

YÖNLENDİRİLMİŞ GRAFLARIN MATRİSLER TEORİSİNE BAZI UYGULAMALARI

Mehmet ARISOY*

ÖZET

Bu çalışmada, yönlendirilmiş bir grafa mod2 tamsayılarından oluşan bir matris tekabül ettirmek yerine; reel elemanlı bir $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ matrisine bir $G_y(M)$ bağıntı grafi tekabül ettirilmiştir. Böylece, reel elemanlı matrisler ve bağıntı grafları arasında bir ilişki kurulmaya çalışılmıştır. Bu ilişkiden yararlanılarak, verilen bir M matrisinin determinantını, çarpımsal tersini ve özdeğerlerini bulma problemleriyle ilgili olan grafsal metodlar geliştirilmiştir.

SUMMARY

Some Applications to the Matrix Theory of Directed Graphs

In this work, instead of corresponding to a directed graph a matrix which consists of integers mod2; a matrix $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ of real elements is corresponded to the relagraph $G_y(M)$. Thus, it is tried to set up a relation between matrices of real elements and relagraph. By using this relation, graphical methods are developed related with the problems of finding determinant, inverse and eigenvalues of a given matrix M .

GİRİŞ

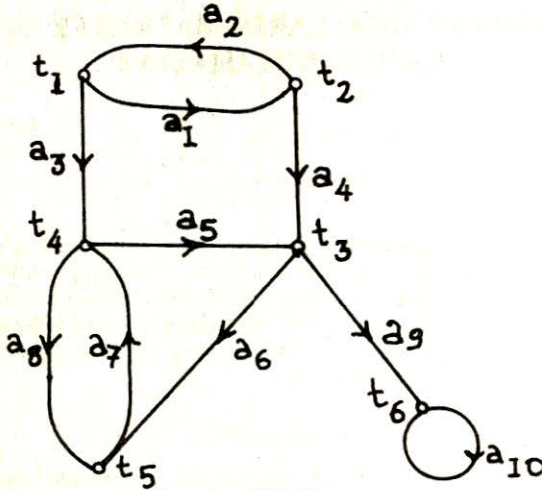
T sonlu ve boş olmayan bir küme olsun. $T \times T$ nin bir R altkümesine T kümesinde tanımlı bir ikili bağıntı denir. T kümesinin elemanları düzlemde noktalar olarak belirlenir ve $(t_i, t_j) \in R$ ise, t_i noktasından t_j ye giden yönlü bir çizgi çizilir. Böylece düzlemde oluşan şekle R bağıntısının grafi ya da kısaca bağıntı grafi denir ve bu $G_y(R)$ ile gösterilir. Bu gösterimdeki y indisi, bağıntı grafinin yönlendirilmiş graf olduğunu göstermektedir. T nin t_i elemanlarına tepeler ve R nin (t_i, t_j) elemanlarına da yönlü ayrıtlar denir ve $a_k = (t_i, t_j)$ ile gösterilir. $A = [a_k = (t_i, t_j) \mid (t_i, t_j) \in R]$ kümesine de ayrıtlar kümesi denir.

Uç noktaları çakışık olan bir ayrıta bukile denir. Yansıyan bir bağıntıya ait olan bağıntı grafinin her tepesinde bir bukile vardır. Ters-yansıyan bir ikili bağıntıyı

* Yard. Doç. Dr.; U. Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Balıkesir.

temsil eden bağıntıgrafında ise, hiçbir bukle yoktur. Yansıma ve ters-yansıma gibi bağıntılara ait tüm özellikler, bağıntıgraflarına bakılarak somut bir şekilde görülebilir.

Örneğin, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ kümesiyle bu kümede tanımlanan bir ikili bağıntı $R = \{(t_1, t_2), (t_2, t_1), (t_1, t_4), (t_2, t_3), (t_4, t_3), (t_3, t_5), (t_5, t_4), (t_4, t_5), (t_3, t_6), (t_6, t_6)\}$ biçiminde verilirse, bu bağıntıyı temsil eden $G_Y(R)$ bağıntıgrafı Şekil 1'deki gibi çizilir.



