

COBB - DOUGLAS FONKSİYONU

Dr. Hasan Aşkan

A. GİRİŞ

Marshallian tipteki üretim fonksiyonları içinde, en fazla bilinip kullanılan bu üretim fonksiyonu ismini, araştırmalarının sonucunda, özelliklerini bulan profesör Douglas ile, özelliklerinin ifade edilebilmesi için matematiksel şekil ileri süren matematikçi Cobb'dan almıştır. Fonksiyon daha önce de Wicksteed¹ tarafından ileri sürülmüş ise de geniş kabul edilebilirliğini araştırmalarıyla fonksiyona büyük destek sağlayan Douglas'a borçludur. Douglas tarafından tahmin edilen orijinal fonksiyon (1) de yazılan şekildedir. Fonksiyonun belirttiği ilişki, Douglas'ın ücre-

$$Q = AL^\alpha K^{1-\alpha} \quad (1)$$

tin toplam üretim içindeki payını araştırırken bulunmuştur. Douglas, işgücüne yapılan toplam ücret ödemelerini, üretimin sabit bir oranı olarak bulmuştur (2). Öte yandan bilindiği üzere, tam rekabet koşullarında kârını maksimize etmeyi amaçlayan firma, ücret işgücünün marjinal ve-

$$\left(\frac{w}{p}\right) L = \alpha Q \quad (2)$$

rimliliği eşitliğini gerçekleştireceğinden (2) tekrar (3) de görüldüğü üzere yazılabilir. Problem bu sonucu veren fonksiyonun geriye gidilerek bu-

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha \frac{Q}{L} \quad (3)$$

lunmasıdır. Cobb'un katkısı $Q = AL^\alpha K^{1-\alpha}$ şeklindeki fonksiyonu ileri sürmesidir. Fonksiyonun işgücüne göre kısmi türevi alındığında (4) te bulunan sonuç bize fonksiyonun izlenen ilişkiyle tamamiyle uyum içinde

¹ P. Wicksteed, «Co-ordination of the Laws of Distribution», *The Economic Journal*, C. IV, (1894), s. 305-313.

$$\frac{\partial Q}{\partial Q} = \alpha AL\alpha^{-1} K^{1-\alpha} = AL^{-\alpha} \left(\frac{\alpha}{L}\right) K^{1-\alpha} = \frac{Q}{L} \alpha \quad (4)$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla, fonksiyonun Cobb şekli izlenen gerçekleri yansıtır. Ve fonksiyon üretim faktörleri, başına üretim miktarını verecek şekilde düzenlenirse kısaca (5) de görüldüğü üzere yazılabilir. $\emptyset(x) = Ax^{(1-\alpha)}$ dan elde edilen (6) de görülen eşitlikler ve $\emptyset'(x)$ nin x sıfıra yaklaşırken sonsuza ve x sonsuza yaklaşırken de sıfıra yaklaşması,

$$y = Ax^{(1-\alpha)} \quad (5)$$

fonksiyonun «iyi davranan» bir fonksiyon olduğunu belirler.

$$\emptyset'(x) = \frac{A(1-\alpha)}{x} > 0, \quad \emptyset''(x) = \frac{-A(1-\alpha)}{x^2} < 0 \quad (6)$$

B. FONKSİYONUN PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Fonksiyonun parametrelerinin tahmini için de (2) deki eşitlikten yararlanılabilir. Eşitlikteki $\frac{\omega}{P}$, Q ve L nin değerleri izlenebileceğinden α için tahminde bulunulabilir. Bir tahminden bahsedilmesinin nedeni ise, $\frac{\omega}{P}$ ile Q — L oranı arasındaki ilişkinin **deterministik** olmayıp **stokastik** olmasındandır. Şayet **deterministik** bir eşitlik olsaydı, α nın değeri $\frac{\omega}{P}$, Q ve L in izlenen birer değerinden bulunabilir ve diğer bütün değerleri için geçerli olurdu. İlişkinin **stokastik** oluşu ise, $\frac{\omega}{P}$, Q ve L in farklı değerleri için α infarklı değerlere sahip olmasına neden olur ve α için en iyi değerini seçimi ekonometrisyenlerin bir işi olarak kalır. Kısaca $\frac{\omega}{P}$, α (Q/L) eşitliğinin yazılması demek (7) deki eşitliklerin yazılması demektir. Eşitliklerde e ile α in en iyi tahmininden, $\frac{\omega}{P}$ nin

$$\frac{\omega}{p} = \alpha \frac{Q}{p} + e \quad \text{veya} \quad \frac{\omega}{p} = \alpha \frac{Q}{L} e \quad (7)$$

sapması belirtilir. Sapmaya ölçme hataları veya $\frac{\omega}{P}$ ye etki eden önem-

leri az olan değişkenlerin ihmal edilmeleri neden olabilir. Eşitliklerdeki α tipik olarak regresyon analizinden yararlanılarak tahmin edilebilir². α için tahmin elde edildikten sonra, orijinal fonksiyona dönülüp Q ve $(L\alpha K^{1-\alpha})$ değişkenler olarak alınarak bu defa da A, regresyon analizinden yararlanılarak tahmin edilir. α ve A'nın belirtilen yöntemle tahmin edilmeleri, L ve K'nın üsleri toplamının bire eşit olması sonucunu doğurur. (2) den α değerinin tahmini, orijinal fonksiyonun A'yı verebilmesini sağlayacak şekilde K'yı sınırlar. Yalnız unutulmaması gerekir ki, $AL\alpha K^\beta$ gibi fonksiyonun başka şekilleri de, orijinal koşulun gerçekleşmesine olanak verirler. Dolayısıyla $\beta = (1 - \alpha)$ test edilmemiş bulunmaktadır. β 'nin bu sınırlandırılması, şayet fonksiyon $Q = AL\alpha K^\beta$ olarak tahmin edilirse test edilebilir. Çünkü, bu şekilde yazılan fonksiyonda, β herhangi bir değeri alabileceğinden $\alpha + \beta = 1$ hipotezi de test edilebilir. Fakat bu şekilde fonksiyon, **stokastik** ilişkinin parametrelerinin tahmini için kullanılan doğrusal regresyon tekniklerine uygun değilse de eşitlik (8) de görüldüğü üzere doğrusallaştırılarak probleminden kaçınılır. Eşitlikteki $\ln Q$, $\ln K$ ve $\ln L$ için izlenen değerler yerine konulduktan

$$\ln Q = \ln A + \beta \ln K + \alpha \ln L \quad (8)$$

sonra A, B ve α 'nın değerleri için bilinen yoldan tahminler elde edilir. Bu fonksiyona birçok testler uygulanmıştır. $(\alpha + \beta)$ değeri yaklaşık olarak bir alındığında, çeşitli sektör ve ülkeler için yapılan tahminleri iyi sonuç vermiştir³.

