Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: V, Sayı: 2, 1990

B_n Boole Graflarının Karakteristik Polinomları ve Tayfları

Mehmet ARISOY*

ÖZET

Bu çalışmada, özvektörler ve özvektörler uzayının boyutu ile ilgili temel kavramlar kullanılarak ve B_n grafının n. ci dereceden regüler bir graf olduğu gözönüne alınarak üç teorem ispatlanmıştır. Bu teoremler B_1, B_2, B_3 graflarına uygulanarak sonuçlar tartışılmıştır. n pozitif tamsayısının, B_n grafının çokkatlılığı bir olan en büyük özdeğeri ve $-n$ negatif tamsayısının da B_n nin çokkatlılığı bir olan en küçük özdeğeri olduğu gösterilmiştir. Buradan B_1, B_2, B_3 graflarının tayflarına ve karakteristik polinomlarına[1] uygun bir genelleme yapılarak, B_n $(n \varepsilon Z^+)$ graflarının tüm tayflarının ve karakteristik polinomlarının bulunmasıyla ilgili genel formüller ortaya konulmuştur.

ABSTRACT

On The Spectrums and The Characteristic Polynomials of Boolean Graphs B_n

In this paper, three theorems are proved by using the fundamental concepts concerning with the eigenvectors and the dimension of the space of the eigenvectors and by considering that the graph B_n is a regular graph of the n^{th} degree. The results are discussed by applying these theorems to the graphs B_1, B_2, B_3. It is shown that the positive integer n is the largest eigenvalue of B_n so that the multiplicity of n

* *Yrd. Doç. Dr.; U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Balıkesir.*

is one and the negative integer $-n$ is the smallest eiegenvalue of B_n so that the multiplicity of $-n$ is one. Hence, by making a suitable generalization to the spectrums[1] and the characteristic polynomials of graphs B_1, B_2, B_3; general formulas are presented related with the discovery of the all spectrums and characteristic polynomials of graphs B_n ($n \in Z^+$).

GİRİŞ

B_n grafının tanımı ve temel özellikleri[2] (s. 5-31) de ortaya konulmuştur. Aynı zamanda B_n grafının A_n bağlantı matrisinin

$$A_n = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & I \\ \hline I & A_{n-1} \end{array}\right] \qquad (1)$$

yapısında ve simetrik bir matris olduğu[2] (s. 23) de belirtilmiştir. A_n bağlantı matrisinin belirtilen rekürsif ve simetrik yapısından yararlanılarak, bu matrisin ve dolayısıyla B_n grafının maksimal özdeğeri ile ilgili aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır. Buradaki A_n, 2^n. mertebeden ve elemanları 0 ile 1 olan bir kare matristir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Teorem 2.1: Bn grafının regülerlik derecesi olan n pozitif tamsayısı, Bn nin bir özdeğeridir.

İspat: GF (2) cismi üzerinde tanımlı, simetrik ve esas köşegeni üzerindeki tüm elemanları sıfır olan A_n matrisiyle çarpılabilen ve sıfır vektörü olmayan $V_n = ||\, 1\ 1 \ldots 1\, ||_{2^n \times 1}$ sütun vektörü dikkate alınırsa

$$A_n V_n = n.V_n \qquad (2)$$

olduğu görülür. Karakteristik polinom ve özdeğer tanımlarına göre, (2) eşitliğinin sağ tarafındaki n çarpanının A_n bağlantı matrisinin ve dolayısıyla B_n grafının bir özdeğeri olduğu ortaya çıkar. Böylece B_n grafının regülerlik derecesi olan n tamsayısının B_n nin bir özdeğeri olduğu sonucuna varılır.

Teorem 2.2: B_n grafının bir özdeğeri olan n pozitif tamsayısının çokkatlılığı 1 dir.

İspat: $U_n \neq V_n$ olmak üzere,

$$A_n U_n = n.U_n \qquad (3)$$

eşitliğini sağlayan ve sıfır vektörü olmayan bir $U_n = ||\, u_1 u_2 \ldots u_{2^n} \,||_{2^n \times 1}$ sütun vektörü gözönüne alınsın. A_n bağlantı matrisinin (1) de belirtilen rekürsif yapısı ile simetrikliği ve B_n grafının da n.dereceden regüler ve birleştirilmiş oluşu dikkate alınırsa (3) eşitliğini sağlayan U_n sütun vektörünün tüm elemanlarının eşit ($u_1 = u_2 = \ldots = u_{2^n}$) olduğu görülür. Buna göre, U_n sütun vektörünün (2) de belirtilen V_n özvektörünün bir katı olduğu ortaya çıkar. Böylece, B_n grafının n özdeğerine karşılık gelen, V_n ile U_n özvektörlerini de içeren, özvektör uzayının bir boyutlu olduğu ve bu nedenle n özdeğerinin çokkatlılığının da 1 olduğu sonucuna varılır.