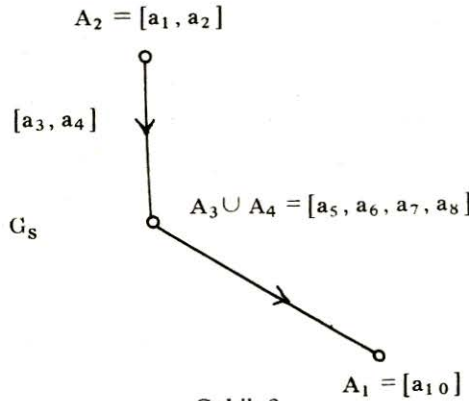
Şekil: 1
 $G_Y(R)$ bağıntıgrafı

Genel olarak n elemanlı bir T kümesinde bir R ikili bağıntısı verildiğinde; satır ve sütunlar $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ tepeleriyle numaralanarak ve $(t_i, t_j) \in R$ ise $b_{ij} = 1$ ($t_i, t_j \notin R$ ise $b_{ij} = 0$) alınarak oluşturulan $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisine $G_Y(R)$ bağıntıgrafının komşu-tepe bağlantı matrisi denir. Örneğin, Şekil 1'deki $G_Y(R)$ bağıntıgrafının komşu-tepe bağlantı matrisi;

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dir. Böylece, Şekil 1'deki $G_Y(R)$ bağıntıgrafına bir $B = [b_{ij}]_{6 \times 6} \text{ mod } 2$ tamsayılar matrisi tekabül ettirilmiştir. 1954'den beri topolojik sentezler olarak bilinen [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] graf \rightarrow matris tekabülü matematikçiler ve elektronikçiler için yeni bir çalışma sahası olmuştur.

Şekil 1'deki $G_Y(R)$ bağıntıgrafının $A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}]$ ayrıntlar kümesinin $A_1 = [a_{10}]$, $A_2 = [a_1, a_2]$, $A_3 = [a_7, a_8]$, $A_4 = [a_5, a_6, a_7]$ alt-kümelerine sırayla; bir, iki, üç ayrıtlı *yönlü çevreleri* denir. Bu yönlü çevrelerden komşu durumdaki A_3 ve A_4 çevrelerinin birleşimi olan $A_3 \cup A_4 = [a_5, a_6, a_7, a_8]$ kümesine $G_Y(R)$ bağıntıgrafının *kuvvetli olarak birleştirilmiş maksimal altgrafı* ya da kısaca *kuvvetli parçası* denir. Komşu durumunda olmayan A_1 ve A_2 yönlü çevrelerine de $G_Y(R)$ bağıntıgrafının kuvvetli parçaları denir. Ayrıca yönlendirilmiş bir grafın bir asılı ayrıntın uç noktasında grafın kuvvetli bir parçasıdır. Genel olarak yönlendirilmiş bir grafın, komşu olmayan yönlü çevreleri, komşu yönlü çevrelerinin birleşimleri ve varsa asılı ayrıntının uç tepesi alınarak tüm kuvvetli parçaları bulunur. Örneğin, Şekil 1'deki $G_Y(R)$ bağıntıgrafının $A_1 = [a_{10}]$, $A_2 = [a_1, a_2]$, $A_3 \cup A_4 = [a_5, a_6, a_7, a_8]$ olmak üzere üç tane kuvvetli parçası vardır. Bu kuvvetli parçalardan herbiri bir tepeyle ve bunlardan birini diğerine birleştirecek şekilde çizilmiş olan tüm yönlü ayrıntlar da bir tek yönlü ayrıntla temsil edilerek çizilen yeni bir yönlendirilmiş grafa, Şekil 1'deki $G_Y(R)$ bağıntıgrafının *sıkıştırılmışı* denir ve bu G_S ile gösterilir (Şekil: 2).