C. FONKSİYONUN İKAME ELASTİKİYETİ

Üretim fonksiyonları bilindiği üzere, eşürün eğrilerinin (K, L) düzeyinde şekil ve yerlerini belirtirler. Üretim miktarı herhangi bir seviyede (Q) sabitleştirilirse, eşürün eğrilerinin şekli araştırılabilir. Fonksiyonun toplam türevinden, (9) daki sonuç elde edilir. Şayet eğrinin eğimi

$$Q = AK^{-\alpha} (1 - \alpha) L^\alpha dk + AK^{(1-\alpha)} \alpha L^{(\alpha-1)} dL$$

$$Q = (1 - \alpha) \frac{Q}{K} dK + \alpha \frac{Q}{L} dL$$

$$\frac{dK}{dL} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{K}{L} \quad (9)$$

eğrinin eğimi ($MTIH_{kl}$), kapital-işgücü oranı arttığında artarsa, eğri ori-

2 R.J. Wonnacott ve T.H. Wonnacott, *Econometrics*, 1. B., New York John Wiley and Sons, Inc., 1970, s. 93-95.

3 David F. Heathfield, *Production Functions*, I.B., London The Macmillan Press Ltd., 1971, s. 34.

jine dışbükey olur. α ve $(1-\alpha)$ nın işaretleri aynı olduklarından da dışbükeylik gerçekleşir. Eşürün eğrilerinin dışbükeyliği ise, bilindiği üzere azalan verimlerin varlığı ile ilgilidir ve azalan verimler işgücü ve kapitalin kullanımı miktarı arttıkça sırasıyla $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ nın azalmasını gerektirir. Gerçekten de, (10) daki eşitliklerden görüleceği üzere her iki

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = A\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = A(1-\alpha)\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha} \quad (10)$$

faktörün marjinal verimliliği, faktörlerin pozitif miktarlarda kullanımlarında her terim pozitif olduğundan daima pozitiftir ve kullanım miktarı sıfırdan sonsuza giderken de **monotonik** olarak azalır (11, 12). Açık-

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{(1-\alpha)} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\alpha(1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-(\alpha+1)} \quad (12)$$

tır ki, $Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$ şeklinde, azalan verimlerin varlığı için β ve α parametrelerinin ikisinin de sıfır ile bir aralığında bulunması gerekir. Şayet birden büyükler ise, işgücü ve kapitalin kullanım miktarlarındaki artış sırasıyla $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ in (13) te yazılan eşitlerinin artışına neden olduğundan, artan verimlerle karşılaşılması bulunulur. Negatif olmaları

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = AK^{\beta}\alpha L^{\alpha-1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = A\beta K^{\beta-1}AL^{\alpha} \quad (13)$$

halinde ise, $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ nın değerleri negatif olarak azalır. Fonksiyonun kısmi türevlerindeki negatif azalma, öte yandan artan verimlerin varlığını işaret eder.

Burada sırası gelmişken, neden α ya faktör yoğunluğu parametresi denildiği araştırılabilir. Kapitalin işgücü için olan marjinal teknik ikame haddi (s), (10) daki eşitliklerden kolayca elde edilir (14).

$$S = \frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \left(\frac{K}{L}\right) \quad (14)$$

Eşitlikten görüleceği üzere s için verilen herhangi bir değerde α nın büyük değeri küçük kapital-işgücü oranının varlığına neden olur. Dolayısıyla, bir üretim noktasındaki α nın büyük değeri, daha işgücü yoğun üretim faaliyetini gerektirir.

- Eşürün eğrisinin şeklini, ikame elastikiyeti parametresinin belirteceği bilinir. s nin eşitinin, kapital-işgücü oranına (x) göre türevi alındığın-

da (15) deki eşitlik bulunur. Eşitlik tersine çevrilip $s - x$ oranı ile çar-

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \quad (15)$$

pıldığında görülür ki, ikame elastikiyetinin değeri bire eşittir (16). Fonksiyonun ikame elastikiyetinin değeri, faktörlerin birleşim oranlarından

$$\frac{dx}{ds} \frac{s}{x} = \sigma = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \left(\frac{K}{L}\right) \left(\frac{L}{K}\right) = 1 \quad (16)$$

ve ölçüğe verimlilikten bağımsız olarak birdir. Fonksiyonun bu özelliği, işgücü ve kapitalin arzlarındaki nispi değişmelerde nispi payların sabit kalmasını garanti etmesinden çok bilinen bir özelliğidir.

Denge koşullarında bilindiği üzere, $MTIH_{kl} w-r$ oranına eşittir ve ölçüğe göre verimlerin sabit olması halinde (17) de görülen eşitlik elde edilir. Bu eşitliğin solu, üretimden işgücünün aldığı payın kapitalin al-

$$\frac{wL}{rK} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (17)$$

dığı paya oranını verir. Görüldüğü üzere faktörlerin payları oranı, fonksiyona hakim olan teknoloji tarafından tayin edilen sabit üretim elastikiyetlerinin oranına eşittir. α n β ya göre nispi büyüklüğü işgücünün payının kapitalinkine oranla yüksek olmasına neden olur. Teknolojik ilerlemenin söz konusu olmamasında ,faktörlerin nispi fiyatlarında oluşan orantılı değişiklik faktörlerin nispi kullanımlarında fiyat etkisini gideren orantılı değişmeye neden olarak faktörlerin nispi paylarını etkilemez. İkame elastikiyetinin değerinin sabit fakat bir olmaması halinde ise, arzlarındaki değişiklikler faktörlerin nispi paylarını etkiler (16) daki eşitlik düzenlenir. İki yanının entegrali alındığında c nin entegralinin sabitini belirttiği s için (18) deki eşitlik bulunur. s nin eşiti $w-r$ oranı yerine

$$\int \frac{ds}{s} = \frac{1}{\sigma} \int \frac{dx}{x} \quad ; \quad \ln s = \frac{1}{\sigma} \ln x + \ln c$$

$$s = cx^{1/\sigma} \quad (18)$$

konulduktan sonra, her iki yanı $x^{-1} (=L/K)$ lie çarpıldığında (19) daki sonuç elde edilir. Açıktır ki, ikame elastikiyetinin değeri bire eşit olduğunda, eşitlikten $C - D$ fonksiyonuna sahip olduğunda bulunan sonuç elde edilir. Bir olmaması halinde ise, faktör arzlarındaki verilen deği-