Teorem 2.3: B_n grafının her λ özdeğeri için, $|\lambda| \leq n$ dir.

İspat: $\lambda \neq n$ olmak üzere,

$$A_n T_n = \lambda T_n \tag{4}$$

eşitliğini sağlayan ve sıfır vektörü olmayan bir $T_n = ||t_0 t_1 t_2 ... t_{2^n-1}||_{2^n x 1}$ sütun vektörü gözönüne alınsın. Bu sütun vektöründeki indisler B_n grafının tepe numaralarını göstermektedir. t_0, 0 nolu tepeyi; t_{2^n-1} de 2^n-1 nolu tepeyi simgelemektedir. t_i ($i = 0,1,2,....2^n-1$) tepesinin mutlak değeri olarak, i indisinin mutlak değeri düşünülerek

$$|t_0| < |t_1| < |t_2| < ... < |t_{2^n-1}| \tag{5}$$

ifadesi yazılabilir. Buna göre, T_n sütun vektörünün elemanlarından mutlak değerce en büyük olanı t_{2^n-1} dir. (4) eşitliğinden,

$$(A_n T_n)_{2^n.\ \text{satırı}} = \lambda t_{2^n-1}$$

ve buradan da

$$\sum_i t_i = \lambda t_{2^n-1} \tag{6}$$

elde edilir. (6) eşitliğindeki toplam (2^n-1) nolu tepeye bağlantılı olan, n tane i nolu tepeler üzerinedir. (6) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınarak ve mutlak değerle ilgili genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$|\lambda|\ |t_{2^n-1}| = |\sum_i t_i| \leq \sum_i |t_i| < n\ |t_{2^n-1}| \tag{7}$$

bulunur. (7) deki son eşitsizlik, (5) den faydalanılarak yazılmıştır. Böylece, $\lambda \neq n$ için, (7) den

$$|\lambda| < n \tag{8}$$

sonucu ortaya çıkar. Teorem 2.1 e göre; B_n grafının regülerlik derecesi olan n pozitif tamsayısı, B_n nin bir özdeğeri ($\lambda = n$) olduğundan ve A_n nin simetrik yapısından ($\lambda = -n$)

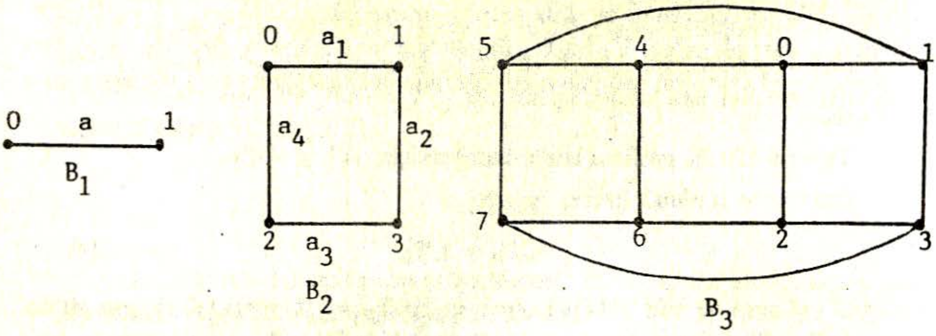
$$|\lambda| = n \tag{9}$$

dir. (8) ve (9) dan,

$$|\lambda| \leq n \tag{10}$$

sonucuna varılır.