Şekil: 2
 $G_Y(R)$ bağıntıgrafının sıkıştırılmışı

Yönlendirilmiş bir grafın bir t_i tepesinden diğer bir t_j tepesine giden yönlendirilmiş bir yol varsa, t_j tepesine *gidilebilir tepe* denir.

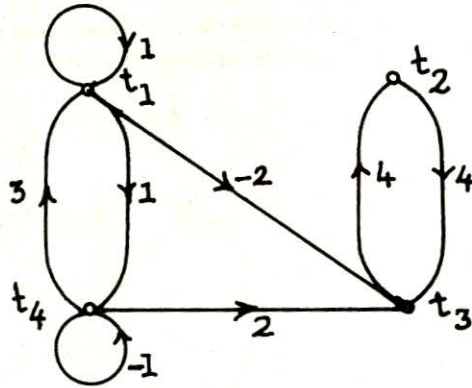
Yukarıdaki tanımlardan,

- 1- Yönlendirilmiş bir grafın bir kuvvetli parçasının sıkıştırılmışı sadece bir tepedir,
- 2- Yönlendirilmiş bir grafının sıkıştırılmışı hiçbir yönlü çevre içermez,
- 3- Yönlendirilmiş bir G_Y grafının kuvvetli olarak birleştirilmiş olması için gerek ve yeter koşul, G_Y deki her tepeye diğer tepelerden gidilebilir olmasıdır, sonuçlarına varılır. Bu üç sonuç bir $G_Y(R)$ bağıntıgrafındaki tüm kuvvetli parçaların doğru olarak bulunmasını sağlar. Bulunan kuvvetli parçalardan yararlanarak bir matrisin determinantının, inversinin ve özdeğerlerinin bilinen yöntemlerden çok daha basit olarak hesaplanması aşağıda sergilenmiştir.

MATERYAL VE METOD

Reel elemanlı bir $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ matrisi verildiğinde; $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ gibi n tane tepe olarak ve M deki her bir $m_{ij} \neq 0$ elemanı ile ağırlıklandırılmış olan bir (t_i, t_j) yönlü ayrıtı çizerek bu matrisi temsil eden bir $G_Y(M)$ bağıntıgrafı çizilir (Şekil: 3).

$$M = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}, G_Y(M):$$



Şekil: 3
M matrisi ve bu matrisi temsil eden $G_Y(M)$ grafi

Şekil 3'deki $G_Y(M)$ bağıntıgrafının yönlü ayrıtları $a_1 = (t_1, t_1)$, $a_2 = (t_1, t_3)$, $a_3 = (t_1, t_4)$, $a_4 = (t_2, t_2)$, $a_5 = (t_3, t_2)$, $a_6 = (t_4, t_1)$, $a_7 = (t_4, t_3)$, $a_8 = (t_4, t_4)$ şekillerinde adlandırılırsa $A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]$ ayrıtlar kümesi elde edilir. A 'nın $A_1 = [a_1]$, $A_2 = [a_8]$, $A_3 = [a_3, a_6]$, $A_4 = [a_4, a_5]$ altkümeleri (Şekil: 3'deki) $G_Y(M)$ bağıntıgrafının yönlü çevreleridir. Bu yönlü çevrelerden komşu durumdaki A_1, A_2, A_3 çevrelerinin birleşimi olan $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [a_1, a_3, a_6, a_8]$ kümesi $G_Y(M)$ grafinin bir kuvvetli parçasıdır. Komşu durumda olmayan A_4 yönlü çevresi de $G_Y(M)$ grafinin ikinci bir kuvvetli parçasıdır. Bu iki farklı kuvvetli parçaya göre $G_Y(M)$ grafinin $T = [t_1, t_2, t_3, t_4]$ tepeler kümesi $T_1 = [t_2, t_3]$ ve $T_2 = [t_1, t_4]$ olmak üzere iki altkümeye ayrışır. Bu ayrışma göre M matrisinin satırları ve sütunları permüte edilerek yeniden düzenlenirse,