şiklik sonucunda değerin birden büyük veya küçük oluşuna göre faktörün üretimdeki nispi payı artar veya eksilir. Üretim elastikyetleri ve ikame elastikyeti değerlerini sabit olarak vermeyen C — D fonksiyonunun başka şekillerine de rastlanmaktadır. Fonksiyonun özelliklerine ancak belirli aralıklarda sahip olan bu fonksiyonlara bazı misaller verilebilir.

$$\frac{w}{r} x^{-1} = c x^{-1/\sigma} \quad (19)$$

Fonksiyonun diğer bir özelliği daha vardır ki, fazla arzulanmayan

$$Q = K^{(1-\alpha)} L^\alpha e^{\beta L^4} \quad (20)$$

$$Q = A K^\alpha L^\beta e^{(\gamma \ln L \ln K)^5} \quad (21)$$

bir özelliğidir. C — D fonksiyonunda olduğu gibi marjinal verimlilikler daima pozitif ise, faktörlerden birinin miktarı sabit tutulurken diğerinin miktarı sonsuza arttırıldığında, miktarı arttırılan faktörün marjinal verimliliği sifıra yaklaşır (22). Şayet bu limitler geçerliyse c_1 ve c_2 nin po-

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial Q}{\partial L} = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial Q}{\partial K} = 0 \quad (22)$$

zitif sabitler olduğu (23) deki sonuçlar elde edilir. Bunlar C — D fonksi-

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Q = c_1 \quad \text{veya} \quad \lim_{K \rightarrow \infty} Q = c_2$$

yonuna uygulandığında, α sıfırdan büyük birden küçük olduğundan $\partial Q/\partial L$ nin limiti, L sonsuzuna yaklaşırken sıfır bulunmasına karşın (24), L sonsuza yaklaşırken Q nun limiti sonsuz bulunur (25). Bu sonuçların bulunması ise fonksiyonda bir iç tutarsızlığın varlığı sanısına neden olur.

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial Q}{\partial L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \alpha A \left(\frac{L}{K} \right)^{(\alpha-1)} = 0 \quad (24)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Q = \lim_{L \rightarrow \infty} A L^\alpha K^{(1-\alpha)} = \infty \quad (25)$$

- 4 C.E. Ferguson ve R.W. Pfons, «Aggregate Production Function and Relative Factor Shares», International Economic Review, C. III, (1962) s. 335.
5 P.K. Newman ve R.C. Read, «Production Functions with Restricted Input Shares», International Economic Review, C. 11, (1961), s. 128.

(kapitalin kullanılan miktarı da sonsuz olarak arttırıldığında, kapitalin marjinal verimliliği için de aynı sonuç bulunur.) Gerçekte ise, tutarsızlık sanısı işgücünün kullanım miktarı arttığında sağladığı faydanın, üretimin marjinal verimlilik sıfır olmadan farklaşmasına olanak vereceği bilinirse, kendiliğinden ortadan kalkar.

D. ÖLÇMEĞE GÖRE VERİMLER

Şimdi sıra eşürün eğrilerini (K, L) düzeyinde yerleştirilmesine gelmiş bulunmaktadır. Bu iş, belirli bir üretim miktarının eşürün eğrisinin yeri saptandıktan sonra diğer üretim miktarlarının eşürün eğrilerinin yerlerinin nispi olarak saptanmasıyla gerçekleştirilir. Eşürün eğrisinin yerinin saptanması için uygun yöntem, üretim faktörlerinin eşit miktarda kullanıldığında gerekli olan kapital miktarının saptanmasıdır. Eşürün eğrisinin ifadesi, $\bar{Q} = AL^\alpha K^{(1-\alpha)}$ olduğundan (26) daki eşitlik yazılabilir.

$$\bar{Q} = A \frac{K}{K^\alpha} L^\alpha = AK \left(\frac{L}{K} \right)^\alpha \quad (26)$$

Dolayısıyla, L — K oranı bir olduğunda, (\bar{K}) , (\bar{Q}/A) ya ve K ve L ye eşit olduğundan \bar{L} de (\bar{Q}/A) ya eşit bulunur. Görüldüğü üzere, A'nın değeri büyüdükçe, verilen üretim miktarının üretilmesi için daha az miktarda kapital ve işgücü gerekmesi, katsayının «verimlilik parametresi» olarak adlandırılmasına neden olmuştur. Bu parametre şüphesiz işgücü, kapital ve üretimin ölçülmesi için seçilen birimden etkilenir. Ayrıca açıktır ki A'nın değeri sabit kalırken, \bar{Q} belirttiği üretim miktarının iki misline çıkarılması, gerekli olan kapital ve işgücü miktarının da iki misline çıkartır. Ve böylece diğer eşürün eğrilerinin yerleri de nispi olarak saptanmış bulunur. $2\bar{Q}$ miktarındaki üretimi belirleyen nokta orijinden iki misli uzakta bulunacak ve iki misli kapital ve işgücü kullanımını gerektirecektir. Bunun tersi düşünüldüğünde, acaba işgücü ve kapitalin kullanım miktarı iki misline çıkarılarak üretim ölçeğinin arttırılması iki misli üretim elde edilmesine neden olur mu? Bilindiği üzere bu gerçekleşirse, ölçeğe göre sabit olan verimlerle karşılaşmış bulunulur. α ve β değerlerinin herhangi bir kıymeti aldıkları genel durumda ise, işgücü ve kapitalin kullanım miktarındaki değişmelerin üretim seviyesindeki etkileri araştırılabilir. $Q = AK^\beta L^\alpha$ fonksiyonundan toplam türevin eşiti (27) de görüldüğü üzere bulunduğundan dQ için (28) de görülen eşitlik elde edilir. Bilindiği üzere ölçeğe göre verimliliklerin incelenebilmesi için dK/K ve dL/L nin birbirlerine eşit olması gerekir. Ve dolayısıyla (28) den, dQ/Q

$$dQ = A\beta K^{(\beta-1)} L^\alpha dK + AK^\beta \alpha L^{(\alpha-1)} dL \quad (27)$$

$$dQ = \frac{\beta Q}{K} dK + \frac{\alpha Q}{L} dL \quad (28)$$

nün eşiti (29) da görüldüğü üzere elde edilir. $(\beta + \alpha)$ bire eşitse dQ/Q , dK/K eşitliği derhal bulunur. Değerinin birden büyük veya küçük olu-

$$\begin{aligned} dQ &= \beta \frac{Q}{K} dK + \alpha Q \frac{dK}{K} \\ dQ &= \frac{dK}{K} Q(\beta + \alpha) \\ \frac{dQ}{Q} &= \frac{dK}{K} (\beta + \alpha) \end{aligned} \quad (29)$$

