches and tools in education and training* (pp. 1-14). London: Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and Realistic Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands: CD-ß Press Utrecht University.

van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly*, *1*(3), 279-305.

Vogel, C. (2008). Algebra: Changing the Equation. *District Administration*, *44*(6), 34.

Von Glaserfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer.

Wagner, S., & Kieran, C. (2018). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 220-237). New York: Routledge.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development, 53*(4), 5-23.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171-185.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 76-95.

Watson, A., & Mason, J. (2006). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. New York: Routledge.

Weber, E., Walkington, C., & McGalliard, W. (2015). Expanding notions of "Learning Trajectories" in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(4), 253-272.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010). Teaching for abstraction: A model. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(3), 205-226.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal, 28*(2), 223-243.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C., & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(2), 149-175.

Wu, H. (2009, February). From arithmetic to algebra. In *Professional development session presented at the Mathematicians Workshop Series, Eugene, OR*.

Yenilmez, K. ve Teke, M. (2008). Yenilenen Matematik Programının Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Düzeylerine Etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9*(15). 229-246.

Yeşildere İmre, S. ve Türnüklü, E., (2016). RBC Soyutlama Teorisi (Ed. Bingölbali E., Arslan S. Ve Zembat İ.Ö, *Matematik Eğitiminde Teoriler*, ss:459-479. Ankara: Pegem Akademi.

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8 sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yeşildere, S., & Türnüklü, E. B. (2008). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçlerinin matematiksel güçlerine göre incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *21*(2), 485-510.

Yıldırım, A. ve Şimşek H. (2016). *Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri* (10. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yilmaz, Z. (2011). *Toward an understanding of students' strategies on reallocation and covariation items: In relation to an equipartitioning learning trajectory* (Unpublished master's thesis). North Carolina State University, Raleigh, NC.

Yin, R.K. (1984). *Case Study Research Design And Methods*. Sage Publications. Beverly Hills.

Yusof, Y. M., Zakaria, E., & Maat, S. M. (2012). Teachers' general pedagogical content knowledge (PCK) and content knowledge of algebra. *Social Sciences (Pakistan), 7*(5), 668-672.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

Zembat, İ. Ö. (2007). Yansıma dönüşümü, doğrudan öğretim ve yapılandırmacılığın temel bileşenleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *27*(1), 195-213.

Zembat, İ. Ö. (2016). Piaget'e göre soyutlama ve çeşitleri. E. Bingölbali, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (s. 447- 458). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Ekler

Ek 1. İzin Yazısı

T.C.
BURSA VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 86896125-605.01-E.16169979 13.09.2018
Konu : Mustafa Çağrı GÜRBÜZ'ün Araştırma İzni

MÜDÜRLÜK MAKAMINA

İlgi : Milli Eğitim Bakanlığı'nın Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri konulu 22/08/2017 tarihli ve 2017/25 sayılı Genelgesi.

Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı doktora öğrencisi Mustafa Çağrı GÜRBÜZ'ün "Ortaokul Öğrencilerinin Cebirsel Kavramları Soyutlama ve Pekiştirme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu araştırma isteği Uludağ Üniversitesi Rektörlüğü Genel Sekreterlik'in 29/08/2018 tarihli ve 31178 sayılı yazısı ile bildirilmektedir.

Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı doktora öğrencisi Mustafa Çağrı GÜRBÜZ'ün "Ortaokul Öğrencilerinin Cebirsel Kavramları Soyutlama ve Pekiştirme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu araştırmasını Müdürlüğümüze bağlı **Meral-Muammer Ağım Ortaokulu ve Karamehmet Ortaokulu 6. ve 7. Sınıf Öğrencilerine** uygulama yapma isteği ilimizde oluşturulan "Araştırma Değerlendirme Komisyonu" tarafından incelenerek değerlendirilmiştir. Araştırma ile ilgili çalışmanın **okul/kurumlardaki eğitim öğretim faaliyetleri aksatılmadan, araştırma formlarının aslı okul müdürlüklerince görülerek ve gönüllülük esası ile** okul müdürlüklerinin gözetim ve sorumluluğunda ilgi Genelge çerçevesinde uygulanması ayrıca **araştırma sonuçlarının Müdürlüğümüz ile paylaşılması** komisyonumuzca uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Ekrem KOZ
İl Milli Eğitim Müdür Yardımcısı

OLUR
13.09.2018

Sabahattin DÜLGER
Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

Adres : Hocahasan Mh. İlkbahar Cad. No:38
(Yeni Hükümet Konağı A Blok) 16050/Osmangazi/BURSA
Telefon No:(0224) 445 16 00 Fax 445 18 10
E-posta: arge16@meb.gov.tr İnternet Adresi: http://bursa.meb.gov.tr

Bilgi İçin : Leyla DİKİCİ
VHKİ
(0224) 215 25 39

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 0772-6fc8-3b5f-8b69-2c4e kodu ile teyit edilebilir.

Ek 2. Veli Onam Formu

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, “Ortaokul Öğrencilerinin Cebirsel Kavramları Soyutlama ve Pekiştirme Süreçlerinin İncelenmesi” adıyla, 2018-2019 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Ortaokul öğrencilerinin Cebir’in iki temel aksiyomu olan, *değişken* ve *denklem* kavramlarını soyutlama (oluşturma) sürecinin incelenmesidir.

Araştırma Uygulaması: Anket / Görüşme / Gözlem şeklindedir.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : Arş. Gör. Mustafa Çağrı GÜRBÜZ

İletişim bilgileri : 0507 009 15 92 mcggurbuz@gmail.com

Velisi bulunduğum .... sınıfı .... numaralı öğrencisi .... …………………………..’in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.
(Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).

…./…../………..

