

KESİTİ ÇOK BAĞLANTILI BÖLGEDEN İBARET TOROİDAL RİNG SEKTÖRÜNÜN EĞİLMESİ

Yaşar PALA*

ÖZET

Bu çalışmada, kesiti konfokal elipslerden meydana gelen, uçlarından eğilmeye maruz bir eliptik ring sektöründeki iç gerilme dağılımı analitik olarak bulunmaktadır. Çözüm yöntemi olarak Göhner tarafından teklif edilen metod kullanılmakta ve böylece eliptik koordinatları kullanmadaki zorluk ortadan kaldırılmaktadır. Gerilmeler sadece eğilmeye maruz eliptik ring sektöründeki başlangıç gerilme haline birinci mertebeden bir doğrultma yapılarak elde edilmektedir.

ABSTRACT

Pure Bending of Elliptic Ring Sector With Cross-Section of Multi-Connected Region

In this study, internal stresses of an elliptic ring sector with the cross section of multi-connected region, subjected to pure bending are analytically found. Göhner's method is used as a method of analysis and therefore, some difficulties caused by elliptical coordinates are eliminated. The analysis is limited to determining the first correction to the initial stress state for pure bending of an elliptical ring sector.

* Dr.; U. Ü., Mühendislik-Mimarlık Fakültesi.

Serbest uçlarından eğilmeye maruz dairesel kesitli içi dolu çubuklardaki iç gerilmeler Göhner¹ tarafından verilen bir metodla bulunmuştur. Aynı problemin toroidal elastisitenin metodları ile çözümü de mevcuttur². Lang, eliptik koordinatları kullanmaktan sakınan Göhner'in metodunu kullanarak kesiti eliptik olan içi dolu bir toroidal ring sektöründeki gerilmeleri başlangıç gerilme haline birinci mertebeden bir gerilme uygulayarak tayin etti³. Aynı çizgi üzerinde, içinde eliptik boşluk bulunan çok bağlantılı kesit alanını haiz toroidal bir ring sektöründeki iç gerilmelerin tayin edilmesi de düşünülebilir. Bu amaçla, bu çalışmada konfokal elipslerden oluşan çok bağlantılı kesiti haiz eliptik ring sektöründeki iç gerilmeler incelenmektedir. Çözüm metodu Göhner tarafından teklif edilenin aynısıdır.

ANALİZ

Eğilmeye maruz eliptik ring sektöründeki başlangıç gerilme hali

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (1)$$

ve $\sigma_\theta = -cEx$ olarak alınabilir. Bu hal prizmatik çubukların pür eğilmesindeki gerilme dağılımına özdeştir. Bu hale tekabül eden denge denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\bar{c} E x}{R} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

şeklinde elde edilebilir³. İlave olarak, gerilmeye ait kartezyen koordinatlar cinsinden yazılmış uygunluk denklemleri

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= 0 \\ \Delta \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta \sigma_{\theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\bar{c} E}{R} = 0$$

$$\Delta \tau_{xy} - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3)$$

şekindedir. Burada Δ ve sırasıyla

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \quad \Phi = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_{\theta} \quad (4)$$

olarak tanımlanmaktadır. Şimdi (2) denklemlerini sağlayan gerilme fonksiyonunu

$$\sigma_x = \frac{\bar{c} E}{28 R b^2 d^2} \frac{\partial}{\partial x^2} [(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) (d^2 x^2 + c^2 y^2 - c^2 d^2)] + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

şeklinde seçelim.

İlk üç uygunluk denkleminin toplamı

$$\Delta \Phi = - \frac{\bar{c} E}{R} \quad (6)$$

dır. Bu ifadeden $\Delta \sigma_{\theta}$ ifadesini çıkararak

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{1+\nu} \frac{\bar{c} E}{R} \quad (7)$$

elde ederiz. Diğer yandan,

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\bar{c} E}{28 R b^2 d^2} \frac{\partial}{\partial x^2} [(b^2 x^2 + a^2 y^2 - b^2 a^2) (d^2 x^2 + c^2 y^2 - c^2 d^2)] + \Delta \Phi \quad (8)$$

olduğundan

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) - \Delta \Delta \phi \quad (9)$$

