LEONTİEF MODELİNİN BİR MARKOV ZİNCİRİ İÇİNDE İ N C E L E N M E S İ

Doç. Dr. İsmail İLHAN

1 — G İ R İ Ş

Markov zincirleri, olasılık kuramının sosyal bilimlere uygulanışında, değerli bir araç olma yolunda gün geçtikçe artan bir öneme sahip olmaktadır. Markov zincirlerinin, bağımlı olasılıkların bir ifade şekli olduğu göz önüne alındığında uygulama alanlarının genişleyebilme imkânı hakkında bir kanıya varılabilir. Bir markov zinciri bilinen bir durumdan veya durumlardan belli olasılıklarla bir başka durum veya durumlara geçen (dönüşen) olay ya da olayların ilk adımı (veya dönemi) izleyen adımlar sonunda erişecekleri durumların olasılıklarını adım adım takipetme olanağı verebilmektedir. Bu analize girişmeden önce markov zincirlerinin temel unsurlarına ve özelliklerine kısaca değinmek gerekmektedir.

2. STOKASTİK MATRİSLER

Bir markov zincirinin temel öğesi « geçiş olasılıkları matrisi veya ara matrisi adı verilen stokastik bir matristir. Bu nedenle stokastik matrislere ilikin kısa bilgi sunmak yararlı olacaktır kanısındayız.

Stokastk bir matris, markov zincirleri çerçevesinde, bir dizi olayın belli bir durum ya da durumlardan başka durumlara geçişlerini, geçişin olasılıklarına bağlı olarak tanımlayan bir kare matristir (1). Bir markov zincirinin tam olarak tanımlanması, geçiş olasılıkları matrisi ile birlikte bir de başlangıç durum vektörü denilen bir satır vektörünün belirlenmesi ile olmaktadır. Ancak, ileride değinilecek olan belli durumlarda, adım sayısı arttıkça, olayın değişik durumlara erişme olasılıkları başlangıç durumuna bağlı bulunmamaktadır. Bu nedenle bir stokastik matris dahi tek başına bir markov süreci oluşturabilmektedir. Bizim burada inceleyeceğimiz problem de böyle bir ara matrise sahip bulunmaktadır.

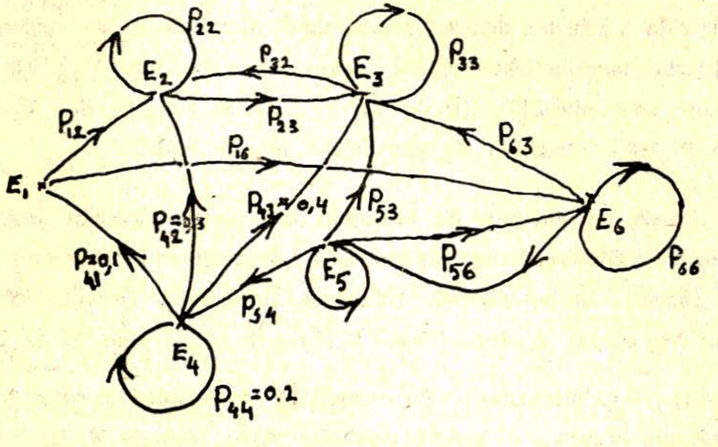
2.1 Bir Stokastik Matrisinin Geçiş Olasılıklarının Tanımlanması

Her biri E_1, E_2 ....E_m olarak isimlendirilmiş bulunan M sayıda (m sonlu bir sayı) olası durumu içeren bir sistem gözönüne alalım. Bu sistemde her bir durumdan diğerine geçiş olasılıkları P_{ij} olarak bilinmektedir. Öyleki P_{ij} elemanı, E_i durumundaki olayın bir adımda (veya bir dönem sonra) E_j durumuna erişme olasılığı olmaktadır. Bir olayın belli bir anda çeşitli durumlarda bulunabilme olasılıkları toplamı 1'e eşit olacağından bir stokastik matriste bir satır elemanları toplamı olan $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$ olmak zorundadır. Bir başka ifade ile bu eşitlik, bir olayın şöyle ya da böyle gerçekleşmesi olasılıkları toplamının 1'e eşit olmasının doğal bir sonucudur.

Aşağıda m=6 farklı duruma sahip bir sistemin geçiş olasılıklarının bir graf ile açıklanışı gösterilmiştir. Geçiş yolları üzerindeki ok işareti, bir adımla geçişin hangi durumdan hangi duruma olduğunu, P_{ij} ler ise, bu geçişin hangi olasılıkla olduğunu göstermektedir. Örneğin, E_4 durumunda bulunan bir olay bir adımla (veya bir dönem sonra) E_1 durumuna erişme olasılığı

(1)—Gülçür, Fazıl; İşletmelerde Faaliyet Araştırmaları; İTİA. Yayını no:38-195 İstanbul

—Desbazeille J; Reséarche Operational; Dunod PARİS



Geçişim Grafı : Şekil - 1

$P_{4,1}=0,1$, E_2 durumuna erişme olasılığı $P_{4,2}=0,3$ E_3 durumuna erişme olasılığı $P_{4,3}=0,4$ ve yine aynı (E_4) durumunda kalma olasılığı $P_{4,4}=0,2$ olmaktadır. Görüldüğü gibi, stokastik matriste bir satır oluşturacak olan bir durumdan çıkış olasılıkları toplamı (E_4 durumu için)

$$P_{4,1}+P_{4,2}+P_{4,3}+P_{4,4}+P_{4,5}+P_{4,6}=0,1+0,3+0,4+0,2+0+0=1 \text{ olmaktadır.}$$

Her bir P_{ij} elemanı için,

$$P_{ij} \leq 1$$

yazılabileceği açıktır. Şimdi yukarıdaki geçişimler grafına uygun stokastik matris kolaylıkla belirlenebilir. Bu matrise [M] diyecek olursak,

$$M= \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_{11}=0 & P_{12}=0,6 & P_{13}=0 & P_{1,4}=0 & P_{1,5}=0 & P_{1,6}=0,4 \\ P_{2,1}=0,1 & P_{2,2}=0,3 & P_{2,3}=0,7 & P_{2,4}=0 & P_{2,5}=0 & P_{2,6}=0 \\ P_{3,1}=0 & P_{3,2}=0,6 & P_{3,3}=0,4 & P_{3,4}=0 & P_{3,5}=0 & P_{3,6}=0 \\ P_{4,1}=0,1 & P_{4,2}=0,3 & P_{4,3}=0,4 & P_{4,4}=0,2 & P_{4,5}=0 & P_{4,6}=0 \\ P_{5,1}=0 & P_{5,2}=0 & P_{5,3}=0,5 & P_{5,4}=0,3 & P_{5,5}=01 & P_{5,6}=0,1 \\ P_{6,1}=0 & P_{6,2}=0 & P_{6,3}=0,3 & P_{6,4}=0 & P_{6,5}=0.4 & P_{6,6}=0,3 \end{bmatrix} \end{array}$$

(1.1)

Buna göre, örneğin matrisin birinci satırı, E_1 durumu ile başlayan bir olayın bir adım (ya da t gibi bir dönem) sonra diğer durumların her birine erişebilme olasılıklarını tanımlamaktadır. Bir adım sonra bu olay $P_{1,2}=0,6$ olasılıkla E_2 durumuna, sıfır olasılıkla $(P_{1,3}=P_{1,4}=P_{1,5}=0)$ $E_{1,3}E_{1,4}$ ve $E_{1,5}$ durumlarına ve nihayet $P_{1,6}=0,4$ olasılıkla E_6 durumuna erişmektedir.

