



**OLUŞUM TİPİ LİNEER OLMAYAN  
PARÇA TÜREVLİ DİFERENSİYEL  
DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

**Yakup YILDIRIM**



T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**OLUŞUM TİPİ LİNEER OLMAYAN PARÇA TÜREVLİ DİFERENSİYEL  
DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

**Yakup YILDIRIM**

Doç. Dr. Emrullah YAŞAR  
(Danışman)

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2019

**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ ONAYI

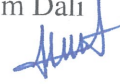
Yakup Yıldırım tarafından hazırlanan “ Oluşum Tipi Lineer Olmayan Parça Türevli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri ” adlı tez çalışması jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Emrullah Yaşar

**Başkan** : Doç. Dr. Emrullah Yaşar  
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı



**Üye** : Prof. Dr. Filiz Taşcan Güney  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı



**Üye** : Doç. Dr. Hüseyin Ovalıoğlu  
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Fizik Anabilim Dalı



**Üye** : Doç. Dr. Sait San  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı



**Üye** : Dr. Öğr. Üyesi Nisa Çelik  
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM

Enstitü Müdürü

6.../5.../2019

**B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

6.5.2019

**Yakup YILDIRIM**

## ÖZET

Doktora Tezi

### OLUŞUM TİPİ LİNEER OLMAYAN PARÇA TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

**Yakup YILDIRIM**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

**Danşman:** Doç. Dr. Emrullah Yaşar

Bu tez çalışmasında oluşum tipi lineer olmayan parça türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümleri araştırılmıştır. (1+1) boyutlu genelleştirilmiş bir Korteweg–de Vries denklemi, (2+1) boyutlu Sawada–Kotera denklemi, yeni genelleştirilmiş bir (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemi, (2+1) boyutlu yerel olmayan Ito denklemi, (2+1) boyutlu kırılğan soliton denklemi ve yedinci mertebeden kesirli Sawada–Kotera–Ito denklemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir. İlerleyen dalga çözümü, knoidal dalga çözümü, sinoidal dalga çözümü, bir soliton çözümü, iki soliton çözümü, üç soliton çözümü, kompleksiton çözümü, çoklu soliton çözümü, lump tipi çözümü, rasyonel çözümü, soliton çözümü, poziton çözümü, negaton çözümü, rasyonel-soliton-poziton etkileşim çözümü ve kuvvet seri çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlerin elde edilmesi için en basit denklem metodu, yeni test fonksiyon metodu, çoklu eksponansiyel fonksiyon metodu, geliştirilmiş rasyonel fonksiyon metodu, lump ve lump tipi çözüm algoritması, Wronskian determinant algoritması, kuvvet seri metodu ve Lie simetri yaklaşımları tüm adımlarıyla birlikte sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Hirota türev operatörleri, genelleştirilmiş Hirota türev operatörleri, Wronskian determinantı, Riemann–Liouville kesir türevi, tam çözümler, Lie simetrileri.

**2019, ix+127 sayfa.**

## ABSTRACT

PhD Thesis

### EXACT SOLUTIONS TO EVOLUTION TYPE NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Yakup YILDIRIM**

Bursa Uludag University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

**Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. Emrullah Yaşar

In this thesis study, the exact solutions to evolution type nonlinear partial differential equations have been investigated. The exact solutions to (1+1)-dimensional an extended Korteweg–de Vries equation, (2+1)-dimensional Sawada-Kotera equation, a new extended (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation, (2+1)-dimensional non-local Ito equation, (2+1)- dimensional the breaking soliton equation and seventh-order time fractional Sawada-Kotera-Ito equation have been obtained. The traveling wave solution, cnoidal wave solution, snoidal wave solution, one soliton solution, two soliton solution, three soliton solution, complexiton solution, multi-soliton solution, lump-type solution, rational solution, soliton solution, positon solution, negaton solution, rational-soliton-positon interaction solution and power series solutions have been obtained. In order to obtain these solutions, the simplest equation method, novel test function method, multiple exp-function method, extended transformed rational function method, lump and lump-type solution algorithm, Wronskian determinant algorithm, power series method and Lie symmetry approaches together with all the steps have been presented.

**Key Words:** Hirota derivative operators, generalized Hirota derivative operators, Wronskian determinant, Riemann–Liouville fractional derivative, exact solutions, Lie symmetries.

**2019, ix+127 pages.**

## TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalıőma imkanı sağlayan ve çalıőmalarımın her aőamasında ilgi ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç.Dr. Emrullah YAŞAR'a, ve çalıőmalarım süresince bana anlayıő gösteren aileme en içten saygı, sevgi ve teőekkürlerimi sunarım.

Yakup YILDIRIM

6 / 5 / 2019



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
TEŞEKKÜR . . . . .	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	vii
1. GİRİŞ . . . . .	1
2. ÖN BİLGİLER . . . . .	4
3. TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ . . . . .	16
3.1. En Basit Denklem Yöntemi . . . . .	16
3.2. Çoklu Eksponansiyel Fonksiyon Metodu . . . . .	18
3.3. Geliştirilmiş Rasyonel Fonksiyon Yaklaşımı . . . . .	20
3.4. Yeni Test Fonksiyonu Metodu . . . . .	22
3.5. Lump ve Lump Tipi Çözüm Algoritması . . . . .	24
3.6. Wronskiyen Determinant Algoritması . . . . .	26
3.7. Tam mertebeli denklemler için Lie simetri yaklaşımı . . . . .	31
3.8. Zaman kesir mertebeli denklemler için Lie simetri yaklaşımı . . . . .	33
4. TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN UYGULAMALARI . . . . .	34
4.1. En Basit Denklem Yöntemiyle Elde Edilen Çözümler . . . . .	34
4.1.1. Bernoulli denkleminin en basit denklem olarak kullanılması . . . . .	35
4.1.2. Riccati denkleminin en basit denklem olarak kullanılması . . . . .	37
4.1.3. Jacobi eliptik fonksiyonların en basit denklem olarak kullanılması . . . . .	37
4.2. Çoklu Eksponansiyel Fonksiyon Metoduyla Elde Edilen Çözümler . . . . .	40
4.2.1. Bir dalga çözümü . . . . .	41
4.2.2. İki dalga çözümü . . . . .	43
4.2.3. Üç dalga çözümü . . . . .	44
4.3. Geliştirilmiş Rasyonel Fonksiyon Yaklaşımıyla Elde Edilen Çözümler . . . . .	46
4.3.1. Hirota bilineer denklemi . . . . .	47
4.3.2. Kompleksiton çözümler . . . . .	48
4.4. Yeni Test Fonksiyonu Metoduyla Elde Edilen Çözümler . . . . .	55
4.4.1. Hirota bilineer denklemi . . . . .	55
4.4.2. Çoklu soliton çözümleri . . . . .	56
4.5. Lump ve Lump Tipi Çözüm Algoritmasıyla Elde Edilen Çözümler . . . . .	63
4.5.1. Hirota bilineer denklemi . . . . .	64
4.5.2. Genelleştirilmiş Hirota bilineer denklemi . . . . .	65
4.5.3. Yeni bir (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklem . . . . .	65
4.5.4. Lump tipindeki çözümler . . . . .	66
4.6. Wronskiyen Determinant Algoritmasıyla Elde Edilen Çözümler . . . . .	76
4.6.1. Hirota bilineer denklemi . . . . .	77
4.6.2. Wronskiyen şartları . . . . .	78
4.6.3. Rasyonel çözümler . . . . .	82
4.6.4. Soliton, positon ve negaton çözümler . . . . .	86
4.6.5. Etkileşim çözümler . . . . .	91



4.7. Lie simetri indirgemesi ve çözümlerinin tam mertebeli denklemlere uygulanması . . . . .	93
4.7.1. Lie simetri analizi . . . . .	94
4.7.2. Lie simetri indirgemeleri . . . . .	96
4.7.3. En basit denklem yöntemiyle çözümlerin bulunması . . . . .	98
4.8. Lie simetri indirgemesi ve çözümlerinin zaman kesir mertebeli denklemlere uygulanması . . . . .	103
4.8.1. Lie simetri analizi . . . . .	105
4.8.2. Lie simetri indirgemesi . . . . .	106
4.8.3. Kuvvet serisi yöntemiyle çözümlerin bulunması . . . . .	109
5. SONUÇ . . . . .	114
KAYNAKLAR . . . . .	120
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	126



## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

### Açıklama

$$D_x^\alpha D_t^\beta f(x, t) g(x, t)$$

Hirota türev operatörleri

$$D_{p,x}^\alpha D_{p,t}^\beta f(x, t) g(x, t)$$

Genelleştirilmiş Hirota türev operatörleri

$$\left| \widehat{N-1} \right|$$

Wronskian determinanı

$$E_\alpha$$

Lineer olmayan oluşum türü denklem sistemi

$$x^1, x^2, \dots, x^n$$

$n$  tane bağımsız değişken

$$u^1, u^2, \dots, u^m$$

$m$  tane bağımlı değişken

$$u^{(k)}$$

$k$  inci mertebeden kısmi türev

$$D_i(u^\alpha)$$

Total türev operatörü

$$u_i^\alpha$$

$u^\alpha$  nın  $x^i$  bağımsız değişkenine göre türevi

$$\xi^i$$

Bağımsız değişkenlerin sonsuz küçük fonksiyonları

$$\eta^j$$

Bağımlı değişkenlerin sonsuz küçük fonksiyonları

$$\mathbf{X}$$

Lie dönüşüm grubuna karşılık gelen Lie üretici

$$\mathbf{X}^{(k)}$$

Lie üreticinin  $k$ . mertebe uzanımı

$$\zeta_{i_1 \dots i_s}^\alpha$$

Sonsuz küçük dönüşümlerin uzanım formülleri

$$\partial_t^\alpha f(t)$$

$\alpha$ . mertebeden Riemann–Liouville kesir türevi

$$\Gamma(z)$$

Gamma fonksiyonu

$$\eta_\alpha^0$$

Riemann–Liouville kesir türevli uzanım formülü

$$\left( P_\beta^{\tau, \alpha} g \right)$$

Erdelyi-Kober kesir türev operatörü

$$\left( K_\beta^{\tau, \alpha} g \right)$$

Erdelyi-Kober kesir integral operatörü

### Kısaltmalar

### Açıklama

KdV

Korteweg–de Vries

SK

Sawada–Kotera

SKI

Sawada–Kotera–Ito

CDG

Caudrey–Dodd–Gibbon

KK

Kaup–Kupershmidt

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 4.1. (4.4) denkleminin ilerleyen dalga çözüm grafiği . . . . .	36
Şekil 4.2. (4.4) denkleminin cnoidal dalga çözüm grafiği . . . . .	38
Şekil 4.3. (4.4) denkleminin snoidal dalga çözüm grafiği . . . . .	39
Şekil 4.4. (4.24) denkleminin bir dalga çözüm grafiği . . . . .	42
Şekil 4.5. (4.24) denkleminin iki dalga çözüm grafiği . . . . .	44
Şekil 4.6. (4.24) denkleminin üç dalga çözüm grafiği . . . . .	46
Şekil 4.7. (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri . . . . .	51
Şekil 4.8. (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri . . . . .	52
Şekil 4.9. (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri . . . . .	53
Şekil 4.10. (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri . . . . .	55
Şekil 4.11. (4.4) denkleminin çoklu soliton çözüm grafiği . . . . .	59
Şekil 4.12. (4.4) denkleminin çoklu soliton çözüm grafiği . . . . .	60
Şekil 4.13. (4.4) denkleminin çoklu soliton çözüm grafiği . . . . .	62
Şekil 4.14. (4.105) denkleminin (4.108) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri . . . . .	73
Şekil 4.15. (4.105) denkleminin (4.111) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri . . . . .	74
Şekil 4.16. (4.105) denkleminin (4.113) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri . . . . .	74
Şekil 4.17. (4.105) denkleminin (4.125) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri . . . . .	75
Şekil 4.18. (4.105) denkleminin (4.127) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri . . . . .	75
Şekil 4.19. (4.105) denkleminin (4.128) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri . . . . .	76
Şekil 4.20. (4.105) denkleminin (4.129) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri . . . . .	76
Şekil 4.21. (4.221) denkleminin ilerleyen dalga çözüm grafiği . . . . .	99
Şekil 4.22. (4.221) denkleminin ilerleyen dalga çözüm grafiği . . . . .	100
Şekil 4.23. (4.221) denkleminin (4.249) ilerleyen dalga çözüm grafiği . . . . .	101
Şekil 4.24. (4.221) denkleminin (4.249) ilerleyen dalga çözüm grafiği . . . . .	102
Şekil 4.25. (4.221) denkleminin (4.250) ilerleyen dalga çözüm grafiği . . . . .	102
Şekil 4.26. (4.221) denkleminin (4.250) ilerleyen dalga çözüm grafiği . . . . .	103

## 1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler kavramına tarihsel süreç içerisinde ilk defa 17. yy da Isaac Newton'un 1671 yılında yayımladığı kitabının ikinci bölümünde rastlanmaktadır (Newton 1671). Bu kaynakta Newton,

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad (1.2)$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y \quad (1.3)$$

biçimindeki denklemleri ele almış ve sonsuz seriler yöntemini kullanarak bu denklemleri çözmeye çalışmıştır. Bunun yanında çözümlerin tek olmadığını da ileri sürmüştür.

18. ve 19. yüzyıllar arasında ise Euler, Bernoulli, Leibniz, Fourier, D'Alembert, Lagrange gibi birçok bilim adamı çeşitli tipteki denklemleri (ısı ve dalga denklemleri gibi) ve bu denklemlere karşılık gelen fiziksel olayları incelemişlerdir. Örneğin 1822 yılında Joseph Fourier kitabında ısı akışı konusunu, Isaac Newton'un soğuma prensibe dayalı olarak ele almış ve bugün lisans düzeyindeki öğrencilere okulan

$$u_t = ku_{xx}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

ısı denklemini incelemiş ve bir teori ortaya atmıştır (Fourier 1822).

19. ve 20. yüzyıllarda ise diferensiyel denklemler teorisi Matematiğin analiz ve fonksiyonlar teorisi dalı dışında görülmüş ve çok çalışılan bilim dallarından biri olmuştur. Bu yüzyıllarda iki temel ayrışım söz konusu olmuştur. Bunlardan birincisi ele alınan denklem veya sistemin çözümlerini elde etmeden problemin göz önüne alındığı bölge ve uzayda çözümlerin varlık ve tekliğini araştıran niteliksel yaklaşımdır (Cauchy 1844, Kovalevs-kaya 1875, Peano 1886). İkinci yaklaşım ise, ele alınan denklem veya sistemlerin (lineer olup olmamasına bakılmaksızın) çözümlerinin yapısını araştıran niceliksel yaklaşımdır. Bu iki farklı yaklaşımda oldukça önemlidir. 19. yüzyılın sonlarında integre edilebilen

denklemler teorisi ortaya atılmış ve sığ su dalga denklemleri için geliştirilen

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.5)$$

Korteweg- de Vries denklemi ilk defa Diederik Korteweg and Gustav de Vries tarafından tanıtılmıştır (Korteweg ve de Vries 1895). Bu denklemde de görülebileceği lineer olmayan yapının yanında bağımsız değişkenlerden birisi  $t$  zaman değişkeni olup diğeri ise  $x$  uzaysal değişkenidir. Dolayısıyla

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (1.6)$$

biçimindeki denklemlere oluşum tipi denklemler denilmiş ve şu güne kadar üzerinde oldukça yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Mesela, KdV denklemi için 20. yüzyıldan itibaren çözümlerinin elde edilebilmesi adına ters saçılım yaklaşımı, Backlund dönüşümleri, Hirota bilineerleştirme metodu, homojen dengeleme yaklaşımı gibi metotlar geliştirilmiştir.

Lineer olmayan oluşum türü denklemler fizik, mekanik, mühendislik, malzeme bilimi, akışkan mekaniği, katı hal fiziği, kimya, plazma fiziği, kimyasal fizik, optik fiberler, jeokimya, biyoloji, kimyasal kinetik, derin su dalgaları, okyanusbilim, sinyal işleme ve sistem tanımlama gibi bilimin birçok alanında meydana gelen fiziksel olayları modellemektedir. Bu sebepten dolayı bu tür denklemlerin modellediği fiziksel olayın daha iyi anlaşılması için veya başka bir deyişle ele alınan problemin fiziksel karakteristiğine daha iyi bir açıdan bakmak ve muhtemel uygulamalarını keşfetmek için çözümlerinin elde edilmesi oldukça önemlidir. Bu tür denklemlerin çözümlerinin bulunması geliştirilen metotlar ve bilgisayar programları (Maple ve Mathematica gibi) yardımıyla mümkün olmaktadır. Genel olarak söylemek gerekirse (Lie simetri grupları metodu hariç) ele alınan oluşum türü denklem veya sistemlerin terimleri arasında dengeleme prensibinin sağlanması gerekmektedir. Bu tür kısıtlayıcı şartlara rağmen son yıllarda tam çözümler hakkında muazzam çalışmalar yapılmış ve önemli gelişmeler olmuştur.

Bu tez çalışmasında son yıllarda yapılan bu çalışmalara ve gelinen sürece katkı yapmak amacıyla bazı oluşum tipi lineer olmayan parça türevli diferensiyel denklemlerin genel

olarak nümerik çözümlerinden ziyade analitik çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlerin elde edilmesi için gerekli olan bazı önemli metotlar sunulmuştur.

Tezin ikinci bölümünde, lineer olmayan oluşum türü denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan metotlar için gerekli olan temel tanım ve operatörler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, literatürde var olan en basit denklem metodu, yeni test fonksiyon metodu, çoklu eksponansiyel fonksiyon metodu, geliştirilmiş rasyonel fonksiyon metodu, lump ve lump tipi çözüm algoritması, Wronskian determinant algoritması ve Lie simetri yaklaşımları tüm adımlarıyla birlikte sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde, uygulamalı bilimlerde kullanılan (akışkanlar mekaniği, optik, sığ su dalga teorisi, nükleer fizik v.b) ve bu alanlarda oldukça önemli olan (1+1) boyutlu bir genelleştirilmiş Korteweg–de Vries denklemi, (2+1) boyutlu Sawada–Kotera denklemi, bir yeni genelleştirilmiş (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemi, (2+1) boyutlu yerel olmayan Ito denklemi, bir (2+1) boyutlu kırılğan soliton denklemi ve yedinci mertebeden kesirli Sawada–Kotera–Ito denklemlerinin tam çözümleri üçüncü bölümde verilen metotlar kullanılarak sistematik olarak elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen bazı çözümlerdeki parametrelere göre grafik simülasyonları yapılarak modellerin grafikleri çizilmiştir.

Tezin beşinci bölümü sonuçlar kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde, elde edilen sonuçların fiziksel yorumları ve literatürde daha önce elde edilen çözümlerle ayrıntılı karşılaştırmaları yapılmıştır.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, literatürde var olan lineer olmayan oluşum türü denklemlerin tam çözümleri bulunurken kullanılan metotlar için gerekli olan temel tanım ve operatörler verilecektir.

**Dengeleme prensibi:** Toplam şeklinde verilen tam çözüm fonksiyonunun üst sınırını temsil etmektedir. Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında elde edilen en küçük pozitif değerli tamsayıdır. Herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer terim

$$\frac{d^\alpha F(z)}{dz^\alpha} \quad (2.1)$$

ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim

$$F(z)^\beta \left( \frac{d^\gamma F(z)}{dz^\gamma} \right)^\theta \quad (2.2)$$

ile verilsin. Burada  $\alpha, \beta, \gamma, \theta$  pozitif tam sayılardır.  $M$  dengeleme terimi olmak üzere

$$F(z) = \frac{a}{z^M} \quad (2.3)$$

dönüşümünü sırasıyla (2.1) ve (2.2) terimlerinde yerine yazılıp birbirlerine eşitlendiğinde

$$M + \alpha = M\beta + \theta(M + \gamma) \quad (2.4)$$

dengeleme bağıntısı bulunur (Güner 2014). Burada  $a$  reel sayıdır.

**Hirota türev operatörleri:** Göz önüne alınan lineer olmayan oluşum türü denklemlerin tam çözümleri araştırılırken ilk adım olarak Hirota türev operatörleri kullanılarak denklemin Hirota bilineer denklemi elde edilir. Hirota türev operatörleri

$$D_x^\alpha D_t^\beta f(x,t) g(x,t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^\beta f(x,t) g(x',t') \Big|_{x=x',t=t'} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır (Hirota 2004). Hirota türev operatörlerine

$$\begin{aligned}
D_x D_t f f &= 2f f_{xt} - 2f_x f_t, \\
D_x^2 f f &= 2f f_{2x} - 2f_x^2, \\
D_t^2 f f &= 2f f_{2t} - 2f_t^2, \\
D_x^3 D_t f f &= 2f f_{3xt} - 2f_{3x} f_t - 6f_x f_{2xt} + 6f_{2x} f_{xt}, \\
D_x^6 f f &= 2f f_{6x} - 12f_x f_{5x} + 30f_{2x} f_{4x} - 20f_{3x}^2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

biçiminde birkaç örnek verilebilir.

**Genelleştirilmiş Hirota türev operatörleri:** Göz önüne alınan lineer olmayan oluşum türü denklemlerin genelleştirilmiş Hirota bilinear denkleminin elde edilmesinde önemli bir yere sahip olan genelleştirilmiş Hirota türev operatörleri

$$\begin{aligned}
D_{p,x}^a D_{p,t}^b f(x,t) g(x,t) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_p \frac{\partial}{\partial x'} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_p \frac{\partial}{\partial t'} \right)^b f(x,t) g(x',t') \Big|_{x=x',t=t'} \\
&= \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b \binom{a}{i} \binom{b}{j} \alpha_p^i \alpha_p^j \frac{\partial^{a-i}}{\partial x^{a-i}} \frac{\partial^i}{\partial x'^{(i)}} \frac{\partial^{b-j}}{\partial t^{b-j}} \frac{\partial^j}{\partial t'^{(j)}} f(x,t) g(x',t') \Big|_{x=x',t=t'}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (Ma 2011). Burada

$$\alpha_p^s = (-1)^{r_p(s)}, \quad s = r_p(s) \pmod p \tag{2.8}$$

biçimindedir.

(2.7) denkleminde  $p = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) alındığında genelleştirilmiş Hirota türev operatörleri Hirota türev operatörlerine dönüşür (Hirota 2004).

(2.7) denkleminde  $p = 3$  alındığında (2.8) denkleminde

$$\alpha_3 = -1, \quad \alpha_3^2 = \alpha_3^3 = 1, \quad \alpha_3^4 = -1, \quad \alpha_3^5 = \alpha_3^6 = 1, \dots$$



sonuçları elde edilir ve bu sonuçlara karşılık gelen

$$D_{3,x}D_{3,t}ff = 2ff_{xt} - 2f_xf_t,$$

$$D_{3,x}^3D_{3,t}ff = 6f_{2x}f_{xt} \quad (2.9)$$

genelleştirilmiş Hirota türev operatörleri elde edilir.

Benzer şekilde (2.7) denkleminde  $p = 5$  alındığında (2.8) denkleminde

$$\alpha_5 = -1, \alpha_5^2 = 1, \alpha_5^3 = -1, \alpha_5^4 = \alpha_5^5 = 1, \alpha_5^6 = -1, \dots$$

sonuçları elde edilir ve bu sonuçlara karşılık gelen

$$D_{5,x}D_{5,t}ff = 2ff_{xt} - 2f_xf_t,$$

$$D_{5,x}^3D_{5,t}ff = 2ff_{3xt} - 2f_{3x}f_t - 6f_xf_{2xt} + 6f_{2x}f_{xt} \quad (2.10)$$

genelleştirilmiş Hirota türev operatörleri elde edilir.

**Wronskian determinanı:** Göz önüne alınan lineer olmayan oluşum türü denklemlerin Hirota bilinear denkleminin çözümünün bulunmasında önemli bir yere sahip olan Wronskian determinanı

$$\left| \widehat{N-1} \right| = \left( \widehat{N-1}; \Phi \right) = W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \begin{vmatrix} \phi_1^{(0)} & \phi_1^{(1)} & \dots & \phi_1^{(N-1)} \\ \phi_2^{(0)} & \phi_2^{(1)} & \dots & \phi_2^{(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_N^{(0)} & \phi_N^{(1)} & \dots & \phi_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad N \geq 1 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  bir fonksiyon ailesi ve

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T, \quad \phi_i^{(0)} = \phi_i, \quad \phi_i^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial x^j} \phi_i, \quad j \geq 1, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.12)$$

olarak verilir (Freeman ve Nimmo 1983, Nimmo ve Freeman 1983).

**Özellik 1:**  $D$  ifadesi  $N * (N - 2)$  matris ve  $n$  boyutlu sütun vektörleri  $a, b, c, d$  olmak üzere

$$|D, a, b| |D, c, d| - |D, a, c| |D, b, d| + |D, a, d| |D, b, c| = 0 \quad (2.13)$$

ifadesi daima sağlanır (Ma ve ark. 2011, Jian-Ping 2011, Tang ve ark. 2011, Tang ve ark. 2012, Tang ve Su 2012, Ma ve Bai 2013, Zhang ve Xiang 2015, Su ve Xu 2016, Yıldırım ve Yasar 2017c).

**Özellik 2:**  $n$  boyutlu sütun vektörleri  $a_j (j = 1, \dots, n)$  ve  $b_j (j = 1, \dots, n)$  sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$\sum_{i=1}^N b_i |a_1, a_2, \dots, a_N| = \sum_{j=1}^N |a_1, a_2, \dots, ba_j, \dots, a_N|, \quad (2.14)$$

ifadesi daima sağlanır. Burada  $ba_j = (b_1 a_{1j}, b_2 a_{2j}, \dots, b_N a_{Nj})^T$  şeklinde tanımlanır (Tang ve ark. 2011, Tang ve ark. 2012, Tang ve Su 2012, Ma ve Bai 2013, Zhang ve Xiang 2015, Yıldırım ve Yasar 2017c).

**Özellik 3:**

$$\begin{aligned} & \left| \widehat{N-1} \left| \sum_{i=1}^N \lambda_{ii}(t) \left( \sum_{i=1}^N \lambda_{ii}(t) \left| \widehat{N-1} \right| \right) \right. \right| = \left( \sum_{i=1}^N \lambda_{ii}(t) \left| \widehat{N-1} \right| \right)^2 \\ & = \left( \left| \widehat{N-2, N+1} \right| - \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \right)^2 \\ & = \left| \widehat{N-1} \right| \left( \left| \widehat{N-5, N-3, N-2, N-1, N} \right| - \left| \widehat{N-4, N-2, N-1, N+1} \right| \right. \\ & \quad \left. - \left| \widehat{N-3, N-1, N+2} \right| + 2 \left| \widehat{N-3, N, N+1} \right| + \left| \widehat{N-2, N+3} \right| \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ifadesi daima sağlanır (Tang ve ark. 2011, Tang ve ark. 2012, Tang ve Su 2012, Ma ve Bai 2013, Zhang ve Xiang 2015, Su ve Xu 2016, Yıldırım ve Yasar 2017c).

$k$ . mertebe lineer olmayan oluşum türü denklem sistemi

$$E_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

şeklinde ele alalım (Bluman ve Kumei 1989, Olver 1993, Ibragimov 1995, Naz ve ark. 2008). Burada

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \quad (2.17)$$

$n$  tane bağımsız değişken,

$$u = (u^1, u^2, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m \quad (2.18)$$

$m$  tane bağımlı değişken ve  $u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(k)}$  ifadeleri sırasıyla birinci, ikinci, ...,  $k$  inci mertebeden kısmi türevleri temsil eder.

$u^\alpha$  nın  $x^i$  bağımsız değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned} u_i^\alpha &= D_i(u^\alpha), \\ u_{ij}^\alpha &= D_j D_i(u^\alpha) \end{aligned} \quad (2.19)$$

olarak alınır. Burada total türev operatörü

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.16) sisteminin hem bağımsız hem de bağımlı değişkenler için bir parametrelili sonsuz küçüklükteki Lie dönüşüm grubu

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{u}^j &= u^j + \varepsilon \eta^j(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.21)$$

olarak verilir. Burada  $\varepsilon \ll 1$  dönüşümün küçük bir parametresidir.  $\xi^i$  ve  $\eta^j$  sırasıyla bağımsız ve bağımlı değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümleridir.

(2.21) dönüşüm grubuna karşılık gelen sonsuz küçüklükteki  $\mathbf{X}$  üretici

$$\mathbf{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (2.22)$$

olarak verilir.

(2.16) sisteminin sonsuz küçük dönüşümleri altında değişmezlik koşulu veya başka bir değişle (2.22) üretici belirleyici denklem

$$\mathbf{X}^{(k)} [E_\alpha] \Big|_{E_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})=0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (2.23)$$

olarak verilir. Burada  $\mathbf{X}^{(k)}$  ifadesi (2.22) üreticinin  $k$ . merteye uzanımıdır ve bu operatör

$$\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X} + \sum_{s \geq 1} \zeta_{i_1 \dots i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}$$

veya

$$\mathbf{X}^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geq 1} \zeta_{i_1 \dots i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j),$$

$$\zeta_{i_1 \dots i_s}^\alpha = D_{i_s} \left( \zeta_{i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha \right) - u_{j_1 \dots j_{s-1}}^\alpha D_{i_s}(\xi^j), \quad s > 1 \quad (2.25)$$

olarak verilir.

Örneğin 2. mertebeden (3+1) boyutlu

$$E(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, u_{xy}, u_{xz}, u_{xt}, u_{yz}, u_{yt}, u_{zt}) = 0 \quad (2.26)$$

denkleminin karşılık Lie simetri üretici (2.22) denkleminin

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & \xi^t(x, y, z, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(x, y, z, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y(x, y, z, t, u) \frac{\partial}{\partial y} \\ & + \xi^z(x, y, z, t, u) \frac{\partial}{\partial z} + \eta(x, y, z, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \quad (2.27)$$

ifadesine karşılık gelirken bu üreticinin 2. uzanımı (2.24) denkleminin

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(2)} = & \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y \frac{\partial}{\partial y} + \xi^z \frac{\partial}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial u_y} \\ & + \zeta_z \frac{\partial}{\partial u_z} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \zeta_{zz} \frac{\partial}{\partial u_{zz}} + \zeta_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \\ & + \zeta_{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \zeta_{xz} \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + \zeta_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \zeta_{yz} \frac{\partial}{\partial u_{yz}} + \zeta_{yt} \frac{\partial}{\partial u_{yt}} + \zeta_{zt} \frac{\partial}{\partial u_{zt}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

ifadesine karşılık gelir. Burada  $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z, \zeta_t, \zeta_{xx}, \dots$  terimleri (2.25) denkleminin

$$\begin{aligned} \zeta_x &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^x) - u_y D_x(\xi^y) - u_z D_x(\xi^z) - u_t D_x(\xi^t), \\ \zeta_y &= D_y(\eta) - u_x D_y(\xi^x) - u_y D_y(\xi^y) - u_z D_y(\xi^z) - u_t D_y(\xi^t), \\ \zeta_z &= D_z(\eta) - u_x D_z(\xi^x) - u_y D_z(\xi^y) - u_z D_z(\xi^z) - u_t D_z(\xi^t), \\ \zeta_t &= D_t(\eta) - u_x D_t(\xi^x) - u_y D_t(\xi^y) - u_z D_t(\xi^z) - u_t D_t(\xi^t), \\ \zeta_{xx} &= D_x(\zeta_x) - u_{xx} D_x(\xi^x) - u_{yx} D_x(\xi^y) - u_{zx} D_x(\xi^z) - u_{tx} D_x(\xi^t), \\ \zeta_{yy} &= D_y(\zeta_y) - u_{xy} D_y(\xi^x) - u_{yy} D_y(\xi^y) - u_{zy} D_y(\xi^z) - u_{ty} D_y(\xi^t), \\ \zeta_{zz} &= D_z(\zeta_z) - u_{xz} D_z(\xi^x) - u_{yz} D_z(\xi^y) - u_{zz} D_z(\xi^z) - u_{tz} D_z(\xi^t), \\ \zeta_{tt} &= D_t(\zeta_t) - u_{xt} D_t(\xi^x) - u_{yt} D_t(\xi^y) - u_{zt} D_t(\xi^z) - u_{tt} D_t(\xi^t), \\ \zeta_{xy} &= D_y(\zeta_x) - u_{xy} D_y(\xi^x) - u_{yy} D_y(\xi^y) - u_{zy} D_y(\xi^z) - u_{ty} D_y(\xi^t), \\ \zeta_{xz} &= D_z(\zeta_x) - u_{xz} D_z(\xi^x) - u_{yz} D_z(\xi^y) - u_{zz} D_z(\xi^z) - u_{tz} D_z(\xi^t), \\ \zeta_{xt} &= D_t(\zeta_x) - u_{xt} D_t(\xi^x) - u_{yt} D_t(\xi^y) - u_{zt} D_t(\xi^z) - u_{tt} D_t(\xi^t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{yz} &= D_z(\zeta_y) - u_{xz}D_z(\xi^x) - u_{yz}D_z(\xi^y) - u_{zz}D_z(\xi^z) - u_{tz}D_z(\xi^t), \\
\zeta_{yt} &= D_t(\zeta_y) - u_{xt}D_t(\xi^x) - u_{yt}D_t(\xi^y) - u_{zt}D_t(\xi^z) - u_{tt}D_t(\xi^t), \\
\zeta_{zt} &= D_t(\zeta_z) - u_{xt}D_t(\xi^x) - u_{yt}D_t(\xi^y) - u_{zt}D_t(\xi^z) - u_{tt}D_t(\xi^t) \quad (2.29)
\end{aligned}$$

olarak verilir. (2.29) denklemindeki  $D_x, D_y, D_z, D_t$  terimleri (2.20) denkleminden

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yx} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{zx} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{yyx} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} \\
&+ u_{zzx} \frac{\partial}{\partial u_{zz}} + u_{ttx} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{xxy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + u_{xxz} \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + u_{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{xyz} \frac{\partial}{\partial u_{yz}} + u_{xyt} \frac{\partial}{\partial u_{yt}} + u_{xzt} \frac{\partial}{\partial u_{zt}}, \\
D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{zy} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{ty} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxy} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{yyy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} \\
&+ u_{zzy} \frac{\partial}{\partial u_{zz}} + u_{tty} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{xyy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + u_{xyz} \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + u_{xyt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{yyz} \frac{\partial}{\partial u_{yz}} + u_{yyt} \frac{\partial}{\partial u_{yt}} + u_{yzt} \frac{\partial}{\partial u_{zt}}, \\
D_z &= \frac{\partial}{\partial z} + u_z \frac{\partial}{\partial u} + u_{xz} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yz} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{zz} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{tz} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxz} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{yyz} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} \\
&+ u_{zzz} \frac{\partial}{\partial u_{zz}} + u_{ttz} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{xyz} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + u_{xzz} \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + u_{xzt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{yzz} \frac{\partial}{\partial u_{yz}} + u_{zyt} \frac{\partial}{\partial u_{yt}} + u_{zzt} \frac{\partial}{\partial u_{zt}}, \\
D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yt} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{zt} \frac{\partial}{\partial u_z} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{yyt} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} \\
&+ u_{zxt} \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + u_{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{xty} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + u_{xtz} \frac{\partial}{\partial u_{xz}} + u_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{tyz} \frac{\partial}{\partial u_{yz}} + u_{ytt} \frac{\partial}{\partial u_{yt}} + u_{ztt} \frac{\partial}{\partial u_{zt}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\alpha$ . zaman kesir mertebeli (1+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü

$$\Delta = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots, u_{nx}) = 0 \quad (2.30)$$

denklemini ele alalım (Kiryakova 1993, Podlubny 1999, Gazizov ve ark. 2007, 2009, Sahadevan ve Bakkyaraj 2012, Wang ve Xu 2014, Yaşar ve ark. 2016). Burada  $\alpha$  ( $0 <$

$\alpha \leq 1$ ) bir parametre ve  $\alpha$ . mertebeden Riemann–Liouville kesir türevi

$$\partial_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{f(\tau, x)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n, \quad n \in N, \\ \frac{\partial^n f}{\partial t^n}, & \alpha = n \in N \end{cases} \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır (Kiryakova 1993, Podlubny 1999). Burada  $\Gamma(z)$  gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \quad (2.32)$$

olarak verilir.

(2.30) denkleminin hem bağımsız hem de bağımlı değişkenler için bir parametrelili sonsuz küçüklükteki Lie dönüşüm grubu

$$\bar{t} = t + \varepsilon \tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{x} = x + \varepsilon \xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{u} = u + \varepsilon \eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial \bar{t}^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon \eta_\alpha^0(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \eta^x(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \eta^{xx}(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon \eta^{xxx}(x, t, u) + O(\varepsilon^2) \quad (2.33)$$

⋮

olarak verilir. Burada  $\varepsilon \ll 1$  dönüşümün küçük bir parametresidir.  $\tau$  ve  $\xi$  bağımsız değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümleri iken  $\eta$  bağımlı değişkenin sonsuz küçük dönüşümüne

karşılık gelir. (2.33) denklemindeki  $\eta^x$ ,  $\eta^{xx}$  ve  $\eta^{xxx}$  terimleri

$$\begin{aligned}\eta^x &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\tau), \\ \eta^{xx} &= D_x(\eta^x) - u_{xt} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi), \\ \eta^{xxx} &= D_x(\eta^{xx}) - u_{xxt} D_x(\tau) - u_{xxx} D_x(\xi) \\ &\vdots\end{aligned}\tag{2.34}$$

şeklinde tanımlanır. (2.34) denkleminde ihtiyaç duyulan  $D_x$  total türev operatörü

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots\tag{2.35}$$

olarak verilir.

(2.33) dönüşüm grubuna karşılık gelen sonsuz küçüklikteki  $\mathbf{X}$  üretici

$$\mathbf{X} = \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}\tag{2.36}$$

olarak verilir. Burada  $\xi(x, t, u)$ ,  $\tau(x, t, u)$  ve  $\eta(x, t, u)$  katsayı fonksiyonları daha sonra belirlenecektir. (2.36) üreticinin  $n$ . uzanımı (2.30) denkleminde uygulanması sonucu

$$\mathbf{X}^{(n)}(\Delta)|_{\Delta=0} = 0\tag{2.37}$$

Lie nokta simetri üretici belirleyici denklem elde edilir. Ayrıca değişmezlik koşulu sayesinde

$$\tau(x, t, u)|_{t=0} = 0\tag{2.38}$$

ifadesi elde edilir (Wang ve Xu 2014).

(2.38) koşulu altında Riemann–Liouville zaman kesirli türev anlamında  $\eta$  sonsuz küçük



dönüşümünün  $\alpha$ . mertebeden uzanım formülü

$$\begin{aligned} \eta_\alpha^0 &= \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + (\eta_u - \alpha D_t(\tau)) \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \mu - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \binom{\alpha}{n} \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) \right] D_t^{\alpha-n}(u), \end{aligned} \quad (2.39)$$

olarak verilir. Burada

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \sum_{k=2}^m \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{k}{r} \\ &\times \frac{1}{k!} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} [-u]^r \frac{\partial^m}{\partial t^m} [u^{k-r}] \frac{\partial^{n-m+k} \eta}{\partial t^{n-m} \partial u^k} \end{aligned} \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlanır (Gazizov ve ark. 2007, 2009).