$$P = \begin{matrix} & t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ \begin{matrix} t_2 \\ t_3 \\ t_1 \\ t_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir alt üçgen blok matris elde edilir. P matrisinin esas köşegeni üzerinde bulunan P_{11} ve P_{22} altmatrisleri sırayla (Şekil: 3'deki) $G_Y(M)$ grafının A_4 ve $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ kuvvetli parçalarının ağırlıklandırılmış komşu-tepe bağlantı matrisleridir. P matrisi, M matrisine $R_{12} \rightarrow R_{23} \rightarrow C_{12} \rightarrow C_{23}$ şeklinde elemanter satır ve sütun operasyonları uygulanarak elde edildiğinden $M \sim P$ ve $\det M = \det P$ dir. Diğer taraftan, $\det P = \det P_{11} \det P_{22}$ olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} \det P &= \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-16)(-4) \\ &= 64 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $\det M = 64$ olduğu sonucuna varılır.

Verilen M matrisi, bu matrisi temsil eden $G_Y(M)$ grafının kuvvetli parçalarına göre bir alt üçgen blok P matrisine denk şekle getirilmiş ve P nin determinanı daha küçük boyuttan P_{11} , P_{22} matrislerinin determinantları yardımıyla kolayca hesaplanmıştır. Bu hesaplamada bir matrisin bloklara ayrılmasıyla, matrisi temsil eden grafın kuvvetli parçalarına ayrılması arasında çok yakın bir ilişki kurulmuştur.

Genel olarak

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & O \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir alt üçgen blok matrisin esas köşegeni üzerindeki P_{11} ve P_{22} altmatrislerinin P_{11}^{-1} ve P_{22}^{-1} inversleri varsa, bunlar matrisler teorisinin bilinen yöntemleriyle hesaplanarak ve

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11}^{-1} & O \\ -P_{22}^{-1} P_{21} P_{11}^{-1} & P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

deşitliğinden yararlanılarak P^{-1} matrisi bulunur. Örneğin,

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{için} \quad \det P_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \text{ dir.} \quad (2)$$

$$\text{ek}P_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P_{11}^{-1} = \frac{\text{ek}P_{11}}{\det P_{11}} \text{ dir.} \quad (3)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \text{ den,} \quad P_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{elde edilir.} \quad (4)$$

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{için,} \quad \det P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \text{ dir.} \quad (5)$$

$$ekP_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P_{22}^{-1} = \frac{ekP_{22}}{\det P_{22}} \quad \text{dir.} \quad (6)$$

$$(5) \text{ ve } (6) \text{ dan, } P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{elde edilir.} \quad (7)$$

$$\text{Elde edilen } P_{11}^{-1} \text{ ve } P_{22}^{-1} \text{ matrisleriyle } P \text{ nin } P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ altmatrisi (1)}$$

eşitliğindeki yerlerine yazılarak ve gerekli işlemler yapılarak,

$$P^{-1} = \begin{matrix} & t_2 & t_3 & t_1 & t_4 \\ t_2 & \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \\ t_3 & \\ t_1 & \\ t_4 & \end{matrix}$$

matrisi bulunur. Bulunan P^{-1} matrisinin satırlarını ve sütunlarını M matrisindeki sıraya göre yeniden düzenlemek için, daha önce M matrisine uygulanan elemanter satır ve sütun operasyonları ters sırada uygulanır. Buna göre,

$$M^{-1} = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1 & \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \\ t_2 & \\ t_3 & \\ t_4 & \end{matrix}$$

olur. Böylece verilen M matrisinin çarpımsal tersi olan M^{-1} matrisi bulunur.

