

BİLEŞİK YÜKLEMeye MARUZ YAPILARIN PLASTİK ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİ

Yaşar PALA*

ÖZET

* *Bu çalışmada, Hill'in maksimum plastik iş ilkesi incelenerek bunun eğilme ve burulmaya maruz, bir ucundan ankastre prizmatik bir çubuğun plastik şekil değiştirmelerine nasıl uygulanacağı açık bir şekilde ortaya konmuştur. Problemin çözümünden elde edilen akma eğrilerinin aynı yüklemeye maruz çubuğun dinamik haldeki davranışlarını incelemek için nasıl kullanılacağı araştırılmıştır. Bazı kabüller altında rijit plastik malzemeden yapılmış çubuğun dinamik haldeki plastik şekil değiştirmelerinin incelenebileceği de ortaya konmuştur.*

ABSTRACT

Plastic Deformations of Structures Subjected to Combined Loading

In this study, by reexamining Hill's maximum plastic work principle, how this principle can be applied to the plastic deformation analysis of a prismatic bar of uniform cross-section, plastically deformed by certain forces and couples applied to the ends, has been put forward. Also, it has been investigated that the yield curve obtained from the solution of the problem can also be used in determining the behaviour of the rods subjected to impact loading. Under certain assumptions, it is shown that the plastic deformations of rods made from rigid-ideally plastic material can be examined in the dynamic case.

* Dr.; U. Ü., Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Bursa.

GİRİŞ

Kirişlerin elastik eğilme ve burulması ile ilgili literatürde oldukça çok sayıda çalışma mevcuttur. Bunun nedeni, elastik sınırlar içerisinde gerilme-uzama bağıntılarının kolayca ifade edilebilmesi ve sınırların rahatlıkla tanımlanabilmesidir. Bu özellikler cisimlerin elastik sınırlar içerisindeki yapısal davranışları ile ilgilenen elastisite teorisinin tamamen matematiksel bir bilim olmasını sağlar. Cismin elastik sınırların ötesinde bir şekil değişimine maruz kalması halinde ise artık gerilme-uzama bağıntıları elastik haldeki gibi kolayca ifade edilemez ve sınırlarda kolaylıkla tanımlanamaz. Bu halde, plastik akışla ilgili sınırlı sayıdaki problemi çözmek için plastik akışın ne zaman başladığını ortaya koyan akma kriterleri önerilerek akışı, idare eden denklemler ortaya konulmalıdır. Akma kriterlerinin doğruluk derecesi deneylerle tesbit edilmesine rağmen akışı idare eden denklemlerin çıkarılışı malzemenin kabul olunan gerilme-uzama bağıntısı ile elastik gerilmelerin ihmal edilip edilmemesi durumuna bağlıdır. Örneğin, elastik ve plastik gerilmelerin dikkate alındığı izotrop malzemenin şekil değiştirmesi halinde gerilme ve uzama arasındaki bağıntı

$$d\epsilon = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p$$

$$= \frac{1}{E} [(1 + \nu) d\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} d\sigma_{kk}] + (\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}) d\lambda \quad (1)$$

şeklinde (Prandtl-Reuss denklemleri). Burada ν , σ_{kk} ve δ_{ij} sırasıyla Poisson oranı, ortalama gerilme ve Kronecker deltası olup, $d\lambda$ bir çarpandır. Yukarıdaki denklemde ilk terim elastik şekil değiştirmelere ikinci terimde $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3) \sigma_{kk} \delta_{ij}$ deviatorik gerilmelerinin (İndirgenmiş gerilme tensörünün) sebep olduğu plastik şekil değiştirmeleri göstermektedir.

Bir çok problemde elastik uzamalar plastik uzamalar yanında ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Bu takdirde, (1) denklemleri elastik uzamaların ihmal edildiği

$$d\epsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda \quad (2)$$

denklemleri ile değiştirilmelidir (Levy-Mises denklemleri). Burada $d\lambda$ esasen pozitif ve aksi halde tanımlı olmayan, genellikle zaman ve koordinatlara göre değişebilen bir skalerdir. (2) denklemleri aynı zamanda malzemenin rijit-plastik bir malzeme olduğunu kabul etmeye eşdeğerdir (Rijit-plastik malzeme).