Genel olarak, E_i durumu ile başlayan bir olayın birbirini izleyen sonlu sayıda adımları müteakip hangi olasılıklarla hangi durumlara erişmiş olacağını bu matris yardımı ile hesaplamak mümkün olmaktadır. Örneğin E_3 durumu ile başlayan bir olayın 4 adım (veya 4 dönem) sonra yine E_3 te bulunuyor olması olasılığı, $\overset{4}{P}_{3,3}$ olmaktadır. Bu eleman M^4 matrisinin 3. satır 3. sütunun kesiştiği noktada bulunan eleman olmaktadır. Aynı biçimde E_3 ile başlayan bu olayın yine 4 adım sonra E_5 durumuna erişme olasılığı $\overset{4}{P}_{3,5}$ olup bu elemanda $[M]^4$ matrisinin 3. satır 5. sütunun kesiştiği eleman olmaktadır. Genel bir biçimde E_i durumu ile başlayan bir olayın (n) adım sonunda (n sonlu bir sayı) E_j durumunda bulunması olasılığı $\overset{n}{P}_{ij}$ elemanı ile biliniyor olup bu eleman $[M]^n$ matrisinde i.inci satır ile j.inci sütunun kesişim elemanı olmaktadır (2),

2.2— Stokastik Matrislerin Özellikleri ve Özel Durumlar

Burada, stokastik matrislere ilişkin temel özelliklere ve bazı özel durumlara işaret edilecektir. Bu özellikler ve özel durumlar şöyle sıralanabilir (3).

a) Eğer (m) stokastik bir matris ise $(M)^n$, (n=0,1,2,3......) matrisi de stokastik bir matris olur.

b) Eğer (M) stokastik matrisinin tüm satırları özdeş ise bu taktirde,

$$(M)^n = (M) \qquad (n=1,2,......)$$

dir.

---

(2) Bkz. İlhan, İsmail; Markov Zincirleri, BİTİA. Dergisi Cilt III No: 1 s.219

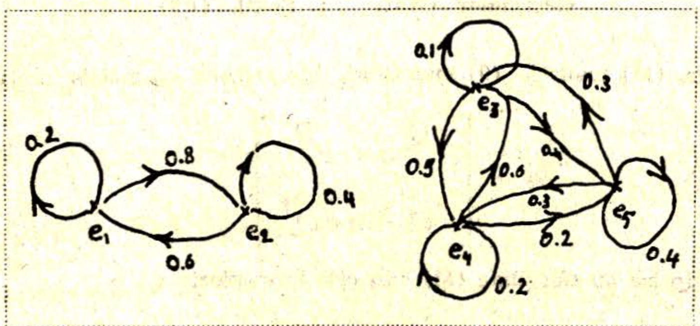
(3) A. Kaufmann; Métmodes et Modéles de la Recharche Opérationnelle, tom 2. Dunod PARİS; s. 386

c) Eğer (M) matrisi

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} \qquad (1,2)$$

Şeklide ise (burada A ve D kare alt matrislerdir.) A içinde bulunan bir durumdan D içindeki bir duruma erişmek hiç bir biçimde olası değildir. Bu şekildeki bir (M) stokastik matrisine indirgenebilir. (Réductible) matris denilir. Ayrıca bu iki durum kümesine (A ile D) yalıtılmış (tercih edilmiş) durumlar adı verilir. Böyle bir stokastik matris ve onun geçişimler grafı aşağıda olduğu gibidir.

$$M = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{array}\right] \end{array}$$

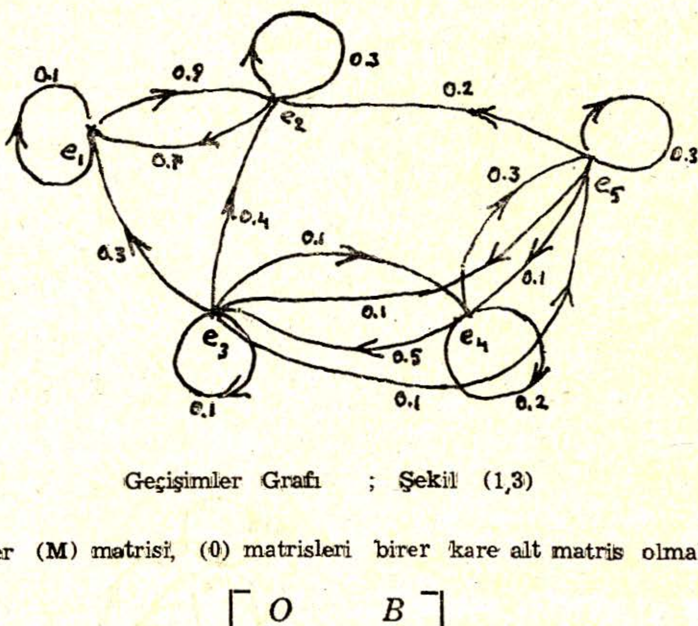


Geçişimler Grafı
Şekil (1,3)

d) Eğer (M) matrisi (A ve D altmatrisleri yine birer kare matrisi olmak üzere,)

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (1,4)$$

Şeklinde ise $(M)^n$ matrisinde (n) arttıkça (n=1,2.........) sisteminin, D nin içindeki durumlardan herbirinde bulunması olasılığı monoton olarak azalır. Böyle bir yapıya sahip stokastik matris içinde D durumlarından A durumlarına geçiş mümkün, fakat bunun tersi mümkün değildir. Böyle bir durumun geçişin grafı aşağıda görülmektedir.



