Uludağ Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi
Uludağ Journal of Economy and Society
Cilt/Vol. XXXIV, Sayı/No. 1, 2015, pp. 27-46

C# PROGRAMLAMA DİLİNDE GELİŞTİRİLEN PROGRAM İLE RASGELELİĞİN SINANMASI

***Arzu EREN ŞENARAS*[1]**
***Şahin İNANÇ*[2]**
***Hayrettin Kemal SEZEN*[3]**

Özet

Bu çalışmanın amacı, benzetim çalışmalarında da sıkça kullanılan rassal sayıların rassallığının test edilmesidir. Rassal sayılar, benzetim çalışmalarında analiste kolaylık sağlamaktadır. Ancak dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, kullanılan rassal sayıların gerçekten rassal olup olmadığının sınanması gerektiğidir. Bu çalışmada birçok ilginç yönüyle her alanda karşımıza çıkan ünlü altın oran sayısının virgülden sonraki 49999 hanesinin rasgelelik testleri C# programa dilinde geliştirilen program aracılığıyla gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Benzetim, Rasgele Sayılar, Rasgelelik Testleri, Altın Oran, C#.*

Testing of Randomness Using Developed Program with C#

Abstract

This paper attempts to analyze randomness of the random numbers that are usually used in simulation studies. Random numbers facilitates to analyst for the the simulation studies. However, an important issue to be considered, random numbers, that are used, should be tested whether they are really random. In this study, we tested randomness of 49999 digit number after the comma of famous golden ratio,

[1] *Arş.Gör., Uludağ Üniversitesi, İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, arzueren@uludag.edu.tr*
[2] *Öğr.Gör., Uludağ Üniversitesi, Keles Meslek Yüksek Okulu, sahininanc@uludag.edu.tr*
[3] *Prof.Dr., Uludağ Üniversitesi, İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, kemal@uludag.edu.tr*

which has many interesting aspects of each area, using a program that was developed in the C # program.

Key Words: *Simulation, Random Numbers, Randomness Tests, Golden Ratio, C#.*

1. GİRİŞ

Benzetim tekniği, maliyetsiz olması, politikaların geliştirilen model sayesinde saniyelik bilgisayar zamanıyla karşılaştırılma imkanı sağlaması, deneylerin tekrarlanabilme olanağı ve sıra dışı koşulların etkilerini güvenlik açısından sorun yaratmadan öngörülmesi gibi sebeplerden dolayı günümüz yöneticilerinin en önemli karar araçlarından birisidir.

Günümüzde rassal sayılar şifreleme, güvenlik, kodlama gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Rassal sayıların en sık kullanıldığı alanlardan birisi de tartışmasız benzetim tekniğidir. Ancak kullanılan rassal sayıların rasgeleliği dikkat edilmesi gereken önemli bir noktadır. Altın oran, pi, $\sqrt{2}$ gibi irrasyonel sayıların rasgeleliğin bilinmesi farklı kullanım olanakları sunmaktadır. Bu konulara ilişkin yapılan literatür taramasına aşağıda yer verilmiştir.

Sena, Agarwal, Shaykhian (2007) yapmış oldukları çalışmada, Monte Carlo çalışmalarında kullanılması amacıyla altın oran ve pi sayılarının uygun rasgele dizi olarak göreli yararlarını tartışmışlardır. Kim ve Neggers (2008), altın oran ortalaması ve fibonacci ortalaması arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Kabirian Ve Olafsson (2009) çalışmalarında, altın oran taraması olarak adlandırılan yeni SO (Simulation Optimization) yaklaşımını tartışmışlardır. Alireza Kabirian, Sigurdur Ólafsson (2010), çalışmalarında yeni bir SO (Simulation Optimization) yaklaşımı olan altın oran taramasını sürekli problemler için geliştirmişleridir. Benavoli, Chisci, Farina (2009) yapmış oldukları çalışma, Fibonacci dizisinin altın oran ve diğer taraftan Kalman filtresi ile olan ilişkisini ortaya koymaktadır. Akarsu (2009) çalışmasında Türk Bayrağının hilal ve beş köşeli yıldızının, doğadaki çok sayıda canlı ve cansızın şekil ve yapısında bulunan altın oran kuralına uygunluğunu test etmiştir.

2. ALTIN ORAN VE FIBONACCI DİZİSİ

Altın oran, doğada bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum ve estetik açıdan en uygun boyutları veren geometrik ve sayısal bir oran ilişkisidir. Altın oran, İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci tarafından bulunan sayı dizisinde gizlidir.

Fibonacci[4]'nin 1202'de, 27 yaşındayken yazmış olduğu *Liber Abaci* ("Abaküs Konusunda Bir Kitap" olarak çevrilebilir) adlı kitabı, 1228'de ikinci baskısıyla günümüze kadar var olmayı başarmıştır. *Liber Abaci* oldukça büyük boyutlu bir kitaptır ve o dönemde bilinen matematiğin büyük bölümünün kayıtlarını içerir. Bunların arasından bir tanesi diğerlerinin çok ötesinde ünlü olmuştur: Günümüze erişen 1228 yılındaki ikinci baskının 123-124 sayfalarında yer alan problem tavşan üretmek gibi pek olası sayılamayacak bir konuyla ilgilidir (Lines,2005). Fibonacci, adının 19. ve 20. yüzyıllarda anılmasını daha ziyade bu probleme borçludur. Nedeni de bu problemin çözümünün son derece ilginç bir sayı dizisini vermesidir. Dizinin varlığı ancak 17. yüzyıl başlarında, Altın Oran'la ilişkisi de 18. yüzyıl ortalarında ortaya konulmuştur. (Bergil, 2009:65)

Fibonacci dizisi olarak adlandırılan bu dizinin terimleri F ile gösterilirse dizi de $F_1, F_2, F_3,\ldots\ldots\ldots\ldots, F_n$ ile gösterilir. $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ verildiğinde daha sonra gelen bütün terimlerin bulunabilmesini sağlayan basit denklem $Fn = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde olacaktır. Fibonacci dizisinin, Fn = $\left\{ 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144 \right\}$ etkin olarak kullanılan bir tarama tekniği olduğu söylenebilir. Dizide yer alan her sayı, kendisinden önce gelen iki sayının toplamını ifade etmektedir (Sezen, 2007). Dizinin terimleri arasında bu kural kadar rahat görülemeyen ancak bundan çok daha fazla ilginç matematiksel ilişkiler vardır. Matematikçilerin asıl ilgisini çeken ve Fibonacci adını bu kadar popüler yapan da işte bu ilişkiler olmuştur. Eğer her Fibonacci sayısı kendisinden önce gelen komşusuna bölünürse bu oran altın oran adı verilen bir sayıya yaklaşır. Buna göre bu oranlar aşağıdaki gibidir:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,6666666...$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