İsim-Soyisim İmza:

Veli Adı-Soyadı :

Telefon Numarası :

Ek 3. Tahmini Öğrenme Yörüngesi Örneği ve Öğrenme Yörüngesi

Hedef (Amaç)	Hipotez (Rota)			Değerlendirme (Kazanım)	
Öğrenme Hedefi	Dersde Yapılan Hatalar	Etkinlik		Düşünme Biçimi	Değerlendirm
Cebirsel ifade yazma Değişkenin yerine sayı koyma	Değişkenin farklı şekilde kullanamamak	Giriş	Temel sözel ifadelerin yazımı	Öğrencilerin problem içindeki bağlamı anlama, temsilleri oluşturma becerilerinin geliştiği görülmüştür	Öğrenciler yapıl araştırmada öz durumları kontr etmek ya da genellemeleri açıklamak gib deneyimler kazanmıştır
		Keşif	Aklından bir sayı tut		
		Derinleşme	Yakındaki sayıları çarp		

Hedef	Hipotez		Değerlendirme	
Öğrenme Hedefi	Derste Beklenen Hatalar	Etkinlik	Development Progressions	Değerlendirme
Etiket olarak Değişken	Cebirsel kullanımda yanlış gösterim	(E1) Balık sayılarının cebirsel gösterimi	Öğrencilerin problem içindeki bağlamı anlama, temsilleri oluşturma becerilerinin gelişmesi beklenir	Matematiksel araştırmanın bazı yönleriyle deneyim kazanır: özel durumları kontrol eder; genellemeyi açıklar
Değişim olarak Değişken	Örüntünün kuralını cebirsel olarak yanlış genellemek	(E2) Altıgen masalar	Bağlamsal bir aritmetik modeli cebirsel olarak ifade edebilmeleri beklenir	Aritmetik olarak açıkladığı deseni cebirsel olarak gösterebilir
Bilinen bir sayı olarak Değişken	Değişkene sayı değerlerini atayamamak	(E3) Maliyet hesabı	Her zaman çalışan bir cebirsel model oluşturmaları beklenir	Değişkenin değişen bir değer olduğunu anlar ve cebirsel modelin gösterimini yapabilir
Bilinmeyen olarak Değişken	Değişkenler ile dört işlem yapamamak	(E4) Aklından bir sayı tut	Değişkenleri dört işlem içinde kullanmaları beklenir	Değişkenleri dört işlemde kullanabilir, manipüle eder.

Ek 4. Gözlem Formu

Ders Gözlem Formu

Gözlem Yapanın Adı Soyadı:
Gözlenen Öğretmenin Adı Soyadı:
Gözlem Yapılan Okul Adı:
Sınıf Düzeyi / Mevcut:
Gözlem Tarihi:
Gözlem Süresi:

Bu gözlem formu 2017© altıncı ve yedinci sınıf düzeyinde temel cebir kavramlarının öğretimi süresince sınıfta gözlem yapabilmek amacıyla oluşturulmuştur.

Konu	Kavram	Etkinlik	Öğrenme Alanı	Öğrenme Alanı Alt Maddeleri	Gerçekleşme Durumu
			Bilgi	Olgusal	
				İşlemsel	
				Kavramsal	
				Üstbilişsel	
			Yeterlik	Üretici	
				İlişkilendirici	
				Yansıtıcı	
			Alışkanlık	Tanıma	
				Fonksiyonel kural oluşturma	
				İşlemlerden soyutlama	
				Tutum	

Ek 5. Öğretmen Formu ve Yapılandırılmış Gözlem Formu

Bu gözlem formu 2017© altıncı ve yedinci sınıf düzeyinde temel cebir kavramlarını tasarım tabanlı olarak öğretim planının güncellenmesi için öğretmen görüşlerinden faydalanmak amacıyla oluşturulmuştur.

Her Öğretim Birimi Sonrası Bilgilendirme Röportajı

1. Öğrencilerin cebir öğrenebildiğini fark etmenin yolları nelerdir?

2. Genel olarak, Cebir öğretmek için ne yaparsınız? Hangi müfredatı kullanıyorsunuz?

Güçlü ve zayıf yönleri nelerdir?

3. Öğrenci öğrenmesi için kanıt olarak neye önem verirsiniz?

4. Cebir öğretim programında yer alması gereken bazı tasarım özellikleri nelerdir?

5. Dersin / ünitenin nasıl ilerlediğini düşünüyorsunuz?

6. Derste / ünitede neler iyi gitti? Neden iyi gittiğini açıklar mısın?

7. Bu dersi / üniteyi tekrar öğretirseniz, farklı şekilde ne yapardınız? Neyi değiştirirsiniz,

neleri değiştirmezsiniz?

8. Bir öğretmen olarak deneyiminize dayanarak, öğrenciler öğreniyor muydu? Öğrendiklerini

nasıl anlarsınız?

9. Bu ders / ünite hakkında eklemek istediğiniz herhangi bir şey var mıdır? Açıklayınız.

TAHMİNİ ÖĞRENME YOL HARİTASI DEĞERLENDİRME FORMU

Okul : ………………………………………………………
Gözlemci : ………………………………………………………. Sınıfı : ……………………………………………………….
Konu : ………………………………………………………. Öğrenci Sayısı : ……………………………………………………….
Tarih : ……………………………………………………….

Bu değerlendirme formundaki maddelerin karşısında bulunan kısaltmaların anlamı:
(E) = Eksiği var (1p) (K) = Kabul edilebilir (2p) (İ) = İyi (3p) Uygun olan seçeneği (+) ile işaretleyiniz.

		E	K	İ	Açıklamalar
1.1. HAZIRLIK					
1.1.1	Soruların ön bilgileri test etmesi				
1.1.2	Hazırlık sorularının konuya ilişkin farkındalık oluşturması				
1.1.3					
1.2. ÖĞRENCİ					
1.2.1	Öğrencilerin problem çözmelerini harekete geçirme				
1.2.2	Bağlamı anlama, bağlantılar kurma ve bağlantıları açıklama				
1.2.3	Etkinliğin öğrencilerin bilişsel seviyesine uygunluğu				
1.2.4	Konu ile matematiğin diğer konularını ilişkilendirebilme				
1.2.5	Konunun gerektirdiği sözel ve görsel dili (şekil, şema, grafik, formül vb.) uygun biçimde kullanabilme				
2.1 ÖĞRETME-ÖĞRENME SÜRECİ					
2.1.1	Konuyu önceki ve sonraki derslerle ilişkilendirebilme				
2.1.2	Kazanımlara uygun yöntem ve tekniklerin kullanımı				
2.1.3	Öğrencilerin etkin katılımını sağlama				
2.1.4	Derse ilgi ve dikkati çekebilme				
2.1.5	Öğrencilerin çoklu temsil kullanımına olanak sağlanması				
2.2 ÖĞRENME YOL HARİTASI					
	KULLANIŞLILIK				
2.2.1	Derse uygun ve ilgi çekici bir giriş yapabilme				
2.2.2.	Kazanımların öğretimi için zaman yeterli mi?				
2.2.3.	Hedefe ulaşmayı sağlamada nitelik yeterli mi?				
	GERÇEKLEŞME				
2.2.4	İyi bir öğrenme ortamı sağlayabilme				
2.2.5	Derse ilginin sürekliliğini sağlayabilme				
2.2.6	Kavram yanılgı ve hatalarına karşı uygun önlemler alabilme				
2.3 ANAHTAR KAVRAMLARIN ANLAŞILMASI					
2.3.1	Değişken				
2.3.2	Değişken				
2.3.3	Denge				
2.3.4	Denklem				
2.3.5	Denklem				
2.3.6	Denklem				
2.4 GÖZLEMCİ NOTLARI					