**Uyarı:** (2.39) denkleminde  $\eta$  sonsuz küçük dönüşümü  $u$  nun bir lineer formundaysa  $\mu = 0$  dır. Çünkü (2.39) denkleminde  $\frac{\partial^k \eta}{\partial u^k}$ ,  $k \geq 2$  türevleri yer almaktadır.

**Tanım:** (2.36) sonsuz küçük üreticine karşılık gelen  $u = \theta(x, t)$  fonksiyonu (2.30) denkleminin bir değişmez çözümüdür ancak ve ancak

1)  $u = \theta(x, t)$  fonksiyonu (2.30) denklemini sağlar.

2)  $u = \theta(x, t)$  fonksiyonu değişmezlik koşulunu

$$\tau(x, t, \theta) \theta_t + \xi(x, t, \theta) \theta_x = \eta(x, t, \theta) \quad (2.41)$$

sağlar.

Erdelyi-Kober kesir türev operatörü

$$\left(P_{\beta}^{\tau, \alpha} g\right) := \prod_{j=0}^{n-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\beta} \xi \frac{d}{d\xi}\right) \left(K_{\beta}^{\tau+\alpha, n-\alpha} g\right)(\xi) \quad (2.42)$$

olarak verilir. Burada

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \alpha \notin N, \\ \alpha, & \alpha \in N \end{cases} \quad (2.43)$$

şeklinde tanımlanır (Kiryakova 1993).

Erdelyi-Kober kesir integral operatörü

$$\left(K_{\beta}^{\tau, \alpha} g\right)(\xi) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (u-1)^{\alpha-1} u^{-(\tau+\alpha)} g(\xi u^{\frac{1}{\beta}}) du, & \alpha > 0, \\ g(\xi), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

olarak verilir (Sahadevan ve Bakkyaraj 2012, Wang ve Xu 2014).

### 3. TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde literatürde var olan en basit denklem metodu, yeni test fonksiyon metodu, çoklu eksponansiyel fonksiyon metodu, geliştirilmiş rasyonel fonksiyon metodu, lump ve lump tipi çözüm algoritması, Wronskian determinant algoritması ve Lie simetri yaklaşımları sırasıyla  $n$ . tam mertebeli ve Riemann–Liouville türevi anlamında  $\alpha$ . zaman kesir mertebeli (1+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü

$$P(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

$$E = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - P(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (3.2)$$

denklemleri için tüm adımlarıyla birlikte verilecektir. Burada  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) bir parametre,  $u = u(x, t)$  bağımlı değişken,  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenler,  $P$  ifadesi ise bağımlı değişken ve türevlerini içeren bir polinomdur.

#### 3.1. En Basit Denklem Yöntemi

Literatürde var olan etkili tam çözüm bulma yöntemlerinden biri olan en basit denklem yöntemi, ele alınan denklemin integrallenebilmesinin önemli bir göstergesi olan dengeleme prensibine dayanmaktadır. Ele alınan denklem dalga dönüşümü altında adi diferensiyel denkleme dönüştükten sonra dengeleme prensibine sahip değilse bu metot uygulanamaz. Bu metodun bir başka özelliği ise Bernoulli, Riccati ve Jacobi eliptik denklemlerinin çözümlerinden tümüyle faydalanarak ilerleyen dalga çözümü, knoidal dalga çözümü ve sinoidal dalga çözümlerine neden olur. Bu çözümler akışkanlar dinamiğinde kullanılan lineer olmayan periyodik dalga çözümlerdir.

Bu yöntemin temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Kudryashov 2005a,b, 2012, Adem ve Khalique 2013, 2016a,b, Yıldırım ve Yaşar 2017a, 2018):

**1. Adım:** (3.1) denklemini ilerliyen dalga dönüşümü

$$u(x, t) = F(z), \quad z = k_1x + k_2t + k_3 \quad (3.3)$$

altında

$$Q(F, F', F'', F''', \dots) = 0 \quad (3.4)$$

adi diferensiyel denklemine dönüşür.

**2. Adım:** (3.4) indirgenmiş adi diferensiyel denkleminin çözümünü

$$F(z) = \sum_{i=0}^M A_i (H(z))^i \quad (3.5)$$

sonlu seri açılımı formunda kabul edelim. Burada  $A_0, A_1, \dots, A_M$  bilinmeyen katsayılar ve  $a, b$  ve  $c$  ler sabit sayılar olmak üzere,  $H(z)$  fonksiyonu aşağıdaki adi diferensiyel denklemlerini sağlar:

$$H'(z) = aH(z) + bH^2(z), \quad (3.6)$$

$$H'(z) = aH^2(z) + bH(z) + c, \quad (3.7)$$

$$H'(z) = -\left\{ (1 - H^2(z)) (1 - \omega + \omega H^2(z)) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.8)$$

$$H'(z) = \left\{ (1 - H^2(z)) (1 - \omega H^2(z)) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

(3.6)-(3.9) denklemleri sırasıyla Bernoulli, Riccati ve çözümleri  $cn(z|\omega)$ ,  $sn(z|\omega)$  Jacobi eliptik fonksiyon olan 1.mertebeden adi diferensiyel denklemlerdir.

Bernoulli denkleminin çözümleri

$$H(z) = a \left\{ \frac{\cosh[a(z+C)] + \sinh[a(z+C)]}{1 - b \cosh[a(z+C)] - b \sinh[a(z+C)]} \right\} \quad (3.10)$$

olarak verilirken Riccati denkleminin çözümleri

$$H(z) = -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh \left[ \frac{1}{2} \theta (z+C) \right], \quad (3.11)$$

$$H(z) = -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh \left( \frac{\theta z}{2} \right) + \frac{\operatorname{sech} \left( \frac{\theta z}{2} \right)}{C \cosh \left( \frac{\theta z}{2} \right) - \frac{2a}{\theta} \sinh \left( \frac{\theta z}{2} \right)} \quad (3.12)$$

olarak tanımlanır. Burada  $C$  bir integral sabitidir ve  $\theta^2 = b^2 - 4ac$  olarak verilir.

Ayrıca cosine-amplitude ve sine-amplitude fonsiyonlarının cnoidal ve snoidal dalga çözümleri

$$\begin{aligned}\omega \rightarrow 1 \text{ iken } cn(z|\omega) &\rightarrow \operatorname{sech}(z), \quad sn(z|\omega) \rightarrow \tanh(z), \\ \omega \rightarrow 0 \text{ iken } cn(z|\omega) &\rightarrow \cos(z), \quad sn(z|\omega) \rightarrow \sin(z), \\ nc(z|\omega) &= 1/cn(z|\omega), \quad ns(z|\omega) = 1/sn(z|\omega)\end{aligned}\tag{3.13}$$

olarak verilir.

**3. Adım:** En küçük pozitif değerli  $M$  tamsayısı, (3.4) adi diferensiyel denkleme dengeleme prensibi uygulanması sonucunda bulunur.

**4. Adım:** (3.6) Bernoulli denklemini (3.4) adi diferensiyel denklemde yerine yazarsak yüksek mertebeden bir denklem elde edilir. Sıfıncı mertebeden denklem elde edilene kadar bu yerine koyma işlemi devam edilir ve daha sonra  $H^i$  fonsiyonlarının katsayılarını sıfıra eşitlendiğinde  $k_1, k_2, k_3, a, b, A_0, A_1, \dots, A_M$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde (3.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir. Benzer şekilde Riccati denklemi, cosine-amplitude  $cn(z|\omega)$  fonsiyonu ve sine-amplitude  $sn(z|\omega)$  fonsiyonlarını da kullanılarak (3.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

### 3.2. Çoklu Eksponansiyel Fonsiyon Metodu

Analitik çözümlerin bulunmasında bir diğer ilgi çekici metot ise çoklu eksponansiyel fonsiyon yaklaşımıdır. Metodun tercih edilmesindeki en önemli sebep, Hirota bilineerleştirme algoritmalarının aksine, ele alınan denklemin Hirota bilineer formuna ihtiyaç duyulmamasıdır. Yani ele alınan denklemin Hirota bilineer formunu bilmememize rağmen bu yöntem uygulanabilir. Ayrıca bu yöntem gösterilebilir ki, Hirota perturbasyon yaklaşımının bir genelleştirilmesidir. Bu yöntem sayesinde ele alınan modelin eksponansiyel fonsiyonların polinomları olarak ifade edilen çoklu soliton tipinde çözümleri elde edilir. Literatürde bir soliton, iki soliton ve üç soliton olarak bilinen bu çözümler faz değişimleri ile birlikte genel dalga frekanslarını içerir.

Bu metodun temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Ma ve ark. 2010, Ma ve Zhu 2012, Zayed ve Al-Nowehy 2015, Adem 2016, Yıldırım ve ark. 2017, Yıldırım ve Yaşar 2017b, Adem ve ark. 2019a,b):

**1. Adım:** Birinci mertebeden yardımcı

$$\eta_{i,x} = k_i \eta_i, \quad \eta_{i,t} = -\omega_i \eta_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.14)$$

denklemlerini göz önüne alalım. Burada  $\eta = \eta(x, t)$  bağımlı değişken,  $k_i$  dalga sayılarını ve  $\omega_i$  ise dalga frekanslarını temsil eder.

(3.14) denkleminin çözümleri

$$\eta_i = c_i e^{\xi_i}, \quad \xi_i = k_i x - \omega_i t, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.15)$$

olarak verilir. Burada  $c_i$  keyfi sabitler ve  $\xi_i$  dalga değişkenini temsil eder.

(3.15) denklemlerini kullanarak (3.1) denkleminin çözümü

$$u(x, t) = \frac{\Phi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}{\Omega(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)}, \quad (3.16)$$

rasyonel fonksiyon olarak verilir. Burada

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{r,s=1}^n \sum_{i,j=0}^M p_{rs,ij} \eta_r^i \eta_s^j, \quad (3.17)$$

$$\Omega(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{r,s=1}^n \sum_{i,j=0}^N q_{rs,ij} \eta_r^i \eta_s^j \quad (3.18)$$

biçiminde olup,  $p_{rs,ij}$  ve  $q_{rs,ij}$  terimleri sabit sayılardır.

**2. Adım:** (3.16) denkleminin  $t$  bağımsız değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\Omega \sum_{l=1}^n \Phi_{\eta_l} \eta_{l,t} - \Phi \sum_{l=1}^n \Omega_{\eta_l} \eta_{l,t}}{\Omega^2} \\ &= \frac{-\Omega \sum_{l=1}^n \omega_l \eta_l \Phi_{\eta_l} + \Phi \sum_{l=1}^n \omega_l \eta_l \Omega_{\eta_l}}{\Omega^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak verilirken  $x$  bağımsız değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\Omega \sum_{l=1}^n \Phi_{\eta_l} \eta_{l,x} - \Phi \sum_{l=1}^n \Omega_{\eta_l} \eta_{l,x}}{\Omega^2} \\ &= \frac{\Omega \sum_{l=1}^n k_l \eta_l \Phi_{\eta_l} - \Phi \sum_{l=1}^n k_l \eta_l \Omega_{\eta_l}}{\Omega^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklinindedir. Benzer şekilde daha yüksek mertebeden türevli terimler de elde edilebilir. (3.16) rasyonel fonksiyon çözümünün kendisi ve gerekli türevli terimleri (3.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\Theta(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = 0 \quad (3.21)$$

rasyonel fonksiyon elde edilir.

**3. Adım:** (3.21) denkleminde  $k_i, \omega_i, p_{kl,ij}, q_{kl,ij}$  terimlerini içeren bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini çözüldüğünde  $\Phi$  ve  $\Omega$  polinomları ile  $\xi_i$  dalga değişkeni bulunur. Böylece (3.1) denleminin dalga çözümü olan  $u(x, t)$  bulunur ve aşağıdaki gibi verilir:

$$u(x, t) = \frac{\Phi(c_1 e^{k_1 x - \omega_1 t}, \dots, c_n e^{k_n x - \omega_n t})}{\Omega(c_1 e^{k_1 x - \omega_1 t}, \dots, c_n e^{k_n x - \omega_n t})}. \quad (3.22)$$

### 3.3. Geliştirilmiş Rasyonel Fonksiyon Yaklaşımı

Bir başka etkili yaklaşım ise Hirota bilineer formuna dayanan geliştirilmiş rasyonel fonksiyon algoritmasıdır. Ele alınan denklemin Hirota bilineer denklemi bilinmiyorsa bu metod uygulanamaz. Bu algoritmanın kritik noktası, ele alınan denklem için sabit katsayılı yardımcı adi diferensiyel denklemlerin çözümlerini kullanarak rasyonel çözümlerinin oluşturulmasıdır. Uygun adi diferensiyel denklemler bulunması kaydıyla bu metod daha

önceden bahsedilen çoklu eksponansiyel fonksiyon metoduna dönüşür. Bu yaklaşım sayesinde hem eksponansiyel fonksiyon hem de trigonometrik fonksiyon birleşimini içeren kompleksiton tipindeki çözümler bulunur. Bu çözümler yeni tarzdaki belirgin ilerleyen dalga hızlarına sahiptir.

Bu yöntemin temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Zhang ve Ma 2014, Adem ve ark. 2019a):

**1. Adım:** (3.1) denklemini yeni bir bağımlı fonksiyon dönüşümü olan

$$u = T(f) \quad (3.23)$$

altında

$$H(D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots) f f = 0 \quad (3.24)$$

Hirota bilineer denklemine dönüşür. Burada  $f = f(x, t)$  yeni bir bilinmeyen fonksiyon ve  $D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots$ , operatörleri (2.5) denkleminde tanımlanan Hirota türev operatörleridir (Hirota 2004).

**2. Adım:** (3.24) denkleminin çözümü

$$f = \frac{p(\eta_1, \eta_2)}{q(\eta_1, \eta_2)} \quad (3.25)$$

rasyonel fonksiyon olarak verilir. Burada  $p(\eta_1, \eta_2)$  ve  $q(\eta_1, \eta_2)$  ifadeleri  $\eta_1(\xi_1)$  ve  $\eta_2(\xi_2)$  fonksiyonlarından oluşan polinomlardır.  $\eta_1(\xi_1)$  fonksiyonu

$$\eta_1'' = \frac{d^2 \eta_1}{d\xi_1^2} = -\eta_1 \quad (3.26)$$

adi diferensiyel denklemini sağlarken  $\eta_2(\xi_2)$  fonksiyonu

$$\eta_2'' = \frac{d^2 \eta_2}{d\xi_2^2} = \eta_2 \quad (3.27)$$



adi diferensiyel denklemini sağlar. Burada dalga değişkenleri

$$\xi_1 = k_1x + \omega_1t + c_1, \quad \xi_2 = k_2x + \omega_2t + c_2 \quad (3.28)$$

biçiminde olup  $k_1, k_2, \omega_1, \omega_2, c_1, c_2$  sabit sayılardır.

(3.26) adi diferensiyel denkleminin çözümü

$$\eta_1 = \pm \sin \xi_1 \quad \text{veya} \quad \eta_1 = \pm \cos \xi_1 \quad (3.29)$$

olarak verilirken (3.27) adi diferensiyel denkleminin çözümü

$$\eta_2 = \pm \sinh \xi_2 \quad \text{veya} \quad \eta_2 = \pm \cosh \xi_2 \quad (3.30)$$

olarak verilir. (3.29) çözümleri

$$\eta_1'^2 = 1 - \eta_1^2 \quad (3.31)$$

denklemini sağlarken (3.30) çözümleri

$$\eta_2'^2 = 1 + \eta_2^2 \quad (3.32)$$

denklemini sağlar.

**3. Adım:** (3.26) ve (3.27) denklemlerini kullanarak (3.25) rasyonel fonksiyon çözümünün kendisini ve gerekli türevleri (3.24) Hirota bilineer denkleminde yerine yazarsak birinci mertebeden lineer olmayan bir denklem elde edilir. Elde edilen bu denklemde (3.31) ve (3.32) denklemlerinin kullanılması sonucunda  $k_i$  ve  $\omega_i$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde (3.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

#### 3.4. Yeni Test Fonksiyonu Metodu

Hirota bilineerleştirme algoritmalarından biri olan yeni test fonksiyonu metodunda ise, ele alınan denklemin Hirota bilineer formuna gereksinim duyulur. Benzer şekilde ele alı-

nan denklem veya sistem bu forma sahip değilse sözkonusu algoritma uygulanamaz. Bu algoritma sayesinde geliştirilmiş rasyonel fonksiyon yaklaşımında elde edilen kompleksiton tipindeki çözümleri de kapsayan çoklu soliton çözümleri elde edilir.

Bu metodun temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Singh ve Gupta 2016a,b, Yıldırım ve Yaşar 2017a):

**1. Adım:** (3.1) denklemi yeni bir bağımlı fonksiyon dönüşümü olan

$$u = T(f) \quad (3.33)$$

altında

$$H(D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots) f f = 0 \quad (3.34)$$

Hirota bilineer denklemine dönüşür. Burada  $f = f(x, t)$  yeni bir bilinmeyen fonksiyon ve  $D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots$ , operatörleri (2.5) denklemde tanımlanan Hirota türev operatörleridir (Hirota 2004).

**2. Adım:** (3.34) denkleminin çözümü

$$f = e^{-\xi_1} + \delta_1 \cos \xi_2 + \delta_2 \cosh \xi_3 + \delta_3 e^{\xi_1} \quad (3.35)$$

çoklu soliton fonksiyon olarak verilir. Burada

$$\xi_i = a_i x + b_i t, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.36)$$

ve  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  sabit sayılar olarak verilir.

**3. Adım:** (3.35) çoklu soliton fonksiyon çözümünün kendisini ve gerekli türevleri (3.34) Hirota bilineer denkleminde yerine yazarsak  $e^{\xi_1} \sin \xi_2$ ,  $e^{\xi_1} \sinh \xi_3$ ,  $e^{\xi_1} \cos \xi_2$ ,  $e^{\xi_1} \cosh \xi_3$ ,  $\sin \xi_2 \sinh \xi_3$ ,  $\cos \xi_2 \cosh \xi_3$  terimlerinden oluşan lineer olmayan bir denklem elde edilir. Elde edilen bu denklemde aynı terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi sonucunda  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denk-

lem sistemi çözüldüğünde (3.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

### 3.5. Lump ve Lump Tipi Çözüm Algoritması

Bir diğer Hirota bilineerleştirme algoritması da Lump ve Lump tipi çözüm yaklaşımıdır. Bu algoritmanın uygulanabilmesi için modelin Hirota bilineer formuna gereksinim duyulur. Bu algoritma kullanılarak denklemin rasyonel çözümleri elde edilir. Rasyonel çözümler iyi tanımlılık, analitiklik ve yerellilik şartlarını sağlaması durumunda literatürde Lump çözümler olarak bilinen çözümlere dönüşür. Ayrıca (3+1) ve (4+1) boyutlu denklemlerin rasyonel çözümleri iyi tanımlılık ve analitiklik şartlarını sağlamasına rağmen sırasıyla  $\mathbb{R}^4$  ve  $\mathbb{R}^5$  deki tüm yönlerde yerel olmadığından dolayı bu denklemlerin rasyonel çözümlerine Lump tipindeki çözümler denir. Bahsedilen bu yüksek boyutlu denklemlerin boyutları (1+1) veya (2+1) boyutlarına düşürüldüğünde tüm yönlerde yerel olma şartını sağlar ve elde edilen rasyonel çözümlere Lump çözümler denir. Soliton ve Lump çözümler arasındaki farka bakıldığında soliton çözümler belli yönlerde yerel olmasına karşın Lump çözümler uzayda tüm yönlerde yerel olan bir çeşit rasyonel fonksiyon çözümlerdir.

Bu algoritmanın temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Ma 2015, 2016, Lü ve ark. 2016, Ma ve ark. 2016, Yang ve Ma 2016, 2017, Zhang ve ark. 2017, Cheng ve Zhang 2017):

**1. Adım:** (3.1) denklemini yeni bir bağımlı fonksiyon dönüşümü olan

$$u = T(f) \quad (3.37)$$

altında

$$H(D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots) f f = 0 \quad (3.38)$$

Hirota bilineer denklemine dönüşür. Burada  $f = f(x, t)$  yeni bir bilinmeyen fonksiyon ve  $D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots$ , operatörleri (2.5) denkleminde tanımlanan türev operatörleridir (Hirota 2004).

**2. Adım:** (3.38) denkleminin çözümü

$$f = g^2 + h^2 + a_7 \quad (3.39)$$

ikinci dereceden fonksiyon olarak verilir. Burada

$$g = a_1x + a_2t + a_3,$$

$$h = a_4x + a_5t + a_6 \quad (3.40)$$

lineer dalga değişkenler ve  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  sabit sayılar olarak verilir.

**3. Adım:** (3.39) ikinci dereceden fonksiyon çözümünün kendisini ve gerekli türevlerini (3.38) Hirota bilineer denkleminde yerine yazarsak  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenlerinden oluşan bir polinom elde edilir. Elde edilen bu polinomda aynı ifadelerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi sonucunda  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 7$ ) terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde (3.39) ikinci dereceden fonksiyon çözümleri elde edilir.

**4. Adım:** (3.39) ikinci dereceden fonksiyon çözümleri (3.37) dönüşümünde yerine yazıldığında (3.1) denkleminin rasyonel çözümleri elde edilir. Elde edilen rasyonel çözümler aşağıdaki koşulların sağlanması halinde "Lump çözümleri" olarak adlandırılır.

**1.) İyi tanımlılık:** İkinci dereceden fonksiyon çözümlerinin olması için, logaritma fonksiyonunun tanımından dolayı

$$a_7 > 0 \quad (3.41)$$

olmalıdır.

**2.) Analitiklik:** Rasyonel çözümlerin her yerde tanımlı olması gerekir.

3.) Yerellik: Rasyonel çözümlerin tüm yönlerde yerel olması

$$g^2 + h^2 \rightarrow \infty \text{ iken } u \rightarrow 0 \quad (3.42)$$

ile tanımlanır.

(3+1) ve (4+1) boyutlu denklemlerin rasyonel çözümleri iyi tanımlılık ve analitiklik şartlarını sağlamasına rağmen sırasıyla  $\mathbb{R}^4$  ve  $\mathbb{R}^5$  deki tüm yönlerde yerel olmadığından dolayı bu denklemlerin rasyonel çözümlerine Lump tipindeki çözümler denir. Bahsedilen bu yüksek boyutlu denklemlerin boyutları (1+1) veya (2+1) boyutlarına düşürüldüğünde tüm yönlerde yerel olma şartını sağlar ve elde edilen rasyonel çözümlere Lump çözümler denir.

### 3.6. Wronskiyen Determinant Algoritması

Wronskiyen determinant algoritması uygulanabilmesi için iki önemli şartın yerine getirilmesi gerekir. Bunlardan ilki ele alınan modelin Hirota bilineer formunun bilinmesi ikincisi ise denklemin Hirota bilineer formunu çözen lineer kısmi diferensiyel denklem sisteminden oluşan Wronskiyen şartlarının bilinmesi gerekir. Wronskiyen şartlar denklemin Hirota bilineer denkleminin yapısına göre değişiklik göstermektedir. Genel bir Wronskiyen şartları bulunmamaktadır. Bu durumdan dolayı literatürde (1+1), (2+1) ve (3+1) boyutlu denklemler için birbirinden farklı Wronskian şartları teorem olarak verilmiş ve ispatlanmıştır. Bu yaklaşım sayesinde denklemin rasyonel, soliton, poziton, negaton çözümleri ve bu çözümlerin kendi aralarında etkileşim çözümleri elde edilir.

Bu algoritmanın temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Ma 2004, Ma ve You 2005, Ma ve ark. 2009, Tang ve ark. 2011, Ma ve Bai 2013, Su ve Xu 2016, Yıldırım ve Yasar 2017c):

**1. Adım:** (3.1) denklemini yeni bir bağımlı fonksiyon dönüşümü olan

$$u = T(f) \quad (3.43)$$

altında

$$H(D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots) f f = 0 \quad (3.44)$$

Hirota bilineer denklemine dönüşür. Burada  $f = f(x, t)$  yeni bir bilinmeyen fonksiyon ve  $D_x, D_t, D_x^2, D_t^2, D_x D_t, \dots$ , operatörleri (2.5) denkleminde tanımlanan Hirota türev operatörleridir (Hirota 2004).

**2. Adım:** (3.44) denkleminin çözümü

$$f = |\widehat{N-1}| \quad (3.45)$$

Wronskiyen determinantı olarak verilir. (3.45) Wronskiyen determinantının (3.44) Hirota bilineer denklemini sağladığını göstermek için lineer kısmi türevli diferensiyel denklem sisteminden oluşan Wronskiyen şartlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu şartlar (3.44) Hirota bilineer denkleminin yapısına göre değişiklik göstermektedir. Genel bir Wronskiyen şartları bulunmamaktadır. Bu durumdan dolayı literatürde (1+1), (2+1) ve (3+1) boyutlu denklemler için birbirinden farklı Wronskiyen şartları teorem olarak verilmiş ve ispatlanmıştır.

**(1+1) boyutlu denklemler için Wronskiyen şartları:**

1)  $\phi_i = \phi_i(x, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\phi_{i,xxx} = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}(t) \phi_j,$$

$$\phi_{i,t} = \gamma \phi_{i,xx} \quad (3.46)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma$  keyfi parametre ve  $\lambda_{ij}(t)$  keyfi reel değerli fonksiyonlardır (Ma ve ark. 2009).

2)  $\phi_i = \phi_i(x, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi_{i,xx} &= \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \phi_j, \\ \phi_{i,t} &= \gamma \phi_{i,xxx}\end{aligned}\tag{3.47}$$

şeklindedir. Burada  $\gamma$  ve  $\lambda_{ij}$  keyfi reel değerli sabitlerdir (Ma 2004).

3)  $\phi_i = \phi_i(x, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi_{i,xx} &= \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}(t) \phi_j, \\ \phi_{i,t} &= \gamma \phi_{i,xxx} + \xi(t) \phi_i\end{aligned}\tag{3.48}$$

şeklindedir. Burada  $\gamma$  keyfi reel değerli sabit,  $\xi(t)$  ve  $\lambda_{ij}(t)$  keyfi reel değerli fonksiyonlardır (Ma ve You 2005).

### (2+1) boyutlu denklem için Wronskiyen şartları:

1)  $\phi_i = \phi_i(x, y, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi_{i,t} &= \gamma_1 \phi_{i,xxx} \\ \phi_{i,xx} &= \gamma_2 \phi_i \\ \phi_{i,y} &= \gamma_3 \phi_{i,x}\end{aligned}\tag{3.49}$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  keyfi parametrelerdir (Najafi ve ark. 2013).

2)  $\phi_i = \phi_i(x, y, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi_{i,xxxx} &= \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \phi_j, \\ \phi_{i,y} &= \gamma_1 \phi_{i,xx}\end{aligned}$$

$$\phi_{i,t} = \gamma_2 \phi_{i,xxx} \quad (3.50)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \gamma_2, \lambda_{ij}$  keyfi parametrelerdir (Cheng ve ark. 2014).

3)  $\phi_i = \phi_i(x, y, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\phi_{i,xx} = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \phi_j,$$

$$\phi_{i,y} = \gamma_1 \phi_{i,x}$$

$$\phi_{i,t} = \gamma_2 \phi_{i,x}$$

$$\gamma_3 \phi_{i,xxx} + \gamma_4 \phi_{i,x} = 0 \quad (3.51)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \lambda_{ij}$  keyfi parametrelerdir (Cheng ve ark. 2014).

4)  $\phi_i = \phi_i(x, y, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\phi_{i,xx} = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \phi_j,$$

$$\phi_{i,y} = \gamma_1 \phi_{i,x}$$

$$\phi_{i,t} = \gamma_2(t) \phi_{i,xxx} + \gamma_3(t) \phi_{i,x} \quad (3.52)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \lambda_{ij}$  keyfi parametreler ve  $\gamma_2(t), \gamma_3(t)$  keyfi reel değerli fonksiyonlardır (Jian-Ping ve Xian-Guo 2013).

### (3+1) boyutlu denklem için Wronskiyen şartları:

1)  $\phi_i = \phi_i(x, y, z, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\phi_{i,y} = \gamma_1 \phi_{i,x}$$

$$\phi_{i,z} = \gamma_2 \phi_{i,xx}$$



$$\phi_{i,t} = \gamma_3 \phi_{i,xxx} \quad (3.53)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  keyfi parametrelerdir (Ma ve ark. 2011).

2)  $\phi_i = \phi_i(x, y, z, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{i,t} &= \gamma_1 \phi_{i,xxx} \\ \phi_{i,xx} &= \gamma_2 \phi_i \\ \phi_{i,y} &= \gamma_3 \phi_{i,x} \\ \phi_{i,z} &= \gamma_4 \phi_{i,xxx} \end{aligned} \quad (3.54)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  keyfi parametrelerdir (Jian-Ping 2011).

3)  $\phi_i = \phi_i(x, y, z, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{i,xx} &= \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}(t) \phi_j, \\ \phi_{i,y} &= \gamma_1 \phi_{i,x} \\ \phi_{i,z} &= \gamma_2 \phi_{i,xxx} + \gamma_3 \phi_{i,x} \\ \phi_{i,t} &= \gamma_4 \phi_{i,x} \end{aligned} \quad (3.55)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  keyfi parametreler ve  $\lambda_{ij}(t)$  keyfi reel değerli fonksiyonlardır (Tang ve ark. 2011).

4)  $\phi_i = \phi_i(x, y, z, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{i,xx} &= \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}(t) \phi_j, \\ \phi_{i,y} &= \gamma_1 \phi_{i,x} \\ \phi_{i,z} &= \gamma_2 \phi_{i,xxx} + \gamma_3 \phi_{i,xx} \end{aligned}$$

$$\phi_{i,t} = \gamma_4 \phi_{i,xx} \quad (3.56)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  keyfi parametreler ve  $\lambda_{ij}(t)$  keyfi reel değerli fonksiyonlardır (Tang ve ark. 2012).

**3. Adım:** Ele alınan Wronskiyen şartlarının çözülmesi sonucu özdeğer fonksiyonları elde edilir. Elde edilen bu özdeğer fonksiyonları (3.45) Wronskiyen determinantında yerine yazılması sonucu (3.1) denklemin tam çözümleri elde edilir.

### 3.7. Tam mertebeli denklemler için Lie simetri yaklaşımı

Tam ve kesir mertebeli denklemler için geliştirilen Lie simetri yaklaşımlarının en önemli özelliği, ele alınan denklemin (ya da sistemin) sürekli Lie dönüşüm grubu altında değişmez kalmasıdır. Ele alınan denklemin (ya da sistemin) tam çözümlerinin bulunabilmesi için öncelikli adım denklemin Lie dönüşüm grubuna karşılık gelen Lie nokta simetri üreticilerinin bulunmasıdır. Denklemin üreticileri kullanılarak denklemin değişmezleri bulunur. Bu değişmezler sayesinde simetri indirgemeleri başka bir deyişle denklemin bir boyut indirgenmiş hali elde edilir. Yüksek boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemlerde denklemin adi diferensiyel denklem hali elde edilene kadar denklemin simetri indirgemelerinin bulunması devam edilir. Literatürde adi diferensiyel denklemler için geliştirilmiş yöntemler -örneğin en basit denklem yöntemi ve kuvvet serisi yöntemleri v.d.- kullanılarak modelin analitik çözümleri elde edilmiş olunur.

Bu yaklaşımın temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Bluman ve Kumei 1989, Olver 1993, Ibragimov 1995, Cheviakov 2007, 2010, Naz ve ark. 2008, Yıldırım ve Yaşar 2018):

**1. Adım:** (3.1) denkleminin bir Lie simetri üretici

$$\mathbf{X} = \xi^t(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.57)$$

şeklinde verilir. (3.57) üreticini bulabilmek için üreticinin  $n$ . uzanımını (3.1) denkleme

$$\mathbf{X}^{(n)} [P] \Big|_{P(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tt},u_{xt},\dots)=0} = 0 \quad (3.58)$$

biçiminde uygulamak gerekir. (3.58) denklemi açıldığında bir denklem elde edilir ve elde edilen bu denklemdeki terimler  $u$ 'nun türevlerine göre ayrılırsa bir denklem sistemi ortaya çıkar. Bu denklem sistemi çözümlerse  $\xi^t$ ,  $\xi^x$ ,  $\eta$  değerlerine ulaşılır. Böylece (3.1) denkleminin (3.57) üreteçleri elde edilir.

**2. Adım:** (3.57) üreteçleri kullanarak (3.1) denkleminin

$$\frac{dt}{\xi^t(t,x,u)} = \frac{dx}{\xi^x(t,x,u)} = \frac{du}{\eta(t,x,u)} \quad (3.59)$$

değişmezleri bulunur. (3.59) değişmezleri kullanılarak denklemin Lie simetri indirgemesi elde edilir veya başka bir ifadeyle denklem, bir mertebe düşüğü olan

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0 \quad (3.60)$$

adi diferensiyel denkleme dönüşür. Örneğin,  $a$  ve  $b$  sabit sayılar olmak üzere  $\xi^x = b$  ve  $\xi^t = a$  seçilirse

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = ax - bt \quad (3.61)$$

olarak verilir.

(3.61) denklemindeki değişmezler (3.1) denkleminin daima kabul ettiği uzay  $\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  ve zaman  $\mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial t}$  simetri üreteçlerinin lineer birleşimi olan

$$\mathbf{X} = b\mathbf{X}_1 + a\mathbf{X}_2 \quad (3.62)$$

üretecine karşılık gelmektedir.

**3. Adım:** (3.60) adi diferensiyel denklem çözülerek (3.1) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

### 3.8. Zaman kesir mertebeli denklemler için Lie simetri yaklaşımı

Bu yaklaşımın temel adımları aşağıdaki gibi verilir (Sahadevan ve Bakkyaraj 2012, Wang ve Xu 2014, Jefferson ve Carminati 2014, Yaşar ve ark. 2016, Baleanu ve ark. 2018a,b, Yusuf ve ark. 2018a,b,c, Tchier ve ark. 2018):

**1. Adım:** (3.2) denkleminin bir Lie simetri üretici

$$X = \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.63)$$

şeklinde verilir. (3.63) üreticini bulabilmek için üreticinin  $n$ . uzanımını (3.2) denkleme

$$X^{[n]}(E)|_{E=0} = 0 \quad (3.64)$$

biçiminde uygulamak gerekir. (3.64) denklemini açıldığında bir denklem elde edilir ve elde edilen bu denklemdeki terimler  $u$ 'nun türevlerine göre ayrılırsa bir denklem sistemine ulaşılır. Bu denklem sistemi çözümlerse  $\tau$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  değerlerine ulaşılır. Böylece (3.2) denkleminin (3.63) üreticileri elde edilir.

**2. Adım:** (3.63) üreticileri kullanarak (3.2) denkleminin

$$\frac{dt}{\tau(x, t, u)} = \frac{dx}{\xi(x, t, u)} = \frac{du}{\eta(x, t, u)} \quad (3.65)$$

değişmezleri bulunur. (3.65) değişmezleri kullanılarak denklemin Lie simetri indirgemesi elde edilir veya başka bir deyişle denklem, bir mertebe düşüğü olan

$$Q\left(\left(P_{\beta}^{\tau, \alpha} g\right), g, g', g'', \dots\right) = 0 \quad (3.66)$$

kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme dönüşür. Burada  $\left(P_{\beta}^{\tau, \alpha} g\right)$  ifadesi Erdelyi-Kober kesirli türev operatörüdür.

**3. Adım:** (3.66) kesir mertebeli adi diferensiyel denklemini çözümlenerek (3.2) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

## 4. TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde, fizik alanında kullanılan ve bu alanda oldukça önemli bir yere sahip olan (1+1) boyutlu bir genelleştirilmiş KdV denklemi, (2+1) boyutlu SK denklemi, bir yeni genelleştirilmiş (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemi, (2+1) boyutlu yerel olmayan Ito denklemi, (2+1) boyutlu kırılğan soliton denklemi ve yedinci mertebeden zaman kesir mertebeli SKI denklemlerinin tam çözümleri üçüncü bölümde verilen metotlar kullanılarak incelenecektir. Ayrıca ele alınan modellerin daha iyi anlaşılması için bazı çözümlerin grafikleri de sunulacaktır.

### 4.1. En Basit Denklem Yöntemiyle Elde Edilen Çözümler

Literatürde KdV denklemi olarak bilinen

$$u_t + 6uu_x + u_{3x} = 0 \quad (4.1)$$

denklemi zayıf doğrusal olmayan uzun dalgaları modeller (Whitham 1974, Marchant 2000). KdV denklemine yüksek mertebeden terimler ilave edilirse

$$u_t + u_x + \alpha (\lambda uu_x + u_{3x}) + \alpha^2 (c_1 u^2 u_x + c_2 u_x u_{2x} + c_3 uu_{3x} + c_4 u_{5x}) = 0 \quad (4.2)$$

genelleştirilmiş KdV denklemi elde edilir (Whitham 1974, Marchant 2000, Miao ve ark. 2014, Wazwaz 2016, Yıldırım ve Yaşar 2017a). Burada  $\alpha$  bir dalga genliğidir. (4.2) denklemi (4.1) denkleminde farklı olarak daha kısa dalga boyundaki dik dalgaların oluşumunu tasvir eder. Ayrıca (4.2) denklemi birçok integrallenebilir modellere dönüştürülebilir ve bu dönüşen modeller sığ su dalgalarının genliğini tanımlar (Wazwaz 2016).

Beşinci mertebeden klasik KdV

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{2x} + \gamma uu_{3x} + u_{5x} = 0 \quad (4.3)$$

denkleminin aksine (4.2) denklemi hem  $u_{3x}$  ve  $u_{5x}$  doğrusal yayılma terimlerini hem de lineer olmayan  $uu_x$ ,  $u^2 u_x$ ,  $u_x u_{2x}$  ve  $uu_{3x}$  terimlerini içerir (Wazwaz 2007).

(4.2) denkleminde  $c_1 = 45$ ,  $c_2 = c_3 = 15$ ,  $c_4 = 1$ ,  $\lambda = 6$  alındığında

$$u_t + u_x + \alpha (6uu_x + u_{3x}) + \alpha^2 (u_{5x} + 15uu_{3x} + 15u_x u_{2x} + 45u^2 u_x) = 0 \quad (4.4)$$

bir özel genelleştirilmiş KdV denklemi bulunur. Bu bölümde en basit denklem yöntemi kullanılarak (4.4) denkleminin periyodik ilerleyen dalga çözümleri, cnoidal dalga çözümleri ve snoidal dalga çözümleri bulunacaktır.