Levy-Mises denklemlerinin bakır, nikel, demir, aliminyum ve uzama-gerilmeli yumuşak çelik için yaklaşık olarak geçerli olduğu gösterilmiştir^{1,6,11,13}. Plastik akışın "serbest" olmadığı ve elastik gerilmelerin plastik gerilmelerle mukayese edilebilecek kadar büyük olduğu durumda (1) Prandtl-Reuss denklemleri lehine sınırlı sayıda delil mevcuttur. Ancak, ideal plastik cisim içerisindeki değişen elastik uzamalara izin vermedeki genel uygunluğuna şüpheyle bakılabilir.

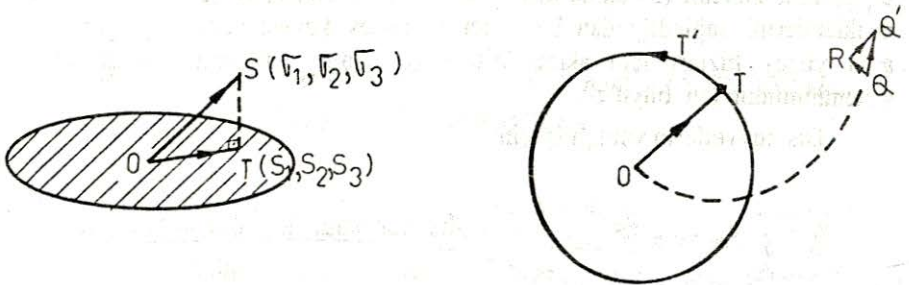
Akış kriteri olarak çoğu malzeme için geçerlilikleri kabul olunmuş Von-Mises ve Tresca akma kriterleri kullanılır. Biz Von-Mises akış kuralını kullanacak ve bunu

$$s_{ij}s_{ij} = 2k^2 \quad (3)$$

şeklinde farzedeceğiz. Burada k , $Y/3$ e eşit olup, Y tek eksenli çekme ya da basma halindeki akma gerilmesidir. (3) akma kriterinin bakır, nikel, aliminyum, uzama-sertleşmeli yumuşak çelik ve alaşım çelikleri için uygun olduğu gösterilmiştir^{1,5,10,13}.

STASYONER İŞ PRENSİBİ VE PLASTİK POTANSİYEL

Reuss⁹ tarafından takdim edildiği üzere deviatorik (indirgenmiş) gerilme (s_{ij}) ile uzama artımı ($d\epsilon_{ij}$) bir düzlem diyagram üzerinde gösterilebilmektedir. Bu düzleme π düzlemi adı verilir ve gerilme-uzama bağıntılarının genel bir incelemesi için son derece kullanışlıdır. Düzlem $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ esas gerilme bileşenleri kartezyen koordinat takımının x, y, z eksenleri boyunca alınmak suretiyle çizilir (Şek.1). Şekilde görülen T noktası esas deviatorik gerilme bileşenleridir ve dolayısıyla π düzlemi üzerinde bulunur. ST vektörü ise (σ, σ, σ) gerilme bileşenlerini haiz olup, tanım gereği OT ye diktir. Elastik bölge içerisinde $d\epsilon_{ij} = s_{ij}/2G$ bağıntısı dikkate alınarak $d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3$ esas uzama artımları da bu koordinat sisteminde gösterilebilir. Bu örneğin, $d\epsilon_1$ için $d\epsilon_1 = 2Gd\epsilon_1$ alınarak yapılır. Buna göre, $d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3$ indirgenmiş uzama artımları $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$ düzleminde bulunacaktır.



Şekil: 1. Deviatorik Düzlem: Düzlem üzerinde $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$ dir.