Ek 6. 6. sınıf Görüşme Soruları

1. Cebirde, “Değişken” nedir? Ne ifade etmektedir? Bir değişken yazıp gösterebilir misiniz?
2. Cebirsel İfade yazabilir misiniz? Terim-katsayı- değişkenleri gösterebilir misin? Nedir bunlar, Ne işe yararlar? Anlatır mısın?
3. Bir masada üç sepet yumurta ayrıca da 4 yumurta vardır. Sepetlerde bulunan yumurta sayıları aynıdır. Fakat bir sepette kaç tane yumurta olduğu bilinmemektedir.


Buna göre;

a) Toplam yumurta sayısını matematiksel olarak ifade ediniz.

b) Bu sepetlerle aynı sayıda yumurta bulunan iki sepet daha gelirse toplam yumurta sayısı ne kadar olur?

c)Sepetlerden bir tanesi taşınırken yere düşürülmüş ve tüm yumurtalar kırılmıştır. Buna göre geriye kalan yumurta sayısını matematiksel olarak ifade ediniz.

d)Her sepetten 5 tane yumurta satılmıştır. Geriye kalan yumurta sayısını veren matematiksel ifadeyi yazınız.

e) Yumurtaların tanesi 50 kuruştan satılmaktadır. Tüm sepetler satıldığında kaç para kazanılır?

4. Aşağıdaki denklem her zaman doğru mudur, ya da bazen ya da hiçbir zaman doğru değil midir?
   “a + b = b”

Neden? Detaylı olarak açıklayınız.

5. Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "**Yılın Arabası**" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet (E)	Yakıt (Y)	Görünüş (G)	Konfor (İ)
Ca	3	1	2	3
M	2	2	2	2
N	3	1	3	2
Sp	1	3	3	3
Kk	3	2	3	2

Puanlar şu şekildedir: **3**puan=**Mükemmel**; **2**puan=**İyi**; **1**puan=**Orta**

Araba dergisi, bir arabanın toplam puanını hesaplamak için, her bir puan grubunun ağırlıklı toplamından oluşan aşağıdaki kuralı kullanmaktadır:

Toplam Puan = (3 x E) +Y + G + İ

"Ca" arabası için toplam puanı hesaplayınız. Yanıtınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

a. "Ca" için toplam puan : ……………………..

b. "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun.

Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = … E+ … Y+ … G+… İ.

6. Bir öğrencinin bir dersinin başarı notunun (M) hesaplanmasında girdiği 3 sınavdan aldığı notlar A, B, C ise,

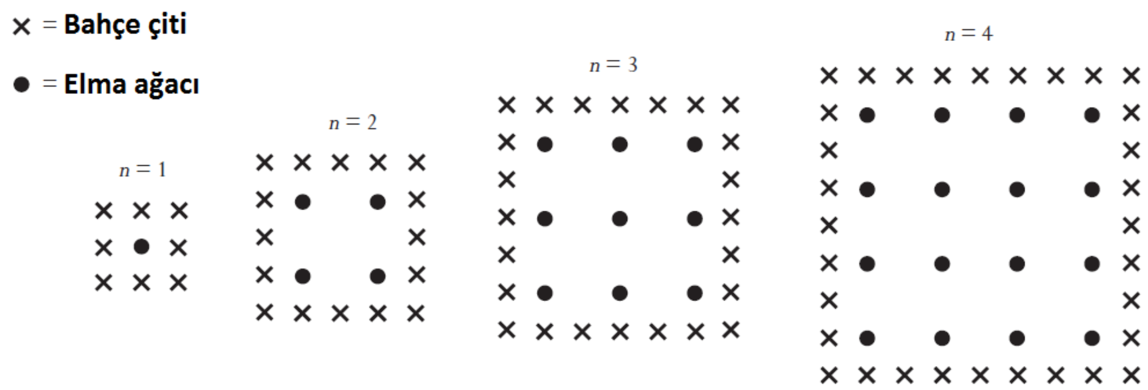
$M = \frac{A+B+C}{3}$ formülü kullanılıyor.

Buna göre;

A=80, B=40, C=20 ise M = ?

A= 20, B=40, C=80 ise başarı notu değişir mi?

7. $\frac{x}{y}$ kesri ile $\frac{u}{v}$ kesri arasında başka bir kesir olan $\frac{x+u}{y+v}$ kesrinin olabileceğini örnekle gösteriniz.
8. Bir prens büyülü meyve bahçesinden bir sepet dolusu altın elma topladı. Evinin yolu üzerinde meyve bahçesini bekleyen cüce tarafından durduruldu. Cüce bu elmaların ücreti olarak sepette bulunan elmaların yarısından iki fazlasını istedi. Prens elmaları ona verdi ve tekrar yola çıktı. Biraz ilerledikten sonra ikinci bir cüce tarafından durduruldu. Bu cücede elmaların ücreti olarak yarısından iki fazlasını istedi. Prens bunu da ödeyip tekrardan yola çıktı. Tam büyülü meyve bahçesinden çıkarken üçüncü bir cüce tarafından durduruldu ve bu cüce de kalan elmaların yarısından iki fazlasını istedi. Prens bunu da ödedi ve mutsuz bir şekilde evine gitti. Geriye elinde sadece iki elma kalmıştı. Bu prens, sepeti ilk doldurduğunda kaç elma toplamıştı?
9. Bir çiftçi elma ağaçlarını kare şeklindeki bir düzende ekiyor. Elma ağaçlarını rüzgâra karşı korumak için, meyve bahçesinin çevresine çit dikiyor. Her sayıdaki ağaç için bahçe çitlerinin dikiliş modelini gösteren şekli aşağıda görüyorsunuz.