---

4 Fibonacci adı, "Bonacci'nin oğlu" anlamına gelen Fillius Bonacci' nin kısaltılmış şeklidir.

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625$$

$$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1{,}6153846........$$

$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1{,}6190476........$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1{,}6176470........$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1{,}6181818......$$

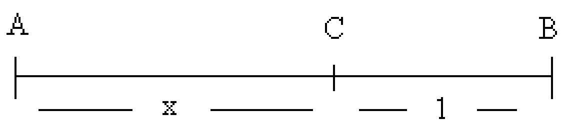
$$\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} = 1{,}6179775......$$

$$\vdots$$

Bu sayılar beklenmedik bir şekilde 1,618034…… sayısına doğru yaklaşmaktadırlar. İrrasyonel bir sayı olan altın oran sayısı $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ olarak tanımlanabilir. Altın oran matematikçiler, fizikçiler, filozoflar, mimarlar, sanatçılar ve hatta müzisyenler için uzun zamandır ilgi konusu olmuştur (Dunlap, 2003).

Altın oranı matematiksel olarak tanımlamak gerekirse ikiye bölünen bir doğru parçasının tamamının büyük parçaya oranının büyük parçaya oranının büyük parçanın küçük parçaya oranının birbirine eşitlenmesi ile elde edilir.

Bir AB çizgisi alalım ve bunu C noktasından iki bölüme ayıralım. C noktasının AB çizgisini AB:AC = AC:CB orantısını verecek şekilde bölmesi halinde, C'ye AB'nin 'altın bölümü', bu orantıyı oluşturan AB/AC ve AC/CB oranına veya değerine de Altın Oran deriz.



Şekil 1:
Altın Bölüm

C noktasından bölünmüş olan AB çizgisi üzerinde, AC = x ve CB = 1 olsun. Böylece, söz konusu AB/AC = AC/CB orantısı şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Bu da bize ikinci dereceden bir denklem verir:

$$x+1 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

AC/CB = x / 1 = x = Altın Oran olduğuna göre, Altın Oran'ın sayısal değerini ortaya çıkarmak için bu denklemin köklerini (x1.2) bulmamız yeterli olacaktır.

Denklemin pozitif kökü:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803....$$

Denklemin negatif kökü:

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}61803....$$

Bu sayı da Altın Oran'ın ters değerine eşdeğerdir. Altın oranın değeri ile ters değerini karşılaştırdığımızda, eşine rastlanmayan bir özelliğin farkına varırız. 1,618 kendisinden '1' çıkarıldığında, kendi ters değerine dönüşen yegane sayıdır:

$$1{,}618 - 1 = \frac{1}{1{,}618} = 0{,}618$$

Sonuç olarak $x^2 - x - 1 = 0$ ikinci derece denkleminin pozitif kökü olan $(1+\sqrt{5})/2$, Altın Oran'ı, negatif kökü olan $(1-\sqrt{5})/2$ de Altın Oran'ın negatif ters değerini vermektedir.

Ayrıca $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin köklerini topladığımızda '1' değerini, çarptığımızda da '-1' değerini elde ederiz:

1,618 + (-0,618) = 1

1,618 x (-0,618) = -1

Altın Oran'ın diğer bir çarpıcı özelliğini, yukarıdaki verilerden yararlanarak kolayca ortaya koyabiliriz:

$1{,}618 - 1 = \dfrac{1}{1{,}618} = 0{,}618$ olduğuna göre,

1,618 (-1,618) – 1,618=1

$(1{,}618)^2$ -1,618 =1

$(1{,}618)^2$ = 1,618+1

= 2,618……

Demek ki Altın Oran kendisine 1 eklendiğinde, kendi karesini vermektedir. Bu da, aynı şekilde, başka hiçbir sayıda rastlanmayan bir niteliktir.

Altın Oran'ı göstermek için ünlü Grek heykeltraşı Phidias'ın adının ilk harfi olan, Grek alfabesinin 21. harfi Φ (Phi: Türkçe okunuşuyla 'fi') kullanılmaya başlandı. Φ harfinin daha başka matematik notasyonlar için de kullanılmasından ötürü, giderek Altın Oran 'g' ile veya Grek alfabesinin 19. harfi olan τ (Tau) ile gösterilir olmuştur (Bergil, 2009).

Phi sayısının tahmini, kesirler ve karekök tarafından belirlenir. Altın oran olarak da adlandırılan inanılmaz phi aşağıdaki sonsuz dizi ve devam eden kare kökleri ile tam olarak ifade edilebilir(Sen ve Agarpal, 2007).

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}, \qquad \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}.$$

Altın orana adanmış olarak bilinen ilk kitap De Djvino Proportione by Luca Pacioli [1445-1519]'dir.1509 yılında yayınlanan bu kitap, Leonardo da Vinci tarafından dile getirilmiştir (Dunlap, 2003). Aralarında Mona Lisa tablosunun da bulunduğu pek çok eserin tuvalin içine altın oran gözetilerek yerleştirildiği iddia edilir. Sessiz sinemanın ünlü yönetmeni Eisenstain, Potemkin Zırhlısı filmindeki dramatik ögeleri altın orana göre yerleştirdiğini söyler(Sertöz, 1999).

3. RASSALLIK TESTLERİ

Benzetim çalışmalarında önemli olan sahte rassal sayıların nasıl üretildiğinden çok, bu sayıların gerçekten rassal olup olmadıklarıdır. Sahte rassal sayıların gerçek rassal sayılarda doğal olarak bulunan rassallık özelliğine sahip olup olmadığı, rassallık testleriyle kontrol edilir. Sahte rassal sayılar deterministik olarak üretilse de, benzetimde kullanılabilmeleri için rassal olmaları gerekir. Benzetim diliyle konuşulurken telaffuz edilen rassal sayı, değeri 0 ile 1 arasında bulunan ve üretilme sansı bu aralıktaki diğer bütün sayıların üretilme sansına eşit olan sayıdır. Bu özellik kısaca U(0,1) olarak gösterilir. Rassal sayıların en önemli iki istatistiksel özelliği düzgün dağılıma uygunluk ve bağımsızlık olarak ifade edilebilir. (Banks v.d., 2005). Bu nedenle sayıların rassallığını incelemeden önce sayıların tekdüze dağılıma uygun biçimde dağılıp dağılmadıkları araştırılmalıdır. Ardışık olarak üretilen sayılar arasında ilişki bulunmaması gerekir. Özetle, sahte rassal sayıların gerçek rassal sayılarla aynı istatistiksel özellikler taşıması beklenir. Bu amaçla geliştirilmiş testlere tabi tutulmaksızın sahte rassal sayıların kullanılması doğru olmaz.