Geçişimler Grafı ; Şekil (1,3)

e) Eğer (M) matrisi, (0) matrisleri birer kare alt matris olmak üzere,

$$M = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix} \qquad (1,5)$$

şekline sahip ise bu durumda (M) nin çift kuvvetleri

$$(M)^{2i} = (M_ç) = \begin{bmatrix} A & O \\ O & D \end{bmatrix} (i=1,2....) \qquad (1,6)$$

tek kuvvetleri,

$$(M)^{2i+1} = (M_T) = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix} (i=1.2) \qquad (1,7)$$

şekline sahip stokastik matrisler olur. Böyle bir durumda siteme «periyodik sistem» denilmektedir. Bu taktirde sistem, bu iki alt durumlar kümesi arasınra bir salınıma sahip olmaktadır.

f) Eğer bir (M) stokastik matrisinin (n) inci kuvvetinde hiç bir sıfır elemanı yok ise (M) ye düzgün (Regular) bir matris denir. Böyle düzgün bir ara matrise sahip bir markov zinciri şu özelliğe sahiptir: Öyle bir N sayısı vardır ki bir S_j durumundan diğe bir S_k durumuna N adımda gitmek mümkündür. Buna göre S_j den S_k'ya gidip gelmek 2N adımda mümkün olacaktır.

2.3— Bir Markov Sürecinde Ergodik Özellik

(M) matrisi, daha ösce tanımlanmış olan stokastik matris olmak üzere eğer,

$$\lim_{n \to \infty} (M)^n = (\tilde{M})$$

oluyorsa ki burada (M) limiti yine bir stokastik matristir, bu durumda sistem ergodiktir denir. Veya (M) matrisine ergodik matris adı verilir. Böyle bir durumda sistem olasılık yönünden kararlı (dengeli) bir durum (stable en probabilité) ortaya koyar. Bir $(\tilde{M})$ matrisi ne indirgenebilir ne de periyodik ise bu matris ergodiktir (4).

(4) A. Kaufmann, A.g.k., s. 387

Eğer (M) matrisi tüm satırları özdeş bir matris oluyorsa (5) o taktirde sisteme tam ergodik (Complétement ergodique) sistem denilir. Bu durumda, (n) yeterince büyük alınmak okşulu ile (n) adım sonra sistemin durumları sistemin başlangıç durumlarından bağımsız olmaktadır. Gerçekten,

$$\left[P_{(n)}\right] = \left[P_{(0)}\right] \cdot \left[M\right]^{n}$$

eşitliğinde $n \longrightarrow \infty$ için iki yanın limiti alınarak,

$$\lim_{n\to\infty} \left[P_{(n)}\right] = \lim_{n\to\infty} \left\{\left[P_{(0)}\right] \cdot (M)^{n}\right\} = P_{(0)} \cdot \lim_{n\to\infty} (M)^{n}$$

$$= P_{(0)} \cdot \widetilde{(M)} = (P)$$ sonucuna varılır. Burada

(P) . (M) limit matrisin özdeş satırlarından birisi olmaktadır.

2.4— Bir Stokastik Matriste Emen Durumlar

Stokastik bir (M) matrisinde, bir satırdaki herhangi bir P_{ij} elemanı 1'e eşit ise ($P_{ij}=1$) bu stokastik matriste i'inci satır bir emen durum meydana

---

(5) Örneğin:

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$ olmak üzere $n \longrightarrow \infty$ için bu matrisin n'in ci kuvveti

$$\lim_{n\to\infty} (M)^{n} = \lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}2, & 80 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{(M)} = \begin{bmatrix} 40/151 & 55/151 & 56/151 \\ 40/151 & 55/151 & 56/151 \\ 40/151 & 55/151 & 56/151 \end{bmatrix}$$

olmaktadır.

getirir. Bu duruma erişen bir olay oradan çıkamaz veya durumu terkedemez. Aşağıdaki (M) matrisinin 2 ve 4 nolu satırları birer emen durum olmaktadır. İleride biz bu durumu banka durumu adıyle yeniden gözönüne alacağız. Ayrıca stokastik

$$M = \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bir matrisin emen bir zincir (veya satır) vermesi koşullarına ileride yine değinilecektir.

3. Leontief Girdi-Çıktı Modeli

İkinci Dünya Savaşından önce Wabbiyş Yeohkif'in ABD ekonomisi için geliştirdiği model bu gün iktisatçıların ekonomik analizlerinde kullandıkları yararlı ve gerçek bir teknik olmuştur.

Üretim ile ilgili küçük ya da büyük bir firma değişik cinste hammaddeler alarak bunları mamul hale getirmektedir. Yine, aynı cins malı üreten firmalar aynı cins girdiler kullanarak üretim yapan belli gruplar oluşturmaktadırlar. Nihayet, bir ulusal ekonominin tümü gözönüne alınırsa bütün bir üretim sanayii girdiler alıp bunları çıktılara dönüştürmektedir. İşte Leontief'in girdi—çıktı modeli bu ilişkileri matematiksel biçimde tanımlamayı başarmış, bu yüzden de ekonomik faaliyetlerin incelenmesinde çok önemli bir araç niteliği kazanmıştır. Biz burada, Leontief modelini markov zincirleri kuramı çerçevesinde tanımlamaya ve çözüm koşullarını araştırmaya çalışacağız.

3.1— Statik Bir Leontief Modelinin Tanımı

Markov zincirleri kuramı çerçevesinde ilgileneceğimiz modelin statik bir model olması onu kısaca tanıtmamıza vesile olmuştur.

Matematiksel bir model olan Leontief modelinin değişkenleri yani üretim teknik katsayıları ele alınan zaman (dönem) içinde değişmez ve zaman unsuru bir değişken olarak alınmazsa model statik olmaktadır.»

Ayrıca zaman unsuru ile yakından ilişkili olan stoklar veya kapital birikimi statik modelde gözönüne alınmadığından bunlara ilişkin katsayılar sıfır değerdedir. Statik bir model stok seviyesindeki herhangi bir değişmeyi kabul etmediği gibi ara mal stokları ile de ilgilenmemektedir.

Herhangi bir imalât firmasının üretim bölümleri ve satış bölümü arasındaki girdilerin ve çıktıların akışları sayısal olarak statik bir model ile ifade edilebilir. Buna göre, firmanın üretim bölümlerinde üretilen ürünler ve tüketilen girdiler bir bakıma modelin değişkenleridirler. Bu durum, bir çok sanayi kolunu içinde bulunduran bir ekonomi için de böyle olmaktadır (6).

