T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
YÖNEYLEM BİLİM DALI

OLASILIK DAĞILIMLARINDAN RASSAL DEĞİŞKENLİK ÜRETİMİ VE VBA UYGULAMASI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Elif ÇELİK

BURSA-2015

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
YÖNEYLEM BİLİM DALI

OLASILIK DAĞILIMLARINDAN RASSAL DEĞİŞKENLİK ÜRETİMİ VE VBA UYGULAMASI

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Elif ÇELİK

Danışman:
Prof. Dr. Hayrettin Kemal SEZEN

BURSA-2015

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

.... Anabilim/Anasanat Dalı, ... Bilim Dalı'nda .... numaralı ……………………................... ....'nın hazırladığı ".." konulu .... (Yüksek Lisans/Doktora/Sanatta Yeterlik Tezi/Çalışması) ile ilgili tez savunma sınavı, .../...../ 20.... günü ……… - ………..saatleri arasında yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin/çalışmasının …………………………..….. (başarılı/başarısız) olduğuna ……………………………… (oybirliği/oy çokluğu) ile karar verilmiştir.

Üye (Tez Danışmanı ve Sınav Komisyonu Başkanı)
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi

Üye
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi

Üye
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi

Üye
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi

Üye
Akademik Unvanı, Adı Soyadı
Üniversitesi

…../…../ 20….

ÖZET

Yazar Adı ve Soyadı	:	Elif ÇELİK
Üniversite	:	Uludağ Üniversitesi
Enstitü	:	Sosyal Bilimler Enstitüsü
Anabilim Dalı	:	Ekonometri Anabilim Dalı
Bilim Dalı	:	Yöneylem Bilim Dalı
Tezin Niteliği	:	Yüksek Lisans Tezi
Sayfa Sayısı	:	X+75
Mezuniyet Tarihi	:	… / … / 2015
Tez Danışman(lar)ı	:	Prof. Dr. H. Kemal SEZEN

OLASILIK DAĞILIMLARINDAN RASSAL DEĞİŞKENLİK ÜRETİMİ VE VBA UYGULAMASI

Rassal değişkenlik üretimi başta matematik, bilgisayar bilimleri ve istatistik olmak üzere yöneylem araştırmasının uygulama alanları kapsamındadır. Başlıca kullanım alanını ise benzetim (simülasyon) uygulamaları oluşturmaktadır. Bu tez çalışmasında standart olasılık dağılımları için seçilen algoritmaların temel içeriği açıklanmış ve VBA programı ile rassal değişkenlik üretme işlemi gerçekleştirilmiştir.

Dağılımlardan rassal değişkenlik üretme işleminin temelinde rassal sayı üretimi bulunmaktadır. Bu nedenle tez çalışmasında rassal sayıların özellikleri ve rassal sayı üreteçlerine değinilmiştir. Bunun yanı sıra rassallığın sınanmasında kullanılan testlere yer verilmiştir. Rassal değişkenlik üretiminde kullanılan temel yöntemler ve algoritmalar incelenmiş ve belirli dağılımlara uygulanmıştır. Son olarak verilen algoritmaların VBA programında kodlaması gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Sözde Rassal Sayılar, Rassal Değişkenlik Üretimi, Benzetim, VBA

ABSTRACT

Name and Surname	:	Elif ÇELİK
University	:	Uludağ University
Institution	:	Social Science Institution
Field	:	Department of Econometrics
Branch	:	Operational Research Branch
Degree Awarded	:	Master
Page Number	:	X+75
Degree Date	:	… / … / 2015
Supervisor (s)	:	Prof. Dr. H. Kemal SEZEN

GENERATING RANDOM VARIATES FOR PROBABILITY DISTRIBUTIONS AND VBA APPLICATION

Random variate generation is a field of research somewhere between mathematics, computer science, statistics and operational research. The generation of random variates from distributions is a prerequisite for simulation. In this study, selected algorithms for standart distributions has been explained and generating random variates by using VBA has been performed.

The basic ingredient needed for every method of generating random variates from any distribution is a source of uniform random numbers. For this reason, thesis study involve information about properties of random numbers, random number generators and randomness tests. Fundamental principles and algorithms in random variate generation has been analysed and applied. At the last given algorithms are coded in VBA.

Keywords: Pseudo Random Numbers, Random Variate Generation, Simulation, VBA

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve birikimlerini paylaşarak yol gösteren değerli danışman hocam, Prof. Dr. Kemal SEZEN'e teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi destekleriyle yanımda olup, gösterdikleri ilgi ve sabırdan dolayı başta annem olmak üzere aileme teşekkür ederim.

Bursa 2015 Elif ÇELİK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM
VBA UYGULAMASI

KISALTMALAR ve SEMBOLLER

RSÜ: Rassal Sayı Üreteci

GRSÜ: Gerçek Rassal Sayı Üreteci

SRSÜ: Sözde Rassal Sayı Üreteci

GRS: Gerçek Rassal Sayı

SRS: Sözde Rassal Sayı

DUÜ: Doğrusal Uyumlu Üreteç

U(0, 1): 0 ile 1 aralığında değer alan Tekdüze dağılım

U: Rassal sayı

$X, Y, Z, \ldots$: Rassal değişken

$\text{Ü}stel(\lambda)$: Üstel dağılım

$Gamma(\alpha, \beta)$: Gamma dağılımı

$N(\mu, \sigma^2)$: Normal dağılım

$Negbin(k, p)$: Negatif Binom dağılımı

$Geom(p)$: Geometrik dağılım

$Poisson(\lambda)$: Poisson dağılımı

$\lfloor x \rfloor$: x'den küçük veya x'e eşit olan en büyük tamsayı

VBA: Visual Basic for Applications

TABLOLAR

ŞEKİLLER

GİRİŞ

Rassal değişkenlik üretimi istatistiksel hesaplama ve benzetim (simülasyon) yöntemlerini kapsayan bir araştırma alanı olarak kabul edilmektedir (Hörmann, Leydold ve Derflinger, 2004: 3). Benzetim işlemi bir sistemin modeli üzerinde yapılan denemeler ile ilgilenmektedir. Burada model, değişik politikaların olası etkilerini göstermek amacıyla denemelerin yapıldığı bir araç olarak kullanılmaktadır. Modelde en iyi sonuçları veren seçenekler gerçek sistemde uygulamaya konmak için aday olurlar (Pidd, 2009: 9). Rassal değişkenlik üretimi buradaki denemelerin gerçekleştirilmesini sağlamaktadır. Tezde rassal değişkenlik üretiminin benzetim ile olan ilişkisinden ziyade üretim işleminin teorik kısmı ile ilgilenilmektedir.

Rassal değişkenlik rassal sayılara belirli dönüşüm yöntemlerinin uygulanması sonucu üretilmektedir. Çalışmanın amacı yaygın olarak kullanılan olasılık dağılımlarından rassal değişkenlik üretmek için uygun dönüşüm yöntemlerinin ortaya konulması, bu yöntemlerden yararlanılarak rassal değişkenlik üretme algoritmalarının oluşturulması ve bu algoritmaların VBA ile bilgisayar programlarının yazılmasıdır. Bu nedenle ilk olarak 1. Bölümde rassal sayıların özelliklerine yer verilmiştir. Bu bölümde rassallık olgusuna ve rassallık konusunda öne sürülen fikirlere kısaca değinildikten sonra rassal sayıların kullanım alanlarına değinilmiştir. Söz konusu kullanım alanları kısa bir tarihçe ile aktarılmaya çalışılmıştır. Bölümün devam eden kısımlarında rassal sayıların istatistiksel özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra rassal sayı üretimini gerçekleştirmek için tasarlanmış olan üreteçlere değinilmiştir. Rassal sayı üreteçleri, gerçek rassal sayı üreteçleri ve sözde rassal sayı üreteçleri olmak üzere iki sınıfta incelenmiştir. İki üreteç için de tanımlamalar yapılmış ve örneklere yer verilmiştir. Bu bölümde son olarak rassal sayı üreteçlerini sınama amaçlı kullanılan testlere yer verilmiştir. Söz konusu testler ampirik (deneysel) ve teorik olmak üzere iki çeşittir. İki test arasındaki farka değinilmiş ve bölümün geri kalan kısmında yaygın olarak kullanılan ampirik testlere yer verilmiştir.

Rassal değişkenlik konusu 2. Bölümde aktarılmaktadır. İlk olarak rassal değişkenlerin kullanım alanlarına değinilmiş ve üretim yöntemleri aktarılmıştır. Söz konusu üretim yöntemleri, ters dönüşüm, kabul-red, bileşim (*composition*) ve konvolüsyon (*convolution*) olmak üzere 4 başlık altında toplanmıştır. Her bir yöntemin ayrıntıları ve algoritmaları bu kısımlarda açıklanmış ve grafiklerle desteklenmeye çalışılmıştır. Daha sonra bu yöntemleri kullanarak belirli dağılımlardan rassal değişkenlik üretilecek algoritmalar aktarılmıştır. Dağılımlar sürekli ve kesikli olmak üzere iki ana başlık altında sınıflandırılmıştır. Sürekli dağılımlardan Tekdüze, Üstel, Gamma, Beta, Weibull, Normal, Lognormal ve Deneysel dağılımlara yer verilmiştir. Bernoulli, Binom, Negatif Binom, Geometrik ve Poisson dağılımları ise kesikli dağılımları oluşturmaktadır. Her bir dağılımın ilk olarak istatistiksel özellikleri açıklanmıştır. Daha sonra söz konusu dağılım için rassal değişkenlik üretme yöntemi detaylı olarak aktarılmış ve yöntemin uygulanacağı algoritma verilmiştir.

3. Bölüm tezin uygulama kısmını oluşturmaktadır. Burada uygulamanın gerçekleştirileceği VBA (Visual Basic for Applications) programı hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Daha sonra her bir dağılım için rassal değişkenlik üretiminde kullanılacak algoritmaların VBA programında oluşturulan kodları aktarılmıştır. Bunun yanı sıra oluşturulan formun görseli hakkında bilgi vermesi için uygulamanın ekran görüntülerine yer verilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

BÖLÜM 1. RASSAL SAYILAR

Rassallık kavramının var olup olmadığı felsefe alanında süregelen bir tartışma konusu olmuştur. Eski yunan filozoflarından Leucippus hiçbir olayın rassal olarak gerçekleşmediğini ve bütün olayların fizik kuralları ile açıklanabileceğini savunmuştur. Birçok filozof bu fikri desteklemekte iken diğerleri ise bu görüşü tamamen reddetmemekle birlikte yine de öngörülemeyen durumların doğurduğu bir belirsizliğin var olduğunu kabul etmektedirler (Bennett, 1998: 83-86). Bunun yanı sıra rassallığın tanımı matematiksel olarak irdelenmiştir. Knuth tek başına bir rassal sayıdan söz edilemeyeceğini öne sürmüştür. Rassal sayıları, belirli bir dağılıma uyan ve bir dizi içinde değerlendirilebilen birbirinden bağımsız sayılar olarak tanımlamıştır. Bu durumda elde edilen her bir sayının verilen değer aralığında görülme olasılığı belirlenmiş olmaktadır. Başka bir deyişle sayıların elde edilmesinde şans faktörü ortadan kalkmaktadır (Knuth, 1981: 2). Teorik fizikçi H. R. Pagels'e göre ise sonlu diziler için rassallığın ne anlama geldiğinin kesin bir matematiksel tanımı mevcut değildir. Sonlu bir sayı dizisi tüm rassallık testlerinden başarıyla geçse bile geliştirilen yeni bir testten başarısız olabilir. Dolayısıyla dizinin rassal olduğuna kesin bir karar verilememektedir (Öztürk ve Özbek, 2004: 124).

İstatistikte kullanılan en temel yöntemlerden biri örnekleme işlemidir. Bu işlem anakütleden rassal olarak çekilen örneklemin seçilmesi ile gerçekleştirilmektedir. Burada rassal kelimesi günlük hayattaki kullanımından farklı olarak olasılık kavramı çerçevesinde değerlendirilmektedir. Örneklem birimleri seçilirken, bu birimlere çoğu zaman eşit seçilme şansı tanındığını ifade etmekte kullanılmaktadır (Gürsakal, 2008: 13-14). Rassal örnekleme tekniğini kullanarak istatistiksel teorinin geliştirilmesine katkı sağlayan Gustav Theodor Fencher, çalışmalarında kullandığı rassal dizileri 1843 ile 1852 yılları arasında aldığı loto sayılarından elde etmiştir. Çalışmalarının amacı bu rassal dizileri kullanarak belirli olaylardan elde edilen verileri karşılaştırmaktır. Meteorolojik veriler, doğum ve ölüm verileri, farklı mevsimlerde gerçekleşmiş intihar olayları, farklı yerlerde meydana gelen fırtınaların sayısı çalışmanın veri setlerini oluşturmuştur. Bu verilerdeki değişimin özel bir duruma bağlı olabileceğini veya tamamen şans faktörü ile açıklanabileceğini araştırmıştır (Bennett, 1998: 111-112).

Rassal dizilerin elde edilmesinde kullanılan loto çekilişi, zar atımı, desteden kart çekilmesi gibi yöntemler 20. yüzyıla kadar devam etmiştir. Ancak zamanla çalışmalarda daha fazla rassal veriye ihtiyaç duyulmuştur. Bu nedenle rassal sayı tabloları geliştirilmiştir.

Dolayısıyla önceden tercih edilen yöntemler kullanışsız kalmıştır. Cambridge Üniversitesi Yayınları 1927 yılında 41.600 adet rassal sayı içeren tablo yayınlamıştır. 1955 yılında ise RAND şirketi elektronik rulet çarkı ile elde ettiği rassal frekans titreşimlerini kullanarak bir milyon rassal sayı içeren bir tabloyu kullanıma sunmuştur (Bennett, 1998: 131-135).

Bilgisayarların kullanımı ile birlikte başka birçok uygulamada da rassal sayılardan yararlanılmıştır. Monte Carlo benzetim yöntemi bu uygulamalardan bir tanesidir (Bennett, 1998: 136). Bu yöntem bilinen belirli yollarla veya analitik yaklaşımla çözülemeyen integrallerin hesaplanmasını sağlamaktadır. 1940'lı yıllarda katlı integrallerin çözümü için matematiksel fizik alanında kullanılmıştır. Günümüzde ise finans, bayesgil istatistik gibi alanlarda da kullanılabilmektedir (Dagpunar, 2007: 1). Bu gibi uygulamalarda zamanla daha çok rassal sayıya ihtiyaç duyulmuştur. Ancak rassal sayı tablolarının bilgisayarlarda depolanması, bilgisayar hafızasında çok fazla yer kaplamaktadır. Ayrıca oldukça zaman alan bir uygulama olarak görülmektedir. Bu nedenle kullanılacak olan rassal sayının uygulama anında üretildiği, önceden programlanması mümkün olan aritmetik yöntemler geliştirilmiştir. Aritmetik yöntemler kullanılarak rassal dizi üretimi ilk olarak 1946 yılında Von Neumann tarafından önerilmiştir. Bu teknik orta kare tekniği olarak adlandırılmaktadır (Knuth, 1981: 3). Yöntemin ayrıntılarına Kısım 1.2.2'de değinilmiştir.

Günümüze kadar birçok rassal sayı üreteci geliştirilmiştir ve rassal sayıların oldukça fazla uygulama alanı bulunmaktadır. Örneğin stokastik (olasılıklı) modeller için benzetim uygulamalarında, Monte Carlo benzetim tekniğinde, rassal örnekleme işlemlerinde, karar analizlerinde ve şans oyunlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca karmaşık problemlerin çözümü için nümerik analiz dalında, kriptografi alanında ve algoritmaların test edilmesi amacıyla bilgisayar programlama alanında tercih edilmektedir (Gentle, 2003: 1; Knuth, 1981: 1-2).

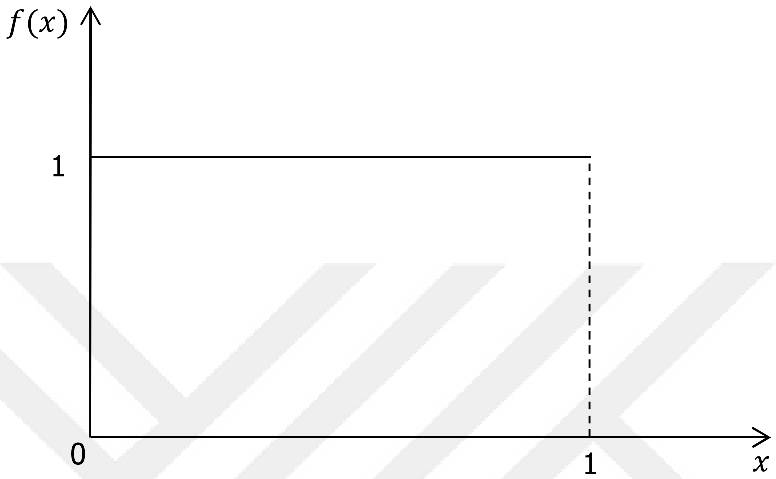
1.1. RASSAL SAYILARIN ÖZELLİKLERİ

Bir rassal sayı dizisinde $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ bulunması gereken iki önemli istatistiksel özellik, Tekdüze (Düzgün) dağılım (*uniformity*) ve bağımsızlık (*independence*) özellikleridir. Her rassal sayı U_i, 0 ile 1 aralığında değer alan Tekdüze dağılımdan çekilen bağımsız bir örneklemdir (Banks, Carson, Nelson ve Nicol, 2005: 251). Bu dağılım kısaca U(0, 1) biçiminde gösterilmektedir (Law ve Kelton, 2000: 402).

Rassal sayıların istatistiksel özellikleri aşağıda aktarılmıştır. Her bir U_i için olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyledir:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & d.d. \end{cases} \tag{1.1}$$

Bu fonksiyonun grafiği ise Şekil 1'de gösterilmektedir.



Şekil 1. Tekdüze Dağılımlı Rassal Sayıların Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Banks vd., 2005)

Her bir U_i için beklenen değer

$$E(U) = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

ve her bir U_i değerinin varyansı

$$V(U) = \int_0^1 x^2\,dx - [E(U)]^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \tag{1.3}$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Banks vd. 2005: 252).

Bu kısımda aktarılmış olan U(0, 1) dağılımına uyan rassal sayılar, "tekdüze rassal sayılar" (*uniform random numbers*) olarak da adlandırılmaktadır. Tekdüze dağılımdan farklı bir dağılıma sahip olan rassal sayılara ise "rassal değişkenlik" (*random variates*) veya "tekdüze olmayan rassal sayılar" (*nonuniform random numbers*) adı verilmektedir (Niederreiter, 1992: 162). U(0, 1) dağılımından rassal sayıların üretilmesi durumunda, elde edilen rassal sayılara belirli dönüşüm işlemi uygulanarak diğer dağılımlardan da (Normal, Gamma, Binom, vb.) rassal değişkenlik üretmek mümkün olmaktadır (Law ve Kelton, 2000: 402). Rassal değişkenlik üretme işlemlerinin detayları Bölüm 2'de aktarılmıştır.

1.2. RASSAL SAYI ÜRETEÇLERİ

Rassal sayıların üretiminde kullanılan ilk yöntemler zar atma, rulet çevirme, kura çekilişi, para atma vb. işlemlerdir. Bu yöntemler el işlemlerine dayanan ve rassal sayı üretiminde kullanılan en ilkel yöntemler olarak bilinmektedir. Ayrıca rassal sayı tabloları da bilgisayar döneminden önce kullanılan yöntemler arasındadır (Öztürk ve Özbek, 2004: 127-128).

Bahsedilen yöntemler uzun rassal sayı dizilerine ihtiyaç duyulduğunda yetersiz kalmakta ve zaman kaybına neden olmaktadır. Günümüzde ise bu işlem için rassal sayı üreteçleri (**RSÜ**) kullanılmaktadır. Rassal sayı üreteci birbirinden bağımsız rassal sayıları oluşturmayı amaçlayan bir bilgisayar programıdır. Rassal sayıların elde edilme şekline göre farklılık gösteren RSÜ'ler, gerçek rassal sayı üreteci (**GRSÜ**) (*true random number generator*) ve sözde rassal sayı üreteci (**SRSÜ**) (*pseudo random number generator*) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (Pidd, 2009: 216, 217; L´Ecuyer, 2002: 2).

1.2.1. Gerçek Rassal Sayı Üreteçleri

GRSÜ'ler rassal olduğu kabul edilen fiziksel olaylara (çevresel gürültü kaynakları, radyoaktivite vb.) dayanmaktadır. GRSÜ ile üretilen sayılar gerçek rassal sayı (**GRS**) olarak adlandırılmaktadır. Parçacık yayılım teorisine dayanan elektronik ve radyoaktif cihazlar kullanılarak hızlı ve verimli GRSÜ'ler tasarlanabilmektedir (Pidd, 2009: 216). Rand şirketinin öne sürdüğü ve bir milyon rassal sayıyı kullanıma sunan cihaz GRSÜ'lerin bilinen bir örneğidir. GRS üretiminde kullanılan cihazların başka bir örneği ise ERNIE (Electronic Random Number Indicator Equipment) cihazıdır. Bu cihaz piyango çekilişinde kazananların belirlenmesi amacıyla kullanılmıştır (Law ve Kelton, 2000: 403).