Rassal sayı üreteçlerinin test edilmesine ilişkin olarak testler özelliklerine göre iki farklı kategoriye ayrılmaktadır. Bunlar üniform dağılıma ilişkin testler ve bağımsızlık testleri olarak adlandırılır. Söz konusu bu testlerden Kolmogorov – Smirnov ve Ki –Kare testleri üniform dağılıma ilişkin testler olmakla birlikte Run testi, Otokorelasyon testi, Gap testi ve Poker testi ise bağımsızlık testleri olarak bilinir (Banks, v.d., 1996: 298).

Bunlardan üniform dağılıma ilişkin olan her iki testte, rassal sayı üreteçleri tarafından üretilen rassal sayıların örnekleme dağılımı ile teorik üniform dağılımların arasındaki uyumun derecesini ölçer. Ayrıca, bu testler örnekleme dağılımı ile teorik dağılım arasında kayda değer bir farklılık olmadığını ifade eden sıfır hipotezi temel alınarak geliştirilmiştir (Banks v.d., 1996: 299). Bu testler izleyen şekilde ele alınabilir.

3.1. Serpilme Diyagramları

Serpilme diyagramı (scatter diagram), (x, y) şeklindeki iki değişkene ait sıralı ikililer kartezyen koordinat sistemine yerleştirilerek, iki değişken arasında ne tür bir ilişki olduğunu araştırır(Gürsakal, 2001). Rassal sayı üreteçleri tarafından üretilen diziye istatistik testleri uygulamadan önce dizinin serpilme diyagramının çizilmesi aydınlatıcı olabilir. Serpilme diyagramı bilgisayar ortamında n gecikme olmak üzere, dikey eksene U_k ve yatay eksene U_{k-n} yerleştirilerek çizilir. Elde edilen diyagramda noktaların saçılımında açık bir desen olmaması diğer bir ifadeyle noktaların rassal saçılmaları beklenir. Açık bir desen görülmesi söz konusu diziyi üreten üretecin problemli olduğunu gösterir (Pidd, 2004:186). Ripley (1977), bu yöntemle en çok ilgilenen kişidir (Sezen, 2009).

3.2. Ki – Kare Uygunluk Testi

Gözlemlenen frekanslar ile teorik (beklenen) frekanslar arasındaki fark Ki-kare testinin temelini oluşturur (Serper, 2010). Ki-kare testi Karl Pearson tarafından geliştirilmiştir. Ki – kare uygunluk testi, n hacimlik bir örneklemin ana kütleyi iyi temsil edip edemediğini veya hangi bölünmeye sahip bir ana kütleden geldiği unsurlarının incelenmektedir. Gözlemlenen frekanslarla teorik frekanslar arasında az çok bir fark ortaya çıkarsa bu durumda ki – kare uygunluk testi bu farkın rassal sebeplere bağlanıp bağlanamayacağını araştırır. Ki-kare (χ^2) uygunluk testinde izlenen adımlar aşağıdaki gibidir.

Adım: 1

χ^2 uygunluk testinde ilk adım olarak amaca ilişkin hipotezler oluşturulmalıdır;

Burada;

H_0: Örneklem ana kütleyi temsil edebilir.

H_1: Örneklem ana kütleyi temsil edemez.

hipotezleri yazılabilir.

Adım: 2

“Anlamlılık düzeyi” için %1 ve %5 düzeylerinden biri, kararın etkilenmemesi için öncelikle belirlenir.

Adım: 3

“Red bölgesi” ise, şu şekilde tanımlanabilir;

Red bölgesi: (Hesaplanan test istatistik değeri) $\chi^2_{hes} > \chi^2_t$ (Tablo değeri).

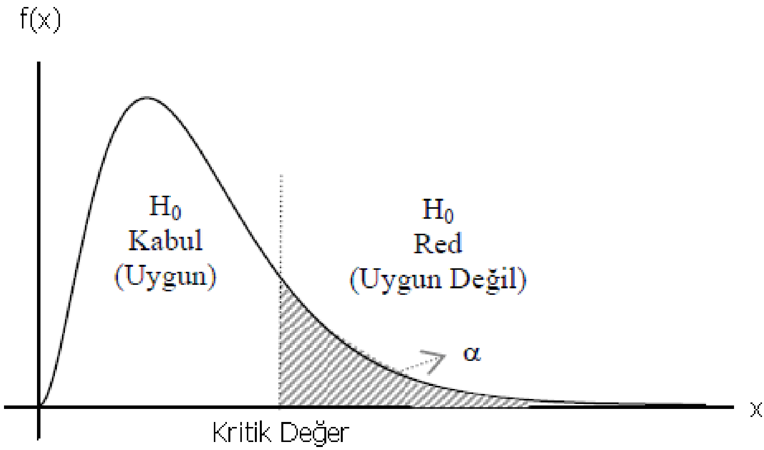
Adım: 4

χ^2_{hes} istatistiğinin bölünmesi χ^2_t bölünmesine çok yaklaştığı için, test istatistiği belli bir anlamlılık düzeyine ve k-1 serbestlik derecesine göre mevcut bir “χ^2 Değerleri Tablosundan” bulunan kritik değerler ile karşılaştırılmaktadır. ($\chi^2_{hes} \leftrightarrow \chi^2_t$)

“Test istatistiği” burada;

$$\chi^2_{hes} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(G_i - B_i)^2}{B_i}$$

formülüne göre hesaplanır. Burada G_i; i. sınıftaki gözlemlenen frekansı, *Bi*, i. sınıftaki beklenen frekansı ve k ise sınıf sayısını göstermektedir. Yukarıda red bölgesi, (χ^2_{hes})’nın (χ^2_t)’den büyük olduğu bölge seklinde tanımlanmıştır. Bu tanımlamaya göre $\chi^2_{hes} < \chi^2_t$ olduğunda H_0 hipotezi kabul edilirken, $\chi^2_{hes} \geq \chi^2_t$ olduğunda ise reddedilir. Ki-kare testinin karar modeli Şekil 2’deki gibidir.