Soru 9.1: ELMALAR

Tabloyu doldurunuz.

n	Elma ağaçlarının sayısı	Bahçe çitinin sayısı
1		
2		
3		
4		
5		

Soru 9.2: ELMALAR

Yukarıda verilen model için elma ağaçlarının ve bahçe çitlerinin sayısını hesaplayabileceğiniz iki formül var
Elma ağaçlarının bir satırı n ile gösterildiğinde;
Elma ağaçlarının sayısı = n^2 Bahçe çitlerinin sayısı = 8n
Elma ağaçlarının sayısının bahçe çitlerinin sayısına eşit olduğu bir n değeri var. Bu “n” değerini bulunuz ve hesaplama yönteminizi gösteriniz.

Soru 9.3: ELMALAR

Çiftçinin çok daha büyük bir meyve bahçesi yapmak istediğini düşünün. Meyve bahçesi büyüdükçe elma ağaçlarının sayısı mı, bahçe çitlerinin sayısı mı daha hızlı artar? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu anlatınız.

Ek 7. 7. sınıf Görüşme Soruları

Soru 1) Aşağıda verilen ifadelerden hangisi **daha büyüktür?** Yanıtınızı yuvarlak içine alınız. Seçiminizin nedenini **açıklayınız**.

2n ya da ***n+2***

Soru 2) Niyazi Öğretmen, öğrencilerine yaptığı sınavdan puan verirken izlediği yol şu şekilde ifade etmiştir: *"Öğrencilerin testten yaptıkları doğru sayısının 2 katından 5 puan fazla veriyorum"*. Buna göre,

a) d tane doğru yapan Ali kaç puan alır?
b) 2c tane doğru yapan Veli kaç puan alır?
c) Veli'nin yaptığı doğru sayısından 5 eksik sayıda doğru yapan Ayşe kaç puan alır?
d) Ali'den 5 puan az alan Hülya kaç puan almıştır?

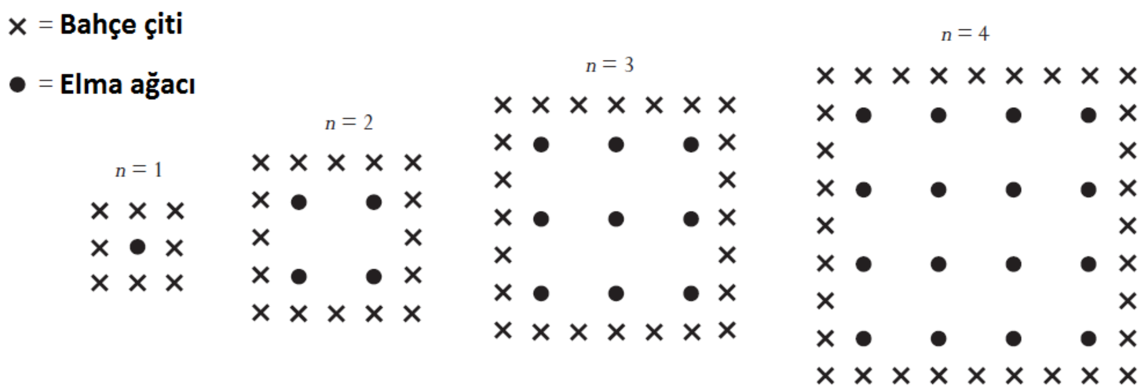
Soru 3) Altın bilezik almak için kuyumcuya gelen Leyla bileziklerin üzerine yapıştırılmış etikette 5k, 2k, 15k gibi sayılar görmüştür. Merakını gidermek için kuyumcuya bu etiketlerin ne anlama geldiğini sormuş ve kuyumcu da "Abla altının gram fiyatı durmadan değişiyor, bizde k sembolü ile altınının günlük gramının değerini belirledik. Buna göre bir bileziğin fiyatını altının o günkü gram değerine bakarak kolayca hesaplıyoruz" demiştir. Leyla'nın kuyumcuya gittiği gün altının gramı 155TL'dir. Buna göre beğendiği bileziklerin kaç TL olduğunu bulunuz.

Soru 4) Merdiven Problemi

Bir merdivenin yapımında 1 basamak için 1, 2 basamak için 1 + 2 = 3, 3 basamak için 1 + 2 + 3 = 6, 4 basamak için 1 + 2 + 3 + 4 = 10 tuğla kullanılmakta ve bu şekilde diğer basamaklarda da devam etmektedir. N basamaklı bir merdivende kaç tuğla kullanılır?

Soru 5) ELMALAR;

Bir çiftçi elma ağaçlarını kare şeklindeki bir düzende ekiyor. Elma ağaçlarını rüzgâra karşı korumak için, meyve bahçesinin çevresine çit dikiyor. Her sayıdaki ağaç için bahçe çitlerinin dikiliş modelini gösteren şekli aşağıda görüyorsunuz.



Soru 5.1: ELMALAR

Tabloyu doldurunuz.

n	Elma ağaçlarının sayısı	Bahçe çitinin sayısı
1		
2		
3		
4		
5		

Soru 5.2: ELMALAR

Yukarıda verilen model için elma ağaçlarının ve bahçe çitlerinin sayısını hesaplayabileceğiniz iki formül var
Elma ağaçlarının bir satırı n ile gösterildiğinde;
Elma ağaçlarının sayısı = n^2 Bahçe çitlerinin sayısı = 8n
Elma ağaçlarının sayısının bahçe çitlerinin sayısına eşit olduğu bir n değeri var. Bu "n" değerini bulunuz ve hesaplama yönteminizi gösteriniz.

Soru 5.3: ELMALAR

Çiftçinin çok daha büyük bir meyve bahçesi yapmak istediğini düşünün. Meyve bahçesi büyüdükçe elma ağaçlarının sayısı mı, bahçe çitlerinin sayısı mı daha hızlı artar? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu anlatınız.

Ek 8. 7. sınıf İkinci Görüşme Soruları

1.) "2x+4=10" eşitliğinin kullanılabileceği bir problem durumu yazınız.
Yukarıdaki sorudaki olayı/durumu öyle bir değiştirelim ki yeni denklem "2(x+4)=10" olsun.
2.) Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "**Yılın Arabası**" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet (E)	Yakıt (Y)	Görünüş (G)	Konfor (İ)
Ca	3	1	2	3
M	2	2	2	2
N	3	1	3	2
Sp	1	3	3	3
Kk	3	2	3	2

Puanlar şu şekildedir: **3**puan=**Mükemmel**; **2**puan=**İyi**; **1**puan=**Orta**

a. Araba dergisi, bir arabanın toplam puanını hesaplamak için, her bir puan grubunun ağırlıklı toplamından oluşan aşağıdaki kuralı kullanmaktadır:

Toplam Puan = (3 x E) +Y + G + İ

"Ca" arabası için toplam puanı hesaplayınız. Yanıtınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

"Ca" için toplam puan : ……………………..

b. "Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor. Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun.

Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = … E+ … Y+ … G+… İ.

3.) 36-n=20 denkleminde n değeri arttığında 20 sayısının durumu için ne söylenebilir? (artar mı, azalır mı? Neden?)
a. 2n+5=23 denkleminde "n", 5 arttırılsa eşitliğin sağ tarafının yeni durumu ne olur?

b. "n", 5 arttırıldığında sonuç neden 10 arttı?

c. Genellemesi nasıl olabilir, farklı değerler için de ifade ediniz.

4.) Bir konser salonunun ilk sırası 10 sandalyeye sahip. Bundan sonra her sıra, önündeki sıradan 2 koltuk daha fazladır.

a.) 10.sırada kaç koltuk var?
b.) Bilet satıcısının her sırada kaç koltuğun olduğunu bilmeleri gereklidir. Sıranın numarasını biliyorsa, o sırada kaç koltuk olduğunu nasıl bilebilir açıklayın. Kısa bir yolu var mıdır?

c.) R, koltukların sırasını temsil ederse ve S, o sıradaki koltuk sayısını temsil etsin. Koltuk sayısını bulmak için bir denklem verir misin?
d.) 21. sırada kaç koltuk vardır? Son sıra 100 sandalyeye sahipse, konser salonunda kaç sıra koltuk vardır?

5.) İstanbul'da, Kadıköy-Harem arası dolmuşlar kişi başı 2TL almaktadır. 3 arkadaş Harem'den Kadıköy'e gidecekler, Kadıköy-Harem arası 4km'dir.
a.) Hangisini tercih ederlerse daha karlı olurlar?
b.) Kaç kişi olduklarında seyahatleri dolmuş veya taksi tercih ettiklerinde ödemeleri aynı olur?
c.) Sonda Soru soruldu

6.) Mehmet Amca tarlasının etrafına eşit aralıklarla ağaç dikmek için fidan almaya marketten içeri torunuyla giriş yapmıştır. Ancak tarlasının kenar uzunluklarını hatırlamamaktadır. Tarlasını soran satıcıya "Tarlam uzun kenarı kısa kenarının 3 katından 12 m fazla olan ve çevresi 144 m olan bir dikdörtgen şeklindedir." demiştir.
Kendinizin Mehmet Amca'nın torunu olduğunuzu düşünün ve tarlanın kenar uzunluklarını bulunuz.

7.) $\frac{x}{y}$ kesri ile $\frac{u}{v}$ kesri arasında başka bir kesir olan $\frac{x+u}{y+v}$ kesrinin olabileceğini örnekle gösteriniz.

8.) Bir prens büyülü meyve bahçesinden bir sepet dolusu altın elma topladı. Evinin yolu üzerinde meyve bahçesini bekleyen cüce tarafından durduruldu.

Cüce bu elmaların ücreti olarak sepette bulunan elmaların yarısından iki fazlasını istedi. Prens elmaları ona verdi ve tekrar yola çıktı. Biraz ilerledikten sonra, tam büyülü meyve bahçesinden çıkarken ikinci bir cüce tarafından durduruldu. Bu cücede elmaların ücreti olarak yarısından iki fazlasını istedi. Prens bunu da ödedi ve mutsuz bir şekilde evine gitti. Geriye elinde sadece iki elma kalmıştı. Bu prens, sepeti ilk doldurduğunda kaç elma toplamıştır?

Ek 9. ZCA Testi Soruları

Zihnin Cebir Alışkanlıkları

Bu şablon, Cebir sorularını çözme sürecinde zihnin alışkanlıklarını belirlemek için kullanılır.

Performans Ölçütü					
a.	**Test Adı**	Yılsonu Zihnin Cebirsel Alışkanlık Değerlendirmesi			
Zihin Alışkanlıkları					
b.	**Konu**	Cebir-I	**c.**	**Sınıf/Seviye**	6-8
d.	**Performans Ölçme Amacı**	Cebir I dersi için dönem sonu değerlendirmesi ve cebirsel zihin alışkanlıklarının belirlenmesi			

1. Uygulayıcı (Öğretmen)		
1a.	**Uygulama Sıklığı**	Dönem Sonunda 1 kez uygulanacaktır
1b.	**Uygulama Beklentisi**	Öğrencilerin alışkanlıklarını belirlenebilmesi için her öğrenci çözümlerini açıklamalarıyla birlikte yazmalıdır.
1c.	**Kaynak/Materyal**	Her öğrenci için 1 değerlendirme kopyası gereklidir.

2. Süreç (Öğrenci)		
2a.	**Görevler**	40 dakika süre içerisinde 4 adet soruyu cevaplamaları beklenmektedir.
2b.	**Gereklilikler**	Öğrenci, yeteneklerini en iyi şekilde değerlendirmeye dâhil etmelidir.
2c.	**Ürün/Çıktı**	Sınav sonunda öğrenci tüm çözümlerini öğretmenine iletir.

SORULAR

1. 8 yetişkin ve 2 çocuktan oluşan bir grup bir nehrin karşısına geçmek istemektedir. Ellerinde küçük bir bot vardır ancak bu bota 1 yetişkin ya da 1 veya 2 çocuk sığabilmektedir. (Örneğin 3 ihtimal var. 1 yetişkin binebilir, 1 çocuk ya da 2 çocuk bota binebilir). Herkes botun küreklerini çekebiliyor. Hepsinin nehrin karşı kıyısına geçebilmesi için kaç kez sefer yapılmalıdır?

   a. İki çocuk ve herhangi sayıda yetişkin için yaptığın hesabı anlatabilir misin?
   b. Bulmuş olduğun kural 100 yetişkin olduğunda nasıl çalışır?
   c. Eğer farklı sayıda çocuk olsaydı bulmuş olduğun kurala ne olurdu? Örneğin 8 yetişkin 3 çocuk ya da 8 yetişkin 4 çocuk? A sayıda yetişkin ve C sayıda çocuk olacak şekilde değişen genel bir kural yazabilir misin?
   d. Bir grup yetişkin ve çocuk 27 kez yaparak nehrin karşı kıyısına geçmiştir. Grupta kaç yetişkin ve çocuk vardır? Bunun birden fazla çözümü var mıdır?