GRSÜ'lerin sözde rassal sayı üreteçlerine kıyasla birçok dezavantajı bulunmaktadır. Örneğin yükleme ve çalıştırma işlemlerinin daha elverişsiz olması, daha yavaş çalışmaları ve bu nedenle zaman kaybına yol açmaları bunlardan bazılarıdır. Ayrıca GRSÜ ile üretilen rassal sayı dizisinin aynısının tekrar elde edilememesi de GRSÜ'leri elverişsiz kılmaktadır. Tekrar elde etme işleminin benzetim uygulamalarında ve tasarlanmış olan programların verimliliğini kontrol etmede oldukça önemli bir rolü bulunmaktadır. Bunun yanı sıra GRSÜ'ler özel donanım ve/veya özel çevresel şartlar gerektirdiklerinden bu üreteçleri kullanmak pahalı bir yöntem olarak görülmektedir. Ancak tüm zorluklarına rağmen GRSÜ'ler rassallığın önemli olduğu alanlarda tercih edilmektedir. Örneğin sözde rassal sayı üreteçlerinin başlangıç değerinin belirlenmesinde, kriptografi uygulamalarında, kumar makinelerinde GRSÜ'ler kullanılmaktadır (L´Ecuyer, 2012: 37).

1.2.2. Sözde Rassal Sayı Üreteçleri

SRSÜ'ler deterministik algoritmalar kullanılarak rassal sayıların üretilmesinde kullanılmaktadır. Başka bir deyişle SRSÜ ile elde edilen rassal sayı dizileri bilinen belirli teknikler ile üretilmektedir (Pidd, 2009: 216-217). Kullanılan programın deterministik olması farklı zamanlarda veya farklı bilgisayarlarda aynı rassal sayı dizisinin elde edilmesine olanak sağlamaktadır (L´Ecuyer, 2002: 2). Kullanılan teknik ve başlangıç değeri bilindiği takdirde aynı rassal sayı dizisi tekrar elde edilebilmektedir. Ancak rassal sayı dizisinin tekrar elde edilebilir (yinelenebilir) olması, üretilecek olan bir sonraki sayının tahmin edilebilir olmasına yol açmaktadır. Bu nedenle SRSÜ ile üretilen rassal sayıların gerçek rassallığa tam olarak ulaşamadığı düşünülmektedir. Dolayısıyla bu sayılar sözde rassal sayı (**SRS**) olarak adlandırılmaktadır (Banks vd. 2005: 252; Pidd, 2009: 217).

Rassal sayılar üretilirken 0 ile 1 aralığında değerler alan sayı dizisinin elde edilmesi istenmektedir. Üretilen rassal sayıların (rassallık için ideal özellikler olan) Tekdüze dağılım ve birbirinden bağımsızlık özelliklerini de olabildiğince sağlaması beklenir. Bu beklentilerin karşılanıp karşılanmadığı Kısım 1.3'de aktarılmış olan belirli testler ile kontrol edilmektedir. Ayrıca rassal sayılar üretilirken aşağıda belirtilen koşullar da göz önünde bulundurulmalıdır (Banks vd. 2005: 253):

- Üretim yöntemi hızlı olmalıdır. Genellikle uygulamalarda çok sayıda rassal sayıya ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle RSÜ'nün hızı maliyet açısından göz önünde bulundurulması gereken bir faktördür.
- Üretilen rassal sayılar yinelenebilir (yeniden üretilebilir) olmalıdır. Başlangıç koşulları bilindiğinde istenilen rassal sayı dizisinin elde edilmesi, süreçlerde hataları tespit edebilmek ve/veya farklı sistemleri kıyaslamak için kullanışlı olmaktadır.
- Kullanılan üretim yöntemi farklı bilgisayarlara ve farklı program dillerine aktarılabilir (taşınabilir) olmalıdır.
- Üretilen rassal sayı dizisinin uzunluğu (periyodu) yeterince uzun bir döngüye sahip olmalıdır. Başka bir deyişle üretilen rassal sayı bir öncekini tekrar etmemelidir.

SRS üretme işleminde kullanılan ilk aritmetik yöntem Von Neumann tarafından önerilmiş olan orta kare tekniğidir. Bu yöntem temelde, seçilen sayının karesini alıp elde edilen yeni sayının ortasındaki rakamların oluşturduğu sayının tekrar karesini alma işlemine dayanmaktadır. Örneğin başlangıç için altı basamaklı 926535 sayısı (π sayısının basamaklarından seçilmiştir) alınmış olsun. Bu durumda bu sayının karesi alındığında on iki basamaklı 858467106225 sayısı elde edilmektedir. Dolayısıyla bu sayının ortasında bulunan altı rakamın oluşturduğu 467106 sayısı bir sonraki rassal sayı olmaktadır. Rassal sayı üretme işlemi bu şekilde devam etmektedir. Ancak bu yöntemle üretilen rassal sayıların periyodu genelde düşük olmaktadır. Bu nedenle orta kare tekniği rassal sayı üretiminde etkili bir yol olarak görülmemektedir (Knuth, 1981: 3).

Devam eden kısımlarda bir üreteç yardımıyla üretilen rassal sayılardan bahsedilecektir. Dolayısıyla bu sayılar sözde rassal sayılardır. Ancak kolaylık sağlaması adına bunlara kısaca rassal sayılar denilecektir.

1.2.2.1. Doğrusal uyumlu üreteçler

Doğrusal uyumlu üreteçler (**DUÜ**) ilk olarak D. H. Lehmer tarafından 1949 yılında öne sürülmüştür. Bu üreteçlerin temeli modüler aritmetik işlemine dayanmaktadır. DUÜ'lerin genel formu (Knuth, 1981: 9):

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \, mod \, m, \qquad n \geq 0 \tag{1.4}$$

biçimindedir. (1.4) denkleminde bulunan m, a, c, X_0 değişkenleri tamsayı değerler almaktadır. Değişkenlerin açıklaması şu şekildedir: m, modül değeridir (the *modulus*) ve değer aralığı $m > 0$ biçimindedir. a, çarpan (the *multiplier*) olarak adlandırılır. $0 \leq a < m$ aralığında değerler alır. c, artış değeridir (the *increment*) ve değer aralığı $0 \leq c < m$ şeklindedir. $0 \leq X_0 < m$ aralığında değerler alan X_0, başlangıç değeri (tohum, the *seed* / the *starting value*) olarak adlandırılır. Bu şekilde elde edilen rassal sayı dizisine "doğrusal uyumlu dizi" adı verilmektedir.

DUÜ'ler c değişkeninin aldığı değere göre sınıflandırılmaktadır. (1.4) denkleminde c değeri sıfıra eşit olduğunda ($c = 0$) üretece "çarpımsal uyumlu üreteç" adı verilmektedir. Üretecin genel gösterimi şu şekildedir (Gentle, 2003: 11):

$$X_{n+1} = (aX_n) \, mod \, m \tag{1.5}$$

Burada c değerinin sıfıra eşit olması periyod uzunluğunu küçültmektedir. Ancak bu durum yeterli periyod uzunluğunu elde etmeye engel değildir. Bunun yanı sıra c değerinin sıfıra eşit olmadığı durum ile kıyaslandığında çarpımsal uyumlu üreteçler daha hızlı bir üretim işlemi sağlamaktadır. c değerinin sıfırdan farklı olduğu durumlarda ($c \neq 0$) üreteç "karma uyumlu üreteç" olarak adlandırılmaktadır (Knuth, 1981: 10).

Denklem (1.4)'de seçilen m değeri üretilen sayı dizisinin periyodunu belirlemektedir. Basit bir örnek vermek gerekirse $m = 8$ ve $X_0 = a = c = 5$ seçildiği takdirde üretilen sayı dizisi 5, 6, 3, 4, 1, 2, 7, 0, 5, 6, 3, …, biçiminde devam etmektedir. Bu dizi sürekli tekrar eden ve periyod uzunluğu 8 olan bir dizidir. Burada da görüldüğü üzere doğrusal uyumlu diziler periyodiktir ve döngüye girmesi kaçınılmazdır. Dolayısıyla rassallığın sağlanabilmesi için DUÜ'lerde periyod uzunluğunun yeterince büyük olması arzu edilmektedir (Knuth, 1981: 9). Bu nedenle m değeri genellikle $m = 2^b$ olacak şekilde seçilmektedir. Burada b bilgisayarda bir sözcük için kullanılan bit sayısını ifade etmektedir. Dizinin devir uzunluğu m olduğunda DUÜ tam periyoda sahiptir olmaktadır (Law ve Kelton, 2000: 408-409).

Tam periyoda sahip bir dizi elde edebilmek için m, a, c değerlerinin seçimi önemlidir. Bu değerlerin nasıl seçileceğine ilişkin teoremlerden bir tanesi ispatsız olarak aşağıda verilmiştir. Söz konusu teorem Hull ve Dobell tarafından ispatlanmıştır (Knuth, 1981: 16).

Teorem 1.1. m, a, c ve X_0 değişkenleri ile tanımlanan doğrusal uyumlu bir dizinin aşağıdaki üç koşul sağlandığı takdirde periyod uzunluğu m'dir

i) m ile c aralarında asal sayılar;

ii) $b = a - 1$ sayısı m'i bölen her asal sayının katı;

iii) eğer m, 4'ün katı ise b de 4'ün katı.

Üretilen doğrusal uyumlu dizinin elemanları $[0,\ m-1]$ aralığında değerler alan tamsayılardan oluşmaktadır. U(0, 1) dağılımına sahip SRS elde etmek için bu tamsayılar m değerine bölünmektedir (Law ve Kelton, 2000: 406). Matematiksel ifade ile gösterilecek olursa rassal sayı U_n olmak üzere

$$U_n = \frac{X_n}{m}, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{1.6}$$

işlemi uygulanmaktadır (Knuth, 1981: 9).

(1.4) denklemindeki a, c, m değerleri üretecin kalitesini belirlemektedir. Birçok programlama dili, bu değerlerin seçimine bağlı olarak özelleştirilmiş DUÜ'leri kullanmaktadır (Öztürk ve Özbek, 2004: 135). Bu şekilde özelleştirilen ve yaygın olarak kullanılan üreteçlerin örnekleri aşağıdaki tabloda aktarılmıştır. (1.4) denklemindeki değerleri belirleme yöntemleri ve DUÜ'ler ile ilgili daha detaylı bilgi için (Knuth, 1981; Gentle, 2003) önerilebilir.

Tablo 1. Kullanılan DUÜ Örnekleri

İsim	a	c	m	Periyod	Öneren Kişi/ Kurum
LGM	16807	0	2^{31}-1	2^{31}-2	Lewis, Goodman ve Miller
PRB	630360016	0	2^{31}-1	2^{31}-2	Payne, Rabung ve Bogyo
Marsg	69069	1	2^{32}	2^{32}	Marsaglia, VAX
Los Alamos	5^{19}	0	2^{48}	2^{46}	Beyer
Atari ST	3141592621	1	2^{32}	2^{32}	OS ROM
rand	1103515245	12345	2^{31}	2^{31}	Unix
drand48	25214903917	11	2^{48}	2^{48}	Unix

Kaynak: Ripley (1990: 154)

Tablo 1'de de görüldüğü üzere çoğu programlama dili özelleştirilmiş RSÜ'leri kullanmaktadır. Bu RSÜ'ler, kullanılan programlama dilinin kendine özgüdür ve hangi yöntemin kullanıldığı konusunda genellikle fazla ayrıntı verilmemektedir. Dolayısıyla yaygın olmayan bir programlama dili kullanıldığında ve/veya üretilen rassal sayıların rassallığından şüphe duyulduğunda RSÜ'lerin test edilmesi gerekmektedir (Pidd, 2009: 222). İlerleyen kısımlarda bu test yöntemleri aktarılmaktadır.

1.2.2.2. Diğer üreteç türleri

DUÜ'lerin yaygın olarak kullanılmasına karşın bu üreteçlerin birçok alternatifi bulunmaktadır. Daha uzun periyoda sahip ve daha iyi istatistiksel özellikleri bulunan üreteçler elde etmek adına diğer üreteçler geliştirilmiştir (Law ve Kelton, 2000: 412). Bu kısımda diğer alternatif üreteçlerin bazıları aktarılacaktır.

Bilinen üreteç türlerinden bir tanesi Knuth tarafından önerilmiş olan karesel (*quadratic*) uyumlu üreteçtir. Bu üreteç (1.4) denkleminin genelleştirilmiş bir halidir. Söz konusu üreteç şu şekildedir:

$$X_{n+1} = (dX_n^2 + aX_n + c)\; mod\; m \tag{1.7}$$

Başka bir üreteç ise X_{n+1} değerinin yalnızca X_n değerine değil, X_n ve X_{n-1} değerlerine bağlı olduğu Fibonacci üretecidir. Bu üreteç

$$X_{n+1} = (X_n + X_{n-1})\; mod\; m \tag{1.8}$$

biçiminde gösterilmektedir. 1950'lerin başında tartışılan bu üretecin periyod uzunluğu genellikle m'den büyük olmaktadır. Ancak üretilen sayıların rassallığı yeterince sağlamadığı düşünülmektedir. Bu üreteçlerin başka bir formu ise şu şekilde önerilmiştir:

$$X_{n+1} = (X_n + X_{n-k})\; mod\; m \tag{1.9}$$

Ancak burada da $k \leq 15$ olduğu durumda üretilen sayılar rassallık testinden geçememektedir. Bu nedenle k için büyük değerlerin tercih edilmesi önerilmektedir (Knuth, 1981: 25-26).

Bu kısımda aktarılacak olan son üreteç Tausworthe tarafından önerilmiştir ve Tausworthe üreteçleri olarak adlandırılmaktadır. Söz konusu üreteçlerde ikili sayı sistemi kullanılmaktadır. b_1, b_2, … değerleri 0 ya da 1 değerlerini alabilen bit sayılarını ifade etmek üzere üreteç şu şekildedir:

$$b_i = \left(c_1 b_{i-1} + c_2 b_{i-2} + \cdots + c_q b_{i-q}\right) mod\; 2 \tag{1.10}$$

Denklemde görülen c_1, c_2, …, c_q değerleri 0 ya da 1 değerlerini alabilen sabitlerdir. Üretecin maksimum periyodu $2^q - 1$ dir. Hesaplama verimliliğini arttırmak için c değerlerinin çoğu 0 seçilmelidir. Bu nedenle (1.10) denklemi

$$b_i = \left(b_{i-r} + b_{i-q}\right) mod\; 2 \tag{1.11}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Burada r ve q değerleri $0 < r < q$ şartını sağlayan tamsayılardır (Law ve Kelton, 2000: 416).

Bir sonraki kısımda üretilen sayıların rassal olup olmadığını sınamak için kullanılan testler aktarılmıştır.

1.3. ÜRETİLEN RASSAL SAYILARIN TEST EDİLMESİ

Üretilen rassal sayı dizisinde olması gereken özellikler Tekdüze dağılım ve bağımsızlıktır (Banks vd. 2005: 251). Bu özelliklerden herhangi birinin var olmaması, tekdüzeliğin veya bağımsızlığın bozulması anlamına gelmektedir. Bu ise rassallığın sağlanamaması demektir (Öztürk ve Özbek, 2004: 147).

Daha önce de değinildiği gibi üreteçlerin tamamen güvenilir olması mümkün gözükmemektedir. Güvenilirliği kanıtlanmış olan üreteçler bile başarısız olabilmektedir. Bu nedenle üretilen rassal sayılara bir takım testler uygulanmaktadır. Ancak bu testler üretecin tamamen güvenilir olduğunu garanti edememektedir. Rassal sayı dizisinde istenilen özelliklerin bulunup bulunmadığını kontrol etmek için kullanılmaktadır (Hellekalek, 1997: 6). Söz konusu testler, ampirik (deneysel) testler ve teorik testler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. İki test arasındaki farka kısaca değinilecek olursa ampirik testler, bilinen istatistiksel testlerden (Ki-kare uygunluk testi, diziler testi vb.) oluşmaktadır. Bu testler üretilmiş olan gerçek sayı dizilerine uygulanmaktadır. Teorik testler uygulanırken gerçek sayı dizisi üretilmeksizin, parametre seçimleri incelenmektedir (Law ve Kelton, 2000: 418). Tezde ampirik testlere yer verilmeye çalışılmıştır. Teorik testler ile ilgili detaylı bilgi için (Knuth, 1981; Law ve Kelton, 2000) incelenebilir.

Üretilen rassal sayıların 0 ile 1 aralığında Tekdüze dağılıma uyduğunu ifade eden hipotez; H_0 ve aksini iddia eden karşıt hipotez; H_1 ile gösterilmek üzere tekdüzelik ile ilgili hipotezler şu şekildedir:

$$H_0:\ U_i \ \sim\ U(0,1)$$
$$H_1:\ U_i \ \nsim\ U(0,1)$$

Rassal sayı dizisinin bağımsızlık özelliği ile ilgili hipotezler,

$$H_0:\ U_i' ler\ birbirinden\ bağımsız$$
$$H_1:\ U_i' ler\ birbirinden\ bağımsız\ değil$$

biçimindedir (Banks vd. 2005: 260).

Rassal sayıların Tekdüze dağılım ve bağımsızlık özelliklerini kontrol etme işleminde kullanılan birçok test bulunmaktadır. Bu kısımda yaygın olarak kullanılan testlere yer verilmeye çalışılmıştır. Aktarılacak olan testler Ki-kare uygunluk testi, Kolmogorov-Smirnov testi, otokorelasyon testi ve diziler testidir.

1.3.1. Ki-Kare Uygunluk Testi

Bir örneklemin, teorik bir dağılım ile karşılaştırılması söz konusu olduğunda Ki-kare uygunluk testi uygulanmaktadır (Gürsakal, 2009: 250). Burada karşılaştırılacak olan söz konusu teorik dağılım, Tekdüze dağılımdır. Bu nedenle üretilen rassal sayıların Tekdüze dağılıma uygunluğunu araştırmak amacıyla kullanılacak olan testlerden bir tanesi Ki-kare testidir (Banks vd. 2005: 260).

Ki-kare testi temelde, gözlemlenen frekans (G_i) ile teorik (beklenen) frekans (T_i) arasındaki fark işlemine dayanmaktadır. Eğer bir farklılık varsa, bu farkın şans eseri hatalara bağlanıp bağlanamayacağı kontrol edilmektedir (Serper, 2004: 185). Ki-kare testi aşağıdaki test istatistiğini kullanmaktadır (Banks vd. 2005: 263):

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(G_i - T_i)^2}{T_i} \tag{1.12}$$

Buradaki G_i ve T_i sırası ile i'inci sınıftaki, gözlemlenen frekans ve beklenen frekans değerleridir. n değeri ise sınıf sayısını göstermektedir. Toplam gözlem sayısı N ile gösterilmek üzere Tekdüze dağılım için beklenen frekans değeri

$$T_i = \frac{N}{n} \tag{1.13}$$

biçimindedir. Ki-kare test istatistiğinden yararlanabilmek için örneklem büyüklüğünün en az 50 ($N \geq 50$) olması beklenir. Bunun yanı sıra n ve N değerlerinin, $T_i \geq 5$ olacak biçimde seçilmesi önerilmektedir. (Banks vd. 2005: 264-265).

Ki-kare dağılımının tek parametresi serbestlik derecesidir (Gürsakal, 2009: 249). Buradaki test işleminde Ki-kare dağılımının serbestlik derecesi $n - 1$ olarak hesaplanmaktadır (Banks vd. 2005: 264). Ki-kare testinde karar verme aşamasında, verilerden elde edilen test istatistiği belirli bir anlamlılık düzeyi (α) ve serbestlik derecesi için Ki-kare tablosundan belirlenen değerler ile karşılaştırılmaktadır. Elde edilen değer tablo değerinden büyük ise sıfır hipotezi α anlamlılık düzeyinde reddedilir (Gürsakal, 2009: 250). Başka bir deyişle yapılan test sıfır hipotezinin reddedilemeyeceği şeklinde sonuç verirse, üretilen rassal sayı dizisinin 0 ile 1 aralığında Tekdüze dağılıma uygun olduğu kabul edilir (Serper, 2004: 227).

1.3.2. Kolmogorov-Smirnov Testi

Üretilen rassal sayıların, Tekdüze dağılıma uygunluğunun araştırıldığı diğer bir test ise Kolmogorov-Smirnov (K-S) testidir (Banks vd. 2005: 260). Örneklem hacmi çok küçük olduğunda K-S testi Ki-kare testine tercih edilmektedir. Sıfır hipotezinde öne sürülen dağılım fonksiyonunun belirli olduğu durumlarda K-S testinin kullanılması uygundur. Burada Tekdüze dağılım altında geçerli olan birikimli frekans dağılımı $(F_0(x))$ ile gözlemlenen verilerin birikimli frekans dağılımı $(S_n(x))$ karşılaştırılmaktadır (Gürsakal, 2009: 266-267). Frekans dağılımları arasındaki söz konusu karşılaştırma şu şekilde gerçekleştirilmektedir (Aytaç, 1991: 47):

$$D_n = max\ |S_n(x) - F_0(x)| \tag{1.14}$$

Geçerli olan x'in herhangi bir değeri için gözlemlenen verilerin birikimli frekans dağılımı

$$S_n(x) = \frac{k}{n} \tag{1.15}$$

biçiminde hesaplanmaktadır. (1.15) denkleminde k, x'e eşit veya ondan daha küçük olan gözlemlerin sayısını göstermektedir.