Şekil 2.
Karar Modeli

Bu testte dikkat edilmesi gereken, her sınıfın teorik (beklenen) ve gözlenen frekanslarının 5'ten küçük olmamasıdır. Böyle bir durumla karşılaşıldığında sınıfların birleştirilmesi yoluna gidilir. Ancak örnek sayısı az olduğunda bunu gerçekleştirmek mümkün olmayabilir.

3.3. Kolmogorov - Smirnov Uygunluk Testi

Bu test 1933'de Rus Matematikçisi A.N.Kolmogorov tarafından önerilmiştir. Kolmogorov tek örnek için uyum iyiliği testini önerdikten sonra 1939'da yeni bir Rus matematikçisi olan N.V. Smirnov iki bağımsız örnek için uyum iyiliği testini önermiştir. Kolmogorov testi ve Smirnov testi benzerlik nedeniyle uygulamada Kolmogorov- Smirnov uyum iyiliği testleri olarak bilinirler. Bu test üniform dağılımın sürekli dağılım fonksiyonu F(x) ile N adet gözlem setinden örneklem olarak alınmış olan ampirik sürekli dağılım fonksiyonu S_N (x)'i karşılaştırmaktadır.

Tanım olarak;

$F(x) = x , \qquad 0 \leq x \leq 1$ verilebilir.

Ayrıca, eğer rassal sayı üreticilerinden alınan örneklem seti ; R_1 ,R_2 ,......,R_N olarak belirlenir ise, o zaman ampirik sürekli dağılım fonksiyonu S_N (x) şu şekilde tanımlanabilir;

$$S_N(x) = \frac{R_1, R_2, ..., (toplamsayısı) \leq x}{N}$$

Bununla birlikte, N değeri büyüdükçe (gözlem sayısı arttıkça), S_N (x) fonksiyonu, F(x) fonksiyonuna daha iyi bir yaklaşım ile sıfır hipotezinin doğruluğunu sağlayacaktır.

Kolmogorov – Smirnov uygunluk testi, F(x) ve S_N (x) fonksiyonları arasındaki en büyük kesin sapmanın, rassal değişkenler dizisi üzerinden elde edilmesi ile uyarlanan bir testtir. Bu durum bir istatistik üzerinden uyarlamalı olarak;

$$D \max \left| F(x) - S_N(x) \right|$$

şeklinde ifade edilir.

Bu ifade edilenlerin ışığında, üniform sürekli dağılıma sahip bir fonksiyonun test edilmesine ilişkin olarak test yöntemi şu adımları izlemektedir;

Adım: 1

Söz konusu verilerin küçükten büyüğe doğru sıralanmasıdır. Bu bakımdan, (i) R'nin i'ninci en küçük gözlemi belirttiği düşünülerek;

Dolayısıyla ;

$R_{(1)} \leq R_{(2)} \leq R_{(N)}$ seklinde sıralanabilir.

Adım: 2

$$D^{+} = \max_{1 \leq i \leq N} \{ i / N - R_{(i)} \}$$

$$D^{-} = \max_{1 \leq i \leq N} \{ R_{(i)} - (i-1) / N \}$$

Adım: 3

$D = \max (D^{+}, D^{-})$ hesaplanır.

Adım : 4

α anlamlılık düzeyi ve verilen N örneklem büyüklüğü ile D_α, kritik değeri tablo yardımıyla tanımlanır.

Adım: 5

Karar aşaması olarak adlandırılır. Eğer örneklem istatistiği D, D_α'dan daha büyük ise, o zaman örneklemin bir üniform dağılımdan geldiği bilgisini veren sıfır hipotezi reddedilir. Eğer $D \leq D_\alpha$ ise, sonuç olarak{ $R_{(1)}$, $R_{(2)}$,…………., $R_{(N)}$ } 'in doğru dağılımı ile üniform dağılım arasında hiçbir fark olmadığı anlaşılır (Banks v.d., 1996: 299-300).

Bircan, Karagöz ve Kasapoğlu 2003 yılında yapmış oldukları çalışma sonucunda; Ki-Kare uygunluk testi ile Kolmogorov-Simirnov tek örnek testlerinin aralarında önemli bir farklılık olmadığını, küçük örnekler için Ki-Kare uygunluk testi yerine kullanımı daha kolay ve ön şarta bağlı olmayan Kolmogorov-Simirnov testinin kullanılabileceği belirtmişlerdir (Bircan v.d., 2003).

3.4. Diziler (Runs) Testi

Diziler testi n birimlik bir veri setinde, değerlerin gözlenme sıralarına göre rasgeleliğini sınamaktadır. n birimlik bir veri setini k gibi bir değere göre (K=Ortanca, K=Ortalama, K=a) ard arda gelişlerindeki kümelenmenin rasgelelik koşullarına uygunluğu diziler ile test edilir. Bir veri setinde değerlerin gözlenme sıralarına göre ard arda gelişlerinde k'dan küçük ya da büyük olmalarına göre oluşturdukları kümelere dizi (run) adı verilir. n birimlik bir veri setinde değerlerin birbirlerine bağımlı olarak sıralanıp sıralanmadıklarını araştırmak için gözlenen küme sayısı (run) r ile beklenen ortalama dizi sayısı arasındaki fark aşağıdaki test modeli ile test edilir(Özdamar, 2004).

$$z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} = \frac{r - \dfrac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1}{\sqrt{\dfrac{(2n_1 n_2)(2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 n_2 - 1)}}}$$

Tek örneklem run anlamlılık testi genellikle bir örnekte rasgeleliğin test edilmesinde kullanılır. Ancak belirtilmesi gereken önemli bir nokta run testinin rasgeleliğin test edilmesi için gerekli olduğu fakat yeterli olmadığıdır. Ölçümlerin bazı belirlenmiş sıralamalara göre yapıldığı çalışmalarda sıkça sorulan sorulardan bir tanesi ölçümlerin ortalama değerlerinin seride farklı noktalarda farklılık gösterip göstermediğidir (Kalaycı, 2008: 97).