$$= \frac{1}{1 + \nu} \frac{\bar{c} E}{R}$$

yazabiliriz. Burada son adımda (7) ifadesini kullandık. Şimdi, ϕ gerilme fonksiyonunu

$$\phi = \frac{\bar{c} E A_0 R^3}{4(3(c^2+d^2) b^2+3a^2c^2)} [(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) (d^2x^2 + c^2y^2 - d^2c^2)] \quad (10)$$

formunda seçelim (Şekil: 1). Bu ifadeden yararlanarak (9)'daki $\Delta \Delta \theta$ için

$$\Delta \Delta \phi = \frac{\bar{c} E A_0 R^3}{[3(c^2 + d^2) b^2 + 3a^2c^2]} [5 b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + 5a^2c^2] \quad (11)$$

buluruz. Şimdi, bu ifadeyi (9) da yerine koyarak A_0 katsayısı için

$$A_0 = \frac{[3 (c^2 + d^2)b^2 + 3 a^2c^2]}{R^4 (1+\nu) [5 b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + 5 a^2c^2]} \quad (12)$$

elde ederiz. Son olarak σ_{θ} 'yı

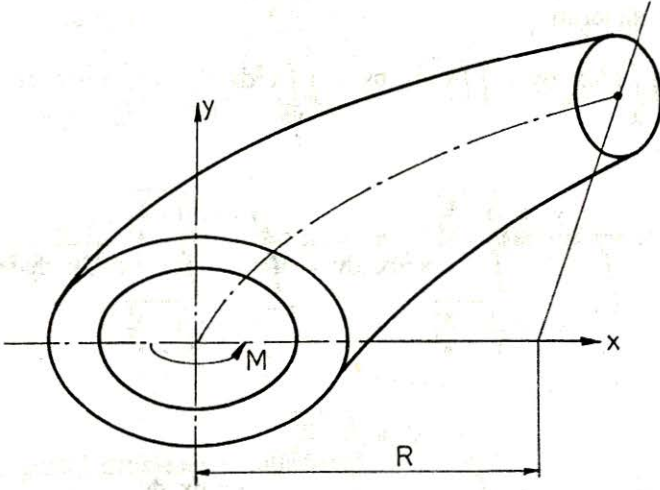
$$\sigma_{\theta} = \frac{\bar{c} E R^3}{4 [3 (c^2 + d^2) b^2 + 3 a^2 c^2]} [c_0 + c_1x^2 + c_2y^2] \quad (13)$$

şeklinde alalım. σ_{θ} ifadesindeki c_0 katsayısı uçlarda bileşke kuvvetin sıfır olacağı gözleminde bulunabilir:

$$N = 0 = \int \int_R \sigma_\theta \, dx \, dy$$

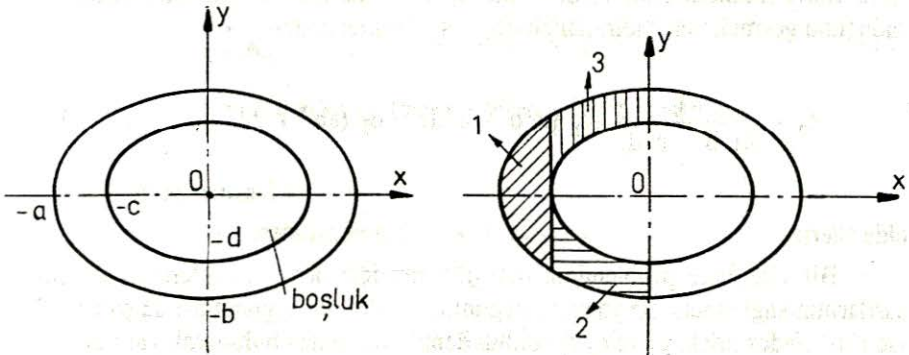
(14)

$$= \frac{c E R^3}{4[(c^2 + d^2) b^2 + 3 a^2 c^2]} \int \int (c_0 + c_1 x^2 + c_2 y^2) \, dx \, dy$$



Şekil: 1. Eliptik ring sektörü

Bu ifadenin integrasyonundan bulunacak ifade c_0 , c_1 ve c_2 cinsinden verecektir. R integrasyon bölgesi Şekil 2'de gösterilen çok bağımlı bölgedir. Bölge



