COBB - DOUGLAS FONKSİYONU

Dr. Hasan AŞKAN

A. GİRİŞ

Marshalian tipteki üretim fonksiyonları içinde, en fazla bilinip kullanılan bu üretim fonksiyonu ismini, araştırmalarının sonucunda, özelliklerini bulan profesör Douglas ile, özelliklerinin ifade edilebilinmesi için matematiksel şekil ileri süren matematikçi Cobb'dan almıştır. Fonksiyon daha önce de Wicksteed [1] tarafından ileri sürülmüş ise de geniş kabul edilebilirliğini araştırmalarıyla fonksiyona büyük destek sağlayan Douglas'a borçludur. Douglas tarafından tahmin edilen orijinal fonksiyon (1) de yazılan şekildedir. Fonksiyonun belirttiği ilişki, Douglas'ın ücretin

$$Q = AL^{\alpha} K^{1-\alpha} \qquad (1)$$

toplam üretim içindeki payını araştırırken bulunmuştur. Douglas, işgücüne yapılan toplam ücret ödemelerini, üretimin sabit bir oranı olarak bulmuştur (2). Öte yandan bilindiği üzere, tam rekabet koşullarında kârını

$$\left(\frac{W}{p}\right) L = \alpha Q \qquad (2)$$

maksimize etmeyi amaçlayan firma, ücret işgücünün marjinal verimliliği eşitliğini gerçekleştireceğinden (2) tekrar (3) de görül-

1 P. Wicksteed, «Co-ordination of the Laws of Distribution», *The Economic Journal*, C. IV, (1894), s. 305 - 313

düğü üzere yazılabilir. Problem bu sonucu veren fonksiyonun ge-

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha \frac{Q}{L} \qquad (3)$$

riye gidilerek bulunmasıdır. Cobb'un katkısı $Q = AL^{\alpha} K^{1-\alpha}$ şeklindeki fonksiyonu ileri sürmesidir. Fonksiyonun işgücüne göre kısmi türevi alındığında (4) te bulunan sonuç bize fonksiyonun izlenen ilişkisiyle tamamiyle uyum içinde olduğunu gösterir. Do-

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = AL^{\alpha} \left(\frac{\alpha}{L}\right) K^{1-\alpha} = \frac{Q}{L} \alpha \qquad (4)$$

layısiyle, fonksiyonun Cobb şekli izlenen gerçekleri yansıtır. Ve fonksiyon üretim faktörleri, başına üretim miktarını verecek şekilde düzenlenirse kısaca (5) te görüldüğü üzere yazılabilir. $\phi(x) = Ax^{(1-\alpha)}$ dan elde edilen (6) da görülen eşitsizlikler ve $\phi'(x)$ nin x sıfıra yaklaşırken sonsuza ve x sonsuza yaklaşırken de

$$y = Ax^{(1-\alpha)} \qquad (5)$$

sıfıra yaklaşması, fonksiyonun «iyi davranan» bir fonksiyon olduğunu belirler.

$$\phi'(x) = \frac{A(1-\alpha)}{x} > 0, \quad \phi''(x) = \frac{-A(1-\alpha)}{x^2} < 0 \qquad (6)$$

B. FONKSİYONUN PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Fonksiyonun parametrelerinin tahmini için de (2) deki eşitlikten yararlanılabilinir. Eşitlikteki $\frac{w}{p}$, Q ve L nin değerleri izlenebilineceğinden α için tahminde bulunulabilinir. Bir tahminden bahsedilmesinin nedeni ise, $\frac{w}{p}$ ile Q — L oranı arasındaki ilişkinin **deterministik** olmayıp **stochastik** olmasındandır. Şayet **determistik** bir eşitlik olsaydı, α ın değeri $\frac{w}{p}$, Q ve L in izlenen birer değerinden bulunabilinir ve diğer bütün değerleri için geçerli olurdu. İlişkinin **stochastik** oluşu ise, $\frac{w}{p}$, Q ve L in farklı değerleri için α ın farklı değerlere sahip olmasına neden olur ve α için en iyi değerin seçimi ekonometrisyenlerin bir işi olarak kalır. Kısaca $\frac{w}{p}$, $\alpha(Q/L)$ eşitliğinin yazılması demek (7) deki eşitliklerin yazılması demektir. Eşitliklerde e ile α in en iyi tahmininden, $\frac{w}{p}$ nin

$$\frac{w}{p} = \alpha \frac{Q}{L} + e \quad \text{veya} \quad \frac{w}{p} = \alpha \frac{Q}{L} e \qquad (7)$$

sapması belirtilir. Sapmaya ölçme hataları veya $\frac{w}{p}$ ye etki eden önemleri az olan değişkenlerin ihmal edilmeleri neden olabilir. Eşitliklerdeki α tipik olarak regresyon analizinden yararlanılarak tahmin edilebilir.[2] α için tahmin elde edildikten sonra, orijinal fonksiyona dönülüp Q ve ($L^{\alpha} K^{1-\alpha}$) değişkenler olarak alınarak bu defa da A, regresyon analizinden yararlanılarak tahmin edilir. α ve A nın belirtilen yöntemle tahmin edilmeleri, L ve K nın üsleri toplamının bire eşit olması sonucunu doğurur. (2) den α değerinin tahmini, orijinal fonksiyonun A yı verebilmesini sağlayacak şekilde K yı sınırlar. Yalnız unutulmaması gerekir ki, $Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$ gibi fonksiyonun başka şekilleri de, orijinal koşulun gerçekleşmesine olanak verirler. Dolayısiyle $\beta = (1 - \alpha)$ test edilmemiş bulunulmaktadır. β nın bu sınırlandırılması, şayet fonksiyon $Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$ olarak tahmin edilirse test edilebilinir. Çünkü, bu şekilde yazılan fonksiyonda, β herhangi bir değeri alabileceğinden $\alpha + \beta = 1$ hipotezi de test edilebilinir. Fakat bu şekliyle fonksiyon **stochastik** ilişkinin parametrelerinin tahmini için kullanılan doğrusal regrasyon tekniklerine uygun değilse de eşitlik (8) de görüldüğü üzere doğrusallaştırılarak problemden kaçınılır. Eşitlikteki

$$\ln Q = \ln A + \beta \ln K + \alpha \ln L \qquad (8)$$

ln Q, ln K ve ln L için izlenen değerler yerine konulduktan sonra A, B ve α nın değerleri için bilinen yoldan tahminler elde edilir. Bu

2 R.J. Wonnacott ve T. H. Wonnacott, *Econometrics*, 1. B., New York, John Wiley and Sons, Inc., 1970, s. 93-95

fonksiyona birçok testler uygulanmıştır. ($\alpha+\beta$) değeri yaklaşık olarak bir alındığında, çeşitli sektör ve ülkeler için yapılan tahminleri iyi sonuç vermiştir.[3]