Üretilen sayıların belirli bir ortalamanın aşağısında ve yukarısında ya da altında ve üstünde yer alma durumunun gerçek değerler ile beklenen değerler karşılaştırılarak test edilmesine ilişkindir. Karşılaştırma için Ki – kare istatistiğinden yararlanılmaktadır. Knuth'a göre sadece bağımsızlığı sınayan diziler testi ki-kare testinden daha güçlü bir testtir. Çünkü üreteçlerin çoğu ki-kare testi ve serisel testten geçebilmektedir, ancak diziler testinden geçmede başarısız olmaktadırlar (Law ve Kelton, 2000).

3.5. Otokorelasyon Testi

Sayılar arasındaki korelasyonu test ederek, örneklem korelasyonu ile beklenen korelasyonu karşılaştırır. Otokorelasyon fonksiyonunun grafiği çizildiğinde ilişkileri yansıtan korelasyon katsayıları mutlak değerce sıfıra yakın olması u_t'lerin ilişkisiz olduğunu gösterir.

3.6. Gap Testi

Bu test belirlenen bir aralıkta sıralı değerlerin oluşmaları arasındaki boşlukları aramaya yöneliktir (Sezen, 2009). (a,b) $\subset (0,1)$ olmak üzere, belli bir üreteç ile (0,1) aralığından üretilen $u_1,u_2,\ldots$.. sayılarına bağlı

$$b_n = \begin{cases} 1, u_n \in (a,b) \\ 0, u_n \notin (a,b) \end{cases}$$

sayıları üretilsin. $b_1,b_2,\ldots$ dizisi 0,1'lerden oluşan biz dizidir. Dizide 1 rakamlarının aralarında bulunan 0 rakamlarının sayısı rasgeledir. Hatta, bir 1'den sonra ilk 1'in ortaya çıkışına kadarki 0'ların sayısı (X) geometrik dağılıma sahip olacaktır ve p=b-a olmak üzere,

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^x, x = 0,1,2,\ldots..$$

dır. Böylece, $b_1,b_2,\ldots$ dizisinde 1'ler arasında bulunan sıfırların sayıları gözlenerek geometrik dağılıma uyum testi yapılabilir (Öztürk ve Özbek, 2004).

3.7. Poker Testi

Bir poker elindeki gibi sayıların gruplandırıldığı düşünülür. Daha sonra ise, Ki – kare testi kullanılarak elden elde edilen ile beklenen durum karşılaştırılır. Bununla birlikte, üniformluğun test edilmesinde hipotezler izleyen şekilde oluşmaktadır;

$H_0 : R_i = U[0,1]$

$H_1 : R_i \neq U[0,1]$

Burada boş (sıfır) hipotez olan H_0 hipotezi, [0,1] aralığı üzerinde sayıların üniform olarak dağıldığını ifade eder. Ayrıca bağımsızlık için test yapmada ilgili hipotezler şu şekildedir;

H_0 : R_i = Bağımsız (olarak birbirini etkilemeden dağılış gösterir.)

H_1 : R_i $\neq$ Bağımsız (olarak birbirini etkilemeden dağılış gösterir.)

Burada ise H_0 hipotezi, sayıların bağımsız olduklarını ifade etmektedir. Bunlara ilave olarak, karar alıcı burada ifade edilen her bir test için α değerini belirlemektedir. Bu α değeri sık sık 0.01 ya da 0.05 anlamlılık düzeylerinde belirlenmektedir (Banks v.d., 1996: 298).

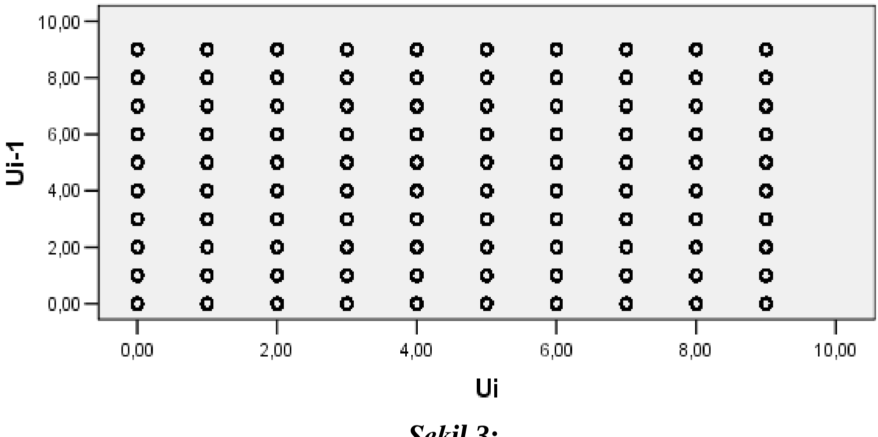
Poker testi, üretilen rasgele sayıların rasgele olup olmadığını incelemek için kullanılır. Uygulamada önce 5 ondalıklı sayılar üretilir ya da üretilen rasgele sayılar 5 erli gruplar haline sokulur. Basamaklar belirli bir poker eli gibi gruplanır. Olasılıklar her bir elin beklenen vuku bulması ile vuku bulma sayısının çarpımı olarak hesaplanabilir. Bu ise iki düzeltme faktörünün ve kombinatuar formül kullanılması ile başarılır.

İlk faktör elin görünüş(şekil) olasılığını temsil eder. İlk çift halinde ½ olan üçüncü faktöre ihtiyaç vardır. Çünkü AABBC ve BBAAC aynı sonucu verir, fakat iki farklı sonuç olarak kabul edilir.

4. UYGULAMA

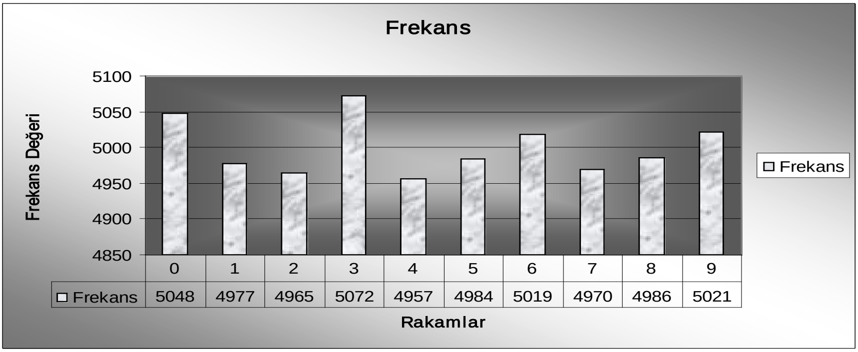
Bu çalışmada; birçok ilginç yönüyle dikkat çeken ünlü altın oran sayısının rasgeleliği araştırılmıştır. Aynı zamanda altın oran sayısının hesaplanması için bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmanın temeli Fibonacci Sayılarına dayanmaktadır ve Ek 1'de bu çalışmaya yer verilmiştir. Oluşturulan algoritmada, altın oran sayısının virgülden sonra kaç basamağı hesaplanması isteniyorsa Fibonacci sayılarının da aynı basamak sayısında hesaplanması gerekir. Diğer yandan bu büyülü sayının benzetim çalışmalarında kullanılabilirliğinin araştırılması temeline dayalı C# programlama dilinde rasgeleliğinin test edilmesi için bir program geliştirilmiştir. Rasgeleliğin sınanması için Ki-kare, Kolmogorov- Smirnov, Poker testi, Gap (Aralık) testi, Run (koşu) testi uygulanmıştır.