şunda ise, ölçeğe göre artan veya azalan verimlerle karşılaşılır. Gerçekten de α ve β ayrı ayrı işgücü ve kapitalin miktarında oluşturulan yüzde değişmelerin üretim miktarında neden oldukları yüzde değişiklikleri temsil ederler. Üretim faktörlerinin marjinal verimlilikleri, kendi parametreleriyle ortalama verimliliklerinin çarpımına eşit olduğundan α ve β , (30) da da görüldüğü üzere sırasıyla üretimin işgücü ve kapitale göre kısmi elastikiyetleridir. İki parametre birlikte alınınca da işgücü ve kapital

$$\alpha = \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{L}{Q}, \quad \beta = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{Q} \quad (30)$$

miktarında verilen yüzde değişme için üretim seviyesinde oluşan toplam yüzde değişme ölçülür. Burada belirtmelidir ki, üretimin ölçeğindeki değişiklik sonucunda oluşan ölçeğe verimlilikte değişme ile teknolojik ilerlemelerin neden olduğu değişiklikleri birbirinden ayırtetme C — D üretim fonksiyonları için güçtür. Bunun unutulmaması koşuluyla denilebilir ki, yaklaşık olarak üretim elastikiyetleri toplam teknolojik seviyedeki küçük değişmelerden etkilenir. Ve üretim fonksiyonlarında bu nedenle oluşan değişiklikler faktörlerin üretim elastikiyetlerini etkilemediklerinden aşağıda görülecek olan yansız teknolojik ilerleme sınıfındadırlar.

Maliyet eğrileriyle ölçeğe göre verimlerin çeşitleri arasındaki ilişki de, üretim faktörlerinin fiyatları sabit alındığında toplam maliyetler yalnızca üretim miktarının fonksiyonu olduklarından, fonksiyonun elde edilmesi oldukça karışık olmasına karşın bulanabilir. Gelişim yolunun,

yukarıda (17) de görülen tanımı ile fonksiyonun logaritmaları alınıp eş-anlı denklem çifti olarak yazılırsa (31) de görülen denklem çifti elde edilir. Bu çift L ve K değerleri için çözüldüğünde bu defa (32) deki denklem

$$\begin{aligned} \alpha \ln L + \beta \ln K &= \ln Q - \ln A \\ -\ln L + \ln K &= \ln \beta - \ln \alpha + \ln w - \ln r \end{aligned} \quad (31)$$

çifti elde edilir. Denklem çiftinde, L* ve K* maliyetleri minimize eden

$$\begin{aligned} L^* &= (A^{-1} Q \beta^{-\beta} \alpha^{\beta} w^{-\beta} r^{\beta})^{1/(\alpha+\beta)} \\ K^* &= (A^{-1} Q \beta \alpha^{-\alpha} w^{\alpha} r^{-\alpha})^{1/(\alpha+\beta)} \end{aligned} \quad (32)$$

üretim faktörleri oranında, Q birim üretim için gereken işgücü ve kapital miktarlarını belirtirler. Q birim üretimin maliyeti dolayısıyla (w*L+rK*) olduğundan, toplam maliyetin eşiti (33) te görüldüğü üzere

$$TM = r \left\{ \left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)^{\alpha} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} + w \left\{ \left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)^{-\beta} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} \quad (33)$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki terim yerine (34) de bulunmuş eşiti alındığında toplam maliyetin eşiti (35) veya (36) daki eşitlerine dönüşür.

$$w \left\{ \left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)^{-\beta} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} = \frac{w \left\{ \left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)^{-\beta} \left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)^{(\alpha+\beta)} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)}}{\left\{ \left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)^{(\alpha+\beta)} \right\}^{1/(\alpha-\beta)}}$$

$$= \frac{w \left\{ \left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)^{-\alpha} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)}}{\left(\frac{Bw}{\alpha r} \right)} \quad (34)$$

$$= \frac{\alpha r}{\beta} \left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r} \right)^{\alpha} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)}$$

(36) da görülen teknoloji parametreleri A, α , β ve piyasa parametreleri

$$TM = r \left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r} \right)^{\alpha} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha r}{\beta} \left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r} \right)^{\alpha} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha-\beta)} \quad (35)$$

$$TM = r \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta} \right) \left\{ \left(\frac{\beta w}{\alpha r} \right)^{\alpha} \frac{Q}{A} \right\}^{1/(\alpha+\beta)} \quad (36)$$

w, r veri olarak verildiklerinden, toplam maliyet yalnızca üretim miktarının bir fonksiyonu olur. Ortalama ve marjinal maliyetlerde, toplam

maliyet eşitliğinden kolayca elde edilir, (37) ve (38). Toplam, ortalama ve homojen fonksiyonların fonksiyon katsayıları sabit olduğundan mar-

$$OM = \left\{ r \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\beta w}{\alpha r} \right)^{\alpha / (\alpha + \beta)} \left(\frac{1}{A} \right)^{1 / (\alpha + \beta)} Q^{(1 - \alpha - \beta) / (\alpha + \beta)} \right\} \quad (37)$$

$$MM = \frac{1}{\alpha + \beta} \left\{ r \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\beta w}{\alpha r} \right)^{\alpha / (\alpha + \beta)} \left(\frac{1}{A} \right)^{1 / (\alpha + \beta)} Q^{(1 - \alpha - \beta) / (\alpha + \beta)} \right\} \quad (38)$$

jinal maliyetlerin elastikiyetlerin de sırasıyla (39), (40) ve (41) de görüldüğü üzere yazılır. Elastikiyetlerin eşitliklerinden de görüldüğü gibi,

$$\epsilon_{TM} = \frac{MM}{OM} = \frac{1}{\alpha + \beta} \quad (39)$$

$$\epsilon_{OM} = \epsilon_{TM} - 1 = \frac{1 - \alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad (40)$$

$$\epsilon_{MM} = \epsilon_{OM} = \epsilon_{TM} - 1 = \frac{1 - \alpha + \beta}{\alpha + \beta} \quad (41)$$

fonksiyonun homojenlik derecesi çok önemlidir. Gerçekten de ortalama ve marjinal fonksiyonları ve türevlerinden marjinal ve ortalama maliyetlerin karşılaştırılması eğrilerinin alçalıp, yükselmeleri ve içbükeyliklerinin yönünün tayini ölçmeğe verimlerin aldıkları değerlere göre yapılır. Basitliği gerçekleştirebilmek için, (42) deki eşitsizliğin sol yanı yerine «b» yazılırsa, $\partial MM / \partial Q$, $\partial QM / \partial r$, $\partial^2 MM / \partial Q^2$ ve $\partial^2 QM / \partial Q^2$ nin eşitleri sırasıyla