Karar verme aşamasında D_n test istatistiği α anlamlılık düzeyinde K-S tablosundan elde edilen değer $(D_{n,\alpha})$ ile karşılaştırılır. D_n değeri, $D_{n,\alpha}$ tablo değerinden büyük ise sıfır hipotezi α anlamlılık düzeyinde reddedilir (Aytaç, 1991: 48). Diğer bir deyişle eğer $D_n \leq D_{n,\alpha}$ ise üretilen rassal sayıların dağılımının Tekdüze dağılıma uygun olduğu söylenir (Banks vd. 2005: 262).

Ki-kare ve K-S testleri üretilen rassal sayıların dizilişlerinin rassal olup olmadığı konusunda bilgi vermemektedir. Bu nedenle üretilen sayıların sıralanma şeklini göz önünde bulunduran bir takım testlere ihtiyaç duyulmaktadır (Banks, Carson ve Nelson, 1996: 303). Bu testlerden bazıları aşağıda aktarılmıştır.

1.3.3. Otokorelasyon Testi

Üretilen dizideki sayılar arasında bağımsızlık olup olmadığını kontrol etmek için otokorelasyon testi kullanılmaktadır. Kontrol işlemi için U_i, U_{i+m}, U_{i+2m},…, $U_{i+(M+1)m}$ sayıları arasındaki otokorelasyon (ρ_{im}) incelenmektedir. Burada M sayısı $i+(M+1)m \leq N$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayıdır. N değeri ise dizideki toplam rassal sayı adedini göstermektedir. m, gecikme (*lag*) olarak adlandırılmaktadır. Testin temelinde i. sayıdan başlayarak her m sayısı için sayılar arasındaki otokorelasyona bakılmaktadır. Otokorelasyon testi için geçerli olan sıfır hipotezi, sayıların birbirinden bağımsız olduğunu öne sürmektedir. Söz konusu hipotezler şu şekildedir (Banks vd. 2005: 265):

$$H_0\text{: } \rho_{im} = 0$$
$$H_1\text{: } \rho_{im} \neq 0$$

U_i, U_{i+m}, U_{i+2m},…, $U_{i+(M+1)m}$ sayıları birbirinden bağımsız ise büyük M değerleri için ρ_{im}'in tahmincisinin ($\hat{\rho}_{im}$) dağılımı Normal dağılıma yaklaşmaktadır. Bu durumda test istatistiği

$$Z_0 = \frac{\hat{\rho}_{im}}{\sigma_{\hat{\rho}_{im}}} \tag{1.16}$$

biçimindedir. Burada Z_0, ortalaması 0 ve varyansı 1 olan Normal dağılıma sahiptir. (1.16) denklemindeki tahminci ve tahmincinin standart sapması sırası ile şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$\hat{\rho}_{im} = \frac{1}{M+1}\left[\sum_{k=0}^{M} U_{i+km}\, U_{i+(k+1)m}\right] - 0.25 \tag{1.17}$$

ve

$$\sigma_{\hat{\rho}_{im}} = \frac{\sqrt{13M+7}}{12(M+1)} \tag{1.18}$$

Karar verme aşamasında eğer $-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2}$ ise sıfır hipotezi reddedilemez. α anlamlılık düzeyi olmak üzere, $z_{\alpha/2}$ değeri standart Normal dağılım tablosundan elde edilmektedir. Bunun yanı sıra test sonucunda, $\rho_{im} > 0$ ise m gecikme ile seçilen dizi pozitif otokorelasyona sahiptir. Başka bir deyişle büyük rassal sayıları yine büyük rassal sayılar izlemektedir. Aynı seyir küçük rassal sayılar için de geçerlidir. $\rho_{im} < 0$ durumunda ise seçilen dizi negatif otokorelasyona sahiptir. Başka bir ifade ile küçük rassal sayıları, büyük rassal sayılar takip etmekte veya bu durumun tam tersi meydana gelmektedir (Banks vd. 2005: 266).

1.3.4. Diziler (Runs) Testi

Üretilen rassal sayıların bağımsızlık varsayımının sınandığı diğer bir test diziler testidir (Law ve Kelton, 2000: 419). Diziler testi temelde örneklem değerlerinin gözlemlenme sırasını incelemektedir. Bu sayede örneklemin K gibi bir değere göre (mod, medyan, ortalama vb.) ard arda gelişlerindeki kümelenmenin rassallık koşullarına uygun olup olmadığı araştırılmaktadır. Gözlemlenen verilerin K'dan küçük veya büyük olmalarına göre oluşturdukları kümelere dizi (run) adı verilmektedir (Bayram, 2012: 107). Bu testin birçok farklı uygulama yöntemi bulunmaktadır (Aytaç, 1991: 80-81). Aşağıdaki kısımlarda bu uygulama yöntemlerinin iki çeşidinden bahsedilmektedir.

1.3.4.1. Yukarı ve aşağı diziler testi

Bu testte gözlem değerleri artan veya azalan değerlere göre dizilere ayrılmakta ve bu diziler incelenmektedir (Knuth, 1981: 65). Test edilecek olan dizide bir sayının, kendinden sonra gelen sayıdan küçük olması durumunda yukarı diziler oluşmaktadır. Başka bir deyişle sayısal büyüklüğü artarak devam eden sayı dizileri, yukarı dizileri oluşturmaktadır. Benzer şekilde dizi içindeki bir sayı kendinden sonra gelen sayıdan büyük olduğu takdirde aşağı diziler oluşmaktadır. Yukarı dizileri oluşturan her bir sayıya "+" ve aşağı dizileri oluşturan her bir sayıya "−" sembolü atanır. Aşağı ve yukarı diziler, bir sayının kendinden sonraki sayıya göre oluşturulduğu için son sayıya herhangi bir sembol atanmamaktadır. Birbirini takip eden tüm "+" ve "−" sembolleri birer dizi olarak kabul edilmektedir. Test edilecek gözlem değerlerinin toplam sayısı N ile gösterildiğinde, yukarı ve aşağı dizilerin sayısı en az bir, en fazla $N-1$ olabilmektedir (Banks vd 1996: 303-304).

Bir rassal sayı dizisinde, aşağı ve yukarı dizilerin toplam sayısının (a) ortalama ve varyansı sırasıyla şu şekildedir (Banks vd 1996: 304):

$$\mu_a = \frac{2N-1}{3} \tag{1.19}$$

ve

$$\sigma_a^2 = \frac{16N - 29}{90} \tag{1.20}$$

Gözlem değerlerinin toplam sayısı 20'den büyük olduğunda $(N > 20)$ a Normal dağılıma yaklaşmaktadır. Bu durumda test istatistiği

$$Z_0 = \frac{a - \mu_a}{\sigma_a} \tag{1.21}$$

biçimindedir. $Z_0 \sim N(0,1)$ olmak üzere, $-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2}$ ise sıfır hipotezi reddedilemez. Başka bir deyişle rassal sayı dizisi bağımsızlık varsayımını sağlamaktadır. Burada α anlamlılık düzeyini göstermektedir ve $z_{\alpha/2}$ değeri standart Normal dağılım tablosundan elde edilmektedir (Banks vd 1996: 304-305).

Bu testten geçen sayılar, diziler testinin başka bir kıstasına göre incelendiğinde bağımsızlık özelliğini sağlamayabilirler. Bu gibi durumlarda aşağı ve yukarı diziler testi yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle sayıların medyana göre gruplandığı, medyana göre diziler testi kullanılmaktadır (Banks vd 1996: 306).

1.3.4.2. Medyana göre diziler testi

Bu testin işleyişi temelde bir önceki diziler testi ile aynıdır. Ancak bu testte sayıları gruplarken, örneklem medyanı göz önünde bulundurulmaktadır (Banks vd 1996: 306). Medyana göre diziler testini uygulayabilmek için ilk olarak örneklem medyanı hesaplanmaktadır. Daha sonra medyandan büyük olan değerlere "+", medyandan küçük olan değerlere ise "−" sembolü atanmaktadır. Sıralanmış olan tüm "+" ve "−" değerleri ile yeni bir dizi oluşturulmaktadır. Böylelikle iki karakterden oluşan bir dizi elde edilmektedir. (Öztürk ve Özbek, 2004: 153). Medyanın altında ve üstünde olan grupların toplam sayısı b ile gösterilmek üzere, tamamen rassal olan bir dizide b'nin ortalama ve varyansı sırası ile şu şekildedir:

$$\mu_b = \frac{2n_1 n_2}{N} + \frac{1}{2} \tag{1.22}$$

ve

$$\sigma_b^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - N)}{N^2(N-1)} \qquad (1.23)$$

Burada n_1 medyanın üstündeki ("+" ile sembolize edilen sayılar) sayı adedini, n_2 ise medyanın altındaki ("−" ile sembolize edilen sayılar) sayı adedini göstermektedir. N ise bu sayı adetlerinin toplamını ifade etmektedir ($N = n_1 + n_2$).

n_1 veya n_2 değerlerinin 20'den büyük olması durumunda b Normal dağılıma yaklaşmaktadır. Bu durumda uygulanacak olan test istatistiği

$$Z_0 = \frac{b - (2n_1n_2/N) - 1/2}{\sqrt{\dfrac{2n_1n_2(2n_1n_2 - N)}{N^2(N-1)}}} \qquad (1.24)$$

biçiminde hesaplanmaktadır $Z_0 \sim N(0,1)$ olmak üzere $-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2}$ ise sıfır hipotezi reddedilemez. Diğer bir deyişle rassal sayı dizisi bağımsızlık varsayımını sağlamaktadır. Burada α anlamlılık düzeyini göstermektedir. $z_{\alpha/2}$ değeri standart Normal dağılım tablosundan elde edilmektedir (Banks vd 1996: 306).

Karar verme aşamasında n_1 ve n_2 değerlerinin 20'den küçük değerleri için özel olarak hazırlanmış tablolardan yararlanılmaktadır. Söz konusu tablolar toplam dizi sayısının alt ve üst limit kritik değerlerini bulundurmaktadır (Aytaç, 1991: 82-83-102).

1.3.5. Diğer Testler

Verilen testlerin dışında, bağımsızlık özelliğini kontrol etme amaçlı kullanılan diğer testler kısaca aşağıda belirtilmiştir.

Poker testi: Üretilen rassal sayıların tekrarlanma sıklıkları ardışık gruplar halinde incelenir ve frekansları sayılır. Daha sonra Ki-kare test istatistiği kullanılarak, gözlemlenen frekanslar ile teorik frekanslar karşılaştırılır (Öztürk ve Özbek, 2004: 156-157).

Aralık (Gap) testi: Bu testte, üretilen rassal sayıların her birinin tekrar etme aralıkları kaydedilir. Söz konusu aralıkların frekansları hesaplanır. Daha sonra tüm sayılar için gözlemlenen bu frekanslar, K-S testi kullanılarak teorik frekans ile karşılaştırılır (Banks vd 1996: 313-314).

Permütasyon testi: Bu testte rassal sayılar ardışık olarak gruplara ayrılmaktadır. Her bir grubun sıralama yapıları gözlemlenir ve bu yapıların frekansları sayılır. Karar verme aşamasında gözlemlenen ve teorik frekanslar Ki-kare testi kullanılarak karşılaştırılır (Öztürk ve Özbek, 2004: 156).

BÖLÜM 2. RASSAL DEĞİŞKENLİK ÜRETİMİ

Tekdüze dağılımdan farklı bir dağılıma sahip olan rassal sayılara "rassal değişkenlik" (*random variates*) veya "tekdüze olmayan rassal sayılar" (*nonuniform random numbers*) adı verilmektedir (Niederreiter, 1992: 164). Rassal değişkenlik üretme işlemi genellikle iki adımda gerçekleştirilmektedir. İlk adımda U(0, 1) dağılımına uyan birbirinden bağımsız rassal sayılar üretilmektedir. Daha sonra bu rassal sayılara belirli dönüşüm işlemleri uygulanarak istenilen dağılımdan rassal değişkenlik elde edilmektedir (L´Ecuyer, 2012: 35).

Rassal değişkenlik üretimi matematik, istatistik ve bilgisayar bilimleri alanlarını kapsayan bir işlemdir. Başlıca kullanım alanını ise benzetim çalışmaları oluşturmaktadır. Rassal değişkenlik üretiminde kullanılan yöntemlerin neredeyse tamamı dört ana grup altında sınıflandırılmaktadır. Bunlardan ilk üç tanesi ters dönüşüm yöntemi, kabul-red yöntemi ve bileşim yöntemidir. Dördüncü grup ise dağılımların özel durumlarında kullanılan algoritmaları içermektedir (Hörmann vd. 2004: 3-13). Bahsedilen yöntemlerin ilk üç tanesi ve konvolüsyon yöntemi bir sonraki kısımda aktarılmıştır.

2.1. RASSAL DEĞİŞKENLİK ÜRETME YÖNTEMLERİ

Rassal değişkenlik üretme yöntemleri uygulanırken güvenilir bir RSÜ ile tekdüze rassal sayıların elde edildiği varsayılmaktadır. Ayrıca kullanılan bilgisayarın gerçek sayıları depolayabildiği ve işleyebildiği öngörülmektedir (Devroye, 1986: 1). Söz konusu dönüşüm işlemleri için belirli algoritmalar kullanılmaktadır. Algoritma seçiminde hız, kesinlik, depolama gereksinimleri ve kodun karmaşıklığı gibi etkenler göz önünde bulundurulmaktadır (Gentle, 2003: 101).

Rassal değişkenlik üretme işlemi için birçok yöntem bulunmaktadır. Ayrıca kullanılacak olan teknik, elde edilmek istenen dağılıma göre değişebilmektedir. Bu bölümde temel yöntemlerin ve algoritmaların aktarılması amaçlanmıştır.

2.1.1. Ters Dönüşüm Yöntemi

Bu yöntemde $F(x)$ sürekli birikimli dağılım fonksiyonu ve U, U(0, 1) dağılımından üretilen rassal sayıyı ifade etmek üzere X rassal değişkenini üretmek için kullanılan eşitlik şu şekildedir:

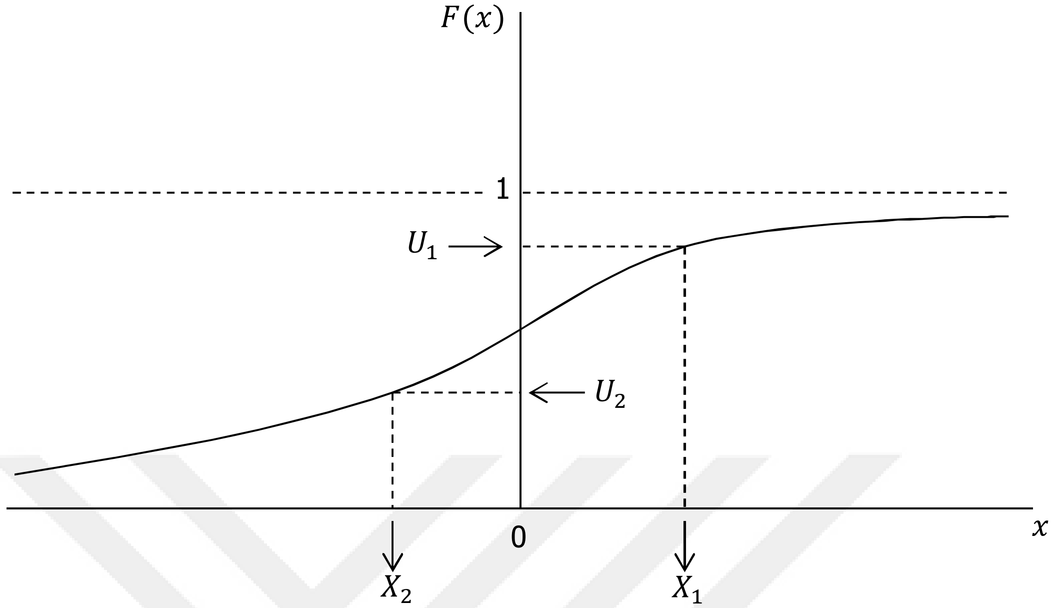
$$X = F^{-1}(U) \tag{2.1}$$

Dönüşüm işlemi sonucunda elde edilen $F^{-1}(U)$ rassal değişkeni F birikimli dağılım fonksiyonuna sahiptir. Bunun yanı sıra X rassal değişkeni F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip olduğunda $F(X)$ Tekdüze dağılım göstermektedir. Burada görülen F fonksiyonunun tersi (F^{-1}) şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geq u\} \quad , \quad 0 < u < 1 \tag{2.2}$$

F birikimli dağılım fonksiyonunun tersinin kapalı bir formu bilindiği takdirde bu yöntem kolay uygulanabilen ve hızlı bir yöntemdir. Bu tür tersinin kapalı bir formu bilinen dağılımlara örnek olarak Üstel, Weibull, Cauchy vb. dağılımlar verilebilir. (Hörmann vd. 2004: 14-15). F^{-1} fonksiyonunun bilinmediği durumlarda ise bir takım nümerik işlemler uygulanarak birikimli dağılımın ters fonksiyonu hesaplanabilmektedir. Söz konusu işlemler için (Devroye, 1986: 31-35) incelenmesi önerilebilir. Nümerik işlemler kullanılarak F^{-1} fonksiyonunun hesaplandığı dağılımlara ise Normal ve Gamma dağılımları örnek verilebilir (Law ve Kelton, 2000: 446).

Sürekli dağılımlar için ters dönüşüm yönteminin işleyiş biçimi Şekil 2'de gösterilmektedir.



Şekil 2. Sürekli Rassal Değişkenler için Ters Dönüşüm Yöntemi (Law ve Kelton, 2000)

Ters dönüşüm yönteminin uygulanmasında izlenecek adımlar şu şekildedir (Hörmann vd. 2004: 14):

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. $X = F^{-1}(U)$ hesaplanır ve X değeri döndürülür.

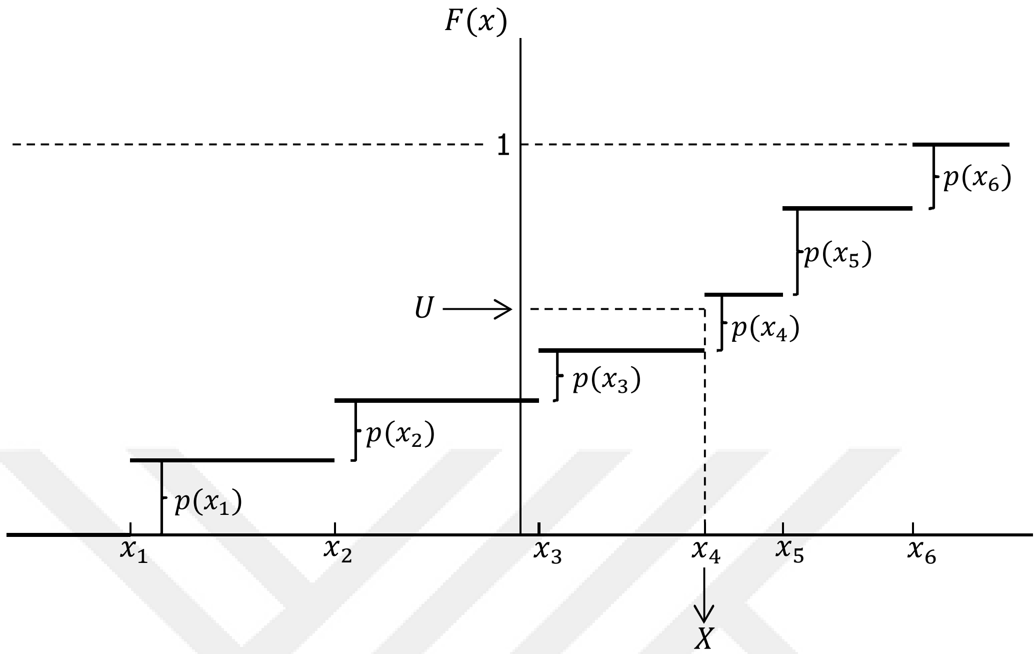
Söz konusu yöntem X rassal değişkeni kesikli olduğunda farklı şekilde uygulanmaktadır. Burada birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \tag{2.3}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Buradaki $p(x_i)$ olasılık fonksiyonu

$$p(x_i) = P(X = x_i) \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bunun yanı sıra X sadece $x_1 < x_2 < \cdots$ kuralına uyan $x_1, x_2, \dots$ değerlerini alabilmektedir. Söz konusu yöntemin grafiksel olarak ifadesi Şekil 3 ile verilmiştir. Burada özel olarak $X = x_4$ seçilmiştir.



Şekil 3. Kesikli Rassal Değişkenler için Ters Dönüşüm Yöntemi (Law ve Kelton, 2000)

Rassal değişkenin kesikli olduğu durumda uygulanacak ters dönüşüm yönteminin adımları şu şekildedir (Law ve Kelton, 2000: 444):

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. $U \leq F(x_I)$ şartını sağlayan en küçük pozitif I tamsayısı belirlenir.