C. FONKSİYONUN İKAME ELASTİKİYETİ

Üretim fonksiyonları bilindiği üzere, eşürün eğrilerinin (K, L) düzeyinde şekil ve yerlerini belirtirler. Üretim miktarı herhangi bir seviyede (Q) sabitleştirilirse, eşürün eğrilerinin şekli araştırılabilinir. Fonksiyonun toplam türevinden, (9) daki sonuç elde edilir. Şayet

$$O = AK^{-\alpha} (1-\alpha) L^{\alpha} dK + AK^{(1-\alpha)} \alpha L^{(\alpha-1)} dL$$

$$O = (1-\alpha) \frac{Q}{K} dK + \alpha \frac{Q}{L} dL$$

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{K}{L} \tag{9}$$

eğrinin eğimi ($MTİH_{kl}$), kapital-işgücü oranı arttığında artarsa, eğri orijine dışbükey olur. α ve ($1-\alpha$) nın işaretleri aynı olduklarından da dışbükeylik gerçekleşir. Eşürün eğrilerinin dışbükeyliği ise, bilindiği üzere azalan verimlerin varlığı ile ilgilidir ve azalan verimler işgücü ve kapitalin kullanımı miktarı arttıkça sırasıyla $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ nın azalmasını gerektirir. Gerçekten de, (10) daki eşitliklerden görüleceği üzere her iki faktörün marjinal

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = A\alpha \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial K}{\partial Q} = A (1-\alpha) \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha} \tag{10}$$

verimliliği, faktörlerin pozitif miktarlarda kullanımlarında her terim pozitif olduğundan daima pozitifdir ve kullanım miktarı sıfırdan sonsuza giderken de **monotonik** olarak azalır

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \alpha (\alpha-1) AL^{(\alpha-2)} K^{(1-\alpha)} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\alpha (1-\alpha) AL^{\alpha} K^{(-\alpha-1)} \tag{12}$$

---

3 David F. Heathfield, *Production Functions*, I.B., London, The Macmillan Press Ltd., 1971, s. 34.

(11, 12). Açıktır ki, $Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$ şeklinde, azalan verimlerin varlığı için β ve α parametrelerinin ikisinin de sıfır ile bir aralığında bulunması gerekir. Şayet birden büyükler ise, işgücü ve kapitalin kullanım miktarlarındaki artış sırasıyla $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ in (13) te yazılan eşitlerinin artışına neden olduğundan, artan verimlerle karşılaşılmış bulunulur.

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = AK^{\beta}\alpha L^{(\alpha-1)}, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = A\beta K^{(\beta-1)} L^{\alpha} \tag{13}$$

Negatif olmaları halinde ise, $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ nın değerleri negatif olarak azalırlar. Fonksiyonun kısmi türevlerindeki negatif azalma, öte yandan artan verimlerin varlığını işaret eder.

Burada sırası gelmişken, neden α ya faktör yoğunluğu parametresi denildiği araştırılabilinir. Kapitalin işgücü için olan marjinal teknik ikame haddi (s), (10) daki eşitliklerden kolayca elde edilir (14).

$$s = \frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \left(\frac{L}{K}\right) \tag{14}$$

Eşitlikten görüleceği üzere s için verilen herhangi bir değerde α nın büyük değeri küçük kapital - işgücü oranının varlığına neden olur. Dolayısiyle, bir üretim noktasındaki α ın büyük değeri, daha işgücü yoğun üretim faaliyetini gerektirir.

Eşürün eğrisinin şeklini, ikame elastikiyeti parametresinin belirteceği bilinir. s. nin eşitinin, kapital - işgücü oranına (x) göre türevi alındığında (15) teki eşitlik bulunur. Eşitlik

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \tag{15}$$

tersine çevrilip s - x oranı ile çarpıldığında görülür ki, ikame elastikiyetinin değeri bire eşittir (16). Fonk siyonun ikame elastikiyetinin değeri, faktörlerin birleşim oranlarından ve ölçeğe verimlilik-

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{s}{x} = \sigma = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\,\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \left(\frac{K}{L}\right) \left(\frac{L}{K}\right) = 1 \tag{16}$$

ten bağımsız olarak birdir. Fonksiyonun bu özelliği, işgücü ve kapitalin arzlarındaki nispi değişmelerde nispi paylarının sabit kalmasını garanti etmesinden çok bilinen bir özelliğidir.

Denge koşullarında bilindiği üzere, $MTİH_{kl}$ w—r oranına eşittir ve ölçeğe göre verimlerin sabit olması halinde (17) de görülen eşitlik elde edilir. Bu eşitliğin solu, üretimden işgücünün aldığı payın kapitalin aldığı paya oranını verir. Görüldüğü üzere faktör-

$$\frac{wL}{rK} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{17}$$

lerin payları oranı, fonksiyona hakim olan teknoloji tarafından tayin edilen sabit üretim elastikiyetlerinin oranına eşittir. α ın β ya göre nispi büyüklüğü işgücünün payının kapitalinkine oranla yüksek olmasına neden olur. Teknolojik ilerlemenin söz konusu olmamasında, faktörlerin nispi fiatlarında oluşan orantılı değişiklik faktörlerin nispi kullanımlarında fiat etkisini gideren orantılı değişmeye neden olarak faktörlerin nispi paylarını etkilemez. İkame elastikiyetinin değerinin sabit fakat bir olmaması halinde ise, arzlarındaki değişiklikler faktörlerin nispi paylarını etkiler. (16). daki eşitlik düzenlenir. İki yanının entegrali alındığında c nin entegralinin sabitini belirttiği s için (18) deki eşitlik bulunur. s nin eşiti w—r oranı yerine

$$\int \frac{ds}{s} = \frac{1}{\sigma} \int \frac{dx}{x} - ; \qquad \ln s = \frac{1}{\sigma} \ln x + \ln c$$

$$s = cx^{1/\sigma} \tag{18}$$

konulduktan sonra, her iki yanı X^{-1} (= L/K) ile çarpıldığında (19) daki sonuç elde edilir. Açıktır ki, ikame elastikiyetinin değeri bire eşit olduğunda, eşitlikten C—D fonksiyonuna sahip olunduğunda bulunan sonuç elde edilir. Bir olmaması halinde ise, faktör arzlarındaki verilen değişiklik sonucunda değerin birden büyük veya küçük oluşuna göre faktörün üretimdeki nispi payı artar veya eksilir. Üretim elastikiyetleri ve ikame elastikiyeti değerlerini sabit olarak vermeyen C—D fonksiyonunun başka şekillerine de rastlanmaktadır. Fonksiyonun özelliklerine ancak belirli aralıklarda sahip olan bu fonksiyonlara bazı misaller verilebilinir.