$$r \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta} \right) \left(\frac{\beta w}{\alpha r} \right)^{\alpha / (\alpha + \beta)} \left(\frac{1}{A} \right)^{1 / (\alpha + \beta)} > 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial MM}{\partial Q} = \left\{ \frac{1 - (\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)} \right\} bQ \quad (43)$$

$$\frac{\partial^2 QM}{\partial Q} = \left\{ \frac{1 - (\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)} \right\} bQ \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 MM}{\partial Q^2} = \left\{ \frac{1 - 3(\alpha + \beta) + 2(\alpha + \beta)^2}{(\alpha + \beta)^3} \right\} bQ \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 QM}{\partial Q^2} = \left\{ \frac{1 - 3(\alpha + \beta) + 2(\alpha + \beta)^2}{(\alpha + \beta)^4} \right\} bQ \quad (46)$$

(43), (44), (45) ve (46) da görüldükleri üzere yazılır. Son iki eşitliğin parantez içindeki ortak payları, dikkat edilirse $(\alpha + \beta)$ birden büyükken pozitif, .5 ile bir arasındayken negatif ve .5 den küçükken tekrar pozitif-

tir. Şimdi (37) den başlayarak yazılan eşitliklerin aracılığıyla marjinal ve ortalama maliyet eğrilerinin özellikleri **taayin edilebilir**. (37) ve (38) deki eşitliklere göre, ölçeğe göre azalan veya artan verimlerin varlığında, marjinal maliyet ortalama maliyetten fazla veya azdır. (43) ve (44) deki eşitlikler göre, gene ölçeğe göre azalan veya artan verimlerin varlığında, marjinal ve ortalama maliyet eğrileri yükselirler veya alçalırlar. Nihayet (45) ve (46) daki eşitlikler ile $(\alpha + \beta)$ nın bulunduğu aralıklar birlikte düşünülürse, ölçeğe göre artan verimlerin varlığında, her iki maliyet eğrisi de azalır ve yukarıdan içbükeydir. $(\alpha + \beta)$ değeri 5 ile bir arasında, ise yükselirler ve aşağıdan içbükeydirler. Şayet ölçeğe göre azalan verimler şiddetliyse $\{(\alpha + \beta) < .5\}$ eğriler yalnızca yükselmekle kalmaz, yukarıdan da içbükey olurlar. Ölçeğe göre sabit verimlerin varolması halinde ise, (36) daki eşitlik (47) de yazılan şekle dönüşür. Görüldüğü üzere toplam

$$TM = bQ \quad (47)$$

maliyet üretim miktarının doğrusal bir fonksiyonudur ve ortalama ve marjinal maliyetler sabit olup, birbirlerine eşittirler (48).

$$MM = OM = b \quad (48)$$

Geriye üretimin hangi ölçekte gerçekleştirilmesinin saptanması kârlı. Şüphesiz kârını maksimize etmeyi amaçlayan firma, ölçeğini kârını maksimize eden ölçek olarak seçer. Firmanın toplam kârını veren eşitlik, üretilen malın fiyatına bölündüğünde bulunan eşitlik te (49) bilindiği

$$\pi/p = Q - (w/p)L - (r/p)K \quad (49)$$

üzere (w/p) ve (r/p) sırasıyla $\partial Q/\partial L$ ve $\partial Q/\partial K$ ya eşittir. $Q = AL^\alpha K^\beta$ üretimfonksiyonunda kısmi türevler ise sırasıyla $\alpha Q/L$ ve $\beta Q/K$ ya eşit olduğundan, (50) deki eşitlik bulunur. Dolayısıyla ölçeğe göre sabit verim-

$$\pi/p = Q [1 - (\alpha + \beta)] \quad (50)$$

lerin varlığında toplam kâr sıfırdır. Normal kârdan fazlasının veya ekşiğinin elde edilmesi olanaksızdır. Ölçeğe göre artan verimlerin varlığında ise, negatif kârla karşılaşılır. Üretim faktörleri beraberce ürettiklerinden daha fazlasını tüketirler. Bu paradoksun nedeni fiyatların sabit kaldığı tam rekabet koşullarının varlığı varsayımdır. Şüphesiz bu varsayım, üretimin sonsuz değişebilirliğinde devamlı yapılamaz. Üretim faktörleri ve üretilen malın fiyatları etkilenecek ve verilen aşağı eğimli talep ve yukarı eğimli arz fonksiyonları, firmanın kârını maksimize yapan ölçeği bulmasını sağlayacaklardır. Açıktır ki, piyasa koşulları bilinme-

den üretimin ölçęęi, üretim fonksiyonu ve fiyatlar araştırılarak bulunmaz.

E. TEKNOLOİK İLERLEME

Fonksiyonun diğer bir gelişimi, zaman boyunca bilinen bütün üretim tekniklerinin gelişiminin kabulü ile sağlanmıştı. Yeni alternatiflerin yaratılması teknolojik ilerleme olarak tanımlanır. Üretim fonksiyonları, eşürün eğrilerinin şekil ve yerlerini belirttiğinden, herhangi bir teknolojik ilerlemede fonksiyonun bazı veya bütün parametrelerini etkiliyecektir. Genellikle α ve β parametrelerinin zaman boyunca sabit kaldığı varsayılarak, dikkatler verimlilik parametresi A ya çevrilir. A parametresi, eşürün eğrisinin yerini belirliyeceğinden teknolojik ilerleme eşürün eğrisinin yerini belirliyeceğinden teknolojik ilerleme eşürün eğrisinin hareketi le tanımlanır. Eşürün eğrilerinin orijin yönünde tam yatay veya dikey olarak kaymaları (faktörlerden biri veya diğerinden aynı miktarda üretimde bulunulması için daha az miktarda kullanım yeterlidir), iki **ekstrim** durumu belirler. İlkinde verilen üretim daha az miktardaki işgücünün verilen kapital miktarıyla, ikincisinde gene verilen üretim daha az miktardaki kapitalin verilen işgücü miktarıyla gerçekleşir. Bu iki uçun dışında ise, verilen üretim miktarı daha az miktarlardaki işgücü ve kapitalin kullanılmasıyla gerçekleşir. Eşürün eğrileri orijine doğru **diyagonal** olarak kaymışlardır. (Faktör miktarlarını arttırıcı teknolojik ilerleme bu tipteki kaymalarla temsil edilir.) Eşürün eğrilerinin yatay, dik ve **diyagonal** kaymalarıyla belirlenen teknolojik ilerlemeler, bilindiğı üzere sırasıyla Harrod, Solow ve Hicks anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeleri belirlerler. Bunların fonksiyonda aynı cebirsel ifadelere sahip olmaları, deneysel olarak birbirlerinden ayrılabilinmelerini olanaksız kılar. İlk olarak A parametresindeki değişmelerle tam uyum halinde olan, Hick anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyonu yazalım. Teknolojik ilerlemenin sabit bir m haddinde olduğı varsayılırsa, fonksiyon (51) de görüldüğü üzere yazılır. Gene A m, α ve β parametreleri, şayet fonksiyon değişkenlerinin tabii logaritmaları alınarak doğrusallaştırılabilirse adı regresyon tekniklerinden yararalanılarak tahmin eidlebilir. Öte yandan Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemede,