#### 4.1.1. Bernoulli denkleminin en basit denklem olarak kullanılması

(3.3) dönüşümü (4.4) denkleminde yerine yazıldığında

$$k_2 F'(z) + k_1 F'(z) + \alpha (6k_1 F(z) F'(z) + k_1^3 F'''(z)) + \alpha^2 (k_1^5 F''''(z) + 15k_1^3 F(z) F'''(z) + 15k_1^3 F'(z) F''(z) + 45k_1 F^2(z) F'(z)) = 0 \quad (4.5)$$

lineer olmayan adi diferensiyel denklemi elde edilir. (4.5) adi diferensiyel denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim

$$F''''(z) \quad (4.6)$$

ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimler

$$F(z) F'''(z), F'(z) F''(z), F^2(z) F'(z) \quad (4.7)$$

arasında dengeleme prensibinin uygulanması sonucu  $M = 2$  elde edilir. Böylece (3.5) denkleminin sonucu olarak (4.5) denkleminin çözümü

$$F(z) = A_0 + A_1 H(z) + A_2 H^2(z) \quad (4.8)$$

şeklindedir. (4.8) denklemini (3.6) denkleminle birlikte (4.5) denkleminde yazıldığında yüksek mertebeden bir denklem elde edilir. Sıfırıncı mertebeden denklem elde edilene kadar bu yerine koyma işlemi devam edilir ve daha sonra  $H^i$  fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlendiğinde  $\alpha, k_1, k_2, a, b, A_0, A_1, A_2$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi

elde edilir. Bu denklem sistemi Maple yardımıyla çözüldüğünde

$$A_0 = -\frac{5a^2\alpha k_1^3 + 2k_1 \pm \sqrt{5a^4\alpha^2 k_1^6 - 16k_1^2 - 20k_1 k_2}}{30k_1\alpha},$$

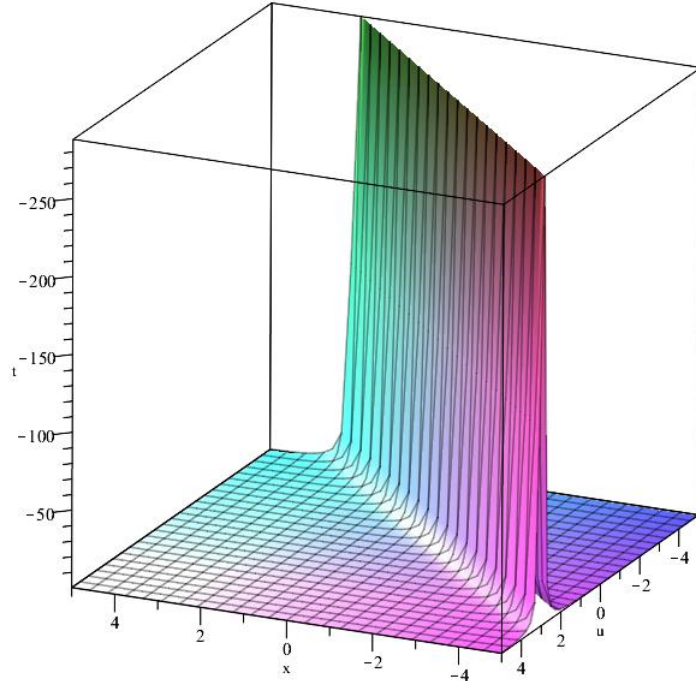
$$A_1 = -2abk_1^2,$$

$$A_2 = -2b^2k_1^2 \quad (4.9)$$

sonuçları elde edilir. Böylece (4.4) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = A_0 + A_1 a \left\{ \frac{\cosh[a(z+C)] + \sinh[a(z+C)]}{1 - b \cosh[a(z+C)] - b \sinh[a(z+C)]} \right\} + A_2 a^2 \left\{ \frac{\cosh[a(z+C)] + \sinh[a(z+C)]}{1 - b \cosh[a(z+C)] - b \sinh[a(z+C)]} \right\}^2 \quad (4.10)$$

olarak bulunur (Şekil 4.1). Burada  $z = k_1x + k_2t + k_3$ ,  $C$  bir integral sabiti ve  $A_0, A_1, A_2$  katsayıları (4.9) denkleminde verilir.



**Şekil 4.1.** (4.4) denkleminin ilerleyen dalga çözüm grafiği. Burada  $\alpha = 3$ , diğer tüm parametreler 1 alınmıştır

#### 4.1.2. Riccati denkleminin en basit denklem olarak kullanılması

(4.8) denklemi (3.7) denklemiyle birlikte (4.5) denkleminde yazıldığında yüksek mertebeden bir denklem elde edilir. Sıfırıncı mertebeden denklem elde edilene kadar bu yerine koyma işlemi devam edilir ve daha sonra  $H^i$  fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlendiğinde  $\alpha, k_1, k_2, a, b, c, A_0, A_1, A_2$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$A_0 = \frac{40a\alpha ck_1^3 + 5\alpha b^2 k_1^3 + 2k_1 \pm \sqrt{80a^2\alpha^2 c^2 k_1^6 - 40a\alpha^2 b^2 ck_1^6 + 5\alpha^2 b^4 k_1^6 - 16k_1^2 - 20k_1 k_2}}{-30k_1 \alpha},$$

$$A_1 = -2abk_1^2,$$

$$A_2 = -2a^2 k_1^2 \quad (4.11)$$

sonuçları elde edilir. Böylece (4.4) denkleminin çözümü

$$u(x,t) = A_0 + A_1 \left\{ -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh \left[ \frac{1}{2} \theta (z + C) \right] \right\} + A_2 \left\{ -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh \left[ \frac{1}{2} \theta (z + C) \right] \right\}^2, \quad (4.12)$$

$$u(x,t) = A_0 + A_1 \left\{ -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh \left( \frac{\theta z}{2} \right) + \frac{\operatorname{sech} \left( \frac{\theta z}{2} \right)}{C \cosh \left( \frac{\theta z}{2} \right) - \frac{2a}{\theta} \sinh \left( \frac{\theta z}{2} \right)} \right\} + A_2 \left\{ -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh \left( \frac{\theta z}{2} \right) + \frac{\operatorname{sech} \left( \frac{\theta z}{2} \right)}{C \cosh \left( \frac{\theta z}{2} \right) - \frac{2a}{\theta} \sinh \left( \frac{\theta z}{2} \right)} \right\}^2 \quad (4.13)$$

olarak bulunur. Burada  $z = k_1 x + k_2 t + k_3$ ,  $C$  bir integral sabiti,  $\theta^2 = b^2 - 4ac$  ve  $A_0, A_1, A_2$  katsayıları (4.11) denkleminde verilir.

#### 4.1.3. Jacobi eliptik fonksiyonların en basit denklem olarak kullanılması

(4.8) denklemi (3.8) denklemiyle birlikte (4.5) denkleminde yazıldığında yüksek mertebeden bir denklem elde edilir. Sıfırıncı mertebeden denklem elde edilene kadar bu yerine koyma işlemi devam edilir ve daha sonra  $H^i$  fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlendiğinde  $\alpha, k_1, k_2, \omega, A_0, A_1, A_2$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu



denklem sistemi çözüldüğünde (4.4) denkleminin cnoidal dalga çözümü (Şekil 4.2)

$$u(x,t) = A_0 + A_1 \text{cn}(z|\omega) + A_2 \text{cn}^2(z|\omega) \quad (4.14)$$

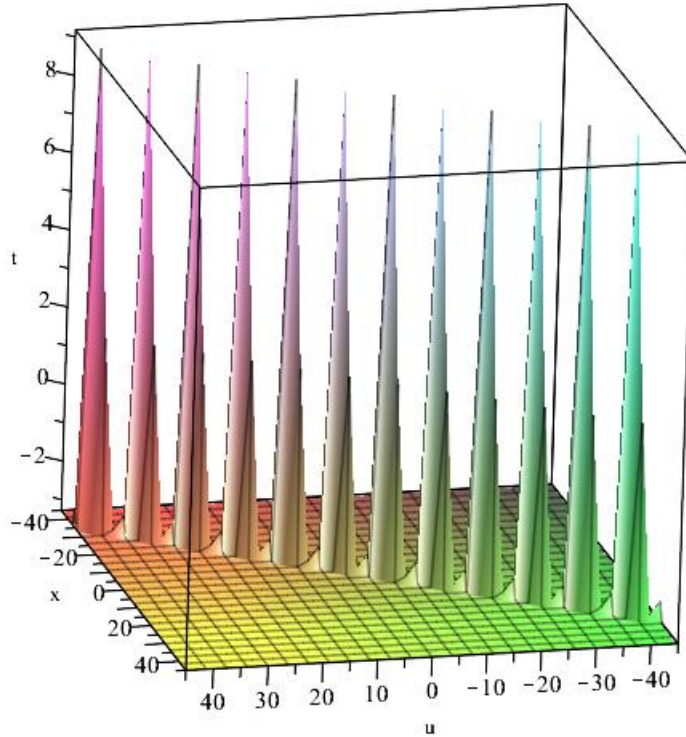
olarak verilir. Buradaki katsayılar

$$A_0 = \frac{20\alpha\omega k_1^3 - 10\alpha k_1^3 + k_1 \pm \sqrt{20\alpha^2\omega^2 k_1^6 - 20\alpha^2\omega k_1^6 + 20\alpha^2 k_1^6 - 4k_1^2 - 5k_1 k_2}}{-15k_1\alpha},$$

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = 2\omega k_1^2 \quad (4.15)$$

şeklinde bulunur.



**Şekil 4.2.** (4.4) denkleminin cnoidal dalga çözüm grafiği. Burada  $\alpha = -2$ ,  $\omega = 1$ ,  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$  ve  $k_3 = 5$  alınmıştır

Öte yandan (4.8) denklemi (3.9) denklemiyle birlikte (4.5) denkleminde yazıldığında yük-

sek mertebeden bir denklem elde edilir. Sıfıncı mertebeden denklem elde edilene kadar bu yerine koyma işlemi devam edilir ve daha sonra  $H^i$  fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlendiğinde  $\alpha, k_1, k_2, \omega, A_0, A_1, A_2$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde (4.4) denkleminin snoidal dalga çözümü (Şekil 4.3)

$$u(x, t) = A_0 + A_1 \operatorname{sn}(z|\omega) + A_2 \operatorname{sn}^2(z|\omega) \quad (4.16)$$

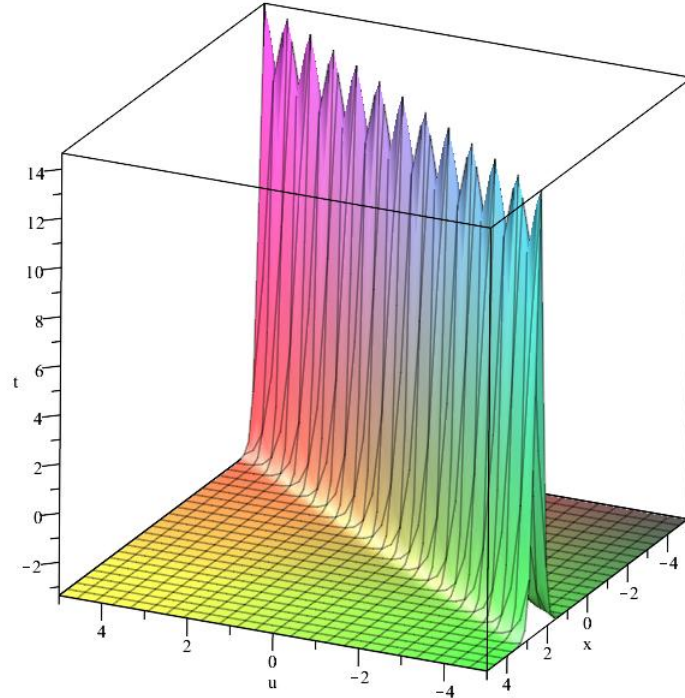
olarak verilir. Buradaki katsayılar

$$A_0 = \frac{10\alpha\omega k_1^3 + 10\alpha k_1^3 - k_1 \pm \sqrt{20\alpha^2\omega^2 k_1^6 - 20\alpha^2\omega k_1^6 + 20\alpha^2 k_1^6 - 4k_1^2 - 5k_1 k_2}}{15k_1\alpha},$$

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = -2\omega k_1^2 \quad (4.17)$$

şeklinde bulunur.



**Şekil 4.3.** (4.4) denkleminin snoidal dalga çözüm grafiği. Burada  $\alpha = 2, \omega = 1, k_1 = 3, k_2 = 4$  ve  $k_3 = 5$  alınmıştır

## 4.2. Çoklu Eksponansiyel Fonksiyon Metoduyla Elde Edilen Çözümler

Literatürde beşinci mertebeden KdV denklemi olarak bilinen

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{2x} + \gamma u u_{3x} + u_{5x} = 0 \quad (4.18)$$

denklemini birçok fiziksel olayın modellenmesinde ortaya çıkar (Wazwaz 2007, Bilige ve Chaolu 2010, Liu ve ark. 2010, Wang ve ark. 2013). Burada  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  keyfi sabit sayılardır. Bu parametrelere değerler verilerek literatürde bilinen bazı denklemler elde edilir.

(4.18) denkleminde  $\alpha = \beta = \gamma = 5$  alındığında SK denklemi

$$u_t + 5u^2 u_x + 5u_x u_{2x} + 5u u_{3x} + u_{5x} = 0, \quad (4.19)$$

$\alpha = 180$ ,  $\gamma = \beta = 30$  alındığında Caudrey–Dodd–Gibbon (CDG) denklemi

$$u_t + 180u^2 u_x + 30u_x u_{2x} + 30u u_{3x} + u_{5x} = 0, \quad (4.20)$$

$\alpha = 30$ ,  $\gamma = 20$ ,  $\beta = 10$  alındığında Lax denklemi

$$u_t + 30u^2 u_x + 20u_x u_{2x} + 10u u_{3x} + u_{5x} = 0, \quad (4.21)$$

$\alpha = 20$ ,  $\gamma = 25$ ,  $\beta = 10$  alındığında Kaup–Kupershmidt (KK) denklemi

$$u_t + 20u^2 u_x + 25u_x u_{2x} + 10u u_{3x} + u_{5x} = 0, \quad (4.22)$$

$\alpha = 2$ ,  $\gamma = 6$ ,  $\beta = 3$  alındığında Ito denklemi

$$u_t + 2u^2 u_x + 6u_x u_{2x} + 3u u_{3x} + u_{5x} = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir (Wazwaz 2007, Bilige ve Chaolu 2010).

(4.18) numaralı yüksek mertebeli KdV denkleminin hiyerarşisine ait olan veya bir genelleştirilmesi olan (2+1) boyutlu SK denklemi

$$u_t - u_{5x} - 5u_x u_{2x} - 5uu_{3x} - 5u^2 u_x - 5u_{2xy} - 5uu_y + 5 \int u_{2y} dx - 5u_x \int u_y dx = 0 \quad (4.24)$$

olarak verilir (Konopelchenko ve Dubrovsky 1984, Hong-Yan ve Hong-Qing 2008, Wazwaz 2011, Shi ve Li 2012, Lü 2014, Jia ve ark. 2017, Yıldırım ve Yaşar 2017b).

(4.24) denkleminin fiziksel olarak bakıldığında fiziğin birçok alanlarında örneğin uygun alan teorisinde, iki boyutlu kuantum yerçekimi ölçüm alanında ve doğrusal olmayan Liouville akışkan korunum denklemlerinde yaygın olarak kullanılır (Hong-Yan ve Hong-Qing 2008, Shi ve Li 2012, Huang ve Chen 2017, Liu 2018). (4.24) denkleminde  $u(x, y, t) \equiv u(x, t)$  alındığında (4.19) numaralı (1+1) boyutlu SK denkleminin dönüşür. (4.19) numaralı denklem birçok araştırmacı tarafından değişik açılardan ele alınmasına rağmen (4.24) denkleminin birkaç kişi tarafından ele alınmıştır. Bu sebepten dolayı bu bölümde (2+1) boyutlu hali ele alınacaktır.

(4.24) denkleminin integral terimlerini içerdiğinden dolayı

$$u = v_x \quad (4.25)$$

dönüşümü kullanarak (4.24) denkleminin aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$v_{xt} - v_{6x} - 5v_{2x}v_{3x} - 5v_x v_{4x} - 5v_x^2 v_{2x} - 5v_{3xy} - 5v_x v_{xy} + 5v_{2y} - 5v_{2x}v_y = 0. \quad (4.26)$$

Bu bölümde çoklu eksponansiyel fonksiyon metodu kullanılarak (4.24) denkleminin bir dalga, iki dalga ve üç dalga çözümleri bulunacaktır.

#### 4.2.1. Bir dalga çözümü

Çoklu eksponansiyel fonksiyon metodunda (2+1) boyutlu bir denklem için bir dalga çözümü

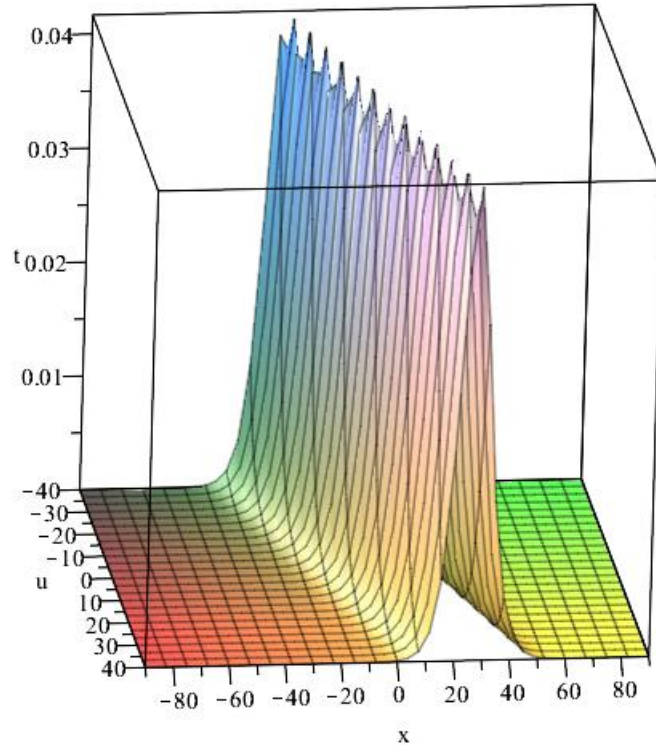
$$v(x, y, t) = \frac{\Phi(\eta_1)}{\Omega(\eta_1)} = \frac{A_0 + A_1 e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t}}{B_0 + B_1 e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t}} \quad (4.27)$$

olarak verilir (Şekil 4.4). Burada  $A_0, A_1, B_0, B_1$  keyfi sabitlerdir. (4.27) rasyonel fonksiyon çözümünü ve gerekli türev terimleri (4.26) denkleminde yerine yazıldığında bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemi çözümlerse

$$\omega_1 = -\frac{k_1^6 + 5k_1^3 l_1 - 5l_1^2}{k_1},$$

$$A_1 = -\frac{-6B_0 B_1 k_1 - A_0 B_1}{B_0} \quad (4.28)$$

sonuçları bulunur.



**Şekil 4.4.** (4.24) denkleminin bir dalga çözüm grafiği. Burada  $A_0 = 0.2$ ,  $B_0 = 0.3$ ,  $B_1 = 0.6$ ,  $k_1 = 1/6$  ve  $l_1 = 0.1$  alınmıştır

#### 4.2.2. İki dalga çözümü

(2+1) boyutlu bir denklem için iki dalga çözümü

$$v(x, y, t) = \frac{\Phi(\eta_1, \eta_2)}{\Omega(\eta_1, \eta_2)} \quad (4.29)$$

ve

$$\Phi = \gamma \left( k_1 e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} + k_2 e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t} + A_{12} (k_1 + k_2) e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t} \right),$$

$$\Omega = 1 + e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} + e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t} + A_{12} e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t}$$

olarak verilir (Şekil 4.5). Burada  $\gamma$  ve  $A_{12}$  sabit sayılardır. (4.29) rasyonel fonksiyon çözümü ve gerekli türev terimleri (4.26) denkleminde yerine yazıldığında bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemi çözülürse

$$\gamma = 6,$$

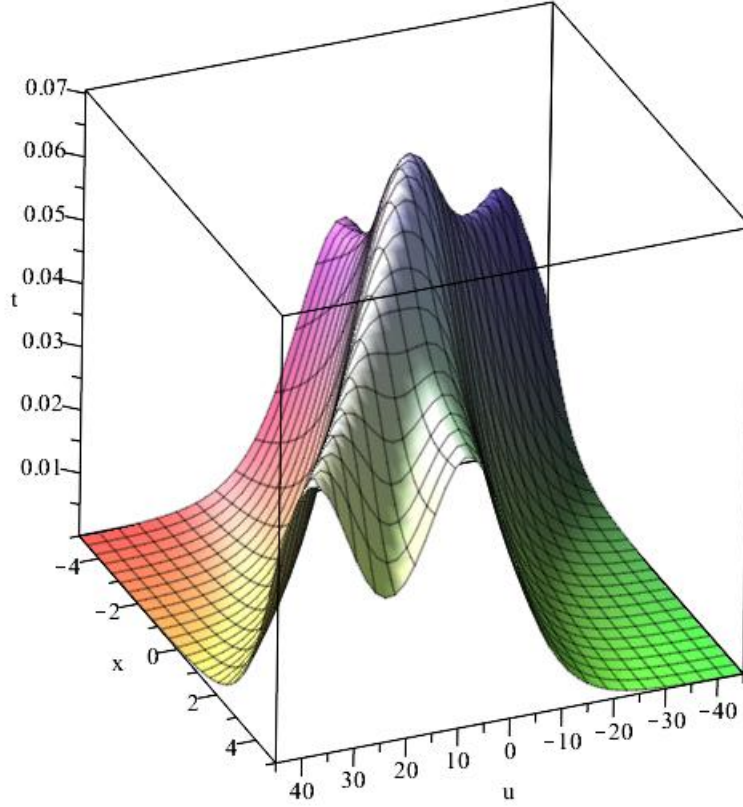
$$A_{12} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\begin{aligned} \alpha = & k_1^6 k_2^2 - 3k_1^5 k_2^3 + 4k_1^4 k_2^4 - 3k_1^3 k_2^5 + k_1^2 k_2^6 + k_1^4 k_2 l_2 + 2k_1^3 k_2^2 l_1 - 3k_1^3 k_2^2 l_2 - 3k_1^2 k_2^3 l_1 \\ & + 2k_1^2 k_2^3 l_2 + k_1 k_2^4 l_1 + k_1^2 l_2^2 - 2k_1 k_2 l_1 l_2 + k_2^2 l_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta = & k_1^6 k_2^2 + 3k_1^5 k_2^3 + 4k_1^4 k_2^4 + 3k_1^3 k_2^5 + k_1^2 k_2^6 + k_1^4 k_2 l_2 + 2k_1^3 k_2^2 l_1 + 3k_1^3 k_2^2 l_2 + 3k_1^2 k_2^3 l_1 \\ & + 2k_1^2 k_2^3 l_2 + k_1 k_2^4 l_1 + k_1^2 l_2^2 - 2k_1 k_2 l_1 l_2 + k_2^2 l_1^2, \end{aligned}$$

$$\omega_1 = -\frac{k_1^6 + 5k_1^3 l_1 - 5l_1^2}{k_1}, \quad \omega_2 = -\frac{k_2^6 + 5k_2^3 l_2 - 5l_2^2}{k_2} \quad (4.30)$$

sonuçları bulunur.



**Şekil 4.5.** (4.24) denkleminin iki dalga çözümü grafiği. Burada  $k_1 = 1/6$ ,  $k_2 = 1/6$ ,  $l_1 = 0.1$  ve  $l_2 = 0.2$  alınmıştır

### 4.2.3. Üç dalga çözümü

(2+1) boyutlu bir denklem için üç dalga çözümü

$$v(x, y, t) = \frac{\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3)}{\Omega(\eta_1, \eta_2, \eta_3)} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} \Phi = \gamma \left( k_1 e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} + k_2 e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t} + k_3 e^{k_3 x + l_3 y - \omega_3 t} + A_{12} (k_1 + k_2) e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t} \right. \\ \left. + A_{13} (k_1 + k_3) e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} e^{k_3 x + l_3 y - \omega_3 t} + A_{23} (k_2 + k_3) e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t} e^{k_3 x + l_3 y - \omega_3 t} \right. \\ \left. + A_{12} A_{13} A_{23} (k_1 + k_2 + k_3) e^{k_1 x + l_1 y - \omega_1 t} e^{k_2 x + l_2 y - \omega_2 t} e^{k_3 x + l_3 y - \omega_3 t} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega = & 1 + e^{k_1x+l_1y-\omega_1t} + e^{k_2x+l_2y-\omega_2t} + e^{k_3x+l_3y-\omega_3t} + A_{12}e^{k_1x+l_1y-\omega_1t}e^{k_2x+l_2y-\omega_2t} \\
& + A_{13}e^{k_1x+l_1y-\omega_1t}e^{k_3x+l_3y-\omega_3t} + A_{23}e^{k_2x+l_2y-\omega_2t}e^{k_3x+l_3y-\omega_3t} \\
& + A_{12}A_{13}A_{23}e^{k_1x+l_1y-\omega_1t}e^{k_2x+l_2y-\omega_2t}e^{k_3x+l_3y-\omega_3t}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak verilir (Şekil 4.6). Burada  $\gamma$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$  ve  $A_{23}$  sabit sayıdır. (4.31) rasyonel fonksiyon çözümü ve gerekli türev terimleri (4.26) denkleminde yerine yazıldığında bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemi çözülürse

$$\gamma = 6,$$

$$A_{12} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & k_1^6k_2^2 - 3k_1^5k_2^3 + 4k_1^4k_2^4 - 3k_1^3k_2^5 + k_1^2k_2^6 + k_1^4k_2l_2 + 2k_1^3k_2^2l_1 - 3k_1^3k_2^2l_2 - 3k_1^2k_2^3l_1 \\
& + 2k_1^2k_2^3l_2 + k_1k_2^4l_1 + k_1^2l_2^2 - 2k_1k_2l_1l_2 + k_2^2l_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta = & k_1^6k_2^2 + 3k_1^5k_2^3 + 4k_1^4k_2^4 + 3k_1^3k_2^5 + k_1^2k_2^6 + k_1^4k_2l_2 + 2k_1^3k_2^2l_1 + 3k_1^3k_2^2l_2 + 3k_1^2k_2^3l_1 \\
& + 2k_1^2k_2^3l_2 + k_1k_2^4l_1 + k_1^2l_2^2 - 2k_1k_2l_1l_2 + k_2^2l_1^2,
\end{aligned}$$

$$A_{13} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & k_1^6k_3^2 - 3k_1^5k_3^3 + 4k_1^4k_3^4 - 3k_1^3k_3^5 + k_1^2k_3^6 + k_1^4k_3l_3 + 2k_1^3k_3^2l_1 - 3k_1^3k_3^2l_3 - 3k_1^2k_3^3l_1 \\
& + 2k_1^2k_3^3l_3 + k_1k_3^4l_1 + k_1^2l_3^2 - 2k_1k_3l_1l_3 + k_3^2l_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta = & k_1^6k_3^2 + 3k_1^5k_3^3 + 4k_1^4k_3^4 + 3k_1^3k_3^5 + k_1^2k_3^6 + k_1^4k_3l_3 + 2k_1^3k_3^2l_1 + 3k_1^3k_3^2l_3 + 3k_1^2k_3^3l_1 \\
& + 2k_1^2k_3^3l_3 + k_1k_3^4l_1 + k_1^2l_3^2 - 2k_1k_3l_1l_3 + k_3^2l_1^2,
\end{aligned}$$

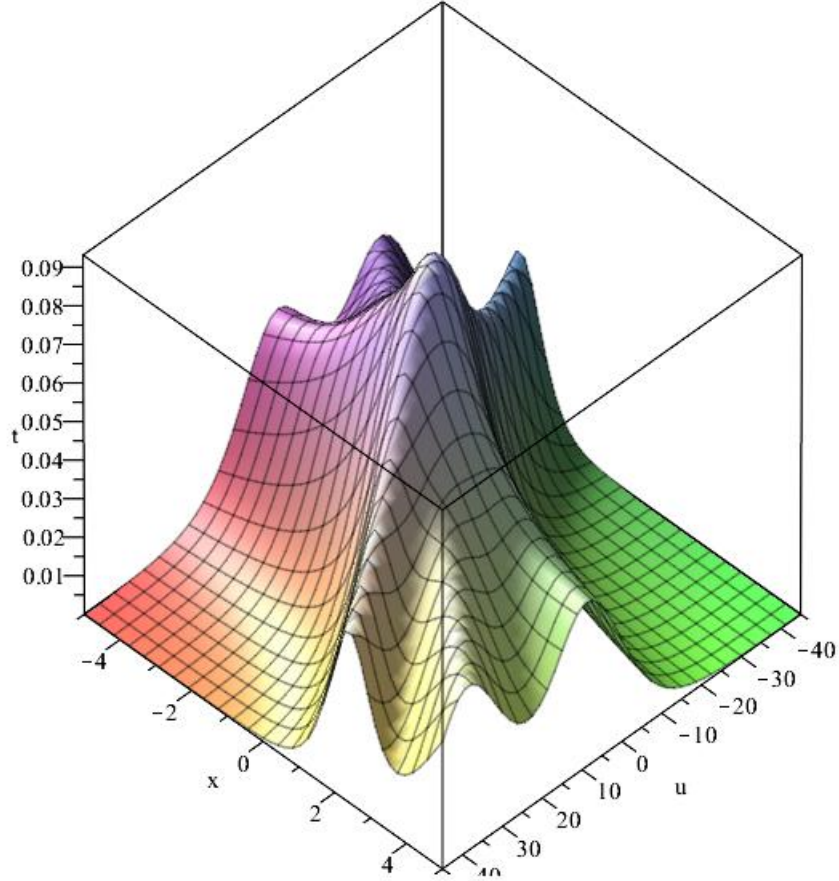
$$A_{23} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & k_2^6k_3^2 - 3k_2^5k_3^3 + 4k_2^4k_3^4 - 3k_2^3k_3^5 + k_2^2k_3^6 + k_2^4k_3l_3 + 2k_2^3k_3^2l_2 - 3k_2^3k_3^2l_3 - 3k_2^2k_3^3l_2 \\
& + 2k_2^2k_3^3l_3 + k_2k_3^4l_2 + k_2^2l_3^2 - 2k_2k_3l_2l_3 + k_3^2l_2^2,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\beta &= k_2^6 k_3^2 + 3k_2^5 k_3^3 + 4k_2^4 k_3^4 + 3k_2^3 k_3^5 + k_2^2 k_3^6 + k_2^4 k_3 l_3 + 2k_2^3 k_3^2 l_2 + 3k_2^3 k_3^2 l_3 + 3k_2^2 k_3^3 l_2 \\
&\quad + 2k_2^2 k_3^3 l_3 + k_2 k_3^4 l_2 + k_2^2 l_3^2 - 2k_2 k_3 l_2 l_3 + k_3^2 l_2^2, \\
\omega_1 &= -\frac{k_1^6 + 5k_1^3 l_1 - 5l_1^2}{k_1}, \omega_2 = -\frac{k_2^6 + 5k_2^3 l_2 - 5l_2^2}{k_2}, \omega_3 = -\frac{k_3^6 + 5k_3^3 l_3 - 5l_3^2}{k_3} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

sonuçları bulunur.



**Şekil 4.6.** (4.24) denkleminin üç dalga çözüm grafiği. Burada  $k_1 = 1/6$ ,  $k_2 = 1/6$ ,  $k_3 = 1/6$ ,  $l_1 = 0.1$ ,  $l_2 = 0.2$  ve  $l_3 = 0.3$  alınmıştır

### 4.3. Geliştirilmiş Rasyonel Fonksiyon Yaklaşımıyla Elde Edilen Çözümler

Bu bölümde (4.24) numaralı lineer olmayan (2+1) boyutlu SK denkleminin kompleksiton çözümleri bulunacaktır.

### 4.3.1. Hirota bilineer denklemi

(4.26) numaralı (2+1) boyutlu SK denkleminde

$$v(x, y, t) = 6(\ln f)_x \quad (4.34)$$

dönüşümü yazıldığında

$$\begin{aligned} & 2(\ln f)_{2xt} - 2(\ln f)_{7x} - 60(\ln f)_{3x}(\ln f)_{4x} - 60(\ln f)_{2x}(\ln f)_{5x} - 360((\ln f)_{2x})^2(\ln f)_{3x} \\ & - 10(\ln f)_{4xy} - 60(\ln f)_{2x}(\ln f)_{2xy} + 10(\ln f)_{2yx} - 60(\ln f)_{3x}(\ln f)_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

denklemi elde edilir. Burada  $f = f(x, y, t)$  olarak gösterilir.

(4.35) denklemi  $x$  bağımsız değişkenine göre bir kere integral alındığında

$$\begin{aligned} & 2(\ln f)_{xt} - 2(\ln f)_{6x} - 60(\ln f)_{2x}(\ln f)_{4x} - 120((\ln f)_{2x})^3 \\ & - 10(\ln f)_{3xy} - 60(\ln f)_{2x}(\ln f)_{xy} + 10(\ln f)_{2y} = C \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir. Burada  $C$  integral sabitidir. (4.36) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{2f_{xt}}{f} - \frac{2f_x f_t}{f^2} - \frac{2f_{6x}}{f} + \frac{12f_{5x} f_x}{f^2} - \frac{30f_{4x} f_{2x}}{f^2} + \frac{20f_{3x}^2}{f^2} \\ & - 5 \left( \frac{2f_{3xy}}{f} - \frac{2f_{3x} f_y}{f^2} - \frac{6f_x f_{2xy}}{f^2} + \frac{6f_{2x} f_{xy}}{f^2} \right) + 5 \left( \frac{2f_{2y}}{f} - \frac{2f_y^2}{f^2} \right) = C \end{aligned} \quad (4.37)$$

veya

$$\begin{aligned} & 2ff_{xt} - 2f_x f_t - 2ff_{6x} + 12f_{5x} f_x - 30f_{4x} f_{2x} + 20f_{3x}^2 \\ & - 5(2ff_{3xy} - 2f_{3x} f_y - 6f_x f_{2xy} + 6f_{2x} f_{xy}) + 5(2ff_{2y} - 2f_y^2) = Cf^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38) denkleminde gerekli olan Hirota türevleri

$$D_y^2 f f = 2ff_{2y} - 2f_y^2,$$

$$D_x D_t f f = 2ff_{xt} - 2f_x f_t,$$

$$D_x^3 D_y f f = 2f f_{3xy} - 2f_{3x} f_y - 6f_x f_{2xy} + 6f_{2x} f_{xy},$$

$$D_x^6 f f = 2f f_{6x} - 12f_x f_{5x} + 30f_{2x} f_{4x} - 20f_{3x}^2 \quad (4.39)$$

olarak verilir (Hirota 2004).  $C = 0$  integral sabiti ve (4.39) Hirota türevleri (4.38) denkleminde yerine yazılırsa (4.26) numaralı (2+1) boyutlu SK denkleminin Hirota bilineer denklemi

$$\begin{aligned} (D_x D_t - D_x^6 - 5D_x^3 D_y + 5D_y^2) f f = f f_{xt} - f_x f_t - f f_{6x} + 6f_x f_{5x} - 15f_{2x} f_{4x} + 10f_{3x}^2 \\ - 5f f_{3xy} + 5f_{3x} f_y + 15f_x f_{2xy} - 15f_{2x} f_{xy} + 5f f_{2y} - 5f_y^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

elde edilir.

### 4.3.2. Kompleksiton çözümler

(3.25) denklemindeki  $p(\eta_1, \eta_2)$  ve  $q(\eta_1, \eta_2)$  polinomları

$$p(\eta_1, \eta_2) = A\eta_1 + B\eta_2, \quad q(\eta_1, \eta_2) = 1 \quad (4.41)$$

olarak alındığında (3.25) denklemi

$$f = A\eta_1 + B\eta_2 \quad (4.42)$$

denklemine dönüşür. Burada

$$\eta_1 = \eta_1(\xi_1), \quad \eta_2 = \eta_2(\xi_2), \quad (4.43)$$

$$\xi_1 = k_1 x + l_1 y + \omega_1 t + c_1, \quad \xi_2 = k_2 x + l_2 y + \omega_2 t + c_2 \quad (4.44)$$

biçimindedir.  $A, B, k_1, k_2, l_1, l_2, \omega_1, \omega_2, c_1, c_2$  parametreleri ise sabit sayılardır.