3. $X = x_I$ değeri alınır ve döndürülür.

2.1.2. Kabul-Red Yöntemi

Bu kısımda birikimli dağılım fonksiyonu F ve olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan X rassal değişkeninin kabul-red yöntemi ile üretim aşamaları aktarılacaktır. Yöntemi uygularken öncelikle tüm x değerleri için

$$f(x) \leq g(x) \tag{2.5}$$

eşitsizliğini sağlayan $g(x)$ fonksiyonu elde edilmektedir. Söz konusu fonksiyon büyükleyici (*majorizes*) fonksiyon olarak adlandırılmaktadır. Kabul-red yöntemi için algoritma geliştirilirken Devroye (1986: 43) g yoğunluğunun Üçgensel dağılımdan, Tekdüze dağılımdan veya ters dönüşüm yönteminin hızlı bir şekilde uygulanabildiği dağılımlardan seçilmesini önermektedir. 1'den küçük olmayan ($c \geq 1$) sabit değeri elde edilirken aşağıda verilmiş olan eşitsizlik göz önünde bulundurulmaktadır:

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx \;\geq\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \tag{2.6}$$

Daha sonra $h(x) = g(x)/c$ olasılık yoğunluk fonksiyonu hesaplanmaktadır. Bir sonraki adımda U(0, 1) dağılımından U rassal değişkeni ve h olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip Y rassal değişkeni birbirinden bağımsız olarak üretilmektedir. Eğer

$$U \leq \frac{f(Y)}{g(Y)} \tag{2.7}$$

eşitsizliği sağlanırsa Y değeri kabul edilmektedir. Bu durumda $X = Y$ rassal değişkeni atanır. Aksi halde diğer Y değerleri için aynı işlem tekrar denenir. Bu işleme (2.7) eşitsizliğini sağlayan Y değeri bulunana kadar devam edilmektedir. Dolayısıyla kabul-red yönteminin uygulanması için izlenecek adımlar şu şekildedir (Law ve Kelton, 2000: 452-453):

Algoritma

1. g olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olan Y üretilir.

2. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

3. Eğer $U \leq f(Y)/g(Y)$ ise $X = Y$ hesaplanır ve bu değer döndürülür. Aksi halde 1. adıma gidilir.

2.1.3. Bileşim (Composition) Yöntemi

Bu yöntem direkt olarak birikimli dağılım fonksiyonundan yararlanılarak rassal değişkenlik üretmenin zor olduğu durumlarda tercih edilmektedir. Söz konusu yöntemi uygulayabilmek için üretilecek olan rassal değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu, diğer birikimli dağılım fonksiyonlarının bir bileşimi olarak ifade edilebilir olmalıdır. Üretilecek olan X rassal değişkeni $[a,b]$ aralığında tanımlı ve F birikimli dağılım fonksiyonuna sahip olsun.

Bu durumda yöntemi uygulayabilmek için birikimli dağılım fonksiyonu şu şekilde ifade edilmektedir:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\mathrm{r}} p_j F_j(x) \tag{2.8}$$

Burada $j = 1, \dots, r$ için $0 < p_j < 1$ ve $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$ biçiminde tanımlanmaktadır ve F_j fonksiyonunun p_j olasılıkla seçilmesini sağlamaktadır. Bileşimi alınacak birikimli dağılım fonksiyonları ise şöyledir: $\{F_1(x), a \leq a_1 \leq x \leq b_1 \leq b\}, \dots, \{F_r(x), a \leq a_r \leq x \leq b_r \leq b\}$.

Aynı yöntem olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak da uygulanabilmektedir. X rassal değişkeni f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmak üzere kullanılacak olan eşitlik şu şekildedir:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\mathrm{r}} p_j f_j(x) \tag{2.9}$$

Bileşim yöntemin uygulanması için izlenecek adımlar şöyledir (Fishman, 1996: 160-162-163):

Algoritma

1. $j = 1,2, \dots, r$ için $P(J = j) = p_j$ sağlayan J rassal sayıları üretilir.

2. $\{F_J(x), a_J < x < b_J\}$ dağılımından X rassal değişkeni üretilir ve bu değer döndürülür.

2.1.4. Konvolüsyon (Convolution) Yöntemi

Üretilmek istenen X rassal değişkeninin bir takım rassal değişkenlerin toplamı olarak ifade edilebildiği durumlarda bu yöntem kullanılmaktadır. Diğer rassal değişkenlerin toplamı $(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m)$ ile X rassal değişkeninin dağılımlarının aynı olduğu öngörülmekte ve

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m \tag{2.10}$$

eşitliği yazılabilmektedir. Burada Y_j değerlerinin her biri birbirinden bağımsız rassal değişkenlerdir. Y_j değişkenlerinin X rassal değişkeninden daha kolay elde edilebildiği durumlarda konvolüsyon yöntemi tercih edilmektedir.

X rassal değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu F ve her bir Y_j rassal değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu G ile gösterilmek üzere söz konusu yöntemin uygulanması için şu adımlar izlenmektedir (Law ve Kelton, 2000: 451-452):

Algoritma

1. Her birinin birikimli dağılım fonksiyonu G olan birbirinden bağımsız $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ değerleri üretilir.

2. $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m$ değeri döndürülür.

Belirli dağılımlardan rassal değişkenlik üretmek için bu kısımda aktarılmış olan temel yöntemler veya bu yöntemlerin bir kombinasyonu kullanılmaktadır. Rassal değişkenlik üretme yönteminde kullanılacak olan algoritmanın seçimindeki en önemli etkenlerden bir tanesi hız faktörüdür. Bir diğer faktör ise algoritmanın uygulanacağı programın boyutu ve karmaşıklığıdır (Gentle, 2003: 165). Bir sonraki kısımda belirli dağılımlardan rassal değişkenlik üretmek için kullanılan algoritmalar aktarılmaktadır.

2.2. SÜREKLİ DAĞILIMLARDAN RASSAL DEĞİŞKENLİK ÜRETİMİ

Bu kısımda uygulamalarda en sık kullanılan sürekli dağılımlardan rassal değişkenlik üretme yöntemlerinin aktarılması amaçlanmıştır. Söz konusu dağılımlar için evrensel kabul edilen birçok algoritma bulunmaktadır. Bu algoritmalar hakkında kapsamlı bilgi edinebilmek için Devroye (1986) kaynağı önerilebilir. Bu kısımda sadece uygulamada kullanılacak olan algoritmaların aktarılması amaçlanmıştır. Kesikli dağılımlar ise bir sonraki kısımda aktarılacaktır.

2.2.1. Tekdüze Dağılım

Bu dağılım belirli bir aralıkta eşit olasılıklarla ortaya çıkan rassal değişkenler için bir model oluşturmaktadır (Gürsakal, 2008: 534). Tekdüze dağılım gösteren X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & d.d. \end{cases} \tag{2.11}$$

biçimindedir. Birikimli dağılım fonksiyonu ise şu şekildedir (Aytaç, 2004: 299-300):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \tag{2.12}$$

$[a,b]$ aralığında Tekdüze dağılımlı X rassal değişkenini üretmek için ters dönüşüm yöntemi kullanılmaktadır. Söz konusu yöntemi uygulayabilmek için gerekli olan ters fonksiyon hesaplanırken $u = F(x)$ eşitliğinden yararlanılır. $0 \leq u \leq 1$ olmak üzere bu fonksiyon

$$x = F^{-1}(u) = a + (b-a)u \tag{2.13}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Söz konusu dağılımdan ters dönüşüm yöntemi ile rassal değişkenlik üretmek için izlenecek adımlar şu şekildedir (Law ve Kelton, 2000: 460):

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. $X = a + (b-a)U$ değeri döndürülür.

2.2.2. Üstel Dağılım

Dağılımın parametresi $\lambda > 0$ olmak üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & d.d. \end{cases} \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Birikimli dağılım fonksiyonu ise şu şekildedir (Aytaç, 2004: 302-303):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 1, & x \to \infty \end{cases} \tag{2.15}$$

$\ddot{U}stel(\lambda)$ dağılımlı X rassal değişkeni üretilirken ters dönüşüm yöntemi kullanılmaktadır. $u = F(x)$ denkleminden x'in elde edilmesi sonucu oluşan ters fonksiyon şu şekildedir (Devroye, 1986: 29):

$$x = F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u) \tag{2.16}$$

Dönüşüm işlemi uygulanırken bu denklemdeki $1 - U$ değeri yerine U değeri kullanılabilmektedir. Bu yerine koyma işleminin programlama esnasında verimliliğe katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca $1 - U$ ve U değerleri aynı U(0, 1) dağılımına sahip olduğundan bu işlemde bir sakınca görülmemektedir (Law ve Kelton, 2000: 440). $\ddot{U}stel(\lambda)$ dağılımdan ters dönüşüm yöntemi ile rassal değişkenlik üretme işleminin adımları aşağıda verilmiştir (Devroye, 1986: 28-29).

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ değeri döndürülür.

Üstel dağılım özellikle bekleme hattı modellerinde (kuyruk kuramında) sıkça kullanılmaktadır (Gürsakal, 2008: 557).

2.2.3. Gamma Dağılımı

Gamma dağılımının $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere iki parametresi bulunmaktadır. Söz konusu dağılım $Gamma(\alpha, \beta)$ biçiminde gösterilecektir. Gamma fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \tag{2.17}$$

X sürekli rassal değişkeni için dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & d.d. \end{cases} \tag{2.18}$$

biçimindedir. Birikimli dağılım fonksiyonu ise şöyledir (Aytaç, 2004: 308-309):

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(x)dx = 1 - \int_{t=x}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}dt, \quad x > 0 \tag{2.19}$$

Parametrelerin aldığı değerlere göre Gamma dağılımının özel durumları bulunmaktadır. $\alpha = 1$ olarak alınırsa Üstel dağılım elde edilmektedir. Gamma dağılımının başka bir türü ise n pozitif tam sayı olmak üzere $\alpha = n$ seçildiğinde ortaya çıkan Erlang dağılımıdır (Leemis ve Park, 2006: 343).

Gamma dağılımında birikimli dağılım fonksiyonunun tersinin kapalı bir formu bilinmediği için değişkenlik üretme yöntemi olarak kabul-red yöntemi tercih edilmektedir. Bunun yanı sıra söz konusu yöntem uygulanırken $Gamma(\alpha, 1)$ dağılımına uyan X rassal değişkeni üretilecektir. Başka bir deyişle $\beta = 1$ alınarak uygulamada iki parametre yerine tek parametre kullanılacaktır. Bunun sebebi X rassal değişkeninin $Gamma(\alpha, 1)$ dağılımlı olduğu durumda tüm $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ değerleri için $X' = \beta X$ rassal değişkeninin $Gamma(\alpha, \beta)$ dağılımlı olmasıdır. Dolayısıyla kabul-red yönteminde kullanılacak olan olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & d.d. \end{cases} \tag{2.20}$$

biçiminde olacaktır. Ayrıca bu dağılımın şekli $\alpha < 1$ ve $\alpha > 1$ durumlarında farklılık göstermektedir. Bu nedenle yöntem uygulanırken parametrenin 1'den büyük ve küçük olma durumları göz önünde bulundurulacaktır (Leemis ve Park, 2006: 343).

2.2.3.1. $\mathbf{0 < \alpha \leq 1}$

İlk olarak $0 < \alpha \leq 1$ durumu incelenecektir. Burada Ahrens ve Dieter tarafından önerilen kabul-red tekniği kullanılacaktır. Söz konusu teknikte kullanılan algoritma GS olarak adlandırılmaktadır. Tekniği uygulamak için gerekli olan ve (2.5) eşitsizliğini sağlayan büyükleyici fonksiyon

$$g(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & 0 < x \leq 1 \\ e^{-x}/\Gamma(\alpha), & 1 < x \end{cases} \tag{2.21}$$

Biçimindedir (Ahrens ve Dieter, 1974: 228). $t = (e + \alpha)/e$ ve $t > 1$ olmak üzere c sabiti şu şekildedir (Law ve Kelton, 2000: 462):

$$c = \int_0^{\infty} g(x)\, dx = \frac{t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \tag{2.22}$$

Daha sonra $h(x) = g(x)/c$ eşitliği ile

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{t}, & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\alpha e^{-x}}{t}, & 1 < x \end{cases} \tag{2.23}$$

fonksiyonu elde edilmektedir (Ahrens ve Dieter, 1974: 228). Bu yoğunluk fonksiyonundan Y rassal değişkeninin üretilebilmesi için ters dönüşüm yöntemi kullanılacaktır. Dolayısıyla birikimli dağılım fonksiyonu

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha}}{t}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{\alpha e^{-x}}{t}, & 1 < x \end{cases} \tag{2.24}$$

ve birikimli dağılım fonksiyonunun tersi

$$H^{-1}(u) = \begin{cases} (tu)^{1/\alpha}, & u \leq \dfrac{1}{t} \\ -\ln(t(1-u))/\alpha), & d.d. \end{cases} \tag{2.25}$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu h olan Y rassal değişkenini üretebilmek için öncelikle U(0, 1) dağılımından U üretilir. Eğer $U \leq 1/t$ ise $Y = (tU)^{1/\alpha}$ değeri atanır. Burada $Y \leq 1$ değer aralığıdır. $U > 1/t$ durumunda ise

$Y = -ln(t(1-U)/\alpha)$ değeri atanır. Burada $Y > 1$ değer aralığıdır (Law ve Kelton, 2000: 463). Kabul-red yöntemi şu denklem ile uygulanmaktadır:

$$\frac{f(Y)}{g(Y)} = \begin{cases} e^{-Y}, & 0 \leq Y \leq 1 \\ Y^{\alpha-1}, & 1 < Y \end{cases} \tag{2.26}$$

Dolayısıyla kabul-red yöntemi ile rassal değişkenlik üretmek için kullanılacak olan GS algoritmasının aşamaları aşağıdaki gibidir (Ahrens ve Dieter, 1974: 228):

Algoritma

1. $t = (e+\alpha)/e$ tanımlanır.

2. U(0, 1) dağılımından U üretilir ve $P = tU$ tanımlanır. Eğer $P > 1$ ise 4. adıma geçilir. Aksi halde 3. adıma devam edilir.

3. $Y = (P)^{1/\alpha}$ değeri atanır ve U(0, 1) dağılımından V üretilir. Eğer $V \leq e^{-Y}$ ise $X = Y$ değeri döndürülür. Aksi halde 2. adıma gidilir.

4. $Y = -ln((t-P)/\alpha)$ değeri atanır ve U(0, 1) dağılımından V üretilir. Eğer $V \leq Y^{\alpha-1}$ ise $X = Y$ değeri döndürülür. Aksi halde 2. adıma gidilir.

2.2.3.2. $\boldsymbol{\alpha > 1}$

$\alpha > 1$ durumunda ise GB algoritması kullanılacaktır. Bu algoritma Cheng tarafından önerilmiştir ve kabul-red tekniğine dayanmaktadır. $\mu, \lambda > 0$ parametreleri tanımlı olmak üzere yöntemi uygulayabilmek için yararlanılacak fonksiyon şu şekildedir (Devroye, 1986: 411):

$$h(x) = \frac{\lambda\mu x^{\lambda-1}}{(\mu + x^{\lambda})^2}, \quad x > 0 \tag{2.27}$$

Burada $\lambda = \sqrt{2\alpha - 1}$ ve $\mu = \alpha^{\lambda}$ tanımlıdır. Bu yoğunluk fonksiyonundan rassal değişkenlik üretebilmek için ters dönüşüm yöntemi kullanılacaktır. Dolayısıyla birikimli dağılım fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$H(x) = \frac{x^{\lambda}}{\mu + x^{\lambda}}, \quad x \geq 0 \tag{2.28}$$

Kabul-red yönteminde kullanılacak olan Y rassal değişkeni ters dönüşüm yöntemi ile elde edilmektedir. Bu nedenle $H(x)$ fonksiyonun tersi şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$H^{-1}(u) = \left(\frac{\mu u}{1-u}\right)^{1/\lambda} \tag{2.29}$$

Kabul-red yönteminde aktarılan (2.5) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $c = 4\alpha^{\alpha}e^{-\alpha}/\lambda\Gamma(\alpha)$ değerinin seçilmesi önerilmektedir. Yöntem uygulanırken rassal değişkenin kabul edildiği bölge şu şekilde tanımlanmaktadır: $4(\alpha/e)^{\alpha}(\alpha^{\lambda}/Y^{\lambda+1})(Y^{2\lambda}/(\alpha^{\lambda}+Y^{\lambda})^2)U \leq e^{-Y}Y^{\alpha-1}$. Bilgisayar verimliliğini arttırmak adına algoritmada kabul bölgesinden önce kontrol edilecek olan ön test ise şu şekildedir: $\ln(Z) \leq dZ - \ln(d) - 1$. Burada U_1 ve U_2 sayıları U(0, 1) dağılımından üretilen rassal sayılar olmak üzere $Z = U_1^2U_2$ biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $d = 9/2$ seçilmesi önerilmektedir (Devroye, 1986: 412).

$\alpha > 1$ durumunda Gamma dağılımından kabul-red yöntemi ile rassal değişkenlik üretiminde kullanılacak olan GB algoritmasının adımları şu şekildedir (Law ve Kelton, 2000: 464):

Algoritma

1. $m = \alpha - \ln(4)$, $t = 1/\sqrt{2\alpha - 1}$, $n = \alpha + (1/t)$, $d = 9/2$ değerleri tanımlanır.

2. U(0, 1) dağılımından U_1 ve U_2 üretilir.

3. $V = t\ln[U_1/(1-U_1)]$, $Y = \alpha e^{V}$, $Z = U_1^2U_2$ ve $W = m + nV - Y$ değerleri atanır.

4. Eğer $W + (1 + \ln(d)) - dZ \geq 0$ ise $X = Y$ değeri döndürülür. Aksi halde 5. adıma devam edilir.

5. Eğer $W \geq \ln(Z)$ ise $X = Y$ değeri döndürülür. Aksi halde 2. adıma dönülür.

Oyun teorisi, güvenilirlik uygulamaları ve karar alma teorisi Gamma dağılımının uygulama alanları arasındadır (Aytaç, 2004: 308).

2.2.4. Beta Dağılımı

Beta fonksiyonu $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ parametreleri için şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{2.30}$$

Bu dağılıma sahip X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $0 \leq x \leq 1$ için

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \tag{2.31}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Parametrelerin 1'den büyük veya küçük olma durumlarına göre yoğunluk fonksiyonunun şekli farklılık göstermektedir. Dolayısıyla rassal değişken üretilirken bu durum göz önünde bulundurulmaktadır (Devroye, 1986: 428).

2.2.4.1. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} > \mathbf{1}$

Öncelikle parametrelerin ikisinin de 1'den büyük olduğu durum incelenecektir. Bu durum min(α,β)>1 biçiminde de ifade edilebilmektedir. Burada Cheng (1978) tarafından önerilmiş olan kabul-red yöntemi kullanılmaktadır. Söz konusu yöntemin uygulanacağı algoritma, BB olarak adlandırılmaktadır. Bu algoritma yine Cheng tarafından önerilmiş olan BA algoritmasının geliştirilmiş bir halidir (Cheng, 1978: 319-320).

Yöntemi uygulayabilmek için ikinci bir olasılık yoğunluk fonksiyonundan yararlanılmaktadır. Söz konusu fonksiyon $x \geq 0$ için şu şekildedir:

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{B(\alpha,\beta)(1+x)^{(\alpha+\beta)}} \tag{2.32}$$

Y rassal değişkeni (2.32) denklemi ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. Bu durumda $X=Y/(1+Y)$ rassal değişkeni (2.31) denklemi ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmaktadır. Bu nedenle kabul-red tekniği ile rassal değişkenlik üretmek için (2.32) denklemi ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonundan yararlanılacaktır (Fishman, 1996: 203).