$$Q = A e^{m \cdot t} L^{\alpha} K^{\beta} \quad (51)$$

işgücünün verimliliğindeki artışla ifade edilebilir. Şayet işgücünün verim-

Cobb - Douglas Fonksiyonu

liliği sabit bir m_2 haddinde geliyorsa, fonksiyon (52) de görüldüğü üzere yazılır ve $m_2\alpha$ nin m_1 e eşit olduğundan Hicks anlamındaki ilerlemeyi

$$Q = A e^{m_2 t \alpha} L^\alpha K^\beta \quad (52)$$

veren fonksiyon elde edilir Solow anlamındaki yansız tebnolojik ilerlemeyi veren fonksiyonda (53) de görüldüğü üzere yazılır. Gene $m_3\beta$ nin

$$Q = A e^{m_3 t \beta} L^\alpha K^\beta \quad (53)$$

m_1 e eşit oluşunda Hicks anlamındaki ilerlemeyi veren fonksiyon elde edilir. Çünkü fonksiyonun α veya β parametresi, teknolojik ilerlemeden etkilenmedikçe veya faktörlerin nispi fiatları değişmedikçe faktörlerin birleşim oranları etkilenmez. $Q = AL^\alpha K^\beta$ şeklinde yazılan üretim fonksiyonunda işgücü-kapital oranı, $\alpha r - \beta w$ oranına eşit olduğundan (17) birleşim oranlarının sabit kalma nedeni kolayca anlaşılır.

Dolayısıyla yanlı teknolojik ilerlemelerde, üretim elastikyetleri oranındaki değişikliklerle saptanırlar. Bu değişikliklerde kapitalin işgücü için olan marjinal teknik ikame haddi etkilenir. Ve faktörlerin kullanım miktarlarının tasarruf ettirici veya arttırıcı teknolojik ilerlemelerde $\alpha - \beta$ oranındaki değişimin yönüne göre birbirinden ayırde edilirler. α nin β ya göre nispi olarak yükselmesi, faktörlerin verilen birleşiminde işgücünün marjinal verimliliğinin nispi olarak artması demek olduğundan, işgücü kullanan teknolojik ilerleme ile karşılaşılr. $\alpha - \beta$ oranı verilen faktör fiatları veya arzlarında, üretimde kullanılacak işgücü-kapital oranını verir. Verilen faktör fiatlarında, oranın değerinin büyüklüğü kapitale oranla daha fazla miktarda işgücü faktörünün kullanımını gerektirir. İşgücü-kapital oranı, üretimdeki kapitalin yoğunluğunu belirttiğinden de üretim elastikyetleri oranı üretimdeki kapitalin yoğunluğunu verir. Üretimdeki kapital yoğunluğu bilindiği üzere, üretimin teknolojik koşulları tarafından belirlenir ve fonksiyondaki elastikyetler de bu koşulların ifadeleridir. Fakat önceden yanlı teknolojik ilerlemelerin üretimi nasıl etkiliyeceklerini bilmek zordur. Bununla birlikte konu, bu fonksiyonu özel bir hal olarak kapsayan CES üretim fonksiyonunun incelenmesinde açıklığa kavuşur.

Teknolojik ilerlemelerin bağımlı olması halinde de, fonksiyon verimlilik ayarlaması yapılmış kapital malları stokuyla yazılabilir. v yılında üretilmiş bulunan kapital malında istihdam edilen işgücünün t zamanındaki üretimini veren fonksiyon (54) te görüldüğü üzere yazılır. Fonksi-

Hasan Aşkan

yonda, $I(v)$ kapital malına yapılmış bulunan gross yatırımın hacmini, m , v deki teknolojik gelişmenin ve n de ekonomik nedenlerle oluşan değer kaybının etkilerini belirler. $Q(t)$ nin eşitinin $\int^t Q_v(t)dv$ ve $L(t)$ nin eşitinin de $\int^t L_v(t)dv$ olduğunu varsayarak, v yılında üretilmiş kapital

$$Q_v(t) = A e^{mv} L_v(t) \{e^{-n(t-v)} I(v)\}^{(1-a)} \quad (54)$$

malında çalışan işgücünün t zamanındaki marjinal verimliliğinin eşiti, (55) te yazıldığı üzere bulunur. Optimum dağılımın gerçekleştirildiği varsayıldığından, marjinal verimliliğin eşiti yerine konulduğunda (56) elde $\frac{\partial Q_v(t)}{\partial L_v(t)}$

$$= \alpha A e^{mv} \{e^{-n(t-v)} I(v)\}^{(1-a)} L_v^{(a-1)}(t)$$

$\frac{\partial L_v(t)}{\partial L_v(t)}$

edilir. Bu eşitlik her yaştaki kapital mallarında çalışanların marjinal verimliliklerinin aynı oluşunun bir ifadesidir. Eşitlik $L_v(t)$ için bir ifade elde edilmek üzere çözüldüğünde, (57) deki eşitlik elde edilir. (57) de

$$\frac{w}{P} (t) = \alpha A e^{mv} \{e^{-n(t-v)} I(v)\}^{(1-a)} L_v^{(a-1)}(t) \quad (56)$$

$\frac{w}{P}$

$(\frac{w}{P})^{-1/(1-a)}(t) (\alpha A)$ yerine $a(t)$ ve $\{m/(1-\alpha)\} + n$ yerine de b yazı-

$\frac{w}{P}$

lırsa, eşitlik (58) de görüldüğü üzere daha basit olarak yazılabilir. $L_v(t)$

$$L_v(t) = \left(\frac{w}{P}\right)^{-1/(1-a)}(t) (\alpha A)^{-1/(1-a)} I(v) e^{\{mv/(1-\alpha) - n(t-v)\}} \quad (57)$$

$$L_v(t) = a(t) I(v) e^{bv-nt} \quad (58)$$

için bulunan eşiti (54) de yerine konulduğunda, $Q_v(t)$ için (59) da görülen yeni eşitlik elde edilir. Ve eşitliğin entegralinin alınmasına sıra gelir.