(3.26) ve (3.27) denklemleri kullanılarak (4.40) Hirota bilineer denkleminde yer alan türevler

$$f_x = Ak_1 \eta_1' + Bk_2 \eta_2',$$

$$\begin{aligned}
f_y &= Al_1 \eta'_1 + Bl_2 \eta'_2, \\
f_t &= A\omega_1 \eta'_1 + B\omega_2 \eta'_2, \\
f_{2x} &= Ak_1^2 \eta''_1 + Bk_2^2 \eta''_2 = -Ak_1^2 \eta_1 + Bk_2^2 \eta_2, \\
f_{2y} &= Al_1^2 \eta''_1 + Bl_2^2 \eta''_2 = -Al_1^2 \eta_1 + Bl_2^2 \eta_2, \\
f_{xt} &= Ak_1 \omega_1 \eta''_1 + Bk_2 \omega_2 \eta''_2 = -Ak_1 \omega_1 \eta_1 + Bk_2 \omega_2 \eta_2, \\
f_{xy} &= Ak_1 l_1 \eta''_1 + Bk_2 l_2 \eta''_2 = -Ak_1 l_1 \eta_1 + Bk_2 l_2 \eta_2, \\
f_{3x} &= Ak_1^3 \eta'''_1 + Bk_2^3 \eta'''_2 = -Ak_1^3 \eta'_1 + Bk_2^3 \eta'_2, \\
f_{2xy} &= Ak_1^2 l_1 \eta'''_1 + Bk_2^2 l_2 \eta'''_2 = -Ak_1^2 l_1 \eta'_1 + Bk_2^2 l_2 \eta'_2, \\
f_{3xy} &= Ak_1^3 l_1 \eta_1^{(4)} + Bk_2^3 l_2 \eta_2^{(4)} = Ak_1^3 l_1 \eta_1 + Bk_2^3 l_2 \eta_2, \\
f_{4x} &= Ak_1^4 \eta_1^{(4)} + Bk_2^4 \eta_2^{(4)} = Ak_1^4 \eta_1 + Bk_2^4 \eta_2, \\
f_{5x} &= Ak_1^5 \eta_1^{(5)} + Bk_2^5 \eta_2^{(5)} = Ak_1^5 \eta'_1 + Bk_2^5 \eta'_2, \\
f_{6x} &= Ak_1^6 \eta_1^{(6)} + Bk_2^6 \eta_2^{(6)} = -Ak_1^6 \eta_1 + Bk_2^6 \eta_2
\end{aligned} \tag{4.45}$$

olarak verilir. (4.45) türevleri (4.40) Hirota bilineer denklemine yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&(A\eta_1 + B\eta_2)(-Ak_1 \omega_1 \eta_1 + Bk_2 \omega_2 \eta_2) - (Ak_1 \eta'_1 + Bk_2 \eta'_2)(A\omega_1 \eta'_1 + B\omega_2 \eta'_2) \\
&- (A\eta_1 + B\eta_2) \left( -Ak_1^6 \eta_1 + Bk_2^6 \eta_2 \right) + 6(Ak_1 \eta'_1 + Bk_2 \eta'_2) \left( Ak_1^5 \eta'_1 + Bk_2^5 \eta'_2 \right) \\
&- 15(-Ak_1^2 \eta_1 + Bk_2^2 \eta_2) (Ak_1^4 \eta_1 + Bk_2^4 \eta_2) + 10(-Ak_1^3 \eta'_1 + Bk_2^3 \eta'_2)^2 \\
&- 5(A\eta_1 + B\eta_2) (Ak_1^3 l_1 \eta_1 + Bk_2^3 l_2 \eta_2) + 5(-Ak_1^3 \eta'_1 + Bk_2^3 \eta'_2) (Al_1 \eta'_1 + Bl_2 \eta'_2) \\
&\quad + 15(Ak_1 \eta'_1 + Bk_2 \eta'_2) (-Ak_1^2 l_1 \eta'_1 + Bk_2^2 l_2 \eta'_2) \\
&\quad - 15(-Ak_1^2 \eta_1 + Bk_2^2 \eta_2) (-Ak_1 l_1 \eta_1 + Bk_2 l_2 \eta_2) \\
&\quad + 5(A\eta_1 + B\eta_2) (-Al_1^2 \eta_1 + Bl_2^2 \eta_2) - 5(Al_1 \eta'_1 + Bl_2 \eta'_2)^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

denklemleri elde edilir. (3.31) ve (3.32) denklemleri kullanılarak (4.46) denklemleri düzenlendiğinde ve  $\eta_1^2, \eta_2^2, \eta_1, \eta_2, \eta_1', \eta_2'$  terimlerin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned}
& 16A^2k_1^6 + 16B^2k_2^6 - 20A^2k_1^3l_1 + 20B^2k_2^3l_2 \\
& -A^2k_1\omega_1 - 5A^2l_1^2 - B^2k_2\omega_2 - 5B^2l_2^2 = 0, \\
& 6k_1^5k_2 - 20k_1^3k_2^3 + 6k_1k_2^5 - 5k_1^3l_2 - 15k_1^2k_2l_1 \\
& + 15k_1k_2^2l_2 + 5k_2^3l_1 - k_1\omega_2 - k_2\omega_1 - 10l_1l_2 = 0, \\
& k_1^6 - 15k_1^4k_2^2 + 15k_1^2k_2^4 - k_2^6 - 5k_1^3l_1 + 15k_1^2k_2l_2 \\
& + 15k_1k_2^2l_1 - 5k_2^3l_2 - k_1\omega_1 + k_2\omega_2 - 5l_1^2 + 5l_2^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

belirleyici denklem sistemi elde edilir. Bu belirleyici denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

**Sonuç 1:**

$$A = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} B,$$

$$\begin{aligned}
\alpha = & -k_1^6k_2^2 + k_1^4k_2^4 + 5k_1^2k_2^6 + 3k_2^8 + k_1^4k_2l_2 + 2k_1^3k_2^2l_1 + 4k_1^2k_2^3l_2 + 2k_1k_2^4l_1 \\
& + 3k_2^5l_2 - k_1^2l_2^2 + 2k_1k_2l_1l_2 - k_2^2l_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta = & 3k_1^8 + 5k_1^6k_2^2 + k_1^4k_2^4 - k_1^2k_2^6 - 3k_1^5l_1 - 2k_1^4k_2l_2 - 4k_1^3k_2^2l_1 - 2k_1^2k_2^3l_2 \\
& - k_1k_2^4l_1 - k_1^2l_2^2 + 2k_1k_2l_1l_2 - k_2^2l_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 = & \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} (k_1^7 - 9k_1^5k_2^2 - 5k_1^3k_2^4 + 5k_1k_2^6 - 5k_1^4l_1 + 10k_1^3k_2l_2 + 10k_1k_2^3l_1 \\
& + 5k_2^4l_1 - 5k_1l_1^2 + 5k_1l_2^2 - 10k_2l_1l_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 = & \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} (5k_1^6k_2 - 5k_1^4k_2^3 - 9k_1^2k_2^5 + k_2^7 - 5k_1^4l_2 - 10k_1^3k_2l_1 - 10k_1k_2^3l_1 \\
& + 5k_2^4l_2 - 10k_1l_1l_2 + 5k_2l_1^2 - 5k_2l_2^2).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

(4.48) sonuçları (4.42) ve (4.34) denklemlerinde yerine yazıldığında (2+1) boyutlu SK denkleminin kompleksiton çözümleri

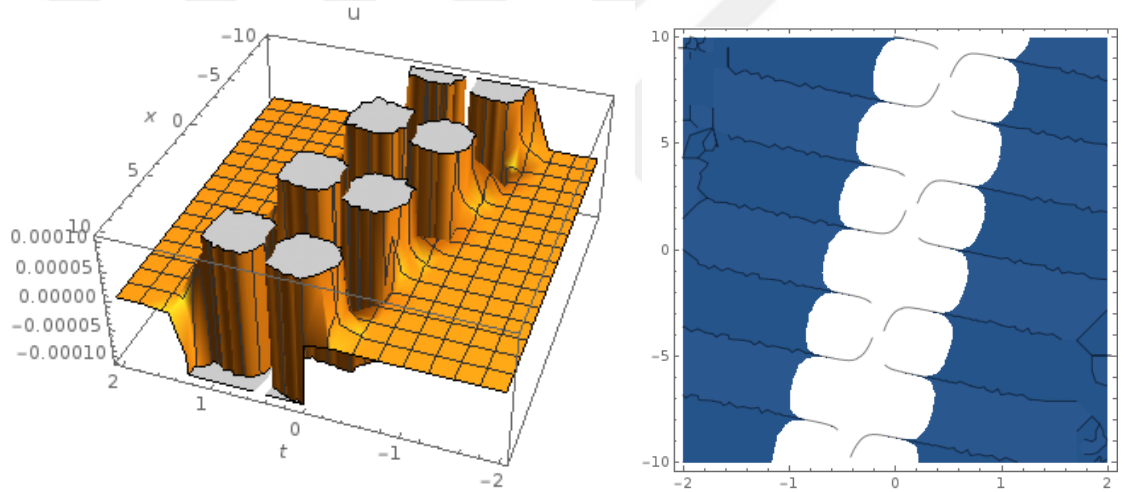
$$v(x, y, t) = 6 (\ln f(x, y, t))_x \quad (4.49)$$

olarak verilir (Şekil 4.7). Burada

$$f(x, y, t) = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} B \sin(k_1 x + l_1 y + \omega_1 t + c_1) \pm B \sinh(k_2 x + l_2 y + \omega_2 t + c_2), \quad (4.50)$$

$$f(x, y, t) = \pm \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} B \cos(k_1 x + l_1 y + \omega_1 t + c_1) \pm B \sinh(k_2 x + l_2 y + \omega_2 t + c_2) \quad (4.51)$$

biçimindedir.



**Şekil 4.7.** (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

**Sonuç 2:**

$$l_1 = k_1^3, \quad l_2 = -k_2^3, \quad \omega_1 = -9k_1^5, \quad \omega_2 = -9k_2^5. \quad (4.52)$$

(4.52) sonuçları (4.42) ve (4.34) denklemlerinde yerine yazıldığında (2+1) boyutlu SK denkleminin kompleksiton çözümleri

$$v(x, y, t) = 6 (\ln f(x, y, t))_x \quad (4.53)$$

olarak verilir (Şekil 4.8). Burada

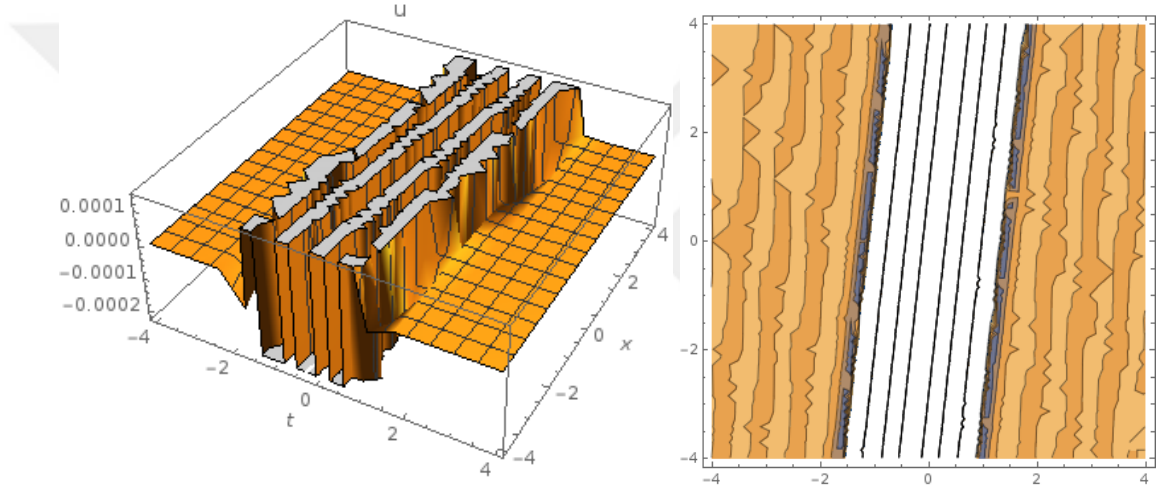
$$f(x, y, t) = \pm A \sin(k_1 x + k_1^3 y - 9k_1^5 t + c_1) \pm B \sinh(k_2 x - k_2^3 y - 9k_2^5 t + c_2), \quad (4.54)$$

$$f(x, y, t) = \pm A \cos(k_1 x + k_1^3 y - 9k_1^5 t + c_1) \pm B \sinh(k_2 x - k_2^3 y - 9k_2^5 t + c_2), \quad (4.55)$$

$$f(x, y, t) = \pm A \sin(k_1 x + k_1^3 y - 9k_1^5 t + c_1) \pm B \cosh(k_2 x - k_2^3 y - 9k_2^5 t + c_2), \quad (4.56)$$

$$f(x, y, t) = \pm A \cos(k_1 x + k_1^3 y - 9k_1^5 t + c_1) \pm B \cosh(k_2 x - k_2^3 y - 9k_2^5 t + c_2) \quad (4.57)$$

biçimindedir.



**Şekil 4.8.** (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

**Sonuç 3:**

$$l_1 = k_1^3 - 3k_1 k_2^2, \quad l_2 = 3k_2 k_1^2 - k_2^3$$

$$\omega_1 = -9k_1 (k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + 5k_2^4), \quad \omega_2 = -9k_2 (5k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + k_2^4). \quad (4.58)$$

(4.58) sonuçları (4.42) ve (4.34) denklemlerinde yerine yazıldığında (2+1) boyutlu SK denkleminin kompleksiton çözümleri

$$v(x, y, t) = 6 (\ln f(x, y, t))_x \quad (4.59)$$

olarak verilir (Şekil 4.9). Burada

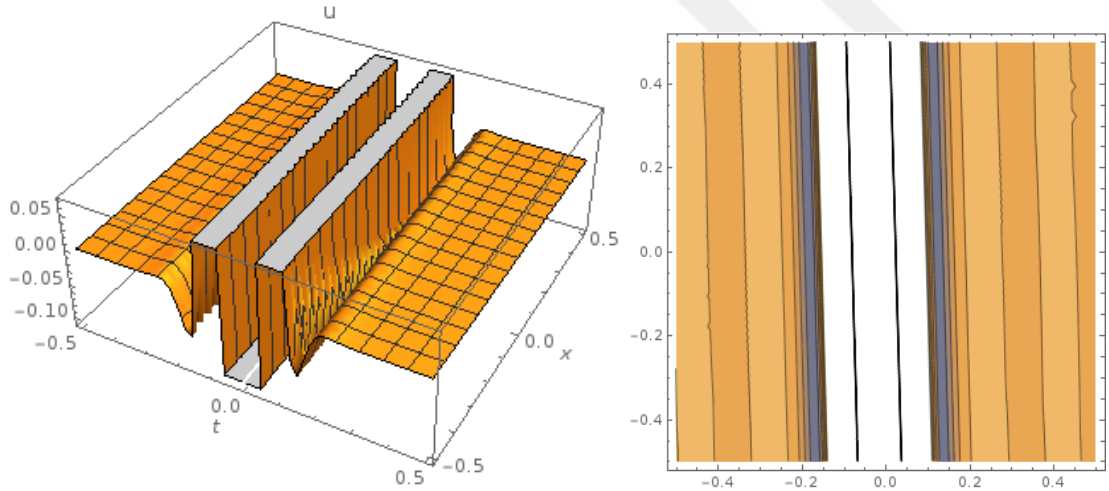
$$f(x,y,t) = \pm A \sin(k_1 x + (k_1^3 - 3k_1 k_2^2)y - 9k_1(k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + 5k_2^4)t + c_1) \\ \pm B \sinh(k_2 x + (3k_2 k_1^2 - k_2^3)y - 9k_2(5k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + k_2^4)t + c_2), \quad (4.60)$$

$$f(x,y,t) = \pm A \cos(k_1 x + (k_1^3 - 3k_1 k_2^2)y - 9k_1(k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + 5k_2^4)t + c_1) \\ \pm B \sinh(k_2 x + (3k_2 k_1^2 - k_2^3)y - 9k_2(5k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + k_2^4)t + c_2), \quad (4.61)$$

$$f(x,y,t) = \pm A \sin(k_1 x + (k_1^3 - 3k_1 k_2^2)y - 9k_1(k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + 5k_2^4)t + c_1) \\ \pm B \cosh(k_2 x + (3k_2 k_1^2 - k_2^3)y - 9k_2(5k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + k_2^4)t + c_2), \quad (4.62)$$

$$f(x,y,t) = \pm A \cos(k_1 x + (k_1^3 - 3k_1 k_2^2)y - 9k_1(k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + 5k_2^4)t + c_1) \\ \pm B \cosh(k_2 x + (3k_2 k_1^2 - k_2^3)y - 9k_2(5k_1^4 - 10k_1^2 k_2^2 + k_2^4)t + c_2) \quad (4.63)$$

biçimindedir.



**Şekil 4.9.** (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

#### Sonuç 4:

$$k_1 = \pm ik_2, \quad l_2 = \pm il_1 \\ \omega_1 = \frac{\pm 16ik_2^6 + 20k_2^3 l_1 \pm 5il_1^2}{k_2}, \quad \omega_2 = -\frac{-16k_2^6 \pm 20ik_2^3 l_1 - 5l_1^2}{k_2}. \quad (4.64)$$

(4.64) sonuçları (4.42) ve (4.34) denklemlerinde yerine yazıldığında (2+1) boyutlu SK



denkleminin kompleksiton çözümleri

$$v(x, y, t) = 6 (\ln f(x, y, t))_x \quad (4.65)$$

olarak verilir (Şekil 4.10). Burada

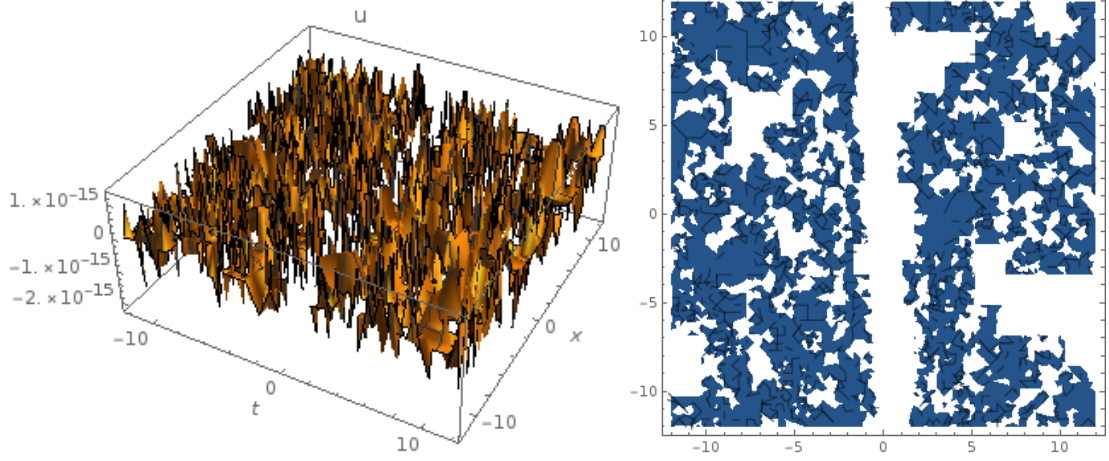
$$f(x, y, t) = \pm A \sin \left( \pm ik_2 x + l_1 y + \left( \frac{\pm 16ik_2^6 + 20k_2^3 l_1 \pm 5il_1^2}{k_2} \right) t + c_1 \right) \\ \pm B \sinh \left( k_2 x \pm il_1 y - \left( \frac{-16k_2^6 \pm 20ik_2^3 l_1 - 5l_1^2}{k_2} \right) t + c_2 \right), \quad (4.66)$$

$$f(x, y, t) = \pm A \cos \left( \pm ik_2 x + l_1 y + \left( \frac{\pm 16ik_2^6 + 20k_2^3 l_1 \pm 5il_1^2}{k_2} \right) t + c_1 \right) \\ \pm B \sinh \left( k_2 x \pm il_1 y - \left( \frac{-16k_2^6 \pm 20ik_2^3 l_1 - 5l_1^2}{k_2} \right) t + c_2 \right), \quad (4.67)$$

$$f(x, y, t) = \pm A \sin \left( \pm ik_2 x + l_1 y + \left( \frac{\pm 16ik_2^6 + 20k_2^3 l_1 \pm 5il_1^2}{k_2} \right) t + c_1 \right) \\ \pm B \cosh \left( k_2 x \pm il_1 y - \left( \frac{-16k_2^6 \pm 20ik_2^3 l_1 - 5l_1^2}{k_2} \right) t + c_2 \right), \quad (4.68)$$

$$f(x, y, t) = \pm A \cos \left( \pm ik_2 x + l_1 y + \left( \frac{\pm 16ik_2^6 + 20k_2^3 l_1 \pm 5il_1^2}{k_2} \right) t + c_1 \right) \\ \pm B \cosh \left( k_2 x \pm il_1 y - \left( \frac{-16k_2^6 \pm 20ik_2^3 l_1 - 5l_1^2}{k_2} \right) t + c_2 \right) \quad (4.69)$$

biçimindedir.



**Şekil 4.10.** (4.24) denkleminin kompleksiton çözüm grafikleri. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

#### 4.4. Yeni Test Fonksiyonu Metoduyla Elde Edilen Çözümler

Bu bölümde (4.4) numaralı lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin çoklu soliton çözümleri bulunacaktır.

##### 4.4.1. Hirota bilineer denklemi

(4.4) numaralı lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminde

$$u = 2(\log f)_{xx} \quad (4.70)$$

dönüşümü yazıldığında

$$2(\log f)_{2xt} + 2(\log f)_{3x} + \alpha(24(\log f)_{2x}(\log f)_{3x} + 2(\log f)_{5x}) + \alpha^2(2(\log f)_{7x} + 60(\log f)_{2x}(\log f)_{5x} + 60(\log f)_{3x}(\log f)_{4x} + 360(\log f)_{2x}^2(\log f)_{3x}) = 0 \quad (4.71)$$

dönüşmüş denklemi elde edilir. Burada  $f = f(x,t)$  dir.

(4.71) denkleminin  $x$  bağımsız değişkenine göre bir defa integrali alındığında

$$2(\log f)_{xt} + 2(\log f)_{2x} + \alpha \left( 12(\log f)_{2x}^2 + 2(\log f)_{4x} \right)$$

$$+\alpha^2 \left( 2(\log f)_{6x} + 60(\log f)_{2x}(\log f)_{4x} + 120(\log f)_{2x}^3 \right) = C \quad (4.72)$$

elde edilir. Burada  $C$  integral sabitidir. (4.72) denklemini düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{2f_{xt}}{f} - \frac{2f_x f_t}{f^2} + \frac{2f_{2x}}{f} - \frac{2f_x^2}{f^2} + \alpha \left( \frac{6f_{2x}^2}{f^2} + \frac{2f_{4x}}{f} - \frac{8f_{3x}f_x}{f^2} \right) \\ + \alpha^2 \left( \frac{2f_{6x}}{f} - \frac{12f_{5x}f_x}{f^2} + \frac{30f_{4x}f_{2x}}{f^2} - \frac{20f_{3x}^2}{f^2} \right) = C \end{aligned} \quad (4.73)$$

veya

$$\begin{aligned} 2ff_{xt} - 2f_x f_t + 2ff_{2x} - 2f_x^2 + \alpha (6f_{2x}^2 + 2ff_{4x} - 8f_{3x}f_x) \\ + \alpha^2 (2ff_{6x} - 12f_{5x}f_x + 30f_{4x}f_{2x} - 20f_{3x}^2) = C \end{aligned} \quad (4.74)$$

elde edilir. (4.74) denkleminde gerekli olan Hirota türevleri

$$D_x D_t f f = 2ff_{xt} - 2f_x f_t,$$

$$D_x^2 f f = 2ff_{2x} - 2f_x^2,$$

$$D_x^4 f f = 2ff_{4x} - 8f_{3x}f_x + 6f_{2x}^2,$$

$$D_x^6 f f = 2ff_{6x} - 12f_x f_{5x} + 30f_{2x}f_{4x} - 20f_{3x}^2 \quad (4.75)$$

biçimindedir (Hirota 2004).  $C = 0$  integral sabitini ve (4.75) Hirota türevleri (4.74) denkleminde yerine yazıldığında (4.4) numaralı lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin Hirota bilineer denklemi

$$\begin{aligned} \left( D_x D_t + D_x^2 + \alpha D_x^4 + \alpha^2 D_x^6 \right) f f = 2ff_{xt} - 2f_x f_t + 2ff_{2x} - 2f_x^2 \\ + \alpha (2ff_{4x} - 8f_{3x}f_x + 6f_{2x}^2) + \alpha^2 (2ff_{6x} - 12f_x f_{5x} + 30f_{2x}f_{4x} - 20f_{3x}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

elde edilir.

#### 4.4.2. Çoklu soliton çözümleri

(3.35) çoklu soliton fonksiyon çözümünün kendisini ve gerekli türevlerini (4.76) Hirota bilineer denkleminde yerine yazıldığında yeni bir denklem elde edilir. Bu denklemdeki

$e^{\xi_1} \sin \xi_2$ ,  $e^{\xi_1} \sinh \xi_3$ ,  $e^{\xi_1} \cos \xi_2$ ,  $e^{\xi_1} \cosh \xi_3$ ,  $\sin \xi_2 \sinh \xi_3$ ,  $\cos \xi_2 \cosh \xi_3$  terimlerinin katsayılarını sıfıra eşitlersek  $a_i$ ,  $b_i$  and  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) parametrelerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlerse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

**Sonuç 1:**

$$a_1 = 0, a_2 = 0, \alpha = -\frac{1}{5a_3^2}, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = -\frac{21a_3}{25}. \quad (4.77)$$

(4.77) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılıp (4.70) dönüşümü kullanırsa lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümü

$$u = \frac{2\delta_2 a_3^2 \cosh \xi_3}{1 + \delta_1 + \delta_2 \cosh \xi_3 + \delta_3} - \frac{2\delta_2^2 a_3^2 \sinh^2 \xi_3}{(1 + \delta_1 + \delta_2 \cosh \xi_3 + \delta_3)^2} \quad (4.78)$$

olarak verilir. Burada

$$\xi_3 = -a_3 x + \frac{21a_3 t}{25}$$

biçimindedir.

**Sonuç 2:**

$$a_1 = -a_3, a_2 = 0, \alpha = -\frac{1}{5a_3^2}, b_1 = \frac{21a_3}{25}, b_2 = 0, b_3 = -\frac{21a_3}{25}. \quad (4.79)$$

(4.79) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılıp (4.70) dönüşümü kullanırsa lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümü

$$u = \frac{2a_3^2 \left( e^{-\xi_1} + \delta_2 \cosh \xi_3 + \delta_3 e^{\xi_1} \right)}{e^{-\xi_1} + \delta_1 + \delta_2 \cosh (\xi_3) + \delta_3 e^{\xi_1}} - \frac{2a_3^2 \left( e^{-\xi_1} - \delta_2 \sinh \xi_3 - \delta_3 e^{\xi_1} \right)^2}{\left( e^{-\xi_1} + \delta_1 + \delta_2 \cosh (\xi_3) + \delta_3 e^{\xi_1} \right)^2} \quad (4.80)$$

olarak verilir. Burada

$$\xi_1 = -a_3 x + \frac{21a_3 t}{25},$$

$$\xi_3 = -a_3 x + \frac{21a_3 t}{25}$$

biçimindedir.

**Sonuç 3:**

$$\alpha = -\frac{3}{5(a_1^2 + 3a_3^2)}, b_1 = -\frac{a_1(19a_1^4 + 150a_1^2a_3^2 + 135a_3^4)}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2},$$

$$b_3 = -\frac{a_3(25a_1^4 + 90a_1^2a_3^2 + 189a_3^4)}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2}, \delta_1 = 0, \delta_3 = 0. \quad (4.81)$$

(4.81) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılıp (4.70) dönüşümü kullanırsa lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümü

$$u = \frac{2(a_1^2 e^{-\xi_1} + \delta_2 a_3^2 \cosh \xi_3)}{e^{-\xi_1} + \delta_2 \cosh(\xi_3)} - \frac{2(-a_1 e^{-\xi_1} - \delta_2 a_3 \sinh \xi_3)^2}{(e^{-\xi_1} + \delta_2 \cosh(\xi_3))^2} \quad (4.82)$$

olarak verilir. Burada

$$\xi_1 = a_1 x - \frac{a_1(19a_1^4 + 150a_1^2a_3^2 + 135a_3^4)t}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2},$$

$$\xi_3 = -a_3 x + \frac{a_3(25a_1^4 + 90a_1^2a_3^2 + 189a_3^4)t}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2}$$

biçimindedir.

**Sonuç 4:**

$$a_1 = ia_2, a_3 = ia_2, b_1 = -(16a_2^4 \alpha^2 - 4a_2^2 \alpha + 1) ia_2,$$

$$b_2 = -16a_2^5 \alpha^2 + 4a_2^3 \alpha - a_2, b_3 = -(16a_2^4 \alpha^2 - 4a_2^2 \alpha + 1) ia_2. \quad (4.83)$$

(4.83) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılıp (4.70) dönüşümü kullanırsa lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümü

$$u = \frac{2a_2^2(-e^{-\xi_1} - \delta_1 \cos \xi_2 - \delta_2 \cosh \xi_3 - \delta_3 e^{\xi_1})}{e^{-\xi_1} + \delta_1 \cos \xi_2 + \delta_2 \cosh(\xi_3) + \delta_3 e^{\xi_1}}$$

$$- \frac{2a_2^2(-ie^{-\xi_1} + \delta_1 \sin \xi_2 - i\delta_2 \sinh \xi_3 + i\delta_3 e^{\xi_1})^2}{(e^{-\xi_1} + \delta_1 \cos \xi_2 + \delta_2 \cosh(\xi_3) + \delta_3 e^{\xi_1})^2} \quad (4.84)$$

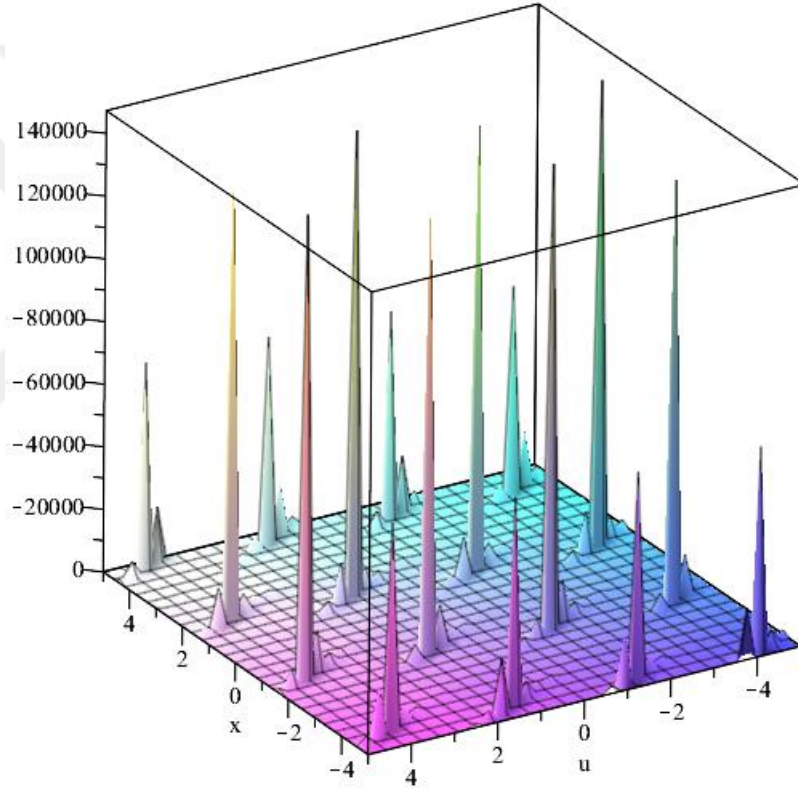
olarak verilir (Şekil 4.11). Burada

$$\xi_1 = ia_2x - (16a_2^4\alpha^2 - 4a_2^2\alpha + 1)ia_2t,$$

$$\xi_2 = -a_2x - (-16a_2^5\alpha^2 + 4a_2^3\alpha - a_2)t,$$

$$\xi_3 = -ia_2x + (16a_2^4\alpha^2 - 4a_2^2\alpha + 1)ia_2t$$

biçimindedir.



**Şekil 4.11.** (4.4) denkleminin çoklu soliton çözüm grafiği. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

**Sonuç 5:**

$$a_1 = ia_2, a_3 = 0, \alpha = \frac{1}{5a_2^2}, b_1 = -\frac{21ia_2}{25}, b_2 = -\frac{21a_2}{25}, b_3 = 0. \quad (4.85)$$

(4.85) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılıp (4.70) dönüşümü kullanırsa lineer olma-

yan genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümü

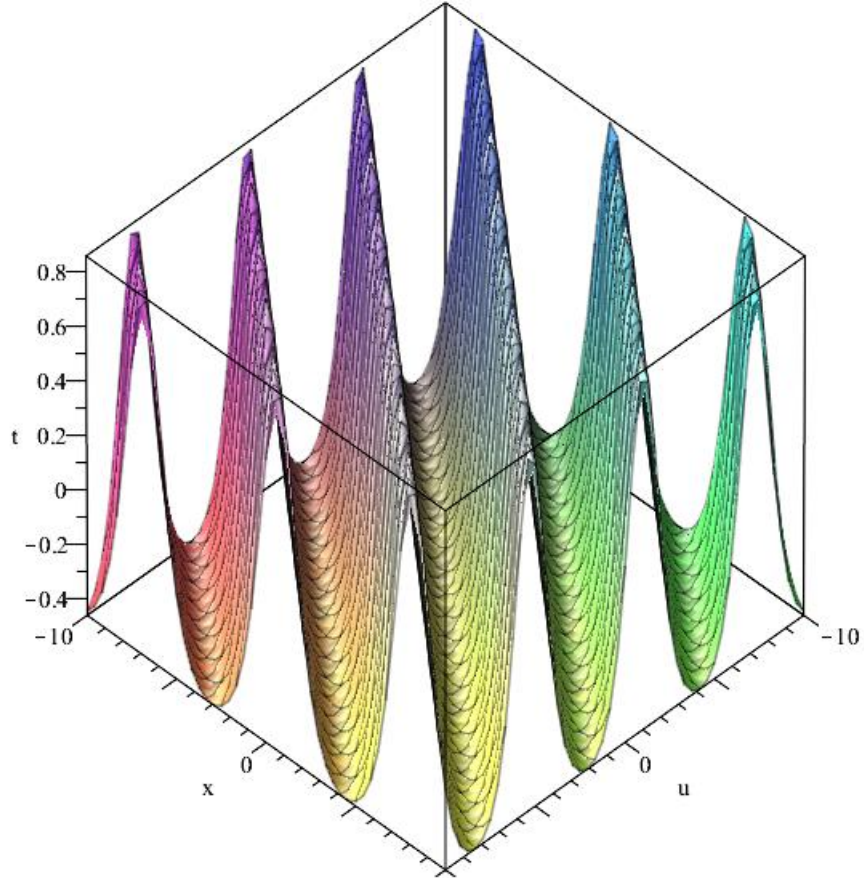
$$u = \frac{2a_2^2 \left( -e^{-\xi_1} - \delta_1 \cos \xi_2 - \delta_3 e^{\xi_1} \right)}{e^{-\xi_1} + \delta_1 \cos \xi_2 + \delta_2 + \delta_3 e^{\xi_1}} - \frac{2a_2^2 \left( -ie^{-\xi_1} + \delta_1 \sin \xi_2 + i\delta_3 e^{\xi_1} \right)^2}{\left( e^{-\xi_1} + \delta_1 \cos \xi_2 + \delta_2 + \delta_3 e^{\xi_1} \right)^2} \quad (4.86)$$

olarak verilir (Şekil 4.12). Burada

$$\xi_1 = ia_2x - \frac{21ia_2t}{25},$$

$$\xi_2 = -a_2x + \frac{21a_2t}{25}$$

biçimindedir.



**Şekil 4.12.** (4.4) denkleminin çoklu soliton çözüm grafiği. Burada  $\delta_2 = 10$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

**Sonuç 6:**

$$a_2 = ia_3, \alpha = -\frac{3}{5(a_1^2 + 3a_3^2)}, b_1 = -\frac{a_1(19a_1^4 + 150a_1^2a_3^2 + 135a_3^4)}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2},$$

$$b_2 = -\frac{(25a_1^4 + 90a_1^2a_3^2 + 189a_3^4)ia_3}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2}, b_3 = -\frac{a_3(25a_1^4 + 90a_1^2a_3^2 + 189a_3^4)}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2}, \delta_3 = 0. \quad (4.87)$$

(4.87) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılıp (4.70) dönüşümü kullanırsa lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümü

$$u = \frac{2(a_1^2 e^{-\xi_1} + \delta_1 a_3^2 \cos \xi_2 + \delta_2 a_3^2 \cosh \xi_3)}{e^{-\xi_1} + \delta_1 \cos \xi_2 + \delta_2 \cosh(\xi_3)}$$

$$- \frac{2(-a_1 e^{-\xi_1} + \delta_1 ia_3 \sin \xi_2 - \delta_2 a_3 \sinh \xi_3)^2}{(e^{-\xi_1} + \delta_1 \cos \xi_2 + \delta_2 \cosh(\xi_3))^2} \quad (4.88)$$

olarak verilir (Şekil 4.13). Burada

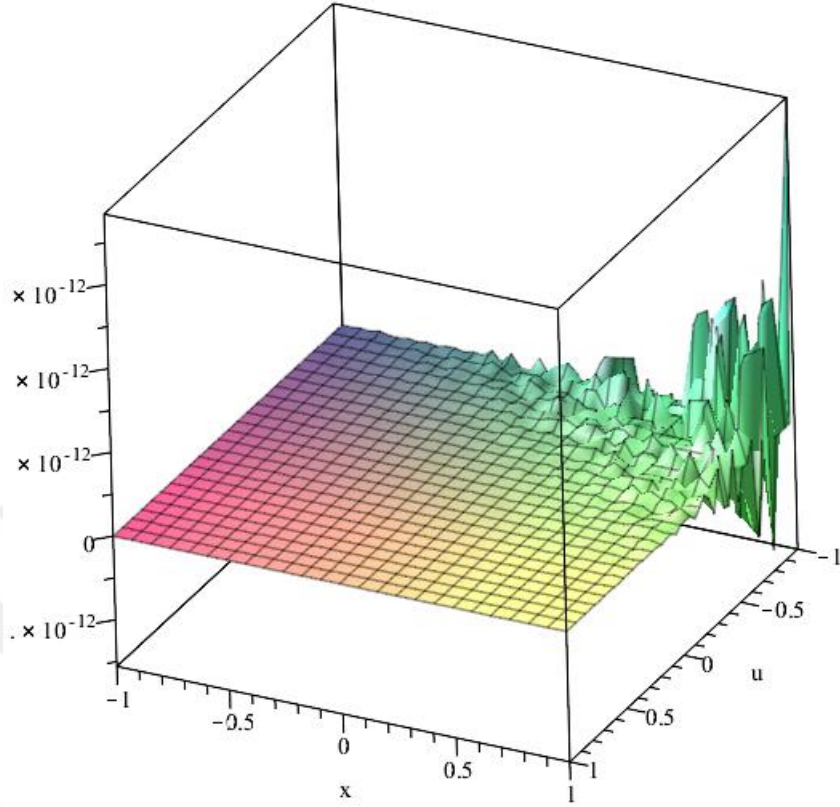
$$\xi_1 = a_1 x - \frac{a_1(19a_1^4 + 150a_1^2a_3^2 + 135a_3^4)t}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2},$$

$$\xi_2 = -ia_3 x + \frac{(25a_1^4 + 90a_1^2a_3^2 + 189a_3^4)ia_3 t}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2},$$

$$\xi_3 = -a_3 x + \frac{a_3(25a_1^4 + 90a_1^2a_3^2 + 189a_3^4)t}{25(a_1^2 + 3a_3^2)^2}$$

biçimindedir.





**Şekil 4.13.** (4.4) denkleminin çoklu soliton çözüm grafiği. Burada  $a_1 = 2$ ,  $a_3 = -2$ ,  $\delta_1 = -1$  ve  $\delta_2 = -1$  olarak alınmıştır

**Sonuç 7:**

$$a_2 = 0, a_3 = 0, \alpha = -\frac{1}{5a_1^2}, b_1 = -\frac{21a_1}{25}, b_2 = 0, b_3 = 0. \quad (4.89)$$

(4.89) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılıp (4.70) dönüşümü kullanırsa lineer olmayan genelleştirilmiş KdV denkleminin çözümü

$$u = \frac{2a_1^2 (e^{-\xi_1} + \delta_3 e^{\xi_1})}{e^{-\xi_1} + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 e^{\xi_1}} - \frac{2a_1^2 (-e^{-\xi_1} + \delta_3 e^{\xi_1})^2}{(e^{-\xi_1} + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 e^{\xi_1})^2} \quad (4.90)$$

olarak verilir. Burada

$$\xi_1 = a_1 x - \frac{21a_1 t}{25}$$

biçimindedir.

#### 4.5. Lump ve Lump Tipi Çözüm Algoritmasıyla Elde Edilen Çözümler

Birçok araştırmacı tarafından ele alınan (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü

$$3u_{xz} - (2u_t - 2uu_x + u_{3x})_y + 2(u_x \partial_x^{-1} u_y)_x = 0 \quad (4.91)$$

denklemi yeni bir integrallenebilir denklemdir (Zhaqilao 2013, Liu ve Liu 2016, Shi ve Zhang 2017). Burada  $u = u(x, y, z, t)$  olarak gösterilir ve ters türev operatörü

$$\partial_x^{-1} f(x, t) = \int_{-\infty}^x f(x', t) dx' \quad (4.92)$$

ve

$$\partial_x \partial_x^{-1} = \partial_x^{-1} \partial_x = 1 \quad (4.93)$$

şeklinde tanımlanır. (4.91) denklemi ilk defa cebirsel-geometrik çözümlerin çalışılmasında bir model olarak tanıtılmıştır (Geng 2003). Yeni bir denklem olduğundan dolayı bu modelin fizik veya diğer bilim alanlarında uygulaması belirsizdir. Ancak bu modelin literatürde çok iyi bilinen KdV

$$w_{t'} - 6ww_{x'} + w_{x'x'x'} = 0 \quad (4.94)$$

denkleminin oldukça önemli bir benzerliği vardır. (4.94) denkleminde

$$w(x', t') \rightarrow u(x, t), \quad x' = \frac{1}{\sqrt{3}}x, \quad t' = \frac{1}{6\sqrt{3}}t \quad (4.95)$$

dönüşümlerinin uygulanması sonucu (4.91) denkleminin ana parçası olan

$$2u_t - 2uu_x + u_{3x} \quad (4.96)$$

ifadesi elde edilir. Böylece (4.91) denklemi KdV denkleminin bir genelleştirilmiş halidir. Son zamanlarda birçok fiziksel olayların modellenmesinde KdV denkleminin çeşitli lineer olmayan denklemleri geliştirildi. (4.91) denklemi KdV denkleminin bir genelleştirilmiş hali olarak düşünüldüğünde doğrusal olmayan dağılım modellerinde yer alan sıg su dalgaları ve kısa dalgaların çalışılmasında kullanılabilir (Zhaqilao 2013, Wazwaz 2015,

Shi ve Zhang 2017, Zhang ve Ma 2017).