$$\frac{w}{r} x^{-1} = cx^{(1/\sigma)-1} \tag{19}$$

Fonksiyonun diğer bir özelliği daha vardır ki, fazla arzulanmayan bir özelliğidir. C—D fonksiyonunda olduğu gibi marjinal

$$Q = K^{(1-\alpha)} L^{\alpha} e^{\beta L^4} \qquad (20)$$

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta} e^{(Y \ln L \ln K)^5} \qquad (21)$$

verimlilikler daima pozitif ise, faktörlerden birinin miktarı sabit tutulurken diğerinin miktarı sonsuza arttırıldığında, miktarı arttırılan faktörün marjinal verimliliği sıfıra yaklaşır (22). Şayet bu limitler geçerliyse c_1 ve c_2 nin

$$\lim_{L \to \infty} \frac{\partial Q}{\partial L} = 0 \text{ veya } \lim_{K \to \infty} \frac{\partial Q}{\partial K} = 0 \qquad (22)$$

pozitif sabitler olduğu (23) teki sonuçlar elde edilir. Bunlar C—D fonksiyonuna uygulandığında, α sıfırdan büyük birden küçük ol-

$$\lim_{L \to \infty} Q = c_1 \quad \text{veya} \lim_{K \to \infty} Q = c_2 \qquad (23)$$

duğundan $\partial Q / \partial L$ nin limiti, L sonsuzuna yaklaşırken sıfır bulunmasına karşın (24), L sonsuza yaklaşırken Q nun limiti sonsuz bulunur (25). Bu sonuçların bulunması

$$\lim_{L \to \infty} \frac{\partial Q}{\partial L} = \lim_{L \to \infty} \alpha A \left(\frac{L}{K} \right)^{(\alpha-1)} = 0 \qquad (24)$$

$$\lim_{L \to \infty} Q = \lim_{L \to \infty} AL^{\alpha} K^{(1-\alpha)} = \infty \qquad (25)$$

ise fonksiyonda bir iç tutarsızlığın varlığı sanısına neden olur. (kapatitalin kullanılan miktarı da sonsuz olarak arttırıldığında, kapitalin marjinal verimliliği için de aynı sonuç bulunur.) Gerçekte ise tutarsızlık sanısı işgücünün kullanım miktarı arttığında sağladığı faydanın, üretimin marjinal verimlilik sıfır olmadan farklaşmasına olanak vereceği bilinirse, kendiliğinden ortadan kalkar.

D. ÖLÇEĞE GÖRE VERİMLER

Şimdi sıra eşürün eğrilerinin (K, L) düzeyinde yerleştirilmesine gelmiş bulunmaktadır. Bu iş, belirli bir üretim miktarının

---

4 C.E. Ferguson ve R.W. Pfonts, «Aggregate Production Function and Relative tactor Shares,» *International Economic Review*, C. III, (1962) s. 335.

eşürün eğrisinin yeri saptandıktan sonra diğer üretim miktarlarının eşürün eğrilerinin yerlerinin nispi olarak saptanmasıyla gerçekleştirilir. Eşürün eğrisinin yerinin saptanması için uygun yöntem faktörlerinin eşit miktarda kullanıldığında gerekli olan kapital miktarının saptanmasıdır. Eşürün eğrisinin ifadesi, $\bar{Q} = AL^{\alpha} K^{(1-\alpha)}$ olduğundan (26) daki eşitlik yazılabilir.

$$Q = A\frac{K}{K\alpha}L^{\alpha} = AK\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha} \qquad (26)$$

Dolayısıyla, L—K oranı bir olduğunda, $(K(\bar{K})$, $(\bar{Q}/A)$ ya ve $\bar{K}$ da $\bar{L}$ ye eşit olduğundan $\bar{L}$ de $(\bar{Q}/A)$ ya eşit bulunur. Görüldüğü üzere, A nın değeri büyüdükçe, verilen üretim miktarının üretilmesi için daha az miktarda kapital ve işgücü gerekmesi, katsayının «verimlilik parametresi» olarak adlandırılmasına neden olmuştur. Bu parametre şüphesiz işgücü, kapital ve üretimin ölçülmesi için seçilen birimden etkilenir. Ayrıca açıktır ki A nın değeri sabit kalırken, $\bar{Q}$ belirttiği üretim miktarının iki misline çıkarılması, gerekli olan kapital ve işgücü miktarının da iki misline çıkartır. Ve böylece diğer eşürün eğrilerinin yerleri de nispi olarak saptanmış bulunur. $2\bar{Q}$ miktarındaki üretimi

belirliyen nokta orijinden iki misli uzakta bulunacak ve iki misli kapital ve işgücü kullanımını gerektirecektir. Bunun tersi düşünüldüğünde, acaba işgücü ve kapitalin kullanım miktarı iki misline çıkarılarak üretim ölçeğinin arttırılması iki misli üretim elde edilmesine neden olur mu? Bilindiği üzere bu gerçekleşirse, ölçeğe göre sabit olan verimlerle karşılaşılmış bulunulur. α ve β değerlerinin herhangi bir kıymeti aldıkları genel durumda ise, işgücü ve kapitalin kullanım miktarındaki değişmelerin üretim seviyesindeki etkileri araştırılabilinir. $Q = AK^{\beta}L^{\alpha}$ fonksiyonundan toplam türevin eşiti (27) de görüldüğü üzere bulunduğundan dQ için (28) de görülen eşitlik elde edilir. Bilindiği üzere ölçeğe göre verimliliklerin incelenebilinmesi için dK/K ve dL/L nin birbirlerine eşit olması gerekir. Ve

---

5 P.K. Newman ve R.C. Read, «Production Functions with Restricted Input Shares,» *International Economic Review*, C. 11, (1961), s. 128.