Kabul-red yönteminde kullanılacak olan fonksiyon ve değerler aşağıda verilmektedir. $h(x)$ büyükleyici fonksiyonu $x>0$ için şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$h(x)=\frac{\lambda\mu x^{\lambda-1}}{(\mu+x^{\lambda})^2} \tag{2.33}$$

Birikimli dağılım fonksiyonu ise

$$H(x) = \frac{x^{\lambda}}{\mu + x^{\lambda}} \tag{2.34}$$

biçimindedir. Kabul-red yönteminin içerisinde uygulanacak olan ters dönüşüm yöntemi için bu fonksiyonun tersi kullanılmaktadır (Cheng, 1978: 319). Söz konusu ters fonksiyon şu şekildedir (Devroye, 1986: 437):

$$H^{-1}(u) = \left(\frac{\mu u}{1 - u}\right)^{1/\lambda} \tag{2.35}$$

Burada bulunan sabitler $\lambda, \mu > 0$ olmak üzere şu şekilde tanımlanmaktadır (Cheng, 1978: 319):

$$\lambda = \begin{cases} \min(\alpha, \beta), & \min(\alpha, \beta) \leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{2\alpha\beta - (\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - 2}}, & \min(\alpha, \beta) > 1 \end{cases} \tag{2.36}$$

ve

$$\mu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda} \tag{2.37}$$

Kabul-red yönteminde aktarılan (2.5) eşitsizliğini sağlayan sabit değer ise şöyledir (Cheng, 1978: 319):

$$c = \frac{4\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{\lambda B(\alpha, \beta)(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}} \tag{2.38}$$

Rassal değişkenin kabul edileceği bölgenin hesaplanması için tanımlanan değişkenler şu şekildedir: $p = \alpha + \beta,\ r = 1/\lambda,\ t = \alpha + \lambda$ ve $U_1,\ U_2$ U(0, 1) dağılımlı rassal sayılar olmak üzere $V = r\ln[U_1/(1 - U_1)],\ W = \alpha e^{V}$. Bu durumda uygulamada geçerli olan kabul bölgesi şöyledir (Fishman, 1996: 203-204):

$$\ln(U_1^2 U_2) - p\ln(p/(\beta + W)) - tV + \ln(4) \leq 0 \tag{2.39}$$

Kabul bölgesi kontrol edilmeden önce uygulanacak olan ön test ise şu şekildedir: $ln(U_1^2 U_2) - p\,ln\,p + p[\theta(\beta + W) - ln(\theta) - 1] - tV + ln(4) \leq 0$ Burada $\theta = 1/p$ seçilmesi önerilmektedir. Beta dağılımdan kabul-red yöntemi ile rassal değişkenlik üretmek için kullanılan BB algoritması $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere şu şekildedir (Cheng, 1978: 319-320):

Algoritma

$p = \min(\alpha, \beta),\ r = \max(\alpha, \beta),\ t = p + r,\ k = \sqrt{[(t-2)/(2pr - t)]},\ m = p + (1/k)$ değerleri tanımlanır.

1. U(0, 1) dağılımından U_1 ve U_2 üretilir. $V = k\ln[U_1/(1 - U_1)]$, $W = pe^V$, $Z = U_1^2 U_2$, $R = mV - \ln(4)$, $S = p + R - W$ değerleri atanır.

2. Eğer $S + 1 + \ln(5) \geq 5Z$ ise 5. adıma gidilir.

3. $T = \ln(Z)$ değeri tanımlanır. Eğer $S \geq T$ ise 5. adıma gidilir.

4. Eğer $R + t\ln[t/(r + W)] < T$ ise 1. adıma gidilir.

5. Eğer $p = \alpha$ ise $X = W/(r + W)$ değeri alınır. Aksi halde $X = r/(r + W)$ değeri alınır.

2.2.4.2. Parametrelerin 1'den küçük olması durumu

Parametrelerin yalnızca bir tanesinin veya her ikisinin de 1'den küçük olduğu durumlarda Atkinson ve Whittaker (1976) tarafından önerilen algoritmalar kullanılacaktır. Söz konusu algoritmalar bileşim yöntemi ile kabul-red yöntemi içermektedir ve aşağıdaki tanımlamalar üzerine kurulmaktadır. Algoritmaların uygulanabilmesi için (2.31) denkleminde tanımlanan olasılık yoğunluk fonksiyonu bileşim yöntemi ile şu şekilde ifade edilmektedir:

$$f(x) = cf_1(x)f_2(x) \tag{2.40}$$

Bu sayede t değeri x'den büyük bir değer olmak üzere [0,1] aralığı [0,t] ve [t,1] aralıklarına bölünmektedir.

U_1 ve U_2 Tekdüze dağılımlı rassal sayılar ve $F_1(x) = \int_0^x f_1(y)\,dy$ ve $F_2(x) = \int_0^x f_2(y)\,dy$ tanımlı olmak üzere kabul-red yöntemi şu şekilde uygulanmaktadır: Eğer

$$\frac{f_2(X)}{\sup\limits_{[0,t]} f_2} > U_2 \tag{2.41}$$

şartı sağlanıyorsa $X = F_1^{-1}[U_1 F_1(t)]$ değeri r olasılıkla kabul edilmektedir. Bunun yanı sıra

$$\frac{f_1(X)}{\sup\limits_{[t,1]} f_1} > U_2 \tag{2.42}$$

şartı sağlanıyorsa $X = F_2^{-1}[F_2(1) - (1 - U_1)(F_2(1) - F_2(t))]$ değeri $1 - r$ olasılıkla kabul edilmektedir. Eğer $U_1 > r$ ise $1 - U_1$ değeri ile $(1 - U_1)/(1 - r)$ değeri yer değiştirilir. $U_1 \leq r$ Durumunda ise U_1 değeri ile U_1/r değerinin yeri değiştirilir.(Atkinson ve Whittaker, 1976: 462-463).

2.2.4.2.1. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} < 1$

Öncelikle her iki parametrenin de 1'den küçük olduğu durum incelenecektir. Bu durumda (2.40) denklemi ile ifade edilen bileşim yönteminin uygulanacağı fonksiyonlar şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$f_1(x) = \alpha x^{\alpha - 1} \;,\;\; f_2(x) = \beta(1 - x)^{\beta - 1} \tag{2.43}$$

Bunun yanı sıra kabul-red yönteminde $0 < t < 1$ olmak üzere kullanılacak olan değerler $\sup_{[t,1]} f_1 = \alpha t^{\alpha - 1}$ ve $\sup_{[0,t]} f_2 = \beta(1 - t)^{\beta - 1}$ biçimindedir. $F_1(t) = t^\alpha$ ve $F_2(t) = (1 - t)^\beta$ fonksiyonları tanımlanmaktadır. Yöntem uygulanırken $t = \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}/[\sqrt{\alpha(1 - \alpha)} + \sqrt{\beta(1 - \beta)}]$ ve $r = \beta t/(\beta t + \alpha(1 - t))$ değerlerinin seçilmesi önerilmektedir. Söz konusu algoritmanın adımları aşağıdaki gibidir (Atkinson ve Whittaker, 1976: 463-464):

Algoritma

$t = \sqrt{\alpha(1 - \alpha)}/[\sqrt{\alpha(1 - \alpha)} + \sqrt{\beta(1 - \beta)}]$ ve $r = \beta t/(\beta t + \alpha(1 - t))$ tanımlanır.

1. U(0, 1) dağılımından U ve $\text{Üstel}(1)$ dağılımlı Y rassal değişkeni üretilir. Eğer $U > r$ ise 3. adıma gidilir.

2. $X = t(U/r)^{1/\alpha}$ alınır. Eğer $(1 - \beta)\ln\left(\frac{1 - X}{1 - t}\right) \leq Y$ ise X kabul edilir. Aksi halde 1. adıma gidilir.

3. $X = 1 - (1-t)\left(\frac{1-U}{1-r}\right)^{1/\beta}$ alınır. Eğer $(1-\alpha)\ln\left(\frac{X}{t}\right) \leq Y$ ise X kabul edilir. Aksi halde 1. adıma gidilir.

2.2.4.2.2. $\boldsymbol{\alpha < 1}$ *,* $\boldsymbol{\beta > 1}$ *veya* $\boldsymbol{\alpha > 1}$ *,* $\boldsymbol{\beta < 1}$

Parametrelerden herhangi birinin 1'den küçük olduğu durumda yine aynı yöntem kullanılmaktadır. Örneğin $\alpha < 1$ ve $\beta > 1$ durumu ele alınsın. Burada bir önceki kısımda tanımlanmış olan tüm fonksiyonlar ve tanımlamalar geçerlidir. Yalnızca $\sup_{[0,t]} f_2 = \beta$, $t = (1-\alpha)/(\beta + 1 - \alpha)$ ve $r = \beta t/(\beta t + \alpha(1-t)^{\beta})$ değerleri değişmektedir. Dolayısıyla bu durumda uygulanacak olan Atkinson ve Whittaker (1976) algoritması şu şekildedir (Atkinson ve Whittaker, 1976: 465-466):

Algoritma

$t = (1-\alpha)/(\beta + 1 - \alpha)$ ve $r = \beta t/(\beta t + \alpha(1-t)^{\beta})$ tanımlanır.

1. U(0, 1) dağılımından U ve $\ddot{U}stel(1)$ dağılımlı Y rassal değişkeni üretilir. Eğer $U > r$ ise 3. adıma gidilir.

2. $X = t(U/r)^{1/\alpha}$ alınır. Eğer $(1-\beta)\ln(1-X) \leq Y$ ise X kabul edilir. Aksi halde 1. adıma gidilir.

3. $X = 1 - (1-t)\left(\frac{1-U}{1-r}\right)^{1/\beta}$ alınır. Eğer $(1-\alpha)\ln\left(\frac{X}{t}\right) \leq Y$ ise X kabul edilir. Aksi halde 1. adıma gidilir.

Beta dağılımı, $X \sim B(\alpha, \beta)$ ise $(1-X) \sim B(\beta, \alpha)$ özelliğini sağladığından yukarıdaki algoritmada $\alpha > 1$ ve $\beta < 1$ olması durumunda parametre değerleri yer değiştirilmektedir. Daha sonra ise üretilen X değeri yerine $1 - X$ değeri alınarak Beta dağılımlı rassal değişken elde edilmektedir (Aytaç, 2004: 313; Atkinson, 1979a: 144).

2.2.4.3. $\boldsymbol{\alpha = 1}$ *veya* $\boldsymbol{\beta = 1}$

Beta dağılımında herhangi bir parametrenin 1'e eşit olması durumunda ters dönüşüm yöntemi uygulanmaktadır. β parametresinin 1'e eşit olduğu ve α parametresinin 1'den farklı olduğu durum göz önüne alınsın. Bu durumda (2.31) denklemi ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu $0 \leq x \leq 1$ aralığında $f(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ biçiminde tanımlanmaktadır. Birikimli dağılım fonksiyonu ise $F(x) = x^{\alpha}$ biçimini almaktadır. Dolayısıyla $X \sim B(\alpha, 1)$ rassal değişkenini üretebilmek için U(0, 1) dağılımından U rassal sayısı üretilir. Daha sonra $X = U^{1/\alpha}$ eşitliği ile elde edilen rassal değişken Beta dağılımına uymaktadır. Söz konusu ters dönüşüm yönteminin algoritması şu şekilde ifade edilmektedir:

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. $X = U^{1/\alpha}$ değeri döndürülür.

α parametresinin 1'e eşit olduğu ve β parametresinin 1'den farklı olduğu durumda ise parametrelerin yerleri değiştirilir. Daha sonra üretilen X değeri yerine $1 - X$ değeri alınır. Bu durumda elde edilen $1 - X$ rassal değişkeni Beta dağılımına uymaktadır. Son olarak her iki parametre de 1'e eşit olduğunda dağılım 0 ile 1 aralığında Tekdüze dağılıma uymaktadır (Law ve Kelton, 2000: 467).

2.2.5. Weibull Dağılımı

Dağılımın parametreleri $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere $x > 0$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu sırasıyla şu şekilde tanımlanmaktadır (Law ve Kelton, 2000: 303):

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \tag{2.44}$$

ve

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha} \tag{2.45}$$

Weibull dağılımdan rassal değişkenlik üretmek için ters dönüşüm yöntemi kullanılmaktadır. Bunun sebebi birikimli dağılım fonksiyonunun tersinin kapalı formunun biliniyor olmasıdır. Söz konusu fonksiyon

$$F^{-1}(u) = \beta[-\ln(1-u)]^{1/\alpha} \tag{2.46}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Dolayısıyla Weibull dağılımından ters dönüşüm yöntemi ile rassal değişkenlik elde etmek için uygulanacak olan algoritma aşağıdaki gibi olmaktadır (Fishman, 1996: 151):

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. $X = \beta(-\ln U)^{1/\alpha}$ değeri döndürülür.

2.2.6. Normal Dağılım

Çıkarımsal istatistikte klasik testlerin çoğu, verilerin Normal dağılıma uyduğu varsayılarak gerçekleştirilmektedir. Ayrıca ekonomik veya fiziksel olayların ölçümlerinde karşılaşılan hataların dağılımı genellikle Normal dağılıma uymakta veya Normal dağılıma yaklaşmaktadır. Bu nedenle Normal dağılımın istatistikte önemli bir yeri bulunmaktadır (Gürsakal, 2008: 536-537). Dağılımın parametreleri μ ve σ^2 olmak üzere Normal dağılıma sahip X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\sigma > 0,\ -\infty < x < \infty$ için şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.47}$$

Normal dağılımlı X rassal değişkeni kısaca $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ biçiminde gösterilmektedir. Ortalaması sıfır $(\mu = 0)$ ve varyansı bir $(\sigma^2 = 1)$ olan Normal dağılıma standart Normal dağılım adı verilmektedir. Bu dağılım $N(0,1)$ biçiminde gösterilmektedir (Aytaç, 2004: 270-278).

Normal dağılımdan rassal değişkenlik üretiminde Marsaglia ve Bray (1964) tarafından geliştirilmiş olan yöntem kullanılacaktır. Söz konusu yöntem Box ve Muller tarafından önerilmiş olan kutupsal koordinatlar yönteminin (*polar method*) geliştirilmesiyle elde edilmiştir. Kutupsal koordinatlar yönteminin birçok uygulama çeşidi bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi trigonometrik fonksiyonlar içeren Box-Muller yöntemidir. Burada aktarılacak olan Marsaglia ve Bray tarafından önerilen yöntemde ise söz konusu trigonometrik hesaplamalar çıkartılmıştır. Bunun yanı sıra bu uygulama kabul-red yöntemi içermektedir (Law ve Kelton, 2000: 465; Gentle, 2003: 173).

Yöntem uygulanırken standart Normal dağılımlı rassal değişken üretmeye odaklanılacaktır. Bunun nedeni Normal dağılımın özelliği gereği $X \sim N(0,1)$ için $X' = \mu + \sigma X$ dönüşümü uygulanarak $X' \sim N(\mu, \sigma^2)$ rassal değişkeninin elde edilebilmesidir (Fishman, 1996: 190). Söz konusu kutupsal koordinatlar yönteminin algoritması şu şekildedir (Marsaglia ve Bray, 1964: 260):

Algoritma

1. U(-1,1) dağılımından U_1 ve U_2 üretilir. $V = U_1^2 + U_2^2$ değeri tanımlanır.

2. Eğer $V \geq 1$ ise 1. adıma dönülür. Aksi halde $X_1 = U_1\sqrt{-2\ln(V)/V}$ ve $X_2 = U_2\sqrt{-2\ln(V)/V}$ değerleri elde edilir.

2.2.7. Lognormal Dağılım

Y rassal değişkeni μ ortalama ve σ^2 varyans ile Normal dağılmış olsun. Bu durumda $Z = e^Y$ rassal değişkeni aşağıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ile Lognormal dağılıma sahiptir (Fishman, 1996: 192).

$$f(z) = \frac{1}{\sigma z\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln z-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad 0 \leq z < \infty \tag{2.48}$$

Rassal değişkenlik üretebilmek için Lognormal dağılımın Normal dağılımla olan ilişkisi kullanılmaktadır. Bu nedenle uygulanacak yöntemde ilk olarak Normal dağılımlı rassal değişkenlik üretilecektir. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve Lognormal dağılımın parametreleri α, β^2 ile ifade edilmek üzere $\alpha = e^{\mu+\sigma^2/2}$ ve $\beta^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ biçiminde tanımlıdır (Law ve Kelton, 2000: 466).

Lognormal dağılımdan rassal değişkenlik üretiminde kullanılacak olan algoritma şu şekildedir (Leemis ve Park, 2006: 297):

Algoritma

1. $Y \sim N(0,1)$ üretilir.

2. $X = e^{\alpha+\beta Y}$ değeri elde edilir.

1. adımda bahsedilen Y rassal değişkeninin üretilebilmesi için bir önceki kısımda aktarılmış olan Normal dağılımdan rassal değişkenlik üretme yöntemi kullanılmaktadır.

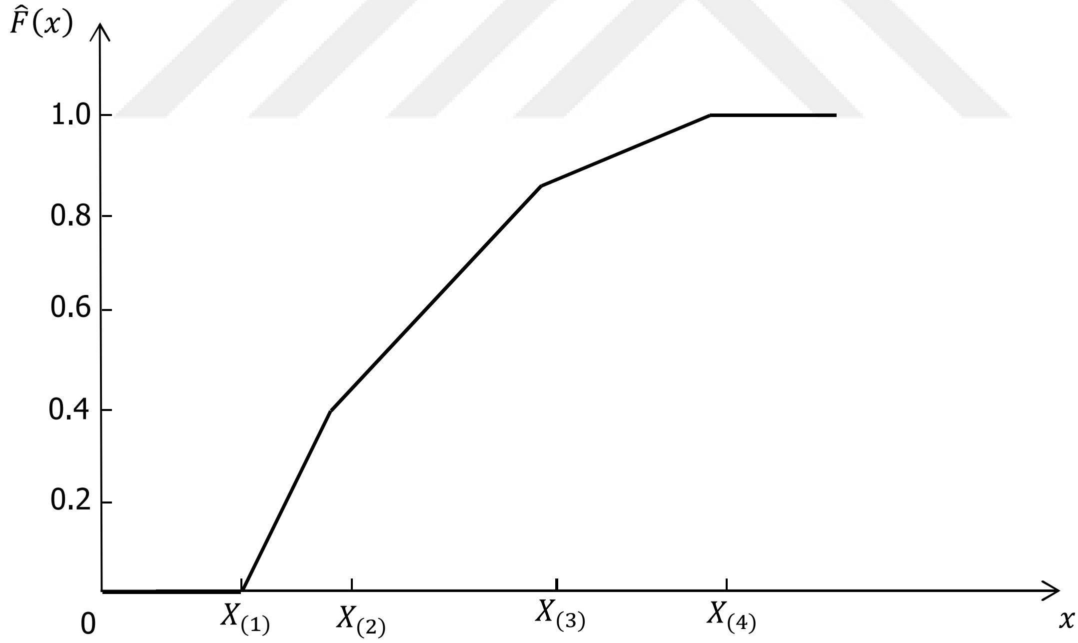
2.2.8. Deneysel Dağılımlar

Stokastik benzetim işleminde modelleme sırasında girdi olarak kullanılacak olan dağılımın seçilmesi önemli bir aşamadır. Söz konusu dağılım seçilirken parametrik yaklaşım ile verilerin uyduğu standart dağılım belirlenebilmekte ve bu dağılım kullanılabilmektedir (Hörmann vd. 2004: 306). Dağılımın seçilmesinde izlenecek başka bir yol ise gözlemlenen verileri teorik bir dağılıma uydurmak yerine direkt olarak verinin kendisinden dağılımı belirlemektir. Bu durumda kullanılan dağılıma "deneysel dağılım" adı verilmektedir (Law ve Kelton, 2000: 318).

Gözlemlenen veriler $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ biçiminde artan bir sıraya göre sıralandıktan sonra birikimli dağılım fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < X_{(1)} \\ \dfrac{i-1}{n-1} + \dfrac{x - X_{(i)}}{(n-1)(X_{(i+1)} - X_{(i)})}, & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \\ 1, & X_{(n)} \leq x \end{cases} \quad (2.49)$$

Burada $i = 1,2,\ldots,n-1$ olmak üzere $X_{(i)}$ değeri X_j'lerin en küçük i. değerini ifade etmektedir. Bunun yanı sıra her i değeri için $\hat{F}\left(X_{(i)}\right) = (i-1)/(n-1)$ biçimindedir (Law ve Kelton, 2000: 326-327). Gözlemlenen verilerin deneysel birikimli dağılım fonksiyonunun şekli $n = 4$ için Şekil 4 ile aktarılmıştır.



Şekil 4. Deneysel Birikimli Dağılım Fonksiyonu (Law ve Kelton, 2000: 327)

Deneysel dağılımdan rassal değişkenlik üretmek için ters dönüşüm yöntemi tercih edilmektedir. Ters dönüşüm yönteminin aşamaları şu şekildedir (Hörmann vd. 2004: 311):

Algoritma

1. Veriler $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ biçiminde sıralanır.

2. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

3. $J = \lfloor (n-1)U \rfloor + 1$ ve $K = (n-1)U - J + 1$ değerleri atanır.

4. $X = X_{(J)} + K(X_{(J+1)} - X_{(J)})$ değeri döndürülür.

Genel olarak $\lfloor x \rfloor$ ifadesi x'den küçük veya x'e eşit olan en büyük tamsayıyı gösterme amaçlı kullanılmaktadır (Gentle, 2003: 318). Bu şekilde üretilen X rassal değişkenleri her zaman $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$ arasında değer almaktadır. Bu durum burada uygulanan ters dönüşüm yönteminin bir dezavantajı olarak kabul edilmektedir (Law ve Kelton, 2000: 470).

2.3. KESİKLİ DAĞILIMLARDAN RASSAL DEĞİŞKENLİK ÜRETİMİ

Bu kısımda uygulamalarda sıklıkla karşılaşılan kesikli dağılımlardan rassal değişkenlik üretme yöntemlerinin aktarılması amaçlanmıştır. Sürekli dağılımlarda olduğu gibi kesikli dağılımlar için de önerilmiş olan ve kullanılan birçok algoritma bulunmaktadır. Söz konusu algoritma çeşitleri ve bu algoritmalar hakkında kapsamlı bilgi edinebilmek için Devroye (1986) kaynağı önerilmektedir. Bu kısımda sadece uygulamada kullanılacak olan algoritmaların aktarılması amaçlanmıştır.