#### 4.5.1. Hirota bilineer denklemi

(4.91) numaralı (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemde

$$u = -3(\ln f)_{xx} \quad (4.97)$$

dönüşümü yazıldığında

$$\begin{aligned} &6(\ln f)_{3xz} - 4(\ln f)_{2xyt} - 2(\ln f)_{5xy} - 24(\ln f)_{3x}(\ln f)_{2xy} \\ &- 12(\ln f)_{2x}(\ln f)_{3xy} - 12(\ln f)_{4x}(\ln f)_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

dönüşmüş denklemi elde edilir. Burada  $f = f(x, y, z, t)$  olarak gösterilir.

(4.98) denkleminin  $x$  bağımsız değişkenine göre iki kere integral alındığında

$$6(\ln f)_{xz} - 4(\ln f)_{yt} - 2(\ln f)_{3xy} - 12(\ln f)_{2x}(\ln f)_{xy} = C \quad (4.99)$$

elde edilir. Burada  $C$  integral sabitidir. (4.99) denklemi düzenlenirse

$$\frac{6f_{xz}}{f} - \frac{6f_x f_z}{f^2} - \frac{4f_{yt}}{f} + \frac{4f_y f_t}{f^2} - \frac{2f_{3xy}}{f} + \frac{2f_{3x} f_y}{f^2} + \frac{6f_x f_{2xy}}{f^2} - \frac{6f_{2x} f_{xy}}{f^2} = C \quad (4.100)$$

veya

$$6ff_{xz} - 6f_x f_z - 4ff_{yt} + 4f_y f_t - 2ff_{3xy} + 2f_{3x} f_y + 6f_x f_{2xy} - 6f_{2x} f_{xy} = Cf^2 \quad (4.101)$$

elde edilir. (4.101) denklemde gerekli olan Hirota türevleri

$$D_x D_z f f = 2ff_{xz} - 2f_x f_z,$$

$$D_y D_t f f = 2ff_{yt} - 2f_y f_t,$$

$$D_x^3 D_y f f = 2ff_{3xy} - 2f_{3x} f_y - 6f_x f_{2xy} + 6f_{2x} f_{xy} \quad (4.102)$$

biçimindedir (Hirota 2004).  $C = 0$  integral sabiti ve (4.102) Hirota türevleri (4.101) denkleminde yerine yazılırsa (4.91) numaralı (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denkleminin

$$(3D_x D_z - 2D_y D_t - D_x^3 D_y) f f = 6f f_{xz} - 6f_x f_z - 4f f_{yt} + 4f_y f_t - 2f f_{3xy} + 2f_{3x} f_y + 6f_x f_{2xy} - 6f_{2x} f_{xy} = 0 \quad (4.103)$$

Hirota bilinear denklemi elde edilir.

#### 4.5.2. Genelleştirilmiş Hirota bilinear denklemi

(4.102) Hirota bilinear denkleminde yer alan Hirota türev operatörleri  $p = 3$  iken

$$D_{3,x} D_{3,z} f f = 2f f_{xz} - 2f_x f_z,$$

$$D_{3,y} D_{3,t} f f = 2f f_{yt} - 2f_y f_t,$$

$$D_{3,x}^3 D_{3,y} f f = 6f_{2x} f_{xy}.$$

genelleştirilmiş Hirota türev operatörlerine dönüşür. Böylece (4.91) numaralı (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denkleminin genelleştirilmiş Hirota bilinear denklemi

$$(3D_{3,x} D_{3,z} - 2D_{3,y} D_{3,t} - D_{3,x}^3 D_{3,y}) f f = 6f f_{xz} - 6f_x f_z - 4f f_{yt} + 4f_y f_t - 6f_{2x} f_{xy} = 0 \quad (4.104)$$

elde edilir.

#### 4.5.3. Yeni bir (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklem

(4.104) genelleştirilmiş Hirota bilinear denkleminde

$$u = -3(\ln f)_x$$

veya

$$f = e^{-\frac{1}{3} \int u dx}$$

dönüşümü kullanılması sonucu

$$\left[ \frac{(3D_{3,x}D_{3,z} - 2D_{3,y}D_{3,t} - D_{3,x}^3 D_{3,y}) ff}{f^2} \right]_x =$$

$$\left( \frac{4u_t}{3} - \frac{u^4}{54} \right)_y - 2 \left( u_z + \frac{u_x u_y}{3} \right)_x + \frac{2}{9} \left( u u_x - \frac{u^3}{3} \right)_x \int u_y dx + \frac{2}{9} u^2 u_{xy} + \frac{2 u u_x u_y}{3} = 0$$

(4.105)

yeni bir (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklem elde edilir. Elde edilen bu denklem standart (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemden daha fazla terim içerir ve daha karmaşık lineer olmayan bir denklemdir. Ayrıca elde edilen yeni denklemin Hirota bilinear denklemi standart (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemin Hirota bilinear denkleminden daha basit bir denklemdir.

#### 4.5.4. Lump tipindeki çözümler

(4.104) denkleminin çözümünü

$$f = g^2 + h^2 + a_{11} \tag{4.106}$$

ikinci dereceden fonksiyon olarak farz edelim. Burada lineer dalga değişkenleri

$$g = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t + a_5,$$

$$h = a_6 x + a_7 y + a_8 z + a_9 t + a_{10} \tag{4.107}$$

biçiminde olup  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 11$  reel değerli sabitlerdir. (4.106) ikinci dereceden fonksiyon çözümünün kendisini ve gerekli türevlerini (4.104) genelleştirilmiş Hirota bilinear denkleminde yerine yazarsak  $x, y, z, t$  bağımsız değişkenlerinden oluşan bir polinom elde edilir. Elde edilen bu polinomda aynı ifadelerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi sonucunda  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 11$ ) terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

**Sonuç 1:**

$$a_1 = \frac{3a_3a_4a_6 - 2a_4^2a_7 + 3a_6a_8a_9 - 2a_7a_9^2}{3(a_3a_9 - a_4a_8)}, \quad a_2 = \frac{3a_3^2a_6 - 2a_3a_4a_7 + 3a_6a_8^2 - 2a_7a_8a_9}{2(a_3a_9 - a_4a_8)},$$

$$a_{11} = \frac{1}{18(a_3a_9 - a_4a_8)^4(3a_6a_8 - 2a_7a_9)} (a_4^2 + a_9^2)(a_3a_4 + a_8a_9)(9a_3^2a_6^2 - 12a_3a_4a_6a_7,$$

$$+ 4a_4^2a_7^2 + 9a_6^2a_8^2 - 12a_6a_7a_8a_9 + 4a_7^2a_9^2)^2. \quad (4.108)$$

**Sonuç 2:**

$$a_1 = \frac{2a_2^2a_9 - 3a_2a_3a_6 - 3a_6a_7a_8 + 2a_7^2a_9}{3(a_2a_8 - a_3a_7)}, \quad a_4 = \frac{2a_2a_3a_9 - 3a_3^2a_6 - 3a_6a_8^2 + 2a_7a_8a_9}{2(a_2a_8 - a_3a_7)},$$

$$a_{11} = \frac{1}{9(a_2a_8 - a_3a_7)^3(3a_6a_8 - 2a_7a_9)} (a_2^2 + a_7^2)^2(2a_2a_9 - 3a_3a_6)(4a_2^2a_9^2 - 12a_2a_3a_6a_9$$

$$+ 9a_3^2a_6^2 + 9a_6^2a_8^2 - 12a_6a_7a_8a_9 + 4a_7^2a_9^2). \quad (4.109)$$

**Sonuç 3:**

$$a_1 = \frac{2a_2a_4^2 + 2a_2a_9^2 - 3a_3a_6a_9 + 3a_4a_6a_8}{3(a_3a_4 + a_8a_9)}, \quad a_7 = -\frac{2a_2a_3a_9 - 2a_2a_4a_8 - 3a_3^2a_6 - 3a_6a_8^2}{2(a_3a_4 + a_8a_9)},$$

$$a_{11} = \frac{(a_4^2 + a_9^2)(4a_2^2a_4^2 + 4a_2^2a_9^2 - 12a_2a_3a_6a_9 + 12a_2a_4a_6a_8 + 9a_3^2a_6^2 + 9a_6^2a_8^2)^2}{18(a_3a_9 - a_4a_8)(a_3a_4 + a_8a_9)^2(2a_2a_9 - 3a_3a_6)}. \quad (4.110)$$

**Sonuç 4:**

$$a_2 = -\frac{a_7(3a_1^4a_6 + 6a_1^2a_6^3 + 3a_6^5 + 2a_1^2a_{11}a_9 - 2a_1a_{11}a_4a_6)}{3a_1^5 + 6a_1^3a_6^2 + 3a_1a_6^4 - 2a_1a_{11}a_6a_9 + 2a_{11}a_4a_6^2},$$

$$a_3 = -\frac{2a_7(3a_1^4a_9 + 6a_1^2a_6^2a_9 + 3a_6^4a_9 + 2a_1a_{11}a_4a_9 - 2a_{11}a_4^2a_6)}{3(3a_1^5 + 6a_1^3a_6^2 + 3a_1a_6^4 - 2a_1a_{11}a_6a_9 + 2a_{11}a_4a_6^2)},$$

$$a_8 = \frac{2a_7(3a_1^4a_4 + 6a_1^2a_6^2a_4 + 3a_6^4a_4 - 2a_1a_{11}a_9^2 + 2a_{11}a_4a_6a_9)}{3(3a_1^5 + 6a_1^3a_6^2 + 3a_1a_6^4 - 2a_1a_{11}a_6a_9 + 2a_{11}a_4a_6^2)}. \quad (4.111)$$

**Sonuç 5:**

$$a_2 = \frac{3a_3(3a_1^4a_6 + 6a_1^2a_6^3 + 3a_6^5 + 2a_1^2a_{11}a_9 - 2a_1a_{11}a_4a_6)}{2(3a_1^4a_9 + 6a_1^2a_6^2a_9 + 3a_6^4a_9 + 2a_1a_{11}a_4a_9 - 2a_{11}a_4^2a_6)},$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= -\frac{3a_3(3a_1^5 + 6a_1^3a_6^2 + 3a_1a_6^4 - 2a_1a_{11}a_6a_9 + 2a_{11}a_4a_6^2)}{2(3a_1^4a_9 + 6a_1^2a_6^2a_9 + 3a_6^4a_9 + 2a_1a_{11}a_4a_9 - 2a_{11}a_4^2a_6)}, \\
a_8 &= -\frac{a_3(3a_1^4a_4 + 6a_1^2a_6^2a_4 + 3a_6^4a_4 - 2a_1a_{11}a_6^2 + 2a_{11}a_4a_6a_9)}{3a_1^4a_9 + 6a_1^2a_6^2a_9 + 3a_6^4a_9 + 2a_1a_{11}a_4a_9 - 2a_{11}a_4^2a_6}.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

**Sonuç 6:**

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{3a_1^2a_3 + 2a_1a_7a_9 + 3a_3a_6^2 - 2a_4a_6a_7}{2(a_1a_4 + a_6a_9)}, \quad a_8 = \frac{3a_1a_3a_9 - 3a_3a_4a_6 + 2a_4^2a_7 + 2a_7a_9^2}{3(a_1a_4 + a_6a_9)}, \\
a_{11} &= \frac{3(a_1^2 + a_6^2)^2(3a_1a_3 + 2a_7a_9)}{2(3a_3a_6 - 2a_4a_7)(a_1a_9 - a_4a_6)}.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

**Sonuç 7:**

$$\begin{aligned}
a_8 &= \frac{3a_1^3a_2 + 3a_1^2a_6a_7 + 3a_1a_2a_6^2 + 3a_6^3a_7 + 2a_{11}a_7a_9}{3a_{11}a_6}, \\
a_3 &= \frac{1}{3a_{11}a_6(a_1a_7 - a_2a_6)} (3a_1^4a_2^2 + 6a_1^3a_2a_6a_7 + 3a_1^2a_2^2a_6^2 + 3a_1^2a_6^2a_7^2 \\
&\quad + 6a_1a_2a_6^3a_7 + 3a_6^4a_7^2 + 2a_1a_{11}a_2a_7a_9 - 2a_{11}a_2^2a_6a_9), \\
a_4 &= \frac{1}{2a_{11}a_6(a_1a_7 - a_2a_6)} (3a_1^5a_2 + 3a_1^4a_6a_7 + 6a_1^3a_2a_6^2 + 6a_1^2a_6^3a_7 \\
&\quad + 3a_1a_2a_6^4 + 3a_6^5a_7 + 2a_1^2a_{11}a_7a_9 - 2a_1a_{11}a_2a_6a_9).
\end{aligned} \tag{4.114}$$

**Sonuç 8:**

$$\begin{aligned}
a_9 &= -\frac{3(a_1^3a_2 + a_1^2a_6a_7 + a_1a_2a_6^2 + a_6^3a_7 - a_{11}a_6a_8)}{2a_{11}a_7}, \\
a_3 &= \frac{1}{a_{11}a_7(a_1a_7 - a_2a_6)} (a_1^3a_2^3 + a_1^3a_2a_7^2 + a_1^2a_2^2a_6a_7 + a_1^2a_6a_7^3 + a_1a_2^3a_6^2 \\
&\quad + a_1a_2a_6^2a_7^2 + a_2^2a_6^3a_7 + a_6^3a_7^3 + a_1a_{11}a_2a_7a_8 - a_{11}a_2^2a_6a_8), \\
a_4 &= \frac{3}{2a_{11}a_7(a_1a_7 - a_2a_6)} (a_1^4a_2^2 + 2a_1^3a_2a_6a_7 + a_1^2a_2^2a_6^2 + a_1^2a_6^2a_7^2 \\
&\quad + 2a_1a_2a_6^3a_7 + a_6^4a_7^2 + a_1^2a_{11}a_7a_8 - a_1a_{11}a_2a_6a_8).
\end{aligned} \tag{4.115}$$

**Sonuç 9:**

$$a_3 = \frac{2a_2(3a_1^4a_9 + 6a_1^2a_6^2a_9 + 3a_6^4a_9 + 2a_1a_{11}a_4a_9 - 2a_{11}a_4^2a_6)}{3(3a_1^4a_6 + 6a_1^2a_6^3 + 3a_6^5 + 2a_1^2a_{11}a_9 - 2a_1a_{11}a_4a_6)},$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= -\frac{a_2(3a_1^5 + 6a_1^3a_6^2 + 3a_1a_6^4 - 2a_1a_{11}a_6a_9 + 2a_{11}a_4a_6^2)}{3a_1^4a_6 + 6a_1^2a_6^3 + 3a_6^5 + 2a_1^2a_{11}a_9 - 2a_1a_{11}a_4a_6}, \\
a_8 &= -\frac{2a_2(3a_1^4a_4 + 6a_1^2a_6^2a_4 + 3a_6^4a_4 - 2a_1a_{11}a_9^2 + 2a_{11}a_4a_6a_9)}{3(3a_1^4a_6 + 6a_1^2a_6^3 + 3a_6^5 + 2a_1^2a_{11}a_9 - 2a_1a_{11}a_4a_6)}. \tag{4.116}
\end{aligned}$$

**Sonuç 10:**

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{3a_1a_8a_9 - 2a_2a_4^2 - 2a_2a_9^2 - 3a_4a_6a_8}{3(a_1a_4 + a_6a_9)}, \\
a_7 &= \frac{3a_1^2a_8 - 2a_1a_2a_9 + 2a_2a_4a_6 + 2a_6^2a_8}{2(a_1a_4 + a_6a_9)}, \\
a_{11} &= -\frac{3(a_1^2 + a_6^2)^2(2a_2a_4 + 3a_6a_8)}{2(a_1a_9 - a_4a_6)(3a_1a_8 - 2a_2a_9)}. \tag{4.117}
\end{aligned}$$

**Sonuç 11:**

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{2(a_1a_2a_4 - a_1a_7a_9 + a_2a_6a_9 + a_4a_6a_7)}{3(a_1^2 + a_6^2)}, \\
a_8 &= \frac{2(a_1a_2a_9 + a_1a_4a_7 - a_2a_4a_6 + a_6a_7a_9)}{3(a_1^2 + a_6^2)}, \\
a_{11} &= -\frac{3(a_1^2 + a_6^2)^2(a_1a_2 + a_6a_7)}{2(a_1a_9 - a_4a_6)(a_1a_7 - a_2a_6)}. \tag{4.118}
\end{aligned}$$

**Sonuç 12:**

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{3a_1a_3^2 + 3a_1a_8^2 - 2a_2a_8a_9 + 2a_3a_7a_9}{2(a_2a_3 + a_7a_8)}, \quad a_6 = -\frac{3a_1a_2a_8 - 3a_1a_3a_7 - 2a_2^2a_9 - 2a_7^2a_9}{3(a_2a_3 + a_7a_8)}, \\
a_{11} &= -\frac{1}{9(a_2a_8 - a_3a_7)(a_2a_3 + a_7a_8)^2(3a_1a_8 - 2a_2a_9)}(a_2^2 + a_7^2)^2(3a_1a_3 + 2a_7a_9)(9a_1^2a_3^2 \\
&\quad + 9a_1^2a_8^2 - 12a_1a_2a_8a_9 + 12a_1a_3a_7a_9 + 4a_2^2a_9^2 + 4a_7^2a_9^2). \tag{4.119}
\end{aligned}$$

**Sonuç 13:**

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{3(a_1^3a_2 + a_1^2a_6a_7 + a_1a_2a_6^2 + a_6^3a_7 - a_1a_{11}a_3)}{2a_{11}a_2}, \\
a_8 &= -\frac{1}{a_{11}a_2(a_1a_7 - a_2a_6)}(a_1^3a_2^3 + a_1^3a_2a_7^2 + a_1^2a_2^2a_6a_7 + a_1^2a_6a_7^3 \\
&\quad + a_1a_2^3a_6^2 + a_1a_2a_6^2a_7^2 + a_2^2a_6^3a_7 + a_6^3a_7^3 - a_1a_{11}a_3a_7^2 + a_{11}a_2a_3a_6a_7), \\
a_9 &= -\frac{3}{2a_{11}a_2(a_1a_7 - a_2a_6)}(a_1^4a_2^2 + 2a_1^3a_2a_6a_7 + a_1^2a_2^2a_6^2 + a_1^2a_6^2a_7^2)
\end{aligned}$$



$$+2a_1a_2a_6^3a_7 + a_6^4a_7^2 - a_1a_{11}a_3a_6a_7 + a_{11}a_2a_3a_6^2). \quad (4.120)$$

**Sonuç 14:**

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{3a_1^2a_3 + 2a_1a_7a_9 - 2a_2a_6a_9 + 3a_3a_6^2}{2(a_1a_2 + a_6a_7)}, \\ a_8 &= \frac{3a_1a_3a_7 + 2a_2^2a_9 - 3a_2a_3a_6 + 2a_7^2a_9}{3(a_1a_2 + a_6a_7)}, \\ a_{11} &= -\frac{3(a_1^2 + a_6^2)(a_1a_2 + a_6a_7)^2}{(2a_2a_9 - 3a_3a_6)(a_1a_7 - a_2a_6)}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

**Sonuç 15:**

$$\begin{aligned} a_6 &= -\frac{3a_1a_3a_4 + 3a_1a_8a_9 - 2a_2a_4^2 - 2a_2a_9^2}{3(a_3a_9 - a_4a_8)}, \\ a_7 &= -\frac{3a_1a_3^2 + 3a_1a_8^2 - 2a_2a_3a_4 - 2a_2a_8a_9}{2(a_3a_9 - a_4a_8)}, \\ a_{11} &= \frac{1}{18(a_3a_9 - a_4a_8)^4(3a_1a_3 - 2a_2a_4)}(a_4^2 + a_9^2)(a_3a_4 + a_8a_9)(9a_1^2a_3^2 + 9a_1^2a_8^2 \\ &\quad - 12a_1a_2a_3a_4 - 12a_1a_2a_8a_9 + 4a_2^2a_4^2 + 4a_2^2a_9^2)^2. \end{aligned} \quad (4.122)$$

**Sonuç 16:**

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{3a_1a_2a_3 + 3a_1a_7a_8 - 2a_2^2a_4 - 2a_4a_7^2}{3(a_2a_8 - a_3a_7)}, \\ a_9 &= \frac{3a_1a_3^2 + 3a_1a_8^2 - 2a_2a_3a_4 - 2a_4a_7a_8}{2(a_2a_8 - a_3a_7)}, \\ a_{11} &= \frac{1}{9(a_2a_8 - a_3a_7)^3(3a_1a_3 - 2a_2a_4)}(a_2^2 + a_7^2)^2(3a_1a_8 - 2a_4a_7)(9a_1^2a_3^2 + 9a_1^2a_8^2 \\ &\quad - 12a_1a_2a_3a_4 - 12a_1a_4a_7a_8 + 4a_2^2a_4^2 + 4a_4^2a_7^2). \end{aligned} \quad (4.123)$$

**Sonuç 17:**

$$\begin{aligned} a_7 &= -\frac{3a_1^2a_3 - 2a_1a_2a_4 - 2a_2a_6a_9 + 3a_3a_6^2}{2(a_1a_9 - a_4a_6)}, \\ a_8 &= -\frac{3a_1a_3a_4 - 2a_2a_4^2 - 2a_2a_9^2 + 3a_3a_6a_9}{3(a_1a_9 - a_4a_6)}, \\ a_{11} &= \frac{3(a_1^2 + a_6^2)^2(2a_2a_9 - 3a_3a_6)}{2(a_1a_9 - a_4a_6)(3a_1a_3 - 2a_2a_4)}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

**Sonuç 18:**

$$\begin{aligned}
 a_8 &= -\frac{3a_1a_2a_3 - 2a_2^2a_4 + 3a_3a_6a_7 - 2a_4a_7^2}{3(a_1a_7 - a_2a_6)}, \\
 a_9 &= -\frac{3a_1^2a_3 - 2a_1a_2a_4 + 3a_3a_6^2 - 2a_4a_6a_7}{2(a_1a_7 - a_2a_6)}, \\
 a_{11} &= \frac{3(a_1^2 + a_6^2)(a_1a_2 + a_6a_7)}{3a_1a_3 - 2a_2a_4}.
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

**Sonuç 19:**

$$\begin{aligned}
 a_7 &= -\frac{3a_1^3a_2 + 3a_1a_2a_6^2 - 3a_1a_{11}a_3 + 2a_{11}a_2a_4}{3a_6(a_1^2 + a_6^2)}, \\
 a_9 &= \frac{a_6(9a_1^4a_3 + 18a_1^2a_3a_6^2 + 9a_3a_6^4 - 6a_1a_{11}a_3a_4 + 4a_{11}a_2a_4^2)}{2(3a_1^4a_2 + 6a_1^2a_2a_6^2 + 3a_2a_6^4 - 3a_1^2a_{11}a_3 + 2a_1a_{11}a_2a_4)}, \\
 a_8 &= -\frac{\alpha}{\beta}, \\
 \beta &= 9a_6(a_1^2 + a_6^2)(3a_1^4a_2 + 6a_1^2a_2a_6^2 + 3a_2a_6^4 - 3a_1^2a_{11}a_3 + 2a_1a_{11}a_2a_4), \\
 \alpha &= 18a_1^6a_2^2a_4 + 54a_1^4a_2^2a_4a_6^2 + 54a_1^2a_2^2a_4a_6^4 + 18a_2^2a_4a_6^6 - 36a_1^4a_{11}a_2a_3a_4 \\
 &\quad + 24a_1^3a_{11}a_2^2a_4^2 - 27a_1^3a_{11}a_3^2a_6^2 - 18a_1^2a_{11}a_2a_3a_4a_6^2 + 24a_1a_{11}a_2^2a_4^2a_6^2 \\
 &\quad - 27a_1a_{11}a_3^2a_6^4 + 18a_{11}a_2a_3a_4a_6^4 + 18a_1^2a_{11}^2a_3^2a_4 - 24a_1a_{11}^2a_2a_3a_4^2 + 8a_{11}^2a_2^2a_4^3.
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

**Sonuç 20:**

$$\begin{aligned}
 a_7 &= -\frac{3(a_1^3a_2 + a_1a_2a_6^2 - a_{11}a_6a_8)}{3a_1^2a_6 + 3a_6^3 + 2a_{11}a_9}, \\
 a_4 &= -\frac{9a_1^4a_6a_8 + 18a_1^2a_6^3a_8 + 9a_6^5a_8 + 6a_1^2a_{11}a_8a_9 - 4a_1a_{11}a_2a_9^2}{2(3a_1^4a_2 + 6a_1^2a_2a_6^2 + 3a_2a_6^4 - 3a_1a_{11}a_6a_8 + 2a_{11}a_2a_6a_9)}, \\
 a_3 &= \frac{\alpha}{\beta}, \\
 \beta &= 3(3a_1^2a_6 + 3a_6^3 + 2a_{11}a_9)(3a_1^4a_2 + 6a_1^2a_2a_6^2 + 3a_2a_6^4 - 3a_1a_{11}a_6a_8 + 2a_{11}a_2a_6a_9), \\
 \alpha &= 18a_1^6a_2^2a_9 + 54a_1^4a_2^2a_6^2a_9 + 54a_1^2a_2^2a_6^4a_9 + 18a_2^2a_6^6a_9 - 54a_1^3a_{11}a_2a_6a_8a_9 \\
 &\quad + 24a_1^2a_{11}a_2^2a_6a_9^2 - 27a_1^2a_{11}a_6^3a_8^2 - 54a_1a_{11}a_2a_6^3a_8a_9 + 24a_{11}a_2^2a_6^3a_9^2 \\
 &\quad - 27a_{11}a_6^5a_8^2 - 12a_1a_{11}^2a_2a_8a_9^2 + 8a_{11}^2a_2^2a_9^3.
 \end{aligned} \tag{4.127}$$

**Sonuç 21:**

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{3(a_1^2 a_6 a_7 + a_6^3 a_7 - a_1 a_{11} a_3)}{3a_1^3 + 3a_1 a_6^2 + 2a_{11} a_4}, \\
 a_9 &= -\frac{9a_1^5 a_3 + 18a_1^3 a_3 a_6^2 + 9a_1 a_3 a_6^4 + 6a_{11} a_3 a_4 a_6^2 - 4a_{11} a_4^2 a_6 a_7}{2(3a_1^4 a_7 + 6a_1^2 a_6^2 a_7 + 3a_6^4 a_7 - 3a_1 a_{11} a_3 a_6 + 2a_1 a_{11} a_4 a_7)}, \\
 a_8 &= \frac{\alpha}{\beta}, \\
 \beta &= 3(3a_1^3 + 3a_1 a_6^2 + 2a_{11} a_4)(3a_1^4 a_7 + 6a_1^2 a_6^2 a_7 + 3a_6^4 a_7 - 3a_1 a_{11} a_3 a_6 + 2a_1 a_{11} a_4 a_7), \\
 \alpha &= 18a_1^6 a_4 a_7^2 + 54a_1^4 a_4 a_6^2 a_7^2 + 54a_1^2 a_4 a_6^4 a_7^2 + 18a_4 a_6^6 a_7^2 - 27a_1^5 a_{11} a_3^2 \\
 &\quad - 27a_1^3 a_{11} a_3^2 a_6^2 - 54a_1^3 a_{11} a_3 a_4 a_6 a_7 + 24a_1^3 a_{11} a_4^2 a_7^2 - 54a_1 a_{11} a_3 a_4 a_6^3 a_7 \\
 &\quad + 24a_1 a_{11} a_4^2 a_6^2 a_7^2 - 12a_{11}^2 a_3 a_4^2 a_6 a_7 + 8a_{11}^2 a_4^3 a_7^2. \tag{4.128}
 \end{aligned}$$

**Sonuç 22:**

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{3a_1^2 a_6 a_7 + 3a_6^3 a_7 - 3a_{11} a_6 a_8 + 2a_{11} a_7 a_9}{3a_1(a_1^2 + a_6^2)}, \\
 a_4 &= \frac{a_1(9a_1^4 a_8 + 18a_1^2 a_6^2 a_8 + 9a_6^4 a_8 - 6a_{11} a_6 a_8 a_9 + 4a_{11} a_7 a_9^2)}{2(3a_1^4 a_7 + 6a_1^2 a_6^2 a_7 + 3a_6^4 a_7 - 3a_{11} a_6^2 a_8 + 2a_{11} a_6 a_7 a_9)}, \\
 a_3 &= -\frac{\alpha}{\beta}, \\
 \beta &= 9a_1(a_1^2 + a_6^2)(3a_1^4 a_7 + 6a_1^2 a_6^2 a_7 + 3a_6^4 a_7 - 3a_{11} a_6^2 a_8 + 2a_{11} a_6 a_7 a_9), \\
 \alpha &= 18a_1^6 a_7^2 a_9 + 54a_1^4 a_6^2 a_7^2 a_9 + 54a_1^2 a_6^4 a_7^2 a_9 + 18a_6^6 a_7^2 a_9 - 27a_1^4 a_{11} a_6 a_8^2 \\
 &\quad + 18a_1^4 a_{11} a_7 a_8 a_9 - 27a_1^2 a_{11} a_6^3 a_8^2 - 18a_1^2 a_{11} a_6^2 a_7 a_8 a_9 + 24a_1^2 a_{11} a_6 a_7 a_9^2 \\
 &\quad - 36a_{11} a_6^4 a_7 a_8 a_9 + 24a_{11} a_6^3 a_7^2 a_9^2 + 18a_{11}^2 a_6^2 a_8^2 a_9 - 24a_{11}^2 a_6 a_7 a_8 a_9^2 + 8a_{11}^2 a_7^2 a_9^3. \tag{4.129}
 \end{aligned}$$

Elde edilen bu sonuçlara bakıldığında;

1) (4.106) denkleminde verilen  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$  pozitif ikinci dereceden fonksiyon çözümleridir ancak ve ancak  $a_{11} > 0$ .

2)  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$  pozitif ikinci dereceden fonksiyon çözümlerinden  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$  ras-

yonel çözümleri elde edilir.

3) Keyfi parametrelere uygun değerler verilmesi durumunda  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$  rasyonel çözümleri her yerde analitiktir.

4)  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$  rasyonel çözümleri

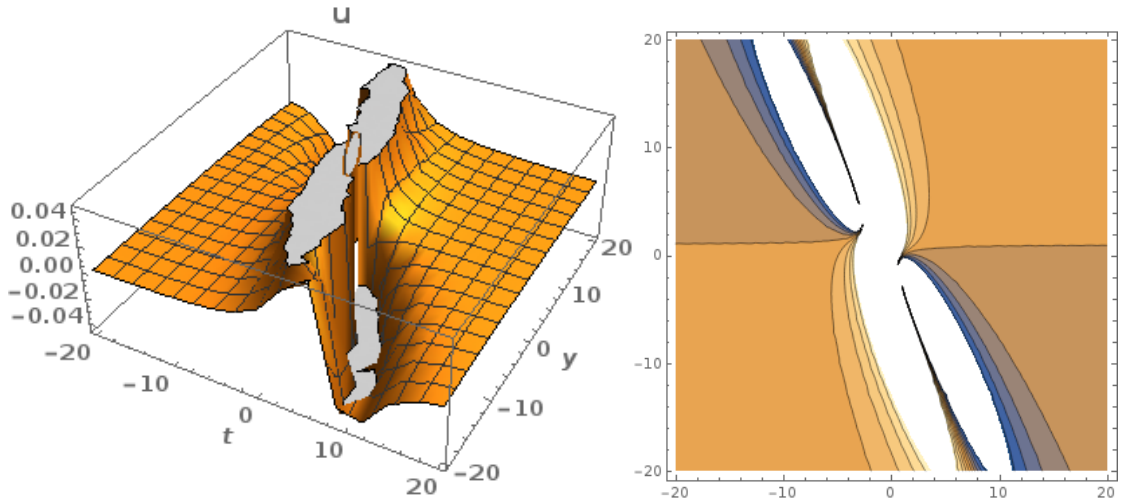
$$g^2 + h^2 \rightarrow \infty \text{ iken } u \rightarrow 0 \quad (4.130)$$

şartını sağlamaz. (3+1) boyutlu denklemlerin özelliğinden dolayı  $\mathbb{R}^4$  deki tüm yönlerde bu şart sağlanmaz.  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 22$  rasyonel çözümleri iyi tanımlılık ve analitik olma şartlarını sağlamasına rağmen son şartı sağlamadığından dolayı bu çözümlere Lump çözümler yerine Lump tipindeki çözümler denir.

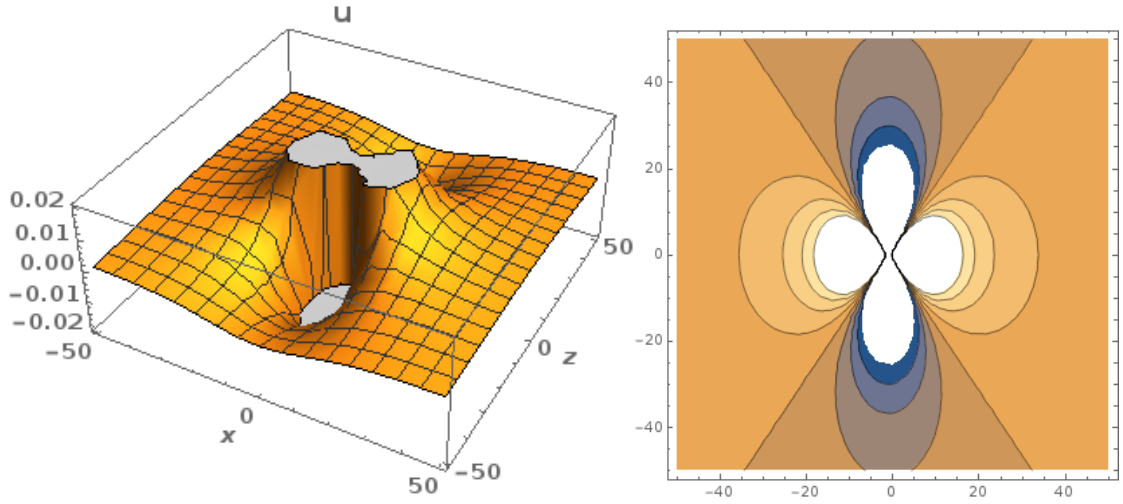
(4.105) denkleminin (4.108)-(4.129) sonuçlarına karşılık gelen Lump tipindeki çözümleri

$$u(x,y,z,t) = -\frac{6(a_1g + a_6h)}{f} \quad (4.131)$$

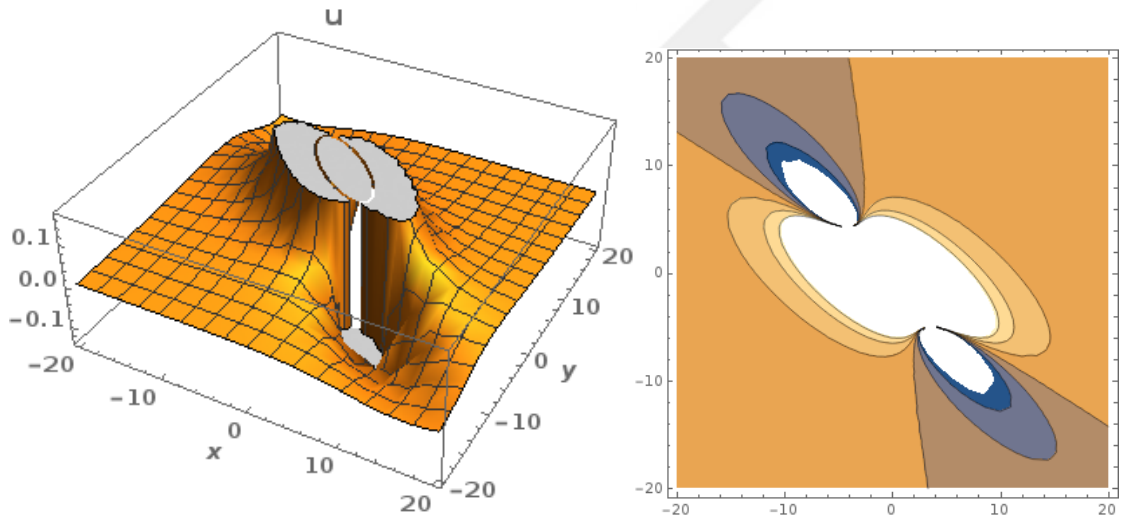
olarak verilir (Şekil 4.14, Şekil 4.15, Şekil 4.16, Şekil 4.17, Şekil 4.18, Şekil 4.19, Şekil 4.20). Burada  $f = f(x,y,z,t)$ ,  $g = g(x,y,z,t)$  ve  $h = h(x,y,z,t)$  fonksiyonları (4.106)-(4.107) denklemlerinde verilir.