$$dQ = A\beta\, K^{(\beta-1)}\, L^{\alpha}\, dK + AK^{\beta}\, \alpha L^{(\alpha-1)}\, dL \qquad (27)$$

$$dQ = \frac{\beta Q}{K}\, dK + \frac{\alpha Q}{L}\, dL \qquad (28)$$

dolayısiyle (28) den, dQ/Q nün eşiti (29) da görüldüğü üzere elde edilir. $(\beta+\alpha)$ bire eşitse dQ/Q, dK/K eşitliği derhal bulunur. Değerinin birden büyük veya küçük oluşunda ise, ölçeğe göre ar-

$$dQ = \beta\, \frac{Q}{K}\, dK + \alpha Q\, \frac{dK}{K}$$

$$dQ = \frac{dK}{K}\, Q\, (\beta+\alpha)$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dK}{K}\, (\beta+\alpha) \qquad (29)$$

tan veya azalan verimlerle karşılaşılır. Gerçekten de α ve β ayrı ayrı işgücü ve kapitalin miktarında oluşturulan yüzde değişmelerin üretim miktarında neden oldukları yüzde değişiklikleri temsil ederler. Üretim faktörlerinin marjinal verimlilikleri, kendi parametreleriyle ortalama verimliliklerinin çarpımına eşit olduğunda α ve β, (30) da da görüldüğü üzere sırasıyla üretimin işgücü ve kapitale göre kısmî elastikiyetleridir. İki parametre birlikte alınınca da

$$\alpha = \frac{\partial Q}{\partial L}\, \frac{L}{Q}, \quad \beta = \frac{\partial Q}{\partial K}\, \frac{K}{Q} \qquad (30)$$

işgücü ve kapital miktarında verilen yüzde değişme için üretim seviyesinde oluşan toplam yüzde değişme ölçülür. Burada belirtilmelidir ki, üretimin ölçeğindeki değişiklik sonucunda oluşan ölçeğe verimlilikte değişme ile teknolojik ilerlemelerin neden olduğu değişiklikleri birbirinden ayırdetme C—D üretim fonksiyonları için güçtür. Bunun unutulmaması koşuluyla denilebilinir ki, yaklaşık olarak üretim elastikiyetleri toplamı teknolojik seviyedeki küçük değişmelerden etkilenir. Ve üretim fonksiyonlarında bu nedenle oluşan değişiklikler faktörlerin üretim elastikiyetlerini etkilemediklerinden aşağıda görülecek olan yansız teknolojik ilerleme sınıfındandırlar.

Maliyet eğrileriyle ölçeğe göre verimlerin çeşitleri arasındaki ilişki de, üretim faktörlerinin fiatları sabit alındığında toplam maliyetler yalnızca üretim miktarının fonksiyonu olduklarından, fonksiyonun elde edilmesi oldukça karışık olmasına karşın bulunabilir. Gelişim yolunun, yukarıda (17) de görülen tanımı ile fonksiyonun logaritmaları alınıp eş-anlı denklem çifti olarak yazılırsa, (31) de görülen denklem çifti elde edilir. Bu çift L ve K değerleri için çözüldüğünde bu defa (32) deki

$$\begin{aligned} \alpha\ln L + \beta\ln K &= \ln Q - \ln A \\ -\ln L + \ln K &= \ln\beta - \ln a + \ln w - \ln r \end{aligned} \tag{31}$$

denklem çifti elde edilir. Denklem çiftinde, L* ve K* maliyetleri minimize

$$\begin{aligned} L^* &= (A^{-1} Q \beta^{-\beta} \alpha^{\beta} w^{-\beta} r^{\beta})^{1/(\alpha+\beta)} \\ K^* &= (A^{-1} Q \beta^{\alpha} \alpha^{-\alpha} w^{\alpha} r^{-\alpha})^{1/(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{32}$$

eden üretim faktörleri oranında, Q birim üretim için gereken işgücü ve kapital miktarlarını belirtirler. Q birim üretimin maliyeti dolayısiyle $(wL^* + rK^*)$ olduğundan ,toplam maliyetin eşiti (33) te görüldüğü üzere

$$\begin{aligned} TM = {} & r\left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\alpha} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} \\ & + w\left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{-\beta} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{33}$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki terim yerine (34) de bulunmuş eşiti alındığında toplam maliyetin eşiti (35) veya (36) daki eşitlerine dönüşür. (36) da görülen teknoloji parametreleri A, α, β ve piya-

$$w\left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{-\beta} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} = \frac{w\left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{-\beta} \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\alpha+\beta} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)}}{\left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{(\alpha+\beta)} \right\}^{1/(\alpha-\beta)}}$$

$$= \frac{w \{ (\frac{\beta w}{\alpha r})^{-\alpha} \frac{A}{Q} \}^{1/(\alpha+\beta)}}{(\frac{\beta w}{\alpha r})} \tag{34}$$

$$= \frac{\alpha r}{\beta} \{ (\frac{\beta w}{\alpha r})^{\alpha} \frac{Q}{A} \}^{1/(\alpha+\beta)}$$

sa parametreleri w, r veri olarak verildiklerinden, toplam maliyet yalnızca üretim miktarının bir fonksiyonu olur. Ortalama ve marjinal maliyetlerde, toplam maliyet eşitliğinden kolayca elde edilir, (37) ve (38). Toplam, ortalama ve homojen fonksiyonların fonksiyon katsayıları sabit olduğundan marjinal maliyetlerin elastikiyetlerin elastikiyetlerin de sırasıyla (39), (40) ve (41) de görüldüğü üzere yazılır. Elastikiyetlerin eşitliklerinden de görüldüğü gibi,

$$TM = r \{ (\frac{\beta w}{\alpha r})^{\alpha} \frac{Q}{A} \}^{1/(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha r}{\beta} \{ (\frac{\beta w}{\alpha r})^{\alpha} \frac{Q}{A} \}^{1/(\alpha-\beta)} \tag{35}$$

$$TM = r (\frac{\alpha+\beta}{\beta}) \{ (\frac{\beta w}{\alpha r})^{\alpha} \frac{Q}{A} \}^{1/(\alpha+\beta)} \tag{36}$$

$$OM = \{ r (\frac{\alpha+\beta}{\beta}) (\frac{\beta w}{\alpha r})^{\alpha/(\alpha+\beta)} (\frac{1}{A})^{1/(\alpha+\beta)} Q^{(1-\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)} \} \tag{37}$$

$$MM = \frac{1}{\alpha+\beta} \{ r (\frac{\alpha+\beta}{\beta}) (\frac{\beta w}{\alpha r})^{\alpha/(\alpha+\beta)} (\frac{1}{A})^{1/(\alpha+\beta)} Q^{(1-\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)} \} \tag{38}$$

$$\varepsilon_{TM} = \frac{MM}{OM} = \frac{1}{\alpha+\beta} \tag{39}$$

$$\varepsilon_{OM} = \varepsilon_{TM} - 1 = \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \tag{40}$$

$$\varepsilon_{MM} = \varepsilon_{OM} = \varepsilon_{MT} - 1 = \frac{1-\alpha+\beta}{\alpha+\beta} \tag{41}$$

fonksiyonun homojenlik derecesi çok önemlidir. Gerçekten de ortalama ve marjinal fonksiyonları ve türevlerinden marjinal ve ortalama maliyetlerin karşılaştırılması eğrilerinin alçalıp, yükselmeleri ve içbükeyliklerinin yönünün tayini ölçeğe verimlerin aldıkları değerlere göre yapılır. Basitliği gerçekleştirebilmek için, (42) deki eşitsizliğin sol yanı yerine «b» yazılırsa, $\partial MM/\partial Q$, $\partial OM/\partial Q$ $\partial^2 MM/\partial Q^2$ ve $\partial^2 OM/\partial Q^2$ nin eşitleri sırasıyla (43), (44), (45) ve

$$r\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\alpha/(\alpha+\beta)}\left(\frac{1}{A}\right)^{1/(\alpha-\beta)} > 0 \qquad (42)$$