Şekil: 2. Çubuğun kesit alanı

x ve y eksenlerine göre simetrik olduğundan integrasyon işleminin bölgenin y ekseninin sol ya da sağ yarısında kalan kısmı üzerinde icra edilip, sonucun iki ile çarpılması gerekir. Aksi takdirde; mutlak değerler olarak toplanması gerekli bazı ifadelerin bölge üzerinden cebirsel toplamları sıfır verebilir. (14) denklemindeki integrasyon içindeki ikinci ve üçüncü terimlerin hesabı için bölgenin sol tarafı üç eşit parçaya bölünmekte ve integrasyon işlemi bu üç ayrı bölge üzerinde icra edilmektedir (Şekil: 2b). Burada integrasyon sınırlarının iyice belirlenmesi çok önemlidir. Buna göre (14) ifadesindeki terimlerden her biri mesela, ilk terim

$$\begin{aligned}
 \iint_R x^2 dx dy &= \iint_{R_1} x^2 dx dy + \iint_{R_2} x^2 dx dy + \iint_{R_3} x^2 dx dy \\
 &= \int_{x=-a}^{x=-c} \int_{y=-b}^{y-b+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x^2 dx dy + \int_{x=-c}^{x=0} \int_{y=-b}^{y-d+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x^2 dx dy \\
 &\quad + \int_{x=-c}^{x=0} \int_{y-d+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{y-b+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{15}$$

şeklinde hesaplanacaktır. Bu ifadeler c_1 ve c_2 nin hesabında kullanılacaktır. Şimdilik, c_0 m hesabı için (14) deki 2. ve 3. terimlerin sırasıyla y ve x eksenlerine göre atalet momentlerini verdiklerini, c_0 lı ilk terimin de alanlar farkına eşit olduğunu görmek yeterlidir. Bilahare; (14) denklemden

$$c_0 = \frac{-1}{(a b - c d)} [c_1 (a^3 b - c^3 d) + c_2 (a b^3 - c d^3)] \tag{16}$$

elde ederiz.

Bir elastisite probleminin tam çözümü için denge denklemleri ile sınır şartlarının sağlanması yanısıra uygunluk şartlarının sağlanması da şarttır. Bu ise (16) ifadesindeki c_1 ve c_2 uygunluk denklemlerinden bulunarak yapılacaktır. Şimdi, hazırlık olarak (2) ifadesini kullanarak σ_x , σ_y yi açık olarak yazalım:

$$\sigma_x = \frac{\bar{c} E x}{R} + \frac{\bar{c} E A_0 R^3}{4 [3 (c^2 + d^2) b^2 + 3a^2 c^2]} [2a^2 (d^2 x^2 + 3c^2 y^2 - c^2 d^2) + 2d^2 (b^2 x^2 + 3a^2 y^2 - a^2 b^2)] \quad (17)$$

$$\sigma_y = \frac{\bar{c} E x}{R} + \frac{\bar{c} E A_0 R^3}{4 [3 (c^2 + d^2) b^2 + 3a^2 c^2]} [2a^2 (d^2 x^2 + 3c^2 y^2 - c^2 d^2) + 2d^2 (b^2 x^2 + 3a^2 y^2 - a^2 b^2)] \quad (18)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\bar{c} E R^3}{4[3(c^2+d^2) b^2+3a^2 c^2]} \left[\frac{-1}{(ab-cd)} [c_1(a^3 b - c^3 d) + c_2(ab^3 - cd^3) + c_1 x^2 + c_2 y^2] \right] \quad (19)$$

İlk uygunluk denkleminin kullanılması

$$c_1 = -2 A_0 (1 + \nu) [d^2 (a^2 + b^2) + 3 a^2 (c^2 + d^2)] - 2 A_0 [d^2 (a^2 + b^2) + 3 (d^4 + b^4)] \quad (20)$$

verir. Aynı şekilde, ikinci uygunluk denklemini kullanılarak

$$c_2 = -2 A_0 (1 + \nu) [3 (b^4 + d^4) + (c^2 d^2 + b^2 a^2)] + -2 A_0 [6 a^2 (c^2 + d^2) + (a^2 b^2 + c^2 d^2)] \quad (21)$$

bulunur. c_1 ve c_2 bilindiğinden c_0 ; (16) yardımıyla hesaplanabilir.