2.3.1. Bernoulli Dağılımı

Bir deneyin "başarılı" ve "başarısız" olmak üzere iki sonucu varsa bu deneye Bernoulli deneyi adı verilmektedir. Burada "başarı" ifadesi ilgilenilen sonucun elde edildiği durumlarda kullanılmaktadır. Başka bir sonuç elde edildiğinde ise bu durum "başarısız" ifadesine karşılık gelmektedir. Başarı durumunda $X = 1$ ve başarısızlık durumunda $X = 0$ kabul edilmek üzere X Bernoulli rassal değişkeni olmaktadır. Bir deneyin başarılı sonuçlanma olasılığı p ile gösterilmek üzere Bernoulli dağılımına uyan X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu $x = 0{,}1$ için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. Dağılımının tek parametresidir p dir (Aytaç, 2004: 219-220).

$$p(x) = p^x (1-p)^{1-x} \tag{2.50}$$

Bernoulli dağılımdan rassal değişkenlik üretmek için ters dönüşüm metodu kullanılmaktadır. Söz konusu yöntem aşağıdaki algoritmada aktarılmıştır (Law ve Kelton, 2000: 472):

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. Eğer $U \leq p$ ise $X = 1$ değeri atanır. Aksi halde $X = 0$ değeri atanır.

2.3.2. Binom Dağılımı

Bir deney n defa birbirinden bağımsız olarak arka arkaya tekrarlandığında ve ilgilen sonucun başarılı veya başarısız olmak üzere iki seçeneği olduğu durumda Bernoulli dağılımının genel hali olan Binom dağılımı ortaya çıkmaktadır. Deneyde başarılı (arzu edilen) sonuç elde etme olasılığı p ve başarısız (arzu edilmeyen) sonuç elde etme olasılığı $1 - p = q$ ile ifade edilmektedir. Bu durumda $x = 0,1,2, \ldots, n$ değerleri için Binom dağılımına uyan X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu şu şekildedir:

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{2.51}$$

Dağılımın parametreleri n ve p değerleridir. Ayrıca $p = q$ durumunda simetrik olan Binom dağılımı, $p \neq q$ durumunda simetriden uzaklaşmaktadır (Aytaç, 2004: 221-222-223).

Binom dağılımından rassal değişkenlik üretebilmek için farklı yöntemleri içeren birçok algoritma önerilmiştir. Bu yöntemler ters dönüşüm, bileşim, kabul-red veya Binom dağılımı ile Bernoulli dağılımı arasındaki ilişkiye dayanarak oluşturulmuş özel yöntemler olarak sınıflandırılan yaklaşımları içermektedir (Kachitvichyanukul ve Schmeiser, 1988: 216-217). Burada ters dönüşüm yöntemi aktarılacaktır. Diğer yöntemler konusunda kapsamlı bilgi için (Kachitvichyanukul ve Schmeiser, 1988; Devroye, 1986) önerilebilir.

Ters dönüşüm yöntemi ile Binom dağılımından rassal değişkenlik üretmek için kullanılacak olan formüller $x = 0,1,2, \ldots, n$ olmak üzere şöyledir:

$$p(0) = (1 - p)^n \tag{2.52}$$

$$p(x) = p(x - 1) \frac{n - x + 1}{x} \frac{p}{1 - p} \tag{2.53}$$

Burada ters dönüşüm yöntemi algoritması BINV olarak adlandırılmaktadır ve aşamaları şu şekildedir (Kachitvichyanukul ve Schmeiser, 1988: 216):

Algoritma

1. $q = 1 - p$, $s = p/q$, $b = (n + 1)s$ ve $r = q^n$ değerleri tanımlanır.

2. U(0, 1) dağılımından U üretilir. $X = 0$ değeri atanır.

3. Eğer $U \leq r$ ise X değeri döndürülür.

4. $U = U - r$, $X = X + 1$, $r = ((b/X) - s)r$ değerleri atanır ve 3. adıma dönülür.

2.3.3. Negatif Binom Dağılımı

Bu dağılımda arka arkaya tekrarlanan Bernoulli deneylerine ilişkin k'inci başarının elde edildiği durumdaki deney sayısı ile ilgilenilmektedir. Başka bir deyişle x'inci deneyde başarının meydana gelmesi olasılığı p olmak üzere, k'inci başarının x sayıda deneyde elde edilme olasılığı incelenmektedir. Negatif binom dağılımına uyan X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu şu şekildedir:

$$p(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \ , \qquad x = k, k+1, k+2, \ldots \qquad (2.54)$$

Söz konusu dağılımın k ve p olmak üzere iki parametresi bulunmaktadır. Ayrıca bu dağılım Pascal dağılımı olarak da bilinmektedir (Freund, 1992: 196-197). Söz konusu dağılım $Negbin(k, p)$ ile gösterilecektir.

Negatif binom dağılımından rassal değişkenlik üretmek için Gamma ve Poisson dağılımlarının özelliklerinden yararlanılmaktadır. Yöntemi uygulamak için kullanılacak olan özellik şu şekildedir: Y rassal değişkeni $Gamma(k, 1)$ dağılımlı olsun. Bu durumda Y rassal değişkeni kullanılarak elde edilecek olan $Poisson(Yp/(1-p))$ dağılımlı X rassal değişkeni k ve p parametreli Negatif binom dağılımına uymaktadır (Fishman, 1996: 222). Dolayısıyla yöntem uygulanırken öncelikle Kısım 2.2.3 ile aktarılmış olan Gamma dağılımından rassal değişkenlik üretilecektir. Negatif binom dağılımında k parametresinin değer aralığı pozitif tamsayılardan oluşmaktadır. Bu nedenle burada Gamma dağılımının $\alpha > 1$ olduğu kısım ile ilgilenilecektir. Daha sonra ise elde edilen Gamma dağılımlı rassal değişken kullanılarak Poisson dağılımının parametresi belirlenmekte ve Poisson dağılımlı rassal değişken üretilmektedir. Bu dağılımdan rassal değişkenlik üretme işleminde ise Kısım 2.3.5 ile aktarılan yöntem kullanılacaktır.

Negatif binom dağılımına uyan rassal değişkenlik üretiminde kullanılacak olan yöntemin aşamaları şu şekildedir (Fishman, 1996: 222):

Algoritma

1. $Gamma(k, 1)$ dağılımlı Y rassal değişkeni üretilir.

2. $Poisson(Yp/(1-p))$ dağılımlı X rassal değişkeni elde edilir ve bu değer döndürülür.

$Negbin(1, p)$ dağılımı ile $Geom(p)$ dağılımı aynı dağılımları ifade etmektedir (Law ve Kelton, 2000: 324). Bu nedenle $k = 1$ olması durumunda bir sonraki kısımda aktarılmış olan yöntem kullanılarak $Geom(p)$ dağılımlı rassal değişkenlik üretilmektedir.

2.3.4. Geometrik Dağılım

Bir önceki kısımda aktarılmış olan Negatif binom dağılımında $k = 1$ olması durumunda bu dağılım Geometrik dağılıma uymaktadır. Başka bir ifade ile arka arkaya tekrarlanan Bernoulli deneylerinde ilk başarının elde edildiği durumdaki deney sayısı ile ilgilenilmektedir. Dolayısıyla söz konusu dağılım Negatif binom dağılımının özel bir halidir. Bu dağılım $Geom(p)$ biçiminde gösterilecektir. x'inci deneyde başarının meydana gelmesi olasılığı p olmak üzere Geometrik dağılıma uyan X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu şu şekildedir (Freund, 1992: 196-198):

$$p(x) = p(1-p)^{x-1} \;\; , \;\; x = 1,2,3, \dots \qquad (2.55)$$

Geometrik dağılımdan rassal değişkenlik üretebilmek için ters dönüşüm yöntemi kullanılmaktadır. Yöntemin algoritması şu şekildedir (Law ve Kelton, 2000: 477):

Algoritma

1. U(0, 1) dağılımından U üretilir.

2. $X = \lfloor \ln U / \ln(1-p) \rfloor$ değeri döndürülür.

2.3.5. Poisson Dağılımı

Belirlenen dar bir zaman aralığında az rastlanan olaylar bu dağılıma uymaktadır. Dolayısıyla Poisson dağılımında belli bir aralıkta görülen sonucun sayısı ile ilgilenilmektedir. Söz konusu dağılımın kullanılabilmesi için iki ayrık zaman aralığında ortaya çıkan olayların birbirinden bağımsız olması gerekmektedir. Bunun yanı sıra tanımlanan aralıkta ilgilenilen olayın ortaya çıkma olasılığının sabit olması sağlanması gereken koşullardan diğeridir. Poisson dağılımının tek parametresi $(\lambda > 0)$ bulunmaktadır. Söz konusu dağılım $Poisson(\lambda)$ biçiminde gösterilecektir. Poisson dağılımlı X rassal değişkeninin $x = 0,1,2,3,\ldots$ için olasılık fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır (Aytaç, 2004: 246-247):

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \tag{2.56}$$

Poisson dağılımdan rassal değişkenlik üretmek için kullanılan algoritmada bu dağılımın Üstel dağılım ile olan ilişkisinden yararlanılmaktadır. Söz konusu ilişki şu şekildedir: $Y_1,\ Y_2,\ \ldots$ Üstel dağılıma uyan birbirinden bağımsız rassal değişkenler olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{X+1} Y_i \geq \lambda \tag{2.57}$$

şartını sağlayan X rassal değişkeni λ parametreli Poisson dağılıma uymaktadır. Üstel dağılıma uyan rassal değişkenlik elde etmek için ters dönüşüm yöntemi kullanılmaktadır. Dolayısıyla (2.57) eşitsizliği $\sum_{i=1}^{X+1} -\log U_i \geq \lambda$ biçiminde gösterilmektedir. Söz konusu eşitsizliğin alternatif bir gösterimi ise şu şekildedir:

$$\prod_{i=1}^{X+1} U_i < e^{-\lambda} \tag{2.58}$$

Poisson dağılımından rassal değişkenlik üretiminde kullanılacak olan algoritma PM olarak adlandırılmaktadır. Algoritmanın adımları şu şekildedir (Atkinson, 1979b: 30):

Algoritma

1. $k = e^{-\lambda}$, $X = 0$, ve $m = 1$ değerleri tanımlanır.

2. U(0, 1) dağılımından U üretilir. $m = mU$ atanır.

3. Eğer $m \geq k$ ise $X = X + 1$ değeri alınır ve 2. adıma dönülür. Aksi halde X değeri döndürülür.

BÖLÜM 3. VBA UYGULAMASI

VBA (*Visual Basic for Applications*) Microsoft tarafından geliştirilmiş olan bir programlama dilidir. Bu program Microsoft Office ile birlikte gelmektedir. Dolayısıyla Excel, Access, PowerPoint vb. gibi uygulamalar VBA ile programlama yoluyla değiştirilebilmekte, düzenlenebilmektedir. Başka bir deyişle VBA ile bu yazılım paketlerinin herhangi biri için uygulamalar geliştirmek mümkündür (Sezen, 2012: 130).

Bu bölümde rassal değişkenlik üretimi konusunda Excel için VBA kodları geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bir önceki bölümde verilmiş olan algoritmaların VBA kodları aktarılacaktır. Bunun yanı sıra programın hazırlanışı ve görseli konusunda fikir vermesi için ekran görüntülerine yer verilecektir.