İçinde (n) sayıda sanayi kolu olan bir ekonomi gözönüne alalım. Kolaylık sağlama bakımından da her sanayi kolunun sadece bir cins mal ürettiğini varsayacağız. Ayrıca, bir Leontief modelinin genel varsayımlarına ek olarak (7), üretim, arazi, yapı ve tabii kaynaklar gibi faktörlerin parasız sağlandığı, bu nedenle üretilmiş malların maliyetlerine bunların bir etkide bulunmadığı kabul edilmektedir. n sayısıda sanayi kollarından birisi örneğin, «emek» olarak gözönüne alınırsa diğer tüm sanayi kolları bu sektörün çıktısının bir kısmını girdi olarak kendi üretimlerinde kullanmaktadırlar. Genel olarak sanayi kolları birbirleri ile öyle ilişkilidirlerki üretebilmek için her biri diğerinin üretiminden bir kısmını girdi olarak satın almak zorundadır. Teknoloji katsayıları aşağıda olduğu gibi tanımlanır.

a_{ij}; i sanayi kolunun kendi üretiminden (1) birim (1 TL) lik gelir sağlaması için (j) sanayi kolunun çıktısından satın alması gerekli miktarın parasal (TL olarak) değeridir. Bu nedenle,

$$a_{ij} \geqslant 0 \qquad (1)$$

olmak zorundadır. Sabit bir (i) değeri için (a_{ij}) lerin toplamı (i) inci sa-

(6) Öztürk, Ahmet; Firmanın ekonomik kararlarında Leontief modeli ve bir tekstil yünlü firmasına uygulanması İ.T.İ.A. Yayını 1979 s. 46 Bursa

(7) Leontief modelinin genel varsayımları için bu konuya yer vermiş herhangi bir iktisat kitabına bakılabilir.

nayiin kendi üretiminden 1 TL·lık gelir sağlaması için gereksinme duyduğu girdilerin toplam değeri olmaktadır. Eğer (i) inci sanayi kolu kâr sağlayabiliyorsa ya da en azından zarar etmiyorsa, bu toplam onun çıktı değerinden küçük veya ona eşit olmak durumundadır. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \dots\dots + a_{in} \leq 1 \quad (i=1,2\dots n) \qquad (2)$$

yazılır· Bu toplam için eşitsizlik işareti doğru ise i inci sanayi kolu kârlı, eşitlik geçerli ise bu sanayi kolu kârsız (maliyetine üretim yapıyor) olacaktır· Burada, tüm (i) ler için (2) bağıntısının geçerli olduğu, yani her firmanın ya kâr ettiği ya da maliyetine üretim yaptığı varsayımının kabul edildiğini belirtmeliyiz· Böylece bazı sanayi kollarının zararına üretim yapabileceği olasılığına yer verilmemiş olmaktadır (8)· Bu duruma ileride yeniden değinilecektir·

Şimdi, eğer (A), elemanları (a_{ij}) olan (nxn) matrisi ve (E) tüm elemanları 1'e eşit bir sütun vektörü ise (1) ve (2) koşullarını bunlar yardımı ile,

$$\begin{aligned} a &\geq 0 \\ AE &\leq E \end{aligned} \qquad (3)$$

olarak tanımlayabiliriz.

Sanayi kollarının girdilerini bu biçimde tanımladıktan sonra çıktılarını da tanımlamağa çalışalım. X , (i) inci sanayi kolunun çıktısının TL. olarak değerini tanımlasın ve $X=(X_1, X_2,\dots\dots\dots,X_n)$ çeşitli sanayi dallarının çıktılarını tanımlayan satır vektörü olsun· Ekonominin, (X) vektörünün elemanları olarak verilen çıktılarla işleyebilmesi için, (i) inci sanayi kolu'nun (j) inci sanayi kolu çıktısından bir $X_i a_{ij}$ miktarına ihtiyacı olacaktır· Bu durum tüm

---

(8) E.J.Cogan, J.G·Kemery, G·L·Thompson; R·Z·Norman; J.L.Snell; Modern Matematik Metodları ve Modelleri, II. Ç· Nakibe Uzgören, Milli Eğitim Basımevi 1968 İstanbul, s· 202

(i, j= 1,2,......n) değerleri için geçerlidir. Buna göre, örneğin, (j) inci sanayi kolu, diğer sanayi kollarının gereksinimlerini karşılayabilmesi için

$$x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n a_{nj} \quad (j= 1,2,\ldots\ldots n) \qquad (4)$$

değerinde çıktı üretmesi gerekmektedir. Bu bir vektör olarak kısaca, XA şeklinde yazılabilir.

Bir ekonominin, sadece sanayi kollarının birbirlerinin ihtiyacı olan girdileri üretmekle işlerliğe kavuşamıyacağı açıktır. Hemen hemen her sanayi kolu nihai tüketim için de üretim yapmaktadır. Karşıt olarak nihai tüketim için üretim yapan bir firmanın ürettiği bazı aramallar da bulunmaktadır. Şimdi sözkonusu ekonominin (n) sanayi kolundan herbirinin çıktılarından bir W_i (i=1,2.........n) miktarını nihai tüketim için ürettiğini de varsayımlarımıza ekleyelim. W= $(W_1, W_2, \ldots\ldots\ldots W_n)$ vektörü bir tüketim vektörü olarak isimlendirilebilir. Negatif tüketim olmayacağı için,

$$W_i \geqslant 0 \qquad (5)$$

dır. Bir ekonomide üretimle tüketim dengede olduğu varsayımı gereğince,

$$X=XA + W \qquad (6)$$

yazılabilmesi gerekmektedir. Bunun anlamı; Çıktı vektörünün, sanayi kolları arasındaki talep vektörü ile nihai tüketim vektörü toplamına eşit olduğudur. (6) eşitliği,

$$X\ (1-A) = W \qquad (7)$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlik (n) bilinmeyenli (n) denklemden oluşan bir sistemi tanımlamaktadır. Bu denklem sisteminin çözüm vektörü,

$$X^1 = (1-A)^{-1}.W \qquad (8)$$

olmaktadır. Ancak ekonomik açıdan anlamlı olması için (8) çözümlerinin negatif olmaması gerekmektedir. Aşağıda, bu nitelikte çözümlerin elde edilebilmesinin gerek ve yeter koşulları (A) teknolojik matrisine ilişkin olarak tanımlanacaktır.

3.2— Negatif Olmayan Çözümlerin Varlığı Koşulları

Bu koşullardan ilki (8) çözüm vektöründe de görüldüğü gibi (1—A) matrisinin bir ters matrise sahip olması koşuludur.

İkincisi, $(1-A)^{-1}$ matrisinin hiç bir bileşeni negatif olmamalıdır. Ancak o zaman (7) sisteminin her W vektörü için negatif olmayan bir çözümü olacaktır (9). $(1-A)^{-1}$ matrisinin negatif olmamasını sağlayan koşullar ise şu teorem ile tanımlanmaktadır.

Teorem. a— Bir (A) stokastik matrisinde $\lim_{n \to \infty} (A) = (0)$ oluyorsa, bu takdirde (1—A) matrisinin negatif olmayan bir ters matrisi vardır.

b— Ancak ve yalnız $\lim_{n \to \infty} (A)^n = (0)$ ise, sonsuz sayıda

$1 + A + A_2 + \dots\dots\dots + A^n + \dots$ toplamı yakınsaktır.