Öncelikle diziye istatistiksel testleri uygulamadan aydınlatıcı olabileceği düşüncesiyle dizinin bir gecikmeli serpilme diyagramı çizilmiştir. Elde edilen şekil aşağıda verilmiştir.



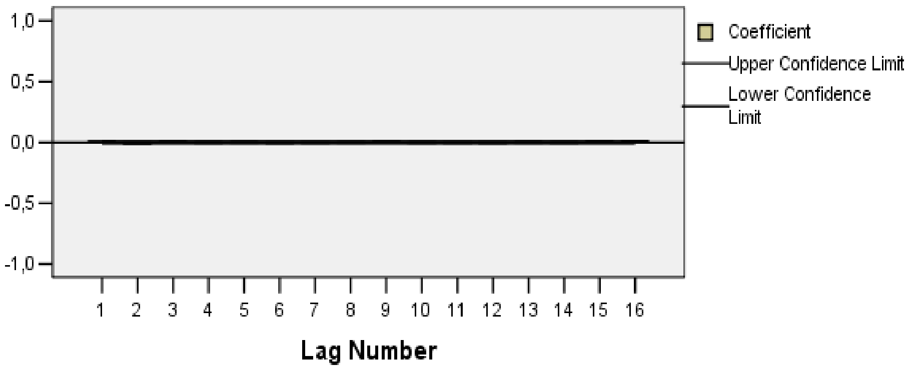
Şekil 3:
Serpilme Diyagramı, N=49999

Serpilme diyagramına bakarak noktaların saçılımında açık bir desen gözlenmemesi halinde rassal saçılmaları beklenmektedir. Ancak çizilen diyagramda verilerin 0 ile 9 arasında tam sayı değerli olmasından dolayı testlerde bulunan rasgelelik sonucu diyagramdan görülememiştir. Çizilen diyagramdan karar verilemediği için diyagramla ilgili yorum yapılamayacaktır. Bunun yerine 49999 basamak için rakamların frekans dağılımı çizilerek dağılımın tek düze olup olmadığı incelenmiştir. Çizilen frekans diyagramı Şekil 4'teki gibidir.



Şekil 4:
Frekans Diyagramı, N=49999

Frekans dağılımı incelendiğinde 0 ile 9 arasında yer alan rakamların frekanslarının birbirine oldukça yakın oldukları gözlenmektedir. Diyagrama bakarak rakamların frekans dağılımının düzgün olduğu söylenebilir. Ancak bu rasgeleliği kesin olarak ifade etmek için yeterli değildir. Serinin otokorelasyon fonksiyonunun grafiği Şekil 5'deki gibidir.



Şekil 5:
Otokorelasyon Fonksiyonunun Grafiği

Görüldüğü gibi 16 gecikmeye kadar olan ilişkileri yansıtan korelasyon katsayıları mutlak değerce sıfıra oldukça yakındır. Dolayısıyla u_t 'lerin ilişkisin olduğu söylenebilir.

Altın oran sayısının virgülden sonraki 49999 basamağının rasgeleliğini incelemek için istatistiksel testlerin uygulanarak yorumlanması gerekmektedir. Diyagramlar yalnızca ön bir bilgi niteliği taşır. Öncelikle seriye Ki-kare uygunluk testi olan, Sıklık testi uygulanmıştır. Bu test için sıfır hipotezi ve alternatif hipotez aşağıdaki gibidir:

H_0 : *Veriler düzgün (uniform) dağılmaktadır.*

H_1 : *Veriler düzgün (uniform) dağılmamaktadır.*

şeklindedir. Test sonucu 2,63 olarak hesaplanan test istatistiği 0,05 anlamlılık düzeyinde ve 9 serbestlik derecesi için 16,92 olarak bulunan ki-kare tablo değerinden küçük olduğundan sıfır hipotezi reddedilemez. Verilerin düzgün dağıldığı sonucuna ulaşılmıştır.

İkinci olarak ki-kare testinden daha güçlü bir test olan ve kümülatif frekans dağılımına dayanan Kolmogorov-Smirnov testi uygulanmıştır.

H_0 : $F_x(x)$ *düzgün (uniform) dağılmaktadır.*

H_1 : $F_x(x)$ *düzgün (uniform) dağılmamaktadır.*

Hipotezleri altında $D = \max|F(x) - S_N(x)|$ formülünden hareketle 0,009 olarak elde edilen test istatistiği, 0,05 anlamlılık düzeyinde 0,043 olarak hesaplanan kritik değerden küçük olduğundan "$F_x(x)$ düzgün (uniform) dağılmaktadır" hipotezi reddedilememiştir.

Uygulanan bir diğer test, verilerin belirli bir poker eli gibi gruplandığı ve dizinin oluşturduğu gruplanma sayısının teorik olarak beklenen sayılara uygunluğunun sınandığı poker testidir. Bir χ^2 uygunluk testi olmasından dolayı sınanacak hipotezler,

H_0 : Örneklem bölünmesi anakütle bölünmesine uygundur.

H_1 : Örneklem bölünmesi anakütle bölünmesine uygun değildir.

biçiminde yazılabilir. 1,853 olarak hesaplanan test istatistiği 0,05 anlamlılık düzeyinde ve 6 serbestlik derecesi için 12,59 olarak bulunan ki-kare tablo değeri ile karşılaştırılarak boş hipotezin reddedilememesine karar verilmiştir, dolayısıyla sayılar rasgeledir.