c Katsayısının Tayini

c katsayısı Moment ifadesinden tayin edilir:

$$M = \iint -\sigma_\theta x \, dx \, dy$$

$$M_0 = \iint -\sigma_{\theta_0} x \, dx \, dy - \iint \bar{c} E x^2 \, dx \, dy \quad (22)$$

$$= \frac{\pi \bar{c} E}{4} [a^3 b - c^3 d]$$

Daha tam bir çözüm için

$$M_1 = \iint \sigma_{\theta_1} x \, dx \, dy - \quad (23)$$

$$\frac{\bar{c} E R^3}{4 [3 (c^2 + d^2) b^2 + 3a^2 c^2]} \iint (c_0 + c_1 x^2 + c_2 y^2) x \, dx \, dy$$

yazabiliriz. İntegrasyon işlemi daha önce tanımlandığı şekilde yapılacaktır. (23) deki ilk terimin integrasyonu kesit x ve y eksenlerine göre simetrik olduğundan sıfırdır.

$$c_1 \iint x^3 \, dx \, dy \quad c_2 \iint y^2 x \, dx \, dy$$

terimlerinin integrasyonları

$$c_1 (-4a^4 b + 2 d c^4) \left[\frac{\sin^3 \arccos \frac{c}{a}}{3} - \frac{\sin^5 \arccos \frac{c}{a}}{5} \right] = c_1 m_1$$

$$c_2 \left[\frac{-4 b^3 a^2}{15} \left[\frac{1 - c^2}{a^2} \right]^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15} d^3 c^2 \right] = c_2 m_2$$

şeklinde. Şimdi, M_1 ifadesi

$$M_1 = 2 [c_1 m_1 + c_2 m_2] \frac{c E R^3}{4 [3 (c^2 + d^2) b^2 + 3 a^2 c^2]} \quad (24)$$

şeklinde yazılabilir. M_1 ifadesindeki 2 çarpanı kesit alanının integrasyon alanının iki katı olması dolayısıyla gelmektedir. Şimdi, $M = M_0 + M_1$ olarak ilk yaklaşım için

$$\bar{c} E = \frac{4 M}{\pi (a^3 b - c^3 d)} \quad (25)$$

yazabiliriz. Bir sonraki yaklaşımı

$$\bar{c} E = \frac{4 M}{\pi (a^3 b - c^3 d)} \left[\frac{1}{1 + k_0} \right] \quad (26)$$

şeklinde alalım. Burada k_0 ,

$$k_0 = \frac{2 (c_1 m_1 + c_2 m_2)}{\pi R^5 [3(c^2 + d^2) b^2 + 3a^2 c^2] (a^3 b - c^3 d)}$$

dır. Buna göre σ_θ gerilmesi

$$\sigma_\theta = \frac{M}{\pi (a^3 b - c^3 d)} \frac{R^3}{(1+k_0) [3(c^2 + d^2)b^2 + 3a^2c^2]} [c_0 + c_1x^2 + c_2y^2]$$

elde edilir.

SAYISAL UYGULAMA

Bir uygulama olarak $\nu = 0.3$, $a = 2b$, $a = 2c = 4d$ alarak σ_θ gerilmesi için

$$\sigma_\theta = \frac{M}{\pi (a^3b - c^3d)} \left[\frac{1}{1 + 0.33 \frac{a^9}{R^9}} \right] [-0.34898] \frac{a^2}{R}$$

ya da ikinci terimi seriye açarak

$$\sigma_\theta = \frac{M a^2}{\pi R (a^3b - c^3d)} \left[-0.349 + 0.1152 \left(\frac{a}{R} \right)^9 - 0.1152 \left(\frac{a}{R} \right)^{18} + \dots \right]$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J.M.: Theory of Elasticity, 2nd Ed., McGraw-Hill, pp. 395-398, 1951.
2. LANG, H.A.: Stress Analysis of Pressurized Elbows for Nuclear Components Using Toroidal Elasticity, Fourth International Conference on Pressure Vessel Technology, London, England, Proceedings, Vol. 11, pp. 251-260, 1980.
3. LANG: Pure Bending of Elliptic Ring Sector, Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 456-458, 1982.