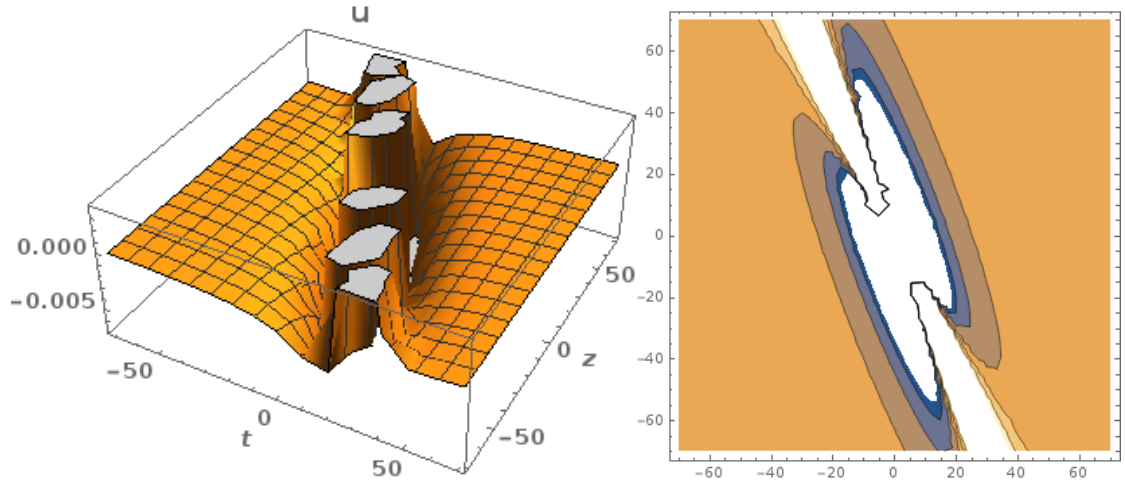
**Şekil 4.14.** (4.105) denkleminin (4.108) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri. Burada  $a_9 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



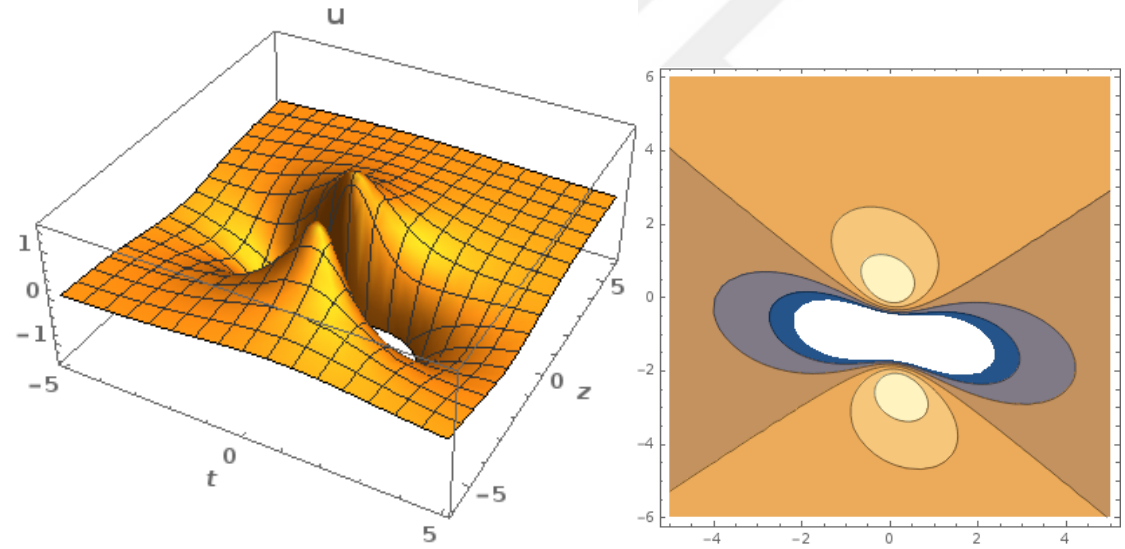
**Şekil 4.15.** (4.105) denkleminin (4.111) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



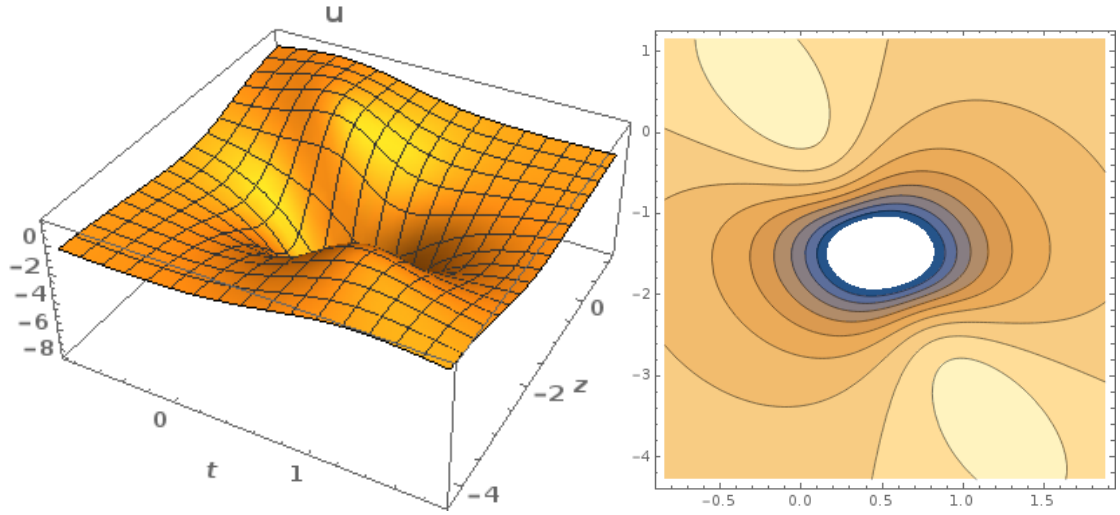
**Şekil 4.16.** (4.105) denkleminin (4.113) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri. Burada  $a_6 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



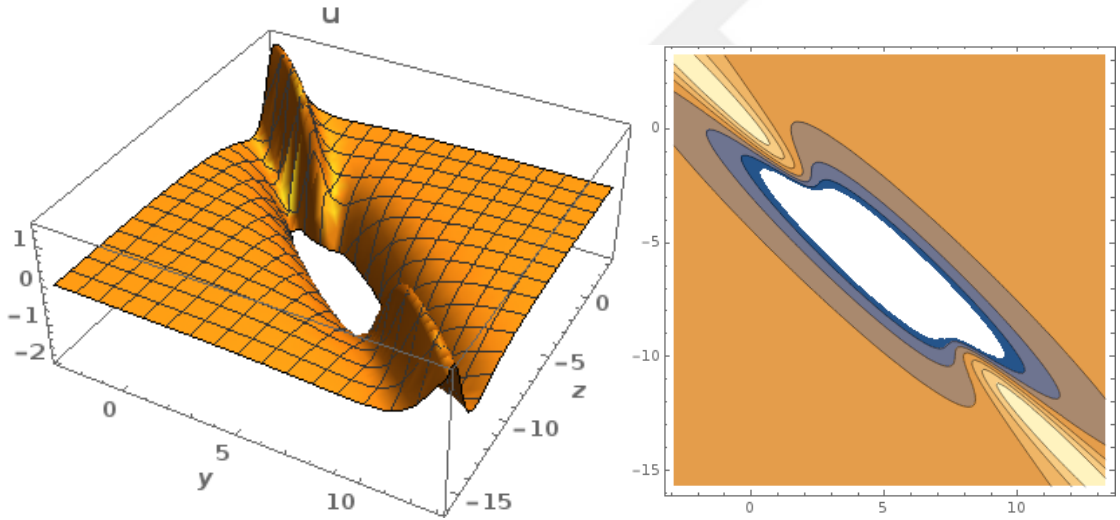
**Şekil 4.17.** (4.105) denkleminin (4.125) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri. Burada  $a_1 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



**Şekil 4.18.** (4.105) denkleminin (4.127) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri. Burada  $a_2 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



**Şekil 4.19.** (4.105) denkleminin (4.128) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



**Şekil 4.20.** (4.105) denkleminin (4.129) sonucuna karşılık gelen Lump çözüm grafikleri. Burada tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

#### 4.6. Wronskiyen Determinant Algoritmasıyla Elde Edilen Çözümler

Genelleştirilmiş (2+1) boyutlu

$$u_{tt} + u_{xxx} + 3(2u_x u_t + uu_{xt}) + 3u_{xx} \int u_t dx + au_{yt} + bu_{xt} = 0 \quad (4.132)$$

Ito denklemi ilk olarak Ito tarafından bilinear KdV denkleminin genelleştirilmesinde elde edilmiştir (Ito 1980, Adem 2016). (4.132) denklemi integral terimi içerdiğinden dolayı

$$u = v_x \quad (4.133)$$

dönüşümü kullanarak (4.132) denklemi

$$v_{xtt} + v_{xxxxt} + 3(2v_{xx}v_{xt} + v_x v_{xxt}) + 3v_{xxx}v_t + av_{xyt} + bv_{xxt} = 0 \quad (4.134)$$

denklemine dönüştür.

#### 4.6.1. Hirota bilinear denklemi

(4.134) denkleminde

$$v = 2(\ln f)_x \quad (4.135)$$

dönüşümü yazıldığında

$$\begin{aligned} & 2(\ln f)_{xxtt} + 2(\ln f)_{xxxxt} + 24(\ln f)_{xxx}(\ln f)_{xxt} + 12(\ln f)_{xx}(\ln f)_{xxxxt} \\ & + 12(\ln f)_{xxx}(\ln f)_{xt} + 2a(\ln f)_{xyt} + 2b(\ln f)_{xxt} = 0 \end{aligned} \quad (4.136)$$

dönüşmüş denklemi elde edilir. Burada  $f = f(x, y, t)$  biçimindedir.

(4.136) denklemi,  $x$  bağımsız değişkenine göre iki defa integral alındığında

$$2(\ln f)_{tt} + 2(\ln f)_{xxxxt} + 12(\ln f)_{xt}(\ln f)_{xx} + 2a(\ln f)_{yt} + 2b(\ln f)_{xt} = C \quad (4.137)$$

elde edilir. Burada  $C$  integral sabitidir. (4.137) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{2f_{tt}}{f} - \frac{2f_t^2}{f^2} + \frac{2f_{xxxxt}}{f} - \frac{2f_{xxx}f_t}{f^2} - \frac{6f_{xxt}f_x}{f^2} + \frac{6f_{xx}f_{xt}}{f^2} \\ & + \frac{2af_{yt}}{f} - \frac{2af_yf_t}{f^2} + \frac{2bf_{xt}}{f} - \frac{2bf_xf_t}{f^2} = C \end{aligned} \quad (4.138)$$



veya

$$\begin{aligned}
& 2ff_{tt} - 2f_t^2 + 2ff_{xxx} - 2f_{xxx}f_t - 6f_{xxt}f_x + 6f_{xx}f_{xt} \\
& + 2aff_{yt} - 2af_yf_t + 2bff_{xt} - 2bf_xf_t = Cf^2
\end{aligned} \tag{4.139}$$

elde edilir. (4.139) denkleminde gerekli olan Hirota türevleri

$$D_t^2 ff = 2ff_{tt} - 2f_t^2,$$

$$D_y D_t ff = 2ff_{yt} - 2f_y f_t,$$

$$D_x D_t ff = 2ff_{xt} - 2f_x f_t,$$

$$D_x^3 D_t ff = 2ff_{xxx} - 2f_{xxx}f_t - 6f_x f_{xxt} + 6f_{xx}f_{xt} \tag{4.140}$$

olarak verilir (Hirota 2004).  $C = 0$  integral sabiti ve (4.140) Hirota türevleri (4.139) denkleminde yerine yazılırsa (4.134) denkleminin

$$\begin{aligned}
& (D_t^2 + D_x^3 D_t + aD_y D_t + bD_x D_t) ff = 2ff_{tt} - 2f_t^2 + 2ff_{xxx} \\
& - 2f_{xxx}f_t - 6f_{xxt}f_x + 6f_{xx}f_{xt} + 2aff_{yt} - 2af_yf_t + 2bff_{xt} - 2bf_xf_t = 0
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Hirota bilineer denklemi elde edilir.

#### 4.6.2. Wronskiyen şartları

**Teorem:**  $\phi_i = \phi_i(x, y, t)$  ve  $1 \leq i \leq N$  olmak üzere

$$\phi_{i,xx} = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}(t) \phi_j, \tag{4.142}$$

$$\phi_{i,t} = m\phi_{i,x}, \tag{4.143}$$

$$\phi_{i,y} = n\phi_{i,xxx} + k\phi_{i,x} \tag{4.144}$$

Wronskiyen şartları altında

$$f = |\widehat{N-1}| \tag{4.145}$$

Wronskiyen determinantı (4.141) Hirota bilineer denklemini sağlar. Burada  $m, n, k$  sabit sayılar

$$\begin{aligned} n &= -\frac{4}{a}, \\ m &= -(b + ak) \end{aligned} \quad (4.146)$$

eşitliklerini sağlar (Yıldırım ve Yasar 2017c).

**İspat:** İlk olarak (4.143) ve (4.144) şartları kullanılarak (4.146) eşitlikleri elde edilecektir.

(4.141) Hirota bilineer denkleminde yer alan tüm kısmi türevler

$$\begin{aligned} f &= \left| \widehat{N-1} \right|, \\ f_x &= \left| \widehat{N-2}, N \right|, \\ f_t &= m \left| \widehat{N-2}, N \right|, \\ f_{xx} &= \left| \widehat{N-3}, N-1, N \right| + \left| \widehat{N-2}, N+1 \right|, \\ f_{xt} &= m \left( \left| \widehat{N-3}, N-1, N \right| + \left| \widehat{N-2}, N+1 \right| \right), \\ f_{tt} &= m^2 \left( \left| \widehat{N-3}, N-1, N \right| + \left| \widehat{N-2}, N+1 \right| \right), \\ f_{xxx} &= \left| \widehat{N-4}, N-2, N-1, N \right| + 2 \left| \widehat{N-3}, N-1, N+1 \right| + \left| \widehat{N-2}, N+2 \right|, \\ f_{xxt} &= m \left( \left| \widehat{N-4}, N-2, N-1, N \right| + 2 \left| \widehat{N-3}, N-1, N+1 \right| + \left| \widehat{N-2}, N+2 \right| \right), \\ f_y &= n \left| \widehat{N-4}, N-2, N-1, N \right| - n \left| \widehat{N-3}, N-1, N+1 \right| \\ &\quad + n \left| \widehat{N-2}, N+2 \right| + k \left| \widehat{N-2}, N \right|, \\ f_{yt} &= mn \left| \widehat{N-5}, N-3, N-2, N-1, N \right| - mn \left| \widehat{N-3}, N, N+1 \right| \\ &\quad + mn \left| \widehat{N-2}, N+3 \right| + mk \left| \widehat{N-3}, N-1, N \right| + mk \left| \widehat{N-2}, N+1 \right|, \\ f_{xxx} &= m \left( \left| \widehat{N-5}, N-3, N-2, N-1, N \right| + 3 \left| \widehat{N-4}, N-2, N-1, N+1 \right| \right. \\ &\quad \left. + 2 \left| \widehat{N-3}, N, N+1 \right| + 3 \left| \widehat{N-3}, N-1, N+2 \right| + \left| \widehat{N-2}, N+3 \right| \right) \end{aligned} \quad (4.147)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece (4.147) denklemindeki kısmi türevler kullanarak (4.141) Hirota bilineer denklemindeki bazı terimler

$$\begin{aligned}
3f_{xx}f_{xt} &= 3m \left( \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| + \left| \widehat{N-2, N+1} \right| \right)^2 \\
&= 3m \left( \left| \widehat{N-2, N+1} \right| - \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| + 2 \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \right)^2 \\
&= 3m \left( \left| \widehat{N-2, N+1} \right| - \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \right)^2 \\
&\quad + 12m \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \left| \widehat{N-2, N+1} \right|, \tag{4.148}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(f_{xxx} + f_{tt} + af_{yt} + bf_{xt}) &= \left| \widehat{N-1} \right| \left( (m + amn) \left| \widehat{N-5, N-3, N-2, N-1, N} \right| \right. \\
&\quad + 3m \left| \widehat{N-4, N-2, N-1, N+1} \right| + (2m - amn) \left| \widehat{N-3, N, N+1} \right| \\
&\quad + 3m \left| \widehat{N-3, N-1, N+2} \right| + (m + amn) \left| \widehat{N-2, N+3} \right| \\
&\quad \left. + (m^2 + amk + bm) \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| + (m^2 + amk + bm) \left| \widehat{N-2, N+1} \right| \right) \tag{4.149}
\end{aligned}$$

olarak verilir. (2.15) özelliği gözönüne alınarak (4.148) ve (4.149) denklemlerinden

$$m + amn = -3m$$

$$n = -\frac{4}{a} \tag{4.150}$$

ve

$$m^2 + amk + bm = 0$$

$$m = -(b + ak) \tag{4.151}$$

eşitlikleri elde edilir.

Son olarak (4.146) eşitlikleri kullanılarak (4.143) ve (4.144) şartları altında (4.145) Wronskiyen determinantının (4.141) Hirota bilineer denklemini sağladığı gösterilecektir.

(4.141) Hirota bilineer denklemindeki tüm terimler

$$\begin{aligned}
3f_{xx}f_{xt} &= 3m \left( \left| \widehat{N-2, N+1} \right| - \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \right)^2 \\
&\quad + 12m \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \left| \widehat{N-2, N+1} \right|, \\
f(f_{xxx} + f_{tt} + af_{yt} + bf_{xt}) &= -3m \left| \widehat{N-1} \right| \left( \left| \widehat{N-5, N-3, N-2, N-1, N} \right| \right. \\
&\quad - \left| \widehat{N-4, N-2, N-1, N+1} \right| - 2 \left| \widehat{N-3, N, N+1} \right| \\
&\quad \left. - \left| \widehat{N-3, N-1, N+2} \right| + \left| \widehat{N-2, N+3} \right| \right) \\
&= -3m \left( \left| \widehat{N-2, N+1} \right| - \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \right)^2 \\
&\quad + 12m \left| \widehat{N-3, N, N+1} \right| \left| \widehat{N-1} \right|, \\
-f_t^2 &= -m^2 \left| \widehat{N-2, N} \right|^2, \\
-f_{xxx}f_t &= -m \left| \widehat{N-2, N} \right| \left( \left| \widehat{N-4, N-2, N-1, N} \right| \right. \\
&\quad \left. + 2 \left| \widehat{N-3, N-1, N+1} \right| + \left| \widehat{N-2, N+2} \right| \right), \\
-3f_{xxt}f_x &= -3m \left| \widehat{N-2, N} \right| \left( \left| \widehat{N-4, N-2, N-1, N} \right| \right. \\
&\quad \left. + 2 \left| \widehat{N-3, N-1, N+1} \right| + \left| \widehat{N-2, N+2} \right| \right), \\
-af_yf_t &= -am \left| \widehat{N-2, N} \right| \left( n \left| \widehat{N-4, N-2, N-1, N} \right| \right. \\
&\quad \left. - n \left| \widehat{N-3, N-1, N+1} \right| + n \left| \widehat{N-2, N+2} \right| + k \left| \widehat{N-2, N} \right| \right), \\
-bf_xf_t &= -bm \left| \widehat{N-2, N} \right| \left| \widehat{N-2, N} \right| = -bm \left| \widehat{N-2, N} \right|^2 \tag{4.152}
\end{aligned}$$

olarak verilir. (4.152) sonuçlarını (4.141) Hirota bilineer denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
12m \left| \widehat{N-3, N-1, N} \right| \left| \widehat{N-2, N+1} \right| + 12m \left| \widehat{N-3, N, N+1} \right| \left| \widehat{N-1} \right| \\
- 12m \left| \widehat{N-3, N-1, N+1} \right| \left| \widehat{N-2, N} \right| \tag{4.153}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (2.13) özelliğinden dolayı

$$12m \left| \widehat{N-3}, N-1, N \right| \left| \widehat{N-2}, N+1 \right| + 12m \left| \widehat{N-3}, N, N+1 \right| \left| \widehat{N-1} \right| - 12m \left| \widehat{N-3}, N-1, N+1 \right| \left| \widehat{N-2}, N \right| = 0 \quad (4.154)$$

sonucu elde edilir. Sonuç olarak (4.145) Wronskiyen determinantı (4.141) Hirota bilineer denklemini sağlar ve (4.134) denkleminde karşılık gelen çözümler

$$v = 2 (\ln f)_x = \frac{2f_x}{f} = 2 \frac{|\widehat{N-2}, N|}{|\widehat{N-1}|} \quad (4.155)$$

olarak verilir.

### 4.6.3. Rasyonel çözümler

Bir reel matrisin Jordan formu

$$A = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & & & 0 \\ 1 & J(\lambda_2) & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & 1 & J(\lambda_m) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (4.156)$$

olarak verilir. Burada  $J(\lambda_i)$

$$J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{k_i \times k_i} \quad (4.157)$$

olarak verilir ve  $\lambda_i$  reel özdeğerlerdir.  $J(\lambda_1)$  ifadesi

$$J(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}_{k_1 \times k_1} \quad (4.158)$$

olarak verilir. Eğer  $\lambda_1 = 0$  özdeğeri alınırsa  $J(\lambda_1)$  ifadesi

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k_1 \times k_1} \quad (4.159)$$

olarak verilir. Böylece (4.142)-(4.144) şartlarından

$$\phi_{i+1,xx} = \phi_i, \quad \phi_{i+1,t} = -(b + ak)\phi_{i+1,x},$$

$$\phi_{i+1,y} = -\frac{4}{a}\phi_{i+1,xxx} + k\phi_{i+1,x}, \quad i \geq 1 \quad (4.160)$$

elde edilir. (4.160) denklem sistemi çözüldüğünde sıfırcı, birinci ve ikinci mertebeden rasyonel Wronskiyen çözümleri elde edilir.

### 1) Sıfırcı mertebeden rasyonel çözümler:

(4.160) denklemi

$$\phi_{1,xx} = 0, \quad \phi_{1,t} = -(b + ak)\phi_{1,x}, \quad \phi_{1,y} = -\frac{4}{a}\phi_{1,xxx} + k\phi_{1,x} \quad (4.161)$$

denkleminin karşılık gelir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$\phi_1 = c_1(x + ky - (b + ak)t) + c_2 \quad (4.162)$$

elde edilir. (4.162) denkleminde

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0 \quad (4.163)$$

alındığında

$$\phi_1 = x + ky - (b + ak)t \quad (4.164)$$

özdeğer fonksiyonu bulunur. (2.11) Wronskiyen determinantı kullanılarak  $\phi_1$  özdeğer fonksiyonuna karşılık gelen Wronskiyen determinantı

$$\begin{aligned} f = W(\phi_1) &= \left| \phi_1^{(0)} \right| \\ &= |x + ky - (b + ak)t| \\ &= x + ky - (b + ak)t \end{aligned} \quad (4.165)$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_1) = \frac{2}{x + ky - (b + ak)t} \quad (4.166)$$

sıfıncı mertebeden rasyonel çözüm elde edilir.

## 2) Birinci mertebeden rasyonel çözümler:

(4.160) denklemi

$$\phi_{2,xx} = \phi_1, \quad \phi_{2,t} = -(b + ak)\phi_{2,x}, \quad \phi_{2,y} = -\frac{4}{a}\phi_{2,xxx} + k\phi_{2,x} \quad (4.167)$$

denkleminde karşılık gelir. Burada  $\phi_1$  özdeğer fonksiyonu (4.164) denkleminde verilir. (4.167) denklem sistemi çözüldüğünde

$$\phi_2 = \frac{(x + ky - (b + ak)t)^3}{6} - \frac{4y}{a} \quad (4.168)$$

özdeğer fonksiyonu elde edilir.  $\phi_1$  ve  $\phi_2$  özdeğer fonksiyonların Wronskiyen determinanı

$$\begin{aligned} f = W(\phi_1, \phi_2) &= \begin{vmatrix} \phi_1^{(0)} & \phi_1^{(1)} \\ \phi_2^{(0)} & \phi_2^{(1)} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x + ky - (b + ak)t & 1 \\ \frac{(x + ky - (b + ak)t)^3}{6} - \frac{4y}{a} & \frac{3(x + ky - (b + ak)t)^2}{6} \end{vmatrix} \\ &= \frac{(x + ky - (b + ak)t)^3}{3} + \frac{4y}{a} \end{aligned} \quad (4.169)$$

olarak verilir ve böylece

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_1, \phi_2) = \frac{2(x + ky - (b + ak)t)^2}{\frac{(x + ky - (b + ak)t)^3}{3} + \frac{4y}{a}} \quad (4.170)$$

birinci mertebeden rasyonel çözüm elde edilir.

### 3) İkinci mertebeden rasyonel çözümler:

(4.160) denklemi

$$\phi_{3,xx} = \phi_2, \quad \phi_{3,t} = -(b + ak)\phi_{3,x}, \quad \phi_{3,y} = -\frac{4}{a}\phi_{3,xxx} + k\phi_{3,x} \quad (4.171)$$

denkleminde karşılık gelir. Burada  $\phi_2$  özdeğer fonksiyonu (4.168) denkleminde verilir. (4.171) denklem sistemi çözüldüğünde

$$\phi_3 = \frac{(x + ky - (b + ak)t)^5}{120} - \frac{2y(x + ky - (b + ak)t)^2}{a} \quad (4.172)$$



özdeğer fonksiyonu elde edilir.  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  özdeğer fonksiyonların Wronskiyen determinanı

$$f = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} \phi_1^{(0)} & \phi_1^{(1)} & \phi_1^{(2)} \\ \phi_2^{(0)} & \phi_2^{(1)} & \phi_2^{(2)} \\ \phi_3^{(0)} & \phi_3^{(1)} & \phi_3^{(2)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x + ky - (b + ak)t & 1 & 0 \\ \frac{(x + ky - (b + ak)t)^3}{6} - \frac{4y}{a} & \frac{3(x + ky - (b + ak)t)^2}{6} & \frac{6(x + ky - (b + ak)t)}{6} \\ \frac{(x + ky - (b + ak)t)^5}{120} - \frac{2y(x + ky - (b + ak)t)^2}{a} & \frac{5(x + ky - (b + ak)t)^4}{120} - \frac{4y(x + ky - (b + ak)t)}{a} & \frac{20(x + ky - (b + ak)t)^3}{120} - \frac{4y}{a} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(x + ky - (b + ak)t)^6}{45} + \frac{4y(x + ky - (b + ak)t)^3}{3a} - \frac{16y^2}{a^2} \quad (4.173)$$

olarak verilir ve böylece

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{\frac{4(x + ky - (b + ak)t)^5}{15} + \frac{8y(x + ky - (b + ak)t)^2}{a}}{\frac{(x + ky - (b + ak)t)^6}{45} + \frac{4y(x + ky - (b + ak)t)^3}{3a} - \frac{16y^2}{a^2}} \quad (4.174)$$

ikinci mertebeden rasyonel Wronskiyen çözüm elde edilir.

#### 4.6.4. Soliton, positon ve negaton çözümler

Eğer  $\lambda_1 \neq 0$  özdeğeri alınırsa  $J(\lambda_1)$  ifadesi

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}_{k_1 \times k_1} \quad (4.175)$$

olarak verilir. (4.142)-(4.144) şartlarından  $\phi_1(\lambda_1)$  özdeğer fonksiyonu

$$\begin{aligned} (\phi_1(\lambda_1))_{xx} &= \lambda_1 \phi_1(\lambda_1), \quad (\phi_1(\lambda_1))_t = -(b+ak)(\phi_1(\lambda_1))_x, \\ (\phi_1(\lambda_1))_y &= -\frac{4}{a}(\phi_1(\lambda_1))_{xxx} + k(\phi_1(\lambda_1))_x \end{aligned} \quad (4.176)$$

denklemlerinden bulunur. (4.176) sisteminin genel çözümleri

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda_1) &= C_1 \sinh \left( \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b+ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) \right) \\ &+ C_2 \cosh \left( \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b+ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) \right), \quad \lambda_1 > 0 \end{aligned} \quad (4.177)$$

ve

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda_1) &= C_3 \cos \left( \sqrt{-\lambda_1} \left( x + ky - (b+ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) \right) \\ &- C_4 \sin \left( \sqrt{-\lambda_1} \left( x + ky - (b+ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) \right), \quad \frac{ak}{4} < \lambda_1 < 0 \end{aligned} \quad (4.178)$$

olarak verilir. Burada  $C_1, C_2, C_3, C_4$  keyfi reel sabitlerdir.

### Soliton çözümler

Soliton çözümler

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \quad (4.179)$$

olarak verilir. Burada  $\phi_i$  fonksiyonları

$$\phi_i = \cosh \left( \sqrt{\lambda_i} \left( x + ky - (b+ak)t - \frac{4y\lambda_i}{a} \right) + \gamma_i \right), \quad i \text{ tek}, \quad (4.180)$$

$$\phi_i = \sinh \left( \sqrt{\lambda_i} \left( x + ky - (b+ak)t - \frac{4y\lambda_i}{a} \right) + \gamma_i \right), \quad i \text{ çift}, \quad (4.181)$$

olarak verilir. Ayrıca  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  ve  $\gamma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) keyfi reel sabitlerdir.

**1) Sıfıncı mertebeden soliton çözümler:**

$$\begin{aligned}
 v &= 2\partial_x \ln W(\phi_1) = 2\partial_x \ln |\phi_1| \\
 &= 2\partial_x \ln \left| \cosh \left( \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) + \gamma_1 \right) \right| \\
 &= 2\partial_x \ln \left( \cosh \left( \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) + \gamma_1 \right) \right) \\
 &= 2\sqrt{\lambda_1} \tanh(\theta_1)
 \end{aligned} \tag{4.182}$$

veya

$$\begin{aligned}
 v &= 2\partial_x \ln W(\phi_1) = 2\partial_x \ln |\phi_1| \\
 &= 2\partial_x \ln \left| \sinh \left( \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) + \gamma_1 \right) \right| \\
 &= 2\partial_x \ln \left( \sinh \left( \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) + \gamma_1 \right) \right) \\
 &= 2\sqrt{\lambda_1} \coth(\theta_1)
 \end{aligned} \tag{4.183}$$

olarak verilir. Burada

$$\theta_1 = \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) + \gamma_1, \quad \lambda_1 > 0. \tag{4.184}$$

**2) Birinci mertebeden soliton çözümler:**

$$\begin{aligned}
 v &= 2\partial_x \ln W(\phi_1, \phi_2) = 2\partial_x \ln |\cosh(\theta_1), \sinh(\theta_2)| \\
 &= 2\partial_x \ln \left| \begin{array}{cc} \cosh(\theta_1) & \sqrt{\lambda_1} \sinh(\theta_1) \\ \sinh(\theta_2) & \sqrt{\lambda_2} \cosh(\theta_2) \end{array} \right| \\
 &= \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)(\sinh(\theta_1 + \theta_2) - \sinh(\theta_1 - \theta_2))}{(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}) \cosh(\theta_1 + \theta_2) - (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}) \cosh(\theta_1 - \theta_2)}
 \end{aligned} \tag{4.185}$$

olarak verilir. Burada

$$\theta_i = \sqrt{\lambda_i} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_i}{a} \right) + \gamma_i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.186}$$

## Positon çözümler

Positon çözümler

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi, \partial_\lambda \phi, \dots, \partial_\lambda^{k-1} \phi) \quad (4.187)$$

olarak verilir. Burada  $\phi(\lambda)$  fonksiyonu

$$\phi(\lambda) = \cos \left( \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \quad \lambda < 0, \quad (4.188)$$

$$\phi(\lambda) = \sin \left( \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \quad \lambda < 0 \quad (4.189)$$

olarak verilir.

### 1) Sıfırıncı mertebeden positon çözümler:

$$\begin{aligned} v &= 2\partial_x \ln W(\phi) = 2\partial_x \ln |\phi| \\ &= 2\partial_x \ln \left| \cos \left( \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right| \\ &= 2\partial_x \ln \left( \cos \left( \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right) \\ &= -2\sqrt{-\lambda} \tan(\theta_3) \end{aligned} \quad (4.190)$$

veya

$$\begin{aligned} v &= 2\partial_x \ln W(\phi) = 2\partial_x \ln |\phi| \\ &= 2\partial_x \ln \left| \sin \left( \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right| \\ &= 2\partial_x \ln \left( \sin \left( \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right) \\ &= 2\sqrt{-\lambda} \cot(\theta_3) \end{aligned} \quad (4.191)$$

olarak verilir. Burada

$$\theta_3 = \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma. \quad (4.192)$$

## 2) Birinci mertebeden positon çözümler:

$$\begin{aligned}
 v &= 2\partial_x \ln W(\cos(\theta), \partial_\lambda \cos(\theta)) \\
 &= 2\partial_x \ln \left| \begin{array}{cc} \cos(\theta) & \partial_x(\cos(\theta)) \\ \partial_\lambda \cos(\theta) & \partial_x(\partial_\lambda \cos(\theta)) \end{array} \right| \\
 &= \frac{4\sqrt{-\lambda}(1 + \cos(2\theta))}{2\sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{12y\lambda}{a} \right) + \sin(2\theta)}
 \end{aligned} \tag{4.193}$$

olarak verilir. Burada

$$\theta = \sqrt{-\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma. \tag{4.194}$$

## Negaton çözümler

Negaton çözümler

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi, \partial_\lambda \phi, \dots, \partial_\lambda^{k-1} \phi) \tag{4.195}$$

olarak verilir. Burada  $\phi(\lambda)$  fonksiyonu

$$\phi = \cosh \left( \sqrt{\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \tag{4.196}$$

ve

$$\phi = \sinh \left( \sqrt{\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \tag{4.197}$$

olarak verilir. Burada  $\lambda > 0$  ve  $\gamma$  keyfi sabittir.

## 1) Sıfırıncı mertebeden negaton çözümler:

$$\begin{aligned}
 v &= 2\partial_x \ln W(\phi) = 2\partial_x \ln |\phi| \\
 &= 2\partial_x \ln \left| \cosh \left( \sqrt{\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right| \\
 &= 2\partial_x \ln \left( \cosh \left( \sqrt{\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{\lambda} \tanh(\theta_4) \quad (4.198)$$

veya

$$\begin{aligned} v &= 2\partial_x \ln W(\phi) = 2\partial_x \ln |\phi| \\ &= 2\partial_x \ln \left| \sinh \left( \sqrt{\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right| \\ &= 2\partial_x \ln \left( \sinh \left( \sqrt{\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma \right) \right) \\ &= 2\sqrt{\lambda} \coth(\theta_4) \end{aligned} \quad (4.199)$$

olarak verilir. Burada

$$\theta_4 = \sqrt{\lambda} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda}{a} \right) + \gamma. \quad (4.200)$$

## 2) Birinci mertebeden negaton çözümler:

$$\begin{aligned} v &= 2\partial_x \ln W(\cosh(\theta), \partial_{\lambda_1} \cosh(\theta)) \\ &= \frac{4\sqrt{\lambda_1} (1 + \cosh(2\theta))}{2\sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{12y\lambda_1}{a} \right) + \sinh(2\theta)} \end{aligned} \quad (4.201)$$

olarak verilir. Burada

$$\theta = \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) + \gamma_1. \quad (4.202)$$

### 4.6.5. Etkileşim çözümler

Wronskiyen etkileşim çözümler

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \dots, \phi_k(\lambda); \psi_1(\mu), \dots, \psi_l(\mu)) \quad (4.203)$$

olarak verilir. Burada

$$(\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \dots, \phi_k(\lambda); \psi_1(\mu), \dots, \psi_l(\mu)) \quad (4.204)$$

iki özdeğer fonksiyon kümesini temsil etmektedir.

Rasyonel, soliton ve positon özdeğer

$$\phi_{\text{rasyonel}} = x + ky - (b + ak)t, \quad (4.205)$$

$$\phi_{\text{soliton}} = \cosh \left( \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right) \right), \quad \lambda_1 > 0, \quad (4.206)$$

$$\phi_{\text{positon}} = \cos \left( \sqrt{-\lambda_2} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_2}{a} \right) \right), \quad \lambda_2 < 0 \quad (4.207)$$

fonksiyonlarına karşılık gelen Wronskiyen etkileşim determinantları

$$W(\phi_{\text{rasyonel}}, \phi_{\text{soliton}}) = \sqrt{\lambda_1} (x + ky - (b + ak)t) \sinh(\theta_1) - \cosh(\theta_1), \quad (4.208)$$

$$W(\phi_{\text{rasyonel}}, \phi_{\text{positon}}) = -\sqrt{-\lambda_2} (x + ky - (b + ak)t) \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2), \quad (4.209)$$

$$W(\phi_{\text{soliton}}, \phi_{\text{positon}}) = -\sqrt{-\lambda_2} \cosh(\theta_1) \sin(\theta_2) - \sqrt{\lambda_1} \sinh(\theta_1) \cos(\theta_2), \quad (4.210)$$

$$W(\phi_{\text{rasyonel}}, \phi_{\text{soliton}}, \phi_{\text{positon}}) = (x + ky - (b + ak)t) \left( \lambda_2 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\theta_1) \cos(\theta_2) \right. \\ \left. + \lambda_1 \sqrt{-\lambda_2} \cosh(\theta_1) \sin(\theta_2) \right) + (\lambda_1 - \lambda_2) \cosh(\theta_1) \cos(\theta_2) \quad (4.211)$$

olarak verilir. Burada

$$\theta_1 = \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right), \quad (4.212)$$

$$\theta_2 = \sqrt{-\lambda_2} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_2}{a} \right). \quad (4.213)$$

Böylece (4.208)-(4.211) Wronskiyen etkileşim determinantlarına karşılık gelen Wronskiyen etkileşim çözümleri

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_{\text{rasyonel}}, \phi_{\text{soliton}}) = \frac{2\sqrt{\lambda_1} (x + ky - (b + ak)t) \cosh(\theta_1)}{\sqrt{\lambda_1} (x + ky - (b + ak)t) \sinh(\theta_1) - \cosh(\theta_1)}, \quad (4.214)$$

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_{\text{rasyonel}}, \phi_{\text{positon}}) = \frac{-2\lambda_2 (x + ky - (b + ak)t) \cos(\theta_2)}{\sqrt{-\lambda_2} (x + ky - (b + ak)t) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)}, \quad (4.215)$$

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_{\text{soliton}}, \phi_{\text{positon}}) = \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2) \cosh(\theta_1) \cos(\theta_2)}{\sqrt{-\lambda_2} \cosh(\theta_1) \sin(\theta_2) + \sqrt{\lambda_1} \sinh(\theta_1) \cos(\theta_2)}, \quad (4.216)$$

$$v = 2\partial_x \ln W(\phi_{\text{rasyonel}}, \phi_{\text{soliton}}, \phi_{\text{positon}}) = \frac{2q}{p}, \quad (4.217)$$

$$p = (x + ky - (b + ak)t) \left( \lambda_2 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\theta_1) \cos(\theta_2) + \lambda_1 \sqrt{-\lambda_2} \cosh(\theta_1) \sin(\theta_2) \right) + (\lambda_1 - \lambda_2) \cosh(\theta_1) \cos(\theta_2),$$

$$q = (x + ky - (b + ak)t) \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 - \lambda_2) \sinh(\theta_1) \sin(\theta_2) + \lambda_1 \sqrt{\lambda_1} \sinh(\theta_1) \cos(\theta_2) + \lambda_2 \sqrt{-\lambda_2} \cosh(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

olarak verilir. Burada

$$\theta_1 = \sqrt{\lambda_1} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_1}{a} \right), \quad (4.218)$$

$$\theta_2 = \sqrt{-\lambda_2} \left( x + ky - (b + ak)t - \frac{4y\lambda_2}{a} \right). \quad (4.219)$$

#### 4.7. Lie simetri indirgemesi ve çözümlerinin tam mertebeli denklemlere uygulanması

Literatürde birçok alanda kullanılan ve birçok fiziksel olayı modelleyen denklemlerin temelini oluşturan KdV

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.220)$$

denklemini lineer olmayan oluşum türü bir denklemdir. Fiziksel olarak bu denklem sığ su yüzeylerindeki özel dalga olan soliton dalgalarını modeller (Zabusky ve Kruskal 1965). Soliton'lar ise şekil değiştirmeden veya dağılmadan tüm yönlerde ilerleyen dalgalardır (<http://atomcool.rice.edu/research/boson/matter-wave-solitons/>). Ayrıca KdV denklemini sığ su dalgaları ile birlikte uzun aralıklı dalgalar ve ses dalgaları gibi birçok fiziksel problemle de ilişkilidir ([https://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg%E2%80%93Vries\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg%E2%80%93Vries_equation)).

(4.220) denkleminde türetilen (2+1) boyutlu kırılğan soliton denklemini

$$u_{xt} - 4u_{xy}u_x - 2u_{xx}u_y - u_{xxy} = 0 \quad (4.221)$$



şeklinde verilir (Wazwaz 2010). (4.221) denkleminde  $y = x$  olarak kabul edildiğinde ve elde edilen denklemi  $x$  bağımsız değişkenine göre integrali alındığında (4.221) denklemi KdV denkleminin dönüşür. (4.221) denklemi  $y$  eksenini boyunca yayılan Riemann dalgası ile  $x$  eksenini boyunca yayılan bir uzun dalga arasındaki (2+1) boyutlu etkileşimi modeller (Wazwaz 2010). Bu tür denklemlerin en önemli özelliği, Lax temsillerinde kullanılan spektral parametresinin kırılma davranışına sahip olmasıdır (Radha ve Lakshmanan 1995). Böylece spektral değer çok değerli bir işleme dönüşür. Sonuç olarak bu denklemlerin çözümlerinin bulunması çok daha değerli hale gelir.