Teoremin ispatı için aşağıdaki özdeşliği gözönüne alalım.

$$(1-A)\ (1+A+A^2+\dots\dots\dots+A^n) = (1-A^{n1}) \qquad (9)$$

buradan,

$$(1+ A+ A^2 = \dots\dots\dots + A^n) = (1-A)^{-1}\ (1-A^{n+1}) \qquad (10)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin ikinci yanında $A \geq 0$ olduğundan her (n) için $A^n > 0$ olur. Bu nedenle $1 - A^{n+1} \leq 1$ olur. $(1-A)^{-1} > 0$ kabul edildiğinden,

$$(1+ A+ A^2 + \dots\dots\dots + A^n) \leq (1-A)^{-1} \qquad (11)$$

yazılabilir. Bu bağıntının birinci tarafı yukardaki sonsuz serinin ilk (n) teriminin kısmi toplamıdır. $(1-A)^{-1}$ gibi sonlu ve pozitif bir sayı ile üstten sınırlı olduğundan bu seri yakınsaktır. Ayrıca, böyle bir serinin yakınsak olabilmesi ancak $\lim_{n \to \infty} (A)^n = (0)$ olduğu zaman mümkündür (10). Diğer yandan, $\lim_{n \to \infty} (A)^n$ sıfıra yaklaştığında (9) özdeşliğinin her iki yanındaki determinant değerleri gözönüne alalım. $n \to \infty$ için sağ taraftaki $(1-A^{n+1})$ matrisi (I) matrisine yaklaşır. Yani,

$$\lim_{n \to \infty} (I - A^{n+1}) \Rightarrow (I)$$

olur ve determinant değeri de 1'e yaklaşır ki bu pozitif bir değerdir. Aynı durum özdeşliğin sol yanı için de doğrudur. Şu halde (1—A) matrisinin sıfırdan farklı bir determinantı vardır, bu nedenle de bir ters matrisi olacaktır. Bu ters matris (10) numaralı eşitlikten görüleceği üzere, $(1+A+A^2+\dots\dots\dots + A^n)$ sonsuz serisi olmaktadır. Bu serinin hiç bir elemanı negatif değildir.

---

(9) Burada W dış talep vektörü keyfi olabilmekte, bu nedenle (7) sistemi genellikle homogen bir denklem sistemi olmamaktadır. Zira homogen bir sistem için koşullar değişiktir.

(10) $\lim_{n \to \infty} (A)^n = (0)$ olması, $(A)^n$ matrisinin tüm elemanlarının ayrı ayrı sıfıra gitmesi anlamına gelir.

Böylece $(1-A)$ nın negatif olmayan bir ters matirse sahip olduğu kanıtlanmış olur.

b) Eğer $1+A^2+A^2+.........+A^n+......$ serisi yakıssak ise A^n sıfıra yaklaşacaktır, veya diğer şekilde $A^n \longrightarrow 0$ ise (a) dan dolayı bir ters matris vardır, (11) den dolayı yakınsaktır ve $(1-A)^{-1}$'e yaklaşır.

4— Midelin Bir Markov Zinciri İçine Yerleştirilmesi

Yukarıda stokastik bir matris biçiminde tanımlanabileceğine kısaca değindiğimiz Leontief modelinin ne zaman poztif çözümler vereceğini bir teoremden yararlanılarak belirlemeğe çalıştık. Leontief modelinin pozitif çözümler vermesinin gerek ve yeter koşullarının bu biçimde açıklanışı (A) matrisinin çeşitli kuvvetlerinin hesaplanmasının zorluğu ve ekonomik yoruma elverişli olmaması nedeni ile yeterince açık ve uygulanabilir görünmemektedir. Modeli bir markov zinciri içine yeıleştirmek modelin ne zaman bir pozitif çözümü olduğunu saptamak için çok önemli bir yöntem elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Burada Leontief modelini bir markov zinciri içinde tanımlamağa çalışacağız.

4.1 — Teknolojik Katsayıların Stokastik Matris Elemanları Olarak Tanımlanması

Elemanları a_{ij} olan A kare matrisinde her bir satır toplamı olan,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad (12)$$

ise bu matris markov zincirlerinin geçiş olasılıkları (ara) matrisi olarak gözönüne alınabilir. Ancak bu durumda $(1-A)$ matrisi singüleridir. Yani aynı mertebeden determinantı sıfır olur. Bu taktirde ise $(1-A)$ nın ters matrisi olamıyacağından (7) denklem sisteminin bir çözümü bulunamıyacaktır. Bu nedenle bundan sonra bu duruma meydan vermemek için sadece en az bir kârlı durumu bulunan, yani en az bir satır elemanları toplamı 1'den küçük olan,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1 \qquad (13)$$

modelleri gözönüne alacağız. Böylece, bir Leontief modelinin markov zinciri aşağıdaki özelliklere sahip olacaktır.

a) (M) markov zincirinin durumları Leontief modelinin (n) sayıdaki sektörler arası faktör akımı ile banka durumu olarak nitelediğimiz bir (n+1) inci ek durumdan ibarettir.

b) (M) markov zincirinin geçiş olasılıkları matrisi (ara matris) elemanları,

$$P_{ij} = a_{ij} \quad \text{eğer} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$P_{i,n+1} = 1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{eğer} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14)$$

$$P_{n+1,j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ve nihayet

$P_{n+1,\ n+1} = 1$ olmaktadır. Bu elemanlardan oluşan P matrisi aşağıda açık olarak gösterilmiştir.

$$P = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i \\ \\ S_n \\ S_{n+1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_i & S_n & S_{n+1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} & 1-\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} & 1-\sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} & 1-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & -a_{nn} & 1-\sum_{j=1}^{n} a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Yukarıdaki matris daha kısa bir biçimde,

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & 1-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] *$$

şeklinde de gösterilir. Bu şekilde tanımlanan markov zincirini aşağıda olduğu gibi yorumlamak gerekmektedir.

i sektörü, kullanmak üzere sağladığı 1 TL-lık kaynağın (a_{ij}) kadarını

* P matrisini bir çok kaynakta olduğu ve bizim de baştarafta gösterdiğimiz gibi,

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1-\sum a_{ij} & A \end{array} \right]$$

Formunda yazmak da mümkündür.