Dizideki sayıların basamaklarının rasgeleliğini test eden aralık testinde verilen basamaklar için sayımlar her uzunluk ve aralık için yapıldıktan sonra gözlenen ve beklenen aralıklar arasındaki farklılık χ^2 uygunluk testi ile test edilmiştir. Test istatistiği 0,001422 olarak hesaplanmış ve ki-kare tablo değeri 0,05 anlamlılık düzeyinde ve 9 serbestlik derecesi ile

16,92 olarak bulunmuştur. Söz konusu değerler karşılaştırılmış ve sayıların rassal olduğunu ifade eden boş hipotez reddedilememiştir.

Rasgeleliği araştırılan söz konusu diziye son olarak ki-kare testinden daha güçlü bir test olan ve yalnızca bağımsızlığı test eden diziler testi uygulanmıştır. Bu testte sınanacak hipotezler,

H_0 : Koşular tesadüfîdir; yani, koşular birbirinden bağımsızdır.

H_1 : Koşular tesadüfî değildir; yani, koşular birbirinden bağımsız değildir.

biçimindedir. Test sonucu $|-1,26| < Z_{tab} = 1,645$ olarak hesaplanan p-value değeri 0,05 anlamlılık düzeyinde değerlendirildiğinde verilerin rassal olduğunu ifade eden boş hipotezin reddedilemeyeceği anlaşılmıştır.

5. SONUÇ

Çalışmanın uygulama bölümünde irrasyonel bir sayı olarak kabul edilen altın oran sayısının ondalık basamaklarının rasgeleliğinin araştırılması amacıyla C# programlama dilinde geliştirilen program ile uygulanan rassallık testlerine ilişkin sonuçlara yer verilmiştir. Söz konusu basamaklara ilişkin olarak çizilen serpilme ve frekans diyagramlarının ardından basamaklara Kolmogorov-Smirnov (K-S) testi, poker testi, aralık testi ve koşu testleri uygulanmıştır. Basamaklardaki tekdüzeliğin gözlenmesi amacıyla çizilen frekans diyagramında rakamların frekans değerlerinin birbirine yakın olarak gözlenmesi basamakların tekdüzeliğine ilişkin bir sinyal olarak kabul edilebilir. Daha sonra yapılan rasgelelik testlerinin sonuçları incelendiğinde testlerin tamamında dizinin düzgün dağılıma uygunluğunu veya dizi elemanlarının birbirinden bağımsızlığını ifade eden sıfır hipotezinin reddedilemediği görülmüştür. Bu sonuç söz konusu dizi elemanlarının rasgele sayılar olduğunu ima etmektedir. Bu testler hiçbir zaman kesin bir uygunluğu ispat etmemektedir, söz konusu testleri geçen üreteçler kontrol edilmemiş bir özelliği barındırıyor olabilir. Dolayısıyla uygulanan testlerde testlerin sadece red sonucunun anlamlı olduğu belirtilmektedir. Ancak tam rasgeleliğin sağlanmasının neredeyse imkansız olması nedeniyle, rassal sayılarla çalıştırılan benzetim modelinin sistemin gerçek davranışını yansıtabilmesi için kullanılan sayıların birkaç istatistik testi geçmesi yeterli görülmektedir. Yapılan altı adet istatistiksel testi geçen dizinin benzetim çalışmaları başta olmak üzere rassal sayılara ihtiyaç duyulan alanlarda kullanılabileceği söylenebilir.

KAYNAKÇA

Akarsu V.(2009), 'Türk Bayrağı Ve Altın Oran İlişkisi', ***Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*** 25 (1-2) 437 – 448.

Alireza Kabirian, Sigurdur Ólafsson (2010) "Continuous Optimization Via Simulation Using Golden Region Search" ***European Journal Of Operational Research.***

Banks J., Carson J.S., And Nelson B. L., (1996), ***Discrete-Event System Simulation,*** Prentice Hall Inch, Usa.

Banks J., Carson J.S., Nelson B. L., Nicol D.M. (2005), ***Discrete-Event System Simulation***, Prentice Hall Inch, Usa.

Benavoli A., L.Chisci, A.Farina (2009), "Fibonaccisequence, Goldensection, Kalman Fitler And Optimal Control", ***Signal Processing***,Vol.89,1483-1488.

Bergil Mehmet Suat (2009), ***Doğada Bilimde Sanatta Altın Oran,*** Arkeoloji Ve Sanat Yayınları, 14.

Bircan, H., Karagöz Y., Kasapoğlu Y., (2003), Ki-Kare Ve Kolmogorov Smirnov Uygunluk Testlerinin Simülasyon İle Elde Edilen Veriler Üzerinde Karşılaştırılması, ***Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi***, C. 4, S. 1, 69-80.

Dunlap R.A.(2003) ***"The Golden Ratio And Fibonacci Numbers",*** World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

Gürsakal, N.(2001), Bilgisayar Uygulamalı İstatistik I, Alfa Basım Yayım Dağıtım, Bursa.

Hee S.K., Neggers J. (2008), "Fibonacci Mean And Golden Section Mean", ***Computers & Mathematics with Applications***, 228.

Kabirian A., Olafsson S. (2009) "Simulation Optimization With Hybrid Golden Region Search", ***Winter Simulation Conference.***

Kalaycı Ş. (2008), ***SPSS Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistik Teknikleri***, Asil Yayın Dağıtım, Ankara.

Law A. M., Kelton D. W. (2000), ***Simulation Modeling And Analysis***, Mcgraw Hill, Boston.

Lines M.E., Çev. Arık N. (2005), ***Bir Sayı Tut,*** Tübitak Yayınları, S.9, Ankara.

Özdamar, Kazım (2004), ***Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi***, Kaan Kitabevi, Eskişehir.

Öztürk Fikri, Özbek Levent (2004), ***Matematiksel Modelleme Ve Benzetim***, Gazi Kitabevi, Ankara.

Pidd, Michael (2004), ***Computer Simulation In Management Science***, John Wiley & Sons, Ltd, Usa.

Sen S.K., Agarwal Ravi P. (2007) "Golden Ratio In Science, As Random Sequence Source, Its Computation And Beyond", ***Computers & Mathematics with Applications***, vol 56,469-498

Sena S.K., Agarwal Ravi P., Shaykhian Gholam Ali (2007) “Golden Ratio Versus Pi As Random Sequence Sources For Monte Carlo Integration”, ***Mathematical and Computer Modelling,*** vol 48,. 161-178.