3.1. UYGULAMADA KULLANILAN KODLAR

```
'formun başlangıç durumundaki değerleri atanır.
Private Sub UserForm_Initialize()
'parametre değerlerinin girileceği tüm ekranlar başlangıç konumunda kapatılır.
Frame1.Visible = False
Frame2.Visible = False
Frame3.Visible = False
Frame4.Visible = False
Frame5.Visible = False
Frame6.Visible = False
Frame7.Visible = False
Frame8.Visible = False
Frame9.Visible = False
Frame10.Visible = False
Frame11.Visible = False
Frame12.Visible = False
'dağılımlar kutusu temizlenir.
ComboBox1.Clear
'dağılımlar kutusu doldurulur.
With ComboBox1
   .AddItem "Tekdüze"
   .AddItem "Üstel"
   .AddItem "Gamma"
   .AddItem "Beta"
   .AddItem "Weibull"
   .AddItem "Normal"
   .AddItem "Lognormal"
   .AddItem "Bernoulli"
   .AddItem "Binom"
   .AddItem "Negatif Binom"
   .AddItem "Geometrik"
   .AddItem "Poisson"
```

```
    .AddItem "Deneysel"
End With
'üretilmek istenen değişken adedi girilecek olan kutu temizlenir.
TextBox1 = ""
End Sub
'seçilen dağılıma göre parametre pencerelerinin açılması sağlanır.
Private Sub ComboBox1_Change()
Dim adet As Long
Select Case ComboBox1.ListIndex
'tekdüze dağılım seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 0: Frame1.Visible = True
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'üstel dağılım seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 1: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = True
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'gamma dağılımı seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 2: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = True
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'beta dağılımı seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 3: Frame1.Visible = False
```

```
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = True
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'weibull dağılımı seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 4: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = True
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'normal dağılım seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 5: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = True
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'lognormal dağılım seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 6: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = True
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False
```

```
'bernoulli dağılımı seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 7: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = True
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'binom dağılımı seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 8: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = True
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'negatif binom dağılımı seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 9: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = True
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = False

'geometrik dağılım seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 10: Frame1.Visible = False
         Frame2.Visible = False
         Frame3.Visible = False
         Frame4.Visible = False
         Frame5.Visible = False
         Frame6.Visible = False
         Frame7.Visible = False
         Frame8.Visible = False
         Frame9.Visible = False
```

```
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = True
        Frame12.Visible = False

'poisson dağılımı seçilmesi durumunda ilişkili dağılımın penceresi ekrana gelir
Case 11: Frame1.Visible = False
        Frame2.Visible = False
        Frame3.Visible = False
        Frame4.Visible = False
        Frame5.Visible = False
        Frame6.Visible = False
        Frame7.Visible = False
        Frame8.Visible = False
        Frame9.Visible = False
        Frame10.Visible = False
        Frame11.Visible = False
        Frame12.Visible = True

'deneysel dağılım seçilmesi durumunda bilgilendirme mesajı ekrana gelir
Case 12: MsgBox _
"Gözlem verilerinin 15. sütunda (O sütunu) kayıtlı olduğundan emin olun." _
& vbCrLf & "Gözlem verilerinin sayısını adet kutusuna girin. ", _
vbOKOnly, "Deneysel Dağılımlar"
End Select
End Sub

'seçilen dağılıma göre uygulanacak olan algoritma çağırılır.
Private Sub CommandButton1_Click()
Select Case ComboBox1.ListIndex
    Case 0: Call tekduzedag
    Case 1: Call usteldag
    Case 2: Call gammadag
    Case 3: Call betadag
    Case 4: Call weibulldag
    Case 5: Call normaldag
    Case 6: Call lognormaldag
    Case 7: Call bernoullidag
    Case 8: Call binomdag
    Case 9: Call negatifbinomdag
    Case 10: Call geometrikdag
    Case 11: Call poissondag
    Case 12: Call deneyseldag
End Select
End Sub

'tekdüze dağılımlı rassal değişkenlik üretimi
Sub tekduzedag()
'kullanılacak olan değişkenler tanımlanır
Dim adet As Long, i As Long, altsinir As Double, ustsinir As Double, _
rasdeg As Double, tekduzerasdeg As Double
adet = TextBox1
'adet değerinin pozitif bir sayı olması sağlanır
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
```

```
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
altsinir = TextBox2
ustsinir = TextBox3
'parametre değerlerinin doğru girilmesi kontrol edilir
If altsinir >= ustsinir Then _
adet = MsgBox("Alt sınır değeri üst sınır değerinden küçük olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Tekdüze Dağılım")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(1).ClearContents
For i = 1 To adet
   rasdeg = Rnd()
   tekduzerasdeg = altsinir + (ustsinir - altsinir) * rasdeg
   Cells(i, 1) = tekduzerasdeg
Next i
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 1. sütuna (A sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Tekdüze Dağılım"
End Sub

'üstel dağılımlı rassal değişkenlik üretimi
Sub usteldag()
Dim adet As Long, i As Long, lamda As Double, rasdeg As Double, _
ustelrasdeg As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
lamda = TextBox4
'parametre değerinin pozitif değer alması kontrol edilir
If lamda <= 0 Then _
adet = MsgBox("Parametre değeri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Üstel Dağılım")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(2).ClearContents
For i = 1 To adet
   rasdeg = Rnd()
   ustelrasdeg = -(1 / lamda) * Log(rasdeg)
   Cells(i, 2) = ustelrasdeg
Next i
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 2. sütuna (B sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Üstel Dağılım"
End Sub

'gamma dağılımlı rassal değişkenlik üretimi
Sub gammadag()
Dim adet As Long, i As Long, alfa As Double, beta As Double, _
rasdeg As Double, rasdeg1 As Double, gammarasdeg As Double, _
```

```
t As Double, p As Double, m As Double, n As Double, W As Double, _
Y As Double, Z As Double, v As Double, c As Double, r As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
 vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
alfa = TextBox5
beta = TextBox6
If alfa <= 0 Or beta <= 0 Then _
adet = MsgBox("Parametre değerleri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
 vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(3).ClearContents
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 3. sütuna (C sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Gamma Dağılımı"

'parametrenin 0 ile 1 arasında olması durumu (algoritma GS)
If alfa > 0 And alfa <= 1 Then
   t = (exp(1) + alfa) / exp(1)
   For i = 1 To adet
      rasdeg = Rnd()
      p = t * rasdeg
      If p <= 1 Then
         'Gamma(alpha,1) dağılımlı rassal değişken
         gammarasdeg = p ^ (1 / alfa)
         rasdeg1 = Rnd()
         If rasdeg1 <= exp(-gammarasdeg) Then
            'Gamma(alpha,beta) dağılımlı rassal değişken
            Cells(i, 3) = gammarasdeg * beta
         Else
            i = i - 1
         End If
      Else
         'Gamma(alpha,1) dağılımlı rassal değişken
         gammarasdeg = -Log((t - p) / alfa)
         rasdeg1 = Rnd()
         If rasdeg1 <= (gammarasdeg) ^ (alfa - 1) Then
            'Gamma(alpha,beta) dağılımlı rassal değişken
            Cells(i, 3) = gammarasdeg * beta
         Else
            i = i - 1
         End If
      End If
   Next i
End If

'parametrenin 1'den büyük olması durumu (algoritma GB)
If alfa > 1 Then
   t = 1 / (Sqr((2 * alfa) - 1))
   m = alfa - Log(4)
```

```
   n = alfa + (1 / t)
   c = 9 / 2
   For i = 1 To adet
      rasdeg = Rnd()
      rasdeg1 = Rnd()
      v = t * (Log(rasdeg / (1 - rasdeg)))
      Y = alfa * (exp(v))
      Z = rasdeg * rasdeg * rasdeg1
      W = m + n * v - Y
      If W + (1 + Log(c)) - (c * Z) >= 0 Then
         'Gamma(alpha,1) dağılımlı rassal değişken
         gammarasdeg = Y
         'Gamma(alpha,beta) dağılımlı rassal değişken
         Cells(i, 3) = gammarasdeg * beta
      ElseIf W >= Log(Z) Then
         'Gamma(alpha,1) dağılımlı rassal değişken
         gammarasdeg = Y
         'Gamma(alpha,beta) dağılımlı rassal değişken
         Cells(i, 3) = gammarasdeg * beta
      Else
      i = i - 1
      End If
   Next i
End If
End Sub

'beta dağılımlı rassal değişkenlik üretimi
Sub betadag()
Dim adet As Long, i As Long, alfa As Double, beta As Double, _
rasdeg As Double, rasdeg1 As Double, betarasdeg As Double, _
p As Double, r As Double, t As Double, k As Double, _
m As Double, v As Double, W As Double, Y As Double, Z As Double, _
b As Double, S As Double, c As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
alfa = TextBox7
beta = TextBox8
If alfa <= 0 Or beta <= 0 Then _
adet = MsgBox("Parametre değerleri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
 vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(4).ClearContents
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 4. sütuna (D sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Beta Dağılımı"

'alpha parametresinin 1'e eşit ve beta parametresinin 1'den farklı olduğu durum
If alfa = 1 And beta <> 1 Then
   For i = 1 To adet
```

```
      rasdeg = Rnd()
      betarasdeg = (rasdeg) ^ (1 / beta)
      Cells(i, 4) = 1 - betarasdeg
   Next i
End If

'beta parametresinin 1'e eşit ve alpha parametresinin 1'den farklı olduğu durum
If beta = 1 And alfa <> 1 Then
   For i = 1 To adet
      rasdeg = Rnd()
      betarasdeg = (rasdeg) ^ (1 / alfa)
      Cells(i, 4) = betarasdeg
   Next i
End If

'her iki parametrenin de 1'e eşit olduğu durum
If alfa = 1 And beta = 1 Then
   For i = 1 To adet
      betarasdeg = Rnd()
      Cells(i, 4) = betarasdeg
   Next i
End If

'parametrelerin 1'den büyük olduğu durum (algoritma BB)
If alfa > 1 And beta > 1 Then
   If alfa < beta Then
      p = alfa
      r = beta
   Else
      r = alfa
      p = beta
   End If
   t = p + r
   k = Sqr((t - 2) / (2 * p * r - t))
   m = p + (1 / k)
   For i = 1 To adet
      rasdeg = Rnd()
      rasdeg1 = Rnd()
      v = k * Log(rasdeg / (1 - rasdeg))
      W = p * exp(v)
      Z = rasdeg * rasdeg * rasdeg1
      b = m * v - Log(4)
      S = p + b - W
      If S + 1 + Log(5) >= 5 * Z Then
         If p = alfa Then
            betarasdeg = W / (r + W)
         Else
            betarasdeg = r / (r + W)
         End If
      Else
         c = Log(Z)
         If S >= c Then
            If p = alfa Then
```

```
            betarasdeg = W / (r + W)
         Else
            betarasdeg = r / (r + W)
         End If
      ElseIf b + t * Log(t / (r + W)) >= c Then
         If p = alfa Then
            betarasdeg = W / (r + W)
         Else
            betarasdeg = r / (r + W)
         End If
      End If
   End If
Cells(i, 4) = betarasdeg
 Next i
End If

'parametrelerin 1'den küçük olduğu durum
If alfa < 1 And beta < 1 Then
 t = (Sqr(alfa * (1 - alfa))) / (Sqr(alfa * (1 - alfa)) + Sqr(beta * (1 - beta)))
 r = (beta * t) / (beta * t + (alfa * (1 - t)))
 For i = 1 To adet
   rasdeg = Rnd()
   rasdeg1 = Rnd()
   Y = -Log(rasdeg1)
   If rasdeg <= r Then
      betarasdeg = t * ((rasdeg / r) ^ (1 / alfa))
      If Y >= (1 - beta) * (Log((1 - betarasdeg) / (1 - t))) Then
         Cells(i, 4) = betarasdeg
      Else
         i = i - 1
      End If
   Else
      betarasdeg = 1 - (1 - t) * (((1 - rasdeg) / (1 - r)) ^ (1 / beta))
      If Y >= (1 - alfa) * Log(betarasdeg / t) Then
         Cells(i, 4) = betarasdeg
      Else
         i = i - 1
      End If
   End If
 Next i
End If

'alpha parametresinin 1'den küçük, beta parametresinin 1'den büyük olduğu durum
If alfa < 1 And beta > 1 Then
 t = (1 - alfa) / (beta + 1 - alfa)
 r = (beta * t) / (beta * t + alfa * ((1 - t) ^ (1 / beta)))
 For i = 1 To adet
   rasdeg = Rnd()
   Y = -Log(rasdeg)
   If rasdeg <= r Then
      betarasdeg = t * ((rasdeg / r) ^ (1 / alfa))
      If Y >= (1 - beta) * Log(1 - betarasdeg) Then
         Cells(i, 4) = betarasdeg
```

```
         Else
            i = i - 1
         End If
      Else
         betarasdeg = 1 - (1 - t) * (((1 - rasdeg) / (1 - r)) ^ (1 / beta))
         If Y >= (1 - alfa) * Log(betarasdeg / t) Then
            Cells(i, 4) = betarasdeg
         Else
            i = i - 1
         End If
      End If
   Next i
End If

'beta parametresinin 1'den küçük, alpha parametresinin 1'den büyük olduğu durum
If (alfa > 1 And beta < 1) Then
   t = (1 - beta) / (alfa + 1 - beta)
   r = (alfa * t) / (alfa * t + beta * ((1 - t) ^ (1 / alfa)))
   For i = 1 To adet
      rasdeg = Rnd()
      Y = -Log(rasdeg)
      If rasdeg <= r Then
         betarasdeg = t * ((rasdeg / r) ^ (1 / beta))
         If Y >= (1 - alfa) * Log(1 - betarasdeg) Then
            Cells(i, 4) = 1 - betarasdeg
         Else
            i = i - 1
         End If
      Else
         betarasdeg = 1 - (1 - t) * (((1 - rasdeg) / (1 - r)) ^ (1 / alfa))
         If Y >= (1 - beta) * Log(betarasdeg / t) Then
            Cells(i, 4) = 1 - betarasdeg
         Else
            i = i - 1
         End If
      End If
   Next i
End If
End Sub

'weibull dağılımlımına uyan rassal değişkenlik üretimi
Sub weibulldag()
Dim adet As Long, i As Long, alfa As Double, beta As Double, _
rasdeg As Double, weibulrasdeg As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
alfa = TextBox9
beta = TextBox10
If alfa <= 0 Or beta <= 0 Then _
adet = MsgBox("Parametre değerleri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
```

```
 vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(5).ClearContents
For i = 1 To adet
   rasdeg = Rnd()
   weibulrasdeg = beta * ((-Log(rasdeg)) ^ (1 / alfa))
   Cells(i, 5) = weibulrasdeg
Next i
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 5. sütuna (E sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Weibull Dağılımı"
End Sub

'normal dağılımlı rassal değişkenlik üretimi
Sub normaldag()
Dim adet As Long, i As Long, norrasdeg As Double, norrasdeg1 As Double, _
rasdeg As Double, rasdeg1 As Double, ort As Double, var As Double, _
v As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
ort = TextBox11
var = TextBox12
If var <= 0 Then adet = MsgBox("Varyans değeri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(6).ClearContents
Columns(7).ClearContents
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 6. ve 7. sütunlara (F ve G sütunları) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Normal Dağılım"

For i = 1 To adet
   '[-1,1] aralığında rassal değişkenlik üretimi
   rasdeg = (-1) + (2) * Rnd()
   rasdeg1 = (-1) + (2) * Rnd()
   v = rasdeg * rasdeg + rasdeg1 * rasdeg1
   If v < 1 Then
      norrasdeg = ort + Sqr(var) * (rasdeg * Sqr(((-2) * Log(v)) / v))
      norrasdeg1 = ort + Sqr(var) * (rasdeg1 * Sqr(((-2) * Log(v)) / v))
      Cells(i, 6) = norrasdeg
      Cells(i, 7) = norrasdeg1
   Else
      i = i - 1
   End If
Next i
End Sub

'lognormal dağılıma uyan rassal değişkenlik üretimi
```

```
Sub lognormaldag()
Dim adet As Long, i As Long, norrasdeg As Double, norrasdeg1 As Double, _
lnrasdeg As Double, lnrasdeg1 As Double, rasdeg As Double, _
rasdeg1 As Double, alfa As Double, betakare As Double, v As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
alfa = TextBox13
betakare = TextBox14
If betakare <= 0 Then adet = MsgBox("Varyans değeri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(8).ClearContents
Columns(9).ClearContents
For i = 1 To adet
   '[-1,1] aralığında rassal değişkenlik üretimi
   rasdeg = (-1) + (2) * Rnd()
   rasdeg1 = (-1) + (2) * Rnd()
   v = (rasdeg * rasdeg) + (rasdeg1 * rasdeg1)
   If v < 1 Then
      norrasdeg = rasdeg * Sqr(((-2) * Log(v)) / v)
      lnrasdeg = exp(alfa + Sqr(betakare) * norrasdeg)
      norrasdeg1 = rasdeg1 * Sqr(((-2) * Log(v)) / v)
      lnrasdeg1 = exp(alfa + Sqr(betakare) * norrasdeg1)
      Cells(i, 8) = lnrasdeg
      Cells(i, 9) = lnrasdeg1
   Else
      i = i - 1
   End If
Next i
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 8. ve 9. sütunlara (H ve I sütunları) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Lognormal Dağılım"
End Sub

'bernoulli dağılımına uyan rassal değişkenlik üretimi
Sub bernoullidag()
Dim adet As Long, i As Long, rasdeg As Double, p As Double, _
bernoullirasdeg As Byte
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
p = TextBox15
If p <= 0 Or p >= 1 Then _
adet = MsgBox("Parametre değeri sıfır ile bir aralığında olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(10).ClearContents
```

```
For i = 1 To adet
   rasdeg = Rnd()
   If rasdeg <= p Then
      bernoullirasdeg = 1
   Else
      bernoullirasdeg = 0
   End If
   Cells(i, 10) = bernoullirasdeg
Next i
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 10. sütuna (J sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Bernoulli Dağılımı"
End Sub

'binom dağılımına uyan rassal değişkenlik üretimi
Sub binomdag()
Dim adet As Long, i As Long, rasdeg As Double, p As Double, q As Double, _
S As Double, b As Double, r As Double, binomrasdeg As Integer
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
p = TextBox17
If p <= 0 Or p >= 1 Then _
adet = MsgBox("Parametre değeri sıfır ile bir aralığında olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
n = TextBox16
If n <= 0 Then adet = MsgBox("Parametre değeri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
   Columns(11).ClearContents
   For i = 1 To adet
      q = 1 - p
      S = p / q
      b = (n + 1) * S
      r = q ^ n
      rasdeg = Rnd()
      binomrasdeg = 0
      Do While rasdeg > r
         rasdeg = rasdeg - r
         binomrasdeg = binomrasdeg + 1
         r = ((b / binomrasdeg) - S) * r
      Loop
      Cells(i, 11) = binomrasdeg
   Next i
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 11. sütuna (K sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Binom Dağılımı"
End Sub
```

```
'negatif binom dağılımına uyan rassal değişkenlik üretimi
Sub negatifbinomdag()
Dim adet As Long, negbinrasdeg As Long, poisrasdeg As Long, i As Long, _
rasdeg As Double, rasdeg1 As Double, p As Double, k As Integer, _
gammarasdeg As Double, m As Double, t As Double, Y As Double, _
b As Double, rasdeg2 As Double, a As Double, geomrasdeg As Long
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
k = TextBox18
If k <= 0 Then adet = MsgBox("k değeri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
p = TextBox19
If p <= 0 Or p >= 1 Then _
adet = MsgBox("p değeri sıfır ile bir aralığında olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(12).ClearContents
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 12. sütuna (L sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Negatif Binom Dağılımı"
'parametrenin 1'den büyük olması durumu (algoritma GB)
If k > 1 Then
  t = 1 / (Sqr((2 * k) - 1))
  m = k - Log(4)
  n = k + (1 / t)
  c = 9 / 2
  For i = 1 To adet
    rasdeg = Rnd()
    rasdeg1 = Rnd()
    v = t * (Log(rasdeg / (1 - rasdeg)))
    Y = k * (exp(v))
    Z = rasdeg * rasdeg * rasdeg1
    W = m + n * v - Y
    If W + (1 + Log(c)) - (c * Z) >= 0 Then
      'Y=gammarasdeg
      a = exp(-Y * (p / (1 - p)))
      poisrasdeg = 0
      b = 1
      rasdeg2 = Rnd()
      b = b * rasdeg2
      'poisson(lamda=Y*(p/(1-p))) dağılımlı rasdeg üretildi
      Do While b >= a
        poisrasdeg = poisrasdeg + 1
        rasdeg2 = Rnd()
        b = b * rasdeg2
      Loop
      negbinrasdeg = poisrasdeg
```

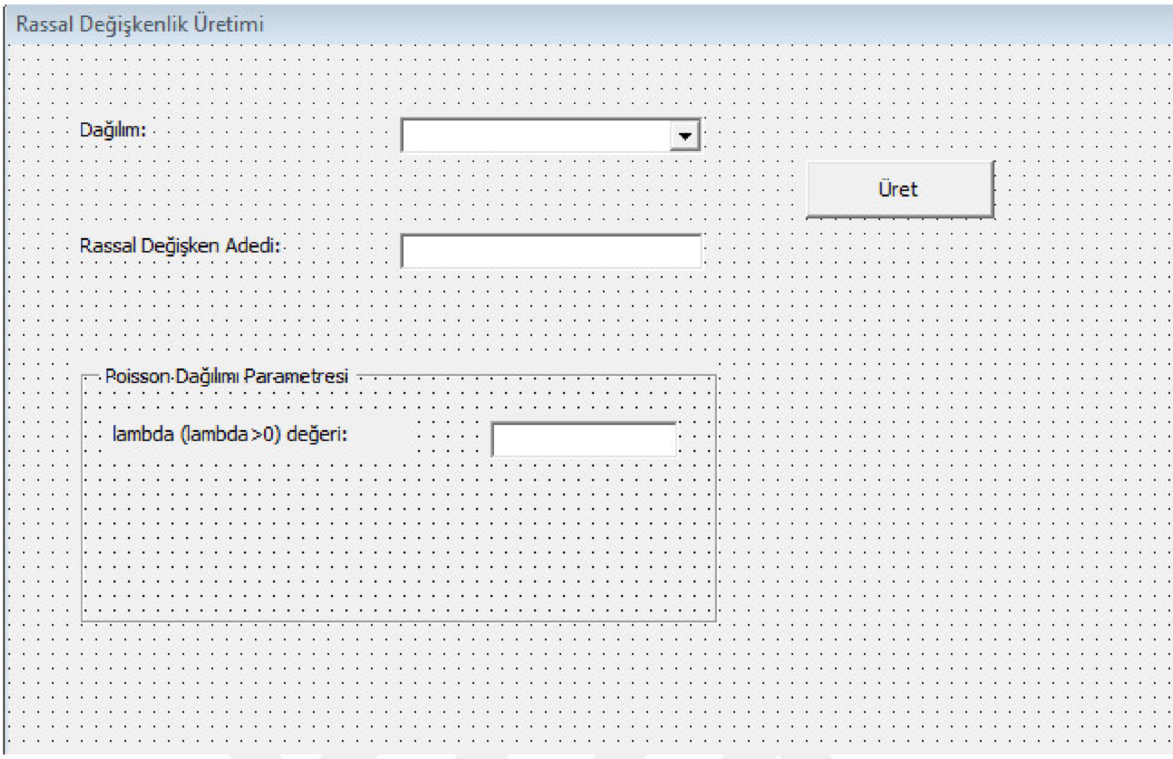
```
            Cells(i, 12) = negbinrasdeg
        ElseIf W >= Log(Z) Then
            'Y=gammarasdeg
            a = exp(-Y * (p / (1 - p)))
            poisrasdeg = 0
            b = 1
            rasdeg2 = Rnd()
            b = b * rasdeg2
            'poisson(lamda=Y*(p/(1-p))) dağılımlı rasdeg üretildi
            Do While b >= a
                poisrasdeg = poisrasdeg + 1
                rasdeg2 = Rnd()
                b = b * rasdeg2
            Loop
            negbinrasdeg = poisrasdeg
            Cells(i, 12) = negbinrasdeg
        Else
            i = i - 1
        End If
    Next i
End If

If k = 1 Then
    For i = 1 To adet
        rasdeg = Rnd()
        geomrasdeg = Int(Log(rasdeg) / Log(1 - p))
        negbinrasdeg = geomrasdeg
        Cells(i, 12) = negbinrasdeg
    Next i
End If
End Sub

'geometrik dağılıma uyan rassal değişkenlik üretimi
Sub geometrikdag()
Dim adet As Long, geomrasdeg As Long, i As Long, rasdeg As Double, _
p As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
p = TextBox20
If p <= 0 Or p >= 1 Then _
adet = MsgBox("p değeri sıfır ile bir aralığında olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(13).ClearContents
For i = 1 To adet
    rasdeg = Rnd()
    geomrasdeg = Int(Log(rasdeg) / Log(1 - p))
    Cells(i, 13) = geomrasdeg
Next i
'bilgilendirme mesajı
```

```
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 13. sütuna (M sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Geometrik Dağılım"
End Sub

'poisson dağılımlı rassal değişkenlik üretimi
Sub poissondag()
Dim adet As Long, poisrasdeg As Long, i As Long, rasdeg As Double, _
lamda As Double, k As Double, m As Double
adet = TextBox1
If adet = 0 Or adet < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
lamda = TextBox21
If lamda <= 0 Then adet = MsgBox("Parametre değeri sıfırdan büyük olmalıdır.", _
vbOKOnly, "Parametre Seçimi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(14).ClearContents
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 14. sütuna (N sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Poisson Dağılımı"
k = exp(-lamda)
For i = 1 To adet
   poisrasdeg = 0
   m = 1
   rasdeg = Rnd()
   m = m * rasdeg
   Do While m >= k
      poisrasdeg = poisrasdeg + 1
      rasdeg = Rnd()
      m = m * rasdeg
   Loop
   Cells(i, 14) = poisrasdeg
Next i
End Sub

'deneysel dağılım ile rassal değişkenlik üretimi
Sub deneyseldag()
Dim tempVar As Double, anotherIteration As Boolean, i As Integer, _
myArray() As Double, n As Long, rasdeg As Double, j As Integer, _
v As Double, denrasdeg As Double
n = TextBox1
If n = 0 Or n < 0 Then _
adet = MsgBox("Sayı adedi sıfırdan büyük bir tamsayı ile doldurulmalıdır.", _
vbOKOnly, "Rassal Değişken Adedi")
If adet = vbOK Then Exit Sub
Columns(16).ClearContents
'bilgilendirme mesajı
MsgBox _
"Üretilen rassal değişkenler 17. sütuna (Q sütunu) kaydedilmiştir.", _
vbOKOnly, "Deneysel Dağılım"
```

```
'dizinin değer aralığı yeniden tanımlanır
ReDim myArray(0 To (n - 1))
'girilen verilerin diziye aktarılması
For i = 1 To n
   myArray(i - 1) = Cells(i, "O").Value
Next i
'dizi elemanlarının artan değere göre sıralanması
Do
   anotherIteration = False
   For i = 0 To (n - 2)
      If myArray(i) > myArray(i + 1) Then
         tempVar = myArray(i)
         myArray(i) = myArray(i + 1)
         myArray(i + 1) = tempVar
         anotherIteration = True
      End If
   Next i
Loop While anotherIteration = True
For i = 0 To n
   rasdeg = Rnd()
   j = Int((n - 1) * rasdeg) + 1
   v = ((n - 1) * rasdeg) - j + 1
   denrasdeg = myArray(j - 1) + v * (myArray(j) - myArray(j - 1))
   Cells(i + 1, 17) = denrasdeg
Next i
End Sub
```

3.2. UYGULAMADA KULLANILAN FORMLAR

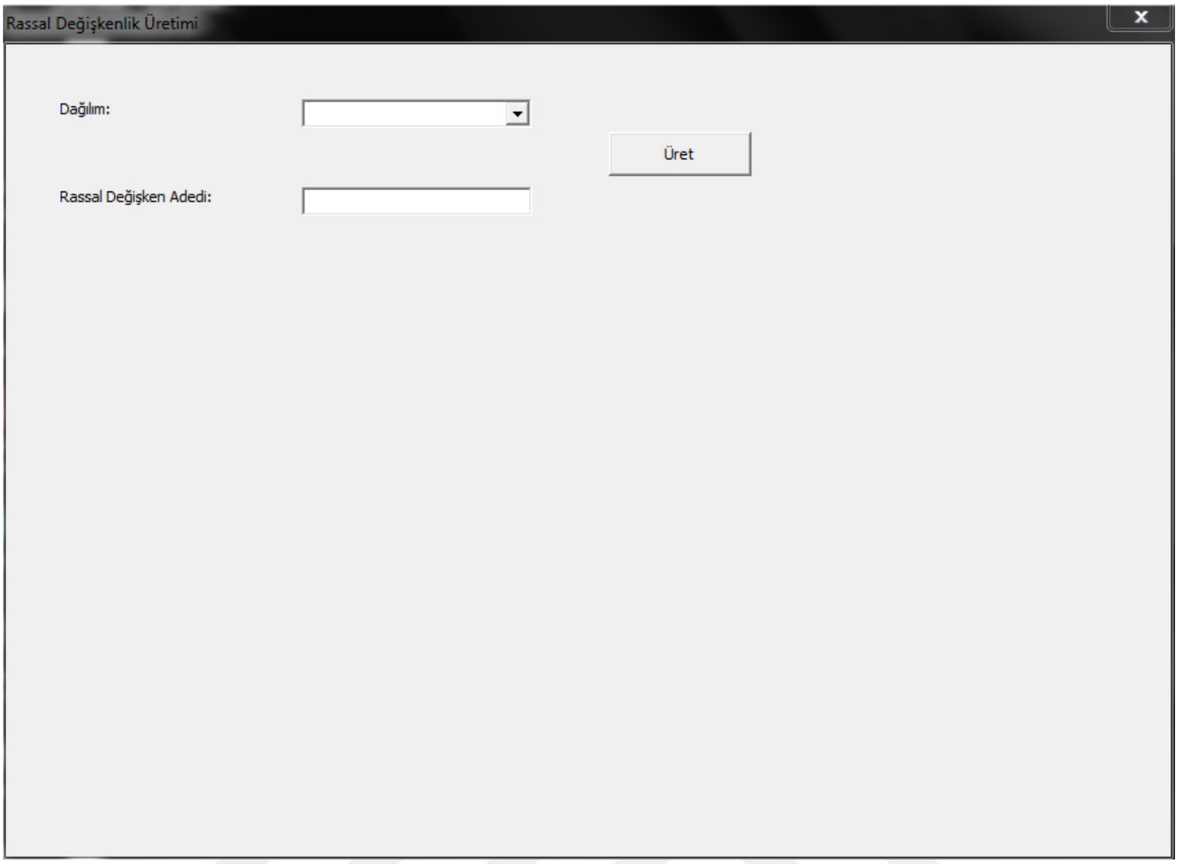
Tezin bu kısmında uygulamada kullanılan programın oluşturulma aşaması aktarılmıştır. Uygulamanın temelini oluşturan formun taslağı Şekil 5’de gösterilmektedir.