Teorem 2.1, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 ün bir uygulaması olarak Şekil:1 de gösterilen B_1, B_2, B_3 grafların regülerlik dereceleri olan 1,2,3 tamsayılarının bu grafların çokkatlılığı 1 olan en büyük özdeğerleri olduğu aşağıda sergilenmiştir



Şekil: 1
B_1, B_2, B_3 grafları

Şekil 1'deki B_1, B_2, B_3 graflarının A_1, A_2, A_3 bağlantı matrisleri sırayla,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & I \\ \hline I & A_1 \end{array}\right]$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & I \\ \hline I & A_2 \end{array}\right] \qquad (11)$$

biçimindedir. (1) ve (11) den A_1 bilinirken A_2, A_2 bilinirken A_3, A_3 bilinirken $A_4 \ldots A_n$ bilinirken A_{n+1} bağlantı matrislerinin yazılabileceği ortaya çıkmaktadır. (11) de belirtilen A_1, A_2, A_3 matrisleri için,

$$A_1V_1 = 1.V_1, \quad A_2V_2 = 2.V_2, \quad A_3V_3 = 3.V_3 \qquad (12)$$

olduğu iki matrisin çarpımı tanımından kolayca görülür. Özdeğer ve özvektör tanımına göre, (12) deki eşitliklerin sağ taraflarındaki 1,2,3 çarpanlarının sırasıyla A_1, A_2, A_3 bağlantı matrislerinin ve dolayısıyla B_1, B_2, B_3 graflarının birer özdeğeri olduğu sonucuna varılır. Varılan bu sonuç Teorem 2.1 in B_1, B_2, B_3 grafları için sağlandığını ifade eder. Buna göre, (2) eşitliğinin $\forall\, n \in Z^+$ için sağlanacağı, A_n matrisinin rekürsif yapısına dayanan tümevarımla görülebilir.

$$U_1 = \|u_1 u_2\|,\ U_2 = \|u_1 u_2 u_3 u_4\|,\ U_3 = \|u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8\| \quad (13)$$

sütun vektörü gözönüne alınsın. (11), (13) ve $A_1U_1 = 1.U_1$ eşitliğinden,

$$u_1 = u_2 \quad (14)$$

elde edilir. (11), (13), (14) ve $A_2U_2 = 2.U_2$ eşitliğinden

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 \quad (15)$$

bulunur. (11), (13), (15) ve $A_3U_3 = 3.U_3$ eşitliğinden

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = u_8 \quad (16)$$

olduğu ortaya çıkar. Bu muhakemeye devam edilirse (3) eşitliğini sağlayan U_n sütun vektörü için

$$u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_{2^n} \quad (17)$$

olduğu görülür. (2), (3) ve (17) den B_n grafının n özdeğerinin çokkatlılığının 1 olduğu sonucuna varılır. Varılan bu sonuç, Teorem 2.2 nin Şekil: 1'deki B_1, B_2, B_3 grafları için sağlandığını ifade eder.

$T_n = \|t_0 t_1 t_2 \ldots t_{2^n-1}\|$ sütun vektöründen n = 1,2,3 için,

$$T_1 = \|t_0 t_1\|,\ T_2 = \|t_0 t_1 t_2 t_3\|,\ T_3 = \|t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7\| \quad (18)$$

elde edilir. (18), (11) ve n = 1,2,3 için (4) eşitliğini sağlayan T_1, T_2, T_3 sütun vektörleri ile (5), (6), (7) deki muhakeme dikkate alınarak,

$$|\lambda| < n,\ (n = 1,2,3) \quad (19)$$

bulunur. (9), (10) ve (19) dan

$$|\lambda| \leq n,\ (n = 1,2,3) \quad (20)$$

elde edilir. Böylece Teorem 2.3 ün Şekil: 1'deki B_1, B_2, B_3 grafları için sağlandığı görülür. (12), (17) ve (20) den; B_1, B_2, B_3 graflarının regülerlik dereceleri olan 1,2,3 tamsayılarının bu grafların çokkatlılığı 1 olan en büyük özdeğerleri olduğu ortaya çıkar.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Teorem 2.1, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 ile bu teoremlerin B_1, B_2, B_3 graflarına uygulanmasının sonucu olarak, B_n grafının regülerlik derecesi olan pozitif n tamsayısı bu grafın çokkatlılığı 1 olan en büyük özdeğeridir. Ayrıca (10) eşitsizliği

$$-n \leq \lambda \leq n \quad (21)$$

şeklinde de yazılabildiğinden, – n tamsayısının B_n grafının çokkatlılığı 1 olan en küçük özdeğeri olduğu sonucuna varılır. Teorem 2.3 ve (21) eşitsizliğine göre, B_n