(46) da görüldükleri üzere yazılır. Son iki eşitliğin parantez için-

$$\frac{\partial MM}{\partial Q} = \left\{\frac{1-(\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2}\right\} bQ^{\{1-2(\alpha+\beta)\}/(\alpha+\beta)} \qquad (43)$$

$$\frac{\partial OM}{\partial Q} = \left\{\frac{1-(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)}\right\} bQ^{\{1-2(\alpha+\beta)\}/(\alpha+\beta)} \qquad (44)$$

$$\frac{\partial^2 MM}{\partial Q^2} = \left\{\frac{1-3(\alpha+\beta) + 2(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^3}\right\} bQ^{\{1-3(\alpha+\beta)\}/(\alpha+\beta)} \qquad (45)$$

$$\frac{\partial^2 OM}{\partial Q^2} = \left\{\frac{1-3(\alpha+\beta) + 2(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^4}\right\} bQ^{\{1-3(\alpha+\beta)\}/(\alpha+\beta)} \qquad (46)$$

deki ortak payları, dikkat edilirse $(\alpha+\beta)$ birden büyükken pozitif, .5 ile bir arasındayken negatif ve .5 den küçükken tekrar pozitiftir. Şimdi (37) den başlıyarak yazılan eşitliklerin aracılığıyla marjinal ve ortalama maliyet eğrilerinin özellikleri tayin edilebilir. (37) ve (38) deki eşitliklere göre, ölçeğe göre azalan veya artan verimlerin varlığında, marjinal maliyet ortalama maliyetten fazla veya azdır. (43) ve (44) deki eşitliklere göre, gene ölçeğe göre azalan veya artan verimlerin varlığında, marjinal ve ortalama maliyet eğrileri yükselirler veya alçalırlar. Nihayet (45) ve (46) daki eşitlikler ile $(\alpha+\beta)$ nın bulunduğu aralıklar birlikte düşünülürse, ölçeğe göre artan verimlerin varlığında, her iki maliyet eğrisi de azalır ve yukarıdan içbükeydir. $(\alpha+\beta)$ değeri .5 ile bir arasında ise, yükselirler ve aşağıdan içbükeydirler. Şayet ölçeğe göre azalan verimler şiddetliyse $\{(\alpha+\beta) < .5\}$ eğriler yalnızca yükselmekle kalmaz, yukarıdan da içbükey olurlar. Ölçeğe göre sabit verimlerin varolması halinde ise, (36) daki eşitlik (47) de yazılan şekle dönüşür. Görüldüğü üzere

$$TM = bQ \tag{47}$$

toplam maliyet üretim miktarının doğrusal bir fonksiyonudur ve ortalama ve marjinal maliyetler sabit olup, birbirlerine eşittirler (48).

$$MM = OM = b \tag{48}$$

Geriye üretimin hangi ölçekte gerçekleştirilmesinin saptanması kalır. Şüphesiz kârını maksimize etmeyi amaçlayan firma, ölçeğini kârını maksimize eden ölçek olarak seçer. Firmanın toplam kârını veren eşitlik, üretilen malın fiatına bölündüğünde bulunan eşitlik te (49), bilindiği

$$\pi/p = Q - (w/p)L - (r/p)K \tag{49}$$

üzere (w/p) ve (r/p) sırasıyla $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ ya eşittir. $Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$ üretim fonksiyonunda kısmi türevler ise sırasıyla $\alpha Q/L$ ve $\beta Q/K$ ya eşit olduğundan, (50) deki eşitlik bulunur. Dolayısiyle ölçeğe göre sabit

$$\pi/p = Q(1 - (\alpha+\beta)) \tag{50}$$

verimlerin varlığında toplam kâr sıfırdır. Normal kârdan fazlasının veya eksiğinin elde edilmesi olanaksızdır. Ölçeğe göre artan verimlerin varlığında ise, negatif kârla karşılaşılır. Üretim faktörleri beraberce ürettiklerinden daha fazlasını tüketirler. Bu paradoksun nedeni fiatların sabit kaldığı tam rekabet koşullarının varlığı varsayımıdır. Şüphesiz bu varsayım, üretimin sonsuz değişebilirliğinde devamlı yapılamaz. Üretim faktörleri ve üretilen malın fiatları etkilenecek ve verilen aşağı eğimli talep ve yukarı eğimli arz fonksiyonları, firmanın kârını maksimize yapan ölçeği bulmasını sağlayacaklardır. Açıktır ki, piyasa koşulları bilinmeden üretimin ölçeği, üretim fonksiyonu ve fiatlar araştırılarak bulunamaz.

E. TEKNOLOJİK İLERLEME

Fonksiyonun diğer bir gelişimi, zaman boyunca bilinen bütün üretim tekniklerinin gelişiminin kabulü ile sağlanmıştır. Yeni alternatiflerin yaratılması teknolojik ilerleme olarak tanımlanır.

Üretim fonksiyonları, eşürün eğrilerinin şekil ve yerlerini belirttiğinden, herhangi bir teknolojik ilerlemede fonksiyonun bazı veya bütün parametrelerini etkiliyecektir. Genellikle α ve β parametrelerinin zaman boyunca sabit kaldığı varsayılarak, dikkatler verimlilik parametresi A ya çevrilir. A parametresi, eşürün eğrisinin yerini belirliyeceğinden teknolojik ilerleme eşürün eğrisinin hareketi ile tanımlanır. Eşürün eğrilerinin orijin yönünde tam yatay veya dikey olarak kaymaları (faktörlerden biri veya diğerinden aynı miktarda üretimde bulunulması için daha az miktarda kullanım yeterlidir), iki **ekstrim** durumu belirler. İlkinde verilen üretim daha az miktardaki işgücünün verilen kapital miktarıyla, ikincisinde gene verilen üretim daha az miktardaki kapitalin verilen işgücü miktarıyla gerçekleşir. Bu iki uçun dışında ise, verilen üretim miktarı daha az miktarlardaki işgücü ve kapitalin kullanılmasıyla gerçekleşir. Eşürün eğrileri orijine doğru **diyagonal** olarak kaymışlardır. (Faktör miktarlarını arttırıcı teknolojik ilerleme bu tipteki kaymalarla temsil edilir.) Eşürün eğrilerinin yatay, dik ve **diyagonal** kaymalarıyla belirlenen teknolojik ilerlemeler, bilindiği üzere sırasıyla Harrod, Solow ve Hicks anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeleri belirlerler. Bunların fonksiyonda aynı cebirsel ifadelere sahip olmaları, deneysel olarak birbirlerinden ayrılabilinmelerini olanaksız kılar. İlk olarak A parametresindeki değişmelerle tam uyum halinde olan, Hick anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyonu yazalım. Teknolojik ilerlemenin sabit bir m haddinde olduğu varsayılırsa, fonksiyon (51) de görüldüğü üzere yazılır. Gene A, m, α ve β parametreleri, şayet fonksiyon değişkenlerinin tabii logaritmaları alınarak doğrusallaştırılabilinirse adi regresyon tekniklerinden yararlanılarak tahmin edilebilir. Öte yandan Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemede,