Elemanın uzama hali bu düzlemde bir eğri ile gösterilebilir. Böyle bir eğri Şek.1'de gösterilmektedir. Şekilde de görüldüğü gibi Q noktası plastik şekil değişimine tekabül etmektedir. Eleman elastik sınırlar içerisinde iken T ve Q çakışmıştır. Akma başladıktan sonra noktalar birbirinden ayrılır ve T, O merkezli $2/3$ Y yarıçaplı bir daire üzerinde hareket eder. Şimdi OT gerilmesine karşılık gelen uzama artımının QQ olduğunu ve bu uzama sırasında gerilme vektörünün doğrultusunu değiştirilerek OT'ye geldiğini kabul edelim. Eğer esas gerilme eksenlerinin elemana göre dönme yapmadığı kabul edilirse, o takdirde esas elastik ve plastik uzama artım eksenleri çakışır. (1) denkleminde göre OT ye paralel elastik uzama artımı ise TT' ne paraleldir. Buna göre şekilde gösterilen RQ ve RQ' elastik ve plastik uzama artımlarını gösterir. Eleman üzerinde yapılan iş OT,QQ' pozitif olduğu sürece pozitifdir. $d\lambda$ orantılılık katsayısı da bu takdirde pozitifdir (Yükleme hali).

Şimdi, elastik uzama artımlarının ihmal edildiği serbest plastik akışı gözönüne alalım (Unrestricted plastic flow). QQ' nun belirli olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, QQ' uzaması sırasında T gerilme vektörü tarafından yapılan iş $(QQ'/2G) \times (OT \text{ nin } QQ' \text{ boyunca izdüşümü})$ dir. OT, QQ' ya paralel olduğu, yani Levy-Mises denklemleri sağlandığı zaman bu iş maksimum olur. O halde, Mises kriterine uyan gerilme için Levy-Mises bağıntısı, verilmiş uzama halinde maksimum işe tekabül eder. Bu durum Von-Mises tarafından yapılan işin maksimum ya da minimum olmasına bakılmaksızın "Stasyoner iş prensibi olarak" ifade edilmiştir⁷. Mises, ayrıca herhangi bir akma kriteri için bu prensibe bağlı olarak uygun gerilme-uzama bağıntılarının türetilebileceğini önermiştir. Aynı fikir Taylor¹³ tarafından da bağımsız olarak önerilmiştir. Böylece, verilen bir uzama artımına tekabül eden gerilme, normal uzama artımı vektörüne paralel olan akma yüzeyi üzerindeki bir nokta ile gösterilebilir.

Bir eleman için geliştirilen bu stasyoner iş prensibi Mises akma kriteri ile Levy-Mises akış denklemlerine uyan sonlu kütleyi haiz bir cisim için de genelleştirilebilir.

Plastik kütle için σ_{ij} gerilmeleri altında denge konumunda olduğunu kabul edelim. u_i ler de kütleyi çevreleyen yüzey üzerindeki akış hızları olsun. Burada akışım çok yavaş olduğu varsayıldığından hızlar zamana göre ölçülmemektedir. σ_{ij} gerilme sistemi (3) akma kriteri, denge denklemleri ve (1, 2) serbest akış denklemlerini sağladığından bu sistemin yüzey kuvvetlerinin yaptığı iş oranı aynı yüzey hızları için akma kriteri ve denge denklemini sağlayan σ_{ij} sistemininkinden büyüktür.