Şekil 5. VBA Form Taslağı

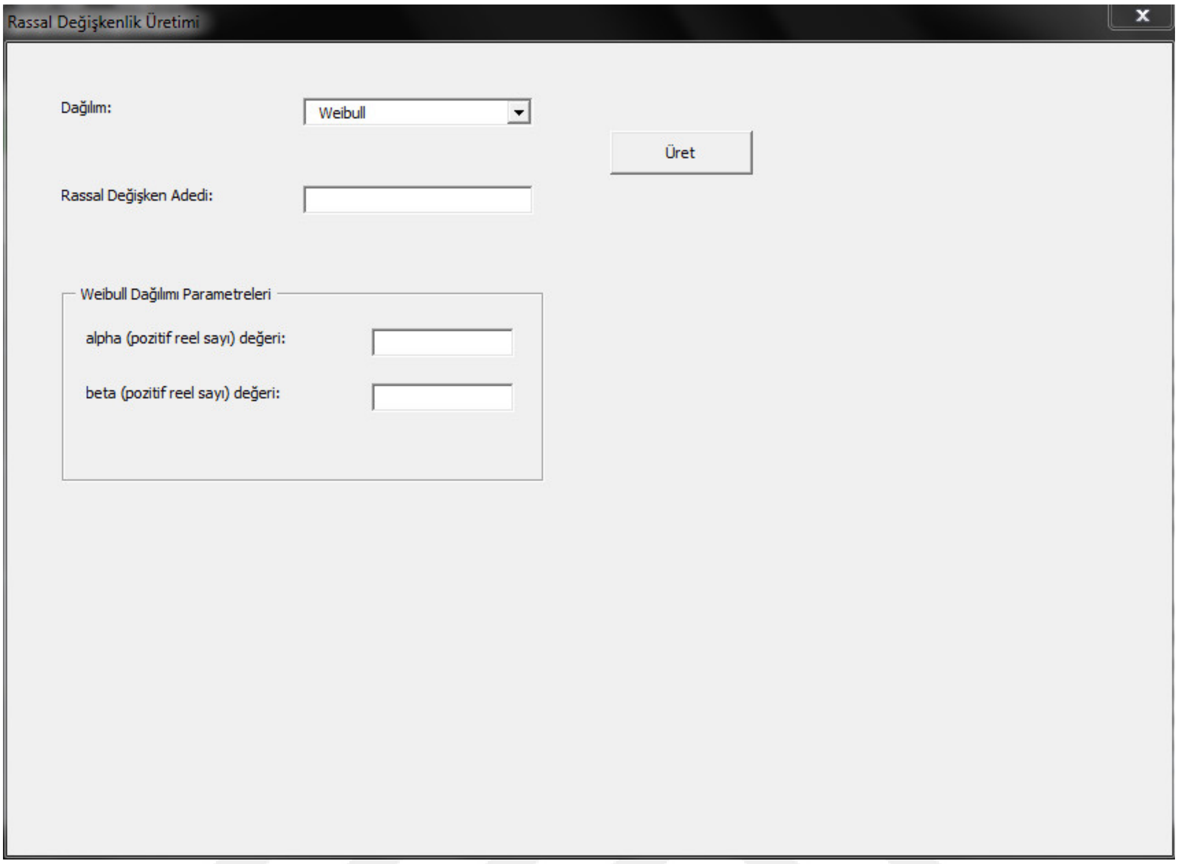
Şekilde "Poisson Dağılımı Parametresi" adı altında görülen nesne "Frame" olarak adlandırılmaktadır. Form için toplam 12 adet "Frame" nesnesi kullanılmış olup bunlar üst üste gelecek biçimde konumlandırılmıştır. Burada görülen ise 12. (sonuncu) "Frame" nesnesidir.

Uygulama çalıştırıldığında görüntülenen form ve bu formun işlevleri aşağıdaki şekillerde görülmektedir.



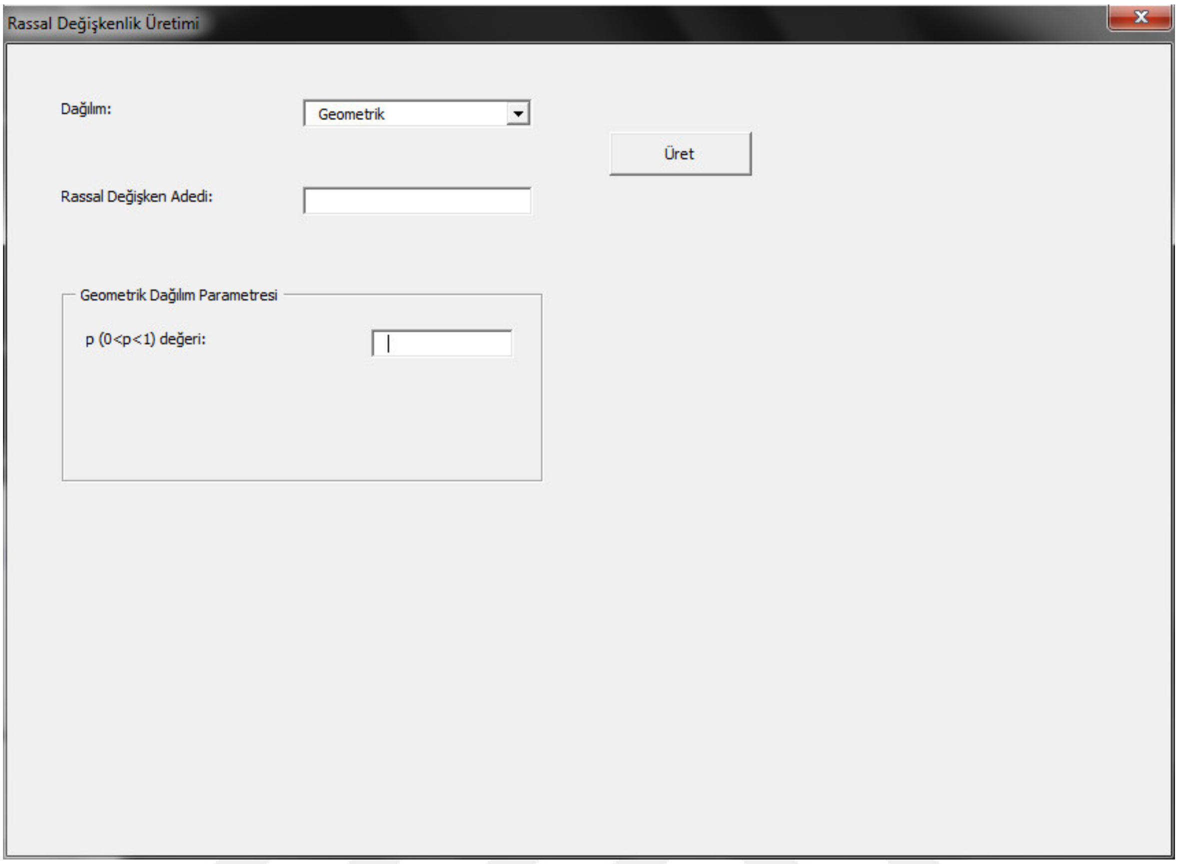
Şekil 6. Uygulamada Kullanılan VBA Formu

Şekilde görülen ve "Dağılım:" biçiminde tanımlanmış olan "ComboBox" nesnesinde, tezde detayları aktarılmış olan 13 adet dağılım bulunmaktadır. Söz konusu nesne bu dağılımlardan herhangi birinin seçimini sağlamaktadır. Seçim gerçekleştirildikten sonra form, seçilen dağılıma uygun olarak şekillenmekte ve parametrelerin belirlenmesine olanak sağlayan kısım aktif olmaktadır. Bunun nedeni her dağılımın parametrelerinin farklı tanımlanıyor olmasıdır. Seçilen dağılıma göre formun şekillenmesine ilişkin örnek Şekil 7'de gösterilmiştir. "Rassal Değişken Adedi:" biçiminde tanımlanan "TextBox" nesnesi ile üretilmek istenen dağılımdan kaç adet üretilmesi gerektiği belirlenmektedir. Bu belirleme işlemi istenen sayı adedinin girilmesi ile gerçekleştirilmektedir.



Şekil 7. Weibull Dağılımından VBA ile Rassal Değişkenlik Üretimi

Burada iki parametreye sahip Weibull dağılımının seçilmesi durumunda formun aldığı şekil gösterilmiştir. Formun dağılıma göre parametrelerin seçilmesini sağlayan görsel, "Frame" nesnesi ile oluşturulmaktadır. Dağılım seçildikten ve rassal değişken adedi girildikten sonra parametreler belirlenmektedir. Söz konusu belirleme işlemi "TextBox" nesnesi ile sağlanmaktadır. Dolayısıyla istenen parametre değerinin girişi gerçekleştirilmektedir. Dağılım seçildikten, adet ve parametreler doğru bir şekilde girildikten sonra "Üret:" biçiminde tanımlanan "CommandButton" nesnesi üretim işlemini gerçekleştirmektedir. Butona tıklanarak uygulama tamamlanmaktadır. Üretilen sayılar Excel programına kaydedilmektedir. Üretim işleminden sonra, sayıların hangi sütuna kaydedildiği belirtilmektedir. Son olarak tek parametreye sahip Geometrik dağılımın seçilmesi durumundaki formun görseli aşağıda aktarılmıştır.



Şekil 8. Geometrik Dağılımdan VBA ile Rassal Değişkenlik Üretimi

SONUÇ

Farklı dağılımlardan rassal değişkenlik üretimi belirli programlama dilleri ve yazılımlar aracılığıyla gerçekleştirilebilmektedir. Tezde, çalışma hayatında sıklıkla kullanılan Excel programı için kod geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu sayede rassal değişkenlerin kullanımını gerektiren uygulamalarda başka bir programa duyulan ihtiyacın azaltılması amaçlanmıştır.

Algoritmaların seçimi sırasında dağılımlar için önerilmiş olan algoritmalar değerlendirilmiş ve performans açısından en elverişli olan algoritma kullanılmaya çalışılmıştır. Daha sonra bu algoritmalar VBA programında kodlanmış ve rassal değişkenlik üretimi gerçekleştirilmiştir. VBA aracılığı ile üretilen değerlerin dağılımlara uygunluğunu test etme amacı ile "EasyFit" programı kullanılmıştır. Bu program ile tüm dağılımlar farklı parametre değerlerine göre kontrol edilmiştir. Sonuç olarak üretilen rassal değişkenlerin istenen dağılıma uygun olduğu gözlemlenmiştir.

Algoritmaların işlemci çalışma süreleri; kullanılan rassal değişkenlik üretme algoritmasının yapısı, buna bağlı geliştirilen bilgisayar kodları ve programlama dilinin makine diline yakınlığına bağlı olarak değişebilmektedir. Bilimsel ve mühendislik uygulama dilleriyle (C, FORTRAN, …) kodlanan algoritmalar Visual Studio.Net platformunda yer alan VB.Net, C#.Net gibi nesneye yönelik yazılım dillerine göre daha hızlı sonuç üretebilmektedir. Yöneylem Araştırması ya da işletme yönetim uygulamalarında elektronik tablo kullanım oranı çok yüksektir. Bu nedenle çalışmada yazılım dili olarak Excel için VBA tercih edilmiştir.

Kullanılan algoritmaların çalışma süreleri ile ilgili bilgi vermesi amacıyla Tablo 2 hazırlanmıştır. Bu tabloda dağılımların belirli parametre değerleri için çalışma süreleri saniye olarak aktarılmıştır. Ayrıca çalışma süresini etkileyen bir faktör olan rassal değişken adedi tabloda görülmektedir.

Tablo 2. Kodların Çalışma Süreleri

Dağılım	Rassal Değişken Adedi	1. Parametre Değeri	2. Parametre Değeri	Süre (Saniye)
Tekdüze	10.000	2	7	0,382813
Üstel	10.000	0,2	-	0,351563
	10.000	4,2	-	0,34375
Gamma	10.000	0,4	2	0,359375
	10.000	1	3,7	0,375
	10.000	4,8	3,9	0,375
	10.000	6,9	2,8	0,367188
Beta	10.000	1	0,8	0,359375
	10.000	2,5	1	0,367188
	10.000	1	1	0,351563
	10.000	7,9	6,3	0,367188
	10.000	0,3	0,2	0,375
	10.000	0,6	5,7	0,367188
	10.000	9,8	0,2	0,367188
Weibull	10.000	2,6	5,9	0,359375
	10.000	0,2	1,7	0,367188
Normal	10.000	0	1	0,742188
	10.000	5,9	8,7	0,71875
Lognormal	10.000	6,4	0,7	0,710938
	10.000	1,9	3,8	0,710938
Bernoulli	10.000	0,8	-	0,359375
	10.000	0,2	-	0,367188
Binom	10.000	30	0,5	0,382813
Negatif Binom	10.000	3,7	0,4	0,398438
	10.000	1	0,6	0,367188
Geometrik	10.000	0,3	-	0,359375
Poisson	10.000	0,2	-	0,362
	10.000	14,6	-	0,377001
Deneysel	10.000	-	-	6,79

Çalışma sürelerini belirleme amaçlı kullanılan parametre değerleri, algoritmaların parametreye göre değişme aralıkları göz önünde bulundurularak oluşturulmuştur. Bu nedenle bazı dağılımlar için (Gamma, Beta vb.) 1'den fazla parametre değeri denenmiştir.

Tabloda Normal, Lognormal ve Deneysel dağılımlar haricinde tüm dağılımların yaklaşık olarak aynı sürede çalıştığı görülmektedir. Normal ve Lognormal dağılım için bunun sebebi, üretilmek istenen rassal değişken adedinin iki katının hesaplanmasıdır. Bu ise söz konusu dağılımların algoritmasından kaynaklanmaktadır. İlgili kısımlarda da belirtildiği gibi söz konusu değişkenlerden ikişer adet üretilmektedir. Bunun sonucunda ise üretilmek istenen rassal değişken adedinin iki katı üretilmekte ve dolayısıyla iki sütun kullanılmaktadır. Deneysel dağılımda ise diğer dağılımlardan farklı olarak gözlem verileri kullanıcı tarafından girilmektedir. Daha sonra bu veriler artan değere göre sıralanmakta ve dizi elemanlarını oluşturmaktadır. Son olarak üretim gerçekleştirilmektedir. Dolayısıyla bu işlemin çalışma süresi diğer dağılımlardan fazladır.

KAYNAKLAR

AHRENS J. H., U. DIETER (1974), "Computer Methods for Sampling from Gamma, Beta, Poisson and Binomial Distributions", **Computing**, Vol. 12, Issue. 3, pp. 223-246.

ATKINSON A. C. (1979a), "A Family of Switching Algorithms for the Computer Generation of Beta Random Variables", **Biometrika**, Vol. 66, No. 1, pp. 141-145.

ATKINSON A. C. (1979b), "The Computer Generation of Poisson Random Variables", **Journal of the Royal Statistical Society**, Series C (Applied Statistics), Vol. 28, No. 1, pp. 29-35

ATKINSON A. C., J. WHITTAKER (1976), "A Switching Algorithm for the Generation of Beta Random Variables with at Least One Parameter Less Than 1", **Journal of the Royal Statistical Society**, Series A (General), Vol.139, No.4, pp. 462-467.

AYTAÇ Mustafa (1991), **Uygulamalı Parametrik Olmayan İstatistik Testleri**, Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, Bursa

AYTAÇ Mustafa (2004), **Matematiksel İstatistik**, 5.b., Ezgi Kitapevi, Bursa

BANKS Jerry, John S. CARSON and Barry L. NELSON (1996), **Discrete-Event System Simulation**, 2th ed., Prentice Hall International, Upper Saddle River, New Jersey

BANKS Jerry, John S. CARSON, Barry L. NELSON and David M. NICOL (2005), **Discrete-Event System Simulation**, 4th ed., Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ

BAYRAM Nuran (2012), **Sosyal Bilimlerde SPSS ile Veri Analizi**, 3.b., Ezgi Kitapevi, Bursa

BENNETT Deborah J. (1998), **Randomness**, Harvard University Press, Cambridge

CANKÜYER Ersoy ve Zerrin AŞAN (2005), **Parametrik Olmayan İstatistiksel Teknikler**, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir

CHENG Russell C. H. (1978), "Generating Beta Variates With Nonintegral Shape Parameters", **Communications of the ACM**, Vol: 21, Issue: 4, pp: 317-322

DAGPUNAR J. S. (2007), **Simulation and Monte Carlo: with applications in finance and MCMC**, John Wiley & Sons, New Jersey

DEVROYE Luc (1986), **Non- Uniform Random Variate Generation**, Springer-Verlag, New York

DEVROYE Luc (2006), Nonuniform Random Variate Generation, HENDERSON S. G., B. L. NELSON (Eds.),), **Handbooks in Operations Research and Management Science: Simulation** (Vol. 13), Chapter 4, Elsevier, pp. 83-121

FISHMAN George S. (1996), **Monte Carlo**, Springer-Verlag, New York

FREUND John E. (1992), **Mathematical Statistics**, 5th ed., Prentice-Hall International, New Jersey

GENTLE James E. (2003), **Random Number Generation and Monte Carlo Methods**, 2nd ed., Springer, New York

GÜRSAKAL Necmi (2008), **Betimsel İstatistik**, 4. b., Dora Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa

GÜRSAKAL Necmi (2009), **Çıkarımsal İstatistik**, 4. b., Dora Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa

HELLEKALEK Peter (1997), "A Note on Pseudorandom Number Generators", **Simulation Practice and Theory**, Vol. 5, Issue 6, p6-p8

HÖRMANN Wolfgang, Josef LEYDOLD, Gerhard DERFLINGER (2004), **Automatic Nonuniform Random Variate Generation**, Springer, Berlin

KACHITVICHYANUKUL Voratas and Bruce W. SCHMEISER (1988), "Binomial Random Variate Generation", **Communications of the ACM**, Vol. 31, Issue 2, pp: 216-222

KNUTH Donald E. (1981), **The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms**, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading Mass

LAW Averill M. and W. David KELTON (2000), **Simulation Modeling and Analysis**, 3rd ed., McGraw Hill, Boston

L´ECUYER P. (2002), Random Numbers, **The International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences**, N. J. Smelser and Paul B. Baltes (Eds.), Pergamon, Oxford

L´ECUYER P. (2012), Random Number Generation, **Handbook of Computational Statistics : Concepts and Methods**, James E. GENTLE, Wolfgang HÄRDLE and Yuichi MORİ (Eds.), Chapter 3, 2nd ed., Springer- Verlag, Berlin

LEEMIS Lawrence M. and Stephen K. PARK (2006), **Discrete-Event Simulation: a First Course**, Upper Saddle River, NJ: Pearson/Prentice Hall

MARSAGLİA George and Thomas A. BRAY (1964), "A Convenient Method for Generating Normal Variables", **SIAM Review**, Vol. 6, No. 2, pp: 260-264

NIEDERREITER Harald (1992), Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, **NSF-CBMS Regional Conference on Random Number Generation**, Vol. 63, Philadelphia: Society for Industrial and Applied mathematics

ÖZTÜRK Fikri ve Levent ÖZBEK (2004), **Matematiksel Modelleme ve Simülasyon**, Gazi Kitapevi, Ankara

PIDD Michael (2009), **Yöneylem Araştırmasında Benzetim**, Çev. Kemal Sezen, Murat Günal, Ekin Yayınevi, Bursa

RIPLEY B. D. (2009), "Thoughts on Pseudorandom Number Generators", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Vol. 31, Issue 1, pp. 153-163

SERPER Özer (2004), **Uygulamalı İstatistik**, 2. c., 5. b., Ezgi Kitapevi, Bursa

SEZEN H. Kemal (2012), **Excel 2010 & VBA**, Sentez Yayıncılık, Bursa

ÖZGEÇMİŞ				
Adı, Soyadı	Elif		ÇELİK	
Doğum Yeri ve Yılı	Bursa		1989	
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce			
ve Düzeyi	İyi			
Eğitim Durumu	**Başlama - Bitirme Yılı**		**Kurum Adı**	
Lise	2003	2007	Özel Melike Pınar Lisesi	
Lisans	2008	2013	Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	
Yüksek Lisans	2013	2015	Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Bölümü	
Doktora				
Çalıştığı Kurum (lar)	**Başlama - Ayrılma Yılı**		**Çalışılan Kurumun Adı**	
1.	2013	2014	Atak Matematik Eğitim Merkezi	
2.				
3.				
Üye Olduğu Bilimsel ve Mesleki Kuruluşlar				
Katıldığı Proje ve Toplantılar				
Yayınlar:				
Diğer:				
İletişim (e-posta):	chelikelif @gmail.com			
			Tarih **İmza** **Adı Soyadı**	