$$Q = A\, e^{m_1 t}\, L^{\alpha}\, K^{\beta} \tag{51}$$

işgücünün verimliliğindeki artışla ifade edilebilir. Şayet işgücünün verimliliği sabit bir m_2 haddinde gelişyorsa, fonksyon (52) de görüldüğü üzere yazılır ve $m_2\alpha$ nin m_1 e eşit olduğunda Hicks anlamındaki ilerlemeyi veren

$$Q = A\, e^{m_2 t \alpha}\, L^{\alpha}\, K^{\beta} \tag{52}$$

fonksiyon elde edilir. Solow anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyonda (53) de görüldüğü üzere yazılır. Gene $m_3\beta$ nin m_1 e eşit

$$Q = A\, e^{m_3 t \beta} L^{\alpha}\, K^{\beta} \qquad (53)$$

oluşunda Hicks anlamındaki ilerlemeyi veren fonksiyon elde edilir. Çünkü fonksiyonun α veya β parametresi, teknolojik ilerlemeden etkilenmedikçe veya faktörlerin nispi fiatları değişmedikçe faktörlerin birleşim oranları etkilenmez. $Q = AL^{\alpha}\ K^{\beta}$ şeklinde yazılan üretim fonksiyonunda işgücü-kapital oranı, $\alpha r - \beta w$ oranına eşit olduğundan (17), birleşim oranlarının sabit kalma nedeni kolayca anlaşılır.

Dolayısiyle yanlı teknolojik ilerlemelerde, üretim elastikiyetleri oranındaki değişiklikle saptanırlar. Bu değişikliklerde kapitalin işgücü için olan marjinal teknik ikame haddi etkilenir. Ve faktörlerin kullanım miktarlarının tasarruf ettirici veya arttırıcı teknolojik ilerlemelerde $\alpha - \beta$ oranındaki değişmenin yönüne göre birbirinden ayırdedilirler. α nin β ya göre nispi olarak yükselmesi, faktörlerin verilen birleşiminde işgücünün marjinal verimliliğinin nispi olarak artması demek olduğundan, işgücü kullanan teknolojik ilerleme ile karşılaşılır. $\alpha - \beta$ oranı verilen faktör fiatları veya arzlarında, üretimde kullanılacak işgücü - kapital oranını verir. Verilen faktör fiatlarında, oranın değerinin büyüklüğü kapitale oranla daha fazla miktarda işgücü faktörünün kullanımını gerektirir. İşgücü-kapital oranı, üretimdeki kapitalin yoğunluğunu belirttiğinden de üretim elastikiyetleri oranı üretimdeki kapitalin yoğunluğunu verir. Üretimdeki kapital yoğunluğu bilindiği üzere, üretimin teknolojik koşulları tarafından belirlenir ve fonksiyondaki elastikiyetler de bu koşulların ifadeleridir. Fakat önceden yanlı teknolojik ilerlemelerin üretimi nasıl etkiliyeceklerini bilmek zordur. Bununla birlikte konu, bu fonksiyonu özel bir hal olarak kapsayan CES üretim fonksiyonunun incelenmesinde açıklığa kavuşur.

Teknolojik ilerlemelerin bağımlı olması halinde de, fonksiyon verimlilik ayarlanması yapılmış kapital malları stokuyla yazılabilir. v yılında üretilmiş bulunan kapital malında istihdam edilen işgücünün t zamanındaki üretimini veren fonksiyon (54) te görüldüğü üzere yazılır. Fonksiyonda, I(v) kapital malına yapılmış bulunan gross yatırımın hacmini,

$$Q_v(t) = A\, e^{mv}\, L_v^{\alpha}(t) \left\{ e^{-n(t-v)}\, I(v) \right\}^{(1-\alpha)} \qquad (54)$$

m, I(v) deki teknolojik gelişmenin ve n de ekonomik nedenlerle oluşan değer kaybının etkilerini belirler. Q(t) nin eşitinin $\int_{-\infty}^{t} Q_v(t)\,dv$ ve L(t) nin eşitinin de $\int_{-\infty}^{t} L_v(t)\,dv$ olduğunu varsayarsak, v yılında üretilmiş kapital malında çalışan işgücünün t zamanındaki marjinal verimliliğinin eşiti, (55) te yazıldığı üzere

$$\frac{\partial Q_v(t)}{\partial L_v(t)} = \alpha A\, e^{mv} \left\{ e^{-n(t-v)}\, I(v) \right\}^{(1-\alpha)} L^{(\alpha-1)}(t) \qquad (55)$$

bulunur. Optimum dağılımın gerçekleştirildiği varsayıldığından, marjinal verimliliğin eşiti yerine konulduğunda (56) elde edilir. Bu eşitlik her yaştaki kapital mallarında çalışanların marjinal verimliliklerinin aynı

$$\frac{w}{p}(t) = \alpha A\, e^{mv} \left\{ e^{-n(t-v)}\, I(v) \right\}^{(1-\alpha)} L_v^{(\alpha-1)}(t) \qquad (56)$$

oluşunun bir ifadesidir. Eşitlik $L_v(t)$ için bir ifade elde edilmek üzere çözüldüğünde, (57) deki eşitlik elde edilir. (57) de $\left(\frac{w}{p}\right)^{-1/(1-\alpha)}(t)\ (\alpha A)^{-1/(1-\alpha)}$ yerine a(t) ve $\{m/(1-\alpha)\} + n$ yerine de b yazılırsa, eşitlik (58) de görüldüğü üzere daha basit olarak yazılabilir. $L_v(t)$ için bulunan eşiti (54) de yerine konul-

$$L_v(t) = \left(\frac{w}{p}\right)^{-1/(1-\alpha)}(t)\ (\alpha A)^{-1/(1-\alpha)}\ I(v)\ e^{\{mv/(1-\alpha)\}-n(t-v)} \qquad (57)$$

$$L_v(t) = a(t)\ I(v)\ e^{bv-nt} \qquad (58)$$

duğunda, $Q_v(t)$ için (59) da görülen yeni eşitlik elde edilir. Ve eşitliğin entegralinin alınmasına sıra gelir.