#### 4.7.1. Lie simetri analizi

(4.221) denkleminin bir simetri üretici

$$\mathbf{X} = \xi^t(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^y(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial y} + \eta(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.222)$$

şeklinde verilir. (4.221) denkleminin simetrilerini bulmak için (4.222) üreticinin 4. uzayını (4.221) denkleminin uygulandığında

$$\mathbf{X}^{[4]}(u_{xt} - 4u_{xy}u_x - 2u_{xx}u_y - u_{xxx})|_{(4.221)} = 0 \quad (4.223)$$

ifadesi elde edilir. (4.223) denkleminin açıldığında bir denklem elde edilir ve elde edilen bu denklemdeki terimler  $u$ 'nun türevlerine göre ayrılırsa

$$\begin{aligned} \xi_{t,t}^y = 0, \eta_{u,t} = 0, \eta_{u,u} = 0, \xi_x^t = 0, \xi_x^x = -\eta_u, \xi_x^y = 0 \\ \eta_x = -\frac{\xi_t^y}{4}, \xi_t^t = -2\eta_u, \xi_t^x = 0, \xi_u^t = 0, \xi_u^x = 0, \xi_u^y = 0 \end{aligned} \quad (4.224)$$

belirleyici denklem sistemi elde edilir. (4.224) denkleminin çözümleri  $\xi^t, \xi^x, \xi^y, \eta$  değerleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\eta = -\frac{c_1 x}{4} + c_3 u + f(t),$$

$$\xi^t = -2c_3 t + c_4,$$

$$\xi^x = -c_3 x + c_5,$$

$$\xi^y = c_1 t + c_2. \quad (4.225)$$

Burada  $f(t)$  bir keyfi fonksiyon ve  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  keyfi sabit sayılardır. (4.225) sonuçları yardımıyla (4.222) ürteçi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & (-2c_3 t + c_4) \frac{\partial}{\partial t} + (-c_3 x + c_5) \frac{\partial}{\partial x} \\ & + (c_1 t + c_2) \frac{\partial}{\partial y} + \left( -\frac{c_1 x}{4} + c_3 u + f(t) \right) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (4.226)$$

(4.226) üretecinde  $c_1 = 1$  ve  $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = f(t) = 0$  alınırsa

$$\mathbf{X}_1 = t \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{4} \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.227)$$

(4.226) üretecinde  $c_2 = 1$  ve  $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = f(t) = 0$  alınırsa

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.228)$$

(4.226) üretecinde  $c_3 = 1$  ve  $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = f(t) = 0$  alınırsa

$$\mathbf{X}_3 = -2t \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.229)$$

(4.226) üretecinde  $c_4 = 1$  ve  $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = f(t) = 0$  alınırsa

$$\mathbf{X}_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.230)$$

(4.226) üretecinde  $c_5 = 1$  ve  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = f(t) = 0$  alınırsa

$$\mathbf{X}_5 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.231)$$

(4.226) üretecinde  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$  alınırsa

$$\mathbf{X}_6 = f(t) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.232)$$

elde edilir.

#### 4.7.2. Lie simetri indirgemeleri

Bu bölümde amacımız (2+1) boyutlu (4.221) denkleminin üreteçlerini kullanarak denklemin adi diferensiyel denkleme dönüştürmektir. Denklemin  $\mathbf{X}_5 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial y}$  ve  $\mathbf{X}_4 = \frac{\partial}{\partial t}$  öteleme simetrilerinin lineer birleşimi olan

$$\gamma = a_1 \mathbf{X}_5 + a_2 \mathbf{X}_2 + a_3 \mathbf{X}_4 \quad (4.233)$$

üretecini ele alalım. Burada  $a_1, a_2, a_3$  sabit sayılardır.  $\gamma$  üreteci yardımıyla

$$f = a_2 x - a_1 y, \quad g = a_3 x - a_1 t, \quad u = \theta(f, g) \quad (4.234)$$

değişmezleri bulunur. (4.234) dönüşümünün (4.221) denkleminde yerine yazılması durumunda

$$\begin{aligned} & -a_1 a_2 \theta_{fg} - a_1 a_3 \theta_{gg} + 6a_1 a_2^2 \theta_f \theta_{ff} + 8a_1 a_2 a_3 \theta_f \theta_{fg} + 2a_1 a_3^2 \theta_f \theta_{gg} + 4a_1 a_3^2 \theta_g \theta_{fg} \\ & + 4a_1 a_2 a_3 \theta_g \theta_{ff} + a_1 a_2^3 \theta_{fff} + 3a_1 a_2^2 a_3 \theta_{ffg} + 3a_1 a_2 a_3^2 \theta_{ffg} + a_1 a_3^3 \theta_{fgg} = 0 \end{aligned} \quad (4.235)$$

iki bağımsız değişkenli kısmi diferensiyel denklemin elde edilir. Burada  $f$  ve  $g$  bağımsız değişkenlerdir. Benzer şekilde iki boyutlu (4.235) denkleminin üreteçleri kullanılarak denklemin adi diferensiyel denkleme dönüştürülebilir. (4.235) denkleminin bir simetri üreteci

$$\mathbf{Y} = \xi^f(f, g, \theta) \frac{\partial}{\partial f} + \xi^g(f, g, \theta) \frac{\partial}{\partial g} + \eta(f, g, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.236)$$

şeklinde verilir. (4.235) denkleminin simetrilerini bulmak için (4.236) üretecinin 4. uzanımı (4.235) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}^{[4]}(-a_1 a_2 \theta_{fg} - a_1 a_3 \theta_{gg} + 6a_1 a_2^2 \theta_f \theta_{ff} + 8a_1 a_2 a_3 \theta_f \theta_{fg} + 2a_1 a_3^2 \theta_f \theta_{gg} + 4a_1 a_3^2 \theta_g \theta_{fg} \\ & + 4a_1 a_2 a_3 \theta_g \theta_{ff} + a_1 a_2^3 \theta_{fff} + 3a_1 a_2^2 a_3 \theta_{ffg} + 3a_1 a_2 a_3^2 \theta_{ffg} + a_1 a_3^3 \theta_{fgg})|_{(4.235)} = 0, \end{aligned} \quad (4.237)$$

ifadesi elde edilir. (4.237) denklemi açıldığında bir denklem elde edilir ve elde edilen bu denklemdeki terimler  $\theta$ 'nın türevlerine göre ayrılırsa

$$\eta_{\theta,g} = 0, \quad \eta_{\theta,\theta} = 0, \quad \xi_f^f = \frac{-2a_3^2\eta_g + 2a_2\eta_\theta}{a_2}, \quad \xi_f^g = 0, \quad \eta_f = \frac{-2a_3^2\eta_g + a_2\eta_\theta}{2a_2a_3}$$

$$\xi_g^f = \frac{2a_3^2\eta_g - 3a_2\eta_\theta}{a_3}, \quad \xi_g^g = -\eta_\theta, \quad \xi_\theta^f = 0, \quad \xi_\theta^g = 0 \quad (4.238)$$

belirleyici denklem sistemi elde edilir. (4.238) denklemi çözümlerse  $\xi^f, \xi^g, \eta$  değerleri

$$\eta = c_1\theta + \frac{c_1f}{2a_3} + h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right)$$

$$\xi^f = 2h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right)a_3 + 2c_1f - \frac{3c_1a_2g}{a_3} + c_3$$

$$\xi^g = -c_1g + c_2 \quad (4.239)$$

olarak verilir. Burada  $h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right)$  bir keyfi fonksiyon ve  $c_1, c_2, c_3$  keyfi sabit sayılardır. (4.239) sonuçları yardımıyla (4.236) üretici aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{Y} = \left(2h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right)a_3 + 2c_1f - \frac{3c_1a_2g}{a_3} + c_3\right) \frac{\partial}{\partial f}$$

$$+ (-c_1g + c_2) \frac{\partial}{\partial g} + \left(c_1\theta + \frac{c_1f}{2a_3} + h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right)\right) \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.240)$$

(4.240) üreticinde  $c_1 = 1$  ve  $c_2 = c_3 = h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right) = 0$  alınır

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{2a_3f - 3a_2g}{a_3} \frac{\partial}{\partial f} - g \frac{\partial}{\partial g} + \frac{2a_3\theta + f}{2a_3} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

(4.240) üreticinde  $c_2 = 1$  ve  $c_1 = c_3 = h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right) = 0$  alınır

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{\partial}{\partial g},$$

(4.240) üreticinde  $c_3 = 1$  ve  $c_1 = c_2 = h\left(\frac{a_2g - a_3f}{a_2}\right) = 0$  alınır

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{\partial}{\partial f},$$

(4.240) üreticinde  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  alınırsa

$$\mathbf{Y}_4 = 2h \left( \frac{a_2g - a_3f}{a_2} \right) a_3 \frac{\partial}{\partial f} + h \left( \frac{a_2g - a_3f}{a_2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (4.241)$$

elde edilir. (4.235) denkleminin  $\mathbf{Y}_3 = \frac{\partial}{\partial f}$  ve  $\mathbf{Y}_2 = \frac{\partial}{\partial g}$  öteleme simetrilerinin lineer birleşimi olan

$$\delta = b_1 \mathbf{Y}_3 + b_2 \mathbf{Y}_2 \quad (4.242)$$

üreticini ele alalım. Burada  $b_1, b_2$  sabit sayılardır.  $\delta$  üretici yardımıyla

$$z = b_2f - b_1g, \quad \theta = F(z) \quad (4.243)$$

değişmezleri bulunur. (4.243) dönüşümü (4.235) denkleminde yerine yazılması durumunda

$$\begin{aligned} & (a_1a_2b_1b_2 - a_1a_3b_1^2)F'' + (6a_1a_2^2b_2^3 - 12a_1a_2a_3b_1b_2^2 + 6a_1a_3^2b_1^2b_2)F'F'' \\ & + (a_1a_2^3b_2^4 - 3a_1a_2^2a_3b_2^3 + 3a_1a_2a_3^2b_2^2b_1^2 - a_1a_3^3b_2b_1^3)F'''' = 0 \end{aligned} \quad (4.244)$$

adi diferensiyel denklem elde edilir.

### 4.7.3. En basit denklem yöntemiyle çözümlerin bulunması

Bu bölümde (4.244) adi diferensiyel denkleminin çözümleri en basit denklem yöntemiyle elde edilerek (4.221) denkleminin çözümleri verilecektir.

#### Bernoulli denkleminin en basit denklem olarak kullanılması

(4.244) denkleminde  $F''''(z)$  ile  $F'(z)F''(z)$  terimleri arasında dengeleme yaparsak  $M = 1$  bulunur. Böylece (3.5) denkleminin sonucu olarak (4.244) denkleminin çözümü

$$F(z) = A_0 + A_1H(z) \quad (4.245)$$

biçiminde yazılabilir. (4.245) denklemi (3.6) denklemiyle birlikte (4.244) denkleminde yazıldığında ve daha sonra  $H^i$  fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlendiğinde  $A_0$  ve  $A_1$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

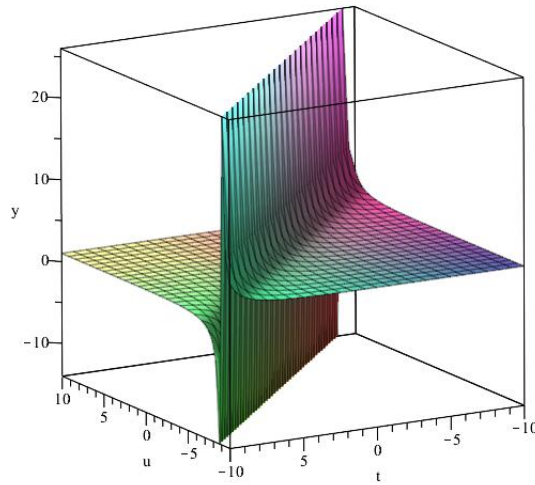
$$A_1 = -2ba_2b_2 + 2ba_3b_1 ,$$

$$a = \frac{\pm \sqrt{\frac{-b_1}{b_2}}}{a_2b_2 - a_3b_1} \quad (4.246)$$

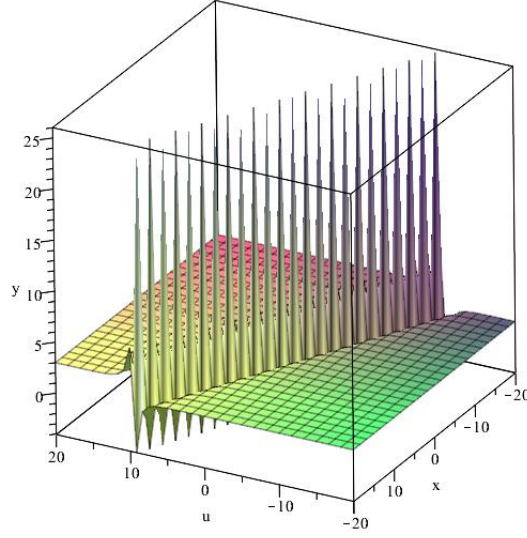
sonuçları elde edilir. Böylece (4.221) denkleminin çözümü

$$u(x, y, t) = A_0 + A_1 a \left\{ \frac{\cosh[a(z+C)] + \sinh[a(z+C)]}{1 - b \cosh[a(z+C)] - b \sinh[a(z+C)]} \right\} \quad (4.247)$$

olarak bulunur (Şekil 4.21, Şekil 4.22). Burada  $z = a_1b_1t + (b_2a_2 - b_1a_3)x - b_2a_1y$  ve  $C$  bir integral sabitidir.



**Şekil 4.21.** (4.221) denkleminin ilerleyen dalga çözüm grafiği. Burada  $b_1 = -1$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



**Şekil 4.22.** (4.221) denkleminin ilerleyen dalga çözüm grafiği. Burada  $b_1 = -1$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

#### Riccati denkleminin en basit denklem olarak kullanılması

Benzer şekilde (4.244) denklemindeki dengeleme sonucu  $M = 1$  bulunur. Böylece (3.5) denkleminin sonucu olarak (4.244) denkleminin çözümü

$$F(z) = A_0 + A_1 H(z) \quad (4.248)$$

şeklindedir. (4.248) denklemini (3.7) denklemiyle birlikte (4.244) denkleminde yazıldığında ve daha sonra  $H^i$  fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlendiğinde  $A_0$  ve  $A_1$  terimlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$A_1 = -(2a_2b_2 - 2a_3b_1)a ,$$

$$c = -\frac{(-a_2^2b_2^3 + 2a_2a_3b_1b_2^2 - a_3^2b_1^2b_2)b^2 - b_1}{(4a_2^2b_2^3 - 8a_2a_3b_1b_2^2 + 4a_3^2b_1^2b_2)a} .$$

Böylece (4.221) denkleminin çözümü

$$u(x,y,t) = A_0 + A_1 \left\{ -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh \left[ \frac{1}{2} \theta (z + C) \right] \right\}, \quad (4.249)$$

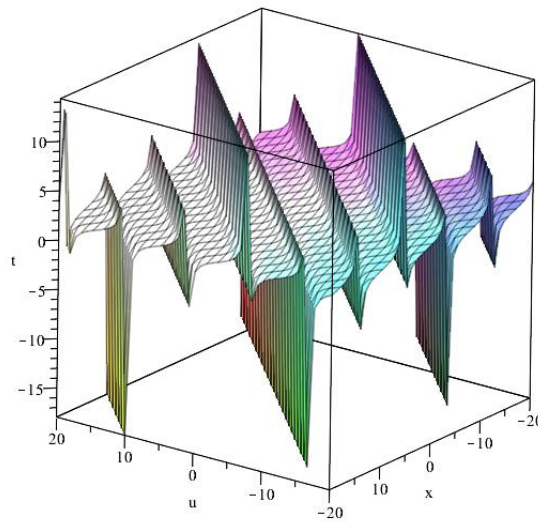
$$u(x,y,t) = A_0 + A_1 \left\{ -\frac{b}{2a} - \frac{\theta}{2a} \tanh\left(\frac{\theta z}{2}\right) + \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{\theta z}{2}\right)}{C \cosh\left(\frac{\theta z}{2}\right) - \frac{2a}{\theta} \sinh\left(\frac{\theta z}{2}\right)} \right\} \quad (4.250)$$

olarak bulunur (Şekil 4.23, Şekil 4.24, Şekil 4.25, Şekil 4.26). Burada  $C$  bir integral sabiti ve

$$z = a_1 b_1 t + (b_2 a_2 - b_1 a_3) x - b_2 a_1 y,$$

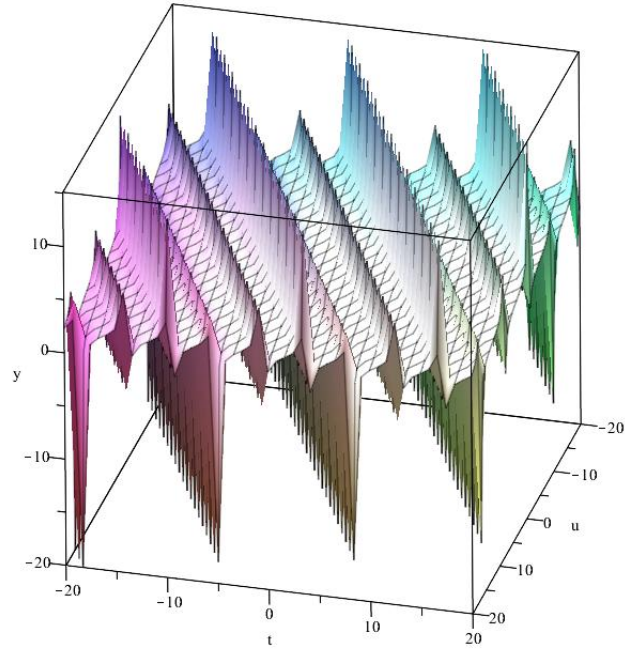
$$\theta^2 = b^2 - 4ac \quad (4.251)$$

olarak verilir.

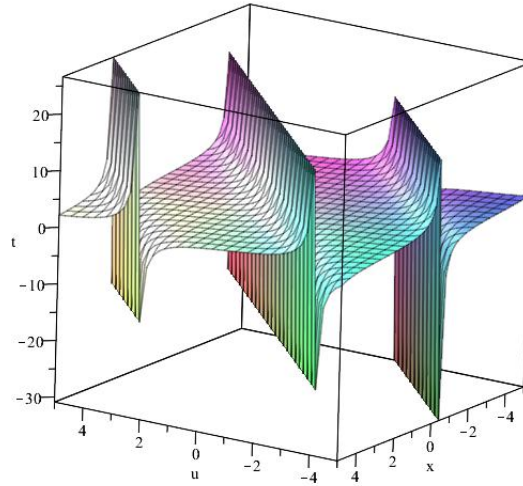


**Şekil 4.23.** (4.221) denkleminin (4.249) ilerleyen dalga çözüm grafiği. Burada  $b_2 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

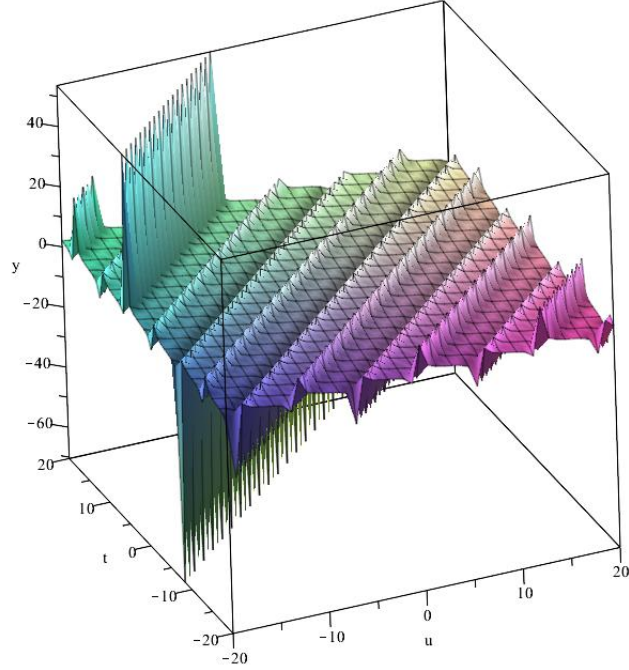




**Şekil 4.24.** (4.221) denkleminin (4.249) ilerleyen dalga çözüm grafiği. Burada  $b_2 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



**Şekil 4.25.** (4.221) denkleminin (4.250) ilerleyen dalga çözüm grafiği. Burada  $a_2 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır



**Şekil 4.26.** (4.221) denkleminin (4.250) ilerleyen dalga çözüm grafiği. Burada  $a_2 = 2$ , diğer tüm parametreler 1 olarak alınmıştır

#### 4.8. Lie simetri indirgemesi ve çözümlerinin zaman kesir mertebeli denklemlere uygulanması

7. mertebeden KdV denklem ailesi

$$u_t + au^3u_x + bu_x^3 + cuu_xu_{xx} + du^2u_{xxx} + eu_{2x}u_{3x} + fu_xu_{4x} + guu_{5x} + u_{7x} = 0 \quad (4.252)$$

olarak verilir (Goktas ve Hereman 1997, Yaşar ve ark. 2016). Burada  $a, b, c, d, e, f, g$  sıfırdan farklı sabit sayılardır. (4.252) denklemi ilk defa Pomeau ve ark. (1988) tarafından tanıtılmış ve denklemin yapısal kararlılığı tartışılmıştır. Ayrıca (4.252) denklemin fiziksel açıdan bakıldığında  $u = u(x, t)$  dalga boyu,  $x$  uzay değişkeni,  $t$  ise zaman değişkenine karşılık gelir. (4.252) denklemi akışkanlar dinamiği, kimyasal kinetik, plazma fiziği ve lazer optik gibi birçok bilimsel alanlarda karşımıza çıkar. Son olarak (4.252) denklemi doğrusal olmayan dalgaların saçılma veya yayılma etkilerini tasvir eder (Sharma ve Arora 2017).

(4.252) denklemindeki  $a, b, c, d, e, f, g$  sabit sayılarına değerler verilerek literatürde bilinen bazı denklemler elde edilir.

(4.252) denkleminde  $a = 140, b = 70, c = 280, d = 70, e = 70, f = 42, g = 14$  alındığında 7. mertebeden Lax denklemi (Goktas ve Hereman 1997)

$$u_t + 140u^3u_x + 70u_x^3 + 280uu_xu_{xx} + 70u^2u_{xxx} + 70u_{2x}u_{3x} + 42u_xu_{4x} + 14uu_{5x} + u_{7x} = 0, \quad (4.253)$$

$a = 2016, b = 630, c = 2268, d = 504, e = 252, f = 147, g = 42$  alındığında 7. mertebeden KK denklemi (Goktas ve Hereman 1997)

$$u_t + 2016u^3u_x + 630u_x^3 + 2268uu_xu_{xx} + 504u^2u_{xxx} + 252u_{2x}u_{3x} + 147u_xu_{4x} + 42uu_{5x} + u_{7x} = 0, \quad (4.254)$$

$a = 252, b = 63, c = 378, d = 126, e = 63, f = 42, g = 21$  alındığında 7. mertebeden SKI denklemi

$$u_t + 252u^3u_x + 63u_x^3 + 378uu_xu_{xx} + 126u^2u_{xxx} + 63u_{2x}u_{3x} + 42u_xu_{4x} + 21uu_{5x} + u_{7x} = 0 \quad (4.255)$$

elde edilir (Ito 1980, Goktas ve Hereman 1997, El-Sayed ve Kaya 2004, Wazwaz 2008, Shen ve ark. 2014, Yaşar ve ark. 2016).

Kesir mertebeli analiz, son zamanlarda özellikle bilim ve mühendislik alanlarının birçok dalında oldukça önemli bir rol oynar. Birçok önemli doğa olayında örneğin elektromanyetik, görüntü işleme, ses dağılımı ve elektro-kimya gibi alanlarda kesir mertebeli türevler ele alınan modeli daha önemli kılar. Kesir mertebeli modellerin faydalarından biri ise tam mertebeli modellere göre daha iyi olayı tasvir eder. Böylece ele alınan modelin önemini ve uygulanabilirliğini cazip kılar. Genellikle kesir mertebeli diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak oldukça güçtür. Ayrıca kesir mertebeli türevlerin bazı

özelliklerinin araştırılması tam mertebeli türevlere göre oldukça zordur (Hashemi 2018). Kesir mertebeli denklemlerin öneminden dolayı tam mertebeli (4.255) SKI denkleminin yerine zaman kesirli mertebeli SKI denklemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + 252u^3 u_x + 63u_x^3 + 378uu_x u_{xx} + 126u^2 u_{xxx} \\ + 63u_{2x}u_{3x} + 42u_x u_{4x} + 21uu_{5x} + u_{7x} = 0 \end{aligned} \quad (4.256)$$

ele alınacaktır (Yaşar ve ark. 2016). Burada  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) zaman kesir türevini ifade eden bir parametredir.

#### 4.8.1. Lie simetri analizi

(4.256) denkleminin Lie-nokta simetri üretici

$$X = \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.257)$$

şeklinde verilir. (4.256) denkleminin simetrilerini bulmak için (4.257) üreticinin 7. uzanımı (4.256) denkleminde uygulandığında

$$\begin{aligned} X^{[7]} \left( \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + 252u^3 u_x + 63u_x^3 + 378uu_x u_{xx} + 126u^2 u_{xxx} \right. \\ \left. + 63u_{2x}u_{3x} + 42u_x u_{4x} + 21uu_{5x} + u_{7x} \right) \Big|_{(4.256)} = 0 \end{aligned} \quad (4.258)$$

ifadesi elde edilir. (4.258) denklemini açıldığında bir denklem elde edilir ve elde edilen bu denklemden terimler  $u$ 'nun türevlerine göre ayrılırsa

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha(\eta) - u\partial_t^\alpha(\eta_u) + 252u^3 \eta_x + 126u^2 \eta_{xxx} + 21u\eta_{xxxxx} + \eta_{xxxxxx} = 0, \\ \binom{\alpha}{n} \partial_t^n(\eta_u) - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ 7\xi'(x) - \alpha\tau'(t) = 0, \\ \tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = \eta_{uu} = 0 \end{aligned} \quad (4.259)$$

belirleyici denklem sistemi elde edilir. (4.259) denklemi çözümlerse

$$\xi = \alpha xc_1 + c_2, \tau = 7tc_1, \eta = -2\alpha uc_1 \quad (4.260)$$

sonuçlarına varılır. Burada  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi sabitlerdir. (4.260) sonuçları yardımıyla (4.257) ürteçi

$$X = 7tc_1 \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha xc_1 + c_2) \frac{\partial}{\partial x} - 2\alpha uc_1 \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.261)$$

ifadesine dönüşür.

(4.261) üretecinde  $c_1 = 0$  ve  $c_2 = 1$  alırsa

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (4.262)$$

(4.261) üretecinde  $c_1 = 1$  ve  $c_2 = 0$  alırsa

$$X_2 = 7t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x} - 2\alpha u \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.263)$$

elde edilir.

#### 4.8.2. Lie simetri indirgemesi

Bu bölümde amacımız zaman kesir mertebeli (4.256) denkleminin (4.262) ve (4.263) üre-teçlerini kullanarak denklemi kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme dönüştürmektir.

**1. Durum:**  $X_1 = \partial/\partial x$  üretecine karşılık gelen değişmezler

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0} \quad (4.264)$$

yardımcı denkleminde bulunur. (4.264) denklemi çözümlenmesiyle

$$u = f(t) \quad (4.265)$$

değişmezi elde edilir. (4.265) denklemini (4.256) denkleminde yerine yazıldığında

$$\partial_t^\alpha f(t) = 0 \quad (4.266)$$

indirgenmiş kesir mertebeli adi diferensiyel denklem elde edilir ve bu ifade çözüldüğünde (4.256) denkleminin

$$u = a_1 t^{\alpha-1} \quad (4.267)$$

grup değişmez çözümü elde edilir. Burada  $a_1$  kefi integral sabitidir.

**2. Durum:**  $X_2 = 7t \partial / \partial t + \alpha x \partial / \partial x - 2\alpha u \partial / \partial u$  üreticine karşılık gelen değişmezler

$$\frac{dt}{7t} = \frac{dx}{\alpha x} = \frac{du}{-2\alpha u} \quad (4.268)$$

yardımcı denkleminde bulunur. (4.268) denklemini çözülmesiyle

$$u = t^{-2\alpha/7} g(\xi), \quad \xi = xt^{-\alpha/7}, \quad (4.269)$$

değişmezleri elde edilir. Burada  $g(\xi)$  keyfi bir fonksiyondur. (4.269) değişmezleri kullanılarak (4.256) denkleminin kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme dönüştüğünü bir teorem olarak verilecektir.

**Teorem:** (4.269) değişmezleri yardımıyla (4.256) denklemini

$$\begin{aligned} & \left( P_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{9\alpha}{7}, \alpha} g \right) (\xi) + 252g^3 g_\xi + 63g_\xi^3 + 378gg_\xi g_{\xi\xi} + 126g^2 g_{\xi\xi\xi} \\ & + 63g_{2\xi} g_{3\xi} + 42g_\xi g_{4\xi} + 21gg_{5\xi} + g_{7\xi} = 0 \end{aligned} \quad (4.270)$$

kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme dönüşür (Yaşar ve ark. 2016).

**İspat:**  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  olmak üzere (4.269) değişmezlerine karşılık gelen

Riemann-Liouville kesir türevi

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{2\alpha}{7}} g(xs^{-\frac{\alpha}{7}}) ds \right] \quad (4.271)$$

olarak verilir. Ayrıca (4.269) değişmezlerine dayanarak

$$v = \frac{t}{s} \quad (4.272)$$

dönüşümü kullanıldığında

$$ds = -\frac{t}{v^2} dv \quad (4.273)$$

ifadesi kolay bir şekilde elde edilir. (4.272) ve (4.273) ifadeleri (4.271) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{9\alpha}{7}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-(n+1-\frac{9\alpha}{7})} g(\xi v^{\frac{\alpha}{7}}) dv \right] \quad (4.274)$$

denklemini elde edilir. Erdelyi-Kober kesir integral operatörü kullanılırsa (4.274) denklemini

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{9\alpha}{7}} \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right] \quad (4.275)$$

denklemine dönüşür. (4.269) denkleminde  $\xi = xt^{-\frac{\alpha}{7}}$ ,  $\phi \in C^1(0, \infty)$  ifadesini gözönüne alarak (4.275) denkleminin sağ tarafını düzenlemek için

$$t \frac{\partial}{\partial t} \phi(\xi) = tx \left( -\frac{\alpha}{7} \right) t^{-\frac{\alpha}{7}-1} \phi'(\xi) = -\frac{\alpha}{7} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \phi(\xi) \quad (4.276)$$

ifadelerine ihtiyaç vardır. (4.276) sonucu kullanarak (4.275) denklemini

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{9\alpha}{7}} \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right] &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{n-\frac{9\alpha}{7}} \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right) \right] \\ &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ t^{n-\frac{9\alpha}{7}-1} \left( n - \frac{9\alpha}{7} - \frac{\alpha}{7} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right] \end{aligned} \quad (4.277)$$

denklemine dönüşür. Bu yerine koyma işlemi  $n - 1$  kez tekrar edilirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{9\alpha}{7}} \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right] &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( t^{n-\frac{9\alpha}{7}} \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right) \right] \\
&= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[ t^{n-\frac{9\alpha}{7}-1} \left( n - \frac{9\alpha}{7} - \frac{\alpha}{7} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right] \\
&\quad \vdots \\
&= t^{-\frac{9\alpha}{7}} \prod_{j=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{9\alpha}{7} + j - \frac{\alpha}{7} \xi \frac{d}{d\xi} \right) \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \quad (4.278)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.278) denkleminde Erdélyi–Kober kesir türev operatör tanımı kullanıldığında

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[ t^{n-\frac{9\alpha}{7}} \left( K_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{7}, n-\alpha} g \right) (\xi) \right] = t^{-\frac{9\alpha}{7}} \left( P_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{9\alpha}{7}, \alpha} g \right) (\xi) \quad (4.279)$$

denklemini elde edilir. Son olarak (4.279) denklemini (4.275) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\frac{9\alpha}{7}} \left( P_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{9\alpha}{7}, \alpha} g \right) (\xi)$$

zaman kesir türev ifadesi elde edilir. Böylece zaman kesir mertebeli (4.256) denklemini

$$\begin{aligned}
&\left( P_{\frac{7}{\alpha}}^{1-\frac{9\alpha}{7}, \alpha} g \right) (\xi) + 252g^3g_\xi + 63g_\xi^3 + 378gg_\xi g_{\xi\xi} + 126g^2g_{\xi\xi\xi} \\
&\quad + 63g_{2\xi}g_{3\xi} + 42g_\xi g_{4\xi} + 21gg_{5\xi} + g_{7\xi} = 0 \quad (4.280)
\end{aligned}$$

kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme dönüşmüş olur.

#### 4.8.3. Kuvvet serisi yöntemiyle çözümlerin bulunması

Bu bölümde (4.280) kesir mertebeli adi diferensiyel denkleminin çözümleri kuvvet serisi yöntemi (Baleanu ve ark. 2018a,b, Yusuf ve ark. 2018a,b,c, Tchier ve ark. 2018) yardımıyla elde edilerek (4.256) denkleminin çözümleri verilecektir.

(4.280) denkleminin kuvvet seri çözüm formu

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \quad (4.281)$$



olarak verilir. (4.280) denkleminde yer alan türev terimleri

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \xi^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \xi^n, \end{aligned} \quad (4.282)$$

$$\begin{aligned} g''(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \xi^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \xi^n, \end{aligned} \quad (4.283)$$

$$\begin{aligned} g'''(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n \xi^{n-3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) a_{n+3} \xi^n, \end{aligned} \quad (4.284)$$

$$\begin{aligned} g^{(IV)}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) a_n \xi^{n-4} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+4} \xi^n, \end{aligned} \quad (4.285)$$

$$\begin{aligned} g^{(V)}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) a_n \xi^{n-5} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+5} \xi^n, \end{aligned} \quad (4.286)$$

$$\begin{aligned} g^{(VI)}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) a_n \xi^{n-6} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+6} \xi^n, \end{aligned} \quad (4.287)$$

$$\begin{aligned} g^{(VII)}(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) a_n \xi^{n-7} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+7)(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+7} \xi^n \end{aligned} \quad (4.288)$$

olarak verilir. (4.281)-(4.288) seri açılımları (4.280) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 - \frac{2\alpha}{7} + \frac{n\alpha}{7})}{\Gamma(2 - \frac{9\alpha}{7} + \frac{n\alpha}{7})} a_n \xi^n + 252 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \xi^n \\
& + 63 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \xi^n \\
& + 378 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \xi^n \\
& + 126 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) a_{n+3} \xi^n \\
& + 63 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) a_{n+3} \xi^n \\
& + 42 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+4} \xi^n \\
& + 21 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+5} \xi^n \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} (n+7)(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) a_{n+7} \xi^n = 0 \quad (4.289)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. (4.289) denkleminde  $n = 0$  iken katsayıların karşılaştırılmasında

$$\begin{aligned}
a_7 = -\frac{1}{5040} & \left( \frac{\Gamma(2 - \frac{2\alpha}{7})}{\Gamma(2 - \frac{9\alpha}{7})} a_0 + 252 a_0^3 a_1 + 63 a_1^3 + 756 a_0 a_1 a_2 \right. \\
& \left. + 756 a_0^2 a_3 + 756 a_2 a_3 + 1008 a_1 a_4 + 2520 a_0 a_5 \right) \quad (4.290)
\end{aligned}$$

katsayısı elde edilirken  $n \geq 1$  iken katsayıların karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned}
a_{n+7} = -\frac{1}{(n+7)(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
\times \left( \frac{\Gamma(2 - \frac{2\alpha}{7} + \frac{n\alpha}{7})}{\Gamma(2 - \frac{9\alpha}{7} + \frac{n\alpha}{7})} a_n + 252 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (n+1-k) a_i a_{j-i} a_{k-j} a_{n+1-k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +21 \sum_{k=0}^n (n+5-k)(n+4-k)(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+5-k} \\
& \quad +378 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+2-k)(n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+2-k} \\
& \quad +126 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+3-k} \\
& \quad +63 \sum_{k=0}^n (n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+3-k} \\
& \quad +42 \sum_{k=0}^n (n+4-k)(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+4-k} \\
& \quad +63 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+1-k} \Big) \tag{4.291}
\end{aligned}$$

katsayısı elde edilir. Böylece (4.290) ve (4.291) sonuçları kullanılarak (4.280) denklemi için kuvvet seri çözümü

$$\begin{aligned}
g(\xi) &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6 + a_7 \xi^7 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+7} \xi^{n+7} \\
&= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6 - \frac{1}{5040} \left( \frac{\Gamma(2 - \frac{2\alpha}{7})}{\Gamma(2 - \frac{9\alpha}{7})} a_0 + 252 a_0^3 a_1 \right. \\
& \quad \left. + 63 a_1^3 + 756 a_0 a_1 a_2 + 756 a_0^2 a_3 + 756 a_2 a_3 + 1008 a_1 a_4 + 2520 a_0 a_5 \right) \xi^7 \\
& \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
& \quad \times \left( \frac{\Gamma(2 - \frac{2\alpha}{7} + \frac{n\alpha}{7})}{\Gamma(2 - \frac{9\alpha}{7} + \frac{n\alpha}{7})} a_n + 252 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (n+1-k) a_i a_{j-i} a_{k-j} a_{n+1-k} \right. \\
& \quad +21 \sum_{k=0}^n (n+5-k)(n+4-k)(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+5-k} \\
& \quad +378 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+2-k)(n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+2-k} \\
& \quad +126 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+3-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +63 \sum_{k=0}^n (n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+3-k} \\
& +42 \sum_{k=0}^n (n+4-k)(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+4-k} \\
& +63 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+1-k} \Big) \xi^{n+7} \tag{4.292}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.269) değişmezleri kullanılarak (4.256) denkleminin kuvvet seri çözüümü

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= a_0 t^{-\frac{2\alpha}{7}} + a_1 x t^{-\frac{3\alpha}{7}} + a_2 x^2 t^{-\frac{4\alpha}{7}} + a_3 x^3 t^{-\frac{5\alpha}{7}} + a_4 x^4 t^{-\frac{6\alpha}{7}} \\
& + a_5 x^5 t^{-\alpha} + a_6 x^6 t^{-\frac{8\alpha}{7}} - \frac{1}{5040} \left( \frac{\Gamma(2-\frac{2\alpha}{7})}{\Gamma(2-\frac{9\alpha}{7})} a_0 + 252 a_0^3 a_1 + 63 a_1^3 \right. \\
& \left. + 756 a_0 a_1 a_2 + 756 a_0^2 a_3 + 756 a_2 a_3 + 1008 a_1 a_4 + 2520 a_0 a_5 \right) x^7 t^{-\frac{9\alpha}{7}} \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
& \times \left( \frac{\Gamma(2-\frac{2\alpha}{7}+\frac{n\alpha}{7})}{\Gamma(2-\frac{9\alpha}{7}+\frac{n\alpha}{7})} a_n + 252 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (n+1-k) a_i a_{j-i} a_{k-j} a_{n+1-k} \right. \\
& + 21 \sum_{k=0}^n (n+5-k)(n+4-k)(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+5-k} \\
& + 378 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+2-k)(n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+2-k} \\
& + 126 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+3-k} \\
& + 63 \sum_{k=0}^n (n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+3-k} \\
& + 42 \sum_{k=0}^n (n+4-k)(n+3-k)(n+2-k)(n+1-k) a_k a_{n+4-k} \\
& \left. + 63 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (n+1-k) a_j a_{k-j} a_{n+1-k} \right) x^{n+7} t^{-\frac{\alpha(n+9)}{7}} \tag{4.293}
\end{aligned}$$

elde edilir.