Dış kuvvetlerin yaptığı iş için

$$w = \int_s \sigma_{ij} u_i l_j ds \quad (l_j - \text{dış normalin doğrultu kosinüsleri})$$

$$\begin{aligned}
& - \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \\
& - \int_V \lambda s_{ij} s_{ij} dV
\end{aligned} \quad (4)$$

yazabiliriz. Burada ikinci adımda Green teoremi, üçüncü adımda denge denklemi, dördüncü adımda da hidrostatik basıncın akışa katkıda bulunmadığı dikkate alınarak $\partial u_i / \partial x_j = \epsilon_{ij}$ eşitliği kullanılmıştır. Diğer yandan, σ_{ij} sisteminin yaptığı iş oranı

$$\begin{aligned}
& \int_S \overline{\sigma}_{ij} u_i l_j dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma}_{ij} u_i) dV \\
& - \int_V \overline{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV - \int_V \lambda \overline{s}_{ij} s_{ij} dV
\end{aligned} \quad (5)$$

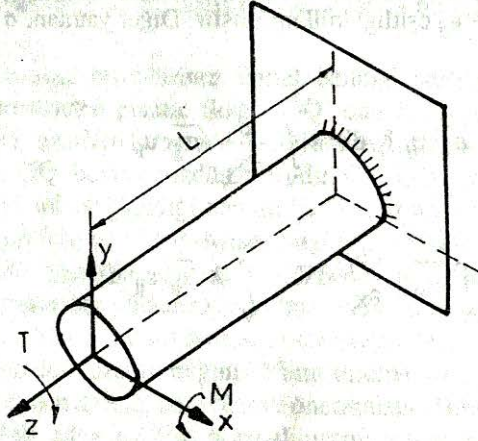
şeklinde yazılabilir. $s_{ij} s_{ij} = s_{ij} s_{ij}$ olduğu sürece $s_{ij} s_{ij} \geq \overline{s}_{ij} s_{ij}$ yazılabilir, zira akma yüzeyi arasındaki iki noktaya ait gerilme vektörlerinin skaler çarpımı bu vektörlerin yarıçapının karesinden büyük olamaz; ancak ona eşit olabilir. Böylece, genelleştirilmiş maksimum iş prensibi olarak bilinen prensibi elde etmiş oluruz. Bu prensip şu şekilde ifade edilir: Üç denge denklemi, plastisite şartı ve sınır şartlarını sağlayan statikçe mümkün gerilme dağılımları arasından plastik akıştaki gerçek gerilme dağılımı akışı muhafaza etmek için gerekli dış eforun maksimum olmasını gerektirir. Bu prensip yardımıyla belirli teklik teoremleri de ispatlanabilir².

EĞİLME VE BURULMAYA MARUZ BİR KİRİŞTE PLASTİK ŞEKİL DEĞİŞTİRMELER

Yukarıda verilen maksimum plastik iş ilkesi bazı plastik şekil değiştirme problemlerini çözmeye kullanılabilir. Ancak, incelenen bölgenin tamamen plastik olması halinde sınır şartları keyfi olarak belirlenemediğinden bu prensibin plastisite teorisindeki uygulama alanı elastisitedeki analog prensibin uygulama alanından çok daha dardır. Burada bir ucundan sabitleştirilmiş keyfi

kesit şeklini haiz prizmatik bir çubuğun serbest ucundan tatbik edilen T burulma ve M eğilme momentleri etkisi altındaki plastik şekil değiştirmelerini inceleyecek ve T ile M arasındaki ilişkiyi veren akma yüzeylerinin teşkilini sunacağız.

Şekil 2'de görüldüğü gibi z eksenini kirişin merkez çizgisi boyunca seçilmiş olsun. Çubuğun iki simetri eksenine sahip olduğu ve x ve y eksenlerinin çubuğun simetri eksenleri olacak şekilde seçildikleri kabul edilsin.