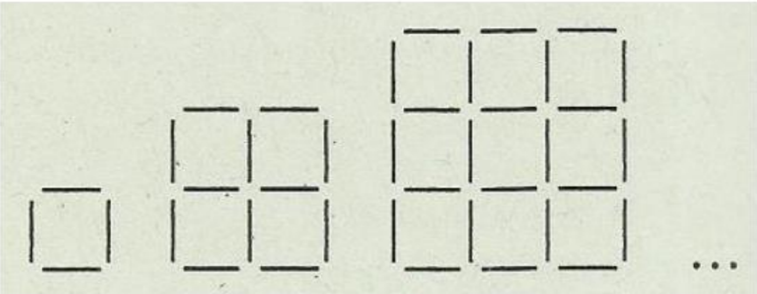
2. Dokuz bin Doların ($) %4 mü, yoksa dört bin Doların ($) %9'u mu daha büyüktür? (Cevabınızı detaylı olarak yazınız, hangisini tercih ettiyseniz nedenini belirtiniz)

3.

Kürdan Kareler

Aşağıda gösterilen büyüyen kareler modelleri, kürdanlardan yapılmıştır.

1-) Aşağıda verilen örüntüyü aynı şekilde bir adım daha devam ettirerek çiziniz.



2-) Yeni karenin yapımında kaç tane küçük kare kullandın?

3-) Bir kenarında 10 tane kürdanla geniş ve büyük bir kare yapacak olsan bu karenin içerisinde kaç tane küçük kare bulunur? Çözümünüzü çizerek gösteriniz.

4-) Herhangi büyüklükte çizilen bir kare içerisindeki küçük kare sayısının kuralını verecek bir formül yazabilir misiniz?

5-) Herhangi büyüklükte çizilen bir kareyi oluştururken kullanılan kürdan sayısının kuralını verecek bir formül yazabilir misin?

4. ARDIŞIK SAYILARIN TOPLAMI

3 + 4 = 7   2 + 3 + 4 = 9   4 + 5 + 6 + 7 = 22

Yukarıdaki problemler ardışık sayıların toplamı ile ilgili örneklerdir. 7 sayısın iki ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabildiği görülmektedir. 9 sayısının da 3 ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabildiği ve 22 sayısının da 4 ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabildiği gösterilmiştir. Bu etkinlikte, hangi sayıların ardışık sayıların toplamı şeklinde yazılabildiği hangi sayıların yazılamadığını keşfedeceksin.

4. 1.) 1'den 35'e kadar olan sayıları, iki ya da daha fazla ardışık sayının toplamı şeklinde nasıl yazıldığını bul.

4.2.) Ardışık sayıların toplamını yazarken ne keşfedebilirsin? Keşfet ve üç tane keşfini bir kâğıda yaz.

4.3.) Aşağıdaki sayıları, herhangi bir hesaplama yapmadan kaç tane ardışık sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini tahmin et. Bu tahminlerini nasıl yaptığını açıkla.

a) 45 b) 57 c) 62 d) 75 e) 80

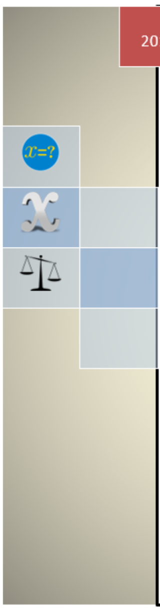
AÇIKLAMA:

4.4.) İkinci soruda keşfettiğin yöntemleri kullanarak, aşağıda verilen sayıların kaç tane sayının ardışık toplamı olarak yazılabileceğinin kısa yolunu göster.

a) 45 b) 57 c) 62 d) 75 e) 80

AÇIKLAMA:

Ek 10. CTT Soruları



2017

CTT

Cebir Tanı Testi

Bu test genel cebir konularını kapsayan 21 sorudan oluşmaktadır. Bazı sorular alt soru içermektedir. Bu test sizin Cebir'deki durumunuzu belirleyecektir. Lütfen tüm soruları cevaplamaya çalışınız. Sınav süresi 40 dakikadır. Başarılar Dileriz

İsim: ______________ ______________
Ad Soyad

İmza: ______________________________

Öğrenci No:

Öğrt. Berna DİRİER - Arş. Gör. Mustafa Çağrı GÜRBÜZ
Uludağ Üniversitesi
2017/2018 Öğretim Yılı

Sorular

1. Aşağıdaki ifadelerden **en küçük ve en büyük** olanı yazınız.

n+1, n+4, n-3, n, n-7

En küçük	En büyük

2. Aşağıda verilen ifadelerden hangisi **daha büyüktür?** Yanıtınızı yuvarlak içine alınız. Seçiminizin nedenini **açıklayınız**.

2n ya da *n+2*

Nedeninizi açıklayınız:..
....
....

3. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

x →	x+2	x →	4x
6 →		3 →	
R →			

4.

(a). n'ye 4 eklendiğinde ***"n+4"*** olarak yazılır. Aşağıdaki ifadelerin her birine "**4" ekleyiniz**.

8	n+5	3n

(b). "n", 4 ile çarpıldığında ***"4n"*** olarak yazılır. Aşağıdaki ifadelerin her birini **"4"** ile **çarpınız**.

8	n+5	3n

5. Boşlukları doldurunuz.

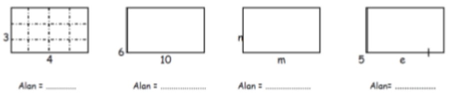
a + b = 43	ise	a + b + 2 = ...
n - 246 = 762	ise	n - 247 = ...
e + f = g	ise	e + f + g = ...

6. Boşlukları doldurunuz.

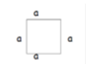
a +5 = 8 ise a nedir? ....

b + 2, 2b'ye eşit ise b nedir?.........................

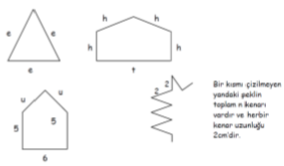
7. Aşağıdaki şekillerin alanı nedir? Hesaplayınız.



8. Aşağıdaki karenin kenar uzunluğu a birimdir.



Bu karenin çevresi, Ç = 4a olarak gösterilir. Buna göre, aşağıdaki şekillerin çevrelerini nasıl yazarız?