Verilen M matrisini temsil eden $G_Y (M)$ bağıntıgrafının kuvvetli parçaları bulunarak, bu kuvvetli parçalara göre $G_Y (M)$ grafının tepeler kümesinin ayrışımı belirlenmiş ve bu ayrışımaya uygun olacak şekilde M matrisinin satır ve sütunlarına elemanter operasyonlar uygulanarak M matrisi bir alt üçgen-blok P matrisine denk şekle getirilmiştir. $M \sim P$ olduğundan, M ve P matrislerinin özdeğerleri birbirinin aynıdır. P matrisinin özdeğerleri, esas köşegeni üzerinde bulunan P_{11} ve P_{22} altmatrislerinin özdeğerlerinden ibarettir. Bu özdeğerler,

$$|P_{11} - \lambda I_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 4 \\ 4 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4;$$

$$|P_{22} - \lambda I_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 2$$

şeklinde hesaplanarak, M matrisinin $\pm 4, \pm 2$ olmak üzere dört tane özdeğerinin bulunduğu sonucuna varılır.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Daha soyut yönlendirilmiş graf tanımı da yapılabilir. Soyutluktan kaçınmak için yönlendirilmiş grafın daha kısıtlanmış bir tanımı olan bağıntıgrafı tanımı gözönüne alınmıştır. Böylece reel elemanlı matrislerle bağıntıgrafı arasında daha kolay bir ilişki kurulmuştur. Bir grafın $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ komşu-tepe bağlantı matrisinin oluşturulmasındaki kural, verilen bir M matrisinin satır-sütun bağıntısı gibi düşünülmüştür. Gerçekten de verilen $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin sıfırdan farklı herbir elemanı silinerek yerine 1 yazılmak suretiyle elde edilen mod2 tamsayılar matrisi G_y (M) bağıntıgrafının $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ komşu-tepe bağlantı matrisi olmaktadır.

Birden fazla kuvvetli parçası olan bir bağıntıgrafıyla temsil edilen bir matrisin determinantının, inversinin ve özdeğerlerinin bulunmasını basitleştirmek için geliştirilen bu grafsal yöntem, bir tek kuvvetli parçası olan bir bağıntıgrafıyla temsil edilen bir matris için geçerli değildir. Böyle matrislerin, determinantının, çarpımsal tersinin ve özdeğerlerinin bulunmasında matris teorisinin klasik hesap yöntemleri daha elverişlidir. Geliştirilen grafsal yöntem; bir indirgeme yöntemi olarak bilhassa büyük boyutlu matrislerin determinantlarının, çarpımsal terslerinin ve özdeğerlerinin hesaplanmasında büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

1. ANDERSON, S.S.: *Graph Theory and Finite Combinatorics*, Markham Publishing Company, Chicago, 1970.
2. ARISOY, M.: On Chain-Groups $\Gamma_H(G_y)$ and $\Delta_H(G_y)$ of graphs *E.U. Journal of Science Faculty*, Vol. VIII, NR. I, 1984-85.
3. CEDERBAUM, I.: Matrices all of whose Elements and subdeterminants are 1, -1 or 0, *J. Math. and Phys.*, 36, 351-361, 1958.
4. CHEN, W.K.: *Applied Graph Theory*, Nort-Holland Publishing Company, Amsterdam and New York, 1975.
5. HARARY, F.: *Proof Tecniques in Graph Theory*, Academic Press, New York, 1969.
6. SESHU, S.: Topological Considerations in the Desing of Driving Point Functions, *Trans. Inst. Radio Engr. CT-2*, 356-367, 1955.
7. SESHU, S. and REED, M.B.: *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley Publishing Company, 1961.
8. TUTTE, W.T.: *Introduction to the Theory of Matroids*, New York, 1971.
9. TUTTE, W.T.: Graph Factors, Nort-Holland Publishing Company, *Combinatorica Volume I*, NR1, 79-97, Amsterdam, 1981.