grafının tüm özdeğerlerinin [–n, n] kapalı aralığında bulunması koşulu, sınırlayıcı bir koşuldur. Bu sınırlayıcı koşul B_n graflarını karakterize etmek için yeterlidir. Teorem 2.1 ve (21) den B_n grafının $K_{B_n}(\lambda)$ karakteristik polinomunun bir çarpanının $(\lambda^2 - n^2)$ olduğu ortaya çıkmaktadır. Şekil: 1'deki B_1, B_2, B_3 graflarının (11) deki A_1, A_2, A_3 bağlantı matrislerinin karakteristik polinomları

$$\det(\lambda I - A_n) \quad , \quad (n = 1,2,3) \tag{22}$$

ile hesaplanırsa,

$$K_{B1}(\lambda) = \lambda^2 - 1^2 \,,\; K_{B2}(\lambda) = (\lambda^2 - 2^2)\,\lambda^2,\; K_{B3}(\lambda) = (\lambda^2 - 3^2)\,(\lambda^2 - 1^2)^3 \tag{23}$$

olduğu görülür. (23) deki karakteristik polinomlardan herbiri ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek B_1, B_2, B_3 graflarının özdeğerleri bulunur. Bulunan özdeğerlere göre; B_1, B_2, B_3 graflarının tayfları sırayla,

$$\text{tayf } B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tayf } B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tayf } B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

dır. (24) deki tayfların ikinci satırlarındaki çokkatlılıklara dikkat edilirse, bunların sırasıyla $n = 1,2,3$ için, $(a+b)^n$ nin Binom açılımındaki katsayılar olduğu görülür. Görülen bu durum aşağıda açıklandığı gibi genelleştirilebilir. Eğer n pozitif çift tamsayı ise,

$$\text{tayf } B_n = \begin{pmatrix} n & n-2 & \ldots & 2 & 0 & -2 \ldots -(n-2) & -n \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & & \binom{n}{\frac{n-2}{2}} & \binom{n}{\frac{n}{2}} & \binom{n}{\frac{n-2}{2}} \quad \binom{n}{1} & \binom{n}{0} \end{pmatrix} \tag{25}$$

dir. Eğer n pozitif tek tamsayı ise,

$$\text{tayf } B_n = \begin{pmatrix} n & n-2 & \ldots & 1 & -1 \ldots -(n-2) & -n \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & & \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} & \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} \quad \binom{n}{1} & \binom{n}{0} \end{pmatrix} \tag{26}$$

dır. (26) daki [n/2], n/2 nin tamdeğerini ifade etmektedir. (25) ve (26) da ortaya konulan B_n grafının genel tayf özelliklerine göre, bu grafın karakteristik polinomunun aşağıdaki genel ifadeleri elde edilir. Eğer n pozitif çift tamsayı ise,

$$K_{B_n}(\lambda) = (\lambda^2 - n^2)^{\binom{n}{0}} \,(\lambda^2 - (n-2)^2)^{\binom{n}{1}} \,(\lambda^2 - (n-4)^2)^{\binom{n}{2}} \ldots (\lambda^2 - 2^2)^{\binom{n}{\frac{n-2}{2}}} \,\lambda^{\binom{n}{\frac{n}{2}}} \tag{27}$$

dır. Eğer n pozitif tek tamsayı ise,

$$K_{B_n}(\lambda) = (\lambda^2 - n^2)^{\binom{n}{0}} (\lambda^2 - (n-2)^2)^{\binom{n}{1}} \dots (\lambda^2 - 3^2)^{\binom{n}{\left[\frac{n-2}{2}\right]}} (\lambda^2 - 1^2)^{\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}} \tag{28}$$

dır. (25), (26) ve (27), (28) e göre, $\forall n \in Z^+$ için B_n graflarının tayfları ve karakteristik polinomları bulunabilmektedir. Böylece B_n graflarının genel bir karakterizasyonu elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. ARISOY, M.: B_n ve $L(B_n)$ Grafları ile İlgili Genel Bir Karakterizasyon Teoremi, Yıldız Üniversitesi Dergisi, 1990, Yayın İçin İncelemede.
2. DÜNDAR, P.: B_n Grafı Yardımıyla Boole Fonksiyonunun Minimum Kontaktla Gerçekleştirimi, E.Ü.F.F. Doktora Tezi, 1987, Bornova-İZMİR.