$$Q_v(t) = A\, a^{\alpha}(t)\, I(v)\, e^{bv-nt} \tag{59}$$

$a^{\alpha}(t)$ nin (56) danda yararlanılarak elde edilen eşiti yerine konulduğunda, $Q(t)$ nin eşitini verecek olan entegral (60) da görüldüğü üzere yazılır. Entegral yalnızca v yi kapsadığından da

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} A e^{mv-n(t-v)(1-\alpha)}\, I^{(1-\alpha)}(v)\, L^{\alpha}(t)\, dv \tag{60}$$

eşitlik tekrar (61) de görüldüğü üzere yazılır. $\int_{-\infty}^{t} e^{bv}\, I(v)\, dv$, $J(t)$ olarak tanımlanırsa, üretim miktarını veren fonksiyon (62) de görüldüğü

$$Q(t) = AL^{\alpha}(t) \int_{-\infty}^{t} e^{bv(1-\alpha)}\, I^{(1-\alpha)}(v)\, dv \tag{61}$$

üzere elde edilir. Fonksiyonda, $J(t)$ verimlilik ayarlaması yapılmış kapital

$$Q(t) = AL^{\alpha}(t)\, J^{(1-\alpha)}(t) \tag{62}$$

stokunun toplam miktarıdır. Şayet bağımsız teknolojik ilerleme haddi de fonksiyona ilave edilirse, fark yalnızca $J(t)$ nin varlığı nedeni ile oluşur.

Nihayet toplam verimliliklerdeki değişmeleri ölçmede, en temel yöntem olan oran yönteminin (gerçek miktarda belirtilen toplam üretimin gene gerçek miktarla belirtilen toplam üretim faktörlerine oranlanması) yaygın olarak kullanılması bulunacak sonucun eksikliği belirtilmesini zorunlu kılar.[6]

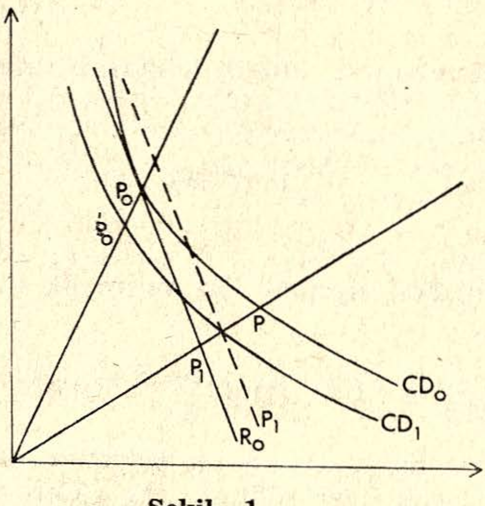
---

6 S. Clemhont, «The Ratio Method of Productivity Measurement», *The Economic Journal*, C. LXXIII, (1963), s. 360

$Q = A(t)\ (\frac{1}{\alpha}K + \frac{1}{\beta}\ L)$ doğrusal üretim fonksiyonunda, verimlilik kalan olarak bulunulur. Kapital ve işgücünün doğrusal olarak ağırlıklaştırıldığında toplam faktör indeksini veren formül kullanılırsa, (63) de yazılmış bulunan eşitlik elde edilir. Ve şayet üretim ilişkileri Cobb-Douglas şeklindeyken $A(t)\ (\frac{1}{\alpha}K + \frac{1}{\beta}\ L)$ ile temsil edilirse formülden yararlanılarak bulunacak sonuç yan-

$$\frac{d \ln Q}{dt} - \frac{d\{\ln(\frac{\alpha}{1}\ K + \frac{1}{\beta}L)\}}{dt} = \frac{d\{\ln A(t)\}}{dt} \qquad (63)$$

lış olur. Şekil 1 de, CD_0 ve CD_1 ile belirtilen eşürün eğrileri t_0 ve t_1 zamanında, Cobb-Douglas fonksiyonunu temsil ederlerse, üretim miktarı sabitken fonksiyonun kayması sonucunda üretim noktası-



Şekil 1.

nın p_0 dan p_1' ne kayması gerçek verimlilik artışına eşittir. Bu eşitliğin varlığı, p_0 ile p_0' noktalarının karşılaştırılmasında kolayca görürülür. Ve dolayısiyle de teknolojik bir ilerleme ile karşı karşıya kalınır. Öte yandan $Q = A(t)\ (\frac{1}{\alpha}K + \frac{1}{\beta}L)$ üretim fonksiyonunun p_0 ve p_1 noktalarından geçen eşürün eğrileri R_0 ve R_1 ile gösterildiğinde p_1', t_0 ve p_1 de t_1 zamanlarındaki üretim noktaları olarak düşünüldüğünde $OP_1'P_1$ doğrusu üzerindeki P_1 noktası paralelin dışında kalır. Ve oran yöntemi, t_1 zamanında aynı miktarda üretimde bulunabilmek için t_0 zamanında gereken faktör miktarlarından daha fazlasının kullanılması gerektiğini gösterir. Kısaca Cobb-Douglas fonksiyonu teknolojik ilerlemeyi verirken, oran yöntemi gerilemeyi verir.

F. SONUÇ

Bu fonksiyona başlangıçta gösterilen tepkiler aleyhte idi ve Menderhansen [7] ise, en şiddetli tepkiyi gösteren idi. Her üç değişkeninde, bir dördüncü değişkenin, zaman değişkeninin fonksiyonu olduğunu ileri sürdü. Douglas tarafından varsayılan üretim, kapital ve işgücü arasındaki ilişkiler gerçekte varolmayıp, nispi büyüme hadlerinin sonuçlarıdır. Temeldeki sorun nispi hadlerin fonksiyon tarafından mı açıklandığı yoksa açıklamanın başka yerlerde olup da Cobb-Douglas şeklinde bir ilişkiye mi neden olmuştur? Gerçekte ise böyle sorun yoktur. Çünkü, nispi hadlerin teknik olanaklar ve üretim faktörleri oranları tarafından tayin edilmesinin amaçlanması esasen üretim fonksiyonlarının tanımı ile çelişir.