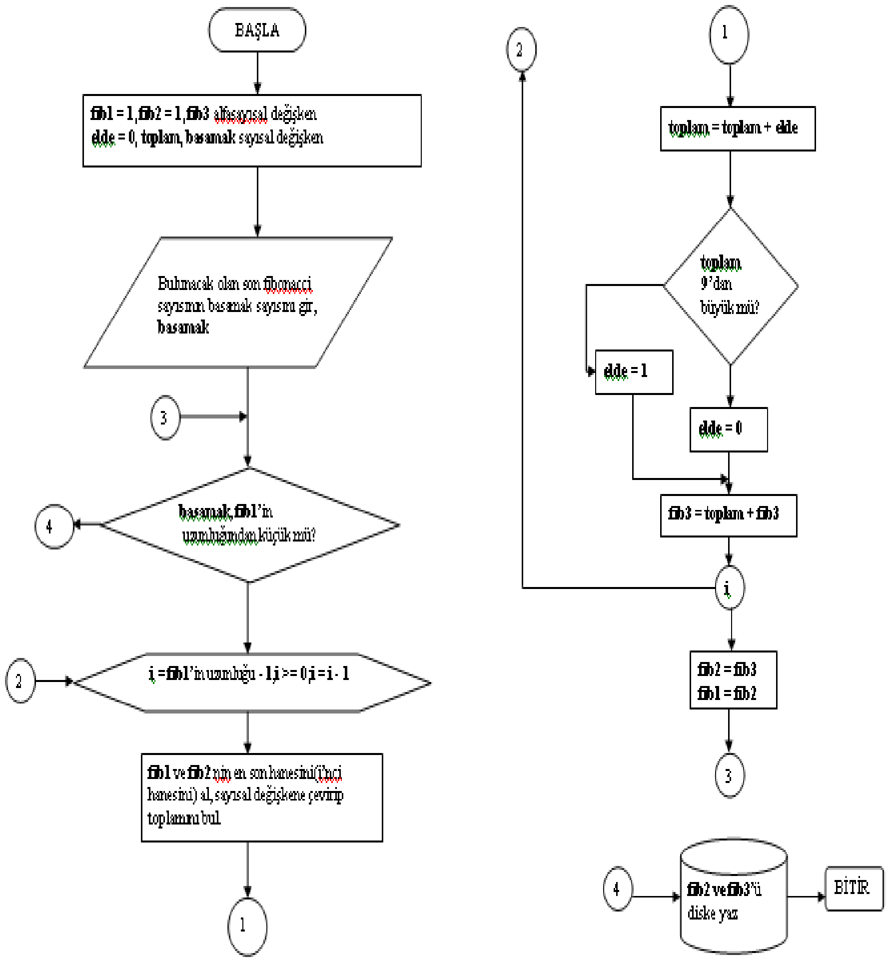
Sertöz, Sinan (1999), ***Matematiğin Aydınlık Dünyası,*** Tübitak Popüler Bilim Kitapları 36, Ankara.

Sezen H.K. Ve Günal M.M. (2009), ***Yöneylem Araştırmasında Benzetim***, Ekin Yayınevi, Bursa.

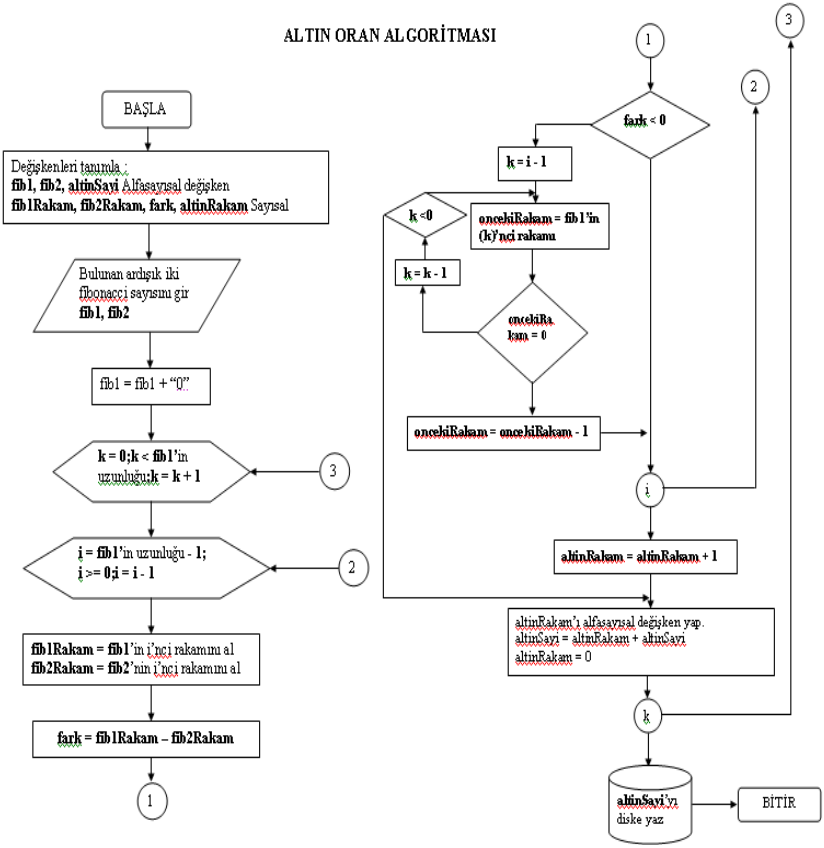
Sezen H.K.(2007), ***Yöneylem Araştırması***, Ekin Yayınevi, Bursa.

EK-1

FİBONACCİ ALGORİTMASI



EK-2


ALTIN ORAN ALGORİTMASI
BAŞLA
Değişkenleri tanımla :
fib1, fib2, altinSayi Alfasayısal değişken
fib1Rakam, fib2Rakam, fark, altinRakam Sayısal
Bulunan ardışık iki fibonacci sayısını gir
fib1, fib2
fib1 = fib1 + "0"
k = 0;k < fib1'in uzunluğu;k = k + 1
3
i = fib1'in uzunluğu - 1; i >= 0;i = i - 1
2
fib1Rakam = fib1'in i'nci rakamını al
fib2Rakam = fib2'nin i'nci rakamını al
fark = fib1Rakam – fib2Rakam
1
1
fark < 0
k = i - 1
k <0
onceki Rakam = fib1'in (k)'nci rakamı
k = k - 1
oncekiRakam = 0
oncekiRakam = oncekiRakam - 1
2
3
i
altinRakam = altinRakam + 1
altinRakam'ı alfasayısal değişken yap.
altinSayi = altinRakam + altinSayi
altinRakam = 0
k
altinSayi'yı diske yaz
BİTİR