Şekil: 2. Eğilme ve burulmaya maruz kirişte plastik yerdeğiştirmeler

Pür eğilme ve burulmadaki yerdeğiştirmelerin

$$u = -\frac{1}{2R} [z^2 - v(x^2 - y^2)], \quad v = -\frac{vxy}{R}, \quad w = \frac{yz}{R}; \quad (6)$$

$$u = -\mu yz$$

$$v = \mu xz$$

$$w = \mu \varphi(x, y) \quad (7)$$

şeklinde verildiği elastisite teorisinden bilinmektedir. Burada R ve μ , eğrilik ve birim uzunluk başına dönme olup v Poisson oranıdır. Eğilme ve burulmaya ait bu formlara dikkat ederek bileşik yükleme halinde şekil değiştirmelerin

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{2} A (x^2 + z^2) - \frac{1}{2} Cx + Dxy$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2} B (y^2 + z^2) - \frac{1}{2} Cy + Dxz$$

$$w = \psi (x, y) + Axz + Byz + Cz \quad (8)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada ϕ ve ψ , x ve y nin keyfi fonksiyonları olup; ψ en kesidin çarpılmasını göstermektedir. A, B, C, D sabitleri eğilme, uzama, burulma oranlarına bağlı sabitlerdir. Bu mümkün hız dağılımları arasından sadece özel bir alt cümle tam plastik çubuğun şekil değişimini temsil eder.

Bu hızlar şimdi varyasyon prensibinde kullanılacaktır. Gerilmelerin z ye bağlı olmadığı kabulü yanında, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} nin de sıfır olduğu kabul edilmektedir. Bu, daha iyi kontrol edilebilir bir varyasyon problemi elde etmek için gerekli olup geçerlilikleri akma kriteri ile akış denklemlerinde yerine konularak belirlenmelidir.

Bilindiği gibi bir plastisite probleminin çözülebilmesi için denge denklemlerinin, gerilme-uzama artımı denkleminin, akma şartının ve mevcutsa plastik bölge üzerindeki sınır şartlarının sağlanması gerekir. Buna göre, örneğimizde önerilen yerdeğiştirme bileşenlerinin akış denklemlerini, elde edilen gerilmelerin de akma kriterini sağlaması gerekir.

Çubuğun Von-Mises akma kriterine ve (2) Levy-Mises akış denklemlerine uyduğunu kabul edelim. (8) daki kısmi türevler ile $\phi(x, y)$ fonksiyonu; u, v, w hızları Levy-Mises denklemlerine sağlatılarak bulunacaktır. Buna geçmeden önce denge denklemleri sağlanacak şekilde

$$\sigma_{xz} = -k \frac{\partial f}{\partial y} \quad \sigma_{yz} = k \frac{\partial f}{\partial x} \quad (9)$$

tariflerini yapalım. Burada f gerilme fonksiyonu kesit yüzeyi üzerinde sıfırdır. Gerilmelerin Von-Mises akma kriterini sağlaması istendiğinden σ_z boyuna gerilmesi

$$\sigma_z = \sqrt{3} \left(1 - f_x^2 - f_y^2 \right)^{\frac{1}{2}} k \quad (10)$$

olarak elde edilir. Şimdi, gerçek hız alanını belirlemeksizin doğrudan doğruya dış kuvvetlerin yaptığı iş oranını bulabiliriz, zira dış kuvvetler çubuk yüzeyi üzerinde sıfır olduğundan burada gerçek hızları bulmaya gerek yoktur. Dış kuvvetlerin yaptığı iş oranı

$$\dot{W} = \iiint_V (\sigma_{xz}u + \sigma_{yz}v + \sigma_{zz}w) dx dy dz \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce yapılan gerilmelerin z ye bağlı olmadığı kabulü ile birlikte (8) hız ifadeleri integral içerisine yerleştirilip

olduğu hatırlanarak L uzunluğundaki bir çubuk için

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}}{kL} = & \sqrt{3} \iint (Ax + By + C) (1 - f_x^2 - f_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy - D \iint (xf_x + yf_y) dx dy \\ & - \frac{1}{2} L \iint (Af_y - Bf_x) dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

elde ederiz. Sınır üzerinde $f=0$ olduğundan son terim sıfırdır. İkinci terime de kısmi integrasyon uygulanarak

$$\frac{\dot{W}}{kL} = \sqrt{3} \iint (Ax + By + C) (1 - f_x^2 - f_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy - 2D \iint f dx dy \quad (14)$$

sonucuna varırız. Hill maksimum iş prensibine göre bu işin maksimum olması gerektiğinden varyasyonlar hesabının Euler- Langrange formülüne göre

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(Ax + By + C)f_x}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{(Ax + By + C)f_y}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}} \right] + \frac{2D}{\sqrt{3}} = 0 \quad (15)$$

bulunur. Bu denklemin $f=0$ şartı altındaki çözümleri f gerilme fonksiyonunu ve dolayısıyla σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} gerilmelerini belirler.