9. Kırtasiyede satılan araba dergilerinin tanesi 8, magazin dergilerinin tanesi 6 liradır.

a harfi satın alınan araba dergilerinin sayısını, m harfi de magazin dergilerinin sayısını gösteriyorsa;

8a+6m neyi göstermektedir? ....

Toplam dergi sayısı nasıl ifade edilir?...

10. Eğer u = v+3 ve v = 1 ise, u = ? ....
Eğer m = 3n+1 ve n = 4 ise, m = ? ……….........

11. Eğer Özlem'in Ö, Atakan'ın da A kadar misketi varsa, ikisinin sahip olduğu toplam misket miktarını nasıl yazarsınız?...

12. a+3a ifadesi sade haliyle 4a olarak yazılır. Aşağıdaki ifadeleri yazılabiliyor ise sade halleriyle yazınız.

2a + 5a = ...	3a - (b + a) = ...
2a + 5b = ...	a + 4 + a - 4 = ...
(a + b) + a = ...	3a – b + a = ...
2a + 5b + a = ...	(a + b) + (a - b) =………….........
(a - b) + b = ...	

13. Eğer, r = s + t ve r + s + t = 30 ise r = ... nedir?

14. Aşağıdaki "Örnek şekil" deki gibi köşegen sayısı kenar sayısından 3 çıkarılarak bulunabilir. Buna göre; 5 kenarlı bir şeklin 2 köşegeni vardır.

57 kenarlı bir şeklin .... köşegeni vardır.

k kenarlı bir şeklin .... köşegeni vardır.

Örnek Şekil

15. Eğer c + d = 10 ve c, d'den ;

c hakkından ne söyleyebiliriz……………………………;

c=……………………………………………………….. kaç olabilir?

16. Ahmet'in haftalık kazancı 200 liradır ve fazla mesai yaptığı her saat başına 20 lira daha almaktadır.

(a). Eğer Ahmet 4 saat fazla mesai yaparsa, haftalık toplam kazancı ne olur?..

(b). Eğer s harfi yapılan fazla mesai saatini ve k harfi de Ahmet'in haftalık toplam kazancını gösteriyorsa; "s" ile "k" arasındaki ilişkiyi gösteren bir denklem yazınız:..

17. Aşağıdaki ifadeler ne zaman doğrudur? Her zaman, Asla, Bazen

Doğru yanıtı doldurunuz. Yanıtınız "Bazen" ise nedenini açıklayınız.

A+B+C=C+A+B	Her zaman doğru ◯ Asla doğru değil ◯	Bazen;…………………………………
L+M+N= L+P+N	Her zaman doğru ◯ Asla doğru değil ◯	Bazen;………………………………….

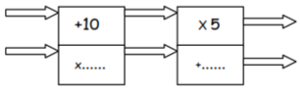
18. a = b + 3 iken "b" 2 artırıldığında "a" ne olur?..

f= 3g + 1 iken "g" 2 artırıldığında "f" ne olur?..

19. Köşe başı büfede; tost "t" liraya, ayran "a" liraya satılmaktadır. Eğer 4 tost ve 3 ayran alınırsa,4t + 3a ifadesi ne anlama gelir?..

20. Kırtasiyede satılan mavi kalemlerin her biri 5, kırmızı kalemlerin her biri 6 liradır. Biraz mavi ve kırmızı kalem alırsam, toplam 90 lira ödüyorum. Eğer "m" adet alınan mavi kalem sayısını, "k" alınan kırmızı kalem sayısını gösteriyorsa, "m" ve "k" hakkında ne yazabilirsiniz?...

21. Aşağıdaki makineyi herhangi bir sayı ile besleyebilirsiniz. Aynı etkiye sahip başka bir makine bulabilir misiniz? Makineniz için formülünüzü yazınız.



Belge sonu

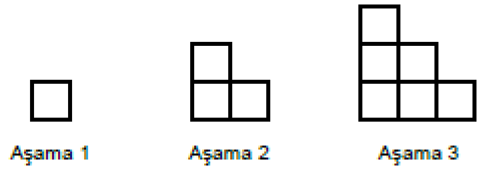
Ek 11. MOT Soruları

Adı- Soyadı: Süre: 45dk.
Sınıfı: 6 ve 7.sınıflara uygundur

MATEMATİK OKURYAZARLIK DÜZEY BELİRLEME SORULARI

BASAMAK MODELİ

Rafet, kareleri kullanarak bir basamak modeli yapmaktadır. Onun izlediği aşamalar şöyledir:



Soru 1.1: Görebileceğiniz gibi, o, Aşama 1 için bir kare, Aşama 2 için üç kare ve Aşama 3 için altı kare kullanmaktadır. Rafet, dördüncü aşama için kaç tane kare kullanmalıdır?

Yanıt: .... kare.

Soru 1.2: Bir kenarında 10 tane kürdanla geniş ve büyük bir kare yapacak olsan bu karenin içerisinde kaç tane küçük kare bulunur? Çözümünüzü çizerek gösteriniz.

Soru 1.3: Herhangi büyüklükte çizilen bir kare içerisindeki küçük kare sayısının kuralını verecek bir formül yazabilir misiniz?

Soru 1.4: Herhangi büyüklükte çizilen bir kareyi oluştururken kullanılan kürdan sayısının kuralını verecek bir formül yazabilir misin?

Adı- Soyadı: Süre: 45dk.
Sınıfı: 6 ve 7.sınıflara uygundur

MATEMATİK OKURYAZARLIK DÜZEY BELİRLEME SORULARI

EN İYİ ARABA

Bir araba dergisi, yeni arabaları değerlendirmek için bir puanlama sistemi kullanmakta ve "Yılın Arabası" ödülünü en yüksek toplam puanı olan arabaya vermektedir. Beş yeni araba değerlendirilmiş ve aldıkları puanlar tabloda gösterilmiştir.

Araba	Emniyet Özellikleri (E)	Yakıt Verimliliği (Y)	Dış Görünüş (D)	İç Bağlantılar (İ)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Puanlar aşağıdaki şekilde yorumlanmaktadır: 3puan =Mükemmel; 2puan = İyi; 1puan = Orta

Soru 2.1: EN İYİ ARABA

Araba dergisi, bir arabanın toplam puanını hesaplamak için, her bir puan grubunun ağırlıklı toplamından oluşan aşağıdaki kuralı kullanmaktadır:

Toplam Puan = (3 x E) +Y + D + İ

"Ca" arabası için toplam puanı hesaplayınız. Yanıtınızı aşağıdaki boşluğa yazınız.