## 5. SONUÇ

Bu tezde temel olarak tam ve kesir mertebeli lineer olmayan oluşum türü denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında oldukça kullanışlı ve etkili olan metotlar verilmiştir. Ayrıca bu metotların kullanılması sonucu birbirinden farklı ve fizik alanında önemli bir yere sahip olan çözüm tipleri sunulmuştur.

Bu tez elde edilen sonuçlara bakıldığında çok sayıda ve birbirinden farklı çözüm tipleri elde edilmiştir. Bu çözümler şu şekildedir: ilerleyen dalga çözümü, knoidal dalga çözümü, sinoidal dalga çözümü, bir soliton çözümü, iki soliton çözümü, üç soliton çözümü, kompleksiton çözümler, çoklu soliton çözümler, Lump tipindeki çözümler, rasyonel çözümler, soliton çözümler, poziton çözümler, negaton çözümler, rasyonel-soliton-poziton etkileşim çözümler ve son olarak kuvvet seri çözümlerdir. İlerleyen dalga çözümü, knoidal dalga çözümü ve sinoidal dalga çözümleri akışkanlar dinamiğinde kullanılan lineer olmayan periyodik dalga çözümleridir. Bir soliton, iki soliton ve üç soliton çözümler eksponansiyel fonksiyonların polinomları olarak ifade edilen çoklu soliton tipinde çözümlerdir ve bu çözümler faz değişimleri ile birlikte genel dalga frekanslarını içeren çözümlerdir. Kompleksiton tipindeki çözümler hem eksponansiyel fonksiyon hem de trigonometrik fonksiyon birleşimini içeren çözümlerdir. Bu çözümler yeni tarzdaki belirgin ilerleyen dalga hızlarına sahip olan çözümlerdir. Ayrıca yeni test fonksiyonu kullanılarak elde edilen çoklu soliton çözümler, kompleksiton tipindeki çözümleri de kapsayan çözümlerdir. Lump çözümler uzayda tüm yönlerde yerel olan analitik rasyonel çözümlerdir. Soliton ve Lump çözümler arasındaki farka bakıldığında soliton çözümler belli yönlerde yerel olmasına karşın Lump çözümler uzayda tüm yönlerde yerel olan bir çeşit rasyonel fonksiyon çözümlerdir. Soliton çözümler negaton çözümlerin özel bir halidir. Negaton çözümler eksponansiyel fonksiyon çözümlerini içerirken poziton çözümler trigonometrik fonksiyon çözümlerini içerir. Son olarak rasyonel-soliton-poziton etkileşim çözümler daha genel ve karmaşık çözümlerdir.

Ayrıca bu tezde, son yıllarda oldukça popüler olan ve bir çok araştırmacı tarafından ele alınan yüksek boyutlu ve yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum türü denklemler ele

alındı. Bu denklemler şu şekildedir: (1+1) boyutlu bir genelleştirilmiş KdV denklemi, (2+1) boyutlu SK denklemi, bir yeni genelleştirilmiş (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklemi, (2+1) boyutlu yerel olmayan Ito denklemi, (2+1) boyutlu kırılğan soliton denklemi ve yedinci mertebeden kesirli SKI denklemleridir.

Yedinci mertebeden tam mertebeli SKI denklemi birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (El-Sayed ve Kaya 2004, Wazwaz 2008, Shen ve ark. 2014). El-Sayed ve Kaya (2004) Adomian decomposition metodunu kullanarak denklemin başlangıç koşullarına karşılık gelen analitik çözümler olan tek dalga çözümleri ve nümerik çözümler elde etmişlerdir. Ayrıca elde edilen nümerik çözümler analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Wazwaz (2008) tanh-coth metodunu ve Hirota metodunu kullanarak sırasıyla denklemin tek soliton çözümler ve N soliton (çoklu soliton) çözümler elde etti. Shen ve ark. (2014) Bell polinom yaklaşımını kullanarak denklemin bilinear formunu, Bäcklund dönüşümlerini, Lax çiftlerini ve sonsuz sayıdaki korunum kanunlarını elde ettiler. Şu ana kadar yapılmış bu gelişmelere rağmen denklem hep tam mertebeli anlamında ele alınmıştır. Bu tez çalışması da ilk defa denklemi kesir mertebeli anlamında ele aldığından dolayı bu boşluğu doldurmuştur. Bu yeni modelin (4.262) ve (4.263) Lie simetri üreteçleri ilk defa bu tez çalışmasında elde edilmiştir. Ayrıca bu üreteçler kullanılarak denklem daha önceden hiçbir yerde rapor edilmeyen kesir mertebeli adi diferensiyel denkleme dönüştürüldü. Bu dönüşüm teorem olarak verilmiş ve ispatlanmıştır. Son olarak kuvvet serisi metodu yardımıyla elde edilen (4.293) kuvvet seri çözümleri ilk defa burada bulunmuştur. Burada elde edilen analitik çözümler olan kuvvet seri çözümleri yeni çözümlerdir.

(3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklem birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (Zhaqilao 2013, Wazwaz 2015, Liu ve Liu 2016, Shi ve Zhang 2017, Zhang ve Ma 2017). Zhaqilao (2013) bir basit sembolik hesaplama algoritması kullanarak denklemin agresif dalga çözümlerini ve rasyonel çözümlerini elde etti. Wazwaz (2015) basitleştirilmiş Hirota yaklaşımını kullanarak denklemin çoklu soliton çözümlerini elde etti. Liu ve Liu (2016) homoclinic test yaklaşımını ve üç dalga metodunu kullanarak denklemin sırasıyla kink breather soliton çözümlerini ve çoklu soliton çözümlerini elde ettiler. Shi ve Zhang (2017) Hirota bilinear yöntemini kullanarak denklemin yüksek mertebeli ag-

resif dalga çözümlerini elde ettiler. Zhang ve Ma (2017) lineer superposition prensibini kullanarak denklemin rezonant çoklu dalga çözümlerini elde ettiler. Yapılan bu çalışmalara bakıldığında denklemin kendisi ele alınarak denklemin oldukça önemli çözümleri elde edildi. Bu tez çalışmasında ise şu ana kadar yapılan çalışmaların aksine denklemin kendisi ele alınmamıştır. Denklem genelleştirilmiş Hirota bilineer denklemi kullanılarak daha önceden literatürde olmayan ve ilk defa bu tez çalışmasında verilen yeni bir geliştirilmiş (3+1) boyutlu lineer olmayan oluşum türü denklem elde edildi. Lump tipi çözüm algoritması kullanılarak yeni denklemin (4.108)-(4.129) sonuçlarına karşılık gelen (4.131) Lump tipi çözümleri elde edildi. Elde edilen bu çözümler yeni çözümlerdir.

(2+1) boyutlu SK denklemi birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (Hong-Yan ve Hong-Qing 2008, Wazwaz 2011, Shi ve Li 2012, Lü 2014, Jia ve ark. 2017, Huang ve Chen 2017, Liu 2018). Hong-Yan ve Hong-Qing (2008) Lie simetri analizi yöntemini kullanarak denklemin Lie nokta üreteçlerini elde ettiler ve üreteçler kullanılarak denklemin simetri indirgemelerini ve değişmez çözümlerini elde ettiler. Elde edilen değişmez çözümler keyfi fonksiyonlar içerdiğinden dolayı direk yöntemi kullanılarak denklemin simetri dönüşümlerini elde ettiler ve böylece sonsuz sayıda çözümler elde etmişlerdir. Wazwaz (2011) basitleştirilmiş Hirota bilineer metodunu kullanarak denklemin çoklu soliton (N soliton) çözümlerini elde etti. Shi ve Li (2012) bir yeni test fonksiyon yöntemini kullanarak denklemin dark soliton, periyodik soliton, çift lineer soliton, çift periyodik soliton, üç farklı lineer soliton çözümlerini elde ettiler. Lü (2014) Hirota bilineer metodunu kullanarak denklemin bir bilineer Bäcklund dönüşümünü elde etti ve Gauge dönüşümünü kullanarak denklemin yeni bir bilineer Bäcklund dönüşümünü buldu. Bu bulunan yeni bilineer Bäcklund dönüşümüne perturbasyon tekniğini uygulayarak denklemin soliton çözümlerini buldu. Jia ve ark. (2017) denklemin Hirota bilineer formunu elde ettiler ve elde edilen bu forma Wronskiyen yöntemini uygulayarak denklemin soliton çözümlerini bulmuşlardır. Huang ve Chen (2017) denklemin Hirota bilineer formunu elde ettiler ve elde edilen bu forma Lump çözüm algoritmasını uygulayarak denklemin önce Lump çözümlerini daha sonra ise etkileşim çözümlerini buldular. Liu (2018) denklemin Hirota bilineer formunu elde etti ve elde edilen bu forma Lump çözüm algoritmasını uygulayarak denklemin iki farklı etkileşim çözümlerini buldu. Bunlardan ilki rasyonel fonksiyon ile sinüs

ve kosinüs trigonometrik fonksiyonlarını içeren etkileşim çözümlerdir. Diğer etkileşim çözüm ise rasyonel fonksiyon ile çift exponansiyel fonksiyonlarını içeren etkileşim çözümlerdir.

Yapılan bu çalışmalara bakıldığında özellikle Shi ve Li (2012), Lü (2014), Jia ve ark. (2017), Huang ve Chen (2017), Liu (2018) çalışmalarında yazarlar çözümler bulmak için denklemin kendisini değil de denklemin Hirota bilineer formunu inşaa ettikten sonra çözüm aşamasına geçmektedirler. Bu tez çalışmasında ise şu ana kadar yapılan çalışmaların aksine denklemin Hirota bilineer formuna gereksinim duyulmadan çözüm aşamasına direkt geçilmektedir. Ma ve ark. (2010) tarafından keşfedilen çoklu exponansiyel fonksiyon yöntemini geliştirerek ve kullanarak denklemin bir soliton, iki soliton ve üç soliton çözümlerine karşılık gelen (4.28), (4.30), (4.33) sonuçları elde edildi. Elde edilen bu sonuçlar Wazwaz (2011) ve Lü (2014) çalışmalarıyla karşılaştırıldığında aynı sonuçlar bulunmuştur. Şu önemli noktayı belirtmek gerekirse, Ma ve ark. (2010) tarafından keşfedilen çoklu exponansiyel fonksiyon yönteminin geliştirilmemiş halini burada bahsi geçen denkleme uygulandığında özellikle iki soliton ve üç soliton çözümleri elde edilemez. Ma ve ark. (2010) tarafından bulunan bu yöntemde bahsi geçen (4.29) iki soliton çözüm varsayımını ve (4.31) üç soliton çözüm varsayımını daha da genelleştirerek denklemin soliton çözümlerine ulaşmış olduk. Böylece yöntem daha fazla lineer olmayan oluşum türü denklemlere uygulanma fırsatına sahip olmuş olur.

Ayrıca bu tez çalışmasında göz önüne alınan denklemin soliton çözümlerini bulmakla yetinmedik geliştirilmiş rasyonel fonksiyon metodunu kullanarak denklemin kompleksiton çözümlerine karşılık gelen (4.50), (4.51), (4.54), (4.55), (4.56), (4.57), (4.60), (4.61), (4.62), (4.63), (4.66), (4.67), (4.68), (4.69) sonuçlarını da elde ettik. Bu metodu kullanmak için denklemin Hirota bilineer formunu elde ettik. Elde edilen bu sonuçları Shi ve Li (2012) çalışmasıyla karşılaştırıldığında sadece üç tane sonuç aynı çözümlere karşılık gelir ve elde ettiğimiz diğer sonuçlar yeni sonuçlardır. Shi ve Li (2012) çalışmasında  $\xi_3 = 0$  alınrsa bizim bu tez çalışmasında elde ettiğimiz (4.57), (4.63), (4.69) sonuçlarla örtüşmektedir.



Genelleştirilmiş KdV denklemi birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (Marchant 2000, Wazwaz 2007, Miao ve ark. 2014, Wazwaz 2016). Marchant (2000) denklemin nümerik çözümlerini ve korunum kanunlarını elde etti. Wazwaz (2007) geliştirilmiş tanh fonksiyon metodunu kullanarak denklemin dark soliton çözümlerini elde etti. Aynı Wazwaz (2016) Hirota'nın basitleştirilmiş metodunu kullanarak denklemin çoklu soliton ( $N$  soliton) çözümlerini de elde etti. Son olarak Miao ve ark. (2014) denklemin sadece Hirota bileer formunu elde etmişlerdir. Denklem Hirota bileer formunu elde etmelerine rağmen denklemin bileer Bäcklund dönüşümlerini, Lax çiftlerini ve korunum kanunlarını elde edememişlerdir. Bu tez çalışmasında ise en basit denklem metodunu kullanarak denklemin ilerleyen dalga çözümü, knoidal dalga çözümü ve sinoidal dalga çözümlerine karşılık gelen (4.10), (4.12), (4.13), (4.14), (4.16) sonuçları elde edildi. Üstelik elde edilen bu sonuçlarla yetinmedik ve yeni test fonksiyon yöntemini kullanarak denklemin çoklu soliton çözümlerine karşılık gelen (4.78), (4.80), (4.82), (4.84), (4.86), (4.88), (4.90) sonuçları elde edildi.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar Wazwaz (2007), (2016) çalışmalarıyla karşılaştırıldığında (4.10) sonuçları  $\cosh$  ve  $\sinh$  hiperbolik fonksiyonlarını birlikte içeren yeni etkileşim çözümlerdir. (4.12) sonuçlarına karşılık gelen tanh hiperbolik fonksiyon çözümleri Wazwaz (2007) çalışmasında elde edilen çözümlerle örtüşmektedir. (4.13) sonuçları  $\cosh$ ,  $\sinh$ ,  $\tanh$  ve  $\operatorname{sech}$  hiperbolik fonksiyonlarını birlikte içeren yeni etkileşim çözümleridir. (4.14) sonuçları sırasıyla  $\omega \rightarrow 1$  ve  $\omega \rightarrow 0$  iken  $\operatorname{sech}$  hiperbolik ve  $\cos$  trigonometrik fonksiyonlarını içeren yeni çözümlerdir. Benzer şekilde (4.16) sonuçları  $\omega \rightarrow 1$  iken tanh hiperbolik fonksiyonunu içeren çözümler, Wazwaz (2007) çalışmasında elde edilen çözümlerle örtüşmektedir. Son olarak hiperbolik, çift eksponansiyel ve trigonometrik fonksiyonlarını içeren (4.84) sonuçları (4.78), (4.80), (4.82), (4.86), (4.88), (4.90) sonuçlarını da kapsayan yeni etkileşim çözümlerdir.

(2+1) boyutlu kırılğan soliton denkleminin öncelikle Lie simetri analizi ve Lie simetri indirgemeleri elde edildi. Daha sonra en basit denklem metodunu kullanarak denklemin ilerleyen dalga çözümlerine karşılık gelen (4.247), (4.249) ve (4.250) sonuçları elde edildi. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar Wazwaz (2010) çalışmasıyla karşılaştırıldığında

(4.247) sonuçları  $\cosh$  ve  $\sinh$  hiperbolik fonksiyonlarını birlikte içeren yeni etkileşim çözümleridir. (4.249) sonuçlarına karşılık gelen  $\tanh$  hiperbolik fonksiyon çözümleri yeni çözümlerdir. Son olarak (4.250) sonuçları  $\cosh$ ,  $\sinh$ ,  $\tanh$  ve  $\operatorname{sech}$  hiperbolik fonksiyonlarını birlikte içeren yeni etkileşim çözümleridir.

Genelleştirilmiş (2+1) boyutlu Ito denkleminin öncelikle Hirota bilineer formu ve Wronskiyen determinant şartları elde edildi. Daha sonra Wronskiyen determinant algoritması kullanılarak denklemin rasyonel, soliton, positon, negaton ve etkileşim çözümlerine karşılık gelen (4.166), (4.170), (4.174), (4.182), (4.183), (4.185), (4.190), (4.191), (4.193), (4.198), (4.199), (4.201), (4.214), (4.215), (4.216), (4.217) sonuçları elde edildi. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar Adem (2016) çalışmasıyla karşılaştırıldığında (4.166), (4.170), (4.174) rasyonel çözümler yeni çözümlerdir. (4.182), (4.183), (4.198), (4.199) sonuçlarına karşılık gelen  $\tanh$  ve  $\coth$  hiperbolik fonksiyon çözümleri yeni çözümlerdir. (4.185), (4.201) sonuçları  $\cosh$ ,  $\sinh$  hiperbolik fonksiyonlarını birlikte içeren yeni etkileşim çözümleridir. (4.190), (4.191) sonuçlarına karşılık gelen  $\tan$  ve  $\cot$  trigonometrik fonksiyon çözümleri yeni çözümlerdir. (4.193) sonuçları  $\cos$ ,  $\sin$  trigonometrik fonksiyonlarını birlikte içeren yeni etkileşim çözümleridir. Son olarak (4.217) sonuçları (4.214), (4.215), (4.216) sonuçlarını da kapsayan yeni etkileşim çözümleridir.

## KAYNAKLAR

- Adem, A.R., Khalique, C.M. 2013.** Exact solutions and conservation laws of a two-dimensional integrable generalization of the Kaup-Kupershmidt equation. *Journal of Applied Mathematics*, 2013: 1-6.
- Adem, A.R., Khalique, C.M. 2016a.** Symbolic Computation of Conservation Laws and Exact Solutions of a Coupled Variable-Coefficient Modified Korteweg–de Vries System. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 56(4): 650-660.
- Adem, A.R., Khalique, C.M. 2016b.** Conserved quantities and solutions of a (2+ 1)-dimensional Haragus-Courcelle–Il’ichev model. *Computers & Mathematics with Applications*, 71(5): 1129-1136.
- Adem, A.R. 2016.** The generalized (1+ 1)-dimensional and (2+ 1)-dimensional Ito equations: multiple exp-function algorithm and multiple wave solutions. *Computers & Mathematics with Applications*, 71(6): 1248-1258.
- Anonim, 2017.** Matter Wave Solitons. <http://atomcool.rice.edu/research/boson/matter-wave-solitons/>-(Erişim tarihi 13.3.2017).
- Anonim, 2017.** Korteweg–de Vries equation. [https://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg%E2%80%9CdeVries\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg%E2%80%9CdeVries_equation)-(Erişim tarihi 13.3.2017).
- Adem, A.R., Yildirim, Y., Yaşar E. 2019a.** Complexiton solutions and soliton solutions: (2+1)-dimensional Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation. *Pramana - Journal of Physics*, 92(3): 36.
- Adem, A.R., Yildirim, Y., Yaşar E. 2019b.** Soliton solutions to the non-local Boussinesq equation by multiple exp-function scheme and extended Kudryashov’s approach. *Pramana - Journal of Physics*, 92(2): 24.
- Bluman, G.W., Kumei, S. 1989.** Symmetries and differential equations, Applied Mathematical Sciences, 81, Springer-Verlag, New York.
- Bilge, S., Chaolu, T. 2010.** An extended simplest equation method and its application to several forms of the fifth-order KdV equation. *Applied Mathematics and Computation*, 216(11): 3146-3153.
- Baleanu, D., Yusuf, A., Aliyu, A.I. 2018a.** Space-time fractional Rosenou-Haynam equation: Lie symmetry analysis, explicit solutions and conservation laws. *Advances in Difference Equations*, 1(46): 1-14.
- Baleanu, D., Yusuf, A., Aliyu, A.I. 2018b.** Lie symmetry analysis and conservation laws for the time fractional simplified modified Kawahara equation. *Open Physics*, 16(1): 302-310.
- Cauchy, A.L. 1844.** Exercice d’analyse et de physique mathématique. Paris Bachelier, Paris, France, 442 pp.
- Cheviakov, A.F. 2007.** GeM software package for computation of symmetries and conservation laws of differential equations. *Computer physics communications*, 176:(1) 48-61.
- Cheviakov, A.F. 2010.** Symbolic computation of local symmetries of nonlinear and linear partial and ordinary differential equations. *Mathematics in Computer Science*, 4(2-3): 203-222.
- Cheng, J., Mei, J., Wang, Z., Zhang, H. 2014.** Wronskian Solutions of Two Equations and Young Diagram Proof. *Journal of Mathematical Research with Applications*, 34(5): 561-574.

- Cheng, L., Zhang, Y. 2017.** Lump-type solutions for the  $(4+1)$ -dimensional Fokas equation via symbolic computations. *Modern Physics Letters B*, 31(25): 1-9.
- El-Sayed, S.M., Kaya, D. 2004.** An application of the ADM to seven-order Sawada–Kotera equations. *Applied mathematics and computation*, 157(1): 93-101.
- Fourier, J. 1822.** Théorie analytique de la chaleur. Firmin Didot, Paris, France, 639 pp.
- Freeman, N.C., Nimmo, J.J.C. 1983.** Soliton solutions of the Korteweg de Vries and the Kadomtsev–Petviashvili equations: the Wronskian technique. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 389(1797): 319-329.
- Goktas, U., Hereman, W. 1997.** Symbolic computation of conserved densities for systems of nonlinear evolution equations.
- Geng, X. 2003.** Algebraic-geometrical solutions of some multidimensional nonlinear evolution equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(9): 1-10.
- Gazizov, R.K., Kasatkin, A.A., Lukashchuk, S.Y. 2007.** Continuous transformation groups of fractional differential equations. *Vestnik Usatu*, 9(3) 1-21.
- Gazizov, R.K., Kasatkin, A.A., Lukashchuk, S.Y. 2009.** Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Physica Scripta*, 2009(136): 1-5.
- Güner, Ö. 2014.** Kesir Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri. *Doktora Tezi*, ESOGÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Eskişehir.
- Hirota, R. 2004.** The direct method in soliton theory. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 214 pp.
- Hong-Yan, Z., Hong-Qing, Z. 2008.** Symmetry Analysis and Exact Solutions of  $(2+1)$ -Dimensional Sawada–Kotera Equation. *Communications in Theoretical Physics*, 49(2): 263-267.
- Huang, L.L., Chen, Y. 2017.** Lump solutions and interaction phenomenon for  $(2+1)$ -dimensional Sawada–Kotera equation. *Communications in Theoretical Physics*, 67(5): 473-478.
- Hashemi, M.S. 2018.** Invariant subspaces admitted by fractional differential equations with conformable derivatives. *Chaos, Solitons & Fractals*, 107: 161-169.
- Ito, M. 1980.** An extension of nonlinear evolution equations of the K-dV (mK-dV) type to higher orders. *Journal of the Physical Society of Japan*, 49(2): 771-778.
- Ibragimov, N.H. 1995.** CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol 1–3, CRC Press, Boca Raton, Florida.
- Jian-Ping, W. 2011.** A new Wronskian condition for a  $(3+1)$ -dimensional nonlinear evolution equation. *Chinese Physics Letters*, 28(5): 1-3.
- Jian-Ping, W., Xian-Guo, G. 2013.** New Wronskian Representation of Solution for a Variable-Coefficient Kadomtsev–Petviashvili Equation. *Chinese Physics Letters*, 30(6): 1-4.
- Jefferson, G.F., Carminati, J. 2014.** FracSym: automated symbolic computation of Lie symmetries of fractional differential equations. *Computer Physics Communications*, 185(1): 430-441.
- Jia, S.L., Gao, Y.T., Ding, C.C., Deng, G.F. 2017.** Solitons for a  $(2+1)$ -dimensional Sawada–Kotera equation via the Wronskian technique. *Applied Mathematics Letters*, 74: 193-198.
- Kovalevskaya, S.V. 1875.** Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 80: 1-32.

- Korteweg, D.J., De Vries, G. 1895.** On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. *Philosophical Magazine*, 240(39): 422–443.
- Konopelchenko, B.G., Dubrovsky, V.G. 1984.** Some new integrable nonlinear evolution equations in  $2+1$  dimensions. *Physics Letters A*, 102(1-2): 15-17.
- Kiryakova, V.S. 1993.** Generalized fractional calculus and applications. CRC press.
- Kudryashov, N.A. 2005a.** Exact solitary waves of the Fisher equation. *Physics Letters A*, 342(1-2): 99-106.
- Kudryashov, N.A. 2005b.** Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 24(5): 1217-1231.
- Kudryashov, N.A. 2012.** One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6): 2248-2253.
- Liu, H., Li, J., Liu, L. 2010.** Lie symmetry analysis, optimal systems and exact solutions to the fifth-order KdV types of equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 368(2): 551-558.
- Lü, X. 2014.** New bilinear Bäcklund transformation with multisoliton solutions for the  $(2+1)$ -dimensional Sawada–Kotera model. *Nonlinear Dynamics*, 76(1): 161-168.
- Liu, N., Liu, Y. 2016.** New multi-soliton solutions of a  $(3+1)$ -dimensional nonlinear evolution equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 71(8): 1645-1654.
- Lü, X., Chen, S.T., Ma, W.X. 2016.** Constructing lump solutions to a generalized Kadomtsev–Petviashvili–Boussinesq equation. *Nonlinear Dynamics*, 86(1): 523-534.
- Liu, J.G. 2018.** Interaction behaviors for the  $(2+1)$ -dimensional Sawada–Kotera equation. *Nonlinear Dynamics*, 93:(2) 741-747.
- Marchant, T.R. 2000.** Solitary wave interaction for the extended BBM equation. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 456(1994): 433-453.
- Ma, W.X. 2004.** Wronskians, generalized Wronskians and solutions to the Korteweg–de Vries equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 19(1): 163-170.
- Ma, W.X., You, Y. 2005.** Solving the Korteweg-de Vries equation by its bilinear form: Wronskian solutions. *Transactions of the American mathematical society*, 357(5): 1753-1778.
- Ma, W.X., Li, C.X., He, J. 2009.** A second Wronskian formulation of the Boussinesq equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70(12): 4245-4258.
- Ma, W.X., Huang, T., Zhang, Y. 2010.** A multiple exp-function method for nonlinear differential equations and its application. *Physica Scripta*, 82(6): 1-12.
- Ma, W.X. 2011.** Generalized bilinear differential equations. *Studies in Nonlinear Sciences*, 2(4): 140-144.
- Ma, W.X., Abdeljabbar, A., Asaad, M.G. 2011.** Wronskian and Grammian solutions to a  $(3+1)$ -dimensional generalized KP equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(24): 10016-10023.
- Ma, W.X., Zhu, Z. 2012.** Solving the  $(3+1)$ -dimensional generalized KP and BKP equations by the multiple exp-function algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 218(24): 11871-11879.
- Ma, H., Bai, Y. 2013.** Wronskian determinant solutions for the  $(3+1)$ -dimensional Boiti–Leon–Manna–Pempinelli equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1(5):

1-18.

- Miao, Q., Wang, Y., Chen, Y., Yang, Y. 2014.** PDEBellIII: A Maple package for finding bilinear forms, bilinear Backlund transformations, Lax pairs and conservation laws of the KdV-type equations. *Computer Physics Communications*, 185(1): 357-367.
- Ma, W.X. 2015.** Lump solutions to the Kadomtsev–Petviashvili equation. *Physics Letters A*, 379(36): 1975-1978.
- Ma, W.X. 2016.** Lump-type solutions to the (3+ 1)-dimensional jimbo-miwa equation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 17(7-8): 355-359.
- Ma, W.X., Zhou, Y., Dougherty, R. 2016.** Lump-type solutions to nonlinear differential equations derived from generalized bilinear equations. *International Journal of Modern Physics B*, 30(28n29): 1-10.
- Newton, I. 1671.** The Method of Fluxions and Infinite Series. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 66 pp.
- Nimmo, J.J.C., Freeman, N.C. 1983.** A method of obtaining the N-soliton solution of the Boussinesq equation in terms of a Wronskian. *Physics Letters A*, 95(1): 4-6.
- Naz, R., Mahomed, F.M., Mason, D.P. 2008.** Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics. *Applied Mathematics and Computation*, 205(1): 212-230.
- Najafi, M., Arbabi, S., Najafi, M. 2013.** Wronskian determinant solutions of the (2+ 1)-dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli equation. *Int. J. Adv. Math. Sci*, 1(1): 8-11.
- Olver, P.J. 1993.** Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, Berlin, Germany, 107 pp.
- Peano, G. 1886.** Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine. *Atti Accad. Sci.*, 21: 437-445.
- Pomeau, Y., Ramani, A., Grammaticos, B. 1988.** Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 31(1): 127-134.
- Podlubny, I. 1999.** Fractional Differential Equations, San Diego, CA: Academic.
- Radha, R., Lakshmanan, M. 1995.** Dromion like structures in the (2+ 1)-dimensional breaking soliton equation. *Physics Letters A*, 197(1): 7-12.
- Shi, Y., Li, D. 2012.** New exact solutions for the (2+ 1)-dimensional Sawada–Kotera equation. *Computers & Fluids*, 68: 88-93.
- Sahadevan, R., Bakkyaraj, T. 2012.** Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg–de Vries equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 393(2): 341-347.
- Shen, Y.J., Gao, Y.T., Yu, X., Meng, G.Q., Qin, Y. 2014.** Bell-polynomial approach applied to the seventh-order Sawada–Kotera–Ito equation. *Applied Mathematics and Computation*, 227: 502-508.
- Su, J., Xu, G. 2016.** New Exact Solutions for the (3+1)-Dimensional Generalized BKP Equation. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2016: 1-9.
- Singh, M., Gupta, R.K. 2016a.** Bäcklund transformations, Lax system, conservation laws and multisoliton solutions for Jimbo–Miwa equation with Bell-polynomials. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37: 362-373.
- Singh, M., Gupta, R.K. 2016b.** Exact solutions for nonlinear evolution equations using novel test function. *Nonlinear Dynamics*, 86(2): 1171-1182.

- Shi, Y.B., Zhang, Y. 2017.** Rogue waves of a (3+ 1)-dimensional nonlinear evolution equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 44: 120-129.
- Sharma, A., Arora, R. 2017.** Solutions of Fisher-Type, Cubic-Boussinesq and 7th-Order Caudrey–Dodd–Gibbon Equations by MVIM. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 3(4): 3857-3875.
- Tang, Y., Ma, W.X., Xu, W. Gao, L. 2011.** Wronskian determinant solutions of the (3+ 1)-dimensional Jimbo–Miwa equation. *Applied Mathematics and Computation*, 217(21): 8722-8730.
- Tang, Y., Tu, J., Ma, W.X. 2012.** Two new Wronskian conditions for the (3+ 1)-dimensional Jimbo–Miwa equation. *Applied Mathematics and Computation*, 218(20): 10050-10055.
- Tang, Y., Su, P. 2012.** Two Different Classes of Wronskian Conditions to a (3 + 1)-Dimensional Generalized Shallow Water Equation. *ISRN Mathematical Analysis*, 2012: 1-10.
- Tchier, F., Yusuf, A., Aliyu, A.I., Baleanu, D. 2018.** Time fractional third-order variant Boussinesq system: Symmetry analysis, explicit solutions, conservation laws and numerical approximations. *The European Physical Journal Plus*, 133(6): 240.
- Whitham, G.B. 1974.** Linear and nonlinear waves.
- Wazwaz, A.M. 2007.** The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations. *Applied Mathematics and Computation*, 184(2): 1002-1014.
- Wazwaz, A.M. 2008.** The Hirota's direct method and the tanh–coth method for multiple-soliton solutions of the Sawada–Kotera–Ito seventh-order equation. *Applied Mathematics and Computation*, 199(1): 133-138.
- Wazwaz, A.M. 2010.** Integrable (2+ 1)-dimensional and (3+ 1)-dimensional breaking soliton equations. *Physica Scripta*, 81(3): 1-9.
- Wazwaz, A.M. 2011.** Multiple soliton solutions for (2+ 1)-dimensional Sawada–Kotera and Caudrey–Dodd–Gibbon equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(13): 1580-1586.
- Wang, G.W., Liu, X.Q., Zhang, Y.Y. 2013.** Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(9): 2321-2326.
- Wang, G.W., Xu, T. Z. 2014.** Invariant analysis and exact solutions of nonlinear time fractional Sharma–Tasso–Olver equation by Lie group analysis. *Nonlinear Dynamics*, 76(1): 571-580.
- Wazwaz, A.M. 2015.** New (3+ 1)-dimensional nonlinear evolution equations with mKdV equation constituting its main part: multiple soliton solutions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 76: 93-97.
- Wazwaz, A.M. 2016.** The simplified Hirota's method for studying three extended higher-order KdV-type equations. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 1(3): 181-185.
- Yaşar, E., Yıldırım, Y., Khalique, C.M. 2016.** Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventh-order time fractional Sawada–Kotera–Ito equation. *Results in physics*, 6: 322-328.
- Yang, J.Y., Ma, W.X. 2016.** Lump solutions to the BKP equation by symbolic computation. *International Journal of Modern Physics B*, 30(28n29): 1-8.
- Yang, J.Y., Ma, W.X. 2017.** Abundant lump-type solutions of the Jimbo–Miwa equation in (3+ 1)-dimensions. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(2): 220-225.

- Yildirim, Y., Yasar, E., Adem, A.R. 2017.** A multiple exp-function method for the three model equations of shallow water waves. *Nonlinear Dynamics*, 89(3): 2291-2297.
- Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2017a.** An extended Korteweg–de Vries equation: multi-soliton solutions and conservation laws. *Nonlinear Dynamics*, 90(3): 1571-1579.
- Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2017b.** Multiple exp-function method for soliton solutions of nonlinear evolution equations. *Chinese Physics B*, 26(7): 1-10.
- Yıldırım, Y., Yasar, E. 2017c.** Wronskian solutions of (2+ 1) dimensional non-local ito equation. *Communications Series A1 Mathematics & Statistics*, 67(2): 1-9.
- Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2018.** A (2+ 1)-dimensional breaking soliton equation: Solutions and conservation laws. *Chaos, Solitons & Fractals*, 107: 146-155.
- Yusuf, A., Aliyu, A.I., Baleanu, D. 2018a.** Lie symmetry analysis and explicit solutions for the time fractional generalized Burgers–Huxley equation. *Optical and Quantum Electronics*, 50(2): 94-100.
- Yusuf, A., Aliyu, A.I., Baleanu, D. 2018b.** Time-fractional Cahn–Allen and time-fractional Klein–Gordon equations: Lie symmetry analysis, explicit solutions and convergence analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 493: 94-106.
- Yusuf, A., Aliyu, A.I., Baleanu, D. 2018c.** Lie symmetry analysis, explicit solutions and conservation laws for the space–time fractional nonlinear evolution equations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 496: 371-383.
- Zabusky, N.J., Kruskal, M.D. 1965.** Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6): 240-245.
- Zhaqilao. 2013.** Rogue waves and rational solutions of a (3+ 1)-dimensional nonlinear evolution equation. *Physics Letters A*, 377(42): 3021-3026.
- Zhang, H., Ma, W.X. 2014.** Extended transformed rational function method and applications to complexiton solutions. *Applied Mathematics and Computation*, 230: 509-515.
- Zayed, E.M., Al-Nowehy, A.G. 2015.** The multiple exp-function method and the linear superposition principle for solving the (2+ 1)-dimensional Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff equation. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 70(9): 775-779.
- Zhang, Y., Xiang, W. 2015.** Wronskian and Grammian Solutions to the (3+ 1)-Dimensional BKP Equation. *In International Mathematical Forum*, 10(5): 237-246.
- Zhang, Y., Dong, H., Zhang, X., Yang, H. 2017.** Rational solutions and lump solutions to the generalized (3+ 1)-dimensional Shallow Water-like equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(2): 246-252.
- Zhang, H.Q., Ma, W.X. 2017.** Resonant multiple wave solutions for a (3+ 1)-dimensional nonlinear evolution equation by linear superposition principle. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(10): 2339-2343.



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yakup YILDIRIM  
Doğum Yeri ve Tarihi : ŞANLIURFA 01.01.1990  
Yabancı Dili : İNGİLİZCE

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bursa Cumhuriyet Lisesi (2007)  
Lisans : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2011)  
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı (2015)  
Doktora : Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2015-Mayıs 2019)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

İletişim : yakupyildirim110@gmail.com

Yayımları :

**Yaşar, E., Yıldırım, Y., Khalique, C.M. 2016.** Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the seventh-order time fractional Sawada–Kotera–Ito equation. *Results in physics*, 6: 322-328.

**Yıldırım, Y., Yaşar, E., Adem, A.R. 2017.** A multiple exp-function method for the three model equations of shallow water waves. *Nonlinear Dynamics*, 89(3): 2291-2297.

**Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2017.** An extended Korteweg–de Vries equation: multi-soliton solutions and conservation laws. *Nonlinear Dynamics*, 90(3): 1571-1579.

**Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2017.** Multiple exp-function method for soliton solutions of non-linear evolution equations. *Chinese Physics B*, 26(7): 1-10.

**Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2017.** Wronskian solutions of (2+ 1) dimensional non-local ito equation. *Communications Series A1 Mathematics & Statistics*, 67(2): 1-9.

**Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2018.** A (2+ 1)-dimensional breaking soliton equation: Solutions and conservation laws. *Chaos, Solitons & Fractals*, 107: 146-155.

**Adem, A.R., Yıldırım, Y., Yaşar E. 2019.** Complexiton solutions and soliton solutions: (2+1)-dimensional Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation. *Pramana - Journal of Physics*, 92(3): 36.

**Adem, A.R., Yıldırım, Y., Yaşar E. 2019.** Soliton solutions to the non-local Boussinesq equation by multiple exp-function scheme and extended Kudryashov’s approach. *Pramana - Journal of Physics*, 92(2): 24.

**Yaşar, E., Yıldırım, Y., Adem, A.R. 2018.** Perturbed optical solitons with spatio-temporal dispersion in (2+1)-dimensions by extended Kudryashov method. *Optik*, 158: 1-14.

**Yıldırım, Y., Çelik, N., Yaşar, E. 2017.** Nonlinear Schrödinger equations with spatio-temporal dispersion in Kerr, parabolic, power and dual power law media: A novel extended Kudryashov’s algorithm and soliton solutions. *Results in Physics*, 7: 3116-3123.

**Yaşar, E., Yıldırım, Y., Yaşar, E. 2018.** New optical solitons of space-time conformable fractional perturbed Gerdjikov-Ivanov equation by sine-Gordon equation method. *Results in Physics*, 9: 1666-1672.

**Yaşar, E., Yıldırım, Y., Giresunlu, I.B. 2016.** First integrals and analytical solutions of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient. *Pramana - Journal of Physics*, 87(2): 18.

**Yasar, E., Yıldırım, Y. 2015.** A procedure on the first integrals of second-order nonlinear ordinary differential equations. *The European Physical Journal Plus*, 130(12): 240.

**Yaşar, E., Yıldırım, Y. 2018.** On the Lie symmetry analysis and traveling wave solutions of time fractional fifth-order modified Sawada-Kotera equation. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 8(2): 411-416.

**Yasar, E., Yıldırım, Y. 2017.** Symmetries and conservation laws of evolution equations via multiplier and nonlocal conservation methods. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(1): 128-136.