$$Q_v(t) = A \alpha a(t) I(v) e^{bv-nt} \quad (59)$$

$\alpha a(t)$ nin (56) danda yararlanılarak elde edilen eşiti yerine konulduğunda, $Q(t)$ nin eşitini verecek olan entegral (60) da görüldüğü üzere yazılır. Entegral yalnızca v yi kapsadığından da

$$Q(t) = \int^t A e^{mv-n(t-v)} (1-a) I^{(1-a)}(v) L_a(t) dv \quad (60)$$

eşitlik tekrar (61) de görüldüğü üzere yazılır. $\int^t e^{bv} I(v)dv$, $J(t)$ olarak tanımlanırsa, üretim miktarını veren fonksiyon (62) de görüldüğü üzere

$$Q(t) = A L_a(t) \int_{-\infty}^t e^{bv(1-a)} I^{(1-a)}(v) dv \quad (61)$$

elde edilir. Fonksiyonda, $J(t)$ verimlilik ayarlaması yapılmış kapital sto-

Cobb - Douglas Fonksiyonu

kunun toplam miktarıdır. Şayet bağımsız teknolojik ilerleme haddi da fonksiyona ilave edilirse, fark yalnızca $J(t)$ nin varlığı nedeni ile oluşur.

$$Q(t) = A L^\alpha (t) J^{(1-\alpha)} (t) \quad (62)$$

Nihayet toplam verimliliklerdeki değişmeleri ölçmede, en temel yöntem olan oran yönteminin (gerçek miktarda belirtilen toplam üretimin gene gerçek miktarla belirtilen toplam üretim faktörlerine oranlanması) yaygın olarak kullanılması bulunacak sonucun eksikliğini belirtilmesini

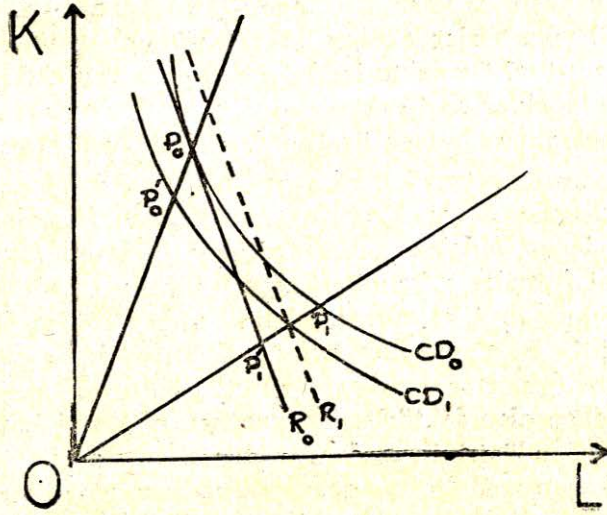
zorunlu kılar⁶. $Q = A(t) \left(\frac{1}{\alpha} K + \frac{1}{\beta} L \right)$ doğrusal üretim fonksiyonunun

da, verimlilik kalan olarak bulunulur. Kapital ve işgücünün doğrusal olarak ağırlıklaştırıldığında toplam faktör indeksini veren formül kullanılırsa, (63) de yazılmış bulunan eşitlik elde edilir. Ve şayet üretim ilişkileri

Cobb-Douglas şeklindeki $A(t) \left(\frac{1}{\alpha} K + \frac{1}{\beta} L \right)$ ile temsil edilirse for-

$$\frac{d \ln Q}{dt} = \frac{d \left\{ \ln \left(\frac{1}{\alpha} K + \frac{1}{\beta} L \right) \right\}}{dt} = \frac{d \{ \ln A(t) \}}{dt} \quad (63)$$

mülden yararlanılarak bulunacak sonuç yanlış olur. Şekil 1 de, CD_0 ve CD_1 ile belirtilen eşürün eğrileri t_0 ve t_1 zamanında, Cobb-Douglas fonk-



6 S. Clemhont, «The Ratio Method of Productivity Measurement», The Economic Journal, C. LXXIII, (1963), s. 360.

Hasan Aşkan

siyonunu temsil ederlerse, üretim miktarı sabitken fonksiyonun kayması sonucunda üretim noktasının p_0 dan p_1 ne kayması gerçek verimlilik artışına eşittir. Bu eşitliğin varlığı, p_0 ile p_0' noktalarının karşılaştırılmasında kolayca görülür. Ve dolayısıyla de teknolojik bir ilerleme ile karşı

karşıya kalınır. Öte yandan $Q = A(t) \left(\frac{1}{\alpha} K + \frac{1}{\beta} L \right)$ üretim fonksiyo-

nunun p_0 ve p_1 noktalarından geçen eşürün eğrileri R_0 ve R_1 ile gösterildiğinde p_1' , t_0 ve p_1 de t_1 zamanlarındaki üretim noktaları olarak düşünüldüğünde $OP_1'P_1$ doğrusu üzerindeki P_1 noktası paralelin dışında kalır. Ve oran yöntemi, t_1 zamanında aynı miktarda üretimde bulunabilmek için t_0 zamanında gereken faktör miktarlarından daha fazlasının kullanılması gerektiğini gösterir. Kısaca Cobb-Doguslas fonksiyonu teknolojik ilerlemeyi verirken, oran yöntemi gerilemeyi verir.

F. SONUÇ

Bu fonksiyona başlangıçta gösterilen tepkiler aleyhte idi ve Menderharsen⁷ ise, en şiddetli tepkiyi gösteren idi. Her üç değişkeninde, bir dördüncü değişkenin, zaman değişkeninin fonksiyonu olduğunu ileri sürdü. Douglas tarafından varsayılan üretim, kapital ve işgücü arasındaki ilişkiler gerçekte varolmayıp, nispi büyüme hadlerinin sonuçlarıdır. Temeldeki sorun nispi hadlerin fonksiyon tarafından mı açıklandığı yoksa açıklamanın başka yerlerde olup da Cobb-Douglas şeklinde bir ilişkiye mi neden olmuştur? Gerçekte ise böyle sorun yoktur. Çünkü, nispi hadlerin teknik olanaklar ve üretim faktörleri oranları tarafından tayin edilmesinin amaçlanması esasen üretim fonksiyonlarının tanımı ile çelişir.