"Ca" için toplam puan : ....

Soru 2.2: EN İYİ ARABA

"Ca" arabasının üreticisi, toplam puan hesabı için kullanılan kuralın adil olmadığını düşünüyor.

Toplam puanı hesaplamak için öyle bir kural yazınız ki ödülü kazanan araba "Ca" olsun.

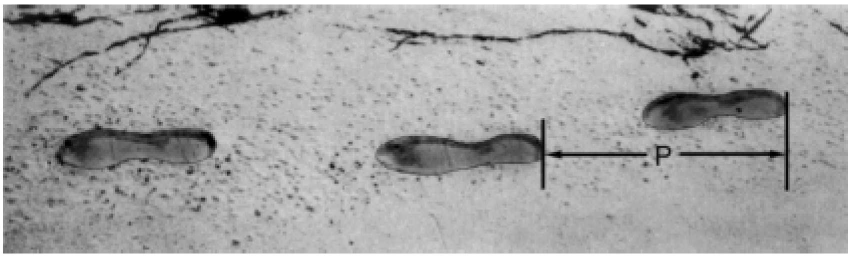
Sizin kuralınız dört değişkenin hepsini kapsamalı ve aşağıdaki eşitlikte bırakılan dört boşluğa pozitif sayılar yerleştirerek kuralınızı yazmalısınız.

Toplam puan = ...× E + ...× Y+ ....× D + ...× İ.

Adı- Soyadı: Süre: 45dk.
Sınıfı: 6 ve 7.sınıflara uygundur

MATEMATİK OKURYAZARLIK DÜZEY BELİRLEME SORULARI

YÜRÜYÜŞ



Resim, yürüyen bir erkeğin ayak izlerini gösteriyor. Adım uzunluğu *P*, ardışık iki ayak izinin topukları arasındaki mesafedir.

n = bir dakikadaki adım sayısı

P = adım uzunluğunu metre olarak belirtirse;

Erkekler için, $\frac{n}{P} = 140$ formülü, *n* ve *P* arasındaki yaklaşık bir ilişkiyi gösterir.

Soru 3.1: YÜRÜYÜŞ

M124Q01- 0 1 2 9

Eğer formül Hakkı'nın yürüyüşüne uygulanırsa ve Hakkı dakikada 70 adım atarsa, Hakkı'nın bir adım uzunluğu ne olur? İşleminizi gösteriniz.

Soru 3.2: YÜRÜYÜŞ

M124Q03- 00 11 21 22 23 24 31 99

Burak, adım uzunluğunun 0,80 metre olduğunu biliyor. Formül Burak'ın yürüyüşüne uygulanır.

Burak'ın bir dakikadaki yürüme hızını metre olarak ve bir saatteki yürüme hızını kilometre olarak hesaplayınız. İşleminizi gösteriniz.

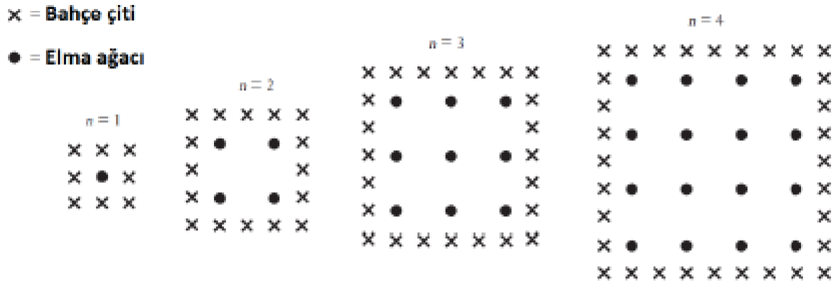
Adı- Soyadı: Süre: 45dk.

Sınıfı: 6 ve 7.sınıflara uygundur

MATEMATİK OKURYAZARLIK DÜZEY BELİRLEME SORULARI

ELMALAR

Bir çiftçi elma ağaçlarını kare şeklindeki bir düzende ekiyor. Elma ağaçlarını rüzgara karşı korumak için, meyve bahçesinin çevresine çit dikiyor. Her sayıdaki ağaç için bahçe çitlerinin dikiliş modelini gösteren şekli aşağıda görüyorsunuz.



Soru 4.1: ELMALAR

M136Q01

Tabloyu doldurunuz.

n	Elma ağaçlarının sayısı	Bahçe çitinin sayısı
1		
2		
3		
4		
5		

Soru 4.2: ELMALAR

Yukarıda verilen model için elma ağaçlarının ve bahçe çitlerinin sayısını hesaplayabileceğiniz iki formül var

Elma ağaçlarının bir satırı n ile gösterildiğinde;

Elma ağaçlarının sayısı = n^2 Bahçe çitlerinin sayısı = $8n$

Elma ağaçlarının sayısının bahçe çitlerinin sayısına eşit olduğu bir n değeri var. Bu “n” değerini bulunuz ve hesaplama yönteminizi gösteriniz.

Soru 4.3: ELMALAR

Çiftçinin çok daha büyük bir meyve bahçesi yapmak istediğini düşünün. Meyve bahçesi büyüdükçe elma ağaçlarının sayısı mı, bahçe çitlerinin sayısı mı daha hızlı artar? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu anlatınız.

Öz Geçmiş

Doğum Yeri ve Yılı:			Ankara-1988
Öğrenim Bilgileri	**Başlama**	**Bitirme**	**Kurum Adı**
Lise	2002	2006	Prof. Dr. Necati Erşen Anadolu Öğretmen Lisesi
Lisans	2007	2011	Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yüksek Lisans	2012	2014	Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri ABD
Doktora	2014	2021	Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri ABD
Bildiği Yabancı Diller ve Düzeyi:			İngilizce- İleri Almanya-Orta
Çalıştığı Kurumlar	**Başlama**	**Ayrılma**	**Kurum adı**
Arş. Gör.	2012	2013	Celal Bayar Üniversitesi Eğitim Fak.
Arş. Gör.	2013	-	Bursa Uludağ Üniversitesi Eğitim Fak.

Tezler

(Yüksek Lisans): PISA matematik okuryazarlık öğretiminin PISA sorusu yazma ve matematik okuryazarlık düzeyleri üzerine etkisi