Şimdi, tecrübi olarak önerilen hız alanının Levy-Mises akış denklemlerini sağlaması şartını dikkate alalım. $d\epsilon_{ij} = s_{ij} d\lambda$ denklemlerinde sıfır olmayan $d\epsilon_{yz} = \sigma_{yz} d\lambda$, $d\epsilon_{xz} = \sigma_{xz} d\lambda$, $d\epsilon_{zz} = \sigma_{zz} d\lambda$ gerilmelerini dikkate alıp (8), (9), (10) eşitliklerini bu denklemden yerine koyarak

$$\phi(x, y) = \frac{1}{12} (Ay^3 - Bx^3) + \frac{1}{4} xy (Ax - By)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -Dy - \frac{\sqrt{3}(Ax + By + C) f_y}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Dx + \frac{\sqrt{3}(Ax + By + C) f_x}{\sqrt{1 - f_x^2 - f_y^2}} \quad (16)$$

elde ederiz. Buna göre hız alanı

$$u = \frac{1}{4} A (y^2 - x^2 - 2z^2) - \frac{1}{2} Bxy - \frac{1}{2} Cx + Dyz$$

$$v = -\frac{1}{2} Axy + \frac{1}{4} B (x^2 - y^2 - 2z^2) - \frac{1}{2} Cy - Dxz$$

$$w = \psi (x, y) + A xz + B yz + C z \quad (17)$$

şeklini alır. Çubuğun bir ucundan sabit olduğu kabul edildiğinden ötelenmeyi karakterize eden C katsayılı terimler ile A katsayılı terimler sıfır olmalıdır. Böylece, istenilen sınır şartlarını, akma kriterini ve akış denklemlerini sağlayan gerçek hız alanı

$$u = -\frac{1}{2} Bxy + Dyz$$

$$v = \frac{1}{4} B (x^2 - y^2 - 2z^2) - Dxz$$

$$w = \psi (x, y) + Byz \quad (18)$$

şeklinde elde edilir. Diğer yandan, çubuğun uçlarına uygulanan dış moment ve kuvvetler için kolaylıkla

$$F_z = \sqrt{3}k \iint (1 - f_x^2 - f_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy$$

$$T_z = 2k \iint f dx dy$$

$$M_x = \sqrt{3}k \iint y (1 - f_x^2 - f_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy$$

$$M_y = \sqrt{3}k \iint x (1 - f_x^2 - f_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy \quad (19)$$

olduğu bulunur. Ancak, çubuk tam plastik olduğundan M_x , M_y nin birbirinden bağımsız olamayacağı hatırlatılmalıdır.

(15) ile verilen denklem ikinci mertebeden nonlinear bir kısmi diferansiyel denklem olup, analitik çözümü henüz bilinmemektedir. Bunun yerine nümerik çözümler elde etme yoluna gidilmiştir. Steele¹², kare kesitler için sonlu farklar yöntemiyle (15) denklemini çözmeyi başarmıştır. Aynı yoldan giderek İmegwu^{3,4} sonlu farklar yardımıyla (15) denklemini kare, üçgen ve dairesel kesitler için çözdü. Yazarın bildiği kadarıyla bu denklemin daha başka kesitler için çözümü mevcut değildir. Steele ve İmegwu tarafından verilen akma eğrisi aşağıdaki grafikten görülmektedir. Nümerik sonuçların vardığı sonuçlardan en önemlisi akma eğrisinin kesit şeklinden hemen hemen bağımsız oluşudur.