1. nolu sektörden ihtiyacı olan faktörü almak için, (a_{i2}) kadarını 2. nolu sektörden ihtiyacı olan faktörü almak için, nihayet (a_{in}) kadarını (n) nolu sektörden ihtiyaç olan faktörü almak için sarfetmektedir. 1 TL dan geriye kalan miktar (eğer kalmış ise) $1-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$ ise, i, sektörünün, bankaya yatırdığını varsaydığımız kârı olmaktadır. P ara matrisin son satırında sonuncu eleman dışındaki elemanların tümünün sıfır olması banka durumu olarak adlandırdığımız bu (n+1) inci durumun bir emen durum olduğunu göstermektedir. Bunun anlamı, bankanın parayı aldığı fakat harcamadığı şeklindedir. Başka bir tanımla, diğer durumlardan banka durumuna giriş mümkün, ancak o durumdan çıkış mümkün olmamaktadır.

4.2— Negatif Olmayan Bir Çözümün Koşulları

Şimdi (7) denklem sisteminin negatif olmayan bir çözümünün bulunabilmesi için gerek ve yeter koşulları iki teoremden yararlanarak iki aşamada saptamağa çalışalım.

Teorem 1— Ancak ve yalnız M markov zinciri içindeki herhangi bir durumdan banka durumuna gitmek (bir veya daha çok adımda) mümkün ise (n) büyüdükçe A^n sıfıra yaklaşır.

Teoremi ispatlamak için,

$$P^n = \left[\begin{array}{c|c} A^n & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

matrisini gözönüne alalım. Bu matriste (*) işareti ile gösterilen elemanlardan en az birisi pozitiftir. A^n'in sıfıra yaklaşması ancak P^n'de son sütun elemanlarının 1'e diğer sütun elemanlarının sıfıra yaklaşması ile mümkün olur. Bu sonuncu durumda ise, başlangıç durumu ne olursa, olsun, ancak markov zinciri bir emen durum ile biterse ortaya çıkar. Bu da yalnızca herhangi bir durumdan banka durumuna gitmek mümkün olduğunda doğrudur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2— (7) denklem sisteminin ancak ve yalnızca, eğer Leontief modeli ile ilgili markov zinciri emen bir zincir ise negatif olmayan bir çözümü vardır.

(A) matrisi (3) koşullarını sağlayan bir matris ise, sadece ve sadece ilgili markov zinciri emen bir zincir ise ve tek emme durumu olarak (S_{n+1})

banka durumuna sahipse (7) denklem sisteminin her $(n > 0)$ için negatif olmayan çözümleri bulunabilir. Eğer bir emen zincir için tek emen durum (S_{n+1}) ise,

$$(1-A)^{-1} = N \qquad (18)$$

eşitliğini sağlayan ve negatif olmayan bir N değeri vardır. Bu nedenle;

$$X = N.\,W \qquad (19)$$

istenen çözüm olur.

4.3— Durumun Ekonomik Açıklanışı

Yukarıdaki sonucun basit bir ekonomik yorumu yapılabilir. Bu sonuç, her (S_i) durumundan (i= 1,2......n) banka durumuna ulaşmanın mümkün olduğunu ortaya koyar. Banka durumuna ulaşmak iki şekilde mümkün olmaktadır.

1— Bankaya doğrudan ulaşan durumlar ki bunlar kârlı sektörlerin durumlarıdır,

2— Bankaya bir kârlı sektör aracılığı ile ulaşan durumlardır. Yukarıdaki sonuç her kârsız endüstrinin bir kârlı endüstri aracılığı ile banka durumuna ulaşmak zorunda olduğunu da göstermektedir. Bu nedenle Leontief modelinin bir markov zinciri ile tanımlanmasında temel koşullardan birisi modelde yer alan herbir sektörün ya kâlı olması ya da kârlı bir sektöre bağlı olmasıdır. Örneğin, tüm sektörlerin emek sektörüne bağlı olduğunu ve emek sektörünün de kârlı bir sektör olduğunu (emeğe askari geçim seviyesi üzerinde ücret ödendiği anlamına gelir) varsayarsak, sözkonusu temel koşulumuz sağlanmış olur ve tüm talepler yerine getirilebilir (11).

Eğer yukarıdaki koşul yerine getirilemez ise ekonomi mümkün taleplerin bir kısmını karşılayamaz. Böyle bir durumda ekonominin yerine getirebileceği taleplerin çeşitleri neler olabilir? Önce hiç bir kârlı sektörün olmadığı durumu ele alalım. Bu, her sektörün, ürettiklerinin tümünü kendi üretimlerinin girdisi olarak kullanıp hiç bir dış talebi karşılayamadıkları anlamına gelecektir. Bunun ispatı kolaydır.

Eğer, hiç kârlı sektör yoksa, bu taktirde (A) matrisinde her satır toplamı 1'e eşit olur. Bu nedenle,

$$AE = E \qquad (20)$$

(11) Kemeny John G., Snell J.Laurie; Finite Markov Chains; s. 200—205 Van Nostrand Reinhold Company New York 1960

dır. şimdi, (6) eşitliğinin iki yanını da (E) ile çarpalım.

$$XE = XA. E + WE \qquad (21)$$

olur. $AE = E$ olduğu için de

$$XE = XE + WE \qquad (22)$$

olup, buradan $WE = 0$ sonucuna varılır. Bu sonuç tüm talepler toplamının sıfır olduğu veya hiç bir pozitif talebin karşılanamadığı anlamına gelir.

Şimdi de yukarıda belirtilen temel koşulun ihlâl edildiğini yani, markov zincirinin tek bir emme durumuna sahip olmadığını varsayalım. Bu durumda (S_{n+1}) den başka bir ergodik küme olması gerekir. Yani, hiç biri kârlı olmayan ve grup dışındaki hiç bir sektöre bağımlı bulunmayan kapalı bir sektör grubu olması gerekir. Bu sınıftan olan sektörlerin kümesini yani (S_{n+1}) in dışındaki tüm ergodik kümelerin bileşimini alalım. Bu sektörlerin $(\bar{A})$ alt matrisi yukarıdaki gibi

$$\bar{A}E = E \qquad (23)$$

özelliğine sahiptir ve bu yüzden hiç bir dış talebi karşılayamaz. Böyle olunca da bu sektörlerden oluşan topyekün bir ekonomi, sektörlerin ürettiği mallara olan dış taleplerin hiç birini karşılayamaz. Aynı zamanda üretimleri için bu sektörler birbirlerinden de girdi sağlayamazlar. Çünkü, böyle bir durum dahi kapalı sektörler için dış talep niteliğindedir.

Fakat, eğer kârsız sektörler kapalı grubunu ve bunlara bağlı sektörlerin tümünü modelden çıkartırsak geriye kalan sektörler (eğer kalırsa) koşulu sağlar ve mümkün talepleri karşılayabilir. Bu sonuçlar şöylece özetlenebilir.

Eğer kârlı olmayan ve hiç bir kârlı sektöre de bağlı olmayan sektörler varsa bunlar ve bunlara bağlı olan endüstriler hiç bir dış talebi karşılayamazlar. Geri kalan sektörler herhangi bir dış talebi karşılayabilirler.