Fonksiyona daha teorik tenkitler ise kaynağını toplama problemin varlığından almaktadırlar. Üretim fonksiyonları, firmaların karşılaştıkları teknolojilerin ifadeleriyken faktörlerin birleşim oranlarını ve üretim seviyesini firmaların kendileri seçerler. Sorun çeşitli sektörler veya ekonominin tamamı için yararlanılabililinecek üretim fonksiyonlarının elde edilmesidir. Bazı zorluklar hemen ilk anda akla gelir. Firmalar için sabit olan bazı faktörler endüstrinin bütünü için sabit değillerken, firmalar için değişken olan faktörlerden bazıları, endüstri için sabit olabilirler. Bu etkiler, endüstrinin toplam üretimi firmanın üretim fonksiyonuna sokularak kapsanabilinirse de, toplama problemi üzerinde çalışırken kapsanmamaları daha uygundur. Dolayısiyle firmaların üretim fonksiyonlarının, endüstrinin toplam üretim fonksiyonundan bağımsızlığı varsayılır. Üretim fonksiyonlarında genel toplama probleminin ilk sistematik incelenmesini Klein [8] yapmıştır. Klein mikro fonksiyonlardan toplam üretim fonksiyonları ve marjinal verimlilik ilişkilerinin bulunabilinmesi için, ağırlıkların her firma için elastikiyetlerle orantılı olduğu mikro değişkenlerin ağırlıklı

---

7 H. Menderhansen, «On the Significance of Professor Douglas' Production Function», *Econometrica*, C. VI, (1938), s. 143-153

geometrik ortalamalarının bulunması gerektiğini ileri sürer. Makro fonksiyonun elastikiyetleri, ağırlıkların faktörler için yapılan harcamalar ile orantılı olduğu mikro elastikiyetlerinin ağırlıklı ortalamalarıdır. Makro gelir ise, makro fiatın, mikro gelirlerin aritmetik ortalaması olarak tanımlanabilen makro miktarla çarpımına eşittir. Benzer tanımlar, makro ücret ve kapital harcamaları için de yapılır. Fakat Kleinian toplama şüpheli sonuçlara sahiptir. w_i ve L_i firmada ödenen ücret haddi ve istihdam edilen homojen işgücü miktarını belirlerse, w nin makro ücret haddi olduğu (64) de görülen eşitlik yazılabilir. α_i firmadaki işgücünün elastikiyetini belirtirse, makro işgücü faktörünün

$$wL = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i L_i \tag{64}$$

tanımı (65) te görüldüğü üzere verilir. Tam rekabet koşulları

$$L = \prod_{i=1} L_i^{\alpha_i / \Sigma \alpha_i} \tag{65}$$

altında, her firma işgücüne aynı ücreti (w^*), ödeyeceğinden, ikame gerçekleştirildiğinde (66) da yazılan ücret haddinin eşiti elde edilir. Açıktır ki, makro ücret haddi büyük bir olasılıkla daima

$$w = w^* \sum_{i=1}^{n} L_i / n \prod L_i^{\alpha_i / \Sigma \alpha_i} \tag{66}$$

firmaların ödedikleri ücret haddinden farklı olacaktır. Gerek w nin anlamını ve gerekse w^* farklılığının nedenini yorumlamak güçtür ve aynı güçlükle üretim ve kapitalin fiatlarını anlamada da karşılaşılır. Bu karışıklıklar, Nataf [9] tarafından giderilmiştir. Kabul edilebilen bir toplamanın, ancak üretim fonksiyonunun toplam halinde ayrılabilindiğinde gerçekleşeceğini ispatlamıştır. Gerçekten de fonksiyon w_0, w_1 ve w_2 nin sabit ağırlıklar oldukları (67) de görüldüğü şekilde yazılabilinmelidir. Cobb-Douglas fonksiyonu bu

---

8 L.R. Klein, «Macroeconomies and the Theory of Rational Behavior,» *Econometrica*, C. XIV, (1946), s. 93-108

9 A. Natal, «Sur la Possibilite de Construction de Certains Macromadels, *Econometrica*, C. XVIII, (1950), s. 232-244

koşulu sağlamazsa da, logaritmik olarak yazıldığında toplam halinde ayrılabilinir ve böylece

$$Q^{W_0} = \frac{1}{\alpha} K^{W_1} + \frac{1}{\beta} L^{W_2} \qquad (67)$$

Klein'in geometrik ortalamalarından yararlanılması gerçekleşir. (Fakat makro elastikiyetler, mikro elastikiyetlerin aritmetik ortalamaları olduğundan zorluklar halâ giderilmemiş bulunmaktadır. Klein'e göre uygun makro elastikiyetlerin bulunabilinmesi için. ağırlıkların üretimle orantılı olduğu ağırlıklı ortalama bulunmalıdır. Bunun anlamı ise, makro faktörlerin ölçülmesinin üretim miktarına bağımlı olması demektir. Açıktır ki, ağılıklar üretimden bağımsız olmalıdırlar.) Gerçekten, Cobb-Douglas fonksiyonu, toplamalara olanak verir. Houthakker [10] doğrusal programlama tipindeki üretim fonksiyonlarından endüstrinin üretim fonksiyonunun, Cobb-Douglas şeklinde olacağını göstermiştir. Her firmanın müteşebbislik kapasitesi, sabit olan üretim faktörleri-üretim oranıyla yansıtılmıştır. Yüksek kapasiteler, az değerdeki ve az kapasiteler ise, büyük değerdeki oranların varlıklarına neden olur. Şayet bu oranların dağılım pareto şeklindeyse, toplam fonksiyonun şekli Cobb-Douglas'tır. Klein'inde [11] Cobb-Douglas fonksiyonunun birçok şekillerinden nasıl toplam üretim fonksiyonlarının elde edileceğini göstermiştir.

Nihayet fonksiyon, faktörlerin ikame edilebilirliğini varsayar ve faktörlerin birbirlerini tamamlayıcılığı halinde üretim fonksiyonunun tahmin edilebilirliğini kapsamaz. Gerçekten de fonksiyon yalnız işgücü ve kapital arasındaki uzun dönem ilişkilerin tahmininde kullanılmalıdır.

Gerçek hayatta, ikame elastikiyetinin değerinin bir olması için hiçbir neden bulunmamaktadır. Değerin bir olmaması halinde ise, fonksiyon doğru olmayan sonuçlar verir. Dolayısiyle de ikame elastikiyeti değerinin sabit fakat bir olmadığı fonksiyonun incelenmesine gerek duyulduğundan, CES fonksiyonunun incelenmesine neden bulunmaktadır.

---

10 H. Houthakker, «The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis», *Review of Economie Studies*, C. XXIII, (1955-1956), s. 27-31

11 L.R. Klein, «Remarks on the Theory of Aggregation», *Econometrica*, C. XXVII, (1959), s. 123-141