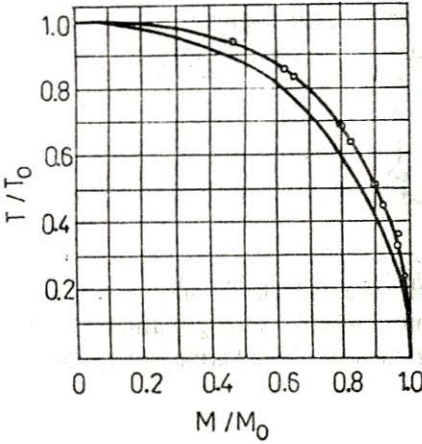
DİNAMİK HALE GEÇİŞ

Buraya kadar sadece statik haldeki plastik şekil değiştirmeler dikkate alınarak interaksiyon eğrisi çizildi. Ancak, problemin dinamik halde nasıl çözüleceği üzerinde hiçbir şey söylenmemiştir. Fakat⁸ de gösterildiği gibi, interaksiyon eğrisi lineerleştirilmek suretiyle elde edilen eğriden hareketle özellikle "ani yükleme (İmpact loading)" problemlerine "belirli şartlar altında" analitik bir çözüm bulunabilmektedir. Gerçekten de; eğer Şekil 3b'yi dikkate alırsak, Drucker stabilite kuralı gereği uzama vektörü P de akma yüzeyine dik olduğundan OP doğru parçasının bu vektör doğrultusundaki bileşeni P nin konumuna bağlı olmaksızın sabit olacaktır. Bilahare, n' ile gösterilen bu doğrultuda, çubuğun rijit-plastik bir malzeme olduğu ve dolayısıyla plastik akma

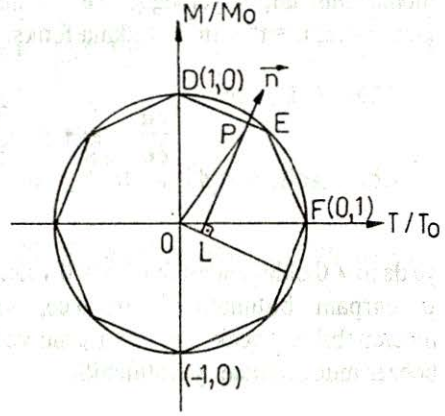
bölgesinde kayma kuvvetlerinin sıfır olduğu kabul edilerek hareket denklemleri yazılabilir. Zamana bağlı bu hareket denklemlerinin çözümü tamamen ayrı bir problemdir. Burada hatırlatılması gereken husus, buradaki problemden farklı olarak dinamik halde çok sayıda kabüller yapıldığı ve problemin ancak bu kabüller altında çözülebildiğidir. Bu kabüller altında dinamiğin

$$\begin{aligned}\Sigma m \dot{V} &= 0 \\ \Sigma M &= I\alpha \\ \Sigma &= ma\end{aligned}\quad (20)$$

denklemlerinden iki ya da üçü kullanılarak problem "sınırlı bir bölge içerisinde" çözülebilmektedir.



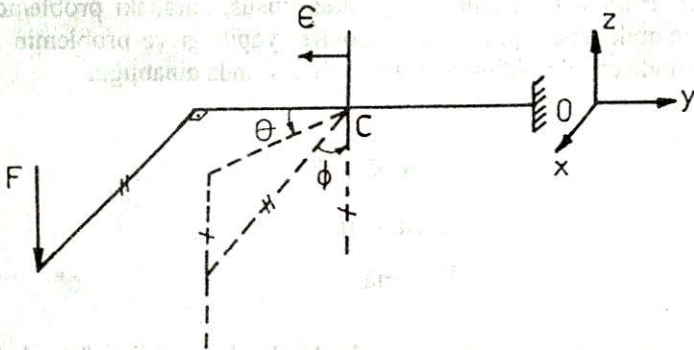
(a)



(b)

Şekil: 3. İnteraksiyon eğrileri. □ li noktalar Steele tarafından elde edilmiştir.