Fonksiyona daha teorik tenkitler ise kaynağını toplama problemin varlığından almaktadırlar. Üretim fonksiyonları, firmaların karşılaştıkları teknolojilerin ifadeleriyle faktörlerin birleşim oranlarını ve üretim seviyesini firmaların kendileri seçerler. Sorun çeşitli sektörler veya ekonominin tamamı için yararlanılabilecek üretim fonksiyonlarının elde edilmesidir. Bazı zorluklar hemen ilk anda akla gelir. Firmalar için sabit olan bazı faktörler endüstrinin bütün için sabit değillerken, firmalar için değişken olan faktörlerden bazıları, endüstri için sabit olabilirler. Bu etkiler, endüstrinin toplam üretimi firmanın üretim fonksiyonuna sokularak kapsanabilirse de, toplama problemi üzerinde çalışırken kapsanmamaları daha uygundur. Dolayısıyla firmaların üretim fonksi-

7 H. Menderharsen, «On the Significance of Professor Douglas Production Function», *Econometrica*, C. VI, (1938), s. 143-153.

yonlarının, endüstrinin toplam üretim fonksiyonundan bağımsızlığı varsayılır. Üretim fonksiyonlarında genel toplama probleminin ilk sistematik incelenmesini Klein⁸ yapmıştır. Klein mikro fonksiyonlardan toplam üretim fonksiyonları ve marjinal verimlilik ilişkilerinin bulunabilmesi için, ağırlıkların her firma için elastikiyetlerle orantılı olduğu mikro değişkenlerin ağırlıklı geometrik ortalamalarının bulunması gerektiğini ileri sürer. Makro fonksiyonun elastikiyetleri, ağırlıkların faktörler için yapılan harcamalar ile orantılı olduğu mikro elastikiyetlerinin ağırlıklı ortalamalarıdır. Makro gelir ise, makro fiatın, mikro gelirlerin aritmetik ortalaması olarak tanımlanabilen makro miktarla çarpımına eşittir. Benzer tanımlar, makro ücret ve kapital harcamaları için de yapılır. Fakat Kleinian toplama şüpheli sonuçlara sahiptir. w_i ve L_i firmada ödenen ücret haddi ve istihdam edilen homojen işgücü miktarını belirlerse, w nin makro ücret haddi olduğu (64) de görülen eşitlik yazılabilir. α_i firmadaki

$$wL = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i L_i \quad (64)$$

işgücünün elastikiyetini belirtirse, makro işgücü faktörünün tanımı (65)

$$L = \pi \sum_{i=1}^n L_i \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_i} \quad (65)$$

te görüldüğü üzere verilir. Tam rekabet koşulları altında, her firma işgücüne aynı ücreti (w^*), ödeyeceğinden, ikame gerçekleştirildiğinde (66)

$$w = w^* \sum_{i=1}^n L_i / \sum_{i=1}^n \pi L_i \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_i} \quad (66)$$

da yazılan ücret haddinin eşiti elde edilir. Açıktır ki, makro ücret haddi büyük bir olasılıkla daima firmaların ödedikleri ücret haddinden farklı olacaktır. Gerek w nin anlamını ve gerekse w^* farklılığının nedenini yorumlamak güçtür ve aynı güçle üretim ve kapitalin fiyatlarını anlamada da karşılaşılır. Bu karışıklıklar, Nataf⁹ tarafından giderilmiştir. Kabul edilebilen bir toplamının, ancak üretim fonksiyonunun toplam halinde ayrılabilindiğinden gerçekleşeceğini ispatlamıştır. Gerçekten de fonksiyon w_0 , w_1 ve w_2 nin sabit ağırlıklar oldukları (67) de görüldüğü

8 L.R. Klein, «Macroeconomics and the Theory of Rational Behavior», *Econometrica*, C. XIV, (1946), s. 93-108.

9 A. Nataf, «Sur la Possibilite de Construction de Certains Macromodels», *Econometrica*, C. XVIII, (1950), s. 232-244.

$$Q = \frac{w_0}{\alpha} K + \frac{1}{\beta} \frac{w_2}{L} \quad (67)$$

şekilde yazılabilinmelidir. Cobb-Douglas fonksiyonu bu koşulu sağlamazsa da, logaritmik olarak yazıldığında toplam halinde ayrılabilir ve böylece Klein'in geometrik ortalamalarından yararlanılması gerçekleşir. (Fakat makro elastikyetler, mikro elastikyetlerin aritmetik ortalamaları olduğundan zorluklar halâ giderilmemiş bulunmaktadır. Klein'e göre uygun makro elastikyetlerin bulunabilmesi için, ağırlıkların üretimle orantılı olduğu ağırlıklı ortalama bulunmalıdır. Bunun anlamı ise, makro faktörlerin ölçülmesinin üretim miktarına bağımlı olması demektir. Açıktır ki, ağırlıklar üretimden bağımsız olmalıdırlar.) Gerçekten, Cobb-Douglas fonksiyonu, toplamalara olanak verir. Houthakker¹⁰ doğrusal programlama tipindeki üretim fonksiyonlarından endüstrinin üretim fonksiyonunun, Cobb-Douglas şeklinde olacağını göstermiştir. Her firmanın müteşebbislik kapasitesi, sabit olan üretim faktörleri-üretim oranıyla yansıtılmıştır. Yüksek kapasiteler, az değerdeki ve az kapasiteler ise, büyük değerdeki oranların varlıklarına neden olur. Şayet bu oranların dağılımı pareto şeklindeyse, toplam fonksiyonun şekli Cobb-Douglas'tır. Klein'inde¹¹ Cobb-Douglas fonksiyonunun birçok şekillerinden nasıl toplam fonksiyonlarının elde edileceğini göstermiştir.

Nihayet fonksiyon, faktörlerin ikame edilebilirliğini varsayar ve faktörlerin birbirlerini tamamlayıcılığı halinde üretim fonksiyonunun tahmin edilebilirliğini kapsamaz. Gerçekten de fonksiyon yalnız işgücü ve kapital arasındaki uzun dönem ilişkilerin tahmininde kullanılmalıdır.

Gerçek hayatta, ikame elastikyetinin değerinin bir olması için hiçbir neden bulunmamaktadır. Değerin bir olmaması halinde ise, fonksiyon doğru olmayan sonuçlar verir. Dolayısıyla de ikame elastikyeti değerinin sabit fakat bir olmadığı fonksiyonun incelenmesine gerek duyulduğundan, CES fonksiyonunun incelenmesine neden bulunmaktadır.

10 H. Houthakker, «The Pareto Distribution and the Cobb-Douglas Production Function in Activity Analysis», *Review of Economic Studies*, C. XXIII, (1955-1956), s. 27-31.

11 L.R. Klein, «Remarks on the Theory of Aggregation», *Econometrica*, C. XXVII, (1959), s. 123-141.