Hangi sektörlerin bir dış talebi karşılayabileceğini bulmak için aşağıdaki kolay algoritma durumların sınıflandırılmasında kullanılabilmektedir (12).

a— (A) matrisinde elemanları toplamı $\sum a_{ij} < 1$ olan her satır işaretlenir. Bu satırlar kârlı sektörlere karşılık gelen durumlardır.

b— İşaretlenmiş satırlarla aynı indisleri olan sütunlar işaretlenir ve bu sütunların içinde pozitif elemanları olan satırlar yeniden işaretlenir.

c— (b) deki işlem hiç bir yeni satır kalmayıncaya kadar devam ettirilir.

Bu işlemlerin sonunda şu iki durumdan biri gerçekleşmiş olacaktır:

1— Bütün satırlar işaretlenmiştir (markov zinciri emen bir zincirdir)

(12) Cogan E.J. ve diğerleri A.g.k., s. 208

2— Bazı satırlar işaretlenmemiştir. Bu taktirde markov zinciri emen bir zincir değildir.

Yukarıdaki algoritmayı yorumlamak zor olmamaktadır. (a) adımı öyle durumları tanımlarki bu durumların herbirinden sadece bir adımda banka durumuna gitmek (erişmek) mümkündür. Bu nedenle, eğer (C_1) durumu ortaya çıkarsa ilgili markov zinciri tek emme durumlu (S_{n+1}) emen bir zincirdir ve negatif olmayan herhangi bir dış talep karşılanabilir.

(b) adımının işaretlendirdiği durumların herbirinden önceden işaretlenmiş bir duruma (a adımının işaretlendirdiği durumlara) bir adımda gitmek mümkündür. Bu nedenle, (b) nin işaretlediği durumlardan banka durumuna ancak birden fazla adımla gitmek mümkündür. Bu biçimde de olsa (A) matrisinin bütün satırları işaretlenmiş ise markov zinciri yine emen bir zincir olup sektörler herhangi bir dış talebi karşılayabilirler.

Eğer (C_2) durumu ortaya çıkarsa, işaretlenmemiş sıralar (A) matrisinde toplamları 1'e eşit olan $\left(\sum a_{ij} = 1\right)$ kârsız kapalı sektör gruplarına tekâbül ederler. Bunlara bağlı olan durumları da (b) yi tekrar tekrar uygulayarak belirleyebiliriz. Bu tür satırlara tekâbül eden sektörler bir dış talebi karşılayamazlar.

Böylece, ekonominin hangi sektörlerinin hangi dış talebi karşılayabileceği sorusuna bu algoritma bir yanıt sağlamış olur. Algoritma çok geniş kapsamlı matrisler için dahi kolaylıkla uygulanabilir. Aşağıda herhangi iki Leontief modeli (A) matrislerinin, yukarıdaki algoritmaya göre işaretlenişi görülmektedir.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} X \\ X \end{array}\right\} a_1 \\ X\, b_1 \\ X\, b_2 \end{array} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} X \\ X \end{array}\right\} a_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

(25) (24)

Algoritma ilk matrisin (A_1) bir emen markov zinciri verdiğini, A_2 nin ise bir emen zincir vermediğini gösterir.

Hiç bir dış talebi karşılayamayan sektörlerin ekonominin gereksiz bir bölümünü oluşturduğu düşüncesinden hareket ederek böyle sektörlerin bir kenara bırakıldıklarını, yani modele alınmadıklarını varsaydığımız taktirde $(1-A)^{-1}$ matrisi vardır.

4.4— Sektörler Arası Para Akımı

Zarar eden sektörlerin model dışı bırakıldıklarına tekrar işaret ettikten sonra, burada şu soruya yanıt getirmek istiyoruz. Bir müşteri i sektörüne, sipariş ettiği mal karşılığı olarak 1 TL. verdiği zaman bu 1 TL. çeşitli sektörlere hangi miktarlarda ulaşacaktır?

Şimdi tek bir emen durumun (banka durumunun) gözönüne alındığını varsayalım. Elimizde i'inci bileşeni 1, diğer bileşenleri sıfır olan bir Wi talep vektörü bulunsun.

Bu taktirde,

$$X = Wi(1-A)^{-1} = Wi.\ N \qquad (26)$$

eşitliği basit olarak (N) matrisinin 1'inci satırından ibaret olur. Bu durum (N) nin elemanlarına doğrudan bir yorum sağlamaktadır. Buna göre (n_{ij}) $(n_{ij} \in N)$ i sektörüne yapılan 1 TL-lık siparişi karşılamak için j sektörünün üretmesi gereken miktarın parasal değeridir (13). J endüstrisi (1) birimlik üretiminden $P_{j,n+1}$ kadar kâr sağladığından yukarıda sorduğumuz sorunun yanıtı şöyle olacaktır:

Eğer (i), sektörüne 1 TL. verilirse (j) sektörünün kârı $n_{ij} \cdot P_{jn+1}$ olur.

Kârların tümünün toplamı:

$$\sum_j n_{ij} . P_{j,n+1} = P_{n+1,n+1} = 1 \quad (27)$$

dir. [Çünkü P_{n+1n+1} tek emen (banka) durumudur]. Bu sonuç, tüketici tarafından yapılan 1 liralık harcamanın kâr eden sektörlerin kârı olarak banka durumuna intikal ettiğini göstermektedir.

Buna bağlı bir soru da; (i) endüstrisine 1 liralık bir sipariş yapıldığında bunun tüm endüstri dallarına ne kadar bir üretime yol açacağıdır? (i) sektörüne yapılan bu miktar siparişin (j) sektöründe (n_{ij}) kadar üretime yol çatığı yukarıda belirtildi. Diğer tüm endüstri dallarında ise toplam olarak,

$$\sum_{j=1}^{n} n_{ij} = t_i \qquad (28)$$

kadar üretime yol açar. Burada (t_i),

---

(13) Bkz.:Şenel Musa; Matematiksel İktisat; EİTİA. Yayını no: 187/118 s.211-216

$$NE = T \qquad (29)$$

eşitliğini sağlayan (T) matrisinin (i), inci bileşeni olmaktadır. Bu bileşen normal olarak 1'den çok daha büyük ($t_i > 1$) olur. W kadar bir sipariş verildiğinde meydana gelecek toplam üretim ise,

$$WNE = W\,T \qquad (30)$$

olmaktadır. Aşağıda bu açıklamalar bir örnek üzerinde kolaylıkla izlenebilecektir.