(20) denklemleri kullanılırken eğilme ve burulma açıları arasında ortaklaştırılmış akış kuralı olarak bilinen $\phi = (\rho/\beta)\Theta$, $\beta = T_0/M_0$ şeklinde bir bağıntının mevcut olduğu varsayılır. Burada T_0 , M_0 , sırasıyla, plastik eğilme ve burulma momentleri olup ρ koordinatlara bağlı fakat zamana bağlı olmayan bir çarpandır. Şimdi, bu çarpanın mesela aşağıdaki gibi yüklemeye maruz bir yapı için nasıl bulunacağını açıklayalım:



Şekil: 4. Bir ucundan ankastre eğri çubukta yerdeğiştirmeler

0 noktasına göre T burulma ve M eğilme momentleri yazılabilir. T burulma momentinin küçük yerdeğiştirmeler halinde daima ϵ dan bağımsız olacağı açıktır. Buna göre, $u = t^2 + m^2 = 1$ akma fonksiyonunun ϵ 'na göre türevi için

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = m \left. \frac{\partial m}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \quad (21)$$

ya da $m \neq 0$ olduğundan $\partial m / \partial \epsilon = 0$ yazılabilir. Bu ifade ile T ifadesi kullanılarak ρ çarpanı bulunabilir⁸. Böylece, yapının plastik yerdeğiştirmeleri artık incelenebilir. Ancak, hesapları uzun ve karmaşıktır. Daha karmaşık yapılar için benzer muhakemeler yürütülebilir.

SONUÇ

Burada Hill tarafından verilen maksimum plastik iş ilkesinin geçerliliği ispatlanarak prensibin genel bir probleme nasıl uygulandığı açık bir biçimde izah edilmiştir. Eğilme ve burulmaya maruz yapıların dinamiğine nasıl yaklaşılabileceği akma eğrileri dikkate alınarak araştırılmıştır. Böylelikle, farklı geometrik şekilleri haiz yapıların en genel yükleme halindeki statik ve dinamik analizlerinin yapılabilmesi için bir yolun mevcut olduğu ortaya konmuştur. Diğer taraftan, mevcut interaksiyon eğrisi yerine lineerleştirilmiş interaksiyon eğrisi dikkate alındığından M ve T momentlerinin birinin zamana açık olarak bağlı bir fonksiyonunu elde etmenin de gerekli olmadığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. DAVIS, E. A.: Trans. A.S.M.E., 577, 1944.
2. HILL, R.: A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity, Quart. J. Mech., 18-28, 1948.
3. IMEGWU, E.O.: Plastic Flexure and Torsion, J. Mech. Solids, Vol. 8, 141-146, 1960.
4. IMEGWU, E.O.: Combined Plastic Bending and Torsion, J. Mech. Solids, Vol. 10, 277-282, 1962.
5. LESSELLS, J.M. and MAC GREGOR, C.W.: Journ. Franklin. Inst., 230, 163, 1947.
6. LODÉ, W.: Zeits. f. Physik., 36, 913, 1926.
7. MISES, R.V.: Nach. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl., 315, 1913.
8. PALA, Y.: İki ve Üç Boyutlu Yapıların Ani Yüklemeler Altındaki Plastik Şekil Değiştirmeleri, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri, 1991.
9. REUSS, A.: Zeits.f.ang. Math. u. Mech., 266, 1930.
10. ROS, M. and EICHINGER, A: Proc. Int. Cong. Mech. Zürich., 315, 1926.
11. SCHMITH, R.: Ingenieur-archiv., 3, 215, 1932.
12. STEEL, M.C.: Plastic Flexure and Torsion, J. Mech. Phys. Solids 3, 156, 1954.
13. TAYLOR, G.I. and QUINNEY, H.: Phil. Trans. Roy. Soc. A., 230, 323, 1941.