4.5— Bir Örnek Uygulama

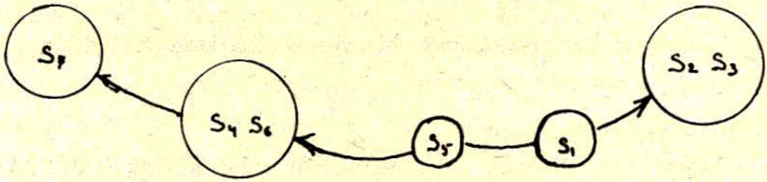
Altı sektörlü bir ekonomi için teknolojik matris aşağıdaki (A) matrisi olsun.

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (31)$$

Bu matrisi bir geçiş olasılıkları (stokastik) matrisine dönüştürelim.

$$P=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (32)$$

P matrisinin son sütunundan (bu sütun $1-\sum a_{ij}$ elemanlarından oluşmuştur) S_1, S_5 ve S_6 satırlarının kârlı endüstri kollarını temsil ettiği görülmektedir. Daha önce açıkladığımız basit algıritma, S_2 ve S_3 sektörlerinin hiç bir dış talebi karşılayamayacağını, ayrıca, (S_1) sektörünün kârlı bir sektör olmasına karşın (S_2) sektörüne bağımlı olması nedeniyle (S_2 emen bir durumdır) S_7 durumuna erişemiyeceğini, bu nedenle bu üç durumun bir ergodik sınıf (kapalı sektörler grubu) oluşturduğunu ortaya koymaktadır. Bu yüzden bu grup model dışı bırakılacaktır. (S_4) sektörü kârsız olmasına karşın (S_6) sektörüne bağlı olduğu için modelde yer alacaktır. Durumların sınıflandırılışı şekil (4.1) de görülmektedir (14).



(Şekil 4)

Kısaltılmış geçiş olasılıkları matrisi olarak isimlendireceğimiz yeni P stokastik matrisi,

$$P= \begin{array}{c} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

olmaktadır. $(1-A)^{-1} = N$ matrisi hesaplanırsa (15),

$$N= \begin{array}{c|ccc} & S_4 & S_5 & S_6 \\ \hline S_4 & 4 & 0 & 4 \\ S_5 & 2 & 4/3 & 4/3 \\ S_6 & 2 & 0 & 4 \end{array} \qquad (34)$$

elde edilir. Buradan, NE= T eşitliği gereğince

(14) Bkz. Kemeny John G. Snell J. Laurie. A.g.k., s. 205

(15) N'in hesaplanmasında (A) matrisi yerine

$$A= \begin{bmatrix} A_1 & O \\ C & D \end{bmatrix}$$ gereğince indirgenmiş (A_1) matrisi alınmıştır.

$$T = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (35)$$

sonucu bulunur. Şimdi, elde ettiğimiz bu sonuçları açıklayabiliriz. Örneğin; S_6 sektörüne yapılaon 1 birimlik (1 TL.) sipariş, S_4 den 2, S_5 den 4/3 ve S_6 dan 8/3 olmak üzere 6 birimlik (TL.) toplam üretim meydana gelmesini sağlamaktadır. Bu 1 TL.lık siparişten

$$S_4 \rightarrow n_{ij} \cdot P_{j,n+1} = n_{54} \cdot P_{4,7} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \text{TL.} \quad S_5 \; n_{5,5} P_{5,7}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \text{ ve } S_6 n_{5,6} \cdot P_{6,7} = 2 \cdot 0 = 0 \text{ TL.}$$ kadar kâr sağlanmaktadır.

Ekonomide dış talebin, örneğin W= (2,3,1) vektörü ile temsil edildiğini varsayarsak, bu taktirde çeşitli sektörlerce üretilen miktar,

$$W.N. = (2,3,1) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 2 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (16,4,20) \qquad (36)$$

birim olmaktadır. Bu üç sektörün toplam üretiminin parasal değeri ise,

$$W.T. = (2.3.1 \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = (16+18+6) = 40 \; TL. \qquad (37)$$

olacaktır.

Bazı pratik sorunlar yüzünden kesaplamalar zor olabilir. Bu nedenle çoğu kez ekonominin parçalara ayrılmış bir modelini oluşturarak çözümlemeye gitmek daha kolay olabilmektedir. Ekonominin parçalanabilirlik koşulu ise şöyle tanımlanabilir: Bir endüstriyel grup içinde yer alan herhangi bir endüstri, bir başka endüstriyel grubun (veya kendi grubunun) bir üyesi veya üyeleri ile birim başına aynı taleplerde bulunursa (bu taktirde bu şekildeki tüm endüstriler birim başına aynı kârı sağlayacaklardır) ekonomi sektörler arasında parçalanabilir (16). Ancak, bu koşulun tam olarak gerçekleşmesi genellikle olanaksızdır. Bu durumda parçalama işleminin yapılabilmesi için makul yuvarlamalar (yakın değerler) yapılabilir. Yukarıda ele aldığımız örnekte (33) no'lu (P) matrisi S_4, S_5, S_6, S_7 olarak parçalanabilir. Buna göre (P) matrisinin yeni şeklini $\hat{P}$ ile gösterirsek,

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

yazılabilir. Burada, S_5 sektörünün diğer sektörlerden talepleri S_6 sektörünün taleplerine benzediği kabul edilerek S_5 sektörü S_6 tarafından temsil edilmiştir. S_5 ve S_6 sektörleri bir endüstriyel grup olarak hareket ediyorlarmış gibi düşünülmektedir. Bu işlem endüstriyel gruba dahil sektörlerin herbirine olan taleplerin ayrı ayrı hesaplanmasına olanak vermemekte, ancak gruba yapılan toplam talebin elde edilebilmesine olanak vermektedir. Bu da,

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (39)$$

olur. Örneğin,

$$\hat{W} = (2,4) \text{ için) } \hat{W} \cdot \hat{N} = (16,24) \text{ ve } \hat{W} \cdot \hat{T} = (2,4) \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = 40 \text{ TL.}$$

nur. Görüldüğü gibi gerek fiziksel üretim miktarı gerekse parasal miktar toplam itibariyle parçalanmamış sektörler durumundaki değerlerin aynı olmaktadır. Baş vurulan bu yöntem bize, endüstriyel grupları temel unsurlar olarak alıp, modeli küçültme ve hesaplamaları kolaylaştırma olanağı veren faydalı bir yöntem olmaktadır.

Bu analiz, kârlı sektör için bir banka durumu oluşturmak, yani markov zincirinde birden çok emen durumlara yer vermek suretiyle daha geniş kapsamlı olarak da yapılabilir. Ancak buruda, konunun, amacı aşacak ölçülerde

(16) Kemeny, John G., Snell J. Laurie; A.g.k., s.205

genişlemesine meydan vermemek için bu analize girişilmemiştir.

Böylece, markov zincirleri kuramının çok değişik alanlarda uygulama imkânı bulunabileceğini ve birçok değişik bilgiler sağlayabileceğini söylemek mümkün olmaktadır.